Método de biseccióm

Juan Anagrita, HectorHernandez, Aldemar Ramirez

Agosto 3,2019

Problema

Hayar la raiz de una función en un rango [a,b] a través del método de bisección.

Solución

Lenguaje de programación: R

Función principal-método de bisección

Parametros:

-f <- funcion

-xa <- a en el rango [a,b] donde se busca la raiz

-xb <- b en el rango [a,b] donde se busca la raiz

- tol <- tolerancia minima que debe tener la funcion

Valores de retorno:

-a_c <- valor de a traves de las iteraciones

-b_c <- valor de b traves de las iteraciones

-m_c <- valor de m traves de las iteraciones

-i <- iteraciones necesarias para llegar a la tolerancia

-dx <- Error estimado.

```
biseccion = function(f, xa, xb, tol){
  if( sign(f(xa)) == sign(f(xb)) ){ stop("f(xa) y f(xb) tienen el mismo signo") }
  a = min(xa,xb)
  b = max(xa,xb)
  k = 0

  #k es el numero de iteraciones
  a_c <- c()
  b_c <- c()
  m_c <- c()
  dx <- c()

  repeat{
    m = a + 0.5*(b-a)
    m_c = c(m_c, m)
```

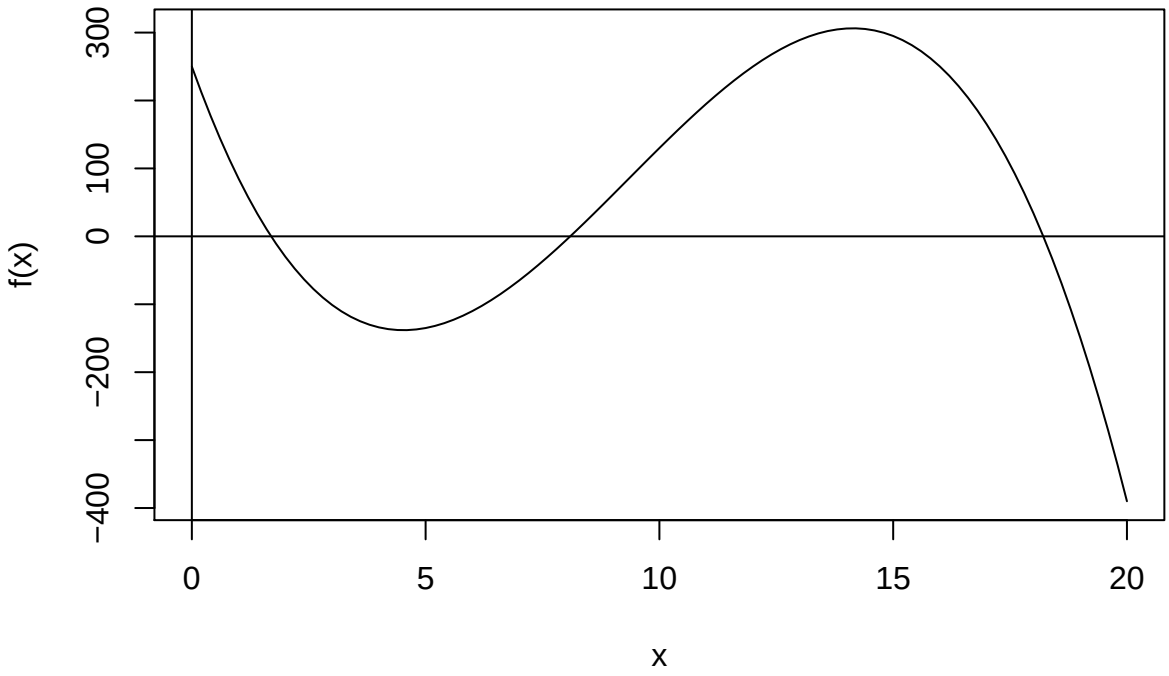
```
    if( f(m)==0 ){
      lista = list("a_c" = a_c, "b_c" = b_c, "m_c" = m_c, "i" = k, "resultado" = m, "dx" = dx)
      return(lista)
    }

    if( sign(f(a)) != sign(f(m)) ){
      b = m
    } else { a = m }

    a_c = c(a_c,a)
    b_c = c(b_c,b)

    dx = c(dx,(b-a)/2) #error estimado

    k = k+1

    #until
    if( dx[k] < tol ){
      lista = list("a_c" = a_c, "b_c" = b_c, "m_c" = m_c, "i" = k, "resultado" = m, "dx" = dx)
      return(lista)
      break;
    }
  } #repeat
}
```

La función basicamente toma un intervalo [a,b] de la función, tal que f(a)*f(b)<0, y basandose en el teorema de los valores intermedios se sabe que al ser la funcion continua hay al menos un raiz de la funcion en este intervalo.

