Nombre:	**Código:**

1. (5 ptos) Grafique cada una de las siguientes funciones.

   a) $\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *c*) $z = e^{-x}$

   b) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ *d*) $z = a - y^2$

2. (10 ptos) Empareje cada ecuación a continuación con una de las figuras presentadas. Para cada pareja, describa a qué corresponden las trazas con los 3 planos coordenados.

   a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

   b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

   c) $y = 2x^2 + z^2$

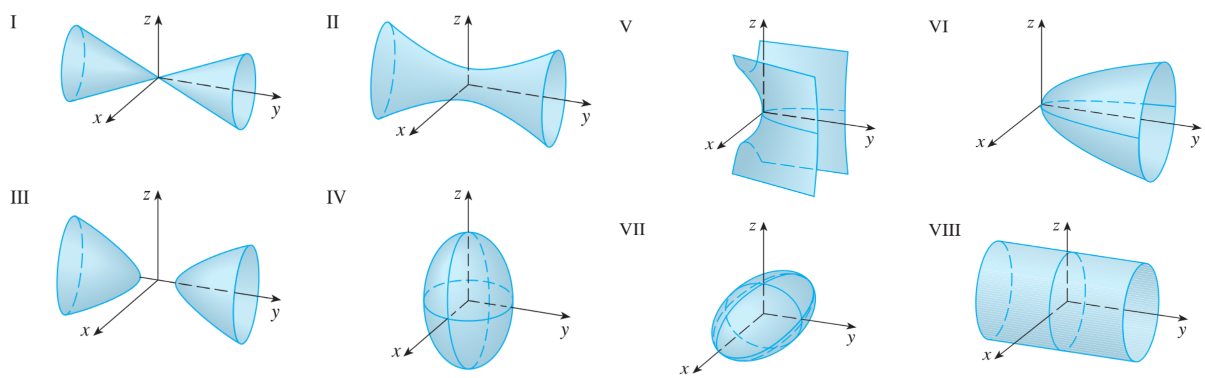
   d) $x^2 + 2z^2 = 1$

   e) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

   f) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   g) $y^2 = x^2 + 2z^2$

   h) $y = x^2 - z^2$



3. (8 ptos) Lleve las siguientes expresiones a su forma estándar, y diga para cada una de ellas: de qué tipo de superficie se trata, en qué dirección está orientada (hacia donde "abre") y si hay algún desplazamiento de la figura:

   a) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

   b) $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

   c) $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2y - 2z + 2 = 0$

   d) $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

4. (2 ptos) Grafique el volumen limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $x^2 + y^2 = 1$, para $1 \leq z \leq 2$.

5. (1 pto) Encuentre una ecuación para la superficie obtenida al rotar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje X.

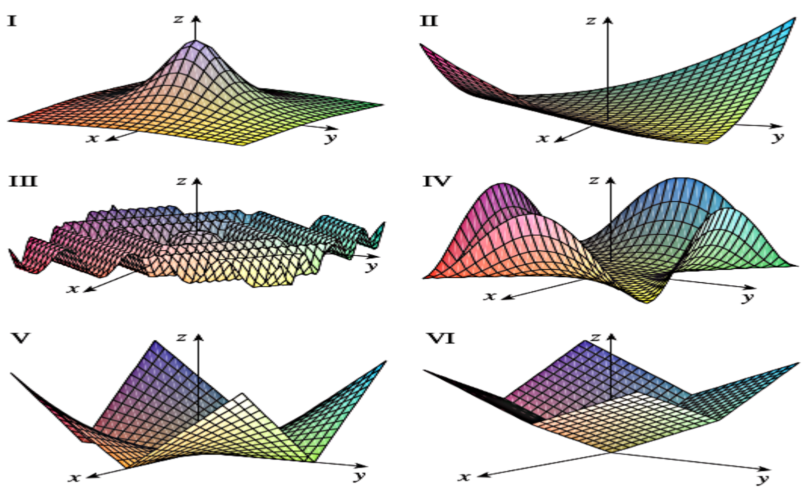
6. (1 pto) Un elipsoide es generado a partir de la elipse $4x^2 + y^2 = 16$, haciéndola rotar alrededor del eje Y. ¿Cuál es la ecuación de los puntos sobre el elipsoide?

7. (4 ptos) Encuentre una ecuación para la superficie que contiene a todos los puntos que están a la misma distancia del punto $(0, 0, 1)$ y del plano $z = -1$. ¿De qué tipo de superficie se trata?

8. (4 ptos) Una torre de enfriamiento para un reactor nuclear tiene la forma de un hiperboloide de una hoja (como las de Los Simpsons). El diámetro de la base es 300 m, y el diámetro de la parte más angosta, situada a 500 m de altura, es 180 m. Encuentre una ecuación que describa la superficie del hiperboloide.

