Práctico 2 - Sistemas de ecuaciones lineales

Los ejercicios 7 y 12 son los "entregables" de este práctico. Todo estudiante inscripto en el curso va a tener asignado un único ejercicio del práctico 1, 2, o 3 para entregar antes del comienzo del primer período de parciales. **El 19 de setiembre vamos a avisar qué ejercicio le corresponde a cada estudiante, por lo que recomendamos fuertemente haber terminado y tener escrito los ejercicios 7 y 12 para esa fecha.**

Ejercicio 1 (Un sistema esencialmente triangular inferior)**.** Explicar cómo resolver de forma eficiente un sistema lineal de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O} & L_1 \\ L_2 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

donde L_1 y L_2 son matrices triangulares inferiores y no singulares, $\mathcal{O}$ es la matriz nula, B es una matriz arbitraria, y los vectores están particionados acordemente. Describir los pasos necesarios en términos de las submatrices y vectores dados.

Ejercicio 2 (Sustitución hacia atrás)**.** Escribir una función `x = atras(U,b)` que tome como entradas una matriz triangular superior U y un vector columna $\mathbf{b}$, y resuelva el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante sustitución hacia atrás.

Ejercicio 3 (Cómputo de determinantes)**.** La factorización $PA = LU$ se puede utilizar para computar el determinante de A. Tenemos $\det(L)\det(U) = \det(P)\det(A)$. Como L es triangular y tiene unos en la diagonal, $\det(L) = 1$. Al ser U triangular, $\det(U) = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}$. Como P es de permutaciones, $\det(P) = +1$ si la cantidad de intercambios es par y $\det(P) = -1$ si es impar. Por lo tanto,

$$\det(A) = \pm u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}.$$

Modificar la función `lutx` de modo que retorne cuatro variables.

```
function [L,U,p,sig] = lutx_modificada(A)
% LU Triangular factorization
% [L,U,p,sig] = lutx_modificada(A) computa una matriz triangular inferior L,
% una matriz triangular superior U, un vector de permutaciones p y
% un escalar sig, de forma que L*U = A(p,:) y sig = +1 o -1 si p
% es una permutacion par o impar.
```

Escribir una función `determinante(A)` que use la función `lutx_modificada` para calcular el determinante de A. El producto $u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}$ se puede calcular usando la expresión `prod(diag(U))`.

Ejercicio 4 (Cómputo de inversas)**.** La inversa de una matriz A se puede definir como la matriz X cuyas columnas $\mathbf{x}_j$ resuelven las ecuaciones

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j,$$

donde $\mathbf{e}_j$ es la j-ésima columna de la matriz identidad.

a) Tomando como punto de partida la función `bslashtx`, escribir una función `X = inversa(A)` que compute la inversa de A. Dicha función debe llamar a `lutx` solamente una vez y no debe usar ni las funciones `inv` ni \ (backslash).

b) Comparar los resultados obtenidos con esta función con las inversas obtenidas utilizando la función `inv(A)` en algunas matrices.

Ejercicio 5 (Muchos sistemas)**.** Para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $n = 100$, generar aleatoriamente 10 vectores $\mathbf{b}$ diferentes y resolver los 10 sistemas correspondientes de dos formas distintas:

- usando la función `bslashtx` para cada sistema;
- usando la función `lutx` una vez y sustitución hacia adelante y atrás para cada sistema.

Comparar el trabajo total realizado. Las funciones `tic` y `toc` pueden ser útiles para este fin.

Ejercicio 6 (Fórmula de actualización de la inversa)**.** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible, considerar la matriz $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son columnas de n elementos.

a) Probar que si B es invertible entonces su inversa es

$$B^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\mathbf{u})(\mathbf{v}^t A^{-1})$$

para un escalar adecuado α que se determinará.
[Sugerencia: $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}$ es un número distinto de 1.]

b) Aplicar la fórmula anterior para corregir la inversa de A cuando se efectúa un cambio en una de sus columnas. Para ello seguir estos pasos:

- Definir una matriz A de 6×6 y hallar su inversa con el comando `inv`.
- Definir una matriz B igual a A excepto en su columna 4, que será de unos.
- Elegir vectores columna $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de forma que $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$.
- Usar la fórmula anterior para hallar B^{-1} y verificar el resultado.

Ejercicio 7 (Resolución de ecuaciones diferenciales)**.** Consideremos el siguiente problema: hallar $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} y''(x) + g(x)y(x) = f(x) & \text{para } x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta, \end{cases} \tag{E}$$

donde $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas. Se desea hallar una aproximación numérica de la solución de (E).

a) Dividir al intervalo $[a,b]$ en N subintervalos de largo $h = \frac{b-a}{N}$ y tomar como incógnitas los valores de y en los puntos de subdivisión interiores a $[a,b]$. Éstos son de la forma $y_i = y(x_i)$, $i = 1, \ldots, N-1$, con

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, N.$$

En los extremos del intervalo $x_0 = a$ y $x_N = b$ la función y es conocida: $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ e $y_N = y(x_N) = y(b) = \beta$.

b) Para $i = 1, \dots, N-1$ considerar la aproximación

$$y''(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Usando desarrollos de Taylor alrededor de x_i, y asumiendo que la función y es tan regular como sea necesario, mostrar que el error de aproximación es $O(h^2)$.

c) Imponer la ecuación (E) en cada uno de los puntos x_i para $i = 1, \dots, N-1$ y obtener un sistema lineal de ecuaciones

$$y_{i-1} + (g_i h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = f_i h^2, \quad i = 1, \dots, N-1$$

donde $f_i = f(x_i)$ y $g_i = g(x_i)$ para $i = 1, \dots, N-1$, y además $y_0 = \alpha$, $y_N = \beta$.

d) Escribir el sistema anterior en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A de dimensiones $(N-1) \times (N-1)$, y $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ de dimensiones $(N-1) \times 1$. Resolver en Octave el problema (E) con

$$a = 0, \quad b = 5, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \operatorname{sen}(5), \quad f(x) = \operatorname{sen}(x)(e^x - 1), \quad g(x) = e^x.$$

e) Para $N = 50$, graficar el resultado obtenido y compararlo con la solución exacta $y(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 8 (Del examen de diciembre 2024)**.** Dada una matriz A, se corre en Octave el comando `[L,U,P] = lu(A)` y se obtienen las matrices

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcular $\det(A)$ de forma eficiente.
2. Resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de forma eficiente, donde $\mathbf{b} = [5; 7; -2]^t$.
3. Calcular la matriz A.

