CÁLCULO III

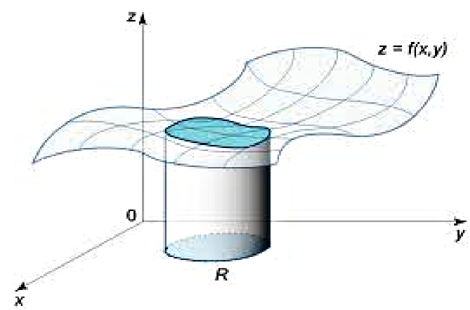
Segundo Examen (Tema 4)
16 de abril, 2018

Nombre:	Código:

Tiempo máximo: 1h40m

INSTRUCCIONES: Al final del examen usted debe retornar todas las hojas recibidas, incluyendo los borradores. Se le solicita MARCAR Y NUMERAR todas sus páginas, colocando primero aquellas que contienen sus soluciones en limpio, y luego los borradores. Por favor evite escribir demasiado cerca de la esquina superior izquierda, donde serán grapadas las hojas. EVITE rayar la hoja de preguntas.

1. **(0.5 ptos)** Considere el siguiente diagrama esquemático. En él se representa a una región R en el plano XY, una función $z = f(x, y)$, y el volumen entre ellas. Suponiendo $f(x, y) = e^{x+y}$, plantee las integrales dobles que permitirían calcular cada una de las cantidades listadas.



Nota: No necesita preocuparse por los límites exactos de integración, ni por resolver las integrales.

a) El área de la región R

b) El volumen representado

c) El área de superficie de la porción de $f(x, y)$ que está sobre R

2. **(1.0 ptos)** Para la función $f(x, y) = xy(1+x-y)$, encuentre todos sus máximos locales, mínimos locales, y puntos silla.

3. **(1.0 ptos)** Considere la función $z = x^2 + y$, y la restricción dada por $x^2 + y^2 = 16$. Encuentre los máximos y mínimos de z sobre esta circunferencia.

4. **(0.5 ptos)** Evalúe la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_0^x 3ye^x dydx$$

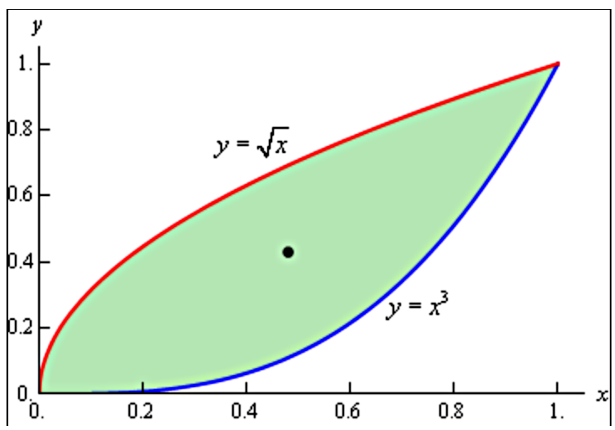
5. **(1.0 ptos)** Escoja y evalúe dos de las integrales dadas a continuación:

   a) $\int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x + y) dxdy$

   b) $\int_{-1}^1 \int_0^y (x + y)^2 dxdy$

   c) $\int_0^1 \int_{-1}^2 xy^2 dydx$

6. **(1.0 ptos)** Se tiene una pieza plana de madera con la forma de la región R que se muestra en la figura. La densidad de esta pieza varía de punto a punto según $\rho(x, y) = \sin(x + y)$. Plantee las integrales dobles necesarias para calcular cada una de las cantidades a continuación. No necesita resolverlas.



   a) La masa de la lámina de madera

   b) La coordenada x de su centro de masa, $\overline{x}$

   c) La coordenada y de su centro de masa, $\overline{y}$

   d) Su momento respecto al eje X, M_x

   e) Su momento respecto al eje Y, M_y

   f) Su momento de inercia respecto al eje X, I_x

   g) Su momento de inercia respecto al eje Y, I_y

SOLUCIONARIO

1. **(0.5 ptos)**

   a) área de R: $\int\int_R dA$

   b) volumen representado: $\int\int_R \rho\, dA = \int\int_R e^{x+y} dA$

   c) El área de superficie de la porción de $f(x,y)$ que está sobre R:

   $$\int\int_R \sqrt{1+f_x+f_y}dA = \int\int_R \sqrt{1+2\,e^{2(x+y)}}dA$$

2. **(1.0 ptos)**

   Partimos de las primeras derivadas parciales

   $$f_x = y(1+2x-y)$$
   $$f_y = x(1+x-2y)$$

   Igualando a cero cada ecuación, surgen varias posibilidades:

   i Pueden ser ambos, x, y, iguales a cero

   ii Podría y ser igual a cero, y en la otra ecuación tenerse $1+x-2y=0$, de donde x sería -1

   iii Podría x ser igual a cero, y en la otra ecuación tenerse $1+2x-y=0$, de donde y sería 1

   iv Podría ser que se cumplan simultáneamente $1+x-2y=0$, $1+2x-y=0$, de donde se obtiene la solución $x=-1/3$, $y=1/3$

   Entonces los puntos críticos son:

   $$(0,0) \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad (-1,0) \quad ; \quad (-1/3,1/3)$$

   Finalmente, para clasificar los puntos críticos usaremos el criterio del parámetro $D = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy}^2$, con las segundas derivadas dadas por:

   $$f_{xx} = 2y \quad ; \quad f_{yy} = -2x \quad ; \quad f_{xy} = 1+2x-2y$$

Pto. crít.	$D(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$	Clasif.
$(0,0)$	-1	-	punto silla
$(0,1)$	-1	-	punto silla
$(-1,0)$	-1	-	punto silla
$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	mínimo

3. **(1.0 ptos)** Se proponen 3 caminos distintos para resolver este problema.