9. (8 ptos) Empareje cada ecuación a continuación con una de las figuras presentadas. Explique por qué podemos saber que esa selección tiene sentido.

   a) $f(x, y) = |x| + |y|$
   b) $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
   c) $f(x, y) = (x - y)^2$
   d) $f(x, y) = |xy|$
   e) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
   f) $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$



10. (10 ptos) Describa geométricamente el dominio, $D(f)$, de cada una de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}$
    b) $f(x, y, z) = \sqrt{144 - 16x^2 - y^2 - 144z^2}$
    c) $f(x, y, z) = \frac{\left(144-16x^2-16y^2+9z^2\right)^{3/2}}{xyz}$
    d) $f(x, y) = sin^{-1}(xy)$
    e) $f(x, y, z) = z\ln(xy)$
    f) $f(x, y) = \ln(x + 2 + y)$
    g) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{x - y}$
    h) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{y-x}$

11. (6 ptos) Describa el recorrido o rango , $R(f)$, de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\sqrt{2+x-y}$

b) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

c) $f(x,y)=cos(x^2+y^2)$

d) $f(x,y)=e^{x-y}$

e) $f(x,y)=4-x^2-y^2$

f) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2+y^2}$

12. (8 ptos) Describir gráficamente las curvas de nivel y superficies de nivel asociadas a las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x+y}{x^2-y^2}$

b) $z=f(x,y)=y^2-x^2$

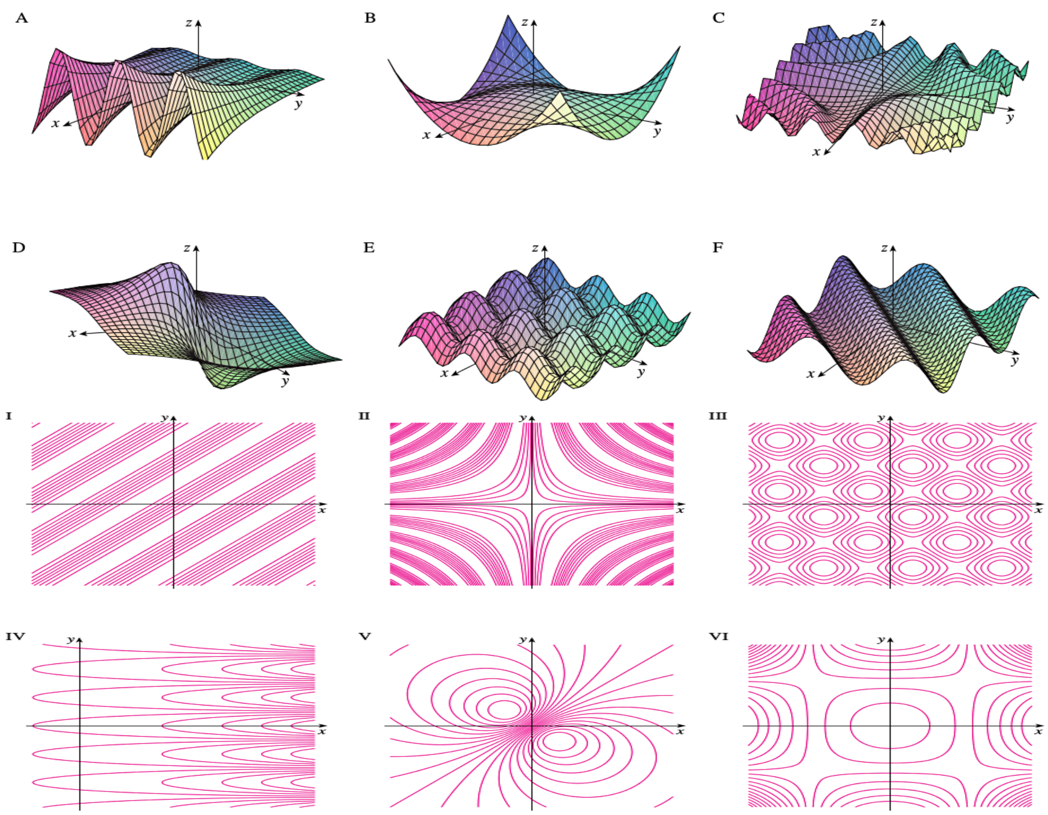
c) $z=\sqrt{\frac{x}{y}-1}$

d) $w=f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2$

e) $f(x,y,z)=100x^2+16y^2+25z^2$

f) $f(x,y,z)=4x^2-9y^2$

13. (8 ptos) Empareje cada gráfica 3D con uno de los mapas de curvas de nivel. De algún argumento de por qué esa selección tiene sentido.



