Índice general

Capítulo 1

ELECTROSTÁTICA

1.1. Introducción

Electrostática : trata de las cargas eléctricas en reposo.

En mecánica la propiedad mas importante de una partícula es su masa, que determina su aceleración.

En la teoria electromagnética es la **carga eléctrica**.

$\hookrightarrow$1. Tipos de carga: positiva y negativa.[1]

$\hookrightarrow$2. Propiedades de la carga eléctrica:

- *Principio de conservación de la carga eléctrica.*[2]
- *Cuantización de la carga eléctrica* en multiplos enteros de la unidad fundamental de carga e.

  Toda carga presente en la naturaleza puede escribirse de la forma $q = \pm n \cdot e$ tal que $n \in \mathbb{Z}$ y $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C.

1.2. Ley de Coulomb

La fuerza entre cargas puntuales son directamente proporcionales al producto de dichas cargas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa. Las cargas de mismo signo se repelen, las de distinto se atraen.

La fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la carga q_2 separadas por una distancia r_{12}viene dada por[3]

$\vec{F}_{12} = k\dfrac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$ tal que $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2}$ es la *cte. de Coulomb.* *Ley de Coulomb*

$\epsilon_0 = 8{,}85{\cdot}10^{-12}N^{-1}m^{-2}C^2$ es la *permitividad del vacio* describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio. La permitividad absoluta de un material se calcula multiplicando la permitividad relativa por la del vacío: $\epsilon = \epsilon_r\, \epsilon_0$.

En el caso general en el que n cargas actuan sobre una carga cualquiera j : $\vec{F}_{ij} = \sum_{i=0}^{n} k\dfrac{q_i q_j}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$

[1] La materia común es electricamente neutra. Para estudiar las *propiedades de la carga eléctrica* debemos separar la positiva de la negativa.

[2] La carga eléctrica ni se crea ni se destruye sólo se transporta. La cantidad de carga en el universo es constante.

[3] Observese la similitud con la *Ley de gravitación universal* $\vec{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$ .Al igual que esta última, la fuerza electrostática dada por la ley de Coulomb es una fuerza conservativa. Una fuerza conservativa es aquella cuyo trabajo depende únicamente de las posiciones inicial y final de la partícula y no de la trayectoria que ésta ha descrito para ir desde la posición inicial a la final. Una consecuencia de este hecho es que el trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es cero: $V = \oint_{\text{cerrada}} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$.

1.3. Campo eléctrico

Existe un campo eléctrio en un punto cuando una partícula cargada está sometida a una fuerza. La intensidad de un campo eléctrico en un punto es la fuerza eléctrica que en ese punto ejerce el campo sobre la unidad de carga positiva colocada en él. $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = k\dfrac{q_1}{r_{10}^2}\hat{r}_{10}$ *Campo eléctrico*

En un campo no electrostático la variación en campo eléctrico se propaga con la velocidad de la luz c y así la carga testigo en r no reacciona a la variación de la carga q_1 hasta el tiempo $t = r/c$.

$\hookrightarrow$ Distribución discreta de carga. En el campo eléctrico creado por distribución discreta de cargas se puede aplicar el **Principio de superposición** que consiste en calcular el campo eléctrico creado por cada una de las cargas como si estuviesen aisladas y sumar vectorialmente todos los campos.

Aplicando el Principio de superposición en el caso que n cargas actuan sobre una carga i : $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} k\frac{q_i}{r_{i0}^2}\hat{r}_{i0}$

$\hookrightarrow$ Distribución continua de carga.

Situación en que un gran nº de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida continamente en el espacio.

∘ Distribución lineal en el espacio: *densidad lineal de carga* $\lambda = \dfrac{dq}{dl}$

∘ Distribución superficial en el espacio:*densidad lineal de carga* $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$

∘ Distribución volúmica en el espacio: *densidad lineal de carga* $\rho = \dfrac{dq}{dV}$

Para el cáculo del campo eléctrico en una distribución contua de carga calculamos el campo elemental creado por una carga elemental en un punto situado a una distancia s de dicha carga elemental aplicando $d\vec{E} = k\dfrac{dq}{s^2}\vec{u_s}$ y sumamos sus infinitos términos que al ser infinitos equivale a la integral extendida al espacio en que exisete esa distribución de carga $\vec{E} = \displaystyle\int_D k\,\frac{dq}{s^2}\vec{u_s}$

1.4. Flujo eléctrico. Ley de Gauss

El flujo ϕ del campo a través de la superficie es el producto de la intensidad del campo eléctrico por el área de una superficie perpendicular al campo: $\phi = \vec{E}\,\hat{n}\,A = E\,A\cos\theta = E_n\,A$[4]

$$\text{ya que}\begin{cases}\text{El nº de líneas por área es proporcional al campo eléctrico } N \propto E\,A.\\ \text{El nº neto de líneas que atraviesa la superfice es proporcional al flujo } N \propto \phi\end{cases}$$

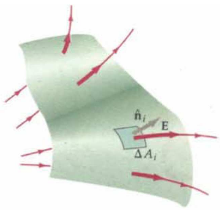


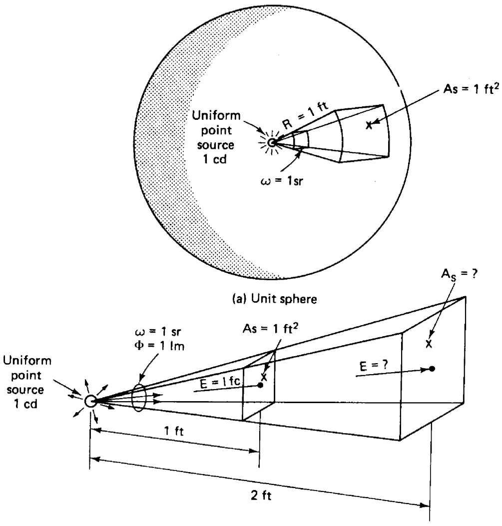
Figura 1.1: Cuando **E** varía en módulo o dirección, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i.

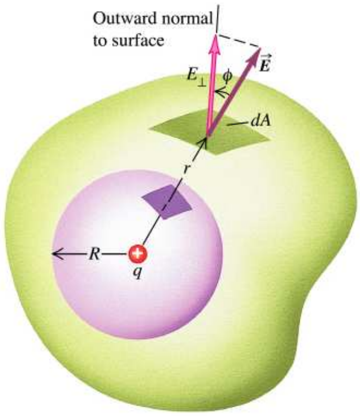
El flujo ϕ del campo a través de la superficie es el producto de la intensidad del campo eléctrico por el área de una superficie perpendicular al campo: $\phi = \vec{E}\,\hat{n}\,A = E\,A\cos\theta = E_n\,A$ .Dónde $E_n = \vec{E}\,\hat{n}$ es la componente del vector del campo eléctrico normal a la superficie.

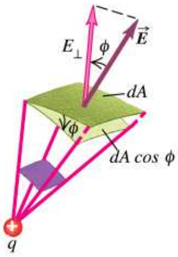
Si la superficie es infinitesimal ,el flujo a través de cada área elemntal es $\Delta\phi_i = \vec{E}\,\hat{n}_i\,\Delta A_i$ y por tanto el flujo neto a través de la superficie es $\phi_{net} = \displaystyle\int \vec{E}\,\hat{n}\,dA$

[4]Toda superficie definible por un vector con propiedades: $\begin{cases}\text{Perpendicular a la superficie.}\\ \text{El módulo del vector vale el área de la superficie}\\ \text{Sentido según la regla de la mano derecha}\end{cases}$

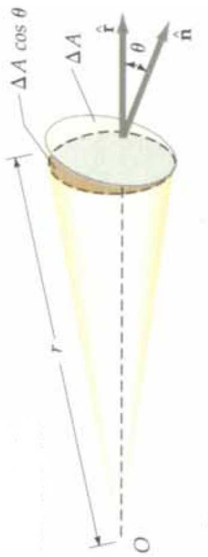
Ley de Gauss. El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada ,independientemente de la forma, que encierre a un conjunto de cargas es $\phi_{net} = \oint_D \vec{E}\,\hat{n}\,dA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$







Demostración matemática de la Ley de Gauss

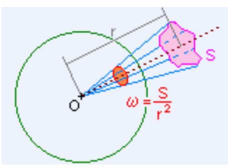


$\boxed{1}$ Sea una superficie cerrada S de forma arbitraria en cuyo interior se encuentra una carga puntual q$^+$. El flujo a través de S es el mismo que a través de cualquier superficie cerrada que contenga la carga en su interior , pues ambas están atravesadas por el mismo nº de líneas de capo. Utilizando una superficie gaussiana ,superficie esférica auxiliar con centro en la carga y de radio r.[5]

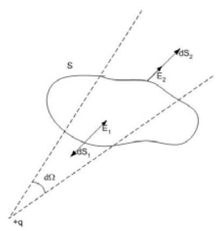
$$\phi_{net} = \oint_S \vec{E}\,\hat{n}\,dA = k\,\frac{q_{int}}{r^2}\oint_S dA = k\,\frac{q_{int}}{r^2}\,4\,\pi\,r^2 = 4\,\pi\,k\,q_{int} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$\boxed{2}$Considerando un elemento de área ΔA sobre una superficie esférica . El ángulo sólido$\Delta\Omega$ subtendido en el centro de la esfera de radio r se define como $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$estereorradianes. Como el área esférica es $4\,\pi\,r^2$,el ángulo sólido total subtendido por una esfera es $4\,\pi$ estereorradianes. El flujo depende del área de una superficie perpendicular al campo, cuyo ángulo sólido es ,y por tanto el flujo es

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\Omega = \dfrac{\Delta A\,\hat{n}\cdot\hat{r}}{r^2} = \dfrac{\Delta A\,\cos\theta}{r^2} \\ \phi_{net} = \oint_S \vec{E}\,\hat{n}\,dA = k\,\dfrac{q_{int}}{r^2}\,\hat{r}\,\hat{n}\oint_S dA = k\,q_{int}\oint_S d\Omega \end{array}\right\}\phi_{net} = 4\,\pi\,k\,q_{int} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$



Para explicar el ángulo sólido pensemos en un punto O situado a una distancia r de una superficie S no necesariamente plana. Ahora, formemos un cono con vértice en O cuyas generatrices pasen por el contorno de S. A continuación hagamos una esfera de radio uno con centro en O. Al área de la superficie de la esfera interceptada por el cono se la conoce por ángulo sólido.



▷Si carga está en la superficie, el ángulo sólido es el subtendido por media esfera $\phi_{net} = \frac{q_{int}}{2\,\epsilon_0}$.

▷Si carga está en fuera de la superficie, el ángulo sólido subtendido por las dos superficies elementales es el mismo, y los flujos a través de ellas son de signo opuesto,por tanto $\phi_{net} = 0$.

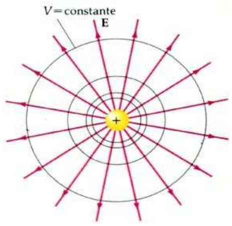
[5]Observese que el flujo es independiente del radio de la esfera elegida.

1.5. Potencial eléctrico

Como el campo electrostático es conservativo , la circulación de dicho campo la podemos expresar como: $\displaystyle\int_{V_A}^{V_B} -d\,V \;=\; \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Como E significa fuerza por unidad de carga positiva ,$\vec{E} \;=\; \dfrac{\vec{F}}{q_0}$,el potencial eléctrico V$_A$ [6] representa el trabajo que realiza la fuerza del campo para trasladar una unidad de carga positiva q$^+$ desde el punto A hasta el ∞. [7]

$$\int_{V_A}^{V_\infty} -d\,V \;=\; \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^\infty k\frac{q_i}{r_{i0}^2}\hat{r}_{i0}d\vec{r} \;=\; k\,q\int_A^\infty \frac{dr}{r^2} \;=\; k\,q\left.\frac{-1}{r}\right|_A^\infty$$
$$= k\,q\left\{\frac{-1}{r_\infty}-\frac{-1}{r_A}\right\} \;=\; k\frac{q}{r}$$



Entonces $V_A - V_\infty \;=\; k\dfrac{q}{r}$ .Esta ecuación muestra claramente que las superficies equipotenciales para una carga puntual aislada son esferas concéntricas a la carga puntual q$^+$.

