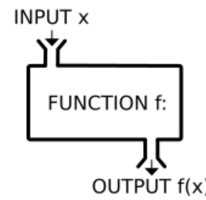
# *Marco Teórico*

**Funciones.**



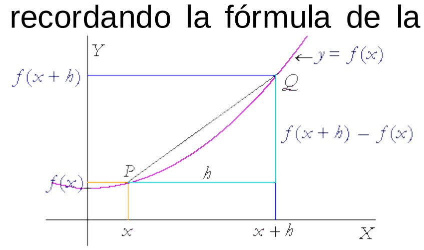

En matemáticas, una función $f$ de un conjunto $X$ a un conjunto $Y$ es una asignación de un elemento de $Y$ a cada elemento de $X$. El conjunto $X$ es el dominio de la función y el conjunto Y es el rango de la función. En otras palabras, se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto. Denominado $f(x)$, o acotado como $y$ **[1]**.

Normalmente se trabaja con funciones de tipo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o sea, el dominio es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de todos los números reales **[2]**.

**Derivadas.**

En cálculo diferencial, la derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función **[3]**.

Dada una función $f$, se puede definir una nueva función que, en cada punto $x$, toma el valor de la derivada $f'(x)$. Deriva por definición, recordando la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:




$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de $f'$ está contenido en el de $f$. Para que una función sea derivable en un punto es necesario que también sea continua en ese punto, además, el que una función sea continua no garantiza su derivabilidad. Notaciones más usadas para la derivada:

- **Lagrange:** $f^{(n)}(x)$ detona la n-ésima derivada de $f$; por ejemplo, $f''(x)$, $f^{(4)}(x)$ o $f^{IV}(x)$.
- **Leibniz:** $\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)\big)$ significa evaluar la derivada de $f$; por ejemplo, $\frac{df}{dx}$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$.

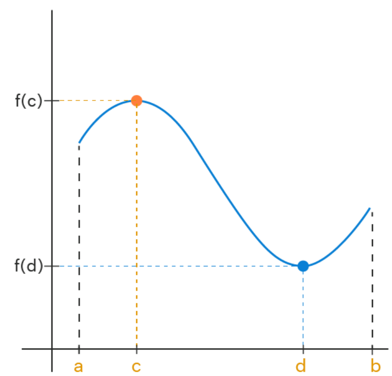
**Extremos.**

Una función $f(x)$ tiene un máximo en $x_0$ si $f(x_0) > f(x)$ para cualquier $x$ en un intervalo suficientemente pequeño alrededor de $x_0$. De manera similar, tiene un mínimo en $x_1$ si $f(x_1) > f(x)$ en su vecindad **[4]**.

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene un máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.

Los puntos críticos son aquellos donde la derivada se anula o no está definida. Si $f$ es derivable en $a$ y $f'(a) = 0$, entonces $a$ es un punto crítico. Si $f''(a) > 0$, el punto crítico es un mínimo. Si $f''(a) < 0$, el punto crítico es un máximo.

Además, el teorema fundamental del álgebra afirma que cualquier polinomio de grado $n$ sobre $\mathbb{C}$ tiene a lo sumo $n$ raíces diferentes y si se cuenta la multiplicidad de cada raíz entonces puede afirmarse que existen exactamente $n$ raíces. La raíz o cero de una función $f(x)$ se refiere a cualquier elemento $x$ en el dominio de la función que satisface la ecuación $f(x) = 0$ **[5]**.