Implementacion

Gráfica de la función

```
f = function(x) (-x)^3+28*x^2-192*x+250
curve(f, 0,20); abline(h=0, v=0) #gráfico para decidir un intervalo
```



A través de la gráfica se puede ver que la función f tiene 3 raices.

Resultados de las raices

```
resultados <- biseccion(f, 0, 5, 1e-7)

cat("Cero de f en [0,5] es approx: ",resultados$resultado, "con error <=", resultados$dx[resultados$i],"
```

```
## Cero de f en [0,5] es approx:  1.696277 con error <= 7.450581e-08
```

```
resultados <- biseccion(f, 5, 10, 1e-7)

cat("Cero de f en [5,10] es approx: ",resultados$resultado, "con error <=", resultados$dx[resultados$i]
```

```
## Cero de f en [5,10] es approx:  8.09322 con error <= 7.450581e-08
```

```
resultados <- biseccion(f, 15, 20, 1e-7)

cat("Cero de f en [15,20] es approx: ",resultados$resultado, "con error <=", resultados$dx[resultados$i]
```

```
## Cero de f en [15,20] es approx:  18.2105 con error <= 7.450581e-08
```

Tabla de resultados a traves de las iteraciones: para el rango [15,20]

```r
tabla <- data.frame(
  "iteraciones" = 1:resultados$i,
  "a" = resultados$a_c,
  "b" = resultados$b_c,
  "m" = resultados$m_c,
  "Error est." = resultados$dx
)

print(tabla)
```

```
##    iteraciones        a        b        m   Error.est.
## 1            1 17.50000 20.00000 17.50000 1.250000e+00
## 2            2 17.50000 18.75000 18.75000 6.250000e-01
## 3            3 18.12500 18.75000 18.12500 3.125000e-01
## 4            4 18.12500 18.43750 18.43750 1.562500e-01
## 5            5 18.12500 18.28125 18.28125 7.812500e-02
## 6            6 18.20312 18.28125 18.20312 3.906250e-02
## 7            7 18.20312 18.24219 18.24219 1.953125e-02
## 8            8 18.20312 18.22266 18.22266 9.765625e-03
## 9            9 18.20312 18.21289 18.21289 4.882812e-03
## 10          10 18.20801 18.21289 18.20801 2.441406e-03
## 11          11 18.21045 18.21289 18.21045 1.220703e-03
## 12          12 18.21045 18.21167 18.21167 6.103516e-04
## 13          13 18.21045 18.21106 18.21106 3.051758e-04
## 14          14 18.21045 18.21075 18.21075 1.525879e-04
## 15          15 18.21045 18.21060 18.21060 7.629395e-05
## 16          16 18.21045 18.21053 18.21053 3.814697e-05
## 17          17 18.21049 18.21053 18.21049 1.907349e-05
## 18          18 18.21049 18.21051 18.21051 9.536743e-06
## 19          19 18.21050 18.21051 18.21050 4.768372e-06
## 20          20 18.21050 18.21051 18.21050 2.384186e-06
## 21          21 18.21050 18.21050 18.21050 1.192093e-06
## 22          22 18.21050 18.21050 18.21050 5.960464e-07
## 23          23 18.21050 18.21050 18.21050 2.980232e-07
## 24          24 18.21050 18.21050 18.21050 1.490116e-07
## 25          25 18.21050 18.21050 18.21050 7.450581e-08
```

Grafica de iteraciones vs error estimado

```r
plot(x = 1:length(resultados$a_c), y = resultados$dx, xlab = "Iteraciones", ylab = "Error est.", main =
```

El error estimado siempre converge a cero.

