

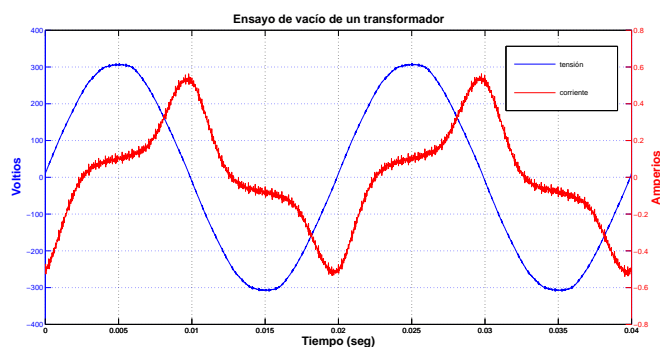
# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>Corriente en un elemento no lineal</b>	<b>I</b>
1.1. Características de elementos no ohmicos . . . . .	I
1.1.1. Variación en el tiempo . . . . .	I
1.1.2. Memoria . . . . .	I
1.1.3. Pasividad . . . . .	II
1.1.4. Control por tensión o por corriente . . . . .	III
1.1.5. Bilateralidad . . . . .	III
1.2. Corriente en un elemento no lineal. Ejemplos. . . . .	III
1.2.1. Ejemplo 1 . . . . .	V
1.2.2. Ejemplo 2 . . . . .	VII
1.2.3. Ejemplo 3 . . . . .	VIII
1.2.4. Comparación de plots . . . . .	X
<b>Bibliografía</b>	<b>XI</b>

# Introducción

El presente documento pretende mostrar un brevísimo estudio de los circuitos no lineales, limitando el análisis a aquellos que incluyan impedancias cualquiera, que de hecho para todos los cálculos se puede asumir como una simple resistencia, y para fuentes independientes de tensión y corriente.

Gracias a ésto se podrán entender los resultados del ensayos de laboratorio realizado en Máquinas eléctricas I, por tanto, la deformación de la corriente de vacío en un transformador monofásico. Esta deformación de la corriente es debida a la no linealidad del circuito magnético.



**Figura 1:** Curvas de corriente y tensión en ensayo en vacío de un transformador monofásico.

# Corriente en un elemento no lineal

## 1.1. Características de elementos no ohmicos

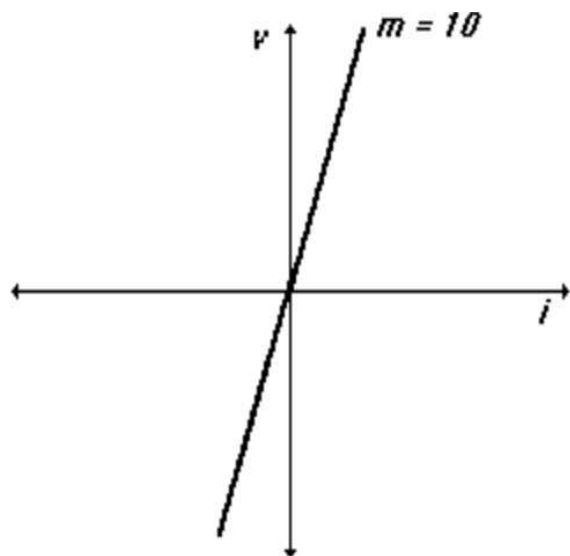
A continuación se expondrán algunas de las propiedades con las que puede contar elementos que no cumplen la ley de Ohm.

### 1.1.1. Variación en el tiempo

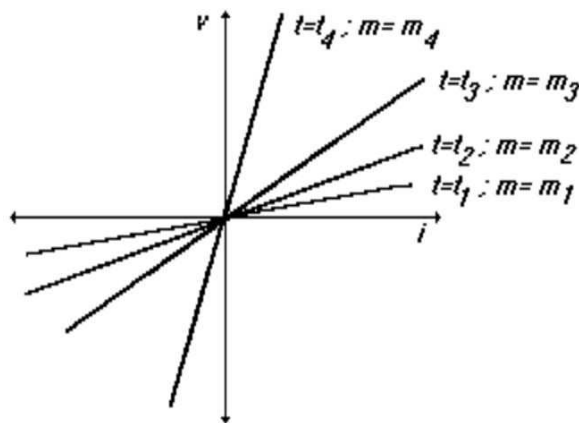
Una relación tensión corriente es invariante en el tiempo si es la misma para cada instante de tiempo. En caso contrario, la relación será variante en el tiempo.

Aún cuando  $i(t)$  puede ser una corriente variante en el tiempo, la relación que existe entre la tensión  $v(t)$  y la corriente  $i(t)$  es fija. Tal relación es invariante en el tiempo. Un ejemplo es  $v(t) = 10 \cdot i(t)$  (figura 1.2).