**Métodos numéricos.**

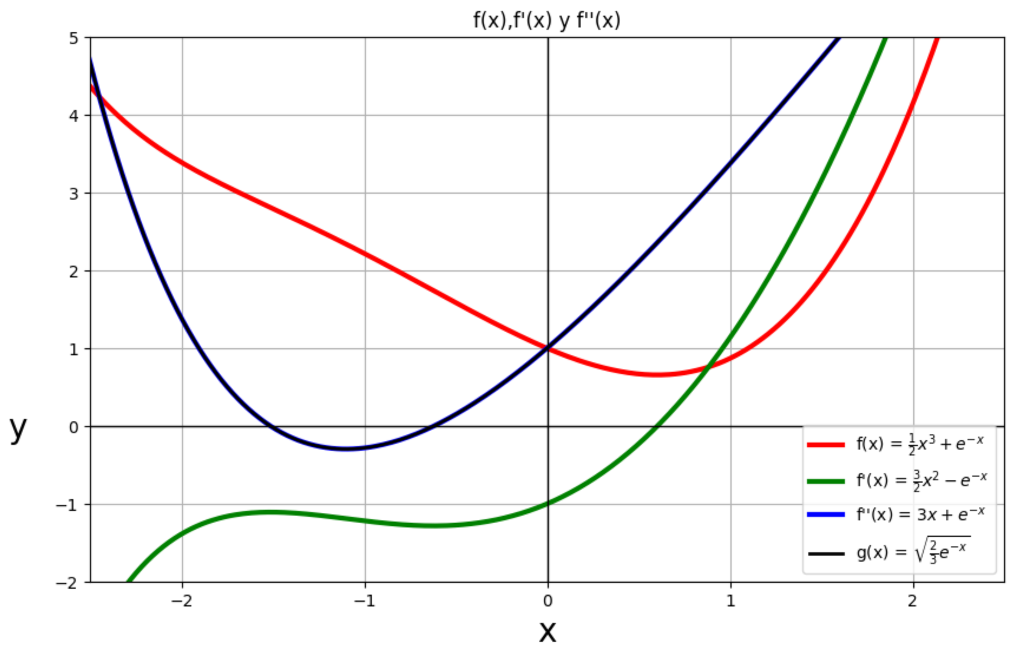
La mayor parte de las matemáticas se han dedicado a desarrollar métodos que nos proporcionen la solución exacta de un problema. Desgraciadamente, en la gran mayoría de los casos que se presentan en la práctica, estos métodos no son de aplicación **[6]**.

En estos casos es necesario recurrir a métodos numéricos, denominados así porque, usualmente, consisten en realizar una sucesión de operaciones numéricas, normalmente mediante un hardware de procesamiento, al cabo de las cuales encontramos un valor numérico que, si bien no es la solución exacta, se aproxima.

# *Análisis*

**Tarea 2.**

Como ingenieros biomédicos, hoy tenemos la tarea de encontrar el mínimo de una función dada; en el futuro nos podría ayudar a encontrar el ajuste óptimo de parámetros en la dosificación de medicamentos, por ejemplo.




La función dada es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + e^{-x}$. Con la cual encontramos su primera y segunda derivada, $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - e^{-x}$ y $f''(x) = 3x + e^{-x}$ respectivamente, además de despejar $x$ implícitamente de la primera derivada: $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}e^{-x}}$. Usaremos de intervalo $[.5,1]$ y como punto inicial $.5$ **[7]**.

**Bisección.**

*bisección (.5,1)*

| i | i≤m | aproximación | convergencia |
|---|---|---|---|
| 0 | ✓ | .75 | $2.5\times10^{-1}$ |
| 1 | ✓ | .625 | $1.25\times10^{-1}$ |
| 2 | ✓ | .5625 | $6.25\times10^{-2}$ |
| 3 | ✓ | .59375 | $3.125\times10^{-2}$ |
| 4 | ✓ | .609375 | $1.5625\times10^{-2}$ |
| 5 | ✓ | .6015625 | $7.8125\times10^{-3}$ |
| 6 | ✓ | .60546875 | $3.90625\times10^{-3}$ |
| 7 | ✓ | .603515625 | $1.953125\times10^{-3}$ |
| 8 | ✓ | .6044921875 | $9.765625\times10^{-4}$ |
| 9 | ✓ | .6040039062 | $4.8828125\times10^{-4}$ |
| 10 | ✓ | .6037597656 | $2.44140625\times10^{-4}$ |
| 11 | ✓ | .6036376953 | $1.220703125\times10^{-4}$ |
| 12 | ✓ | .6036987305 | $6.103515625\times10^{-5}$ |
| 13 | ✓ | .603729248 | $3.0517578125\times10^{-5}$ |
| 14 | ✓ | .6037445068 | $1.5258789062\times10^{-5}$ |
| 15 | ✓ | .6037368774 | $7.6293945312\times10^{-6}$ |
| 16 | ✓ | .6037406921 | $3.8146972656\times10^{-6}$ |
| 17 | ✓ | .6037425995 | $1.9073486328\times10^{-6}$ |
| 18 | ✓ | .6037435532 | $9.5367431641\times10^{-7}$ |

Este método encuentra una raíz, utilizamos $f'$ para encontrar el punto crítico de $f$ en el intervalo; $f''(x)$ indica que es un mínimo.

