

**Ejercicio 1.** Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde  $f$  es un símbolo unario y  $g$  es binario:

a.  $\mathcal{C} = \emptyset$ ,  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ ,  $\mathcal{P} = \{=\}$ ,  $U_I = \mathbb{N}$ ,  $f_I(n) = \sqrt{n}$ ,  $g_I(n, m) = n + m$ .

b.  $\mathcal{C} = \{c\}$ ,  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ ,  $\mathcal{P} = \{=\}$ ,  $U_I = \mathbb{N}$ ,  $f_I(n) = n^2$ ,  $g_I(n, m) = n + m$ ,  $c_I = 2$ .

c.  $\mathcal{C} = \{c, d\}$ ,  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ ,  $\mathcal{P} = \{=\}$ ,  $U_I = \mathbb{N}$ ,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$$g_I(n, m) = n^2 - n, c_I = d_I = 0.$$

a) No es apropiada porque  $f_I(n) \notin \mathbb{N}$ .

b) Tiene toda la pinta que anda  $\pi \in \mathbb{Q}$ .

c) FUNCA

**Ejercicio 2.** En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados. Cuando sea posible determinar si el enunciado es verdadero o falso en la interpretación correspondiente.

a.  $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$ , donde  $P$  y  $Q$  son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales,  $P_I = <$ ,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es un número racional.

Para todo par de  $z$  números, si  $x < y \Rightarrow$  existe un racional  $c / x < c < y$  ] Verdadero

b.  $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y, x)))$ , donde  $P$  es un símbolo de predicado binario,  $Q$  y  $R$  son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas,  $P_I(x, y)$  significa  $x$  nace en el día  $y$ ,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es un día, y  $R_I(x)$  significa  $x$  es un hombre libre.

Para todo día, existe un hombre libre cuyo nacimiento es ese día ] Puede ser falso

c.  $\forall x \forall y ((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x, y)))$ , donde  $Q$  y  $P$  son símbolos de predicados unarios,  $f$  es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros,  $Q_I(x)$  significa  $x$  es par,  $P_I(x)$  significa  $x$  es impar, y  $f_I(x, y) = x + y$ .

Para todo par de pares, el número da impar ] Falso

**Ejercicio 3.** Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

$\psi_a$  a. Existen al menos dos elementos.  $(\exists x)(\exists y)[x \neq y]$

$\psi_b$  b. Existen exactamente dos elementos.  $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\forall z)(x \neq z \wedge y \neq z)]$

$\psi_c$  c. Existen a lo sumo dos elementos.  $\neg \psi_a \vee \psi_b$

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario  $P$ , escribir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad  $P$ .  $\psi_c \wedge (\exists x)[P(x)]$

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad  $P$ , es único.  $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\forall y)(x \neq y)]$

f. Existe un elemento que cumple la propiedad  $P$  y es único.  $(\exists x)[P(x) \wedge (\forall y)(x \neq y)]$

**Ejercicio 4.** Considerar un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario  $f$ . Escribir una fórmula  $\varphi$  que cumpla  $\mathcal{A} \models \varphi$  sii  $f_{\mathcal{A}}$  es inyectiva pero no sobreyectiva. ¿Es  $\varphi$  satisfacible? ¿Es satisfacible por un modelo finito?

$$\varphi : (\forall x_1, x_2)[f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2] \wedge (\exists y)(\forall x)[f(x) \neq y]$$

$$I: C = \emptyset, F = \{f\}, P = \{=\}, U_I = \mathbb{N}, f_I(x) = 2 \cdot x \text{ SAT}$$

No se puede para un modelo finito porque al ir de un  $U$  finito a otro  $U$  finito si o si vas a tener una  $f$  sobreyectiva.