Ahora supóngase un elemento de circuitos cuya relación tensión corriente es  $v(t) = 10 \cdot t \cdot i(t)$  dicha relación correspondería a un resistor variante en el tiempo. La figura 1.3 muestra como su característica  $i - v$  es distinta para cada instante de tiempo (nótese como a cada instante de tiempo  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , corresponde una recta de pendiente  $m_1, m_2, m_3, m_4$ ) Tal relación es variante en el tiempo.



**Figura 1.2:** Impedancia invariante en el tiempo.

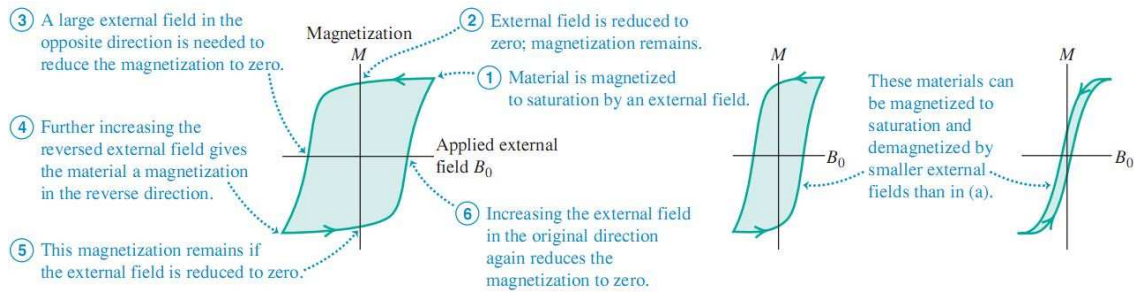


**Figura 1.3:** Impedancia variante en el tiempo.

### 1.1.2. Memoria

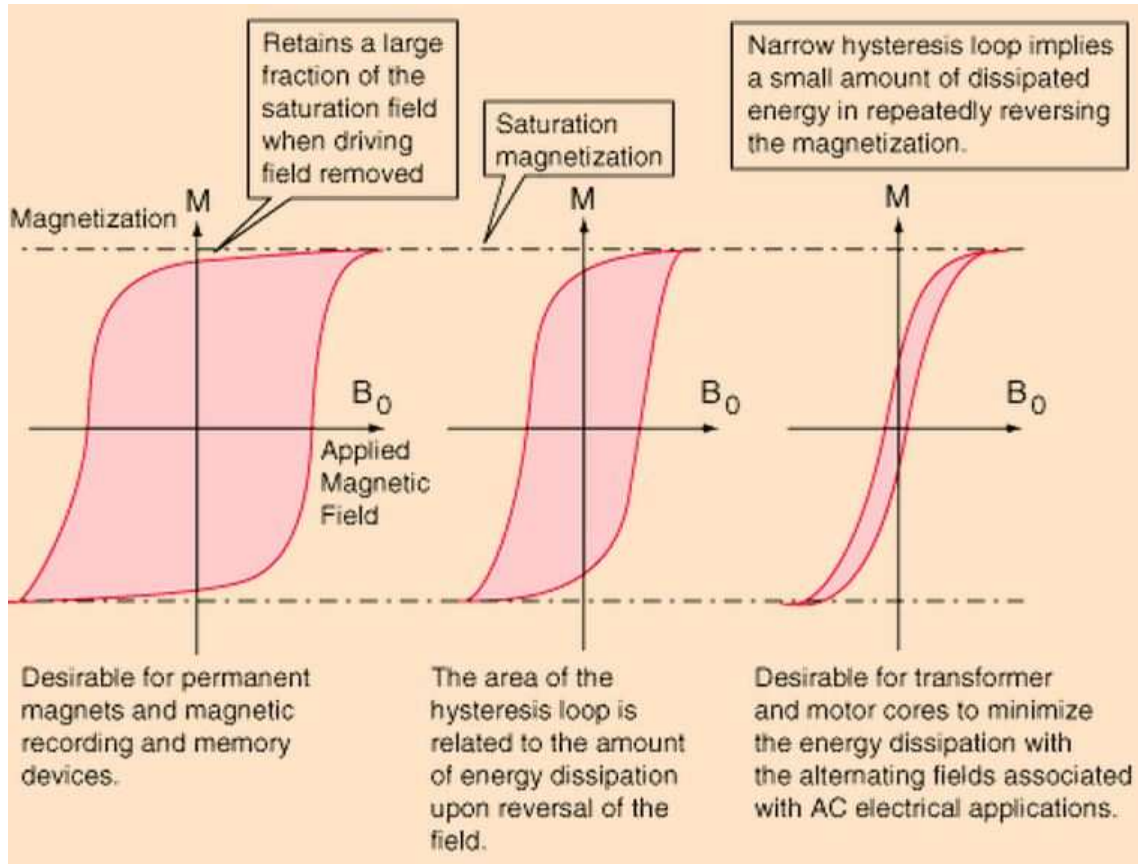
Un elemento de circuitos tiene memoria si su relación tensión corriente está determinada por sucesos pasados. Un claro ejemplo es un ciclo de histéresis con pérdidas en el núcleo. La influencia de la memoria se agrava en materiales duros, ó con gran ciclo de histéresis.

