Quiz #1 Física de Campos

Juan Pablo González Blandón, Juan José Balvin Torres.

(Universidad de Antioquia, Facultad de ingeniería)

***Resumen*—El artículo que usted va a leer contiene la solución del campo gravitacional y potencial gravitacional de un disco con densidad de masa constante, además del análisis de ciertos casos en particular y sus respectivas gráficas, cabe recalcar que todo el material expuesto en este articulo es de uso educativo y está sujeto a errores.**

I. Introducción

EL problema planteado es el de un disco con distribución de masa constante, en el cual definimos que varia el radio y el ángulo para de esta forma plantear la integral que nos definirá como es el campo y el potencial en una partícula ubicada en el punto p. Tomamos el caso en el cual el radio tiende a infinito es decir cundo el disco se convierte en un plano infinito y analizamos los resultados obtenidos, también graficaremos la velocidad, posición y energías para de esta forma conocer el comportamiento de la partícula (se debe de tener en cuenta que en el modelo planteado solo existe el disco y el punto p en el universo) .

T

II. Planteamiento del problema

Considere un disco de radio R con densidad de masa uniforme σ tal y como se muestra en la Fig 1.

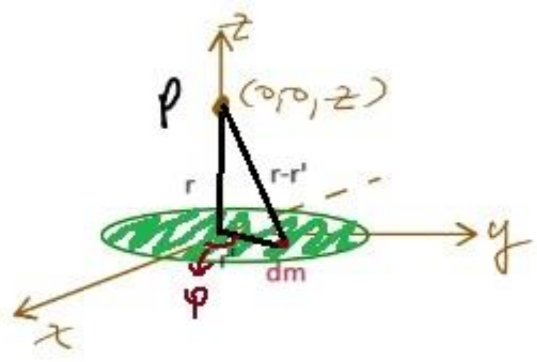

Fig. 1. Representación grafica en el plano x,y,z de el disco y el punto p además de ciertas variables a considerar para la solución del problema.

A. Facultad de ingeniería de la Universidad de Antioquia

Calcular:

1. El campo y el potencial
2. Tomar el límite cuando R tiende a infinito
3. Evaluar numéricamente el resultado
4. Graficar:
   4.1 Posición vs tiempo
   4.2 Velocidad vs tiempo
   4.3 Energía cinética vs tiempo
   4.4 Energía potencial vs tiempo
   4.5 Energía total vs tiempo

III. Solución de el problema

1. Ya que el cuerpo tiene una distribución de masa (es decir no se puede tomar como una masa puntual) plantearemos entonces la siguiente integral para calcular el campo en el punto P.

$$-G \int \frac{dm}{||r - r'||^2} e_{rr\prime}$$

Las variables de la integral están definidas como:

$$dm = \sigma r' dr' d\varphi$$

$$r' = < rcos(\varphi), rsen(\varphi), 0 >$$

$$r = < 0, 0, z >$$

$$r - r' = < -rcos(\varphi), -rsen(\varphi), z >$$

$$||r - r'|| = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

$$e_{rr'} = \frac{< -rcos(\varphi), -rsen(\varphi), z >}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

Reemplazando y resolviendo la integral (se deja que el lector realice la operación de la integral) tenemos que el campo dependerá del valor que tome z, dividiéndose así en dos casos, estos casos se deben de realizar ya que recordemos que el campo gravitacional es de carácter atractivo entonces su dirección debe de concordar con esta característica física.

$$\text{Si } z > 0: g = -2\pi G\sigma z\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)e_z$$

$$\text{Si } z < 0: g = -2\pi G\sigma z\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)e_z$$

Para hallar el potencial del campo plantearemos la siguiente integral:

$$-G\int \frac{dm}{||r - r'||}$$

$$dm = \sigma r' dr' d\varphi$$

$$||r - r'|| = \sqrt{r'^2 + z^2}$$

Reemplazando y resolviendo la integral tenemos que el potencial dependerá nuevamente del valor que tome z, entonces:

$$si\ z > 0: \emptyset = -2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right)$$

$$si\ z < 0: \emptyset = -2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2 + z^2} + z\right)$$

Como se puede apreciar tenemos campos y potenciales gravitacionales dependientes de z y de el radio R del disco, cabe recalcar que después de realizada la integral, este radio R es el radio del disco y es constante ya no es el r' que variaba anteriormente en la Fig 1.

2. Tomando el límite cuando R tiende a infinito tenemos lo siguiente:

$$g = -2\pi G\sigma$$

Podemos concluir entonces que cuando el disco se convierte en un plano infinito el campo es constante, es decir no depende de z y cualquier punto que se ubique sentirá este mismo campo.

