ANÁLISIS NUMÉRICO
Universidad Industrial de Santander

Tercer Trabajo

Profesor: Juan Carlos Basto Pineda — 15 de marzo de 2019

La expansión acelerada del Universo

Ley de Hubble-Lemaitre

Desde hace más de un siglo es un hecho conocido que el Universo se encuentra en expansión. La principal evidencia proviene de la observación que, en media, las demás galaxias se alejan de nosotros a una velocidad (v) que es proporcional a su distancia (d):

$$v = H_0 \times d\,.$$

El parámetro de proporcionalidad, H_0, es conocido como constante de Hubble y mide la tasa de expansión del Universo hoy. Además recuerde que velocidad es distancia sobre tiempo, de donde se define el tiempo de Hubble como $t_0 = \frac{1}{H_0}$, que en primera aproximación nos da una estimación a la edad del Universo[1].

La ley de Hubble-Lemaitre fue una observación clave para descubrir la expansión del Universo, pero no piense que somos el centro de dicha expansión. De hecho, un observador en cualquier otra galaxia vería a las demás galaxias alejándose de sí según la misma ley.

Medidas de distancia y velocidad de las galaxias

Note que las cantidades mencionadas arriba, distancia y velocidad, no pueden ser medidas de forma directa en el caso de las galaxias. En realidad estas son inferidas a partir de otras cantidades que sí pueden ser observadas directamente.

En el caso de la distancia, lo que podemos medir es el brillo aparente (I_{obs}) de un objeto cuyo brillo intrínseco es conocido (I_0), como una supernova tipo IA, de forma que la disminución en su brillo nos permite calcular a qué distancia se encuentra. Esta se llama la distancia luminosidad, D_L:

$$I_{obs} = \frac{I_0}{4\pi D_L^2}\,.$$

[1] Sería el tiempo necesario para que cada galaxia se haya alejado hasta su distancia presente si siempre se hubiera alejado a la velocidad actual

En la práctica el brillo de los objetos astronómicos suele medirse en una escala logarítmica conocida como *magnitud*. El brillo verdadero del objeto define su magnitud absoluta, M, y el brillo observado en la Tierra su magnitud aparente, m. La resta de las dos magnitudes define el llamado módulo de distancia, μ, que se relaciona con D_L así:

$$m - M = \mu = 5\, log_{10}(D_L) + 25\,.$$

En el caso de la velocidad, lo que medimos en realidad es el cambio en la frecuencia de la luz debido al efecto Doppler. Si una galaxia se aleja, su luz nos llega con longitudes de onda (λ_{obs}) mayores de las que realmente están siendo emitidas (λ_{em}), es decir, la luz arriba de un color más rojo que el original. En su interpretación más simple, el corrimiento al rojo de la luz, z, nos dice la velocidad a que se aleja la fuente comparada con la velocidad de la luz, c:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v}{c}\,.$$

Variaciones en la tasa de expansión del Universo

Al observar galaxias cada vez más distantes se descubrió que la ley de Hubble-Lemaitre perdía validez, lo cual se debe a que la tasa de expansión del Universo no ha sido siempre la misma [2]

Para entender el porqué debemos notar, en primer lugar, que el corrimiento al rojo asociado a la expansión no es generado en realidad por la velocidad con que se alejan las galaxias, sino debido a que a medida que la luz viaja en el espacio el propio espacio se estira, haciendo que los frentes de onda se separen. Es interesante notar que $1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}}$, lo que equivale al cociente entre el tamaño del Universo hoy y el tamaño que tenía cuando la galaxia observada emitió su luz. El corrimiento al rojo es un "*reloj*" que nos dice qué momento de la historia del Universo estamos viendo al observar una galaxia, pero es un reloj basado en la escala del Universo, no en una medida directa de tiempo.

Por otro lado, la distancia luminosidad D_L es una medida de la distancia efectivamente recorrida por la luz desde su origen hasta alcanzarnos, la cual podría ser mayor o menor para un determinado corrimiento al rojo, dependiendo de la aceleración o desaceleración de la expansión durante el tiempo que haya durado el viaje de la luz. Por lo tanto, en un Universo con una tasa de expansión variable la relación entre z y D_L no sería estrictamente lineal, explicando por qué los datos se desvían sistemáticamente de la ley de Hubble-Lemaitre a medida que el corrimiento al rojo aumenta.