**Ejercicio 5.** Sea  $P$  un símbolo de relación unario y sea  $f$  un símbolo de función binario. Para cada una de las fórmulas  $\forall x \forall y f(x, y) = x$ ,  $\exists x \forall y f(x, y) = y$ ,  $\exists x (P(x) \wedge \forall y P(f(x, y)))$  hallar una interpretación que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

$$U_I = \mathbb{N}, \quad P_I(x) = x > 0, \quad \text{no SAT: } f_I(x, y) = x + y, \quad \text{SAT: } f_I(x, y) = x$$

$$U_{I_2} = \mathbb{N}, \quad P_{I_2}(x) = x > 0, \quad \text{no SAT: } f_{I_2}(x, y) = y + 1, \quad \text{SAT: } f_{I_2}(x, y) = x + y \quad (x \neq 0)$$

$$U_{I_3} = \mathbb{N}, \quad P_{I_3}(x) = x \text{ par}, \quad \text{no SAT: } f_{I_3}(x, y) = x + y, \quad \text{SAT: } f_{I_3}(x, y) = 2 \cdot (x + y)$$

**Ejercicio 6.** Decimos que un elemento  $e$  del universo de una interpretación  $\mathcal{I}$  es *distinguishable* con el lenguaje  $\mathcal{L}$  si existe una  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi(x)$  con una sola variable libre  $x$  tal que  $\mathcal{I} \models \varphi(x)[v]$  si y sólo si  $v(x) = e$ .

Dar un ejemplo de un lenguaje sin constantes y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguishable.

$$\text{Sea } \mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$$

$$\psi_0(x) = (\exists y) [y < x]$$

$$\psi_1(x) = \neg \psi_0(x) \wedge (\forall y) [y < x \rightarrow \psi_0(y)]$$

$$\psi_i(x) = \neg \psi_0(x) \wedge \dots \wedge \neg \psi_{i-1}(x) \wedge (\forall y) [y < x \rightarrow \psi_0(y) \vee \dots \vee \psi_{i-1}(y)]$$

**Ejercicio 7.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +) \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$$

donde  $\mathbb{N}$  denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguishable en ambas interpretaciones.

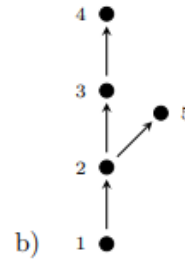
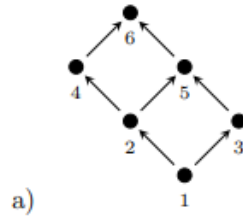
$$\mathcal{I}_1) \quad \psi_1(x) = (\forall y) [y < x \rightarrow \psi_0(y)]$$

$$x < y = (\exists z) [x + z = y \wedge x \neq y]$$

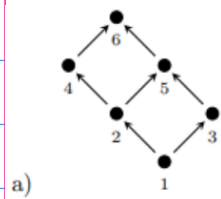
$$\psi_0(x) = (\forall y) [x + y = y]$$

$$\mathcal{I}_2) \quad \psi_1(x) = (\forall y) [x \cdot y = y]$$

**Ejercicio 8.** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de predicado binario  $\leq$ . Probar que todos los elementos del universo de las siguientes interpretaciones son distinguibles,



*Observación:* Estos esquemas se conocen como “Diagramas de Hasse” y la relación que describen es la menor relación reflexiva y transitiva que contiene a los pares explicitados en el diagrama. Por ejemplo, en a), se tienen los pares  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 6)$  entre otros aunque no estén explícitamente en el esquema.



$$\varphi_1(x) = (\forall y) [x \leq y] \quad \text{Soy menor o igual a todos}$$

$$\varphi_6(x) = (\forall y) [y \leq x] \quad \text{Todos son menores o iguales a mi}$$

$$\varphi_3(x) = (\forall y) [y \leq x \rightarrow \varphi_1(x) \vee y = x] \wedge (\exists x') (\exists y) (\exists z) [x' \neq y \neq z$$

Los únicos menores a X son 1 y si mismo.

$$\wedge x \leq x', y, z$$

$$\wedge (\exists a) [a \neq x, x', y, z \wedge x \leq a]$$

X es menor o igual a exactamente 3 elementos.

$$\varphi_5(x) = \neg \varphi_6(x) \wedge \neg \varphi_3(x) \wedge (\forall y) [\varphi_3(y) \rightarrow y \leq x] \quad \text{No soy 6 ni 3 y soy mayor o igual a 3.}$$

$$\varphi_4(x) = \neg \varphi_5(x) \wedge \neg \varphi_6(x) \wedge (\forall y) [x \leq y \rightarrow x = y \vee \varphi_6(y)] \quad \text{No soy 5 ni 6 y mi único mayor o igual es 6 o yo mismo.}$$

$$\varphi_2(x) = \neg \varphi_1(x) \wedge \neg \varphi_3(x) \wedge \neg \varphi_4(x) \wedge \neg \varphi_5(x) \wedge \neg \varphi_6(x) \quad \text{No soy nadie mas que el 2.}$$



