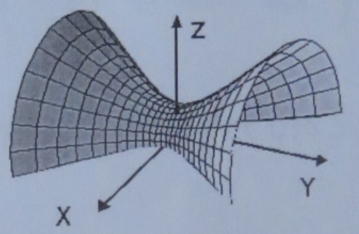
Solucionario.

Nombre:	Código:	Grupo:

1. Describa geométricamente el dominio de cada una de las siguientes funciones

   a) $f(x,y) = sec(x)csc(y)$ b) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{5-z}}{x^2+y^2}$

2. Ilustre la forma de las curvas de nivel de la función de dos variables, $z = f(x,y)$, representada a la derecha. Describa y dibuje separadamente las trazas de esta función con los planos XY, YZ y XZ.



3. Para la siguiente función, ilustre su dominio y, de manera esquemática, algunas de sus superficies de nivel:

$$f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2 + 5}\,.$$

4. Determine el valor de cada uno de los siguientes límites, o explique por qué no existen. Justifique su respuesta rigurosamente.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sin(x+y)}{x-y}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2cos(xy)}{|x|+|y|}$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

5. ¿En qué puntos del plano XY la siguiente función es contínua?

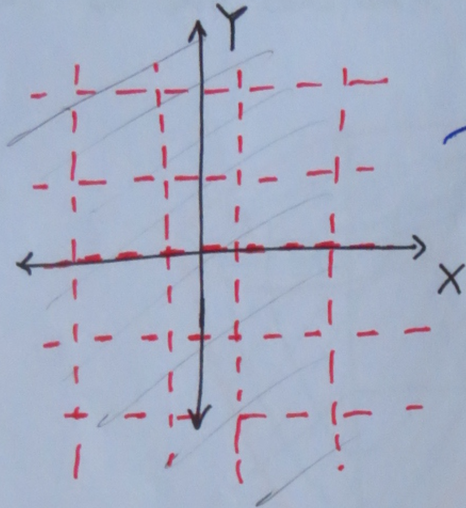
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

6. **Opcional.** Determine si la función $f(x,y) = ln(e^x + e^y)$ es solución a las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

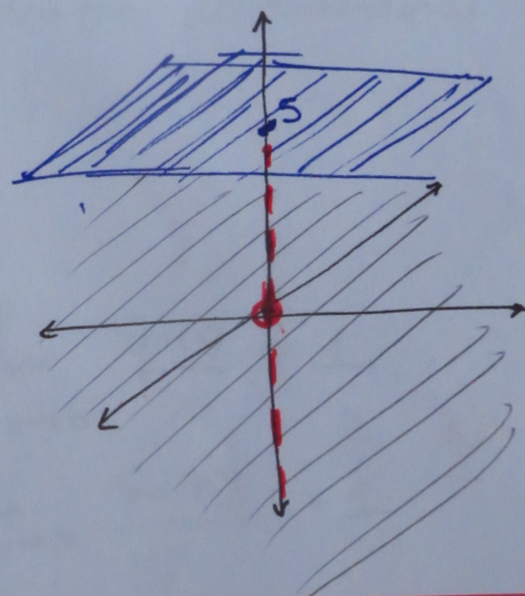
1) $Sec(x) \rightarrow$ es indefinida en: $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$

a) $Csc(y) \rightarrow$ es indefinida en: $y = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$



→ El dominio es todo el plano XY excepto estas rectas.

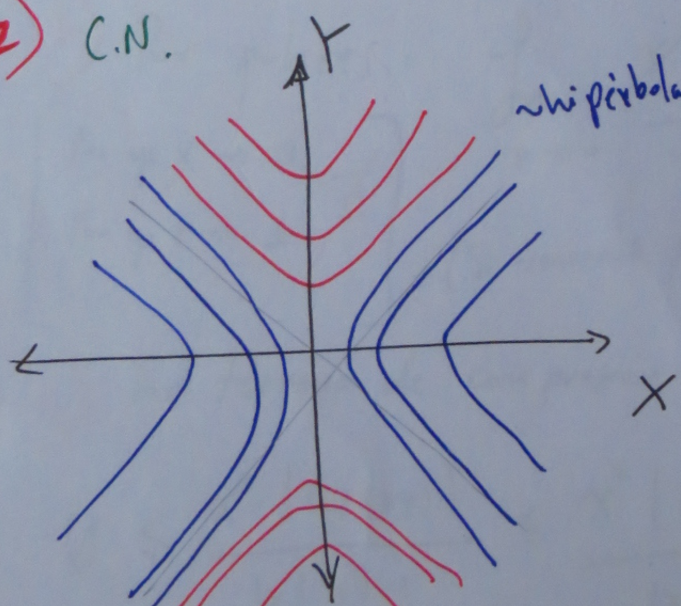
b) Requerimos: $\begin{cases} z \leq 5 \\ x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$