Primer camino: Multiplicadores de Lagrange

Trabajaremos con $f(x,y) = x^2 + y \quad ; \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad g(x,y) = 16$. Entonces las ecuaciones derivadas de los multiplicadores de Lagrange son:

$$2x = \lambda\, 2x \tag{1}$$
$$1 = \lambda\, 2y \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 = 16 \tag{3}$$

El sistema tiene las siguientes soluciones:

punto (x,y)	z(y)	Clasif.
$(0,4)$	4	máx. de frontera
$(0,-4)$	-4	min. de frontera
$(\frac{\sqrt{63}}{8},\frac{1}{2})$	$\frac{65}{4}$	máx. de frontera
$(\frac{\sqrt{63}}{8},\frac{1}{2})$	$\frac{65}{4}$	máx. de frontera

Segundo camino: sustitución directa

Despejando x^2 en $x^2 + y^2 = 16$ y sustituyendo en $f(x,y) = x^2 + y$, vemos que sobre la circunferencia la función solo depende de y:

$$f(y) = 16 - y^2 + y \quad ; \quad y|_{-4}^{4}$$

Igualando a cero la primera derivada $\partial z/\partial y = -2y + 1 = 0$ hallamos $y = 1/2$, luego hay un punto crítico en $(\frac{\sqrt{63}}{8},\frac{1}{2})$. Por el criterio de la segunda derivada, se trata de un máximo local $(\partial^2 z/\partial y^2 = -2)$.

Ahora se debe evaluar en los puntos extremos $y|_{-4}^{4}$ y comparar con $z(\frac{\sqrt{63}}{8}, \frac{1}{2}) = \frac{65}{4}$, lo cual nos da:

y	z(y)		punto (x, y)	Clasif.
4	4		$(0, 4)$	máx. de frontera
-4	-4		$(0, -4)$	min. de frontera

El máximo absoluto está en $(\frac{\sqrt{63}}{8}, \frac{1}{2})$.

Tercer camino: Coordenadas polares

Con la restricción, la función $f(x, y)$ se convierte en

$$f(\theta) = 4^2 \cos^2(\theta) + 4 \sin(\theta)$$

Con los límites de θ entre 0 y 2π.

Derivamos, e igualamos a cero obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 4 \cos(\theta) [1 - 8 \sin(\theta)] = 0$$

El coseno aporta dos posibles soluciones 90° y 270°, y el factor entre paréntesis agrega la solución $\sin(\theta) = \frac{1}{8}$, es decir $y = \frac{1}{2}$, y por lo tanto $x = \frac{\sqrt{63}}{8}$.

4. **(0.5 ptos)** Evalúe la siguiente integral doble:

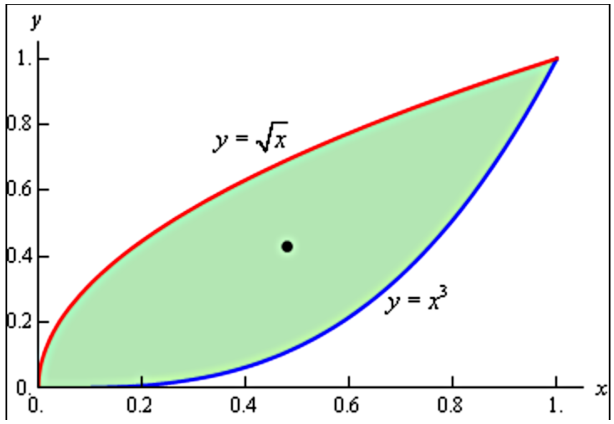
$$\int_0^1 \int_0^x 3ye^x dydx$$

5. **(1.0 ptos)** Escoja y evalúe dos de las integrales dadas a continuación:

   a) $\int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x + y)dxdy$

   b) $\int_{-1}^1 \int_0^y (x + y)^2 dxdy$

   c) $\int_0^1 \int_{-1}^2 xy^2 dydx$



6. **(1.0 ptos)** Se tiene una pieza plana de madera con la forma de la región R que se muestra en la figura. La densidad de esta pieza varía de punto a punto según $\rho(x, y) = \sin(x + y)$. Plantee las integrales dobles necesarias para calcular cada una de las cantidades a continuación. No necesita resolverlas.

   a) La masa de la lámina de madera

   b) La coordenada x de su centro de masa, $\overline{x}$

   c) La coordenada y de su centro de masa, $\overline{y}$

   d) Su momento respecto al eje X, M_x

   e) Su momento respecto al eje Y, M_y

   f) Su momento de inercia respecto al eje X, I_x

   g) Su momento de inercia respecto al eje Y, I_y