# Tema1. Representación de números en coma flotante. Errores

**Ejercicio 1:** *Aritmética de coma flotante: calcular el error relativo al restar dos números similares.*

a) La función seno hiperbólico se puede calcular por la siguiente expresión

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Para valores de x muy pequeños ( $x \cong 0$), tenemos que $e^x \cong e^{-x} \cong 1$ luego en la expresión $(e^x - e^{-x})/2$ estamos restando dos cantidades similares, y por tanto con un "alto" error relativo.

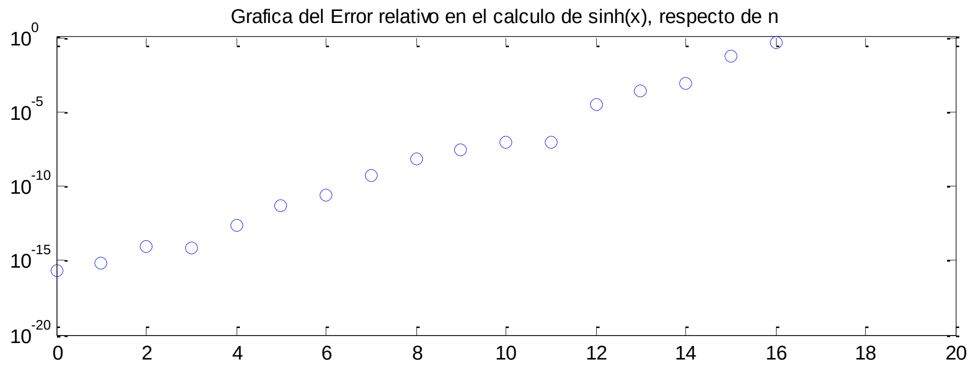
Evaluar la expresión $(e^x - e^{-x})/2$ en el vector x de valores cada vez más pequeños x=10^-n, con n=[0 1 2 … 20]. Evaluar el seno hiperbólico "exacto" en el vector x utilizando la función sinh( ) de Matlab.

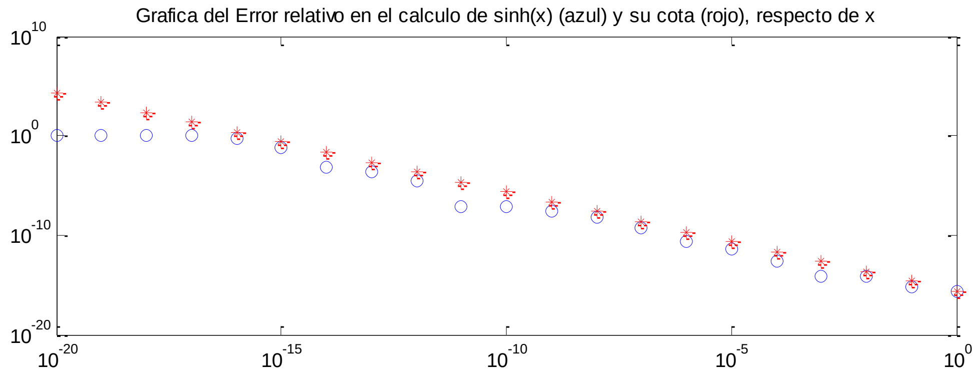
Hallar el error relativo y representar dicho vector en ejes logarítmicos.

El código debe hacer lo siguiente:

- Crear el vector x.
- Evaluar el seno hiperbólico en esos puntos, usando la función sinh().
- Evaluar el seno hiperbólico en los mismos puntos, usando la expresión anterior.
- Evaluar el error absoluto y a partir de él, el error relativo.
- Representar el error relativo en una escala logarítmica (semilogy) frente al índice n.

La gráfica resultante debe ser similar a la primera de las 2 que se muestran a continuación:




¿Cuántas cifras significativas se han obtenido en n=0 (x=1)?, ¿en n=8 (x=10^-8)?, ¿y en n=16?.