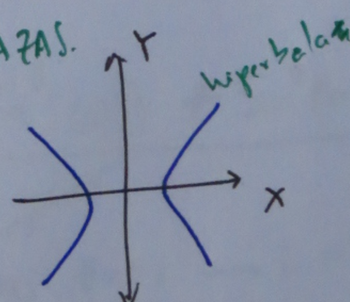
El dominio es todo el espacio de XYZ bajo $z=5$ (inclusive), EXCEPTUANDO EL EJE Z!

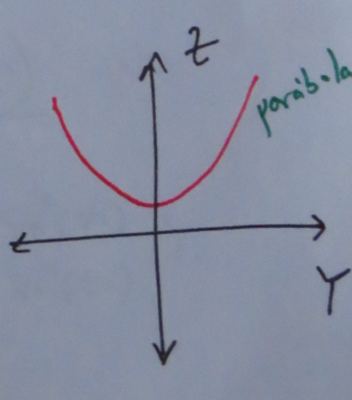
---

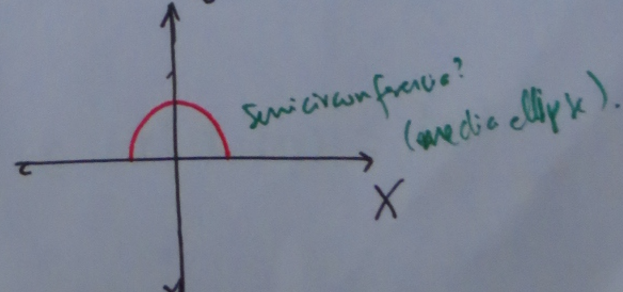
2) C.N.



TRAZAS.



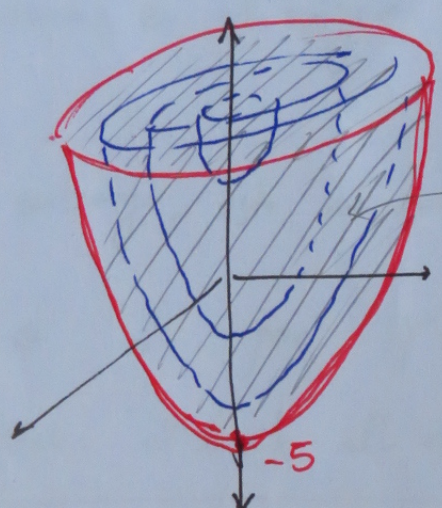




3) Requerimos : $z+5 \geq x^2+y^2$ → el límite es un paraboloide circular con vértice en $(0,0,-5)$. → incluye el borde.

S.N.: w será constante cuando $z - x^2 - y^2 = cte$

↳ $z + cte = x^2 + y^2$ → paraboloides "concéntricos"



el dominio es adentro del paraboloide

4) a) Por el eje x : $y=0$: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Por el eje Y : $x=0$: $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{-y} = -1$

No existe.

b) Por polares : $\lim_{r \to 0} \frac{\cancel{r^2}(r \cdot \cos^3(\theta) + \sin^2(\theta))}{\cancel{r^2}}$ No existe

[Por eje x → 0
Por eje r → 1. $\nexists$]

(Si vemos por rectas $\theta = \theta_1 \to L = \sin^2(\theta_1)$
$\theta = \theta_2 \to L = \sin^2(\theta_2)$).

c) Por teorema de compresión:

$$0 \leq \frac{x^2 \cdot |\cos(xy)|}{|x| + |y|} \leq \frac{x^2 |\cos(xy)|}{|x|} \leq |x| \cdot \cos(xy) \leq |x| \to 0.$$

5) La única ~~posible~~ discontinuidad de $\frac{x^2y^2}{2x^2+y^2}$ ocurre en el origen. Allí: $f(0,0)=1$. Para que $f(x,y)$ sea continua en el origen se requiere: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2} \overset{?}{=} 1$

Sin embargo, esto no ocurre, ya que si venimos por $x=0$ ó por $y=0$ vemos $L=0$.

(De hecho el límite allí es 0, se puede ver por teo de compresión)

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ es continua en todas partes, excepto en el origen.

6) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^y \cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ → verifica ✓

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ → verifica ✓

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ → falso ✗