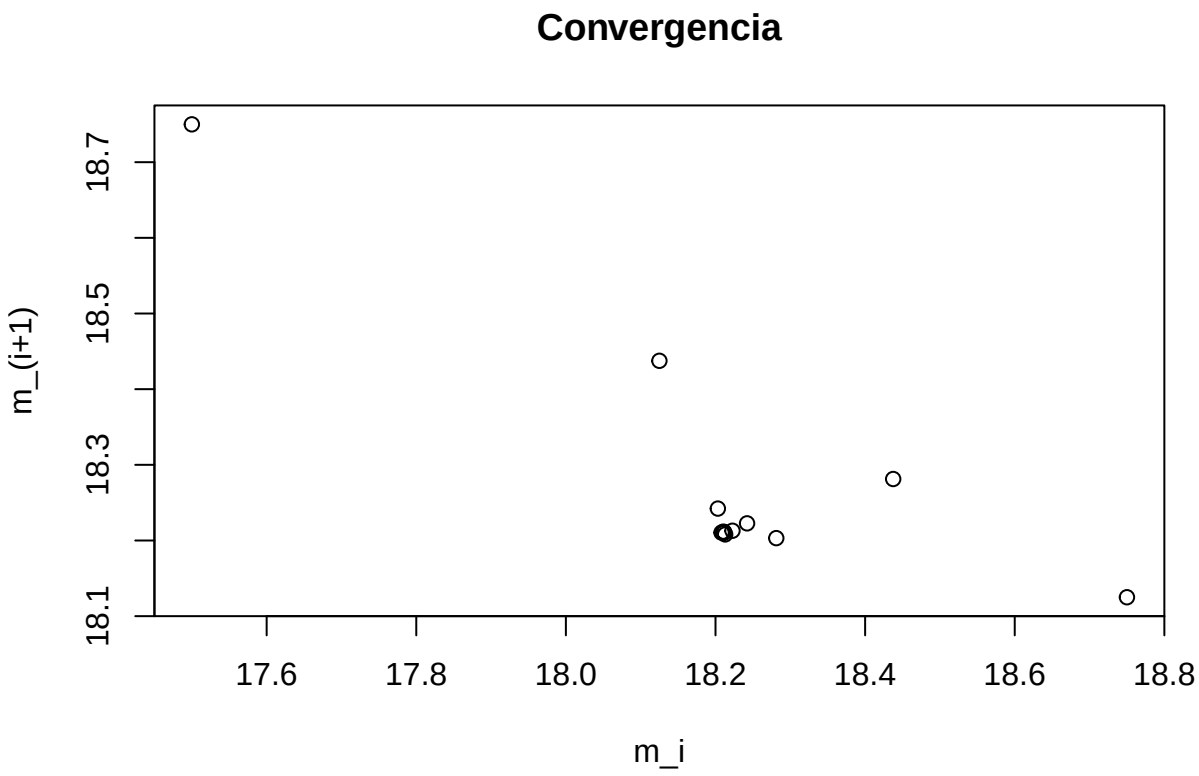
$Errorestimado : b - a/(2 * k)$

donde k es la numero de la iteracion

cuando k tiene a infinito el error estimado tiene a 0.

Grafica de m(i) vs m(i+1)

```
m_i =  resultados$m_c[-length(resultados$m_c)]
m_i2 = resultados$m_c
m_i2 = m_i2[-1]

plot(x =m_i, y =m_i2, xlab = "m_i", ylab = "m_(i+1)", main = "Convergencia")
```



De acuerdo con la grafica el metodo tiene una convergencia lineal.

Caso especial: dos raices en el intervalo

```
resultados <- biseccion(f, 1, 30, 1e-7)

cat("Cero de f en [0,20] es approx: ",resultados$resultado, "con error <=", resultados$dx[resultados$i]
```