Y por tanto, cada aplicación electromagnética requerirá preferentemente un tipo de ciclo de histéresis. En el libro de Young (bibliografía,2) se explica porque los materiales duros se emplean para grabar en memoria magnética, mientras que por ejemplo los transformadores son idelmente blandos valorándose



**Figura 1.4:** Finalidad tecnológicas de materiales ferromagnéticos atendiendo a su ciclo de histéresis.

el alto rendimiento que presentan debido a las pequeñas pérdidas por histéresis que un material blando presenta (figura 1.5).



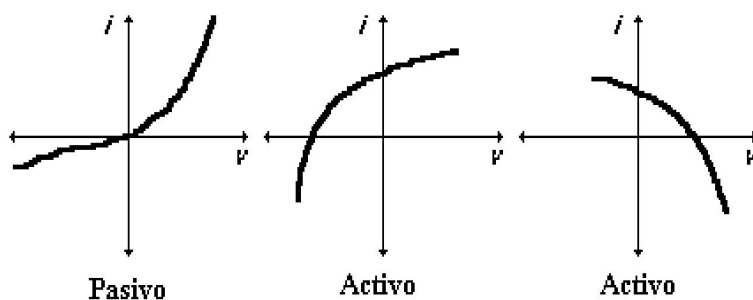
**Figura 1.5:** Hay una considerable variación en la histéresis de los diferentes materiales magnéticos.

### 1.1.3. Pasividad

Un elemento de circuitos es pasivo si la única potencia instantánea positiva que puede entregar es parte de aquella que previamente ha almacenado. Un elemento de circuitos que no sea pasivo es un elemento activo.

Para los elementos sin memoria la definición anterior puede simplificarse, ya que su comportamiento no está condicionado por el pasado. Diremos entonces que un elemento de circuitos sin memoria es pasivo si no puede entregar potencia instantánea positiva.

Si un elemento de circuitos es pasivo y además posee una característica  $i - v$  que lo defina, ésta debe estar en el primer y tercer cuadrante de la curva  $v-i$ , ya que en estos cuadrantes los signos de la corriente y la tensión son iguales, y por lo tanto su producto (que es la potencia instantánea consumida) será mayor o igual a cero (figura 1.6).



**Figura 1.6:** Característica  $i - v$  elementos pasivos y activos.

#### 1.1.4. Control por tensión o por corriente

Se dice que un elemento de circuitos está controlado por tensión si su relación tensión-corriente es tal que a cada valor de tensión le corresponde un único valor de corriente.

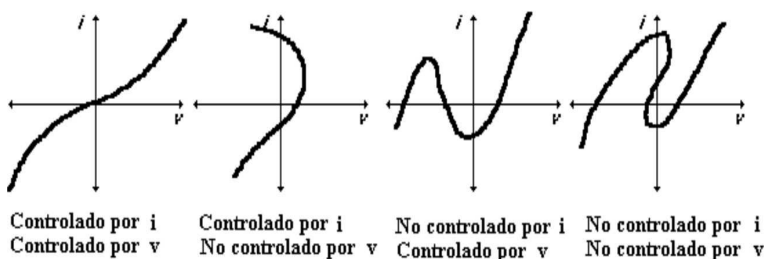
En términos matemáticos podríamos decir que un elemento de circuitos está controlado por tensión si la relación  $R$  de tensión a corriente es una función

$$\text{tensión} \xrightarrow{R} \text{corriente}$$

En forma análoga, se dice que un elemento de circuitos está controlado por corriente si su relación tensión-corriente es tal que a cada valor de corriente le corresponde un único valor de tensión.

En términos matemáticos podríamos decir que un elemento de circuitos está controlado por corriente si la relación  $R$  de corriente a tensión es una función (figura 1.7).

$$\text{corriente} \xrightarrow{R} \text{tensión}$$



**Figura 1.7:** Control por tensión o por corriente de un elemento no lineal.

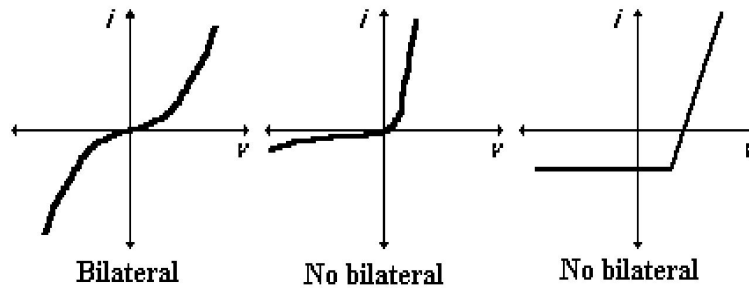
#### 1.1.5. Bilateralidad

Un elemento de circuitos es bilateral si su característica  $i - v$  es tal que posee simetría con respecto al origen, es decir, si al rotar la característica  $180^\circ$  se obtiene la misma característica original.