*bisección (.5,1)*

| punto | f(x)≈ | f'(x)≈ | f''(x)≈ |
|---|---|---|---|
| x<br>0.6037435531616211 | mínimo<br>0.6567951290491637 | punto crítico<br>0.0 | convexo<br>2.357993247973628 |

**Punto fijo.**

Este método encuentra una raíz, despejamos $x$ implícitamente de $f'(x)$ para encontrar el punto crítico de $f$ cerca de un punto fijo y $f''(x)$ indica que es un mínimo.

punto fijo .5

| i | i≤m | aproximación | convergencia |
|---|---|---|---|
| 0 | ✓ | .6358881766 | $1.358881766\times10^{-1}$ |
| 1 | ✓ | .5941184063 | $4.1769770347\times10^{-2}$ |
| 2 | ✓ | .6066569785 | $1.2538572264\times10^{-2}$ |
| 3 | ✓ | .6028655695 | $3.79140905\times10^{-3}$ |
| 4 | ✓ | .6040095084 | $1.1439389305\times10^{-3}$ |
| 5 | ✓ | .6036641322 | $3.453762138\times10^{-4}$ |
| 6 | ✓ | .6037683868 | $1.042546177\times10^{-4}$ |
| 7 | ✓ | .6037369148 | $3.1472000889\times10^{-5}$ |
| 8 | ✓ | .6037464153 | $9.5004791094\times10^{-6}$ |
| 9 | ✓ | .6037435473 | $2.8679332913\times10^{-6}$ |
| 10 | ✓ | .6037444131 | $8.6574873026\times10^{-7}$ |

punto fijo .5

| punto | f(x)≈ | f'(x)≈ | f''(x)≈ |
|---|---|---|---|
| x<br>0.6037444130967766 | mínimo<br>0.6567951290491637 | punto crítico<br>0.0 | convexo<br>2.357993247973628 |

**Newton-Raphson.**

Este método encuentra una raíz muy rápido cerca de un punto inicial, se usa tanto $f'$ como $f''$ y un punto inicial para encontrar el mínimo en $f$; $f''(x)$ indica que es un mínimo.

newton-raphson .5

| i | i≤m | aproximación | convergencia |
|---|---|---|---|
| 0 | ✓ | .60991089 | $1.0991089004\times10^{-1}$ |
| 1 | ✓ | .6037638861 | $6.1470039323\times10^{-3}$ |
| 2 | ✓ | .6037442126 | $1.9673558743\times10^{-5}$ |
| 3 | ✓ | .6037442124 | $2.0134201742\times10^{-10}$ |

newton-raphson .5

| punto | f(x)≈ | f'(x)≈ | f''(x)≈ |
|---|---|---|---|
| x<br>0.6037442123509239 | mínimo<br>0.6567951290491637 | punto crítico<br>0.0 | convexo<br>2.357993247973628 |

**Secante.**

Similar a Newton-Raphson, pero usa un intervalo y una aproximación de $f''$; $f''(x)$ indica que es un mínimo.

secante (.5,1)

| i | i≤m | aproximación | convergencia |
|---|---|---|---|
| 0 | ✓ | .5848936504 | $4.1510634957\times10^{-1}$ |
| 1 | ✓ | .600428086 | $1.5534435592\times10^{-2}$ |
| 2 | ✓ | .6037770546 | $3.3489685956\times10^{-3}$ |
| 3 | ✓ | .6037441556 | $3.2899004436\times10^{-5}$ |
| 4 | ✓ | .6037442123 | $5.673621068\times10^{-8}$ |

secante (.5,1)

| punto | f(x)≈ | f'(x)≈ | f''(x)≈ |
|---|---|---|---|
| x<br>0.6037442123499547 | mínimo<br>0.6567951290491637 | punto crítico<br>0.0 | convexo<br>2.357993247973628 |

## Sección Áurea.

Este método encuentra directamente un punto mínimo en $f$ en un intervalo; el valor encontrado se evalúa tanto en $f'$ como en $f''$ indicando que es un mínimo.