La diferencia de potencial.

En general cuando una fuerza conservativa $\vec{F}$ actua sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$, la variación de la función energía potencial dU viene definida por

$$dU \;=\; -\vec{F}\,d\vec{l}$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial. La fuerza ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga puntual q_0 es

$$\vec{F} \;=\; q_0\,\vec{E}$$

Cuando la carga experimenta un desplazamiento $d\vec{l}$ en un campo eléctrico $\vec{E}$ la variación de energía potencial electrostática es

$$dU \;=\; -q_0\,\vec{E}\,d\vec{l}$$

Si la carga se desplaza desde una posición inial a hasta otra final b, la variación de energía potencial electrostática es

$$\Delta\,U \;=\; U_b - U_a \;=\; \int_a^b dU \;=\; -\int_a^b q_0\,\vec{E}\,d\vec{l}$$

La variación de energía potencial es proporcional a la carga testigo q_0 .La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina diferencia de potencial dV:

$$dV \;=\; \frac{dU}{q_0} \;=\; -\vec{E}\,d\vec{l}$$

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b, el cambio de potencial es

[6] Al potencial eléctrico $V_A - V_\infty$ le llamaremos simplemente V_A .

[7] Si la distribución de carga es discreta se puede calcular el pontencial mediante $V_A \;=\; k\sum_{i=0}^{n}\frac{q_i}{r_i}$.Pero en la mayoría de los casos interesa aplicar la definición de potencial eléctrico $V_A \;=\; \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r}$.

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{l}$$

La diferencial de potencial $V_a - V_b$ es el valor negativo del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga testigo positiva cuando se desplaza del punto a al punto b.

Si situamos una carga de prueba positiva q_0 en un campo eléctrico $\vec{E}$ y la dejamos en libertad, se acelerará en la dirección de $\vec{E}$ a lo largo de la línea de campo. La energía cinética aumentará y su energía potencial disminuirá.

Las líneas de campo indican la dirección en la que disminuye el potencial eléctrico[8].

Campo eléctrico y potencial

Si el potencial es conocido pueden utilizarse las líneas de campo para calcular el campo eléctrico. Consideremos un pequeño desplazamiento $d\vec{l}$ en un campo eléctrico arbitrario $\vec{E}$. La variación de potencial es

$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l} = -E_l\, dl \quad \Big/ \quad E_l \text{ es el componente de } \vec{E} \text{ paralelo al desplazamiento}$$

$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

Si el desplazamiento $d\vec{l}$ es perpendicular a $\vec{E}$, el potencial no varía. La máxima variación de V se produce cuando $d\vec{l}$ es (anti-)paralelo a $\vec{E}$.

$$\vec{E} = -\nabla\vec{V} \quad {}^{9}$$

Un desplazamiento paralelo a un campo eléctrico radial se enla forma $d\vec{l} = dr \cdot \hat{r}$, por tato,

$$dV = -\vec{E}\, d\vec{l} = -\vec{E}\, dr \cdot \hat{r} = -E_r\, dr$$

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

Para cualquier distribución de carga esfericamente simétrica, el potencial varía sólo con r, y el campo eléctrico está relacionado con el potencial mediante

$$\vec{E} = -\nabla\vec{V} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas de signo opuesto e igual magnitud cercanas entre sí.

[8] Situando una carga unitaria positiva creadora de un campo eléctrico $\vec{E}$, la carga de prueba positiva es repelida, y el campo eléctrico disminuye , ya que $\int_{V_A}^{V_B} -dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = k\, q \left\{ \frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A} \right\}$. Mientras si la carga unitaria creadora del campo eléctrico fuese negativa, se atraería, y el valor absoluto del campo eléctrico aumentaría, pero no así en valor algebraico.

Estén q^+ ó q^- en $x = 0$ m y una carga de prueba positiva q_0 en el eje x en el punto a , siendo $0 < a < b < c$ con $a - b$ y $b - c$ equidistantes.

La diferencia de potencial en E_{q^+} decrece $V_A - V_B = kq\left(\frac{q^+}{c^2} - \frac{q^+}{b^2}\right)$

y en E_{q^-} disminuye $V_A - V_B = kq\left(\frac{q^-}{a^2} - \frac{q^-}{b^2}\right) \equiv kq\left(\frac{q^+}{b^2} - \frac{q^+}{a^2}\right)$

[9] Un vector que señala la dirección de la máxima variación de la función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de la función con respecto a la distancia en dicha dirección, se denomina gradiente de la función.

1.6. Energía potencial electroestática

La ley de Coulomb es una fuerza conservativa, por tanto el trabajo es independiente de la trayectoria y se puede calcular a partir de una función escalar denominada energía potencia electrostática Ep_e .
• De una carga puntual. Si en lugar de trasladarse una carga q^+ se traslada una carga q la energía potencial adquirida por ella es $Ep_e = q \cdot V$ con V potencial eléctrico dónde está situada la carga.
•Distribución discreta de cargas. Consideremos dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas una distancia r_{12}, podemos definir la Ep_e del sistema, como el trabajo desarrolado por la fuerza del campo para trasladar las cargas desde su posición al ∞ : $Ep_e = \int_{r_{12}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_{12}}^{\infty} k\frac{q_1 q_2}{r^2} dr = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$
Generalizando en el caso de n cargas: $Ep_e = \sum_{i,j/i\neq j}^{n} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n} q_i \sum_{j/j\neq i}^{n} k\frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i}^{n} q_i\, V_i$
con V_i potencial eléctrico dónde está situada la carga q_i creado por el resto de cargas. [10]

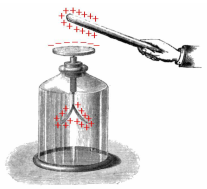
1.7. Conductores y dieléctricos: estructura y propiedades

La inducción electrostática es la redistribución de la carga eléctrica en un objeto, causada por la influencia de cargas cercanas. Es un tipo de electrización [11] ,como por contacto, fricción, efecto fotoeléctrico, electrólisis y efecto termoeléctrico.

⋆ Explicación. Una pieza normal de materia tiene el mismo número de cargas eléctricas positivas y negativas en cada una de sus partes, situadas muy cerca unas de otras, por lo que en general se considera que no tienen carga, o que su carga eléctrica acumulada es cero. Cuando un objeto con carga se acerca a un objeto sin carga capaz de conducir la electricidad, como una pieza de metal, la fuerza que ejerce la carga cercana hace que las cargas se separen. Por ejemplo, si se lleva una carga positiva cerca del objeto (ver imagen de la derecha), las cargas negativas del metal serán atraídas hacía él, y se desplazarán hacía el objeto hasta ponerse frente a él, mientras las cargas positivas serán repelidas y se desplazarán hacía el punto más alejado del objeto. Esto trae como consecuencia una zona de cargas negativas sobre el objeto más cercano a las cargas externas, y una zona de cargas positivas en el punto más lejano a él. Si la carga externa es negativa, la polaridad de las regiones con carga eléctrica se invertirá. Al tratarse únicamente de una redistribución de las cargas, el objeto no tiene en sí carga eléctrica de ningún tipo. Este efecto inductivo es reversible; si se suprime la carga cercana, la atracción entre las cargas internas positivas y negativas hará que éstas se entremezclen de nuevo.

⋆ Cargando un objeto por inducción. No obstante, el efecto inductivo puede usarse también para cargar un objeto. Si, mientras esta cerca de una carga positiva, el objeto de encima se encuentra conectado momentáneamente mediante un conductor eléctrico a la toma de tierra, que es una gran reserva de cargas positivas y negativas, algunas de las cargas negativas de la tierra caerá dentro del objeto debido a la atracción de la carga positiva cercana a éste. Cuando el contacto con la tierra se rompe, el objeto se queda con carga eléctrica negativa. Este método se puede demostrar utilizando un electroscopio de pan de oro.El electroscopio no ha adquirido carga eléctrica alguna: la carga ha sido simplemente redistribuida, así pues si se sustrajese la carga del electroscopio, las láminas de oro se volverían a juntar. Pero si se realiza un leve contacto eléctrico entre el electroscopio y la toma de tierra, por ejemplo al tocar el terminal con el dedo, la carga de la toma de tierra, pasará al terminal al estar atraída por el objeto que está cerca de él. El electroscopio contendría así una carga eléctrica de polaridad opuesta a la del objeto. Cuando el contacto entre la toma de tierra y el objeto se termine, por ejemplo si se levanta el dedo, la carga eléctrica extra que entró en el electroscopio no podrá salir, y éste mantendrá una carga eléctrica, por lo tanto, las láminas de oro seguirán separadas aunque el objeto con carga se separe del electroscopio.

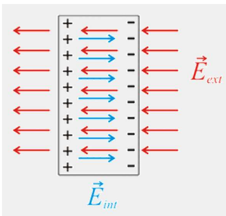
[10] La restricción del sumatorio $i \neq j$, ó el posterior 1/2 ,se debe para no contar dos veces el mismo par de cargas ,ya que $q_i q_j = q_j q_i$.
[11] Efecto de ganar o perder cargas eléctricas, normalmente electrones, producido por un cuerpo eléctricamente neutro.



⋆ La inducción en objetos dieléctricos. Un efecto inductivo similar ocurre en los objetos (dieléctricos) y es el responsable de la atracción de objetos no conductores ligeros y pequeños, como trozos de papel o poliestireno extruido con electricidad estática. En los no conductores, los electrones están atados a los (átomos) y no son libres para desplazarse por el objeto; sin embargo, pueden moverse ligeramente dentro de los átomos. Si se lleva una carga positiva cerca de un objeto no conductor, los electrones de cada átomo son atraídos hacia él, y se desplazan hacia el lado del átomo que este enfrentado a la carga, mientras el positivo núcleo es repelido y se desplaza ligeramente a la cara opuesta del átomo. Esto se conoce como polarización. Como las cargas negativas están ahora más cerca de la carga externa que las positivas, su atracción es mayor que la repulsión de las cargas positivas, dando lugar a una atracción eléctrica ligera hacia la carga. Este efecto es microscópico, pero como hay tal cantidad de átomos, suma una fuerza suficiente para desplazar un elemento ligero como el poliestireno extruido

Propiedades de conductores en equilibrio electrostático

Un conductor está en equilibrio electrostático si la densidad de corriente en todos sus puntos vale cero. No existe movimiento macroscópico de las cargas en el mismo.
1.El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático vale cero. $\vec{E}_{int} = 0$



Si situamos una placa conductora en una región del espacio en que existe un campo eléctrico, los electrones de la placa se verán sometidos a una fuerza opuesta al campo externo y se acumularán en el lado derecho de la placa, dejando el izquierdo con un exceso de carga positiva.

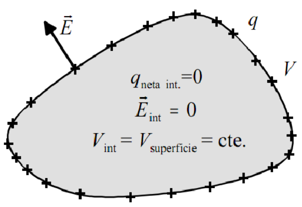
2.El conductor es una superficie o volumen equipotencial.
$\int_{V_A}^{V_B} -dV = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \Longleftrightarrow V_A = V_b$,entonces todo potencial eléctrico es constante $V_{int} = $ cte.

3.La carga que se suministra al conductor se acumula en la superficie externa.
No hay densidad volumétrica de carga en el interior: $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ y por tanto, todo exceso o defecto de carga se acumula en la supercie.

4.Campo en la superficie de un conductor: $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{r}$. *TM^a de Coulomb*

5.La carga no se distribuye uniformemente en la superficie en la superficie, se concentra en las zonas de menor curvatura.

Concepto de capacidad



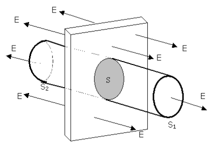
La capacidad o capacitancia eléctrica es la propiedad que tienen los cuerpos para mantener cantidad de energía eléctrica,una carga eléctrica, almacenada para un potencial eléctrico dado: $C = \dfrac{Q}{V}$faradios(F).
Cabe destacar que la capacidad es siempre una cantidad positiva y que depende de la geometría del capacitor y del medio.

$$C = f(medio, geometria)$$

Condensador : dos conductores (armaduras o placas) que pueden almacenar cargas iguales y de signo opuesto.

