Punto 1

Despejar posibles soluciones: Sabemos que 3m+5n=12, donde m, n ∈. Probamos valores enteros positivos de m y calculamos n para cada caso:

Si m = 1: 3(1) +5n=12 $\Longrightarrow$ 3+5n=12 $\Longrightarrow$ 5n = 9, lo cual no da un valor entero para n.

Si m=2m = 3(2) +5n=12 $\Longrightarrow$ 6+5n=12 $\Longrightarrow$ 5n=6, lo cual tampoco da un valor entero para n.

Si m= 3(3) +5n=12 $\Longrightarrow$ 9+5n=12 $\Longrightarrow$ 5n = 3, lo cual no es posible, ya que n no es un número entero.

Para m=4m = 4 o mayores, 3m>12, lo que haría imposible satisfacer la ecuación.
No existen m, n ∈, n tales que 3m+5n= 12. Esto hace que la proposición sea falsa.

Punto 2

Sea n un número entero. Los cinco números enteros consecutivos pueden expresarse como n, n+1, n+2, n+3, n+4n Su suma es:

n+(n+1) +(n+2) +(n+3) +(n+4) =5n+10

Factoremos el resultado:

5n+10=5(n+2)

Como 5(n+2) es múltiplo de 5 (ya que está multiplicado por 5), la suma de cinco números enteros consecutivos siempre es divisible por 5 sin resto.

Conclusión:

La suma de cinco números enteros consecutivos es divisible por 5.

Punto 3

La afirmación es falsa.

Prueba resumida:

El número dado es n2+n+1. Para demostrar si es siempre impar, analizamos los casos:

1. Si n es par, entonces n2 es par, n es par, y 1 es impar. La suma n2+n+1 será impar (par + par + impar).
2. Si n es impar, entonces n2 es impar, n es impar, y 1 es impar. La suma n2+n+1 será par (impar + impar + impar).

Contraejemplo:

Para n=1: 1^2 + 1 + 1 = 3(impar).
Para n=2: 2^2 +2+1=7 (impar).
Para n= 3: 3^2+ 1 + 3 + 1 = 13 (impar)

No cumple siempre para ser impar.

Punto 4

Demostración resumida:

Sea n un número natural impar. Cualquier número entero puede expresarse en una de las cuatro formas según el teorema de la división euclidiana al dividir entre 4:

n=4q, n=4q+1, n=4q+2, n=4q+3

donde q es un entero.

1. Si n es par (4q o 4q+2), no puede ser impar.
2. Por lo tanto, un número impar debe ser n=4q+1o n=4q+3.

Esto demuestra que todo número natural impar está en una de esas dos formas.

Punto 5

Demostración resumida:

Sea n un número entero. Analizamos los números n, n+2, n+4 módulo 3:

1. N mod 3 puede ser 0,1, o 2.
2. Si n≡0 mod 3, entonces n es divisible por 3.
3. Si n≡1 mod 3, entonces n+2 ≡ 0 mod 3 y n+2 es divisible por 3.
4. Si n≡2 mod 3, entonces n+4 ≡ 0 mod 3, y n+4 es divisible por 3.

Por lo tanto, en todos los casos, al menos uno de los números n, n+2, n+4 es divisible por 3.

Punto 6

Prueba resumida:

Supongamos que existen tres números primos consecutivos separados por 2, es decir, p, p+2, p+4, donde p es primo.

1. Uno de estos tres números debe ser divisible por 3, porque cada tres números consecutivos abarcan un múltiplo de 3.
2. Si p=3, entonces los números son 3,5,7 que son todos primos.
3. Si p>3, entonces p no es divisible por 3, pero p+2p+4 debe ser divisible por 3. Sin embargo, si p+2p+4 es divisible por 3 y mayor que 3, no es primo.

Por lo tanto, el único triple primo posible es 3,5,7.

Punto 7

Prueba resumida:

Queremos demostrar que:
$2^2+2^3+\cdots+2^{\mathrm{norte}}=2^{\mathrm{n}}+1-2.$

Inducción matemática:

1. Caso base: Para norte=2:
   $2^2=2^2+1-2 \Longrightarrow 4=4.$
   Se cumple.

2. Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es válida para norte=a:
   $2^2+2^3+\cdots+2^a=2^k+1-2.$

Ahora probamos para norte=a+1: $2^2+2^3+\cdots+2^a+2^k+1=(2^k+1-2)+2^k+1.$

Simplificando:

$2^k+1-2+2^k+1=2{\cdot}2^k+1-2=2^k+2-2.$

Esto demuestra la validez para norte=a+1.

Por inducción, la fórmula es válida para todo norte ∈ norte.

Punto 8

Demostración resumida:

Queremos probar que si $\text{limite}_n\to\infty a_{\text{norte}}$= yo, entonces $\text{limite}_n\to\infty$M a_{norte}=M L paraca Metro > 0.

Definición de límite:
Por la definición de límite, dado mi >0, existe norte ∈ Norte tal que para norte ≥ norte:

un_{norte}− yo < $\frac{\text{mi}}{|\text{M}|}$.

Multiplicamos ambos lados por Metro>0:

|M a_{norte}− M L|= M| a_{norte} – yo | < METRO. $\frac{\text{mi}}{\text{METRO}}$ = es.

Esto prueba que $\text{limite}_n\to\infty$M a_{norte} =M L por definición de límite.

Punto 9

Un ejemplo de una familia de intervalos que cumple con las propiedades es:

$\text{A}_{\text{norte}}=(0,\frac{1}{\text{norte}})$,norte=1,2,3...

Propiedades demostradas:

1. Anidamiento: A_n + 1 ⊂ A_{norte} porque $\frac{1}{\text{n}+1}<\frac{1}{\text{norte}}$.

2. Intersección vacía: La intersección $\cap_\text{n}^\infty$= 1 A_{norte} es vacía porque no existe ningún número incógnita > 0 que pertenezca a todos los intervalos simultáneamente.

Por lo tanto, $\cap_\text{n}^\infty$ = 1 A_{norte} .

Punto 10

Un ejemplo es la familia de intervalos:

A_{norte} =[$\frac{1}{norte}$,1], norte=1,2,3,...

Propiedades:

1. Anidamiento:
   $\mathrm{A_n}$ + 1 ⊂ $\mathrm{A_{norte}}$ porque $\frac{1}{\mathrm{n+1}}$ > $\frac{1}{\mathrm{norte}}$, lo que reduce el intervalo.

2. Intersección:
   La intersección de todos los intervalos es el número 11, ya que:

$$\bigcap_{\mathrm{n}\,=\,1}^{\infty} A_{norte} = \{1\}.$$

porque 1 pertenece a todos los intervalos, pero ningún otro número satisface esta condición.

Esto demuestra que la intersección consiste en un solo número real, 1.