Solucionario

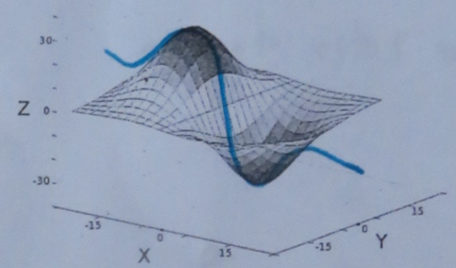
Nombre:	Código:	Grupo:

1. Describa geométricamente el dominio de cada una de las siguientes funciones

   a) $f(x,y) = tan\left(\frac{y-x}{2}\right)$ *b)* $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x(z-2)}$

2. Ilustre la forma de las curvas de nivel de la función de dos variables, $z = f(x,y)$, representada a la derecha.

   Describa y dibuje separadamente las trazas de esta función con los planos YZ y XZ.



3. Para la siguiente función, ilustre su dominio y, de manera esquemática, algunas de sus superficies de nivel:

$$sin^{-1}(x^2+y^2+z^2-4)\,.$$

4. Determine el valor de cada uno de los siguientes límites, o explique por qué no existen. Justifique su respuesta rigurosamente.

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y\,e^y}{x^2+4y}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+y^4}{|x|+|y|\cancel{+1}}$

5. ¿En qué puntos del plano XY la siguiente función es contínua?

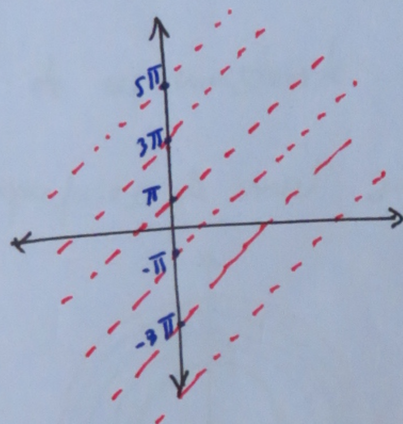
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

6. **Opcional.** Determine si la función $f(x,y) = e^{-x}\,cos(y) - e^{-y}\,cos(x)$ es solución a las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ *b)* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ *c)* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0$

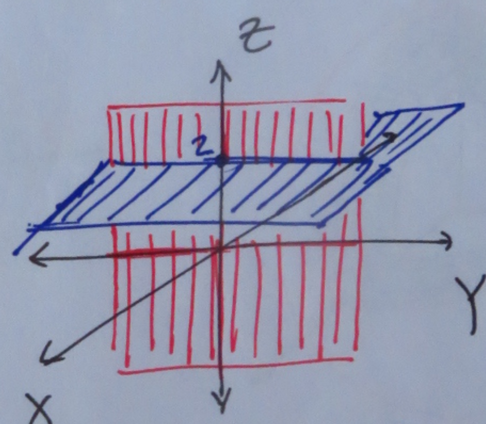
1) a) $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, luego no está definida en $\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$

Haciendo $\dfrac{y-x}{2} = (2n+1)\cdot\dfrac{\pi}{2} \rightarrow y = x + (2n+1)\pi$



Dominio: Todo el plano XY excepto estas rectas.

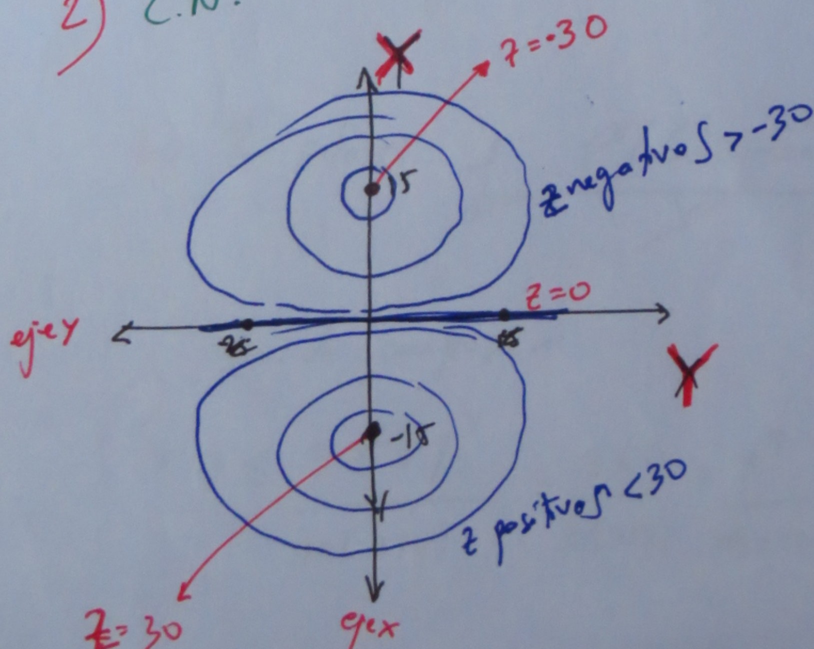
b) Requerimos $\begin{cases} x \neq 0 \\ z \neq 2 \end{cases}$



El dominio es todo el espacio R^3 excepto los planos YZ, $z=2$.