Siendo la capacidad de un condensador $C = \dfrac{|\, q\,|_{\text{de una de las armadura}}}{|\,\Delta V\,|_{\text{entre armaduras}}}$

Supongamos un condensador plano ideal ya cargado, formado por dos láminas conductoras planas e infinitas, una con carga q^+ y la otra con carga q^-, distribuidas uniformemente por su



superficie con una densidad superficial de carga constante σ, con una separación entre láminas d y vacío entre ellas.

La lámina positiva origina un campo eléctrico uniforme a su izquierda y a su derecha, dirigido hacia fuera de la lámina, con módulo $E_+ = \dfrac{+\sigma}{2\,\epsilon_0} = \dfrac{q}{2\,\epsilon_0\,S}$.
La misma forma es describiendo el flujo eléctrico en cilindro de base S cuyo eje es perpendicular a una carga superficial, $\phi = \displaystyle\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\,E\cdot S = \dfrac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

La lámina negativa origina un campo eléctrico también uniforme a su izquierda y a su derecha, dirigido hacia la lámina, con módulo igual al originado por la lámina positiva.$E_- = \dfrac{|-\sigma\,|}{2\,\epsilon_0} = \dfrac{q}{2\,\epsilon_0\,S}$.
Puesto que ambos módulos son iguales, pero los sentidos son opuestos fuera del condensador, el campo eléctrico externo es nulo, mientras que entre las láminas está dirigido de la positiva hacia la negativa con módulo :$E_{int} = E_+ + E_- = \dfrac{q}{\epsilon_0\,S}$.
Una vez obtenida la intensidad del campo electrostático en el interior del condensador, pasamos a calcular la diferencia de potencial entre láminas: $\Delta V = E_{int}\cdot d = \dfrac{q\,d}{\epsilon_0\,S}$.
Sustituyendo obtenemos finalmente la capacidad del condensador plano ideal con vacío entre las armaduras es: $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\epsilon_0\,S}{d}$

Dieléctricos en el interior de condensadores

Faraday descubrió que cuando el espacio entre armaduras de un condensador está enteramente ocupado por un dieléctrico de permitividad relativa $K \equiv \epsilon_r = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}$ (o constante dieléctrica [12]) , la capacidad aumenta según: $C_{\text{con dielectrico}} = \epsilon_r\,C_{\text{sin dielectrico}}$,con notación $C = \epsilon_r\,C_0$.

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas en $E = E_0/K$, y por tanto la diferencia de potencial se reduce y la capacidad aumenta. Ya que en presencia de un campo eléctrico externo, las moléculas del dieléctrico producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto. La polarización del dieléctrico por el campo se puede dar en alienación de los momentos dipolares permanentes de moléculas polares ó por momentos dipolares inducidos en moléculas apolares.

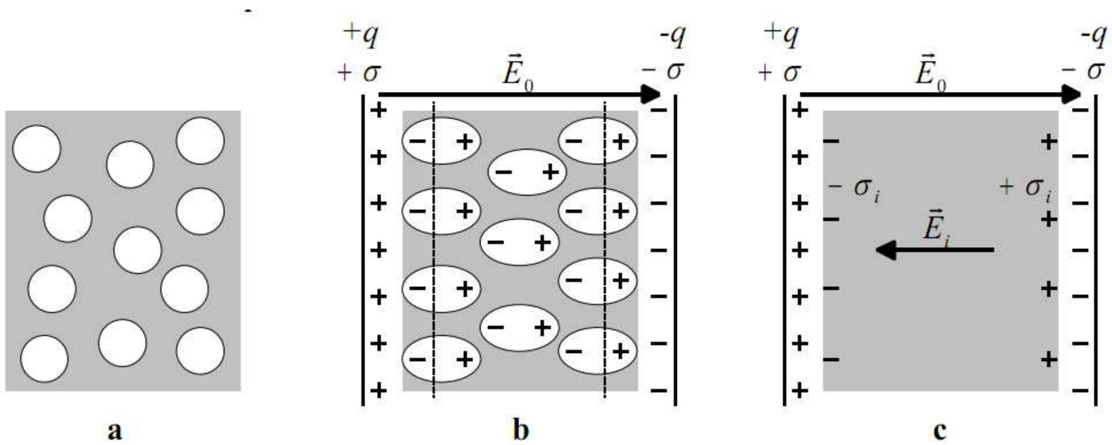
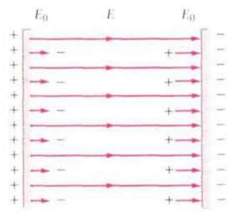


Figura 1.2: En la Fig.a está representado el dieléctrico (en ausencia de campo eléctrico externo) como rectángulo gris, en donde se han dibujado unas cuantas moléculas no polares y neutras eléctricamente. En la Fig.b se tiene un condensador cargado, sin dieléctrico entre sus armaduras con densidades superficiales de carga σ y σ . En la Fig.c se tiene un condensador cargado, con dieléctrico ocupando todo el volumen entre armaduras.

[12]Término menos apropiado porque la permitividad de un dieléctrico puede depender de la temperatura y de la frecuencia.



Si las placas del condensador están muy próximas, de modo que el bloque es muy delgado, el campo eléctrico interior al dieléctrico debido a las densidades de carga ligadas $-\sigma_i$ a la izquierda y $+\sigma_i$ a la derecha es igual al campo debido a dos densidades de cargas planas infinitas. El campo E_i tiene así el valor $E_i = \sigma_i/\epsilon_0$.

El valor del campo resultante es la diferencia del campo de cargas libre, exteriores al condensador, y cargas ligadas, en su interior y sin libertad de movimiento:

$$E = E_0 - E_i = \frac{E_0}{K} \quad \Longrightarrow \quad E_i = E_0\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{K-1}{K}E_0$$

Escribiendo σ_0/ϵ_0 en lugar de E_0 y σ_i/ϵ_0 en lugar de E_i

$$\sigma_i = \frac{K-1}{K}\sigma_0$$ [13]

La densidad de carga ligada σ_i es así siempre menor que la libre σ_0 situadas en las láminas de un condensador y cero en caso $K = 1$, carencia de dieléctrico.

Respecto a la carga, estamos suponiendo que ésta no varía, lo cuál es cierto si el condensador se carga, se separa de la fuente y se introducce el dieléctrico. Pero si éste se insertase sin desconectar al condensador del circuito, la fuente aportaría carga adicional para mantener la diferencia de potencial original. La carga en este caso sería: $Q = K\,Q_0$.

Las propiedades adicionales que proporciona un dieléctrico a un condensador son: proporcionar un medio mecánico para separar los dos conductores, sin que se llegue al contacto eléctrico; y aumenta la diferencia de potencial máxima que el condensador es capaz de resistir sin que salte una chispa entre las placas (ruptura dieléctrica).

$$\text{Dieléctrico}\xrightarrow[k>1]{Condensador}\begin{cases} > E & E = \dfrac{E_0}{K} \\ > V & V = \dfrac{V_0}{K} \\ < C & C = K\,C_0 \\ < K & K \equiv \epsilon_r = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} \\ \text{estructura mecánica de soporte entre las placas conductoras} \end{cases}$$

Asociación de condensadores

•En serie:

Si establecemos una diferencia de potencial V entre el primer electrodo y el último, aparecerá en el primer electrodo una carga q que por influencia total inducirá otra carga $-q$ en el siguiente. Como éste forma parte de un conductor aislado inicialmente neutro, en el tercer electrodo aparecerá una carga q para que la carga neta siga siendo nula tras establecerse el voltaje. Podemos seguir este razonamiento hasta el electrodo final para determinar que la carga de cada electrodo es alternativamente q y $-q$ .El potencial entre extremos es la suma de las caídas de potencial individuales: $V = \sum_i^n V_i = q\sum_i^n \frac{1}{C_i}$

,para otros casos se calcularía el pontencial en serie según

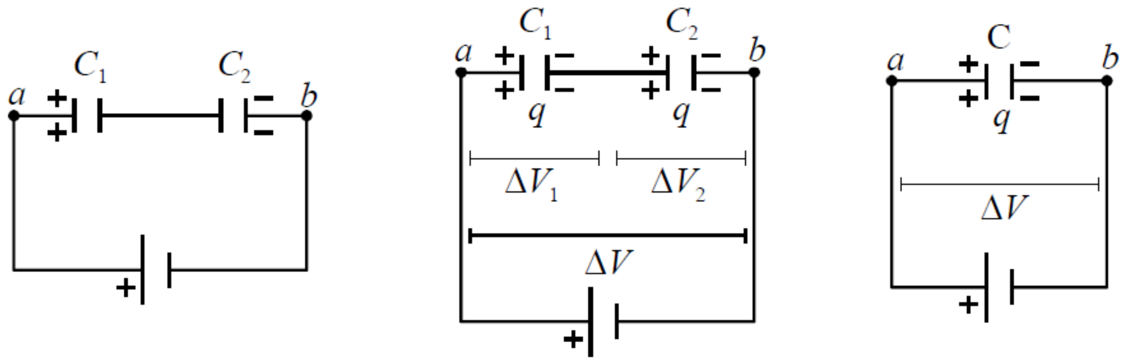
$$V = V_{AB} = \frac{q}{C_{eq}} = V_A - V_m + (V_m - V_m) + \cdots + V_m - V_B = V_A - \cancel{V_m} + \sum_i^{n-2}(\cancel{V_m} - V_m) + \cancel{V_m} - V_B$$

Teniendo en cuenta que el conjunto sólo puede intercambiar la carga depositada en sus electrodos

[13]Recuerdese que σ es q/S , por tanto, $q_i = \frac{K-1}{K} q_0$.

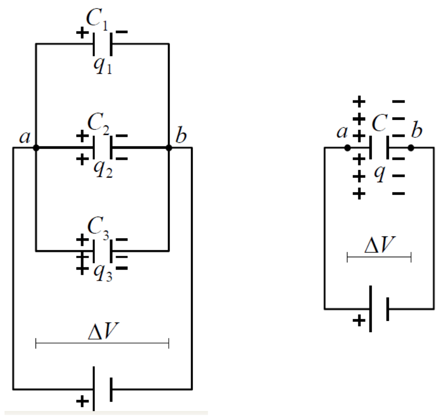
extremos, el condensador equivalente poseerá, para una d.d.p. V y carga q, una capacidad equivalente $\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_i^n \dfrac{1}{C_i}$
,demostrándolo

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{q_1}{C_1} = \frac{q}{C_1} \\ V_2 &= \frac{q_2}{C_2} = \frac{q}{C_2} \\ &\vdots \\ V_n &= \frac{q_n}{C_n} = \frac{q}{C_3} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} V &= \sum_i^n V_i = q\sum_i^n \frac{1}{C_i} \\ V &= \frac{q}{C_{eq}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\cancel{q}}{C_{eq}} = \cancel{q}\sum_i^n \frac{1}{C_i}$$



•En paralelo:

Todos los condensadores se conectan entre dos puntos comunes a distintos potenciales V_A y V_B. Ahora la carga que el conjunto puede intercambiar con el exterior es la suma de cargas de los electrodos conectados a un mismo punto: $q = \sum_i^n q_i$.
La diferencia de potencial es $V = V_A - V_B$ para cada condensador, por lo que
$V_{AB} = \sum_i^n \dfrac{q_i}{C_i} = \dfrac{q}{C_{eq}}$ siendo la capacidad equivalente
$C_{eq} = \sum_i^n C_i$



,demostrándolo

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cdot V_1 = C_1 \cdot V \\ q_2 &= C_2 \cdot V_2 = C_2 \cdot V \\ &\vdots \\ q_n &= C_n \cdot V_n = C_n \cdot V \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} q &= \sum_i^n q_i = V \cdot \sum_i^n C_i \\ q &= V \cdot C_{eq} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \cancel{V} \cdot C_{eq} = \cancel{V} \cdot \sum_i^n C_i$$

Energía de un conductor cargado: conductor esférico

Para un conjunto de n conductores en equilibrio electrostático las fórmulas de energía electrostática se particularizan y simplifican debido al carácter equipotencial de cada pieza. Al tratarse de distribuciones superficiales de carga se tiene
$$U_c = \frac{1}{2}\sum_i^n \oint_{S_i} V\rho_S dS = \frac{1}{2}\sum_i^n V_i \oint_{S_i} \rho_S dS = \frac{1}{2}\sum_i^n V_i q_i \ .$$
Teniendo en cuenta los conceptos de coeficientes de capacidad y de potencial obtenemos tres expresiones alternativas:

$U_c = \frac{1}{2}\sum_i^n V_i q_i = \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n c_{ij} V_i V_j = \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n p_{ij} q_i q_j$.
En el caso de un condensador, formado por dos electrodos con cargas opuestas $q_1 = q_2$, la primera forma encontrada nos da $U_c = \frac{1}{2}(V_1 q_1 + V_2 q_2) = \frac{1}{2} q_1 (V_1 - V_2)$
y usando el concepto de capacidad se obtienen nuevamente tres expresiones alternativas:
$U_c = \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$.