### 1.2. Corriente en un elemento no lineal. Ejemplos.

A continuación se analizarán 3 ejemplos muy parecidos de circuitos. El circuito está formado por una fuente de tensión alterna (valor eficaz 220 V, frecuencia 50 Hz) y una impedancia, un elemento no lineal. Por tanto, cambiando las características de la no linealidad de la impedancia la corriente varía con ésta.

Con objetivo de no desenfocarnos de lo importante se ha supuesto que el desfase de la corriente respecto a la tensión es cero, o sea, impedancia equivalente resistiva. Y así se graficará en los siguientes ejemplos.



**Figura 1.8:** Bilateralidad de un elemento no lineal.

Las impedancias de los ejemplos son sin memoria, de magnitud controlada por corriente y bilaterales. Presenta una impedancia a bajas tensiones superior que a altas. A altas tensiones la impedancia es constante, y a otro valor que en alta también es constante en casi todo el otro rango de tensiones (voltage no alto), pero hay una zona de unión de impedancias para tensiones altas y bajas.

La diferencia entre ejemplos se puede resumir en la unión impedancia a baja tensión (de valor constante  $Z_1$ ) con impedancia a alta tensión (de valor constante  $Z_2$ ). Un salto de tensiones, un escalón sería no realista, por eso en cada ejemplo se unen estas impedancias por funciones continuas, y no a saltos.

En todo ejemplo se tiene:

```
for k=1:length(t)

    if abs(v(k))<v_esq_1
        Z=Z_1;
    elseif abs(v(k))<v_esq_2
        Z=eval(Z_m);
    else
        Z=Z_2;
    end

    z(k)=Z;
    i(k)=v(k)/Z;

end
```

Dónde las variables son:

$v$	vector de voltage,
$t$	vector de tiempo,
$i$	vector de corriente,
$Z_1$	impedancia a baja tensión,
$Z_2$	impedancia a alta tensión,
$Z_m$	impedancia que une la de alta y la de baja tensión,
$v\_esq\_1$	voltage máximo (en valor absoluto) para impedancia a baja tensión,
$v\_esq\_2$	voltage mínimo (en valor absoluto) para impedancia a alta tensión,

Luego, la clave está en  $Z_m$ , para cada ejemplo se tiene (en el código inferior para el caso lineal, mas para cada caso se puede cambiar esta a opción a cuadrático ó a sinusoidal).

Y dado que  $(\text{abs}(v(k)) - v\_esq\_1) / (v\_esq\_2 - v\_esq\_1)$  va variando de 0 a 1 en el tramo  $v\_esq\_1$ , voltage máximo (en valor absoluto) para impedancia a baja tensión,  $v\_esq\_2$ , voltage mínimo (en valor absoluto) para impedancia a alta tensión, se puede tratar esa evolución de forma

```

opt='lineal';
switch opt
case {'lineal'}
    Z_m='Z_1+(Z_2-Z_1)*(abs(v(k))-v_esq_1)/(v_esq_2-v_esq_1)';
case {'cuadratica'}
    Z_m='Z_1+(Z_2-Z_1)*((abs(v(k))-v_esq_1)/(v_esq_2-v_esq_1))^2';
case {'sinusoidal'}
    Z_m='Z_1+(Z_2-Z_1)*sin(pi/2*(abs(v(k))-v_esq_1)/(v_esq_2-v_esq_1))';
otherwise
    Z_m=Z_2;
end

```

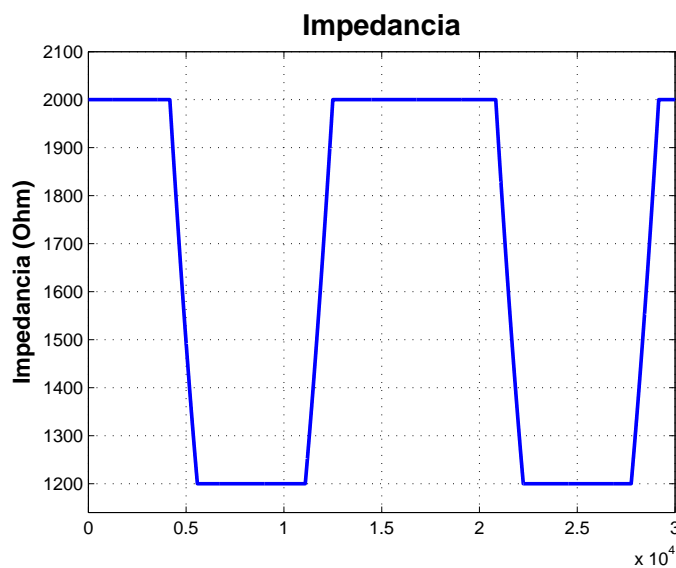
lineal	(0 ,	0,1 ,	0,2 ,	... ,	1),
cuadrática	(0 ,	0,1 <sup>2</sup> ,	0,2 <sup>2</sup> ,	... ,	1),
grado n	(0 ,	0,1 <sup>n</sup> ,	0,2 <sup>n</sup> ,	... ,	1),
sinusoidal	(0 ,	sin( $\pi/2 \cdot 0,1$ ),	sin( $\pi/2 \cdot 0,2$ ),	... ,	1),
	:				

