1. Ejercicio 1

   Supongamos que $n > 1$.

   (a) Probamos que si $n + 1$ es primo entonces $n(n + 1)/2$ no divide al factorial de n.

   Si $n+1$ es primo debe ser impar, y como podemos simplificar el factor n en $n(n + 1)/2$ y en el factorial de n, obtenemos, para un cierto c,

   $$(n + 1)c = 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n - 1)$$

   Si $n + 1$ es primo es un primo mayor que todos los factores que aparecen a la derecha, lo que contradice la unicidad de la factorización como producto de primos.

   (b) Recíprocamente, si $n + 1 = a \times b$, queremos que $a \times b$ divida a

   $$2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n - 1)$$

   lo que es cierto porque los factores a y b aparecen necesariamente en este producto.

2. Ejercicio 2

   (a) Cuando el módulo k es primo con 10, la clase de 10 es invertible en $\mathbb{Z}_k$ y todas las potencias de 10 son invertibles también. Entonces, como hay una potencia que vuelve a dar la clase de 1 resulta que las clases de ciertas potencias

   $$\{1, 10, 10^2, \ldots, 10^p\}$$

   son la órbita de 10 por la función "multiplicar por la clase de 10".

   (b) Ahora bien,

   $$1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^p = \frac{10^{p+1} - 1}{10 - 1},$$

   pero como 10^{p+1} es congruente con 1 módulo k, resulta que el lado de la derecha es múltiplo de k.

   (c) Entonces, cada vez que el número de unos es múltiplo de p el entero formado por ese número de unos es múltiplo de k, y hay infinitos múltiplos de k que consisten únicamente de unos.

   (d) Faltaría ver que cuando k no es primo con 10 no hay infinitos múltiplos de k con sólo unos, pero nuestros experimentos parecen indicar que en ese caso no existe, de hecho, ningún múltiplo que se escriba sólo con unos.

   (e) Si 10 no es primo con k no puede ocurrir que 10^n sea congruente con 1 módulo k, ya que si lo fuera, 10 sería invertible módulo k y sabemos que no lo es. Entonces, nunca $10^n - 1$ es cero módulo k y por tanto nunca la suma de potencias de 10, $1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}$, es, en este caso, múltiplo de k.

3. Ejercicio 3

   (a) Llamemos d a la cifra dominante común. Entonces se verifica

   $$d \times 10^k \leq 2^n < (d+1) \times 10^k; d \times 10^m \leq 5^n < (d+1) \times 10^m$$

   Multiplicando las desigualdades término a término obtenemos:

   $$d^2 \times 10^{k+m} \leq 10^n < (d+1)^2 \times 10^{k+m}.$$

   (b) Ahora dividimos entre 10^{k+m} y obtenemos

   $$1 \leq d^2 \leq 10^{n-k-m} < (d+1)^2 \leq 100.$$

   En consecuencia, $n-k-m$ sólo puede ser 1, y d sólo puede ser 3.

4. Ejercicio 4

   Es claro que si un polinomio con coeficientes enteros es reducible, es decir, producto de polinomios de menor grado con coeficientes enteros, entonces todos los enteros que son valores del polinomio aparecen factorizados, como consecuencia de la factorización del polinomio, pero *podemos tener la mala suerte de que el uno de los factores que se obtienen sea* ± 1, y entonces no podemos afirmar que los valores son necesariamente enterios compuestos.

   En nuestro caso, para demostar que los valores son compuestos, tenemos que ver que el valor absoluto de los factores es siempre mayor que uno. En nuestro caso los factores son x^2+2x+2 y x^2-2x+2, que para x entero mayor que uno son siempre mayores que 1.

   AMPLIACIÓN: Debido a la mala suerte mencionada, no podemos afirmar que si un polinomio con coeficientes enteros tiene un valor primo, entonces el polinomio es irreducible. Sin embargo, se ha demostrado que si el polinomio tiene un valor primo para un n suficientemente grande respecto a los coeficientes entonces el polinomio es irreducible. ¿Cuánto de grande debe ser n respecto a los coeficientes?