Propuesto por: Juan Carlos Basto Pineda
26/08/2018

Para la función de 3 variables $w = f(x, y, z)$, con $f(x, y, z) = \log\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$, encuentre y grafique su dominio y superficies de nivel. Determine el recorrido de la función.

Determine cómo cambian el dominio, el recorrido y las superficies de nivel si modificamos la función a: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solución:

Ya que el logaritmo solo puede evaluarse en argumentos positivos, tenemos $x^2+y^2 > z^2$. Siendo que la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono elíptico que abre en la dirección del eje z, el dominio es la región del espacio XYZ por fuera de dicho cono, excluyendo su superficie. En cuanto a las superficies de nivel, se puede ver que aquellas triplas (x, y, z) que producen un mismo valor de w, deben tener un mismo valor de $x^2 + y^2 - z^2$, pues no hay dos números diferentes que al evaluar su logaritmo generen el mismo resultado. Entonces para hallar las superficies de nivel analizamos las ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 - z^2 = cte$, que teniendo en cuenta la desigualdad establecida al principio, solo tienen solución en el dominio de la función para constantes positivas. Reescribiendo la igualdad en la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{cte})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{cte})^2} = \frac{z^2}{(\sqrt{cte})^2} + 1$, vemos que las superficies de nivel corresponden a hiperboloides de una hoja alineados con el eje z y con centro en el origen. En cuanto al recorrido, ya que x, y, z se pueden combinar para producir cualquier valor mayor que cero en el argumento del logaritmo, el recorrido de f es simplemente el recorrido de la función $y = \log(x)$, que corresponde a todo el conjunto de los reales.

En la segunda función propuesta, al eliminar el logaritmo ya no hay restricción sobre los valores de x, y, z, de modo que el dominio es todo el espacio $\mathbb{R}^3$. En cuanto a las superficies de nivel, las mismas de antes siguen presentes, pero ahora tenemos algunas adicionales al permitir constantes negativas. Si la escribimos en la forma $-cte$, con cte un valor positivo, vemos que estas corresponden a hiperboloides de dos hojas contenidos en el interior del cono elíptico y alineados con el eje z de la forma: $\frac{x^2}{(\sqrt{cte})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{cte})^2} = \frac{z^2}{(\sqrt{cte})^2} - 1$. El recorrido sigue siendo $\{x \in \mathbb{R}\}$, pues al incrementar el dominio todos los valores anteriores siguen estando, y esos ya garantizaban que f recorriese todos los reales.