En cada ejemplo se emplea una de las posibles evoluciones

ejemplo 1	lineal,
ejemplo 2	cuadrática,
ejemplo 3	sinusoidal.

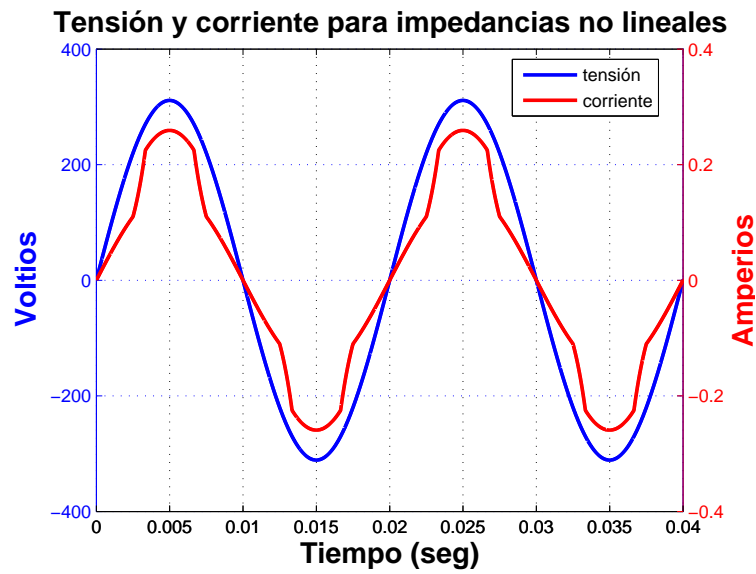
### 1.2.1. Ejemplo 1

La unión de impedancias altas tensiones-bajas se observa que es algo brusca



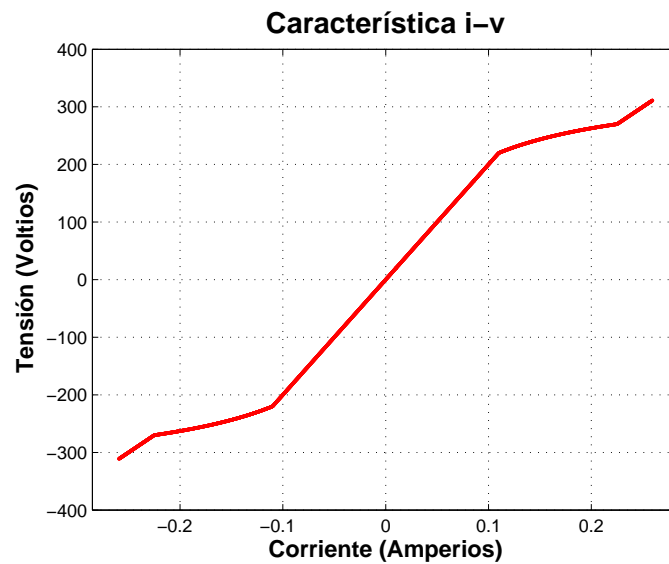
**Figura 1.9:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 1.

