Práctico 3 - Interpolación

Los ejercicios 9 y 13 son los "entregables" de este práctico. Todo estudiante inscripto en el curso va a tener asignado un único ejercicio del práctico 1, 2, o 3 para entregar antes del comienzo del primer período de parciales. **El 19 de setiembre vamos a avisar qué ejercicio le corresponde a cada estudiante, por lo que recomendamos fuertemente haber terminado y tener escrito los ejercicios 9 y 13 para esa fecha.**

Ejercicio 1 (Tres formas de obtener el mismo polinomio)**.** Dados los puntos $(-1,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$, determinar el polinomio interpolante de segundo grado:

a) usando la representación monomial (matriz de Vandermonde);

b) usando la base de Lagrange;

c) usando la representación de Newton.

Ejercicio 2 (Lagrange)**.** Se considera la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos de abscisas $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2$. Calcular el polinomio interpolador de f de orden 3 los puntos $(x_i, f(x_i))$ usando la forma de Lagrange. Realizar un bosquejo de las 4 funciones de interpolación de Lagrange asociadas a estos puntos. Evaluar el polinomio interpolador en $x = 2/3$. ¿Cuál es el valor del error cometido (respecto a $f(2/3)$)?

Ejercicio 3 (Del examen de julio de 2013)**.**

a) Hallar el polinomio interpolante p por los puntos $(-1,0), (1,0), (2,0), (3,1)$, utilizando el método de Lagrange.

b) Utilizando el método de Newton, hallar el polinomio interpolante q por los puntos anteriores y $(4,4)$.

c) Acotar la distancia máxima entre p y q en el intervalo $[-1,3]$.

Ejercicio 4 (Función interpolante)**.** Escribir una función `w = interpolante(x,y,v)` que tome vectores `x` e `y` de largo $n+1$ y un vector `v` y devuelva un vector `w` del mismo tamaño que `v` y tal que `w(j) = p(v(j))`, donde `p` denota al polinomio interpolante (de grado n) por los puntos `(x,y)`.

Evitar usar la forma de Vandermonde. La función `interpolante` puede ser útil en varios de los ejercicios restantes del práctico.

Ejercicio 5. Consideramos la siguiente tabla de valores aproximados para $f(x) = \sqrt{x}$:

x	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,0000	2,2361	2,4495	2,6458	2,8284

a) Construir la tabla de diferencias divididas para $f(x)$.

b) Hallar el valor del polinomio interpolante $p(x)$ en $x = 5{,}9$ de forma eficiente.

c) Calcular el error de interpolación en $x = 5{,}9$ para el polinomio p de la parte anterior. Comparar el resultado con la cota vista en el teórico.

Ejercicio 6. Dado el polinomio p en forma monomial,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números reales, se desea evaluar el polinomio en $x = x_0$. Calcular la cantidad de operaciones necesarias para computar $p(x_0)$ usando:

a) La forma monomial de p.

b) El algoritmo de Horner.

Asumiendo ahora que no conocemos los coeficientes a_i, pero tenemos los valores $f(x_i) = y_i$ para un conjunto de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, calcular nuevamente el costo computacional de evaluar $f(x_0)$ para los casos anteriores agregando esta modificación.

Ejercicio 7. Probar que si $x_0 \neq x_1 \neq x_2$, entonces

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1].$$

Ejercicio 8 (Ajuste de datos)**.** Supongamos tenemos una tabla de datos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, y queremos interpolar estos datos con un polinomio y evaluar la calidad (precisión) de la interpolación realizada. Una forma de lograr esto es dejar algunos puntos en reserva, interpolar usando los puntos restantes, y evaluar los errores en los puntos reservados. Si estos errores no son demasiado grandes, entonces es razonable creer que el interpolador "captura la tendencia" de los datos.

La siguiente tabla muestra la viscosidad relativa V del etanol como función del porcentaje de peso de soluto anhídrico w:

w	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$V(w)$	1.226	1.498	1.822	2.138	2.662	2.840	2.807	2.542	2.210	1.877	1.539	1.201

Supongamos que $p_5(w)$ interpola en $w \in \{10, 20, 40, 60, 80, 100\}$. Computar los errores en los puntos reservados, y graficar $p_5(w)$ junto a los 12 datos. Visualmente, ¿dirías que $p_5(w)$ captura la tendencia de los datos?

