

**Maestría en Matemática Aplicada
Modelado Matemático II**

Universidad
Industrial de
Santander



Errores de truncamiento en las series de Taylor

Jorge Leonardo López

Eliana Bonalde

Prof.: Juan Carlos Bastos Pineda

Teorema de Taylor

Dado un entero positivo n , y una función que es derivable al menos n veces con todas sus derivadas continuas alrededor de x_0 , el valor de la función en un punto x en la vecindad de x_0 se puede expresar como

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

para algún valor c entre x_0 y x . Este resultado puede escribirse de la forma compacta $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

El polinomio obtenido al truncar la serie en n términos es llamado **polinomio de Taylor** de orden n (P_n)

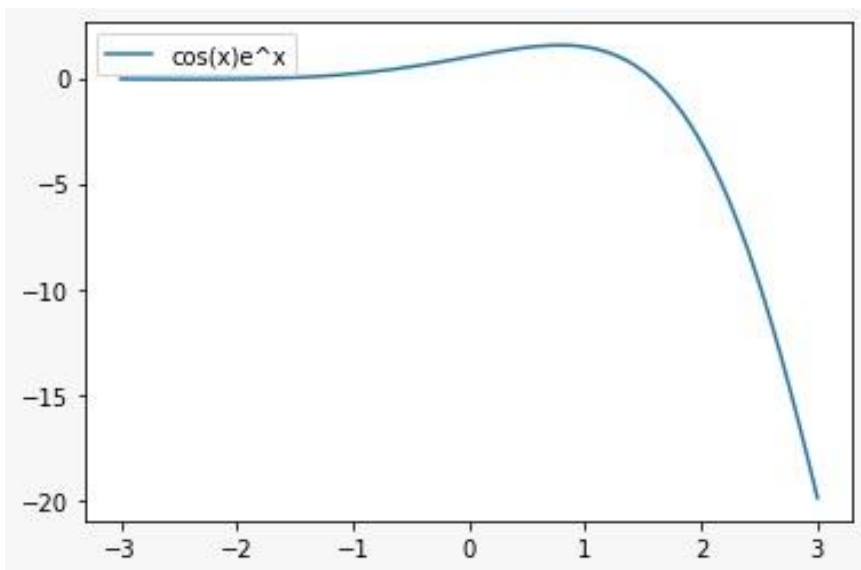
Y (R_n) representa el residuo o **error de truncamiento**.

A partir de (1) se puede expresar la función alrededor del punto x_0 como

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (2)$$

La serie dada en (2) puede ser truncada en cualquier punto, el error que resulta al truncar la serie es R_n .

Considere el polinomio de Taylor $P_3(x)$
de $f(x) = e^x \cos(x)$ alrededor de $x = 0$



$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6} \cos(c) e^c x^4$$

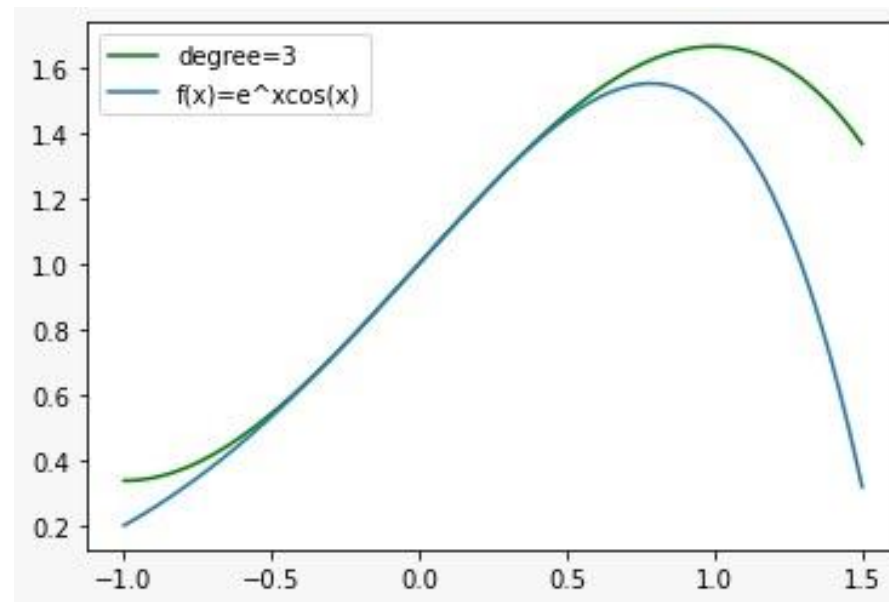
$$f'(x) = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x$$