Entonces, las curvas voltaje y amperaje son



**Figura 1.10:** Tensión y corriente en ejemplo 1.

Y su característica  $v$  frente a  $i$  es

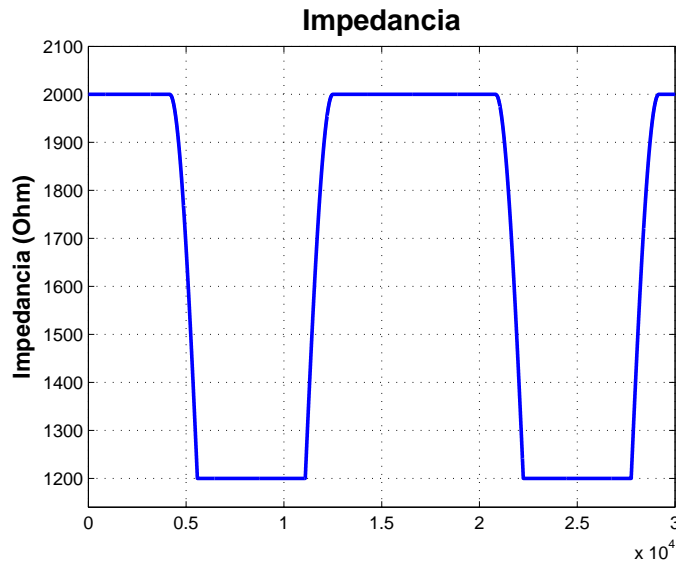


**Figura 1.11:** Característica  $i-v$  en ejemplo 1.



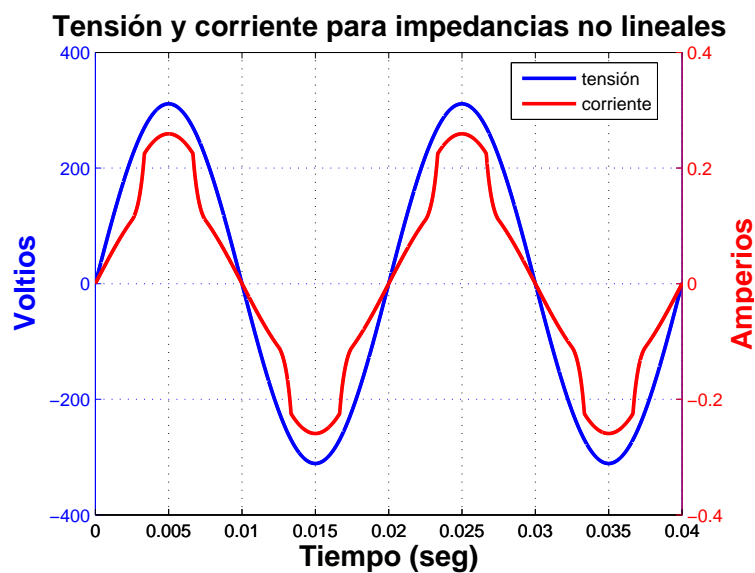
### 1.2.2. Ejemplo 2

La unión de impedancias altas tensiones-bajas se observa que es algo menos brusca



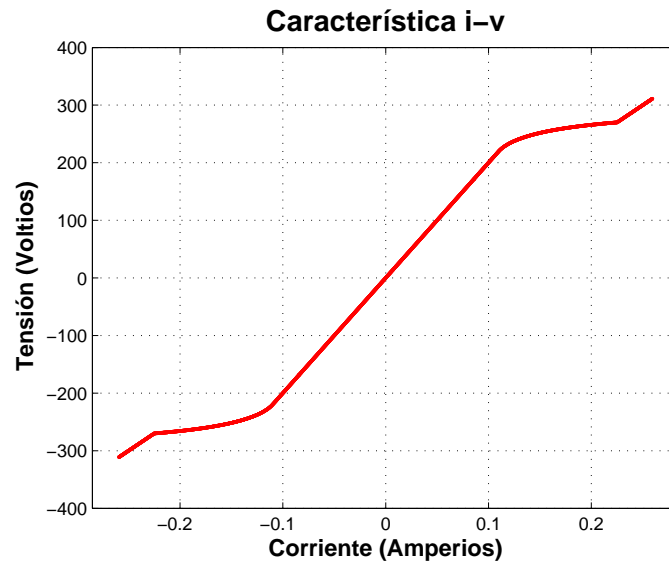
**Figura 1.12:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 2.

Entonces, las curvas voltaje y amperaje son



**Figura 1.13:** Tensión y corriente en ejemplo 2.

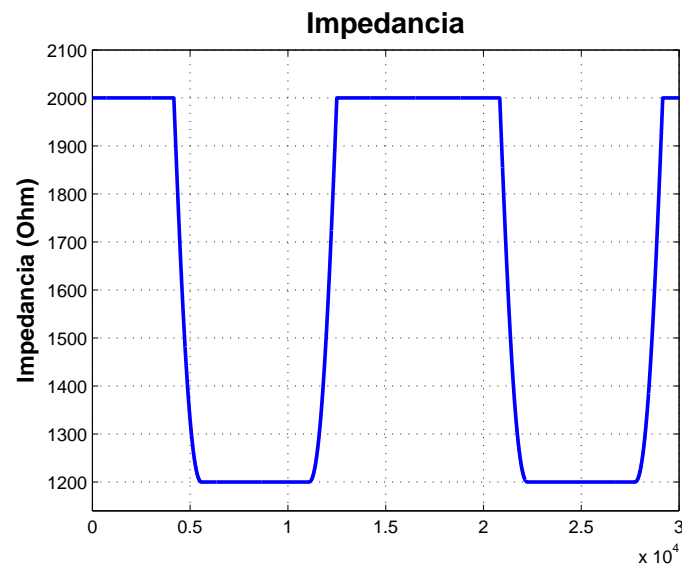
Y su característica  $v$  frente a  $i$  es



