Ejercicio 9. Sea $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \neg\}$ y α una fórmula proposicional del lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\alpha^\star$ la fórmula que resulta de reemplazar en α: $\wedge \mapsto \vee$, $\vee \mapsto \wedge$ y para todo i, $p_i \mapsto \neg p_i$. Probar que para toda valuación v, $v \models \alpha^\star$ si y sólo si $v \not\models \alpha$.

9) Inducción en complejidad

CB: $\alpha^* = \neg\alpha$

$v \models \alpha \iff v \not\models \neg\alpha \iff v \not\models \alpha^*$

P_i:

1) Negación: Sea $\varphi \in FORM$ / complejidad$(\varphi) = k-1$
Sea $\Phi = \neg\varphi$

$v \models \Phi \iff v \models \neg\varphi \iff v \not\models \varphi \overset{HI}{\iff} v \models \varphi^*$] BELLISIMO

qvq: $v \not\models \Phi^* \iff v \not\models (\neg\varphi)^* \iff v \not\models \neg(\varphi^*) \iff v \models \varphi^*$]

Puedo hacer esto porque * no modifica los $\neg$.

2) Implicacion: Sean Φ, φ, ψ / complejidad$(\Phi) = k$ y $\Phi = \varphi \to \psi$

$v \models \Phi \iff v \models (\varphi \to \psi) \iff v \not\models \varphi$ o $v \models \psi \overset{HI}{\iff} v \models \varphi^*$ o $v \not\models \psi^*$]

qvq: $v \not\models \Phi^* \iff v \not\models (\varphi \to \psi)^* \iff v \models (\varphi \wedge \neg\psi)^* \iff v \models \varphi^*$ o $v \not\models \psi^*$]

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

* solo modifica el $\wedge$, todo lo demas lo deja igual, aunque podemos llevarlo hacia la FORM.

Ejercicio 10. Dada una valuación v, sean p y q dos proposiciones tales que $v(p) = v(q)$. Demostrar que $v \models \varphi$ sii $v \models \varphi[p \mapsto q]$ para toda fórmula φ, donde $\varphi[p \mapsto q]$ denota la fórmula que resulta de reemplazar uniformemente la proposición p por q en φ.

INDUCCION ESTRUCTURAL EN COMPLEJIDAD

CB:

1) $\varphi = p \Rightarrow \varphi[p \to q] = q$, Sabemos que $v(p) = v(q) \Rightarrow v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \varphi[p \to q]$ ✓

2) $\varphi = p'$, $p' \neq p$

$\Rightarrow \varphi[p \to q] = p'$, Como $\varphi = \varphi[p \to q]$ $v \models \varphi \Leftrightarrow v \models \varphi[p \to q]$ ✓

PI:

1) $\Phi = \neg\varphi$, con complejidad $(\Phi) = k$

BELLISIMO

$v \models \Phi \Leftrightarrow v \models \neg\varphi \Leftrightarrow v \not\models \varphi$

qvq: $v \models \Phi[p \to q] \Leftrightarrow v \models (\neg\varphi)[p \to q] \Leftrightarrow v \models \neg(\varphi[p \to q]) \Leftrightarrow v \not\models \varphi[p \to q] \overset{HI}{\Leftrightarrow} v \not\models \varphi$

Como $[p \to q]$ no toca $\neg$ puedo sacarlo del parentesis

2) $\Phi = \varphi \to \psi$, complejidad $(\Phi) = k$

BELLISIMO

$v \models \Phi \Leftrightarrow v \models \varphi \to \psi$

qvq: $v \models \Phi[p \to q] \Leftrightarrow v \models (\varphi \to \psi)[p \to q] \Leftrightarrow v \models \varphi[p \to q] \to \psi[p \to q] \overset{HI}{\Leftrightarrow} v \models \varphi \to \psi$

$[p \to q]$ no toca la $\neg$ entonces puedo dejarlo afuera

Ejercicio 11. Dado un conjunto de fórmulas Γ, llamamos $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias semánticas de Γ definido como $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas. Probar que:

11) a) $\Gamma \subseteq CON(\Gamma)$

qvq: $(\forall \varphi : FORM)(\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in CON(\Gamma))$

$\varphi \in \Gamma \Rightarrow$ Si $v \models \Gamma$, en particular $v \models \varphi$.