La energía de un condensador cargado coincide con el trabajo neceasrio para cargar dicho condenssador.

Trabajo necesario para crear un campo eléctrico aparece como energía potencial electroestática:
$U_c = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \frac{S}{d})(E \cdot d)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \underbrace{S \cdot d}_{volumen}$

,por tanto la densidad volúmica de energía $\rho_{ener} \equiv u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

Capítulo 2

ELECTROCINÉTICA

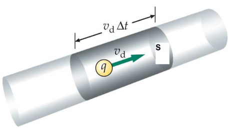
2.1. Intensidad de corriente eléctrica

Corriente eléctrica : flujo de cargas eléctricas que puede ser mantenido largo tiempo a través de un conductor.

Para mantener una corriente eléctrica es necesario:
- Mantener un campo eléctrico no nulo a través del conductor
- Mantener los extremos del conductor a potenciales distintos.

La **intensidad de corriente** es la carga que por unidad de tiempo, que atraviesa la sección transversal de un conductor.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad \text{sentido de movimiento de cargas positivas}$$



El número de partículas que atraviesan una sección transversal del conductor en un tiempo Δt serán las contenidas en el volumen $A\,v_d\,\Delta t$, tal que A es el área de la sección transversal, v_d la velocidad de desplazamiento o de arrastre de electrones, q la carga total del circuito, y n la densidad de partículas de carga

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q\,n\,A\,v_d\,\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}$$

La **densidad de corriente** en un punto de un conductor es la intensidad de corriente por unidad de área normal en dicho punto; es un vector cuyo sentido es el del movimiento de las partículas positivas, coincidiendo por lo tanto con el sentido de la corriente

$$\vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} = q\,n\,\vec{v}_d$$

La intensidad de corriente se interpretar como el flujo de la densidad de corriente a través de una sección transversal del conductor. Y como en general J puede ser distinta de unos puntos a otros de la sección.

$$J = \frac{dI}{dA} \quad \Longrightarrow \quad I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

2.2. Resistencia. Ley de Ohm

La ley de Ohm establece que en determinados conductores y a temperatura constante, el cociente entre la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor y la corriente eléctrica que circula entre dichos puntos, es una cantidad constante llamada **Resistencia eléctrica**.

$$R = \frac{V_a - V_b}{I}$$

En los materiales óhmicos la caída de potencial a través de una porción de conductor es proporcional a la corriente, es decir R es constante (Ley de Ohm V=IR). [1]

Si la densidad de corriente es constante en la sección transversal, se cumple:

$$\left.\begin{aligned} I &= J\,A \\ V_a - V_b &= E\,L \end{aligned}\right\} \implies J = \frac{I}{A} = \frac{V_a - V_b}{R\,A} = \frac{L}{R\,A}\,E = \sigma\,E$$

entonces,

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \qquad \text{y} \qquad R = \rho\,\frac{L}{A}$$

Siendo σ **conductividad eléctrica** y ρ **resistividad eléctrica** relacionadas por $\rho = 1/\sigma$.

La resistividad depende del tipo de conductor y de la temperatura ,coeficiente α
$\rho = \rho_0(1 + \alpha\,t) \implies R = R_0(1 + \alpha\,t)$
La superconductividad es la capacidad intrínseca que poseen ciertos materiales para conducir corriente eléctrica sin resistencia y pérdida de energía en determinadas condiciones.

Asociación de resistencias en serie

$$\left.\begin{aligned} \Delta V_1 &= R_1 \cdot I_1 = R_1 \cdot I \\ \Delta V_2 &= R_2 \cdot I_2 = R_2 \cdot I \\ &\vdots \\ \Delta V_n &= R_n \cdot I_n = R_n \cdot I \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \Delta V &= \sum_i^n \Delta V_i = I \cdot \sum_i^n R_i \\ \Delta V &= I \cdot R_{eq} \end{aligned}\right\} \implies \cancel{I} \cdot R_{eq} = \cancel{I} \cdot \sum_i^n R_i$$

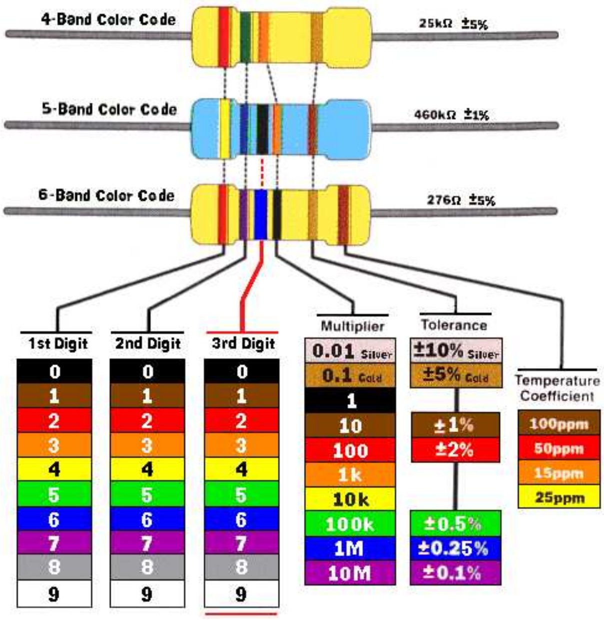
Asociación de resistencias en paralelo

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{\Delta V}{R_1} \\ I_2 &= \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_2} \\ &\vdots \\ I_n &= \frac{\Delta V_1}{R_3} = \frac{\Delta V}{R_3} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} I &= \sum_i^n I_i = \Delta V \cdot \sum_i^n \frac{1}{R} \\ I &= \frac{\Delta V}{R_{eq}} \end{aligned}\right\} \implies \frac{\cancel{\Delta V}}{R_{eq}} = \cancel{\Delta V} \cdot \sum_i^n \frac{1}{R}$$

2.3. Energía de la corriente eléctrica. Ley de Joule

Se conoce como Efecto Joule al fenómeno por el cual si en un conductor circula corriente eléctrica, parte de la energía cinética de los electrones se transforma en calor debido a los choques que sufren con los átomos del material conductor por el que circulan, elevando la temperatura del mismo. Siendo la resistencia que ofrece este al paso de corriente.

[1] La ley de Ohm no es una ley general de la naturaleza si no una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales.



Para medir la cantidad de energía que se disipa se utiliza una magnitud conocida como potencia que no es más que la energía disipada (U) por unidad de tiempo.

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V = I(I\cdot R) = I^2\cdot R$$

$$\boxed{P = I^2 R}$$

2.4. Generadores. Fuerza electromotriz

Un **generador eléctrico** es todo dispositivo capaz de mantener una diferencia de potencial eléctrico entre dos de sus puntos, llamados polos, terminales o bornes. Los generadores eléctricos son máquinas destinadas a transformar la energía en eléctrica. Esta transformación se consigue por la acción de un campo magnético sobre los conductores eléctricos dispuestos sobre una armadura .

La fuerza electromotriz (f.e.m.) ξ es toda causa capaz de mantener una diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito abierto o de producir una corriente eléctrica en un circuito cerrado. Es una característica del generador junto con su resistencia interna, r.

Es la energía consumida para hacer circular la unidad de carga.

$$\xi = \frac{dU}{dq} = \frac{P\,dt}{I\,dt} = \frac{P}{I}$$

Por el Principio de conservación de la energía, la potencia consumida por el generador debe ser igual a la potencia comunicada a la corriente que lo atraviesa, más la potencia disipada en forma de calor en el propio generador.

$$\xi\, I = I\,(V_A - V_B) + I^2\, r \qquad \Longrightarrow \qquad (V_A - V_B) = \xi - I\, r$$

Rendimiento de un generador. Es el cociente entre la potencia útil (la comunicada a la corriente) y la potencia consumida:

$$\eta_{\text{f.e.m.}} = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{cons}}} = \frac{V\,\cancel{I}}{\xi\,\cancel{I}}$$

Un **receptor eléctrico** es todo aquel dispositivo que recibe energía eléctrica siendo capaz de transformárla en cualquier otro tipo de energía.

Fuerza contraelectromotriz, (f.c.e.m.) ξ' es la potencia util desarrollada por el receptor por unidad de intensidad que lo atraviesa. Es una caracteristica del receptor junto con su resistencia interna, r'.

Por el Principio de conservación de la energía.

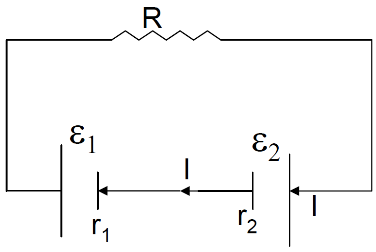
$$I\,(V_A - V_B) = \xi'\,I + I^2\,r' \qquad \Longrightarrow \qquad (V_A - V_B) = \xi' + I\,r'$$

Rendimiento de un generador.

$$\eta_{\text{f.c.e.m.}} = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{cons}}} = \frac{\xi'\,\cancel{I}}{V\,\cancel{I}}$$

La f.e.m.($\xi > 0$) y la f.c.e.m.($\xi' < 0$) se pueden unificar a ξ_{eq}, que sera positivo cuando la corriente entra por el borne negativo, y negativo cuando entra por el borne positivo.

Con este tratamiento, y aplicando el principio de conservación de la energía, se puede enunciar una ley de Ohm generalizada: la intensidad de corriente en un circuito es el cociente entre la suma algebraica de fem y la suma de resistencias.



Ley de Ohm

$$\xi_1\,I = \xi_2\,I + I^2\,(R + r_1 + r_2)$$
$$I = \frac{\xi_1 - \xi_2}{R + r_1 + r_2}$$

$$\text{Asociación de generadores}\begin{cases} \text{Serie} \quad I = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{R + r_1 + r_2 + \ldots + r_n} \xrightarrow[r_{eq}=\sum r_i]{\xi_{eq}=\sum \xi_i} I = \dfrac{\xi_{eq}}{R + r_{eq}} \\[2ex] \text{Paralelo} \quad I = \dfrac{\xi}{R + r_1 + r_2 + \ldots + r_n} \xrightarrow[\frac{1}{r_{eq}}=\frac{1}{\sum r_i}]{\xi_{eq}=\xi_i} I = \dfrac{\xi}{R + r_{eq}} \end{cases}$$

2.5. Leyes de Kirchhoff

Nudo: punto de la red donde concurren tres o mas conductores.

Malla: cualquier circuito cerrado que se pueda describir en una red sin pasar dos veces por el mismo punto.

1ª ley de Kirchhoff: la carga que llega a un nudo en la unidad de tiempo debe ser igual a la carga que sale del nudo en la unidad de tiempo.

$$\boxed{\sum_i^n I_i = 0}$$

2ª ley de Kirchhoff: la potencia comunicada a la corriente eléctrica en los generadores existentes en una malla es igual a la potencia consumida en los receptores que hay en la maya mas la potencia consumida en todas las resistencias.

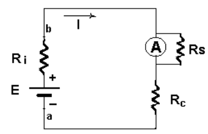
$$\sum_{i/\xi>0} \xi_i = \sum_{j/\xi'<0} \xi'_j + \sum_k I_k \cdot R_k \quad \Longrightarrow \quad \sum \xi = \sum I_k \cdot R_k$$

2.6. Aparatos de medida

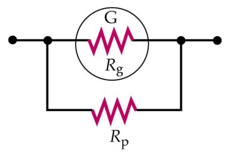
Amperímetro

Un amperímetro es un galvanómetro en serie con resistencia interna muy pequeña para un mayor paso de electrones.

