Parcial de LyC - 2C 2020

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y los siguientes símbolos: g símbolo de función unaria, u símbolo de función binaria y F y S símbolos de predicado unarios.

Sea $\mathcal{A}$ la siguiente $\mathcal{L}$-estructura: $|\mathcal{A}| = \mathcal{P}(\mathbf{FORM})$ (los conjuntos de fórmulas de la lógica **proposicional**). $g_{\mathcal{A}}(\Gamma) = \mathrm{Con}(\Gamma)$. $u_{\mathcal{A}}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. $\Gamma \in F_{\mathcal{A}}$ si Γ es finito. $\Gamma \in S_{\mathcal{A}}$ si Γ es satisfacible.

a. Demostrar que son distinguibles los conjuntos **FORM** y $\emptyset$.

b. Demostrar que son expresables las relaciones I_2, que indica si un conjunto es subconjunto de otro y T_1, que indica si todas las fórmulas del conjunto son tautologías.

c. **EXTRA (opcional)** Expresar el teorema de compacidad de la lógica **proposicional** mediante una $\mathcal{L}$-fórmula.

a) Decimos que un elemento e del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ es **distinguible** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

FORM

$$\varphi_1(x) := \forall y\,(U(y,x) = x) \;\Big|\; \varphi_1'(x) = g(x) = x \land \neg S(x) \overbrace{\land \neg F(x)}^{\text{sobra}}$$

$\emptyset$

$$\varphi_2(x) := \forall y\,(U(y,x) = y)$$

b) Dada una $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo M, decimos que una relación $R \subseteq M^n$ es **expresable** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con n variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para toda valuación v, vale que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R$.

$I_2(x,y) := x \subseteq y$

$\varphi_1(x,y) := U(x,y) = y$

$\varphi_1'(x,y) := (\exists c)\,(U(x,c) = y)$

$T_1(x) :=$ Todas las form de x son TAUT

$\varphi_2(x) := (\forall y)\; S(y) \Rightarrow g(U(x,y)) = g(y)$

$$\varphi_2'(x) := (\forall y)\,(\varphi_2(y) \Rightarrow \varphi_1(\underbrace{g(x)}_{\text{también sirve } x}, g(y)))$$

Sea $\Gamma \subseteq FORM$

c) Si todo subconjunto finito de Γ es SAT $\Rightarrow$ Γ es SAT

$$\varphi := (\forall x)(\forall y)\left(\left(\left(\psi_1(y, x) \wedge F(y)\right) \Rightarrow S(y)\right) \Rightarrow S(x)\right)$$

$y \leq x$ y finito y SAT x SAT