Propuesto por: Juan Carlos Basto Pineda
31/08/2018

Considere el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y}\,.$$

Abordándolo por coordenadas polares, uno puede reducir la función a:

$$\frac{x^2+y}{y} = \frac{r\cos^2(\theta)+\sin(\theta)}{\sin(\theta)}\,,$$

a partir de la cual, si uno asume que el término $r\cos^2(\theta)$ tiende a cero cuando r tiende a cero, podría pensar que el límite de la función tiende a 1. Esto parece corroborarse si uno se aproxima al origen a lo largo del eje Y, o por cualquier recta $y = mx$ (compruébelo). Sin embargo, si uno se aproxima al origen por la familia de parábolas $y = mx^2$, se puede probar que el límite no existe (demuéstrelo). ¿Por qué existe esta aparente contradicción con el uso de coordenadas polares?

Solución:

Primero vamos a verificar que en efecto el límite no existe. Acercándonos por el eje Y, hacemos $x = 0$ y obtenemos:

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y}{y} = 1\,.$$

Al acercarnos por la familia de rectas $y = mx$, con $m \neq 0$ (ya que el eje X no está en el dominio), el límite se convierte en:

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+mx}{mx} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+m}{m} = 1\,.$$

Sin embargo, al aproximarnos siguiendo parábolas del tipo $y = mx^2$ el límite es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+mx^2}{mx^2} = \frac{1+m}{m}\,,$$

el cual obviamente produce un resultado diferente para diferentes valores de m, probando que el limite no existe.

Ahora bien, ¿cuál es la falla en el análisis inicial por coordenadas polares?

Notemos que en dicho análisis, un aspecto clave fue tratar el término $r\cos^2(\theta)$ de forma independiente en el cociente $\frac{r\cos^2(\theta)+\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$, y eliminarlo una vez que r tiende a 0. Ahora veamos qué pasa cuando llevamos a polares la familia de parábolas que permitió demostrar que el límite no existe. Escribiendo $y = mx^2$ en polares obtenemos: $r\cos^2(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{m}$. Si sustituímos este resultado de vuelta en el cociente mencionado se sigue:

$$\frac{r\cos^2(\theta)+\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)(\frac{1}{m}+1)}{\sin(\theta)} = \frac{1+m}{m}\,.$$

¿Qué pasó?

Que debido a la conjunción con los otros términos (particularmente en el denominador), el término $r\cos^2(\theta)$ no se puede tratar para todos los caminos de forma independiente, existen caminos a lo largo de los cuales r y θ se conjugan de forma que el término $r\cos^2(\theta)$ acaba mezclándose efectivamente con los demás para producir un cociente constante, el cual varía para cada valor de m.

La lección de todo esto es que los resultados por coordenadas polares deben analizarse cuidosamente para no caer en falsas interpretaciones. Sin embargo, vale la pena resaltar que si la función en polares adquiere la forma $r^n \sin^\alpha(x)\cos^\beta(x)$, con $n > 0$ y α, β no negativos, este límite sí tiende hacia 0 con seguridad. Esto se puede probar por el teorema de compresión, ya que

$$-r^n \leq r^n \sin^\alpha(x)\cos^\beta(x) \leq r^n\,.$$

Igualmente, cuando al usar polares la dependencia con r desaparece en la función, y nos queda una función que depende sólamente del ángulo θ, es en general un resultado robusto afirmar que el límite no existe, ya que si nos acercamos al origen siguiendo rectas de distintas inclinaciones el ángulo θ será diferente para cada una de ellas, llevando a inferir diferentes valores para el límite.