14. (10 ptos) En cada uno de los casos presentados a continuación, determine el límite indicado, o explique por qué no existe:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{y - 2x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + \cos(x)}{xy - \cos(x)}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2 + y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x + y)$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2(y)}{x^2 + 2y^2}$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^2 + 4y^2}$

15. (2 ptos) Determine si la función definida por: $f(0,0) = 0$, y $f(x,y) = \frac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ en el resto del plano XY, es contínua.

16. (4 ptos) Sea la función $f(x,y)$ igual a cero en el origen, e igual a $f(x,y) = \frac{xy}{2x^2+2y^2}$ en el resto del plano XY. Demuestre que en $(0,0)$ esta función es contínua en cada variable por separado, es decir, que $f(x,0)$ y $f(0,y)$ son contínuas en el origen, pero que sin embargo $f(x,y)$ no es contínua allí.

17. (4 ptos)

    a) Use la regla de L'hopital para encontrar el límite: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{x^2}$

    b) Determine si existe el límite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(ax)-1+y}{x^2+y}$

18. (13 ptos) Apóyese en la definición formal de límites ($\epsilon - \delta$) o en el "*teorema del sandwich*" (si lo conoce), y en las propiedades básicas de los límites, para demostrar los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$

Pista: El último ejercicio requiere una dosis extra de ingenio algebraico respecto a los ejemplos mencionados en clase. Quizás le ayude saber que una escogencia apropiada de δ en función de ϵ es: $\delta = \sqrt{\epsilon/2}$.

19. (3 ptos) Imagine que la temperatura de un día en las estribaciones de la Sierra Nevada de Santa Marta se puede modelar con una función $T = f(x, y, t)$, donde x, y representan la latitud y longitud de un lugar, y t la hora del día.

    a) ¿Cuál es el significado de las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, y $\partial T/\partial t$?

    b) Palomino se sitúa a una latitud 11,26° y una longitud de −73,56°, y colinda con el mar caribe por el oeste. Sabiendo que la región hacia el norte de la Guajira es cada vez más desértica, y que en la playa el aire se calienta más que sobre el mar durante el día, a las 11 de la mañana usted esperaría que $f_x(11{,}26°, -73{,}56°, 11)$ y $f_y(11{,}26°, -73{,}56°, 11)$ sean positivas o negativas? ¿Qué esperaría de $f_t(11{,}26°, -73{,}56°, 11)$?

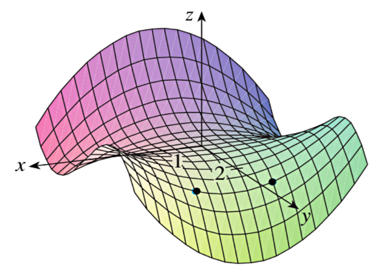
20. (2 ptos) Determine los signos de las derivadas parciales de la función $f(x, y)$ cuya gráfica se muestra a continuación:

    a) $f_x(1, 2)$

    b) $f_y(1, 2)$

    c) $f_x(-1, 2)$

    d) $f_y(-1, 2)$



21. (4 ptos) Sea $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$. Encuentre $f_x(1, 0)$, $f_y(1, 0)$ e interprete estos números como las pendientes de ciertas rectas. Ilustre sus resultados gráficamente.

22. (7 ptos) Determine las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = \sqrt{x}\ln(t)$

    b) $z = \tan(xy)$

    c) $f(x, y) = x^y$

    d) $w = e^u/(u + v^2)$

    e) $f(x, t) = e^{-t}\cos(\pi x)$

    f) $m = \sin(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n)$

23. (3 ptos) Evalúe las siguientes derivadas implícitas:

    a) $yz = \ln(x + z)$

    b) $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y)z$

    c) $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$

24. (2 ptos) Sabiendo que la resistencia equivalente de 3 resitencias en paralelo viene dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

¿Cuál es la tasa de cambio de R respecto de $R1$?

25. (4 ptos) La ecuación de Laplace es muy útil para modelar diferentes tipos de sistemas y situaciones físicas en electromagnetismo, astronomía, mecánica de fluídos y mecánica cuántica, entre otros. En dos dimensiones, la misma puede escribirse como $U_{xx} + U_{yy} = 0$. Determine cuáles de las siguientes funciones satisfacen la ecuación de Laplace:

    a) $u = sin(x)cosh(y) + cos(x)sinh(y)$ *b)* $u = e^{-x}cos(y) - e^{-y}cos(x)$

26. (3 ptos) Sea la función de n variables: $z = e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}$, con $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 = 1$. Muestre que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = z$$