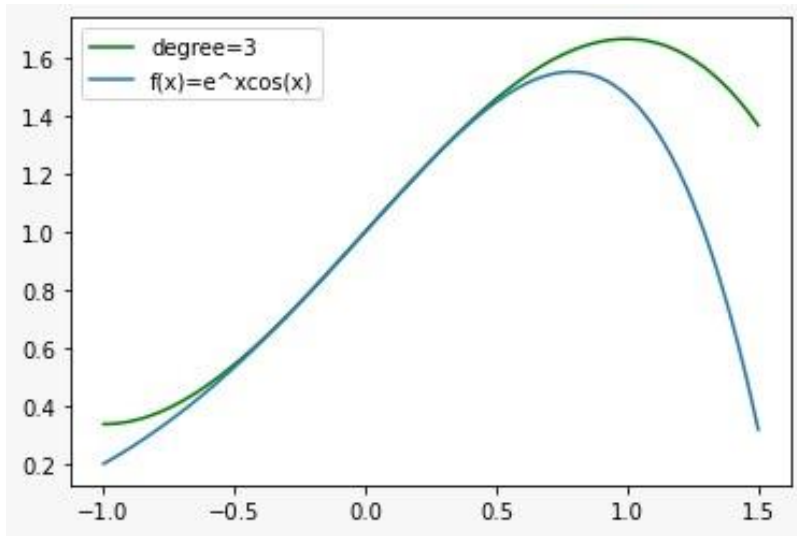
$$f''(x) = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \sin(x)e^x = -2\sin(x)e^x$$

$$f'''(x) = -2(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x)$$

$$f^4(x) = -2(\cos(x)e^x - \sin(x)e^x + \cos(x)e^x + \sin(x)e^x) = -4\cos(x)e^x$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} + R_n \quad \text{donde} \quad R_n(x) = -\frac{1}{6} \cos(c) e^c x^4$$





$$f(x) = e^x \cos(x)$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6} \cos(c) e^c x^4$$

1. Utilice el polinomio de Taylor $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Encuentre un límite superior para el error cometido utilizando la fórmula de $R_3(x)$ y compárelo con el verdadero error cometido.

$$f(0.5) = 1.446889036584169$$

$$P(0.5) = 1.4583$$

$$|f(0.5) - P(0.5)| = 0.01144429749169$$

$$|R_3(x)| \leq -e^c \cos(c) \frac{x^4}{6} = -e^c \frac{(0.5)^4}{6} \leq -e^{0.5} \frac{(0.5)^4}{6}$$

$$|R_3(x)| = 0.017174179903126$$

2. y 3. Aproxime utilizando la aproximación. Estime una cota superior al error cometido al aproximar la función por $P_3(x)$ en el intervalo en el intervalo $[0,1]$

$$\int_0^1 e^x \cos(x) dx = 1.3787$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 \left(1 + x + \frac{x^3}{3}\right) dx = 1.4167$$

$$|1.4167 - 1.3780| = 0.0387$$

$$\int_0^1 \left(-\cos(c)e^c \frac{x^4}{6}\right) dx = -\frac{1}{30} \cos(c)e^c$$

$$\left| -\frac{1}{30} \cos(c)e^c \right| \leq \left| -\frac{1}{30} e \right| = 0.0906093943$$

Dado

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^n \frac{f^j(x_0)}{j!} (x - x_0)^j}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

y sea $I = \int_a^b f(x)dx$ entonces,

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_a^b (P_n(x) + R_n(x))dx \right| \leq \int_a^b |P_n(x) + R_n(x)|dx \\ &\leq \int_a^b (|P_n(x)| + |R_n(x)|)dx = \int_a^b |P_n(x)|dx + \int_a^b |R_n(x)|dx \\ &\leq I_{aprox} + \int_a^b Mdx = I_{aprox} + M(b-a) \end{aligned}$$

donde $M = \|R_n(x)\| = \sup |R_n(x)|$

Cota máxima del
error cometido

$$|I| = I_{aprox} + M(a - b)$$

Observación 1

M existe si $f \in C^{n+1}[0, b]$

Así, $I \approx I_{aprox}$ cometiendo un error acotado por $M(a - b)$.

Observación 2

Si $n \longrightarrow \infty$ y $f \in C^\infty[0, b] \Rightarrow \|R_n(x)\| \longrightarrow 0$ teniendo que $I = I_{aprox}$