Ejercicio 1.
Sea $\Gamma \subseteq$ **Form** un conjunto satisfacible de fóormulas de la lógica proposicional.

1. Probar que si existe una única valuación que satisface a Γ entonces $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$ para toda fórmula proposicional α.
2. Si $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$ para toda fórmula α, ¿es cierto que existe una única valuación que satisface a Γ?

1. $\exists! \tilde{v} / \tilde{v} \models \Gamma \Rightarrow \Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \not\models \alpha$ para toda formula α.

Sabemos que para toda α, $\tilde{v} \models \alpha$ o $\tilde{v} \models \neg\alpha$.

Sea α / $\tilde{v} \models \alpha$

qvq: $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \alpha$

por HIP $\tilde{v} \models \Gamma$ y $\tilde{v} \models \alpha$. En las demas valuaciones $v \models \Gamma$ es falso $\Rightarrow$ $v \models \Gamma \rightarrow v \models \alpha$] es VERDADERO

Tomamos $\neg\alpha$, $\tilde{v} \models \neg\alpha$ por HIP $\tilde{v} \models \Gamma$ y $\tilde{v} \models \neg\alpha$. En las demas valuaciones $v \models \Gamma$ es F $\Rightarrow$ $v \models \Gamma \rightarrow v \models \neg\alpha$] es VERDADERO

2. Vale $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \not\models \alpha$ para toda formula α $\Rightarrow \exists! \tilde{v} / \tilde{v} \models \Gamma$?

Consideremos las α que parten de PROP (p_i)

Sabemos que $\Gamma \models p_i$ o $\Gamma \models \neg p_i$ por HIP

Entonces, para toda valuacion v que satisfaga a Gamma, v tiene que satisfacer a alfa.
Supongamos que existen 2 valuaciones w y w' que hacen verdaderas a Gamma,
esas valuaciones difieren en alguna pi. O sea que w(pi) != w'(pi).
Pero supusimos que w |= Gamma y w' |= Gamma => pi no puede ser consecuencia de Gamma.
Analogamente tampoco lo puede ser ¬pi

Ejercicio 2.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria $d_{\mathcal{I}}$. Consideremos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{I} = (\mathbb{R}, d_{\mathcal{I}})$, donde la interpretación del símbolo $d_{\mathcal{I}}$ es la función distancia usual $d_{\mathcal{I}}(r,s) = |r-s|$.

(a) Probar que 0 es distinguible.

(b) Probar que los siguientes conjuntos son expresables

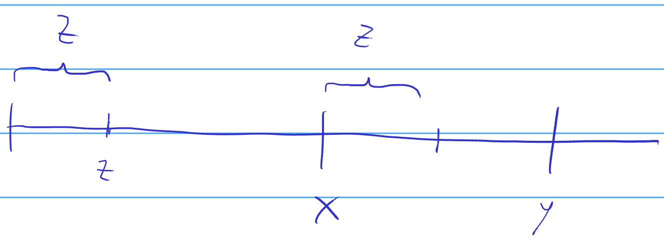
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y \text{ y } z \text{ es el promedio de } x \text{ e } y\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y \text{ y } z \text{ es la mitad de la distancia entre } x \text{ e } y\}$$

a) $\varphi_0(x) = (\forall y)[d(y,y) = x]$

b) $\varphi_A(x,y,z) = x \neq y \wedge d(x,z) = d(y,z)$

$\varphi_B(x,y,z) = x \neq y \wedge d(0,z) = d(x, \varphi_A(x,y,z))$

$= x \neq y \wedge (\forall a,b)[\varphi_0(a) \wedge \varphi_A(x,y,b) \rightarrow d(a,z) = d(x,b) \wedge z = d(a,z)]$



X es distinto de Y y la distancia entre 0 y z es igual a la distancia entre X y el promedio de X,Y y ademas z es positivo.

Ejercicio 3.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con un símbolo de constante 0 y un símbolo de función unaria f. Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, decimos que f tiene soporte finito en $\mathcal{M}$ si el conjunto

$$Supp(\mathcal{M}) = \{x : f_{\mathcal{M}}(x) \neq 0_{\mathcal{M}}\} \text{ es finito.}$$

Demuestre que no existe una sentencia φ tal que para toda estructura $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si f tiene soporte finito en $\mathcal{M}$.

φ se interpreta como: "f tiene soporte finito en M"

$\varphi_1 : (\exists x)[f(x) \neq 0]$

$\varphi_i : (\exists x_1, \dots, x_i)[\neq(x_1, \dots, x_i) \wedge f(x_1) \neq 0 \wedge \dots \wedge f(x_i) \neq 0]$

$\Gamma = \{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$

$\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$

Veamos no SAT

Empiezo suponiendo que Gamma' es SAT.
Entonces sabemos que phi vale. Luego, existe un i Nat / |Supp(M)| = i.
Pero sabemos que Gamma vale, entonces vale phi_{i+1} y eso implica que |Supp(M)| > i.
ABS!

Veamos SAT

Tomo Gamma0 finito subconjunto de Gamma. Entonces, tiene un maximo i / phi_{i} in Gamma0, llamemos a ese i: MAX.

$I : \langle \mathbb{N},\ f_I(x) = \begin{cases} 1 & x \leq MAX \\ 0 & cc \end{cases} \rangle$

Podemos ver que se cumple que hay por lo menos MAX elementos distintos / f(x) != 0, por lo que phi_{MAX} y todas las phi_{i} en Gamma0 son verdaderas. Ademas como la cantidad de x / f(x) != 0 es finito tambien vale phi.
Entonces por compacidad, como todo Gamma0 finito es SAT => Gamma es SAT.