Universidad Industrial de Santander
Maestría en Matemática Aplicada
Modelado Matemático II

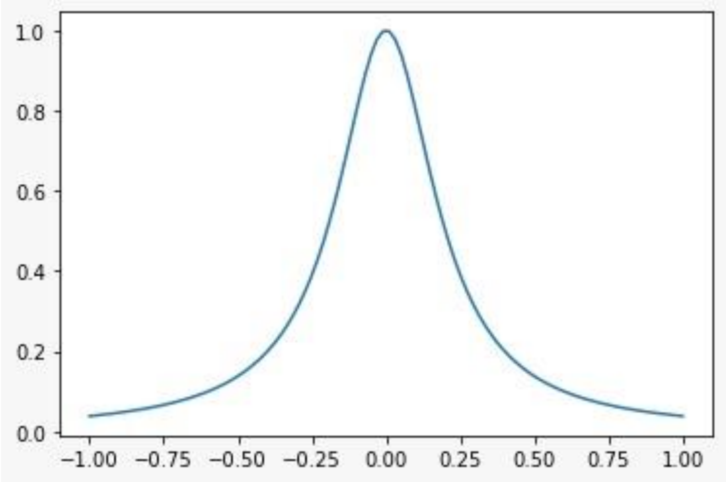
Interpolación con Spline Cúbica

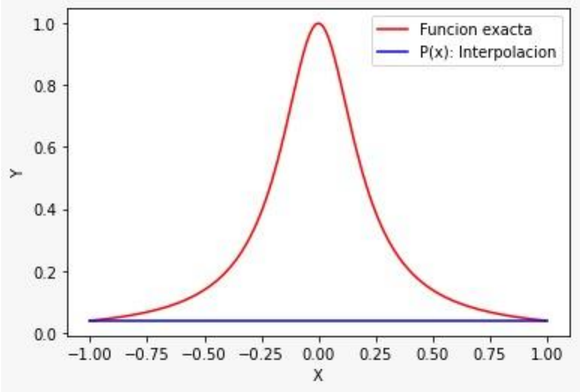
Eliana Bonalde
Prof.: Juan Carlos Basto Pineda

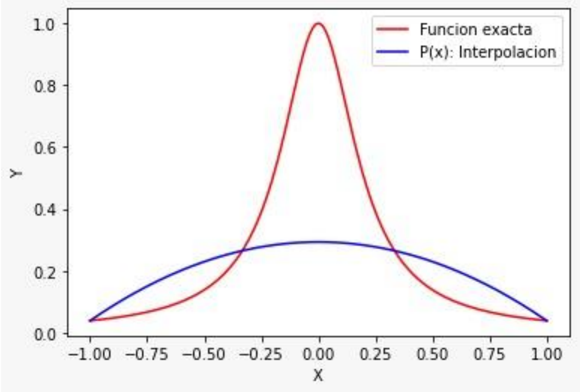
Fenómeno de Runge

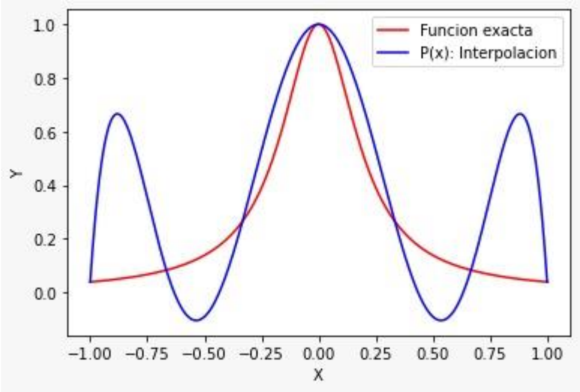
Si se interpola la función con nodos equidistantes, el error de interpolación crece al aumentar el grado del polinomio.