[2] El subíndice en H_0 significa que la ley de Hubble-Lemaitre sólamente es válida para el universo local, es decir, en el tiempo presente ($z = 0$).

Las ecuaciones de Friedmann-Lemaitre

Felizmente, la evolución de un Universo homogéneo e isotrópico en expansión se puede estudiar de forma analítica a través de las ecuaciones de Fiedmann-Lemaitre, las cuales surgen naturalmente de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, la mejor descripción que poseemos para explicar la interacción entre el tiempo, el espacio y la fuerza de la gravedad. Dichas ecuaciones permiten predecir, por ejemplo, la relación exacta entre la distancia luminosidad y el corrimiento al rojo según la cantidad de materia y energía existentes en el Universo:

$$D_L(z) = \begin{cases} \frac{(1+z)c}{H_0}\frac{1}{\sqrt{|\Omega_K|}}\sin\left(\sqrt{|\Omega_K|}I\right) & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda > 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0}I & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0}\frac{1}{\sqrt{|\Omega_K|}}\sinh\left(\sqrt{|\Omega_K|}I\right) & , \text{ si } \Omega_M + \Omega_\Lambda < 1 \end{cases} \tag{1}$$

En este conjunto de ecuaciones Ω_M representa el porcentaje de la energía del Universo que está compuesto por materia; Ω_Λ representa el porcentaje de la energía del Universo en forma de energía oscura, la misteriosa *quintaesencia* que proporciona la "*gravedad negativa*" para que el universo se expanda; finalmente Ω_K representa la curvatura del Universo: si es igual a 0 quiere decir que el Universo es plano, y mayor/menor a 0 corresponde con modelos de Universo abierto/cerrado, respectivamente. Aunque hay algunas componentes adicionales (radiación, neutrinos), estas 3 son las que dominan el comportamiento de la expansión, y se relacionan mediante $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$. En cuanto a la variable I, esta resulta de integrar los diferenciales de distancia recorridos por la luz en función del corrimiento al rojo, desde el momento en que fue emitida hasta hoy ($z = 0$), y está dada por:

$$I = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2}}dz\,.$$

Determinación de parámetros cosmológicos

Observe nuevamente la ec. (1) y note que, si se mide la distancia de luminosidad y los corrimientos al rojo para un conjunto numeroso de objetos, un ajuste del mejor modelo dado por la ec. (1) a los datos nos permitiría estimar los valores de Ω_M, Ω_Λ en nuestro Universo, arrojando luz sobre su cantidad de materia y energía oscura y sobre cuál ha sido la historia de su expansión (acelerada o desacelerada). Además, podríamos saber si la expansión del Universo seguirá para siempre, o si alcontrario la misma se irá frenando y el Universo comenzará a compactarse de nuevo, terminando en un "*big crunch*" (lo contrario del "*big bang*"). El primer caso ocurrirá si la energía oscura domina, y el segundo si lo hace la cantidad de materia.

Supernovas y parámetros cosmológicos

Un gran salto en la cosmología moderna se dió gracias al descubrimiento que las supernovas tipo IA son *velas estándar* [3] , es decir, todos los objetos de este tipo poseen el mismo brillo intrínseco ($M = -19,31$). Por lo tanto, al medir el brillo aparente (i.e., medido en la Tierra) de una estrella supernova, podemos calcular la distancia de luminosidad hasta la galaxia en que habita. Adicionalmente, con observaciones espectrométricas es posible conocer el corrimiento al rojo del mismo objeto, por lo cual las supernovas tipo IA ofrecen una oportunidad perfecta para determinar los valores de Ω_M y Ω_Λ, siempre y cuando se cuente con datos sobre un amplio rango de corrimientos al rojo, y en número suficiente para discriminar entre modelos cosmológicos con un alto grado de confianza estadística.
De hecho, este tipo de estudio otorgó el premio Nobel de física en 2011 a los líderes de 3 grupos de investigación por el uso de súper novas para demostrar que el Universo es plano y posee $\Omega_M = 0{,}28$, $\Omega_\Lambda = 0{,}72$. Según estas conclusiones vivimos en un Universo dominado por los efectos de la energía oscura hoy, lo que hace que la expansión del Universo se esté acelerando cada vez más y, por ahora, no existen razones para creer que se detendrá en el futuro.