O sea: $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$] DEFINICION Consecuencia semantica

$\Gamma \models \varphi$]

b) si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow CON(\Gamma_1) \subseteq CON(\Gamma_2)$

Sabemos que $(\forall \varphi : FORM)(\varphi \in \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \in \Gamma_2)$

qvq: $(\forall \Phi : FORM)(v \models \Gamma_1 \Rightarrow v \models \Phi \Rightarrow v \models \Gamma_2 \Rightarrow v \models \Phi)$

Supongamos $\psi \,/\, (\forall v)(v \models \Gamma_1 \Rightarrow v \models \psi)$

Veamos que para para las $v' /$

$v' \models \Gamma_2$. Como $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow v' \models \Gamma_1$

$\therefore v' \models \Gamma_2 \Rightarrow v' \models \Gamma_1 \Rightarrow v' \models \psi$

$v' \models \Gamma_2 \Rightarrow v' \models \psi \Rightarrow \Gamma_2 \models \psi$]

c) Si $\Gamma_1 \subseteq CON(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq CON(\Gamma_3) \Rightarrow \Gamma_1 \subseteq CON(\Gamma_3)$

Sabemos:

$(\forall \varphi : FORM)(\varphi \in \Gamma_1 \Rightarrow (\forall v)(v \models \Gamma_2 \Rightarrow v \models \varphi)) \mid \underline{\Gamma_1} \subseteq \underline{CON(\Gamma_2)}$

$(\forall \varphi' : FORM)(\varphi' \in \Gamma_2 \Rightarrow (\forall v)(v \models \Gamma_3 \Rightarrow v \models \varphi') \mid \underline{\Gamma_2} \subseteq CON(\Gamma_3)$

qvq:

$(\forall \Phi : FORM).(\Phi \in \Gamma_1 \Rightarrow (\forall v)(v \models \Gamma_3 \Rightarrow v \models \Phi) \mid \Gamma_1 \subseteq CON(\Gamma_3)$

Sea $\Phi \in \Gamma_1$ y $v \,/\, v \models CON(\Gamma_3)$

qvq: $v \models \Phi$

$v \models CON(\Gamma_3) \Leftrightarrow v \models \psi \quad \forall \psi \in CON(\Gamma_3)$

Como $\Gamma_2 \subseteq CON(\Gamma_3) \Rightarrow v \models \Gamma_2 \Rightarrow v \models CON(\Gamma_2)$

por definición

Como $\Gamma_1 \subseteq CON(\Gamma_2) \Rightarrow v \models \Gamma_1$. En particular $v \models \Phi$ porque $\Phi \in \Gamma_1$.

Luego como todo $\Phi \in \Gamma_1 \in CON(\Gamma_3)$, $\Gamma_1 \subseteq CON(\Gamma_3)$]

Ejercicio 12. Sean $\alpha, \beta \in$ **Form**.

12) a) $CON(\{\beta\}) \subseteq CON(\{\alpha\}) \Leftrightarrow \alpha \to \beta$ TAUT

$\Rightarrow$ | $CON(\{\beta\}) \subseteq CON(\{\alpha\})$

Sup $\exists v / v \models \alpha$

qvq: $v \models \beta$

$\beta \subseteq CON(\{\beta\})$ 11a.

Si $v \models \alpha \Rightarrow v \models CON(\alpha) \Rightarrow v \models CON(\beta) \Rightarrow v \models \beta$

Por definición de $CON(\ )$

$CON(\{\beta\}) \subseteq CON(\{\alpha\})$

Entonces siempre que $v \models \alpha \Rightarrow v \models \beta$. Luego $\alpha \to \beta$ es TAUT]

$\Leftarrow$ | $\alpha \to \beta$ TAUT

Sea $\varphi \in CON(\{\beta\})$

qvq: $\varphi \in CON(\{\alpha\})$

$\Rightarrow$ Tomo $v / v \models CON(\{\alpha\})$, Si $v \models \varphi \Rightarrow \varphi \in CON(\{\alpha\})$

$v \models CON(\{\alpha\}) \Rightarrow v \models \alpha \xRightarrow{\alpha \to \beta \text{ TAUT}} v \models \beta \Rightarrow v \models CON(\{\beta\}) \Rightarrow v \models \varphi$]

$\alpha \subseteq CON(\{\alpha\})$ Por def.