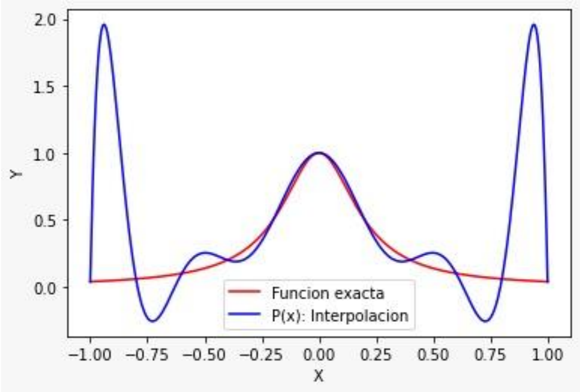
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ en } [-1, 1]$$

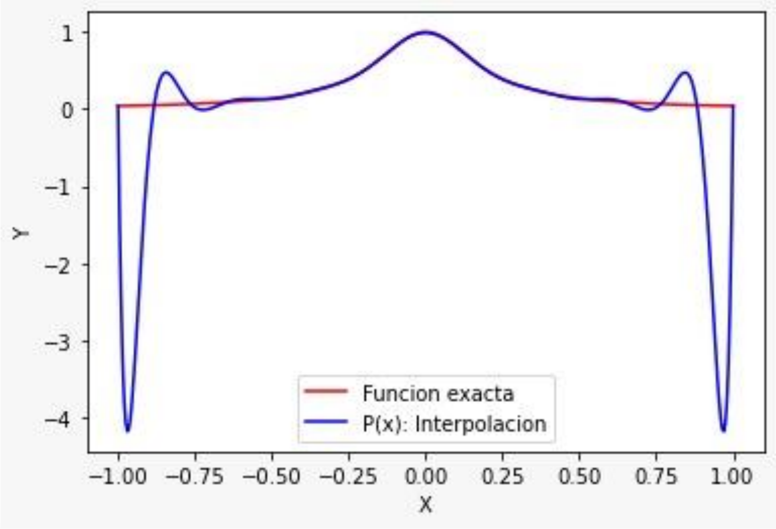






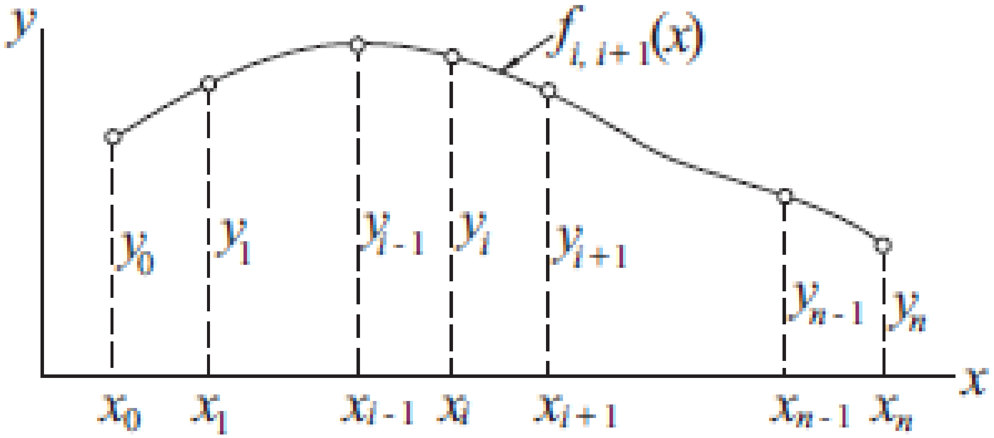






Funciones Spline

Funciones polinómicas a trozos diferenciables hasta un cierto orden en un intervalo dado.



Condiciones para determinar los coeficientes de las funciones polinómicas

1. $f_i(x_i) = y_i$
2. $f_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
3. $f'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$
4. $f''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

Interpolación con Spline Cúbica

Cada polinomio es de grado 3.

Las funciones Splines Cúbicas son las más usadas en entre las Spline para los problemas de interpolación, debido a que son suficientemente suaves para ajustar datos y no tienen el comportamiento oscilatorio que caracteriza a la interpolación con polinomios de alto grado.

