# Práctico 4 - Ecuaciones no lineales

Los ejercicios 9 y 11 son los "entregables" de este práctico. Todo estudiante inscripto en el curso va a tener asignado un único ejercicio del práctico 4, 5, 6, o 7 para entregar antes del comienzo del segundo período de parciales. **El 21 de noviembre vamos a avisar qué ejercicio le corresponde a cada estudiante, por lo que recomendamos fuertemente haber terminado y tener escrito los ejercicios 9 y 11 y para esa fecha.**

**Ejercicio 1** (Cómputo de recíprocos)**.** Para $a > 0$ fijo, buscamos determinar el valor de $1/a$. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x} - a,$$

y busquemos la solución de $f(x) = 0$ con el método de Newton.

a) Escribir la iteración de Newton y mostrar que converge si $0 < x_0 < 1/a$.

[Sugerencia: se puede usar un argumento geométrico o demostrar que $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada por $1/a$.]

b) Usar esta iteración para aproximar $1/\pi$: elegir un valor inicial apropiado y calcular tres iterados. Comparar el resultado con el valor numérico dado por Octave.

**Ejercicio 2** (Newton en condiciones favorables)**.** Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x + x^4$ y obtener una recursión explícita, expresando $e^{k+1}$ en función de $e^k$ (observar que $x_* = 0$). Obtener el orden de convergencia para este problema. ¿Por qué es consistente con el orden que demostramos en teórico?

**Ejercicio 3** (Convergencia a distintas raíces)**.** El siguiente es un polinomio cúbico con tres raíces cercanas entre sí:

$$p(x) = 816x^3 - 3835x^2 + 6000x - 3125.$$

a) Usar los comandos `sym` y `factor` para determinar cuáles son las raíces exactas de $p$.

b) Graficar $p(x)$ para $1{,}43 \leq x \leq 1{,}71$, y mostrar la ubicación de las tres raíces.

c) Comenzando con $x^0 = 1{,}5$, ¿qué hace el método de Newton?

d) Comenzando con $x^0 = 1$, $x^1 = 2$, ¿qué hace el método de la secante?

e) Comenzando con el intervalo $[1, 2]$, ¿qué hace el método de bisección?

**Ejercicio 4** (Basado en el examen de diciembre de 2024)**.** En este ejercicio se desea aproximar, mediante el método de la secante, una raíz $x_*$ de una función $f$ tan regular como sea necesario.

a) Sea $k \geq 1$. Dados $x_{k-1}$ y $x_k$, justificar gráficamente cómo se computa $x_{k+1}$ y deducir la iteración del método de la secante.

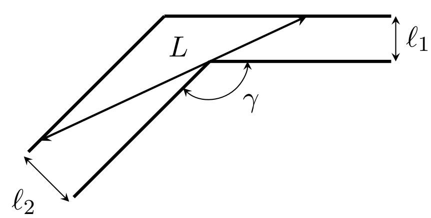
b) Se define el error en el paso $k$-ésimo como $e_k := x_k - x_*$. Probar que, si el iterado $x^{k+1}$ está bien definido, entonces se cumple una desigualdad de la forma $|e_{k+1}| \leq C_{k+1}|e_k|\,|e_{k-1}|$ para un valor de $C_{k+1}$ a definir. (Sugerencia: usar las cotas de error conocidas para polinomios interpolantes).

c) Sea $f(x) = x^2 + 2x$, y queremos aproximar su raíz $x_* = 0$. Se inicializa el método de la secante con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Computar $x_2$ y verificar que se cumple la desigualdad de la parte anterior para $k = 1$.

**Ejercicio 5** (Secante en un caso difícil)**.** Investigar el comportamiento del método de la secante para la función

$$f(x) = \mathrm{sg}(x-a)\sqrt{|x-a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Ejercicio 6** (Pasar un pizarrón por un pasillo)**.** Un pasillo tiene la forma que se muestra en la siguiente figura.