En cuanto al potencial gravitacional tenemos lo siguiente:

$$\emptyset = -2\pi G\sigma z$$

Se puede observar claramente que el potencial dependerá de la posición de la partícula en z y que su relación es directamente proporcional.

3. Para evaluar numéricamente el resultado obtenido en el numeral anterior tomaremos como datos los de la Tierra, es decir:

$$\sigma = 1.17 \text{ x } 10^{10}\ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

$$G = 6.67 \text{ x } 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{Kg}^2}$$

Además, se mostrará un registro de los datos con tres cifras con redondeo en la Tabla 1.

z	$g = -2\pi G\sigma$	$\emptyset = -2\pi G\sigma z$
1	-4.903 m/s^2	-4.903 J/Kg
2	-4.903 m/s^2	-9.807 J/Kg
3	-4.903 m/s^2	-14.710 J/Kg
4	-4.903 m/s^2	-19.613 J/Kg
5	-4.903 m/s^2	-24.517 J/Kg

Tabla. 1. Contiene los valores del campo y el potencial para ciertos valores de z (se puede observar que para cualquier valor de z el campo es constante, tomamos el campo para el cual z > 0).

Se puede concluir de la Tabla 1 que si la tierra fuera plana la aceleración gravitacional que sentirían las personas sobre su superficie seria la mitad de la que se ha calculado hasta el momento, además de que el potencial gravitacional se comporta de forma proporcional respecto a z tal y como se esperaba

4. Graficación.

4.1 La grafica se mostrará en la Fig 2.

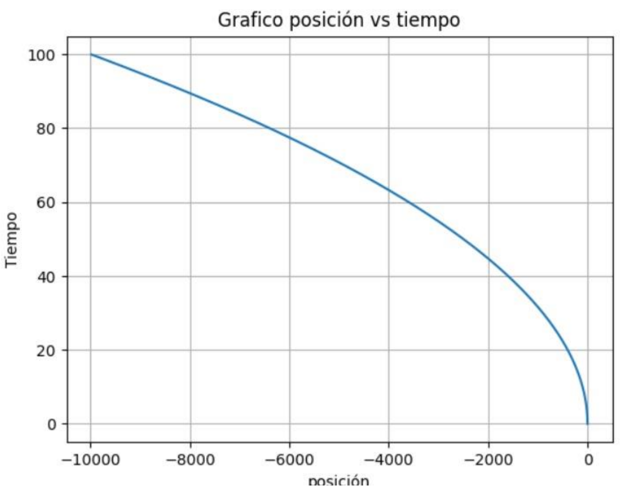

Fig. 2. Debido a que el campo representa la aceleración que experimenta la partícula, según los cálculos, el campo no tiene aceleración en x ni en y; y en z es constante por lo que se puede deducir que es un MRUA, en este

caso un movimiento parabólico.

4.2 La grafica se mostrará en la Fig 3.

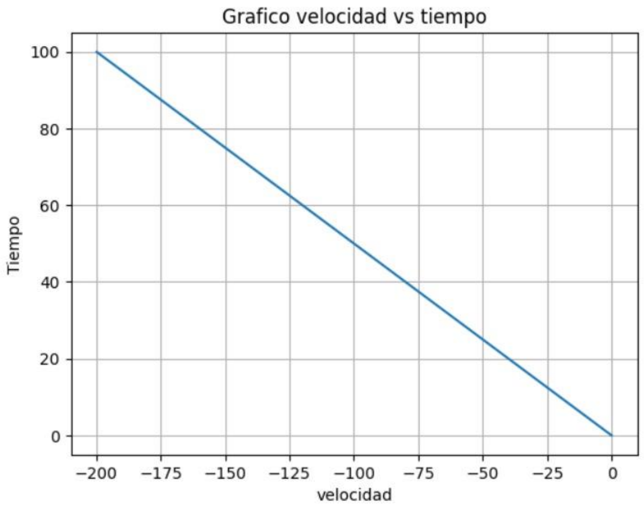

Fig. 3. En un MRUA si la aceleración es constante es evidente que la velocidad debe de cambiar con respecto al tiempo, si pensamos en el caso en el cual suelto mi partícula en una posición Z > 0 a medida que esta se acerca al plano infinito su velocidad debe de aumentar, la velocidad tiene signo negativo porque el sistema de referencia esta ubicado en el plano infinito por ende la partícula se mueve en dirección opuesta a mi sentido positivo.

