Errores de truncamiento en las series de Taylor

El teorema de Taylor establece que dado un entero positivo n, y una función que es derivable al menos n veces con todas sus derivadas contínuas alrededor de x_0, el valor de la función en un punto x en la vecindad de x_0 se puede expresar como

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} ,$$

para algún valor c entre x_0 y x. Este resultado puede escribirse de forma compacta

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) .$$

El polinomio obtenido al truncar la serie en n términos es llamado el n-*ésimo* polinomio de Taylor de la función, y R_n es el residuo o error de truncamiento.

La aproximación en polinomios de Taylor es útil en muchos casos para simplificar las operaciones. Por su parte, la comprensión del término R_n nos permite colocar una cota superior al error de truncamiento cometido.

Veamos un ejemplo.

¿Cuál es el máximo error esperado al aproximar $cos(x)$ mediante $P_3(x)$ en torno a $x_0 = 0$?

En este caso, el teorema de Taylor resulta: $cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\, cos(c)$. Si deseamos evaluar $P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ en $x = 0{,}01$, obtenemos $P_3(0{,}01) = 0{,}99995$. En cuanto al residuo o error, ya que $-1 \leq cos(c) \leq 1$ podemos escribir:

$$|R_3(0{,}01)| = \frac{1}{24}(0{,}01)^4\, |cos(c)| \leq 4{,}16 \times 10^{-10} .$$

Considere el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de la función $f(x) = e^x cos(x)$ alrededor de $x = 0$.

1. Utilice $P_3(0{,}5)$ para aproximar $f(0{,}5)$. Encuentre un límite superior para el error cometido utilizando la fórmula de $R_3(x)$, y compárelo con el verdadero error cometido.

2. Estime una cota superior al error cometido al aproximar la función por $P_3(x)$ en el intervalo $[0, 1]$

3. Aproxime $\int_0^1 f(x)dx$ utilizando la aproximación $\int_0^1 P_3(x)dx$.

4. Provea un límite superior al error cometido en la aproximación anterior mediante el cálculo de $\left|\int_0^1 R_3(x)dx\right|$, y compare esta cota al verdadero error cometido.