*sección áurea (.5,1)*

| i | i≤m | aproximación | convergencia |
|---|---|---|---|
| 0 | ✓ | .75 | $5\times10^{-1}$ |
| 1 | ✓ | .6545084972 | $3.0901699437\times10^{-1}$ |
| 2 | ✓ | .5954915028 | $1.9098300563\times10^{-1}$ |
| 3 | ✓ | .6319660113 | $1.1803398875\times10^{-1}$ |
| 4 | ✓ | .6094235253 | $7.2949016875\times10^{-2}$ |
| 5 | ✓ | .5954915028 | $4.5084971875\times10^{-2}$ |
| 6 | ✓ | .6041019662 | $2.7864045\times10^{-2}$ |
| 7 | ✓ | .5987804072 | $1.7220926874\times10^{-2}$ |
| 8 | ✓ | .6020693116 | $1.0643118126\times10^{-2}$ |
| 9 | ✓ | .6041019662 | $6.5778087482\times10^{-3}$ |
| 10 | ✓ | .6028457166 | $4.0653093779\times10^{-3}$ |
| 11 | ✓ | .6036221216 | $2.5124993703\times10^{-3}$ |
| 12 | ✓ | .6041019662 | $1.5528100076\times10^{-3}$ |
| 13 | ✓ | .6038054059 | $9.5968936275\times10^{-4}$ |
| 14 | ✓ | .6036221216 | $5.9312064482\times10^{-4}$ |
| 15 | ✓ | .6037353975 | $3.6656871793\times10^{-4}$ |
| 16 | ✓ | .6038054059 | $2.2655192689\times10^{-4}$ |
| 17 | ✓ | .6037621384 | $1.4001679104\times10^{-4}$ |
| 18 | ✓ | .6037353975 | $8.6535135856\times10^{-5}$ |
| 19 | ✓ | .6037519243 | $5.348165518\times10^{-5}$ |
| 20 | ✓ | .6037417102 | $3.3053480676\times10^{-5}$ |
| 21 | ✓ | .6037480228 | $2.0428174504\times10^{-5}$ |
| 22 | ✓ | .6037441214 | $1.2625306172\times10^{-5}$ |
| 23 | ✓ | .6037465326 | $7.8028683325\times10^{-6}$ |
| 24 | ✓ | .6037450424 | $4.8224378392\times10^{-6}$ |
| 25 | ✓ | .6037441214 | $2.9804304932\times10^{-6}$ |
| 26 | ✓ | .6037446906 | $1.8420073459\times10^{-6}$ |
| 27 | ✓ | .6037443388 | $1.1384231473\times10^{-6}$ |
| 28 | ✓ | .6037441214 | $7.0358419857\times10^{-7}$ |

*sección áurea (.5,1)*

| punto | f(x)≈ | f'(x)≈ | f''(x)≈ |
|---|---|---|---|
| x<br>0.6037441214037613 | mínimo<br>0.6567951290491637 | punto crítico<br>0.0 | convexo<br>2.357993247973628 |

## Métodos.

*punto mínimo*

| i | bisección | punto fijo | newton-raphson | secante | sección áurea |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.75 | 0.6358881766016378 | 0.609910890043356 | 0.5848936504307607 | 0.75 |
| 1 | 0.625 | 0.5941184062549805 | 0.6037638861110087 | 0.6004280860225346 | 0.6545084971874737 |
| 2 | 0.5625 | 0.6066569785187103 | 0.603744212552266 | 0.6037770546181802 | 0.5954915028125263 |
| 3 | 0.59375 | 0.6028655694686769 | 0.6037442123509239 | 0.603744155613744 | 0.6319660112501051 |
| 4 | 0.609375 | 0.6040095083992182 | | 0.6037442123499547 | 0.6094235253127365 |
| 5 | 0.6015625 | 0.6036641321854206 | | | 0.5954915028125263 |
| 6 | 0.60546875 | 0.6037683868031176 | | | 0.6041019662496845 |
| 7 | 0.603515625 | 0.6037369148022282 | | | 0.5987804071866325 |
| 8 | 0.6044921875 | 0.6037464152813377 | | | 0.6020693115607387 |
| 9 | 0.60400390625 | 0.6037435473480464 | | | 0.6041019662496845 |
| 10 | 0.603759765625 | 0.6037444130967766 | | | 0.6028457165645241 |
| 11 | 0.6036376953125 | | | | 0.6036221215683095 |
| 12 | 0.60369873046875 | | | | 0.6041019662496845 |
| 13 | 0.603729248046875 | | | | 0.6038054059272739 |
| 14 | 0.6037445068359375 | | | | 0.6036221215683096 |
| 15 | 0.6037368774414062 | | | | 0.6037353975317559 |
| 16 | 0.6037406921386719 | | | | 0.6038054059272739 |
| 17 | 0.6037425994873047 | | | | 0.6037621383593459 |
| 18 | 0.6037435531616211 | | | | 0.6037353975317559 |
| 19 | | | | | 0.6037519242720939 |
| 20 | | | | | 0.6037417101848417 |
| 21 | | | | | 0.6037480228379276 |
| 22 | | | | | 0.6037441214037613 |
| 23 | | | | | 0.603746532622681 |
| 24 | | | | | 0.6037450424074344 |
| 25 | | | | | 0.6037441214037613 |
| 26 | | | | | 0.603744690615335 |
| 27 | | | | | 0.6037443388232357 |
| 28 | | | | | 0.6037441214037613 |

**Código.**

Se utilizó el lenguaje de programación Python 3.11.1, además de las librerías numpy, matplotlib, sympy, time, os y rich. Se realizaron tres scripts, *tarea2.py*, *metnum.py* y *table.py*, los cuales hacen:

- **tarea2:** toma una función matemática, específicamente $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + e^{-x}$ aunque puede funcionar con una gran variedad de funciones debido a la autonomía del código, realiza una serie de operaciones para visualizarla junto con sus derivadas. Primero, calcula la primera y segunda derivada de la función. Luego, resuelve la ecuación donde la primera derivada es igual a cero, obteniendo una solución que se utiliza para definir otra función. Las expresiones matemáticas se convierten a funciones numéricas para poder evaluarlas. Además, se formatea la salida de las expresiones matemáticas utilizando *LaTeX* para que se vean bien en el gráfico. Finalmente, se genera un gráfico que muestra la función original, sus derivadas y la función adicional calculada a partir de la solución de la primera derivada. El gráfico incluye etiquetas, leyendas y una cuadrícula para facilitar la interpretación.
- **metnum:** define los métodos numéricos para encontrar raíces de funciones o puntos mínimos. Cada función itera hasta alcanzar una tolerancia o un número máximo de iteraciones, almacenando información de cada paso en una variable global.
- **table:** ejecuta y muestra los resultados de los métodos numéricos. Permite al usuario elegir entre mostrar una tabla comparativa de todos los métodos o analizar un método específico en detalle. La salida se presenta en tablas, mostrando iteraciones, aproximaciones y convergencia, además de un análisis del punto encontrado (mínimo, máximo, punto crítico, concavidad/convexidad). La ejecución se repite hasta que el usuario decide terminar.

Se hizo frac_latex() para formatear la salida de las expresiones, por ejemplo: pasar de $\frac{x^3}{2}$ a $\frac{1}{2}x^3$.

Para despejar implícitamente de la primera derivada se tuvieron que hacer un proceso, ya que si se intentaba resolver simplemente con sympy.solve, entregaba un despeje de $f'(x) = 0$: *2*LambertW(sqrt(6)/6)*, que lo evalúa como: *0.603744212350924*, mientras que WolframAlpha como: 0.6037442123509239..., como se observa como comentario en la línea 17.

Una vez teniendo el despeje implícito, se grafica de color negro, pero con un grosor menor que las demás funciones para observar fácilmente que es igual a $f'(x)$.

Cuando se realizan los cálculos de los métodos numéricos, se trata de usar el menor número de variables posible, esto ayuda a simplificar algunas operaciones. El número por defecto de las iteraciones está dado por el número de iteraciones por las cuales cada método converge ($\varepsilon = 0$). Como comentario después de cada mensaje de error se encuentra el número de iteraciones que necesita cada método.

La lista global *t* ayuda a tabular fácilmente. La segunda tabla de cada método se utilizó el valor de *newton_raphson(.5,*$\varepsilon = 0$*)* como aproximación al punto mínimo ya que es el método que más rápido converge (siendo incluso mejor que *2*LambertW(sqrt(6)/6)* ya que tiene más precisión devolviendo 0.6037442123509239); por eso hay una pequeña modificación en ese método (de $< \varepsilon$ a $<= \varepsilon$).

Además, en cada tabla se customizan los valores para mostrarlos en las tablas de la manera más estética. Por último, se simula un "menú" desde la terminal para seleccionar la tabla o las tablas a mostrar.

Código: https://github.com/juan-torresf/metnum.tarea2.

# *Bibliografía*


**[1]** Halmos, P. (1970). *Naive Set Theory.* Springer-Verlag.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://books.google.com.mx/books?id=x6cZBQ9qtgoC&redir_esc=y

**[2]** Nykamp, D. (2017). *Domain definition.* Math Insight.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://mathinsight.org/definition/domain

**[3]** Luthe, R. (1984). *Métodos Numéricos.* Limusa.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://repositorio-uapa.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/2699/mod_resource/content/1/UAPA-Derivada/index.html

**[4]** Fernández, J. (2025). *Extremos de una Función.* fisicalab.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://www.fisicalab.com/apartado/extremos-funcion

**[5]** Weisstein, E. (2025). *Root.* Wolfram MathWorld.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://mathworld.wolfram.com/Root.html

**[6]** Echevarría, R. (2019). *Matemáticas Aplicadas a la Biología.* Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico de la Universidad de Sevilla.
Recuperado el 16 de marzo de 2025 de:
https://departamento.us.es/edan/php/asig/GRABIO/GBM/ApuntesBIOMAB.pdf

**[7]** Mata, M. (2024). *Métodos numéricos.* Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León.
Recuperado el 5 de febrero de 2025 de:
http://logistica.fime.uanl.mx/miguel/docs/MetNum.pdf