$$\varphi_1(x) = (\forall y) [x \leq y] \quad \text{Soy menor o igual a todos}$$

$$\varphi_2(x) = \neg \varphi_1(x) \wedge (\forall y) [y \leq x \rightarrow x = y \vee \varphi_1(x)] \quad \text{No soy 1 y solo son menores o iguales a mi 1 y yo mismo}$$

$$\varphi_3(x) = (\exists y) [x \neq y \wedge x \leq y] \wedge \neg \varphi_1(x) \wedge \neg \varphi_2(x) \quad \text{No soy 1 ni 2 y tengo algún mayor a mi}$$

$$\varphi_4(x) = (\exists y) [x \neq y \wedge x \leq y] \wedge (\forall z) [\varphi_3(z) \rightarrow z \leq x] \quad \text{Soy el mayor y 3 es menor o igual a mi}$$

$$\varphi_5(x) = \neg \varphi_1(x) \wedge \neg \varphi_2(x) \wedge \neg \varphi_3(x) \wedge \neg \varphi_4(x) \quad \text{Soy distinto a todos los demás}$$

**Ejercicio 9.** Probar que si el universo de una interpretación es finito con  $n + 1$  elementos, y tiene la propiedad que  $n$  elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

$$\psi_n(x) = \neg \psi_0(x) \wedge \dots \wedge \neg \psi_{n-1}(x)$$

**Ejercicio 10.** Dada una interpretación  $\mathcal{I}$  con universo  $A$ , decimos que una relación  $R \subseteq A^n$  es *expresable* con el lenguaje  $\mathcal{L}$  si existe una  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  con  $n$  variables libres tal que para toda valuación  $v$  cumpla  $\mathcal{I} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[v]$  sii  $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in R$ . Demostrar que las siguientes relaciones son expresables.

a.  $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, *, = \rangle$  con  $*$  el producto de naturales.

$$R_1 = \{(n, m) : n \text{ divide a } m\}. \psi_{R_1}(x, y) = (\exists z) [x \cdot z = y]$$

$$P_1 = \{n : n \text{ es primo}\}. \psi_{P_1}(x) = (\forall y) [\psi_{R_1}(y, x) \rightarrow y = 1 \vee y = x]$$

b.  $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, +, =, 0, 1 \rangle$  con  $+$  la suma de naturales.

$$R_2 = \{(n, m) : n < m\}. \psi_{R_2}(x, y) = (\exists z) [x + z = y \wedge x \neq y]$$

c.  $\mathcal{I}_3 = \langle L, \circ, = \rangle$  con  $L$  el conjunto de todas las listas,  $\circ$  la concatenación de listas.

$$R_3 = \{(a, b) : a \text{ es sublista de } b\}. \psi_{R_3}(a, b) = (\exists l)(\exists l') [l \circ a \circ l' = b]$$

**Ejercicio 11.** Decimos que una clase de modelos  $K$  es *definible* con el lenguaje  $\mathcal{L}$  si existe una sentencia  $\varphi$  tal que para toda interpretación  $\mathcal{I}$  y valuación  $v$  cumpla  $\mathcal{I} \models \varphi[v]$  sii  $\mathcal{I} \in K$ . Demostrar que las siguientes clases de modelos son definibles con su respectivo lenguaje.

a.  $\mathcal{L}_0 = \{=\}$ .  $K_0 = \emptyset$ .  $\psi: (\exists x) [x = x]$

b.  $\mathcal{L}_1 = \{=\}$ .  $K_1 = \{\text{todas las interpretaciones}\}$ .  $\psi: (\forall x) [x = x]$

c.  $\mathcal{L}_2 = \{P, =\}$  con  $P$  predicado binario.  $K_2 = \{\mathcal{I} : P^{\mathcal{I}} \text{ es reflexivo y transitivo}\}$ .

d.  $\mathcal{L}_3 = \{f, g, =\}$  con  $f, g$  funciones unarias.  $K_3 = \{\mathcal{I} : \text{Im } f^{\mathcal{I}} \subseteq \text{Im } g^{\mathcal{I}}\}$ .  $\psi: (\forall x, y) [f(x) = y \rightarrow (\exists x') [g(x') = y]]$