[3] En realidad no son velas estándar sino velas *estandarizables*, sus brillos se pueden igualar tras aplicar una pequeña corrección individual

Ejercicios

1. La siguiente lista incluye las observaciones originales utilizadas por Hubble en 1929. Mediante un ajuste lineal por mínimos cuadrados determine la constante H_0 tal y como fue anunciada en esa época. Tenga en cuenta que la recta ajustada debe pasar por el punto $(0,0)$, y que las unidades de H_0 deben ser $\frac{km/s}{Mpc}$, para ser más significativas desde un punto de vista físico. Muestre en un gráfico su ajuste y los datos originales.

   Table I. Hubble-1929

Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)	Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)	Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)
SMC	0.032	+170	5194	0.5	+270	1055	1.1	+450
LMC	0.034	+290	4449	0.63	+-200	7331	1.1	+500
6822	0.214	-130	4214	0.8	+300	4258	1.4	+500
598	0.263	-70	3031	0.9	-30	4151	1.7	+960
221	0.275	-185	3627	0.9	+650	4382	2.0	+500
224	0.275	-220	4826	0.9	+150	4472	2.0	+850
5357	0.45	+200	5236	0.9	+500	4486	2.0	+800
4736	0.5	+290	1068	1.0	+920	4649	2.0	+1090

   SMC = Small Magellenic Cloud; LMC = Large Magellenic Cloud; All object numbers are preceded by "NGC." 1 parsec = 3.26 light years; 1 Mpc = megaparsec = 10 parsees.

   A partir del ajuste hecho determine el tiempo de Hubble inferido en 1929. ¿Qué podría decirse del hecho que entonces ya era conocida la edad de algunos aglomerados globulares, la cual es del orden de 9000 millones de años?

2. En 1936, Humason volvió a calcular la constante H_0 aprovechando el advenimiento de nuevos datos, incluyendo varias galaxias más distantes. Repita los pasos del punto anterior para una combinación de los datos originales y los nuevos, compare y comente.

3. Realice una última estimación de la constante de Hubble a partir del siguiente conjunto de datos, mucho más actuales, provenientes del telescopio espacial Hubble. Compare el resultado con los resultados obtenidos en los puntos anteriores, y con el valor de H_0 más aceptado en la actualidad, igual a 68 km s^{-1}.

4. Obtenga la compilación de supernovas en la página http://supernova.lbl.gov/Union/ La tabla aparece como *Union2.1 Compilation Magnitude vs. Redshift Table (for your own cosmology fitter)*. Esta es una compilación de medidas de supernovas tipo IA a bajos y altos redshifts, obtenidas en el marco del *Supernova Cosmology Project* gracias a un esfuerzo coordinado de los mayores observatorios del mundo. De esa tabla nos interesan 3 columnas: la segunda tiene los redshifts de las supernovas, la

Table II. Humason - 1936

Cluster	Vd. (km/s)	Dist. (Mpc)	Cluster	Vd. (km/s)	Dist. (Mpc)	Cluster	•Vel. (km/s)	Dist. (Mpc)
Virgo	890	1.6	Leo	19,600	35.1	Anon 5	19,000	34.0
Pegasus	3,810	6.8	7814	1,000	1.8	Anon 6	42,000	75.3
Pisces	4,630	8.3	7868	5,700	10.2	Anon 7	15,400	27.6
Cancer	4,820	8.6	7869	6,700	12.0	Anon 9	39,000	69.9
Perseus	5,230	9.4	7872	7,000	12.5	Anon 10	21,000	37.6
Coma	7,500	13,4	Gem	24,000	43.0	Anon 11	9,200	16.5
U.Maj.	11,800	21.1	Gem	23,000	41.2	Anon 12	12,400	22.2

"NGC" precedes the 7814, 7868, 7869, and 7872.

DISTANCE, *d* (Mpc)	**VELOCITY, *v* ($\mathbf{kms^{-1}}$)**
15	1 100
97	6 700
32	2 400
145	10 700
50	3 100
122	9 900
58	4 300
91	5 300
120	9 000
93	7 500
158	8 900
64	5 300
145	9 600
61	3 300
103	5 100
46	3 600
34	1 800
185	9 500
20	1 200

Figura 1: Datos para el punto No. 3

tercera tiene el módulo de distancia observado para cada una, y la tercera es el error en el módulo de distancia. Este error incluye efectos estadísticos y sistemáticos, y vamos a tratarlo como la incertidumbre 1-*sigma* de cada medida, suponiendo que cada medida proviene de una distribución gaussiana.