4.3 La grafica se mostrará en la Fig 4.

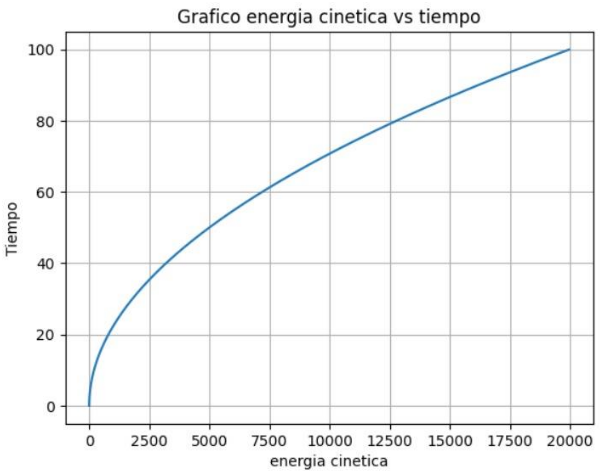

Fig. 4. Debido a que la energía cinética es proporcional a la razón de cambio de la velocidad, si esta aumenta es de esperarse que la anergia cinética también, como lo vemos en la figura.

4.4 La grafica se mostrará en la Fig 5.

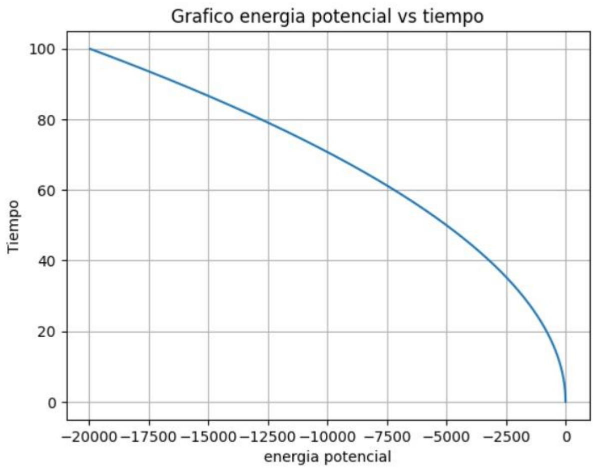

Fig. 5. Debido a que la energía potencial está definida como Ep = -Ek podemos notar que en efecto las graficas corresponden a esta definición, además debido a que la Energía potencial también esta definida como la masa de prueba por el potencial, era de esperarse que el comportamiento de dicha energía fuese de esta manera, debido a la conclusión que llegamos anteriormente acerca del potencial gravitacional.

4.5 La grafica se mostrará en la Fig 6.

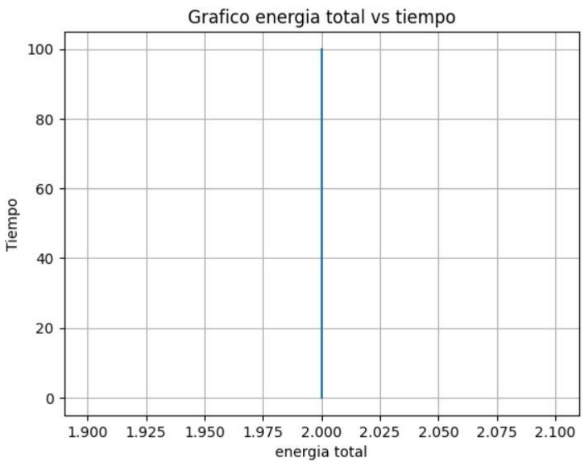

Fig. 6. Recordemos que la energía total del sistema se debe de conservar y ser constante, esta misma esta definida como la suma de la energía potencial mas la cinética, que si hacemos la suma de las graficas punto a punto, efectivamente debería de dar como resultado la constante visualizada en la figura

IV. CONCLUSIONES

Como conclusion. Podemos decir entonces que el campo de un disco cuyo radio tiende a infinito es un campo constante, es decir, no depende de la posición, además de que su potencial sí lo hará, recordemos que se debe cumplir por ser un campo conservativo. La relación de campo y potencial a través del gradiente, las gráficas expuestas corroboran y respaldan lo calculado llegando así a los resultados esperados. Cabe recalcar que la situacion planteada esta bajo un modelo idealista sin embargo es cercano y bien aproximado.

.

Las grficas mostradas en este material se realizaron con la ayuda de google colab (python), el codigo lo puede visualizar en el siguiente link:

https://colab.research.google.com/drive/1Yc7jmSMEXq9dAOxPjmovMAZJeWw7gQ4q?usp=drive_link#scrollTo=rIN6bsmknL0S