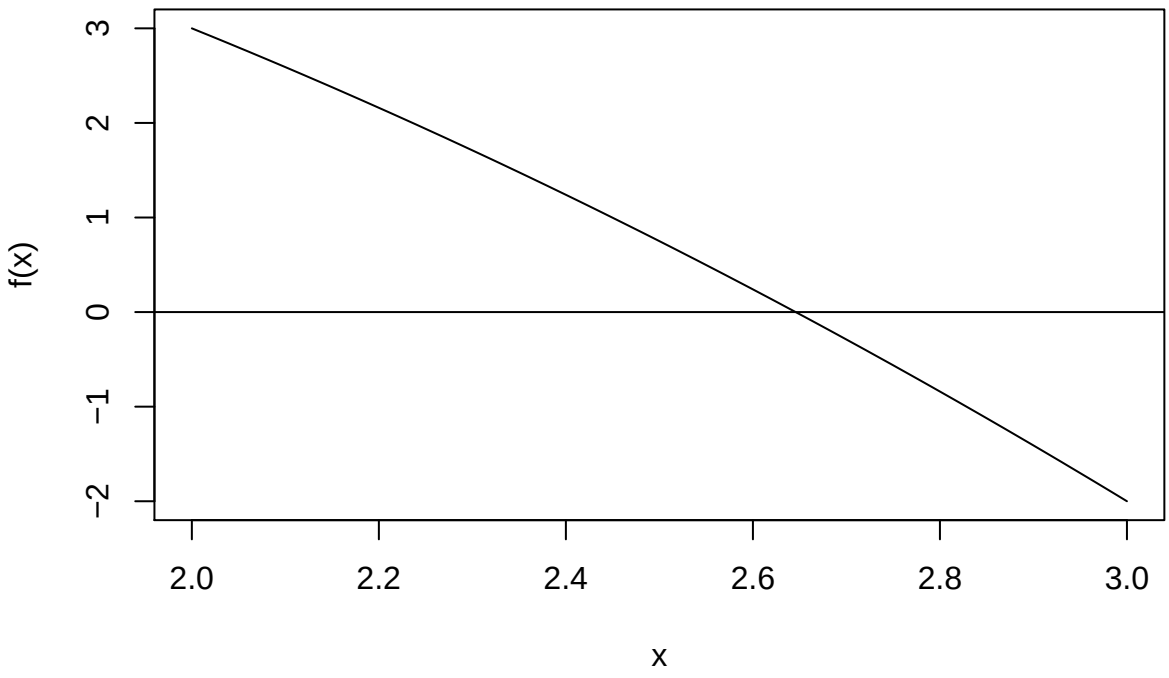
```
## Cero de f en [0,20] es approx:  18.2105 con error <= 5.401671e-08
```

El metodo de biseccion se acerca solamente a un de las dos raices.

Caso especial: sacar raiz de un numero

Gráfica de la función

```
f = function(x) 7-x^2
curve(f, 2,3); abline(h=0, v=0) #gráfico para decidir un intervalo
```



La raiz de 7 está en el intervalo [2,3]

Resultados

```
resultados <- biseccion(f, 2, 3, 1e-7)
cat("Cero de f en [2,3] es approx: ",resultados$resultado, "con error <=", resultados$dx[resultados$i],
```

```
## Cero de f en [2,3] es approx:  2.645751 con error <= 5.960464e-08
```

Cambiando los intervalos

```
a = c(2:0)
b = c(3:5)
iter = c()
error =c()
n = 1

for(num in b){
  iter = c(iter,biseccion(f, a[n], b[n], 1e-7)$i)
  error = c(error,biseccion(f, a[n], b[n], 1e-7)$dx[iter[n]])
  n = n+1
}

tabla <- data.frame(
  "a" = a,
  "b"= b,
```

```
  "b-a"= b-a,
  "iteraciones" = iter,
  "Error est." = error
)

print(tabla)
```

```
##   a b b.a iteraciones   Error.est.
## 1 2 3   1          23 5.960464e-08
## 2 1 4   3          24 8.940697e-08
## 3 0 5   5          25 7.450581e-08
```

Entre mas mas alejado estén los valores iniciales de a y b del valor de la raiz, mas iteraciones va a necesitar el metodo para llegar a la toleracia dada.

Numero de iteraciones esperada

La formula para el numero minimo de iteraciones necesarias para tener un error menor a s es:

$Iteraciones >= ln((b-a)/s)/ln2$

Comprobacion:

```
cat("Numero minimo de estimaciones esperada para sacar la raiz de el interavalo [2,3]:", log((3-2)/1e-7
```

```
## Numero minimo de estimaciones esperada para sacar la raiz de el interavalo [2,3]: 23.2535
```

Comparando con la tabla anterior se puede comprabar que numero de iteraciones necesarias fue 23.