Segundo Examen de Cálculo III. Solucionario

Profesor: Juan Carlos Basto Pineda
Universidad Industrial de Santander
19/02/2018

1. (5 ptos) Considere la función $w(x, y, z) = e^{\alpha(x+y+z)}$. Encuentre el valor del número α que garantiza la siguiente igualdad para todos los valores de (x, y, z):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = w$$

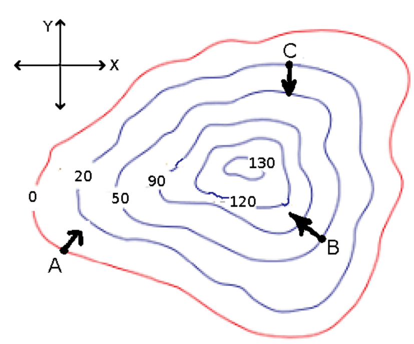
Sln.

Derivando normalmente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha(x+y+z)} = \alpha^2 w$$

Lo mismo pasa con las otras dos derivadas. Sumando las 3 e igualando a w (ver enunciado) se obtiene $3\alpha^2 = 1$, es decir $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. (10 ptos) La figura a la derecha presenta las curvas de nivel de $z = f(x, y)$.
Responda Falso (F) o verdadero (V), sin justificación, a las siguientes afirmaciones:



_V_ La magnitud del gradiente en B es mayor que la magnitud del gradiente en A

_F_ El gradiente en B tiene componente positiva en $\hat{\imath}$ y negativa en $\hat{\jmath}$

_F_ La magnitud del gradiente en C es mayor que la magnitud del gradiente en B

_V_ El gradiente en A tiene componente positiva en $\hat{\imath}$ y positiva en $\hat{\jmath}$

_V-F_ En el punto C la derivada direccional apuntando hacia $-\hat{\imath}$ es nula

Sln.

Los gradientes apuntan en las direcciones mostradas. El más grande es en B, por que la función allí es más empinada. El menor es en A. En C el gradiente es prácticamente vertical (su componente x es muy pequeña o quizás nula? Depende de la calidad del dibujo).

3. (10 ptos) Para la función $z = f(x, y)$ dada a continuación, encuentre el valor de sus derivadas parciales de primer y segundo orden, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en el origen.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

Sln.

La derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ implica hacer una análisis con y constante. En este caso $y = 0$, lo cual implica:

$$f(x, y = 0) = \frac{x^3 - 0^3}{x^2 + 0^2} = x\,.$$

Esto quiere decir que si recorremos sobre la superficie de $z(x, y)$ el contorno formado por las imágenes de aquellos puntos con $y = 0$ (es decir el eje x), estamos en realidad recorriendo la recta: $z = x$, cuyas derivadas son $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

Del mismo modo se halla $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Alternativamente se puede recurrir a la definición formal de derivada parcial:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}\,.$$

Para esta función y en el origen:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^3 - 0^3)/(h^2 + 0^2) - 0}{h} = 1\,.$$

Este enfoque, sin embargo, hace un poco más difícil el cálculo de la segunda derivada, que se deja como ejercicio al lector.

4. (5 ptos) En un acto de magia, *Tuerquita* presenta una caja cúbica con un volumen de 1 $[m^3]$, la cual empieza a expandirse a lo largo de sus 3 direcciones así:

   * El ancho, x, crece a un ritmo constante de 1 $[cm/s]$
   * El largo, y, crece a un ritmo constante de 5 $[cm/s]$
   * La altura, z, crece a un ritmo constante de 2 $[cm/s]$

   ¿A qué ritmo crece el volumen de esta caja en el tiempo $t = 10$ $[s]$?

Sln.

Usaremos regla de la cadena para el volumen $V = xyz$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = yz\frac{dx}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt}$$

Para esto, identifiquemos del enunciado (ojo con las unidades):

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}01 \quad \frac{dy}{dt} = 0{,}05 \quad \frac{dx}{dt} = 0{,}02$$

y calculemos las medidas en $t = 10$ $[s]$: $x = 1{,}1 \quad y = 1{,}5 \quad z = 1{,}2$

Sustituyendo obtenemos $\frac{dV}{dt} = 0{,}117$ $[m^3/s]$.

5. (10 ptos) Dada la superficie $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 2$, encuentre:

   a) la ecuación del plano tangente a ella por el punto $P(1, 2, 3)$.

   b) la ecuación de la recta perpendicular a ella en el mismo punto.

Sln.

a) Usaremos $(z - z_0) = \frac{dz}{dx}(x - x_0) + \frac{dz}{dy}(y - y_0)$, sabiendo que las derivadas parciales hay que evaluarlas en el punto específico. Esto lleva a:

$$(z - 3) = -2(x - 1) + 4(y - 2)$$

o lo que es lo mismo:

$$z = -2x + 4y - 3$$

b) Siendo el punto de referencia $P_0(1, 2, 3)$ y el vector director (normal al plano tangente) $n(2, -4, 1)$ (coeficientes que acompañan a los paréntesis arriba), tenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + 2\alpha \quad y = 2 - 4\alpha \quad z = 3 + \alpha$$

y las simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$$

6. (10 ptos) La función $f(x, y) = \sin(xy)$ es contínua sobre la región rectangular cerrada R definida por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$. Determine todos los puntos donde $f(x, y)$ tiene máximos, y todos los puntos donde esta función tiene mínimos. Muestre gráficamente la ubicación de estos puntos sobre la región dada.

Sln.