El largo máximo $L$ de un pizarrón de grosor despreciable que pasa por el pasillo está dado por

$$L = \frac{\ell_2}{\mathrm{sen}(\pi - \gamma - \alpha)} + \frac{\ell_1}{\mathrm{sen}(\alpha)},$$

donde $\alpha$ es la solución de la ecuación

$$\frac{\ell_2 \cos(\pi - \gamma - \alpha)}{\mathrm{sen}^2(\pi - \gamma - \alpha)} - \frac{\ell_1 \cos(\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)} = 0.$$

a) Escribir una función de Octave que, tomando como entradas los valores de $\ell_1 > 0$, $\ell_2 > 0$, y $\gamma \in (0, \pi)$, devuelva el largo máximo de pizarrón que pasa por un pasillo como el de la figura. Usar esa función para determinar el largo máximo de pizarrón que pasa por un pasillo en el que $\ell_1 = 1m$, $\ell_2 = 1{,}5m$, y $\gamma = 3\pi/5$.

b) Se tiene un pasillo con $\ell_1 = 1$m, $\ell_2 = 1{,}5$m, y un pizarrón de $5m$ de largo. Determinar el valor mínimo de $\gamma \leq \pi$ que permite que el pizarrón pueda pasar por el pasillo.

c) Se sabe que uno de los dos pasillos tiene el doble de ancho que el otro, que el codo es $\gamma = \pi/2$, y que un pizarrón de $3m$ de largo pasa justo. ¿Qué ancho tienen los pasillos?

**Ejercicio 7** (Interpolación)**.** La siguiente es una tabla de la distancia $d$ que un vehículo requiere para detenerse si se lo frena cuando está viajando a una velocidad $v$.

| $v$ ($m/s$) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ ($m$) | 0 | 5 | 20 | 46 | 70 | 102 | 153 |

Determinar la relación $d(v)$ y hallar cuál es la velocidad límite para este vehículo si tiene que detenerse en a lo sumo 60 $m$. Hacerlo en las tres siguientes maneras:

1. usando interpolación lineal a trozos;

2. usando interpolación cúbica a trozos con `pchiptx`;
3. usando interpolación con splines cúbicas con `splinetx`.

**Ejercicio 8** (Iteraciones de punto fijo)**.** Para resolver la ecuación $x + \log(x) = 0$ usando una iteración de punto fijo, se proponen las siguientes fórmulas:

$$x^{k+1} = -\log(x^k), \qquad x^{k+1} = e^{-x^k}, \qquad x^{k+1} = \frac{x^k + e^{-x^k}}{2}.$$

Si se sabe que la raíz está cerca de $x = 0{,}5$, ¿cuáles de las fórmulas anteriores se pueden usar? ¿Cuál es mejor? Experimentar con las tres fórmulas y discutir los resultados.

**Ejercicio 9** (Un método iterativo)**.** El método de Newton para resolver la ecuación escalar $f(x) = 0$ requiere que evaluemos la derivada de $f$ en cada iteración. Supongamos que reemplazamos el valor de la derivada por una constante $d$, esto es, usamos el método iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{d}.$$

a) Asumiendo que $f$ es suficientemente regular, ¿bajo qué condiciones en $d$ esta iteración es localmente convergente?

b) En general, ¿qué orden de convergencia tiene esta iteración?

c) ¿Existe un valor de $d$ que asegure convergencia cuadrática?

d) Implementar el método en Octave y usarlo para calcular numéricamente el valor de $\log 3$ como raíz de la función $f(x) = e^x - 3$. Probar iniciando con $x^0 = 1$ y con los valores $d = 1$, $d = 2$ y $d = 3$, y verificar computacionalmente lo hallado en las partes anteriores. Para ello, para los valores de $d$ para los que espera convergencia, computar para $k = 0, \dots, 4$,

$$\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^p},$$

donde $p$ es el orden de convergencia predicho.

**Ejercicio 10** (Basado en examen de julio de 2013)**.** Se desea resolver la ecuación de punto fijo $x = f(x)$, con $f$ de clase $C^2$, utilizando el siguiente método:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}, \\ x^{k+1} = x^k + a(x^k - f(x^k)). \end{cases} \tag{M}$$

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método (M). Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$. En las partes siguientes se utilizará el método (M) con el valor de $a$ hallado anteriormente.

b) Sea $f(x) = 2/x$. Hallar el mayor intervalo $I$ tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que $x_0 \in I$.

c) Sean $x^0 = 1$ y $e^k = x^k - \sqrt{2}$ el error en el paso $k$. Haciendo un desarrollo de Taylor para $g(x) = x + a(x - f(x))$ alrededor de $\sqrt{2}$, y usando que $2/x^3 \leq 2$ para todo $x \in [1, 2]$, probar que $|e^{k+1}| \leq (e^k)^2$ para todo $k$.

d) Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que $10^{-5}$.

e) Mostrar que, si en vez de un desarrollo de Taylor se usa explícitamente la definición de $x^{k+1}$, se mejora un poco la cota obtenida en la parte c). Específicamente, probar que $|e^{k+1}| \leq \frac{(e^k)^2}{2}$ y afinar la cota en la cantidad de iteraciones de la parte d).

