Enunciado

Dos ondas planas de igual longitud de onda se propagan en el espacio con vectores de onda $\vec{k1}$, $\vec{k2}$. Halle la orientación de las franjas de interferencia formadas en el plano XY, y la distancia entre máximos.

Solución

Primero vamos a recordar que la intensidad del campo es proporcional al promedio de su valor al cuadrado, es decir, integramos durante un periodo el campo al cuadrado y dividimos en T. Vamos a denotar esta operación con los símbolos $<>$. Por ejemplo, si el campo es $E = E_0 cos(kx - wt)$, su intensidad viene dada por

$$I =< (E_0 cos(kx - wt))^2 >= \frac{1}{\mu_0 c} \frac{\int_T (E_0 cos(kx - wt))^2 dt}{T}$$

que equivale a $I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$, donde el factor $\frac{1}{\mu_0 c}$ es un factor de proporcionalidad de la definición, y el factor $\frac{1}{2}$ viene del promedio del coseno cuadrado.

La estrategia de solución será sumar los campos, calcular la intensidad resultante, y evaluar la expresión obtenida en puntos del plano XY.

La intensidad resultante de la superposición en cualquier punto del espacio es

$$I =< (A_1 cos(\vec{k_1} \cdot \vec{r} - wt) + A_2 cos(\vec{k_2} \cdot \vec{r} - wt))^2 >$$

Desarrollando, y aprovechando la propiedad de linealidad de las integrales tenemos:

$$\begin{aligned} I &= < (A_1 cos(\vec{k_1} \cdot \vec{r} - wt))^2 > + < (A_2 cos(\vec{k_2} \cdot \vec{r} - wt))^2 > \\ &\quad + < 2A_1A_2 cos(\vec{k_1} \cdot \vec{r} - wt) cos(\vec{k_2} \cdot \vec{r} - wt) > \end{aligned}$$

Utilizando la identidad: $2cos(\alpha)cos(\beta) = cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)$, tenemos

$$I = I_1 + I_2 + < A_1A_2 cos((\vec{k_1} - \vec{k_2}) \cdot \vec{r}) > + < A_1A_2 cos((\vec{k_1} + \vec{k_2}) \cdot \vec{r} - 2wt) >$$

La integral sobre un periodo del último término es cero por que es un coseno y no está al cuadrado. Por su parte, el penúltimo término es contante respecto del tiempo, de modo que al integrar de 0 a T y dividir en T simplemente nos queda el mismo número. Es fácil convencerse entonces de

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, cos((\vec{k_1} - \vec{k_2}) \cdot \vec{r})$$

Esta intensidad resultante será máxima en aquellos lugares en que el coseno valga 1, y mínima en donde el coseno valga -1.

Vamos a concentrarnos en el plano XY. Sea $\vec{k}$ el vector obtenido al considerar solamente las componentes i, j de la resta $(\vec{k_1} - \vec{k_2})$. Imagine este vector partiendo del origen en el plano XY. Una primera franja de máximo brillo es la línea que pasa por el origen y es perpendicular al vector $\vec{k}$, pues para los puntos en ella se tiene $\vec{k} \cdot \vec{r} = 0$. Las demás franjas son paralelas a esta, y están separadas por una distancia $\frac{2\pi}{|k|}$. Para entender por qué, piense que el vector $\vec{r}$ hasta un punto cualquiera sobre la N-ésima de las rectas descritas se puede descomponer en una componente perpendicular a $\vec{k}$ y una componente paralela. El producto punto con la primera componente es $\vec{k} \cdot \vec{r_\perp} = 0$, mientras que el producto punto con la segunda sería $\vec{k} \cdot \vec{r_\parallel} = N \cdot 2\pi$, y claramente $cos(2\pi N) = 1$.