La medida de intensidades superiores [2] necesita de un resistor adicional de muy pequeño valor en paralelo con el devanado [3] ,denominado *shunt*, de forma que sólo pase por éste una fracción de la corriente principal. Aunque la mayor parte de la corriente pasa por la resistencia de la derivación, la pequeña cantidad que fluye por el medidor sigue siendo proporcional a la intensidad total.



Sea un amperímetro (A) en un circuito, por el que circula una corriente de intensidad (I), así como la conexión del resistor shunt ($\mathrm{R_S}$).



El valor de $\mathrm{R_S}$ se calcula en función del poder multiplicador (n) que queremos obtener y de la resistencia interna del amperímetro ($\mathrm{R_A}$) según la fórmula siguiente:

$$R_S = \frac{R_A}{n-1}$$

Demostración:

La intensidad de corriente por cada divisor de corriente es:

$$\left.\begin{aligned} I_A &= \frac{\Delta V}{R_A} \\ I_S &= \frac{\Delta V}{R_S} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & I = \sum I_i = \frac{\Delta V}{R_A} + \frac{\Delta V}{R_s} = \Delta V \frac{R_A + R_S}{R_A \cdot R_S} \\ \xrightarrow{\Delta V = \ldots} \; & I_A = \frac{\Delta V}{R_A} = \frac{1}{\cancel{R_A}} \frac{\cancel{R_A} \cdot R_S}{R_A + R_S} I = \frac{R_S}{R_A + R_S} I \\ \xrightarrow{\Delta V = \ldots} \; & I_S = \frac{\Delta V}{R_S} = \ldots = \frac{R_A}{R_A + R_S} I \end{aligned}$$

despejando R_S en función de I_A, y como $I = n\, I_A$

$$I_A = \frac{R_S}{R_A + R_S} I \Longrightarrow R_S = \frac{R_A \cdot I_A}{I - I_A} = \frac{R_A \cdot \cancel{I_A}}{(n-1)\cancel{I_A}}$$

Así, supongamos que disponemos de un amperímetro con 5 Ω de resistencia interna que puede medir un máximo de 1 A (lectura a fondo de escala). Deseamos que pueda medir hasta 10 A, lo que implica un poder multiplicador de 10. La resistencia $\mathrm{R_S}$ del shunt deberá ser:

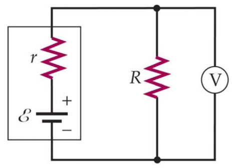
$$R_S = \frac{R_A}{n-1} = \frac{5}{10-1} = 0{,}55\ \Omega$$

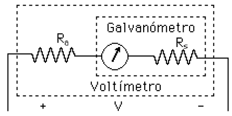
Voltímetro

Un voltímetro es un galvanómetro en paralelo con resistencia interna muy grande para la intensidad de corriente sea muy reducida, su influencia sea mínima.

[2]ej. La resistencia interna del amperímetro siempre será mayor que la del superconductor (nula por definición) y por lo tanto actuaría como elemento limitante de la corriente que puede circular a un determinado nivel de voltaje, además de no poder medir, y soportar sin dañarse, intensidades tan altas.

[3]Bobina = devanado   Devanar: dar vueltas sucesivas a un hilo, alambre, cuerda, etc., alrededor de un eje.





La medida de tensiones superiores se les dota de una resistencia de elevado valor colocada en serie con el voltímetro, de forma que solo le someta a una fracción de la tensión total.

Sea un voltímetro (V) en un circuito, sometido a una tensión (V), así como la conexión (en serie) del resistor de ampliación (R_a).

El valor de R_a se calcula en función del poder multiplicador (n) que queremos obtener y de la resistencia interna del voltímetro (R_v) según la fórmula siguiente:

$$R_a \,=\, R_v\,(n-1)$$

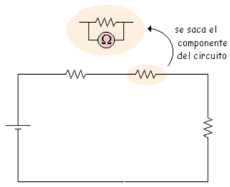
Demostración:

La tensión de corriente por cada divisor de corriente es:

$$\left.\begin{aligned} \Delta V_a &= R_a \cdot I \\[2ex] \Delta V_v &= R_v \cdot I \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & \Delta V = \textstyle\sum \Delta V_i = R_a \cdot I + R_v \cdot I = (R_a + R_v)\, I \\ \overset{I=\dots}{\Longrightarrow} \; & \Delta V_a = R_a \cdot I = R_a \cdot \frac{\Delta V}{R_a + R_v} \\ \overset{I=\dots}{\Longrightarrow} \; & \Delta V_v = R_v \cdot I = R_v \cdot \frac{\Delta V}{R_a + R_v} \end{aligned}$$

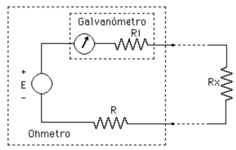
despejando R_a en función de ΔV_v, y como $\Delta V = n\,\Delta V_v$

$$\Delta V_v \,=\, \frac{R_v}{R_a + R_v}\,\Delta V \Longrightarrow R_a \,=\, \frac{R_v\,(\Delta V - \Delta V_v)}{\Delta V_v} \,=\, R_v\,\frac{(n-1)\,\cancel{\Delta V_v}}{\cancel{\Delta V_v}}$$



Ohmímetro

El circuito se compone de una pequeña batería para aplicar un voltaje (V) a la resistencia bajo medida, para luego mediante un galvanómetro medir la corriente (I) que circula a través de la resistencia, y así calular la resistencia aplicando la ley de Ohm $\quad R \,=\, V\,/\,I$.



El ohmímetro está formado por un galvanómetro (con resistencia interna) y una resistencia en serie cuyo valor hace que conectando el circuito sin resistencia exterior (con $R = 0$) se produce una desviación en el galvanómetro igual al fondo de la escala, siendo la intensidad máxima.

Esté el circuito totalmente especificado, con las resistencias del ohmímetro, o sea, la del galvanómetro, R_i, y R_a, calculadas:

$$V \,=\, (R_i + R_a)\; I_{\max}$$

Podemos ahora calibrar la escala en ohmios utilizando resistencias patrón de distintos valores, o realizar una calibración en forma teórica, empleando la ecuación anterior.

Puente de Wheatstone

R_x es la resistencia cuyo valor queremos determinar, R_1, R_2 y R_3 son resistencias de valores conocidos, además la resistencia R_2 es ajustable.

Ajustando la resitencia R_2 hasta que el voltaje entre los dos puntos medios (C y B) sea nulo y por tanto no circule corriente alguna entre esos dos puntos, denominada posición de equilibrio, se cumple:

$$\left.\begin{aligned} V_{AC} &= V_{AB} = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_x \\[2ex] V_{CD} &= V_{BD} = I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot R_3 \end{aligned}\right\} \frac{I_1 \cdot R_1}{I_1 \cdot R_2} \,=\, \frac{I_2 \cdot R_x}{I_2 \cdot R_3} \quad {}^{4} \Longrightarrow R_x \,=\, \frac{R_1\,R_3}{R_2}$$

En un puente de hilo R_1 y R_2 se reemplazan por un hilo de sección cte., y al ser la resistencia directamente proporcional a la longitud de hilo, se puede escribir $R_1 = k\,L_1$ y $R_2 = k\,L_2$. Para cierta posición del cursor, que determina L_1 y L_2, la tensión es nula $V_{BC} = 0$, se da

$$R_x \,=\, \frac{R_3\,k\,L_1}{k\,L_2} \,=\, R_3\,\frac{L_1}{L_2}$$

[4] La ecuación entera sería: $\quad \dfrac{I_1 \cdot R_1}{I_1 \cdot R_2} = \dfrac{I_2 \cdot R_x}{I_1 \cdot R_2} = \dfrac{I_2 \cdot R_x}{I_2 \cdot R_3}$

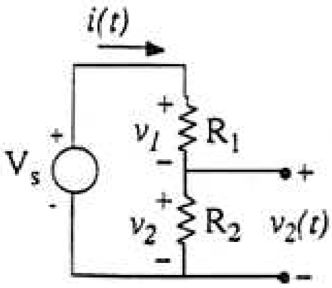


Figura 2.1: Divisor de voltaje.

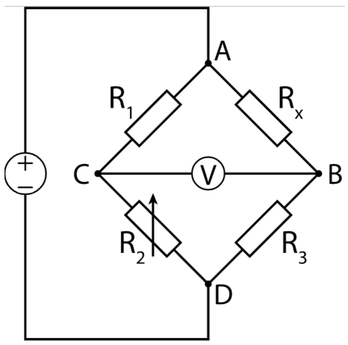


Figura 2.2: Puente de Wheatstone.

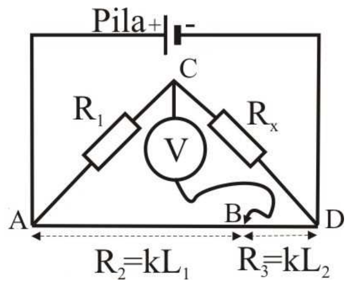


Figura 2.3: Puente de hilo.

Capítulo 3

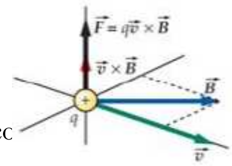
CAMPO MAGNÉTICO E INDUCCIÓN MAGNÉTICA

3.1. Fuerza magnética sobre cargas y corrientes. Aplicaciones

Sea una partícula cargada en movimiento a través de un campo magnético $\vec{B}$, se ejerce una fuerza magnética $\vec{F}$,

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

$\vec{F}$	fuerza magnética
q	carga
$\vec{v}$	vector velocidad
$\vec{B}$	inducción magnética ó densidad de flujo magnético



La **fuerza de Lorentz** es la fuerza ejercida por el campo electromagnético que recibe una partícula cargada o una corriente eléctrica

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} + q\,\vec{E}}$$

Fuerza magnética sobre corrientes

a)Conductor recto en un campo magnético uniforme.
Sea n la densidad volumétrica de carga, $A\,L$ el volumen, y $\vec{u}_t$ versor que señala la dirección y el sentido en el que se mueven los portadores de carga positivos, la fuerza magnética sobre esta corriente se puede expresar según

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) n\,A\,L = n\,q\,v\,A\left(L\,\vec{u}_t \wedge \vec{B}\right) = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$$

b)Conductor no recto en un campo magnético cualquiera.

$$\boxed{\vec{F} = \int_L I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

Momento magnético sobre una espira.

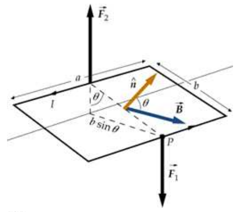
Si un conductor en forma de espira cerrada, por el que circula una corriente I, está situado en un campo magnético uniforme $\vec{B} = \text{cte.}$, la fuerza magnética resultante que actúa sobre él es nula.

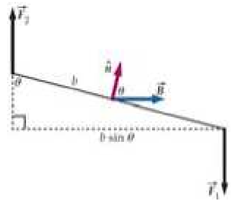
$$\left.\begin{array}{l}\text{espira cerrada}\\[1em] \vec{B} = \text{cte.}\end{array}\right\}\ \vec{F}_{\mathrm{m}} = 0$$

Demostración para espira rectangular de lados a y b, que forma un ángulo $90-\theta$ con el plano horizontal y es recorrida por una corriente de intensidad I situado en un campo magnético uniforme $\vec{B} =$ cte. paralelo al plano horizontal.

Si el lado a fuese paralelo a $\vec{B}$, por tanto el b perpendicular, la fuerza magnética sería:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = I\cdot\vec{a}\wedge\vec{B} & = I\,a\,B\,\vec{u}_{\perp\vec{a},\vec{B}} \\ \vec{F}_2 = I\cdot(-\vec{a})\wedge\vec{B} & = -I\,a\,B\,\vec{u}_{\perp\vec{a},\vec{B}} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_4 = \overset{\vec{b}\parallel\vec{B}}{\cancel{I\cdot\vec{b}\wedge\vec{B}}} = \overset{\vec{b}\parallel\vec{B}}{\cancel{I\cdot\left(-\vec{b}\right)\wedge\vec{B}}} & = 0 \end{array}\right\}\vec{F}_{\mathrm{m}} = 0$$





Sin embargo, como las fuerzas sobre los lados no tienen la misma línea de acción, forman un par de momento. Éste tiende a girar el plano de la espira hasta que $\vec{n}\parallel\vec{B}$ [1]

$$\tau = F_1\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) + F_2\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) = F_1\,(b\,\sin\theta) = I\,a\,b\,B\,\sin\theta = I\,S\,B\,\sin\theta$$
$$\vec{\tau} = I\,S\,\vec{n}\wedge\vec{B} = \vec{\mu}\wedge\vec{B}$$

Siendo $\vec{n}$ el vector normal a la superficie y $\vec{\mu}$ el **momento dipolar magnético**.