Interpolación con Spline Cúbica

Dado que $f(x)$ es cúbico en $[x_i, x_{i+1}]$, la segunda derivada es lineal, utilizando Lagrange con dos puntos de interpolación

$$f''_{i,i+1}(x) = \frac{k_i(x - x_{i+1}) - k_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Integrando dos veces se tiene que

$$f_{i,i+1}(x) = \frac{k(x - x_{i+1})^3 - k_{i+1}(x - x_i)^3}{6(x_i - x_{i+1})} + A(x - x_{i+1}) - B(x - x_i)$$

Con la condición de interpolación y sustituyendo en la ecuación anterior

$$f_{i,i+1}(x_i) = y_i \qquad A = \frac{y_i}{x_i - x_{i+1}} - \frac{k_i}{6}(x_i - x_{i+1})$$

$$f_{i,i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad B = \frac{y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{k_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})$$

Por lo tanto,

$$\boxed{f_{i,i+1} = \frac{k_i}{6}\left[\frac{(x - x_{i+1})^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_{i+1})(x_i - x_{i+1})\right] - \frac{k_{i+1}}{6}\left[\frac{(x - x_i)^3}{x_i - x_{i+1}} - (x - x_i)(x_i - x_{i+1})\right] + \frac{y_i(x - x_{i+1}) - y_{i+1}(x - x_i)}{x_i - x_{i+1}}}$$

Para encontrar los k_i, se usa la continuidad en la primera derivada

$$f'_{i,i-1}(x_i) = f'_{i,i+1}(x_i),\ i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

Igualando tenemos

$$\boxed{k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + 2k_i(x_{i-1} - x_{i+1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = 6\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right),\ i = 1, 2, 3, \cdots, n-1}$$

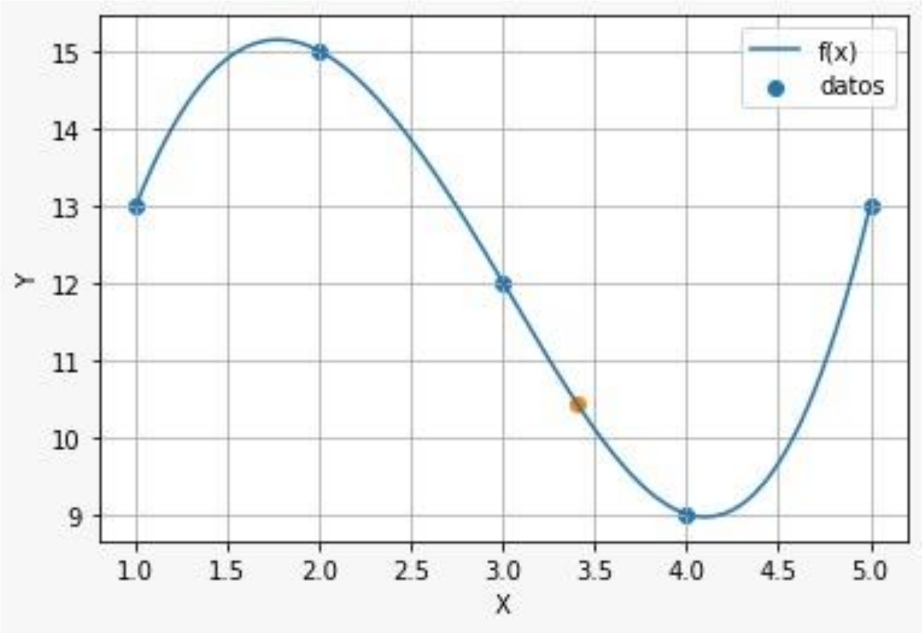
Si están igualmente espaciados, la expresión se reduce a

$$\boxed{k_{i-1} + 4k_i + k_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}),\ i = 1, 2, 3, \cdots, n-1}$$

Given the data points

x	1	2	3	4	5
y	13	15	12	9	13

determine the natural cubic spline interpolant at $x = 3.4$.



$$k_1 = 0, k_2 = -6.75, k_3 = -3, k_4 = 18.75, k_5 = 0$$

$$f_{3,4}(x) = \frac{-1}{2}\Big((x-4)^3 - (x-4)\Big) - \frac{-18.75}{6}\Big((x-3)^3 - (x-3)\Big) + 12(x-4) - 9(x-3)$$

$$f_{3,4}(3.4) \approx 10.44$$

Referencias

- Kiusaaas, Jaan. (2013) Numerical Methods in Engineering with Python 3. Cambridge University Press. United States of Americas.
- Burden, Richard L./ J. Faires Dougals (2011) Análisis Numérico, Novena edición. Cengage Learning México.