**Ejercicio 11** (Basado en el examen de marzo de 2024)**.** Consideremos la función $f(x) = e^{x/4} - x$.

a) Probar que $f$ tiene una única raíz en el intervalo $[1, 2]$, a la que llamaremos $x^*$.

b) Se propone aproximar $x^*$ mediante la iteración de punto fijo

$$x^{k+1} = e^{x^k/4}.$$

Demostrar que la iteración es consistente y que es convergente si $x^0$ está lo suficientemente cerca de $x^*$. Determinar el orden y velocidad de convergencia.

c) En lugar de la iteración de la parte anterior, se propone tomar un $\alpha \neq 0$ fijo y definir una iteración a partir de

$$x^{k+1} = \alpha e^{x^k/4} + (1 - \alpha)x^k. \tag{1}$$

¿Para qué valores de $\alpha$ la iteración es localmente convergente hacia $x^*$? Probar que es de segundo orden solamente si $\alpha = \alpha^* := \frac{4}{4-x^*}$.

d) El método (1) tiene la desventaja de que a priori no conocemos el valor numérico de $\alpha^*$. Por lo tanto, se lo reemplaza por un método iterativo en $(\alpha, x)$: dados $(\alpha^0, x^0)$, se toma

$$\alpha^{k+1} = \frac{4}{4 - x^k}, \quad x^{k+1} = \alpha^k e^{x^k/4} + (1 - \alpha^k)x^k.$$

Escribir una función de Octave que, dados dos números `x0, alpha0`, implemente este método usándolos como iterados iniciales. Fijar un valor de `x0` y reportar, para una tolerancia a elegir, cuántos iterados se necesitan para distintos valores de `alpha0`, como $0, 1, 1{,}5, 2$. Comparar con los resultados que se obtienen con la iteración de la parte b).

**Ejercicio 12** (Newton para sistemas)**.**

a) Escribir una función de Octave `raiz = newton_sistema(f,J,x0,tol,iter)` para resolver un sistema de $d$ ecuaciones con $d$ incógnitas $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ mediante el método de Newton. Las entradas de esta función deben ser una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, su matriz Jacobiana (o diferencial) $J$, un iterado inicial $\mathbf{x}_0$, una tolerancia de error relativo `tol`, y la máxima cantidad de iteraciones `iter`. Para resolver los sistemas lineales resultantes, se puede utilizar el comando `\` . La iteración debe parar si

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_2 \leq \texttt{tol}\|\mathbf{x}^k\|_2,$$

o si se alcanza el número máximo de iteraciones.

b) El siguiente sistema $2 \times 2$ tiene cuatro ceros en el dominio$(-4,4) \times (-4,4)$,

$$f(x,y) = x^2 + xy^3 - 9 = 0, \qquad g(x,y) = 3x^2y - y^3 - 4 = 0,$$

Usar los comandos `meshgrid` y `contour` para graficar las curvas de nivel 0 de $f$ y $g$ en la misma figura, de modo de determinar iterados iniciales razonables.

c) Usar `raiz = newton_sistema` para aproximar los cuatro ceros con `tol` $= 10^{-12}$. Determinar el número de iteraciones necesarias.

**Ejercicio 13** (Un sistema "casi" lineal)**.** Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z^2 + 10y^2 - 100x - 23y - 14 = 0, \\ 10xy + 10yz - 20x - 40y - z + 8 = 0, \\ 10y^2 + 10z^2 + x - 23y - 50z + 24 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Llamaremos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ al vector de las incógnitas.

a) Para hallar una aproximación inicial, suponer que los valores de $x, y, z$ son cercanos a cero, despreciar los términos de segundo grado, y hallar $\mathbf{x}^0$ como solución del sistema lineal resultante.

b) Resolver (2) usando el comando `fsolve` tomando como iterado inicial el vector $\mathbf{x}^0$ calculado anteriormente.

c) Resolver nuevamente usando el método de Newton con la función `newton_sistema`. Estudiar el error, residuo y orden de convergencia, probando con distintos $\mathbf{x}^0$.

d) Considerar el método iterativo $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ que resulta de despejar $x$ en la parte lineal de la primer ecuación, $y$ en la segunda y $z$ en la tercera. Hallar la matriz jacobiana $\mathbb{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ de la función $\mathbf{g}$, y evaluarla en el punto $\mathbf{x}^0$ hallado en la parte 1. Suponiendo que $\mathbb{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ varía poco alrededor de la raíz, ¿qué conclusiones se pueden sacar sobre la convergencia de la iteración?