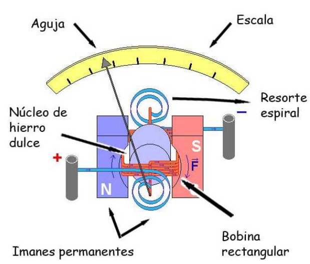
Entonces, para cualquier espira cerrada, independientemente de su forma, situada en un campo magnético uniforme $\vec{B} =$ cte. se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{espira cerrada} \\ \vec{B} = \text{cte.} \end{array}\right\}\ \boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu}\wedge\vec{B}}$$

Dipolo magnético: un conductor cerrado (espira) que transporta una corriente.

Un **galvanómetro** es un instrumento que se usa para detectar y medir la corriente eléctrica. Se trata de un transductor [2] analógico [3] electromecánico que produce una deformación de rotación en una aguja o puntero en respuesta a la corriente eléctrica que fluye a través de su bobina

El galvanómetro consta de una aguja indicadora, unida mediante un resorte espiral, al eje de rotación de una bobina rectangular plana, que está suspendida entre los polos opuestos de un imán permanente. En el interior de la bobina se coloca un núcleo de hierro dulce, con el fin de concentrar en ella las líneas de inducción magnética.



Al estar la bobina sumergida en el interior de un campo magnético

[1] Notese que los momentos magnéticos se anularían por parejas, ya que $\vec{a}\perp\vec{b}\perp\vec{B}$ se tiene $\vec{F}_1 = I\cdot\vec{a}\wedge\vec{B} = I\,a\,B\,\vec{u}_{\parallel\vec{b}} = -\vec{F}_2$, y, $\vec{F}_3 = I\cdot\vec{b}\wedge\vec{B} = I\,b\,B\,\vec{u}_{\parallel\vec{a}} = -\vec{F}_4$
Siendo los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenecientes al plano de la espira, ó $\perp\ \vec{n}$, y por tanto, el momento sería nulo. Su represntación gráfica es un vector $\vec{F}_1$ con origen en un punto de su lado a, p.e. centro del lado, y sentido $\vec{b}$, ya que equivale a que en cada punto de la recta a hubiese vector $\vec{f}_1$ tal que $\sum\vec{f}_1 = \vec{F}_1$, y el vector $\vec{F}_2$ con origen en un punto de su lado a , siendo la perpendicular al vector $\vec{a}$ que pasa por el origen de $\vec{F}_2$ y el de $\vec{F}_1$. Notese que si no pasase por ambos orígenes y ya que las fuerzas son no perpendiculares al plano, el momento resultante podría girar el plano sobre el eje que pasa por su centro. Se procede al método análogo de representación gráfica de vectores $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$.

[2] Un transductor es un dispositivo capaz de transformar o convertir un determinado tipo de energía de entrada, en otra de diferente a la salida.

[3] Analógico es el circuito electrónico que trabaja con valores continuos.

uniforme, creado por el imán fijo, cuando circula corriente por ella, se produce un par de fuerzas sobre la bobina que hace que rote (momento magnético sobre la bobina), arrastrando consigo a la aguja unida a su eje. Además sobre la bobina actúa un momento restaurador debido al muelle de suspensión, proporcional a la desviación angular de la bobina. En la posición e equilibrio se igualan estos dos momentos.
Por tanto el ángulo girado es proporcional a la intensidad: $\theta \propto I$

Movimiento de una carga puntual en un campo magnético uniforme

a) Una carga que se mueve perpendicularmente al campo magnético describe una trayectoria circular de radio R

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= q\,\vec{v}\wedge\vec{B} \\ \vec{F} &= m\,\vec{a} \overset{\vec{v}\perp\vec{F}}{\Longrightarrow} = m\,\vec{a}_N \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_N = \frac{q}{m}\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right) \qquad \text{en valor absoluto} \qquad \frac{v^2}{r} = \frac{q}{m}\,(v\cdot B)$$

por tanto $r = \dfrac{m\,v}{q\,B}$ y con velocidad angular $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{q\,B}{m}$

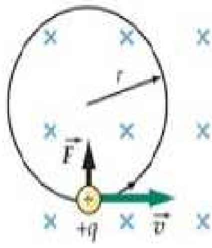


Figura 3.1: Carga con velocidad perpendicular al campo magnético uniforme

4

Cuyo valor es constante, ya que aplicando el teorema del trabajo y la energía cinética se obtiene.

$$\left.\begin{aligned} W &= \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{v}}_{\vec{F}\perp\vec{v}}\,dt = 0 \\ W &= \Delta\,E_c \end{aligned}\right\} \quad \vec{v} = \text{cte.} \qquad \text{movimiento circular uniforme}$$

La frecuencia ciclotrónica [5] es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi r/v} = \frac{1}{2\pi/\omega} = \frac{q\,B}{2\pi\,m}$$

b) Una carga que se mueve con velocidad no perpendicular al campo magnético describe una trayectoria helicoidal

Si la velocidad se forma de la componente perpendicular al campo magnético, $v_\perp$, y una perpendicular a éste, $v_\parallel$, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= v_\perp + v_\parallel \\ \vec{F} &= q\,\vec{v}\wedge\vec{B} \end{aligned}\right\} \quad F = q\,v_\perp\,B \quad \text{y} \quad v_\parallel \qquad \text{movimiento helicoidal}$$

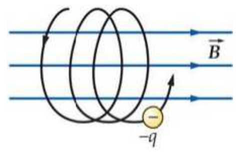


Figura 3.2: Movimiento helicoidal

Botella magnetica. El campo es débil en el centro y muy intenso en los extremos. La partícula recorre un trayectoria en espiral y queda atrapada oscilando entre los puntos P_1 y P_2 de la figura.

La botella magnética se utiliza para confinar haces densos de partículas cargadas (plasma) en las investigaciones sobre fusión nuclear. Un fenómeno semejante es el movimiento de protones y electrones a lo largo del campo magnético entre los polos magnéticos terrestres.

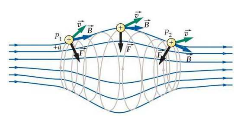


Figura 3.3: El efecto de Botella Magnética confina la partícula en torno a las líneas de campo.

El **Efecto Hall**.

Sea una corriente I con velocidad v, sumergida a un campo mangético $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$. La fuerza magnética creada $\vec{F}_\mathrm{m}$ provoca una concentración de cargas negativas sobre uno de los lados del material y un déficit de cargas negativas en el lado opuesto. Esta distribución de cargas genera una diferencia de potencial entre ambos lados, la tensión de Hall V_H y un campo eléctrico $\vec{E}_\mathrm{H}$. Este campo crea una fuerza eléctrica $\vec{F}_\mathrm{e}$ con la misma dirección pero sentido opuesto a $\vec{F}_\mathrm{m}$.

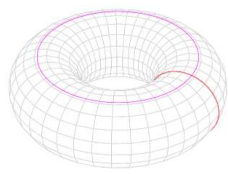


Figura 3.4: Un toro.

Cuando estas dos fuerzas llegan a un estado de equilibrio se tiene la siguiente situación:

[5] La resonancia ciclotrónica es un fenómeno de absorción resonante de ondas de alta frecuencia (microondas), en presencia de un campo magnético intenso

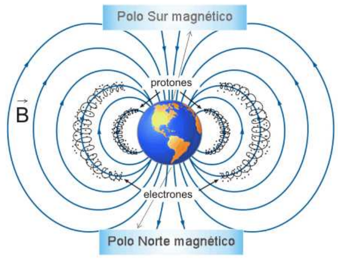


Figura 3.5: Las partículas cargadas de radiaciones solares se atrapan formando los cinturones de Van Allen.

Los **cinturones de Van Allen** son ciertas zonas de la magnetosfera terrestre donde se concentran las partículas cargadas. Estos cinturones son áreas en forma de anillo de superficie toroidal [a] en las que gran cantidad de protones y electrones se están moviendo en espiral entre los polos magnéticos del planeta, y se estructura en dos cinturones: uno interior y otro exterior.

[a] Toro es una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta).En topología, el estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas, un volumen tórico es un objeto tridimensional obtenido mediante el producto cartesiano de un disco y una circunferencia: $D^2 \wedge S^1$.

$$\left.\begin{aligned} F_{\rm m} &= q\,v\cdot B \\ F_{\rm e} &= q\,E \\ \vec{F}_{\rm m} &= -\vec{F}_{\rm e} \end{aligned}\right\} \quad \cancel{q}\,v\cdot B = \cancel{q}\,E \implies E = v\cdot B \implies V_{\rm H} = v\cdot B\cdot w$$

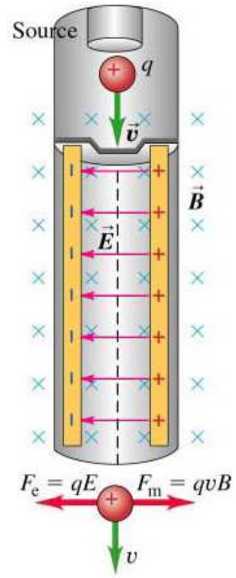


Figura 3.6: Selector de velocidades.

Aplicaciones del efecto Hall:

-Determinación el signo de los portadores (signo de $V_{\rm H}$)

-Determinación del número de portadores por unidad de volumen (midiendo $V_{\rm H}$ e I):

$I = q\,n\,A\,v_d \implies n = \dfrac{I}{q\,A\,v_d}$ Para una cinta de anchura wy espesor t, el área transversal es $A = w\cdot t$ y ya que, $V_{\rm H} = v\cdot B\cdot w$ se tiene,$n = \dfrac{I}{e\,w\cdot t\,v_d} = \dfrac{I\,B}{e\,w\cdot t\,V_{\rm H}}$

-Selector de velocidad. Las partículas que no se desvían son aquellas que cumplen: $v = \dfrac{E}{B}$

-. . .

Experimento de Thomson : relación carga masa.

Para el acelerador: $\left.\begin{aligned} E_{\rm c} &= \frac{1}{2}m\,v^2 \\ E_{\rm p_e} &= q\Delta V \end{aligned}\right\} \quad E_{\rm c} = E_{\rm p_e} \implies v^2 = \dfrac{2\,q\,V}{m}$

Para el selector de velocidades: $v = \dfrac{E}{B}$

entonces, $\left(\dfrac{E}{B}\right)^2 = \dfrac{2\,q\,V}{m} \implies \dfrac{q}{m} = \dfrac{E^2}{2\,V\,B^2}$

Espectrómetro de masas

Extensión del experimento de Thomson a medidas de masas atómicas, moleculares, iónicas...
La relación carga-masa de la partícula se determina midiendo el radio de la trayectoria, que impresiona la partícula en una placa fotográfica.

$$v^2 = \frac{2\,q\,V}{m} \quad \text{de radio} \quad r = \frac{m\,v}{q\,B}$$

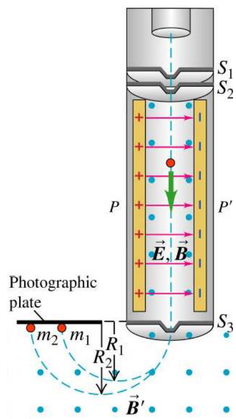


Figura 3.7: Espectrómetro de masas.

Ciclotrón

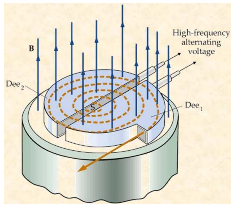


Figura 3.8: Ciclotrón.