Luego, $\varphi \in CON(\{\alpha\})$ y $CON(\{\beta\}) \subseteq CON(\{\alpha\})$]

13) Sea $\Gamma \subseteq FORM$

a) Γ SAT y $\Gamma' \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma'$ SAT

$\exists v / \; v \models \Gamma \Leftrightarrow \forall \varphi_i \in \Gamma$ $\overset{PROP}{}$: $v \models \varphi_i$

$\Gamma' = \{\varphi'_1, \dots, \varphi'_n\} \quad \Gamma' \subseteq \Gamma$

$\Rightarrow \forall \varphi_i' \in \Gamma', PROP : v \models \varphi_i'$

Γ' SAT $\not\Rightarrow \Gamma$ SAT

$\forall \varphi_i' \in \Gamma', PROP : v \models \varphi_i'$

Como $\exists \varphi_i / \varphi_i \in \Gamma$ y $\varphi_i \notin \Gamma' \Rightarrow$

Puede pasar que $v \not\models \Gamma$ pero $v \models \Gamma'$.

b) Γ SAT $\Leftrightarrow$ CON(Γ) SAT

$\Rightarrow$ | Γ SAT

$CON(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$

$\exists v / v \models \Gamma$

$qvq: v \models CON(\Gamma)$

Sea $\varphi \in CON(\Gamma)$, $\Rightarrow v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$

Luego $v \models CON(\Gamma)$]

$\Leftarrow$ | $CON(\Gamma)$ SAT

$\exists v / v \models CON(\Gamma) \Leftrightarrow \forall \varphi \in CON(\Gamma), v \models \varphi$

En particular, como $\Gamma \subseteq CON(\Gamma)$, $\forall \varphi' \in \Gamma$, $v \models \varphi'$]

c. ¿Es cierto que para toda fórmula α sucede $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$?

$\Gamma = \{p\}$, $\alpha = q \Rightarrow v / v(p)=1, v(q)=0 \Rightarrow v \models \Gamma$ y $v \not\models \alpha$]

$\neg\alpha = \neg q \Rightarrow v' / v'(p)=1, v'(q)=1 \Rightarrow v \models \Gamma$ y $v \not\models \neg\alpha$]

$\Rightarrow$ NO ES CIERTO

14) Demostrar que son equivalentes

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

a $\Rightarrow$ b

Que $\varphi \in CON(\emptyset) \Rightarrow v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$. Esto quiere decir que φ es TAUT.

Luego $\neg\varphi$ es CONTRADICCION

$\Rightarrow \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ es TAUT y $(\alpha_1 \wedge \ldots, \alpha_n)$ es CONTRADICCION

Luego, es fácil ver que $\nexists\, v / \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sean simultaneamente válidas en v.

$b \Rightarrow c$

Que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no sean simultaneamente válidas para ninguna valuación

qvq: $\exists\, \beta / \beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$

$CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = FORM \Rightarrow$ Si tomo $\beta = P$, como $P \in FORM$ y $\neg P \in FORM$

$\Rightarrow \beta$ y $\neg\beta \in FORM$

como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es CONTRADICCION

$\Rightarrow v \models \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Rightarrow v \models \varphi$ es TAUT por antecedente siempre falso

$c \Rightarrow d$

Sabemos que $\exists\, \beta / \beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$

qvq: $\Gamma \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})\ \forall\, \Gamma : FORM$

Si $\exists\, \beta / \beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in CON(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$

$\Rightarrow v \models \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Rightarrow v \models \beta$

$\Rightarrow v \models \neg\beta$

$CON(\overbrace{CON(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}^{\Gamma}) \overset{\text{lid}}{=} CON(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$\beta \in \Gamma$ y $\neg\beta \in \Gamma \Rightarrow CON(\Gamma)$ como Γ no SAT $\rightarrow CON(\Gamma) = FORM$

$\Rightarrow CON(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = FORM$]

$d \Rightarrow a$

Sabemos que $\beta \in CON(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ $\forall \beta$: FORM

qvq: $\neg(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in CON(\emptyset)$

Supo $\neg(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin CON(\emptyset) \Rightarrow \exists v / v \models \emptyset \Rightarrow v \not\models \neg(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\Leftrightarrow \exists v / v \models \alpha_1, \dots, \alpha_n$]

Sea $\beta : \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta \in CON(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$

$\neg \beta = \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \neg \beta \notin CON(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$] ABS! Todo $\beta \in CON(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Por β SAT

Luego $\neg(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in CON(\emptyset)$]