Ahora considerar $p_{11}(w)$ que interpola en todos los puntos. Graficar $p_{11}(w)$ y los 12 datos. Visualmente, ¿captura $p_{11}(w)$ la tendencia de los datos?

Ejercicio 9 (Ajuste de datos en la relación de Tully-Fisher)**.** La relación de Tully-Fisher modela la correlación entre la velocidad de rotación v (km/s) de galaxias espirales y su masa bariónica M ($10^{10} M_\odot$), e implica la existencia de halos de materia oscura. Considerando que se obtienen los siguientes datos observacionales:

v	100	150	200	250	300	350	400	450
$M(v)$	1.0	5.1	48.2	36.0	61.0	150.1	340.0	410.0

a) Interpolar los datos para $\{100, 150, 250, 350, 450\}$ con un polinomio $p_4(v)$ de grado 4. Calcular los errores absolutos en en los puntos restantes y graficar el polinomio interpolante junto con todos los datos.

b) Interpolar todos los datos y graficar superponiendo ambas interpolaciones. Siguiendo los criterios introducidos en el Ejercicio 8, ¿cuál polinomio captura mejor la tendencia de los datos? Justificar.

c) En caso de no existir materia oscura, la relación esperada entre v y la masa bariónica M es $M(v) \approx 10^{-6}v^3$. Graficar $M(v)$, superponiendo los datos observacionales. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a nuestros datos experimentales?

d) La relación de Tully-Fischer puede modelarse por $M(v) = 10^{-8}v^4$ en $[100, 450]$. Graficar $M(v)$ junto con el polinomio p_4 de la parte a) y acotar el error en el intervalo $[100, 450]$ usando Octave.

Ejercicio 10 (Interpolación de la función seno)**.** Recordar que el error en la interpolación polinómica vale

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \tag{I}$$

donde c es una abscisa que pertenece al menor intervalo que contiene a $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los puntos de interpolación $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$.

a) Calcular el polinomio de interpolación de tercer grado en este caso.

b) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}},$$

calcular exactamente $\operatorname{sen}(\pi/8)$.

c) Proporcionar una cota del error cometido utilizando (I). Comparar con el error real y verificar que el signo del error concuerda. Se pueden utilizar el valor de π y la función `sqrt` de Octave.

Ejercicio 11 (Fenómeno de Runge)**.** Sea $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

y, dados $n+1$ puntos en el intervalo $[-1, 1]$, sea $p_n(x)$ la función polinomial de grado n que interpola a f en los mismos.

a) Supongamos que los puntos están equiespaciados, $-1 = x_0 \le \ldots \le x_n = 1$, con $x_j = -1 + \frac{2j}{n}$. Graficar en Octave los polinomios interpolantes p_4, p_8, p_{12}, p_{16}. Sin hacer una demostración formal, explicar por qué al aumentar el grado polinomial la calidad de la aproximación se podría deteriorar cerca de los extremos del intervalo (hecho conocido como *fenómeno de Runge*).

b) Consideremos los *nodos de interpolación de Chebyschev* en el intervalo $[-1, 1]$:

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2\,(n+1)}\right), \qquad 0 \le j \le n.$$

Los nodos de Chebyschev tienen la propiedad crucial de que *minimizan* la cantidad

$$\max_{-1 \le x \le 1} |w_n(x)|, \quad \text{donde } w_n(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Graficar los polinomios interpolantes p_4, p_8, p_{12}, p_{16} usando nodos de Chebyschev, y comparar con los resultados obtenidos en la parte anterior.

c) Se considera ahora realizar una interpolación lineal a trozos de f usando $n+1$ nodos equiespaciados. Calcular f'', graficarla, y determinar visualmente dónde se alcanza $\max_{-1\leq x\leq 1}|f''(x)|$. Con esta información, estimar la cantidad de nodos necesarios para que el error de interpolación sea menor o igual al cometido por p_{16} en la parte anterior. Verificar computacionalmente esta estimación.

