ANUALIDADES CON PAGOS EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Temas de Análisis

Pontificia Universidad Javeriana

Matemática financiera

2020

Contenido

1. Contenido
   - ¿De qué trata?
   - Ejemplo
   - Fórmulas
   - Ejercicio

¿De qué trata?

Los problemas relacionados con el valor de una anualidad cuyos pagos forman una progresión geométrica se resuelven mejor observando que el valor de la anualidad es la suma de los valores de los pagos individuales de la anualidad, y estos valores también forman una progresión geométrica. Entonces, la ecuación

$$c + cr + cr^2 + \cdots + cr^{n-1} = \frac{c(1 - r^n)}{1 - r}$$

que da la suma de una serie geométrica, puede usarse para calcular el valor deseado de la anualidad.

Ejemplo

On June 15, 1975, Roy purchased an annuity-immediate with annual payments for twenty-five years. The first payment was \$800 and the payments increased by 3% each year. The purchase price was based on an annual effective interest rate of 7%. Find this price.

Ejemplo

El precio es el valor del 15 de junio de 1975 de los pagos de la anualidad. El k-ésimo pago ocurrió k años después de que se realizó la compra y tenía un monto de $\$800(1.03)^{k-1}$. Entonces, el valor de este pago el 15 de junio de 1975 fue de $\$800(1.03)^{k-1}(1.07)^{-k}$. Por lo tanto, el valor del 15 de junio de la anualidad es

$$\sum_{k=1}^{25} \$800(1.03)^{k-1}(1.07)^{-k} = \sum_{k=1}^{25} \$800(1.07)^{-1}\left(\frac{1.03}{1.07}\right)^{k-1} =$$

$$\$800(1.07)^{-1}\left[1+\left(\frac{1.03}{1.07}\right)+\left(\frac{1.03}{1.07}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1.03}{1.07}\right)^{24}\right] =$$

$$\$800(1.07)^{-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1.03}{1.07}\right)^{25}}{1-\left(\frac{1.03}{1.07}\right)}\right) = \$800\left(\frac{1-\left(\frac{1.03}{1.07}\right)^{25}}{1.07-1.03}\right) \approx \$12,284.46.$$

Ejemplo

En el ejemplo anterior, la tasa del 3% significaba que cada pago era por un monto 1.03 veces mayor que el pago anterior. Por otro lado, para calcular el valor presente de un pago, multiplicamos por $\frac{1}{1.07}$ adicional más allá de lo que necesitábamos para calcular el valor presente del pago anterior; Esto se debió a que necesitamos recuperar el valor un año más. Por lo tanto, al observar los valores actuales de los pagos, encontramos que formaron una secuencia donde cada término era $\frac{1.03}{1.07}$ veces el término anterior. Su suma, por lo tanto, era una serie geométrica.

En términos más generales, suponga que una anualidad tiene pagos donde cada pago es $1 + g$ veces su predecesor. Además denote i como la tasa de interés efectivo, y si la anualidad es una anualidad de duración inmediata por n períodos de pago con el pago inicial P, entonces el valor de la anualidad un período antes del primer pago es

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n} P(1+g)^{k-1}(1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{n} P(1+i)^{-1}\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{k-1} =$$

$$P(1+i)^{-1}\left[1+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n-1}\right] =$$

$$P(1+i)^{-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}\right) = P\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}}{i-g}\right)$$

Por otro lado, si $i=g$ entonces

$$\left[1+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n-1}\right] = 1+1+\cdots+1 = n$$

Fórmulas

Si $j = \frac{i-g}{1+g}$, entonces

$$v_j = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{1+\frac{i-g}{1+g}} = \frac{1}{\frac{(1+g)+(i-g)}{1+g}} = \frac{1+g}{1+i}$$

y el valor de la anualidad un período antes de que el primer pago sea dado por

$$P(1+i)^{-1}\left(\frac{1-v_j^n}{1-v_j}\right) = P(1+i)^{-1}\ddot{a}_{\bar{n}|j}$$

Por tanto, si $i = g$, tenemos

$$nP(1+i)^{-1}$$

Ejercicio

On January 1, 2002, Andrea inherits a perpetuity-immediate with annual payments. The first payment is \$2,000 and after that the payments increase by 2% each year. Find the value of this perpetuity on January 1, 2002 if the annual effective rate of interest is 3% from January 1, 2002 through January 1, 2009 and 4% thereafter.

Indicando los montos de pago en miles de dólares, un diagrama de tiempo para este problema es el siguiente:

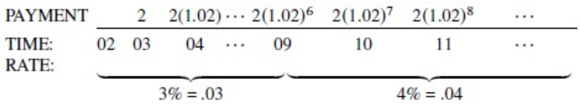

Figure: Diagrama

El valor del 1 de enero de 2002 de los pagos que ocurren en 2003 a 2009 es

$$\$2000\,(1.03)^{-1}\left[1+\left(\frac{1.02}{1.03}\right)+\left(\frac{1.02}{1.03}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1.02}{1.03}\right)^6\right]=$$
$$\$2000(1.03)^{-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1.02}{1.03}\right)^7}{1-\left(\frac{1.02}{1.03}\right)}\right)=\$2000\left[1-\left(\frac{1.02}{1.03}\right)^7\right]\approx\$13,202.68689.$$

El valor del 1 de enero de 2002 de la perpetuidad diferida que comienza con el pago de 2010 es

$$(1.03)^{-7}\$2000(1.02)^7(1.04)^{-1}\left[1+\left(\tfrac{1.02}{1.04}\right)+\left(\tfrac{1.02}{1.04}\right)^2+\cdots\right]=$$
$$(1.03)^{-7}\$2000(1.02)^7(1.04)^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1.02}{1.04}}\right)\approx \$93,398.65656$$

Por lo tanto, la herencia de Andrea tiene un valor del 1 de enero de 2002 de aproximadamente \$13,202.68689. + \$93,398.65656 = \$106,601.34

Gracias