**Figura 1.14:** Característica  $i - v$  en ejemplo 2.

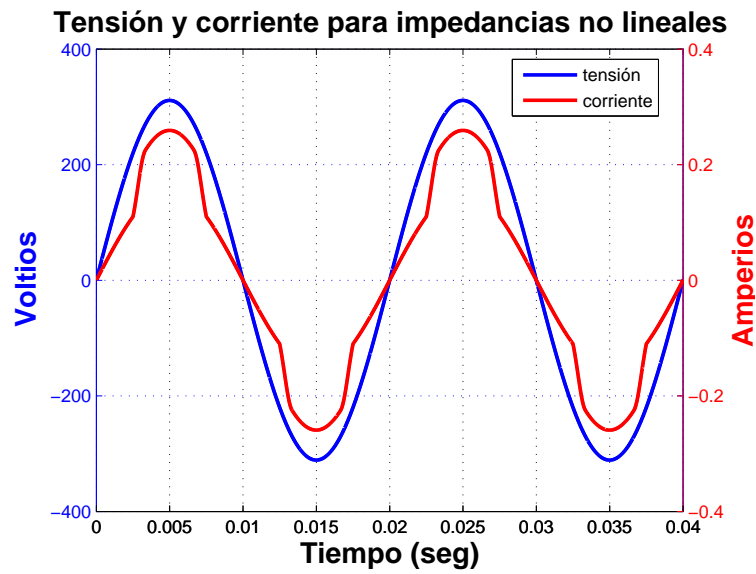
### 1.2.3. Ejemplo 3

La unión de impedancias altas tensiones-bajas se observa que es algo suave



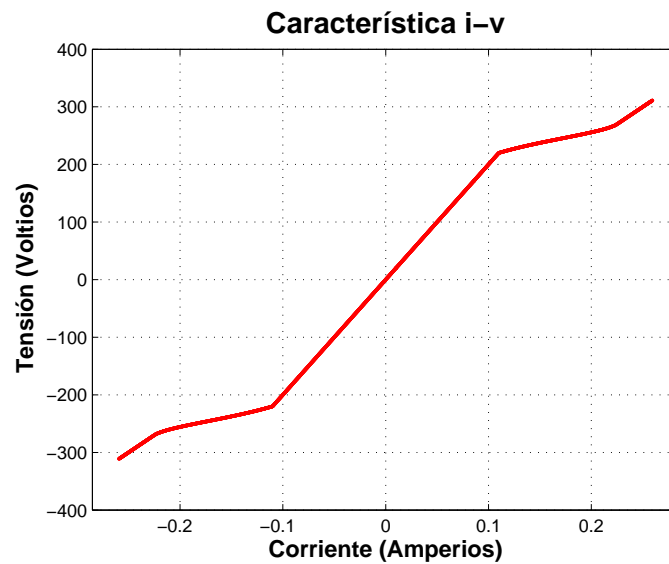
**Figura 1.15:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 3.

Entonces, las curvas voltaje y amperaje son



**Figura 1.16:** Tensión y corriente en ejemplo 3.

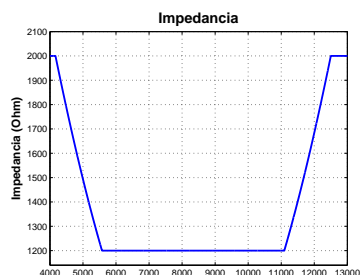
Y su característica  $v$  frente a  $i$  es



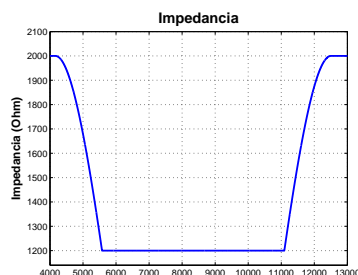
**Figura 1.17:** Característica  $i - v$  en ejemplo 3.

### 1.2.4. Comparación de plots

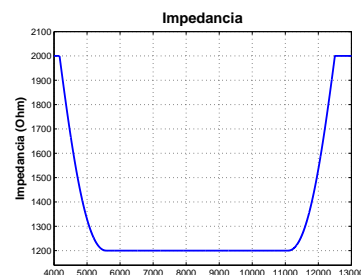
Comparando el desarrollo de la impedancias en cada ejemplo (figuras 1.18 a 1.20) se observan muy pequeñas diferencias, pero son estas pequeñas variaciones de evolución (crecimiento cte en la lineal, mas amortiguado a altas impedancias en el cuadrático, y equitativamnete amortiguado en el lineal) hacen que los “empalmes” de cada trama de la corriente sea mas o menos suave (figuras 1.21 a 1.26).