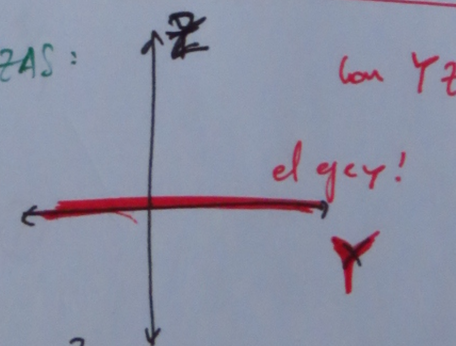
---

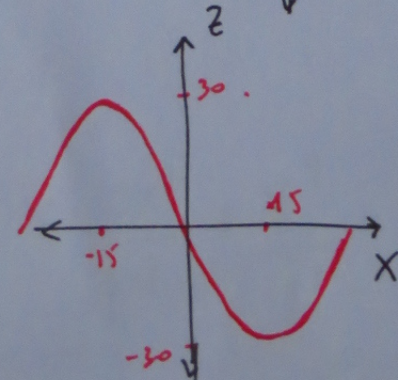
2) C.N.



TRAZAS:

Con YZ





3) Se requiere

$$-1 \le x^2+y^2+z^2-4 \le 1$$

incluye los bordes!

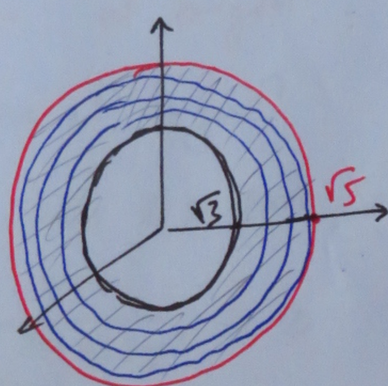
$$3 \le x^2+y^2+z^2 \le 5 \longrightarrow \text{cascarón esférico.}$$

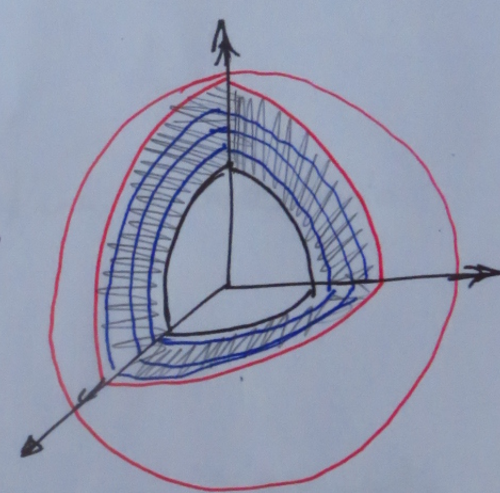
Radio interno: $\sqrt{3}$

Radio externo: $\sqrt{5}$

Las superficies de w constante ocurrirán cuando $x^2+y^2+z^2=cte$

$\Rightarrow$ las superficies de nivel son esferas concéntricas.





4) a) Por el eje x: $y=0$: $\lim \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Por el eje Y: $x=0$: $\lim \frac{\cancel{y}\cdot e^y}{4\cancel{y}} = 1/4$

No existe.

b) Por polares: $\lim \frac{r^{\cancel{2}}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{r}} = 0$

c) Teo. de compresión:

$$0 \le \frac{3x^2+y^4}{|x|+|y|} \le \frac{3x^2}{|x|+|y|} + \frac{y^4}{|x|+|y|} \le \frac{3x^2}{|x|} + \frac{y^4}{|y|} = \underbrace{3\cdot|x| + |y^3|} \longrightarrow 0.$$

5). En primer lugar examinemos posibles discontinuidades de $\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$. Sabemos que solo ocurren donde el denominador sea cero, y esto solo pasa en $(0,0)$

→ La función es continua en cualquier punto que no sea el origen.

¿Es continua en el origen?

Allí la función vale 0, y para ser continua se necesitaría que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} \overset{?}{=} 0$.

Sin embargo, esto es falso → probar camino $x=y \to L = \dfrac{1}{3}$.

(De hecho el límite ni siquiera existe, por los ejes: $L=0$).

6) Derivemos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x}\cdot\cos(y) + e^{-y}\cdot\sin(x)} \to \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-x}\cdot\cos(y) + e^{-y}\cos(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-x}\cdot\cos(y) + e^{-y}\cdot\cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{-x}\cdot \sin(y) + e^{-y}\cdot \cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-x}\cdot \cos(y) - e^{-y}\cdot \cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-x}\cdot \sin(y) - e^{-y}\cdot \sin(x)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -e^{-x}\left(\cos(y)+\sin(y)\right) + e^{-y}\left(\cos(x)+\sin(x)\right) \neq 1 \text{ en gral.}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad ✓✓$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$ No se verifica.