Descripción del ciclotrón:
El ciclotrón consta de dos placas semicirculares huecas, que se montan con sus bordes diametrales adyacentes dentro de un campo magnético uniforme que es normal al plano de las placas y se hace el vacío. A dichas placas, D'$_s$ se les aplican diferencia de potencial en la región diametral entre ambas. [6]

Funcionamiento:
Las partículas cargadas procedentes de la fuente S, centro del ciclotrón, son aceleradas por el campo eléctrico entre las D'$_s$. El campo magnético se ajusta de modo que el tiempo que se necesita para recorrer la trayectoria semicircular dentro del electrodo sea igual al semiperiodo de las oscilaciones. En consecuencia, cuando los iones vuelven a la región intermedia, el campo eléctrico habrá invertido su sentido y los iones recibirán entonces un segundo aumento de la velocidad al pasar al entre las D'$_s$. (Sincronismo) Como los radios de las trayectorias son proporcionales a las velocidades de los iones, el radio aumena con la velocidad siendo una trayectoria espiral, y el tiempo que se necesita para el recorrido de una trayectoria semicircular (medio periodo, $T/2$) es independiente de sus velocidades.

$$\text{si} \quad F_{\mathrm{m}} = -\vec{F}_{\mathrm{e}} \xrightarrow[\vec{v}\perp\vec{B}]{\vec{F}_{\mathrm{e}}=\vec{F}_{\mathrm{N}}} r = \frac{m\,v}{q\,B}$$

$$\text{y} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi r/v} = \frac{1}{2\pi/\omega} = \frac{q\,B}{2\pi\,m} \qquad \text{entonces,} \quad T = f\,(q,B,m) \;\; \text{y} \;\; T \neq f\,(v) \equiv f\,(r)$$

Por consiguiente, si los iones emplean un tiempo en la primera semicircunferencia, éste es en todas las sucesivas y, por tanto, se moverán en espiral y en resonancia con el campo oscilante hasta que alcancen la periferia del aparato.

Su energía cinética final será tantas veces mayor que la que corresponde al voltaje aplicado a los electrodos multiplicado por el número de veces que el ion ha pasado por la región intermedia entre las D'$_s$.

sea n el n$^{\mathrm{o}}$ de veces que pasa por la región entre las D's, y R_{D} radio de D'$_s$, se tiene:

$$E_{\mathrm{c}} = n\,q\,\Delta V \quad \text{y ya que,} \quad v_{\max} = \frac{q\,B\,R_{\mathrm{D}}}{m} \quad \text{se tiene} \quad E_{\mathrm{c}_{\max}} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{q\,B\,R_{\mathrm{D}}}{m}\right)^2$$

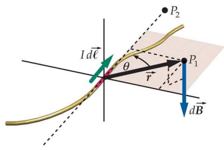
*Sincrociclotrón:
La energía de un ion en un ciclotrón tiene un máximo, debido a que la masa de un cuerpo tiende a aumentar a medida que aumenta su velocidad (según Teoría de la Relatividad y solamente apreciable cuando la velocidad es aproximadamente un 10 % menor que la velocidad de la luz). Problema resuelto mediante un sistema automático que varía el período del campo eléctrico alternante empleado para transferir energía a las partículas, de manera que sea siempre igual al período del movimiento de los iones acelerados.

*Sincrotrón:
En el ciclotrón isócrono, se construye un imán tal que el campo magnético es más fuerte cuando está más próximo a la circunferencia que en el centro de la misma, de esta manera se genera un aumento total y se mantiene la revolución a una frecuencia constante. En este dispositivo, un anillo de imanes rodea un tanque en forma de anillo de vacío. El campo magnético se incrementa con las velocidades del protón, las partículas se deben inyectar en un sincrotrón de otro acelerador.

[6] Recuerdese que la E_{int} de un conductor es cero.

3.2. Ley de Biot-Savart. Aplicaciones

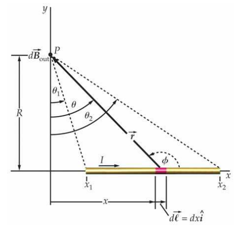
Biot y Savart propusieron la siguiente expresión para calcular el campo magnético en un punto creado por un elemento de corriente:



$$\mathrm{d}\,\vec{B} = K_m \frac{I\,\mathrm{d}\,\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Siendo K_m la cte. magnética equivalente a $K_m = \dfrac{\mu_0}{4\,\pi} = 10^{-7}\,\left(\mathrm{N/A^2}\right)$, con μ_0 permeabilidad en el vacio.

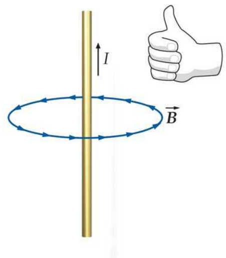
Para calcular el campo magnético debido a la corriente total la expresión anterior se integra para todo el conductor



$$\boxed{\vec{B} = \int_c K_m \frac{I\,\mathrm{d}\,\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}}$$

• Campo magnético debido a una corriente rectilínea

El campo magnético creado por el conductor en el un punto P es perpendicular al plano del papel y hacia fuera (dirección del eje Z y sentido positivo) y su módulo viene dado por

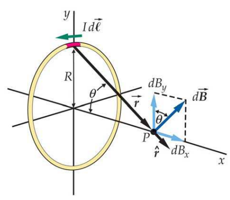


$$B = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I}{R}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

★ Casos particulares

Un conductor de gran longitud $$B = \frac{\mu_0}{2\,\pi}\frac{I}{R}$$

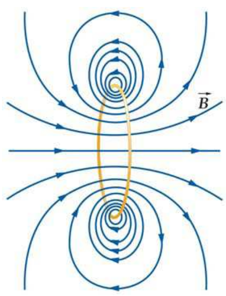
Un pto. cerca del extremo del conductor $$B = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I}{R}$$



Las líneas del campo magnético creado por un conductor recto son circunferencias contenidas en un plano perpendicular al conductor y centradas en él.

• Campo magnético debido a una espira

El campo resultante tiene la dirección del eje de la espira, el sentido coincide con el de avance de un sacacorchos que gira en el sentido de la corriente y su módulo es



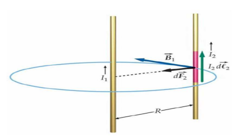
$$B = \frac{\mu_0\,I\,R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

★ Casos particulares

En el centro de la espira $$B = \frac{\mu_0\,I}{2\,R}$$

Un pto. z que cumpla $z \gg R$ $$B = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{2\,m}{z^3}$$

Una espira de corriente se comporta como un dipolo magnético, con $m \equiv \mu = I\,\pi\,R^2$ momento dipolar eléctrico.



• Fuerzas entre corrientes rectilíneas y paralelas

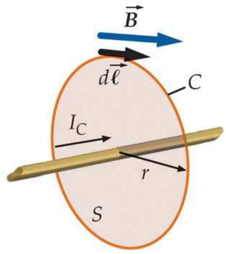
Àmpere demostró que dos corrientes paralelas se atraen o se repelen según que las corrientes tengan el mismo sentido o sentidos opuestos

$$\vec{F}_2 = I_2\,L_2\,\left(\vec{k}\right) \wedge B_1\,\left(-\vec{i}\right) = I_2\,L_2\,\frac{\mu_0\,I_1}{2\,\pi\,R}\,\left(-\vec{j}\right) \qquad \Longrightarrow \frac{\vec{F}_2}{L_2} = \frac{\mu_0\,I_1\,I_2}{2\,\pi\,R}\,\left(-\vec{j}\right)$$

Definición de amperio: Si por dos conductores paralelos muy largos situados a una distancia de un metro circulan corrientes iguales, se dice que las corrientes por cada uno de ellos es de un amperio si la fuerza por unidad de longitud en cada uno de los conductores es de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1\, I_2}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \left(\mathrm{N/A^2}\right)}{2\pi}\frac{1 \cdot 1\ \left(\mathrm{A^2}\right)}{1\ (\mathrm{\ m})} = 2 \cdot 10^{-7}\ (\mathrm{N/m})$$

3.3. Ley de Ampère. Aplicaciones

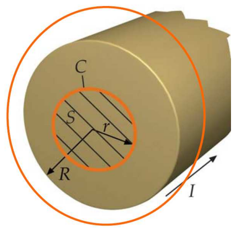


La integral de línea a lo largo de cualquier curva cerrada es igual a μ_0 veces la intensidad de la corriente que atraviesa el área limitada por dicha curva.

$$\boxed{\oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \mu_0\, I_c}$$

Demostracción para el caso de una corriente rectilínea de conductor muy largo y curva de circunferencia de radio R

$$\oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \frac{\mu_0\, I_c}{2\pi\, R}\oint_c \mathrm{d}\,\vec l = \frac{\mu_0\, I_c}{\cancel{2\pi\, R}}\cancel{2\pi R} = \mu_0\, I_c$$

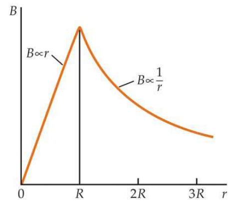


Si tenemos varias corrientes enlazadas por la trayectoria cerrada cada corriente dará una contribución a la circulación del campo magnético

$$\oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \mu_0 \sum_i I_i$$

• Campo creado por una corriente que circula por un cilindro recto de gran longitud

Por consideraciones de simetría se deduce que las líneas de campo son circunferencias con centro en el eje del cilindro.



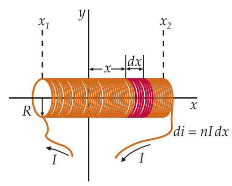
$$r > R \qquad B = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, r} \qquad \oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = B \cdot 2\pi\, r = \mu_0\, I$$

$$r < R \qquad B = \frac{\mu_0\, I\, r}{2\pi\, R^2} \qquad \oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = B\ \cdot 2\pi\, r = \mu_0\, I\frac{\pi\, r^2}{\pi\, R^2}$$

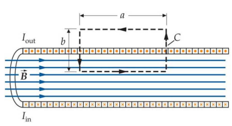
• Campo magnético en el interior de un solenoide

Solenoide: conductor enrollado en forma de hélice con espiras muy próximas entre sí. Se utiliza para producir un campo magnético intenso y uniforme en una pequeña región del espacio.

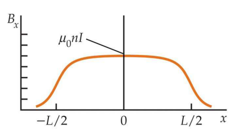
Considerando un solenoide largo y enrollado de forma compacta, las líneas del campo magnético en su interior son aproximadamente paralelas al eje del solenoide y están muy próximas entre sí (campo magnético uniforme e intenso).



En un solenoide de radio R, longitud L y con N vueltas, por el que circula una corriente I, siendo $L \gg R$, el campo magnético en su interior es uniforme y paralelo al eje del solenoide y es prácticamente nulo en su exterior.



Aplicando la ley de Ampère



$$\oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \mu_0\, I_c = \mu_0\, N_c\, I = \mu_0\, N\frac{a}{L}\, I$$

$$\oint_c \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \sum_{i=1}^{4}\int_i \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l = \int_1 \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l + \overset{\mathrm{d}\,\vec l \perp \vec B}{\cancel{\int_2 \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l}} + \overset{B_{\mathrm{ext}\approx 0}}{\cancel{\int_3 \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l}} + \overset{\mathrm{d}\,\vec l \perp \vec B}{\cancel{\int_4 \vec B\, \mathrm{d}\,\vec l}} = B \cdot a$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{L}\, I = \mu_0\, n\, I$$

3.4. Flujo del campo magnético. Ley de Gauss

El flujo del campo magnético ($\phi_n \equiv \phi_B$) a través de una superficie S es:

$$\phi_n = \int_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} \;\; (\mathrm{Wb})$$

la unidad de medida es el Weber (Wb), equivalente a Tesla por superficie ($\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2$).

Ley de Gauss del campo magnético, el flujo magnético a través de una superficie cerrada es:

$$\phi_n = \oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = 0$$

3.5. Inducción magnética. Leyes de Faraday y Lenz. Aplicaciones

Faraday y Henry demostraron que si el flujo magnético a través de un circuito varía por cualquier medio, se induce en el circuito una fem que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa el circuito.

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\,\phi_n}{\mathrm{d}\,t} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

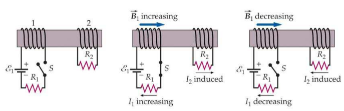
El signo menos indica el sentido de la corriente inducida. Y el campo eléctrico es tangente al anillo y sentido de la corriente. Además de no ser consevativo si $\varepsilon \neq 0 \Longrightarrow \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \neq 0$

Causas de variación del flujo:

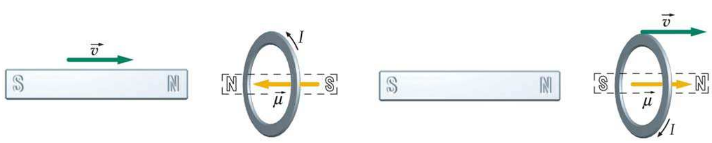
∗ Variación con el tiempo del campo magnético que produce el flujo

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\,\phi_n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

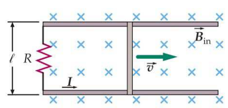
Una de las causas de ésto es la variación de intensidad I



∗ Movimiento relativo de un imán permanente y un circuito.