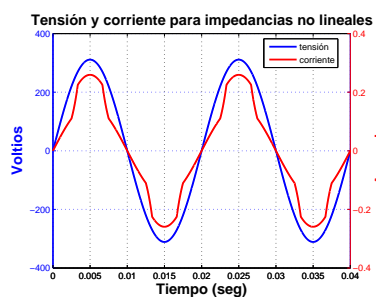
**Figura 1.18:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 1.



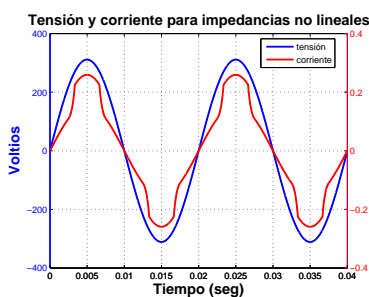
**Figura 1.19:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 2.



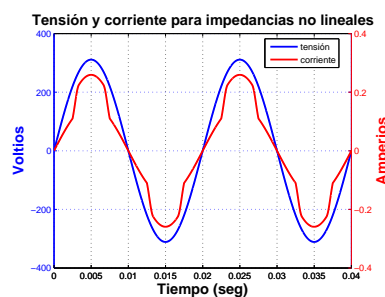
**Figura 1.20:** Evolución de magnitud de impedancias en ejemplo 3.



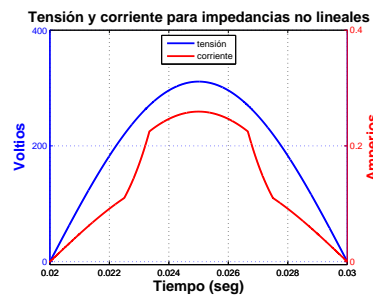
**Figura 1.21:** Tensión y corriente en ejemplo 1.



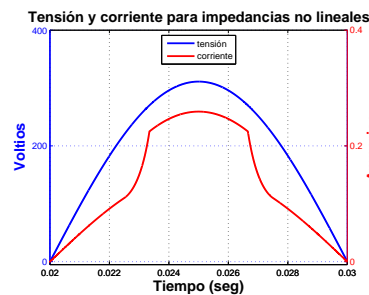
**Figura 1.22:** Tensión y corriente en ejemplo 2.



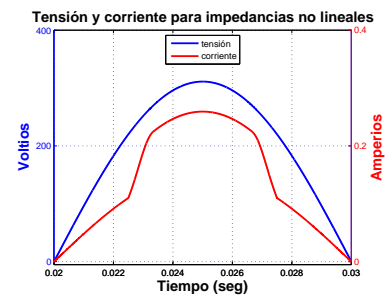
**Figura 1.23:** Tensión y corriente en ejemplo 3.



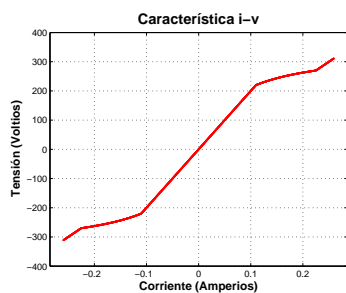
**Figura 1.24:** Detalle de tensión y corriente en ejemplo 1.



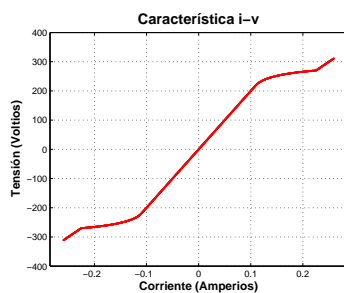
**Figura 1.25:** Detalle de tensión y corriente en ejemplo 2.



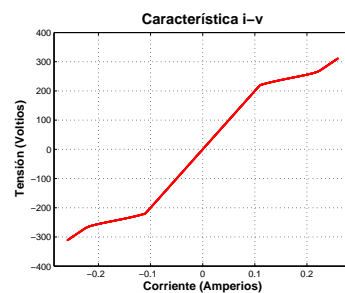
**Figura 1.26:** Detalle de tensión y corriente en ejemplo 3.



**Figura 1.27:** Característica  $i-v$  en ejemplo 1.



**Figura 1.28:** Característica  $i-v$  en ejemplo 2.



**Figura 1.29:** Característica  $i-v$  en ejemplo 3.

# Bibliografía

- [1] Oscar German Duarte Velasco, *Circuitos con resistores no lineales*. Universidad nacional de Colombia, Facultad de ingeniería, departamento de ingeniería eléctrica. <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2001603/lecciones/anexo/nolineal.pdf>
- [2] Young, Hugh D., *University Physics with Modern Physics*. 13th Ed., Addison-Wesley, 2011
- [3] Jesus Fraile Mora, *Maquinas Eléctricas*. 6<sup>o</sup> Edición, 2008.