Ejercicio 12 (Aproximación de derivada con diferencias hacia adelante)**.** Dada una función f continua y tal que f', f'', f''' son continuas, y tres puntos equiespaciados $x_1, x_2 = x_1+h, x_3 = x_1+2h$, queremos aproximar $f'(x_1)$. Sea $p(x)$ el polinomio cuadrático que interpola $(x_i, f(x_i))_{i=1}^3$.

a) Escribir p en la forma de Lagrange.

b) Mostrar la fórmula de *diferencias hacia adelante*

$$p'(x_1) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)\right).$$

c) Probar que esta expresión da una aproximación de segundo orden de $f'(x_1)$. Esto es, demostrar que

$$|f'(x_1) - p'(x_1)| \leq Ch^2,$$

donde C depende de f'''.

Ejercicio 13 (Interpolación de Hermite)**.** Sean $f(x) = \cos(x)$, los nodos $x_i = \frac{i\pi}{n}$, $i = 0, \dots n$, donde n es un número natural a elegir, y p la interpolante de Hermite a trozos de f por esos nodos.

a) Estimar n de forma tal que el error de interpolación sea menor que 10^{-3}.

b) Escribir una función de Octave que tome como entrada el valor de n y un vector `v` de puntos en el intervalo $[0, \pi]$, y devuelva un vector `w` del mismo tamaño que `v` y tal que `w(j) = p(v(j))`.

c) Con la función de la parte b), verificar computacionalmente el resultado teórico obtenido en la parte a). ¿Qué tan precisa fue la cota obtenida? ¿Dónde se alcanza el máximo de $|f-p|$?

Ejercicio 14 (Interpolantes cúbicas)**.** Consideremos la función $f(x) = \log(x)$.

a) En Octave, interpolar f con un polinomio cúbico por los nodos de abscisas $x = 0{,}1$, 1, 2, $2{,}9$. Evaluar la interpolante en $x = 1{,}5$ y determinar el error de interpolación en dicho punto.

b) Interpolar f mediante la interpolante de Hermite por $x = 1$, 2. Evaluar la interpolante en $x = 1{,}5$ y determinar el error de interpolación en dicho punto.

c) Graficar las interpolantes de las partes a) y b) junto a la función f en el intervalo $[1, 2]$. Explicar los resultados obtenidos comparándolos con lo que predicen los teoremas de acotación del error que vimos en el teórico.

Ejercicio 15 (Spline cúbica)**.** Determinar una spline cúbica $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(x_i) = y_i$, for $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$;

- $f\big|_{[x_i,x_{i+1}]}$ es un polinomio de grado menor o igual a tres para $i = 1, 2$;
- f, f', f'' son continuas en $(0, 3)$;
- $f'(0^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$.

Esto se puede realizar construyendo un sistema de ecuaciones lineales y resolviéndolo en Octave. Graficar la solución y compararla con la salida de la función de Octave `spline`:

```
x = [0 2 3];  y = [0 0 1 2 0];
sc = spline(x, y);
plot(linspace(0,3),ppval(sc,linspace(0,3)),'-r');
```

Ejercicio 16 (Integración numérica)**.** Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

a) Escribir la forma de Lagrange del polinomio cuadrático p que interpola por los puntos $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$.

b) Para estimar el valor de la integral $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ la podemos aproximar mediante

$$Q(f) := \int_a^b p(x)\,dx.$$

Obtener una expresión para esta aproximación (llamada *regla de Simpson*). Verificar que la fórmula obtenida es exacta en caso de que f sea un polinomio de tercer grado.

Ejercicio 17 (Del examen de julio de 2024)**.** Se quiere interpolar la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ usando $n + 1$ nodos equiespaciados en dicho intervalo,

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Se consideran las opciones

- interpolación polinomial de grado lo más alto posible,
- interpolación polinomial lineal a trozos.

a) Acotar el error de interpolación para ambas.

b) Se quiere interpolar f con una tolerancia de error de 10^{-2}. Estimar cuántos puntos son necesarios con una y otra estrategia.

c) Se quiere programar una interpolación polinomial de grado alto con $n + 1 = 2^m + 1$ puntos como arriba, e ir aumentando el valor de $m = 0, 1, \ldots$. Se consideran las opciones de escribir el polinomio interpolante en las formas de Vandermonde, de Lagrange, o de Newton. Justificar cuál de ellas permite realizar esta tarea de forma más estable y eficiente.