27. (4 ptos) Encuentre las derivadas de orden superior indicadas:

    a) $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{yxy} , f_{xxx}
    b) $z = u\sqrt{v - w}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v \partial w}$

28. (4 ptos) Para cada caso, encuentre una linealización de la función dada en el punto que se indica:

    a) $z = \sqrt{x^3y}$ *b)* $f(x, y) = e^{-2y}sin(3x)$

29. (4 ptos) En cada caso, encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto indicado:

    a) $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y$; $(1, -2, 20)$ *b)* $z = 3sin(x)cos(y)$; $(\pi/4, 3\pi/4, -3/2)$

30. (4 ptos) En este problema vamos a comparar la diferencia absoluta Δz, con la diferencia aproximada obtenida a partir del diferencial $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Para ello, determine primero el diferencial dz y evalúelo en el punto inicial dado, y compare con el Δz obtenido de forma exacta al calcular la función en los dos puntos.

    a) $z = 3x + 4y + 8$; $(2, 4)$, (2,2, 3,9) *b)* $z = x^2 + x^2y^2 + 2$; $(1, 1)$, (0,9, 1,1)

    ¿La aproximación $\Delta z \approx dz$ es buena?
    ¿Cuál es la condición para que esta aproximación sea válida?

En los siguientes 3 problemas vamos a explorar algunas aplicaciones de los diferenciales totales. Considere una función $z = f(x, y)$, y suponga que puede haber una pequeña variación en las variables independientes, o que hay una incertidumbre en su medida, o lo que es lo mismo, que se podría cometer un pequeño error al medirlas. Si identificamos esas variaciones por dx, dy, entonces el cambio en z se puede aproximar por dz (Ver ejemplo 7 de la Sec 13.4 en el Zill).

31. (3 ptos) El sistema cardiovascular humano es similar a circuitos eléctricos, pues cuando la sangre fluye a través de los vasos es como si pasara a través de resistencias en serie y paralelo. Imagine 3 resistencias en paralelo, cuyo equivalente es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Dado que el error porcentual en la medida de cada resistencia es $\pm 0{,}9\,\%$, calcule el error porcentual máximo aproximado en R.

32. (3 ptos) La presión de un gas ideal es dada por $P = k\frac{T}{V}$, donde T es la temperatura, V es el volumen, y k es una constante. Si los errores al medir T y V son máximo de $0{,}6\,\%$ y $0{,}8\,\%$ respectivamente, ¿Cuál es el error porcentual máximo al estimar P usando esta formula?

33. (3 ptos) Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 y su radio crece de 5 a 5.3. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado, estimado a partir del diferencial total? ¿Cómo se compara con el verdadero volumen estimado de forma exacta?

34. (8 ptos) Encuentre las derivadas indicadas a continuación utilizando la regla de la cadena:

    a) $z = x^3y - xy^4\,; \quad x = e^{5t}\,; \; y = sec(5t)\,; \; \frac{\partial z}{\partial t}$
    b) $z = e^{xy}\,; \; x = \frac{4}{2t+1}\,; \; y = 3t + 5\,; \; \frac{\partial z}{\partial t}(t = 0)$
    c) $z = x^2cos(4y)\,; \; x = uv\,; \; y = u + v\,; \; \frac{\partial z}{\partial u}\,, \; \frac{\partial z}{\partial v}$
    d) $z = 4x - 5y^2\,; \; x = u^2 - 8v\,; \; y = (u - v)^2\,; \; \frac{\partial z}{\partial u}\,, \; \frac{\partial z}{\partial v}$

35. (3 ptos) Una libélula se mueve en el espacio tridimensional de forma que sus coordenadas en cualquier tiempo $t \geq 0$ son: $x = 4cos(t)$, $y = 4sin(t)$, $z = 5t$. Encuentre la tasa a la cual aumenta la distancia de la libélula al origen.

36. (5 ptos) Dos barcos de una misión científica para estudiar la biodiversidad en el Pacífico Colombiano están en las posiciones A y B, separados por 20 km de distancia. De repente sus radares detectan la presencia de una ballena jorobada en la posición C, de forma que en el triángulo $\triangle ABC$, los segmentos AC y BC forman ángulos θ y ϕ, respectivamente, con el segmento AB.

a) Utilice la ley de senos para encontrar expresiones para las distancias AC y BC dependiendo de los ángulos θ y ϕ.

b) Si $\theta = 60^\circ$ y $\phi = 75^\circ$, ¿a qué distancia está la ballena de cada uno de los barcos?

c) Si en el momento especificado anteriormente el ángulo θ está disminuyendo a un ritmo de 5° por minuto, mientras que ϕ disminuye a 10° por minuto, ¿a qué tasa está disminuyendo la distancia entre cada barco y la ballena en ese instante?