5. Grafique μ Vs z, incluyendo las barras de error para μ. En el mismo gráfico muestre el modelo teórico esperado para un Universo sin energía oscura (con $\Omega_M = 0{,}3$), un Universo con exceso de energía oscura ($\Omega_M = 0{,}3$, $\Omega_\Lambda = 1{,}0$), y el modelo estándar ΛCDM (plano y con $\Omega_M = 0{,}28$, $\Omega_\Lambda = 0{,}72$). Comente. Mencione también qué parte de este gráfico correspondería a la ley de Hubble-Lemaitre inferida en el tercer punto, y si esta ley se observa como esperaba.

6. Obtenga el mejor ajuste para los parámetros cosmológicos Ω_M, Ω_Λ y Ω_K mediante una minimización del error cuadrático entre los modelos de la ecuación (1) y los datos, teniendo en cuenta el error en las mediciones. Explique claramente la metodología seguida y anexe sus códigos comentados generosamente.

7. Recalcule los mejores parámetros cosmológicos mediante una rutina tipo Monte-Carlo Marcov chain. Muestre las secuencias obtenidas en un gráfico de Ω_M Vs Ω_Λ, y compare los resultados con el punto anterior.

8. Mapee y grafique el comportamiento del residuo cuadrático χ^2, teniendo en cuenta los errores, al recorrer exhaustivamente el espacio de parámetros para $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\mu_i - model_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Ahora, teniendo en cuenta que los errores se pueden considerar como siguiendo una distribución gaussiana, recuerde que para un par de parámetros $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ el *likelihood* de ese modelo se puede estimar como $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda) \propto e^{-\frac{\chi^2}{2}}$, lo cual por su vez es proporcional al posterior si se ha utilizado un prior constante. Esto significa que, en principio, los intervalos de confianza se pueden obtener directamente de la matriz de χ^2 evaluada. Utilice la siguiente tabla para determinar los intervalos de confianza en el caso de modelos con dos parámetros e identifíquelos gráficamente:

Intervalo	Δ_χ^2
68.3 %	2.3
90 %	4.61
95.4 %	6.17
99 %	9.21

9. Utilice la matriz de χ^2 del punto anterior para construir la función de densidad de probabilidad bidimensional $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. Marginalice sobre cada uno de los parámetros para obtener las funciones de densidad de probabilidad unidimensionales $P(\Omega_M)$

y $P(\Omega_\Lambda)$ separadamente. Aplique un ajuste gaussiano a cada una de estas para determinar el mejor valor de cada parámetro y su incertidumbre (la desviación estándar de la gaussiana ajustada).

10. Repita los dos puntos anteriores utilizando solamente las súper novas con $redshift$ $z < 0{,}3$. ¿Cómo cambian los mejores parámetros y los intervalos de confianza? ¿Qué tan importantes son los datos de las súper novas a alto $redshift$ para determinar los parámetros cosmológicos?

11. Volviendo al conjunto de datos completo, tome el mejor par de parámetros $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ del punto 7) y varíelos en $\pm 1\,\%$, $\pm 5\,\%$ y $\pm 20\,\%$. Haga una tabla con los *likelihoods* obtenidos y determine cuáles de los modelos obtenidos son consistentes con los datos, y cuáles pueden ser descartados desde un punto de vista estadístico al ser comparados con el modelo más plausible.

Algunas referencias útiles

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Accelerating_expansion_of_the_universe`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law#Shape_of_the_universe`
- `https://www.harding.edu/jmackey/ps113/exercises/hubble%20law(long).pdf`
- `http://www.aip.de/groups/soe/local/numres/bookcpdf/c15-6.pdf`
- `http://astronomy.swin.edu.au/~cblake/StatsLecture3.pdf`

Notas adicionales

En todos los ajustes relativos a las súper novas, asigne una probabilidad nula a las combinaciones de $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ que caigan en cualquiera de los siguientes casos:

$$\Omega_\Lambda - \frac{4}{3}\Omega_M > 1 \quad ; \quad \Omega_\Lambda - \frac{3}{2}\Omega_M < -4{,}5 \quad ; \quad \Omega_M < 0 \quad ; \quad \Omega_M > 3 \quad ; \quad \Omega_\Lambda < -3 \quad ; \quad \Omega_\Lambda > 3$$