Ejercicio 9 (Algoritmo de Thomas)**.** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ tridiagonal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$. Se tiene la siguiente descomposición LU de A:

$$\begin{array}{ccccc} A & = & L & & U \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Demostrar que $u_k = a_{kk+1}$ para $k = 1, \dots, n-1$ y calcular fórmulas para las entradas l_k, $k = 2, \dots, n$ de L y para c_k, $k = 1, \dots, n$ de U en función de las entradas a_{ij} de A.

b) Escribir un programa `x = tridiagonal(A,b)` que resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para una matriz tridiagonal. Notar que, usando los resultados obtenidos en la parte anterior, se puede hallar una descomposición LU de forma eficiente. Este método suele ser llamado *algoritmo de Thomas.*

c) Usar el algoritmo de Thomas para resolver, como en el Ejercicio 7, la ecuación diferencial

$$y''(x) = -1{,}5\,y(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 1.$$

Comparar la solución de la ecuación diferencial con las aproximaciones obtenidas usando diferentes valores de h (por ejemplo $h = 10^{-k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$).

d) Demostrar que el costo computacional de usar el algoritmo de Thomas para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tridiagonal es $O(n)$.

Ejercicio 10 (Descomposición de Cholesky)**.** El algoritmo de Cholesky permite factorizar matrices simétricas definidas positivas de forma eficiente.

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A = A^t$ y es *definida positiva* si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- la forma cuadrática $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ es positiva para todo vector $\mathbf{x}$ no nulo;
- todos los valores propios de A son positivos;
- existe una matriz $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangular superior tal que $A = R^t R$. Esta es la llamada descomposición de Cholesky.

Usando la última condición arriba e igualando los elementos en la fórmula $A = R^t R$, obtenemos

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{ki} r_{kj}, \quad i \leq j.$$

Usar estas ecuaciones en un orden adecuado para computar los elementos de R de forma eficiente.

Ejercicio 11 (Matrices de Hilbert)**.** La *matriz de Hilbert* $H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^n$ de orden n está definida por

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Esta matriz es no singular y tiene una inversa explícita. Sin embargo, cuando n crece, el número de condición de H_n crece rápidamente. Las funciones de Octave `hilb(n)` e `invhilb(n)` devuelven H_n y H_n^{-1} respectivamente. Sean $\mathbf{x}_n = (1, 1, \cdots, 1)^t$ y $\mathbf{b}_n = H_n \mathbf{x}_n$. En este problema vamos a examinar dos principios fundamentales respecto a la calidad de la solución computada $\mathbf{x}_n^*$.

a) Para $n = 5, 10$, definir $\mathbf{x}_n$ usando el comando `ones`, multiplicar $H_n \mathbf{x}_n$ para obtener $\mathbf{b}_n$, y luego calcular $\mathbf{x}_n^*$ con el comando \ de Octave.

b) Computar el *error* $\mathbf{e}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n^*$, el *residuo* $\mathbf{r}_n = \mathbf{b}_n - H_n \mathbf{x}_n^*$, y sus normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ con el comando `norm`. Extraer conclusiones.

c) Hallar el número de condición $\kappa(H_n) = \|H_n\|\|H_n^{-1}\|$ de H_n para las normas de matrices subordinadas a las normas vectoriales $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Para este fin, usar el comando `cond` y compararlo con un cálculo directo de $\kappa(H_n)$ mediante `invhilb(n)` y `norm`.

d) El número de condición da una estimación de la precisión relativa esperable en la solución. Si $k(H_n) \approx 10^t$ con un entero $t \geq 0$, entonces el número de dígitos decimales correctos en la solución se espera que sea $16-t$. ¿Cuántos dígitos decimales correctos se esperan para $n = 5, 10$?

Ejercicio 12. Las *cadenas de Markov* modelan sistemas que transitan entre un conjunto finito de estados según probabilidades de transición. Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz de transición (es una matriz con entradas no negativas, en las que cada fila suma 1), la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}$ satisface

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P, \qquad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1.$$

Si escribimos $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}^t$ como vector columna, obtenemos

$$(I - P^t)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{1}^t\mathbf{x} = 1, \qquad \mathbf{1}^t = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Considerar la cadena de Markov con 4 estados y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

donde las filas corresponden al estado actual y las columnas al estado siguiente.

a) ¿Qué dificultad surge al intentar resolver el sistema $(I - P^t)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con un método directo?

b) Una estrategia para obtener los estados estacionarios consiste en reemplazar una de las ecuaciones del sistema por la condición de normalización $\mathbf{1}^t\mathbf{x} = 1$. Escribir el sistema lineal para el vector estacionario $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ usando $(I - P^t)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y la restricción $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Mostrar la matriz 4×4 completa y el lado derecho.

c) Resolver el sistema computacionalmente.

d) Verificar que, siendo $\mathbf{x}$ la solución obtenida, el vector fila $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}^t$ cumple $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$ dentro del error de redondeo, que sus entradas suman 1 y que son no negativas.