Sea $\varepsilon = {eps(1)}/{2}$ el error relativo de los números máquina, y sean $x_1 = e^x, x_2 = e^{-x}$. Una cota del error relativo cometido al calcular la expresión dada del seno hiberbólico es:

$$\frac{(x_1 + x_2)}{|x_1 - x_2|}\varepsilon \le \frac{2x_1}{|x_1 - x_2|}\frac{eps(1)}{2} \cong \frac{eps(1)}{2\sinh(x)} \le \frac{eps(1)}{\sinh(x)} = Cota\_E\_rel$$

- Evaluar la Cota del error relativo, $Cota\_E\_rel$, y representar el error relativo (azul) y la Cota del error relativo (rojo), respecto del vector x, en ejes logarítmicos (loglog). La gráfica resultante debe ser similar a la segunda de las 2 mostradas anteriormente.

b) Repetir el apartado anterior usando simple precisión, con el comando `single( )`.

¿Cuántas cifras significativas se han obtenido en n=0 (x=1)?, ¿y en n=8 (x=10^-8)?.

**Ejercicio 2:** *Aritmética de coma flotante: calcular el error relativo al restar dos números similares.*

Comprobar 'con lápiz y papel' que las siguientes funciones son iguales:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-1, \quad g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1},$$

Queremos trabajar con estas funciones en coma flotante. ¿Cuál de estas funciones es la que nos proporciona los mejores resultados numéricos?. ¿Para qué valores de x los resultados de ambas funciones son distintos?.

Vamos a mostrar numérica y gráficamente cuantas cifras significativas de precisión obtenemos y una cota del error relativo.

El código debe hacer lo siguiente:

- Crear el vector x=10^-n, con n=[0 1 2 … 10].
- Evaluar la función f en esos puntos.
- Evaluar la función g en esos puntos.
- Evaluar el error absoluto y a partir de él, el error relativo.
  La Cota del error relativo tiene la forma
  $$\frac{eps(1)\left|\sqrt{1+x^2}+1\right|}{2\left|g(x)\right|}\simeq\frac{eps(1)}{\left|g(x)\right|}=Cota\_E\_rel$$
- Representar el error relativo (azul) y la Cota del error relativo (rojo), respecto de x, en ejes logarítmicos (loglog).
- Calcular el número de cifras significativas. Representar el número de cifras significativas, repecto de x, en una escala semilogarítmica (semilogx).

**Ejercicio 3:** *Aproximación de la derivada de una función:*
*Error numérico total = Error de truncamiento + Error de redondeo.*

La derivada de una función f(x) la aproximamos con la siguiente fórmula

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (1)$$

El error de truncamiento viene dado por:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+E\_trunc$$

Una Cota del error de truncamiento se obtiene de la expresión:

$$E\_rel\_trunc\leq\frac{h}{2}\left\|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\|$$

Una cota del error relativo de redondeo cometido al calcular $f(x+h)-f(x)$ en la fórmula (1) se obtiene de la expresión:

$$E\_rel\_red\leq\frac{eps(1)}{h}\left\|\frac{f(x)}{f'(x)}\right\|$$

Teniendo en cuenta la relación:

*Error numérico total = Error de truncamiento + Error de redondeo*

Aplicamos la fórmula a la función f(x)=sen(x) en el punto x=1. Queremos dibujar la gráfica de las cotas de los 3 errores relativos, respecto del valor de h.

El código debe hacer lo siguiente:

- Crear el vector h=10^-n, con n=[0 1 2 … 20].
- Evaluar la función f’(x)=cos(x) en x=1, utilizando el comando cos( ).
- Evaluar la función $f(x+h)-f(x)/h$ en los valores de h, con x=1.
- Evaluar el error absoluto y a partir de él, el error relativo.
- Representar el error relativo (azul) y la Cota del error numérico total (rojo), respecto de h, en ejes logarítmicos (loglog).

Teniendo en cuenta el resultado de la gráfica, contestar a las siguientes preguntas, comentando los resultados:

- ¿son adecuadas las cotas del error obtenidas?,
- Para $\mathrm{h}=10^{-3}$ ¿cuántas cifras significativas de precisión obtenemos?, ¿y para $\mathrm{h}=10^{-14}$?
- ¿para qué h se obtiene el mayor número de cifras significativas de precisión?, ¿cuántas cifras son?
- ¿qué pasa para $\mathrm{h}\leq 10^{-16}$?.

**ALGORITMICA NUMÉRICA** **Ejercicios Computacionales Tema 1**

**Apellidos:**

**Nombre:**

Adjuntar las respuestas a los siguientes ejercicios, incorporando el código necesario, gráficas, comentarios pedidos, etc.

**1.**

**2.**

**3.**