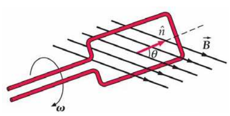
∗ Variación del área del circuito.



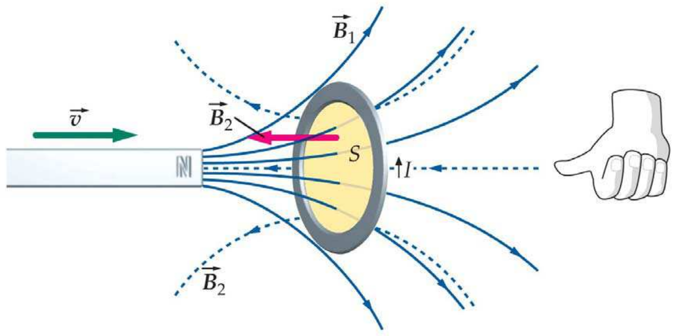
∗ Movimiento del circuito en un campo magnético fijo pero no uniforme

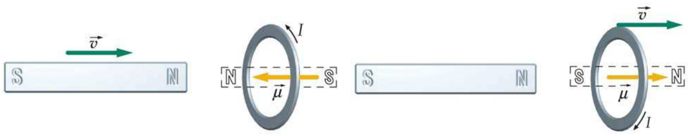
$$\vec{u}_r \neq \text{cte.} \Longrightarrow \vec{B} \neq \text{cte.}.$$

∗ Giro del circuito en un campo magnético



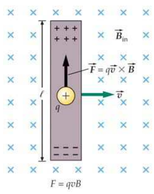
Ley de Lenz. La fem y la corriente inducidas tienen un sentido tal que tienden a oponerse a la causa que las produce (independientemente de cual sea la causa que origina la corriente inducida).





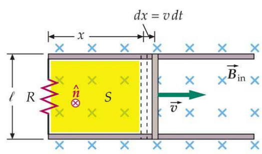
La ley de Lenz es una exigencia de la ley de la conservación de la energía, para mantener la causa de la inducción hay que gastar energía, la cual se va a almacenar en el campo eléctrico inducido.

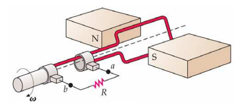
$\star$ Fem inducida por el movimiento relativo de un conductor en un campo magnético.
Una varilla conductora desliza sobre guías conductoras fijas, dentro de un campo magnético fijo.



$$\varepsilon = \oint \vec{E}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad = v\,B\,l$$

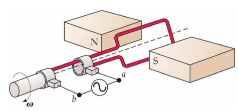
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\,\phi_n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(-B\,l\,x) = B\,l\,v$$



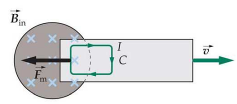


Generador. Un generador simple de corriente alterna se construye con una bobina que gira en el interior de un campo magnético uniforme. El flujo magnético a través de la bobina es variable con el tiempo y da lugar a una fem inducida. En el generador se transforma la energía mecánica de rotación en energía eléctrica:

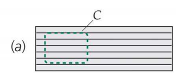
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\,\phi_n}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,(N\,B\,A\,\cos{(\omega\,t)}) = \omega\,N\,B\,A\,\sin{(\omega\,t)}$$



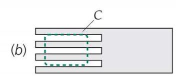
Motor. Cuando se suministra una corriente alterna a la bobina, ésta se convierte en un motor. La corriente de la bobina está dentro de un campo magnético, está sometida a un momento que tiende a hacer girar la bobina. Si la corriente de la bobina es alterna y se invierte en el momento adecuado, el momento que actúa en la bobina produce en ésta un movimiento de rotación. Éste es el fundamento del motor, donde la energía eléctrica se transforma en energía mecánica.



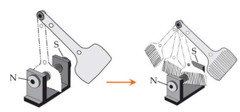
Corrientes de Foucault ó turbillonarias inducidas por un flujo variable en un trozo de conductor.
Las corrientes de Foucault generalmente son perjudiciales, originan calor que hay que disipar y producen pérdidas de potencia .
En un bloque de metal estas corrientes pueden reducirse de distintas formas, como son:



a) Se construye el bloque con láminas de metal pegadas entre sí.
b) Se recorta el metal produciendo orificios.



Sin embargo, son beneficiosas para frenar el movimiento,etc.. Por ésto se emplean en amortiguar oscilaciones, en el frenado magnético de ferrocarriles, . . .



3.6. Inductancia

Autoinducción. Considerando que el flujo que atraviesa el circuito será debido únicamente al campo magnético creado por la corriente del propio circuito.

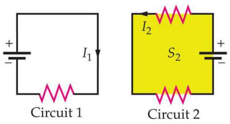
$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \int_c K_m \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} && \Longrightarrow B \propto I \\ \phi_n &= \int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\ \text{(Wb)} && \Longrightarrow \phi_n \propto B \end{aligned}\right\} \phi_n \propto I \quad \Longrightarrow \phi_n = \mathcal{L}\cdot I$$

con $\mathcal{L}$ *coef. de autoinducción* del circuito medido en Henry $\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}}$
y dependiente de la geometría del circuito $L = f(\text{geom.})$

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\,\phi_n}{\mathrm{d}\,t} = -\mathcal{L}\frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,t} \Longrightarrow \mathcal{L} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{d}\,I/\mathrm{d}\,t}$$

• Coeficiente de autoinducción de un solenoide.
Para un solenoide de n vueltas por unidad de longitud ($n = N/L$), de longitud L y sección transversal A, resultará:

$$\phi_n = \int_s N\cdot\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_s n\,L\cdot\mu_0\,n\,I\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\,n^2\,I\,L\,A = \mathcal{L}\cdot I$$

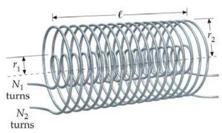


Inducción mutua. Si tenemos dos circuitos próximos, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos se debe en parte al campo magnético creado por su propia corriente y en parte al campo magnético creado por la corriente que circula por el otro circuito.

$$\begin{aligned} \phi_{m2} &= \mathcal{L}_2\cdot I_2 + M_{12}\cdot I_1 \\ \phi_{m1} &= \mathcal{L}_1\cdot I_1 + M_{21}\cdot I_2 \\ M_{12} &= M_{21} \end{aligned}$$

Siendo M_{12} el *coef. de inducción mutua* entre los circuitos 1 y 2, que depende de la disposición geométrica relativa entre ambos circuitos. Cuando los circuitos están fijos y varían sus corrientes, la fem inducida en cada circuito será:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{\mathrm{d}\,\phi_{m1}}{\mathrm{d}\,t} = -\mathcal{L}_1\frac{\mathrm{d}\,I_1}{\mathrm{d}\,t} - M\frac{\mathrm{d}\,I_2}{\mathrm{d}\,t} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mathrm{d}\,\phi_{m2}}{\mathrm{d}\,t} = -\mathcal{L}_2\frac{\mathrm{d}\,I_2}{\mathrm{d}\,t} - M\frac{\mathrm{d}\,I_1}{\mathrm{d}\,t} \end{aligned}$$



• Coeficiente de inducción mutua de dos solenoides coaxiales Por el solenoide interior, de radio r_1 y N_1 vueltas, circula una corriente I_1, y por y el solenoide exterior, de radio r_2 y N_2 vueltas, circula una corriente I_2. Ambos de longitud L.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mathcal{L}_1\cdot I_1 + M_{21}\cdot I_2 \\ \phi_2 &= \mathcal{L}_2\cdot I_2 + M_{12}\cdot I_1 \\ M_{12} &= M_{21} \end{aligned}$$

∼Si $I_2 = 0$

El campo magnético en el solenoide interior es cte. dentro del solenoide de valor:

$$B_1 = \mu_0\,n_1\,I_1$$

Fuera del solenoide interior el campo magnético que atraviesa es cero. El flujo que atraviesa el solenoide exterior es [7]

[7]Observese que el área para el flujo del solenoide exterior ϕ_2 es el área del solenoide interior, ya que no hay campo magnético fuera de éste .

$$\phi_2 \,=\, N_2\, B_1\, \left(\pi\, r_1^2\right) \,=\, n_2\, L\, B_1\, \left(\pi\, r_1^2\right) \,=\, \mu_0\, n_1\, n_2\, L\left(\pi\, r_1^2\right)\, I_1$$

siendo la inductancia mutua

$$M_{12} \,=\, \frac{\phi_2}{I_1} \,=\, \mu_0\, n_1\, n_2\, L\, \pi\, r_1^2$$

$\sim$Si $I_1 = 0$

El campo magnético en el solenoide interior es cte. dentro del solenoide de valor:

$$B_2 \,=\, \mu_0\, n_2\, I_2$$

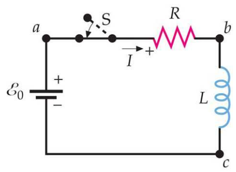
El flujo que atraviesa el solenoide interior es [8]

$$\phi_1 \,=\, N_1\, B_2\, \left(\pi\, r_1^2\right) \,=\, n_1\, L\, B_2\, \left(\pi\, r_1^2\right) \,=\, \mu_0\, n_1\, n_2\, L\left(\pi\, r_1^2\right)\, I_2$$

siendo la inductancia mutua

$$M_{21} \,=\, \frac{\phi_1}{I_2} \,=\, \mu_0\, n_1\, n_2\, L\, \pi\, r_1^2$$

3.7. Energía magnética



El circuito de la figura está formado por un generador, una resistencia R y una autoinducción L. Cuando se cierra el interruptor, aparece una corriente I en el circuito que hace que se genere una fem inducida en la autoinducción, de sentido opuesto a la del generador.

$$\varepsilon - \mathcal{L}\frac{\mathrm{d}\, I}{\mathrm{d}\, t} \,=\, I \cdot R \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon\, I \,=\, I^2 \cdot R \,+\, \mathcal{L}\, I\frac{\mathrm{d}\, I}{\mathrm{d}\, t} \quad \Big/ \quad \begin{array}{ll} \varepsilon\, I & \text{Potencia aportada por generador al circuito} \\ I^2 \cdot R & \text{Potencia disipada en forma de calor en la resistencia} \\ \varepsilon\, I & \text{Potencia que almacena la autoinducción} \end{array}$$

siendo la energía almacenada en el inductor U_m, recuerdese $E = P \cdot t$, de

$$\mathrm{d}\, U_m \,=\, \mathcal{L}\, I\frac{\mathrm{d}\, I}{\cancel{\mathrm{d}\, t}}\cancel{\mathrm{d}\, t} \quad\Longrightarrow\quad U_m \,=\, \int_{I_i}^{I_f} \mathcal{L}\, I\, \mathrm{d}\, I \,=\, \frac{1}{2}\mathcal{L}\, \left(I_f^2 - I_i^2\right)$$

Densidad de energía magnética ó energía almacenada por unidad de volumen u_m. Se puede considerar la energía almacenada en la autoinducción del circuito como la energía almacenada en el campo magnético que se crea.

Para el caso del solenoide

$$\left.\begin{array}{ll} B & = \mu_0\, n\, I \\ \mathcal{L} & = \mu_0\, n^2\, A\, L \end{array}\right\} U_m = \frac{1}{2}\mathcal{L}\, I^2 = \frac{1}{2}\mu_0\, n^2\, A\, L\left(\frac{B}{\mu_0\, n}\right)^2 = \frac{1}{2\,\mu_0}\, B^2\, A\, L \Longrightarrow\quad u_m = \frac{U_m}{A\, L} = \frac{1}{2\,\mu_0}\, B^2$$

[8]Observese que aunque $B_1 = 0$, el campo mangnético afecta a todo el soneloide de radio r_2, por tanto afecta al soneloide de radio $r_1 < r_2$