Taller 4

Ceros de funciones

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

15 de noviembre de 2019

Métodos para hallar ceros de f

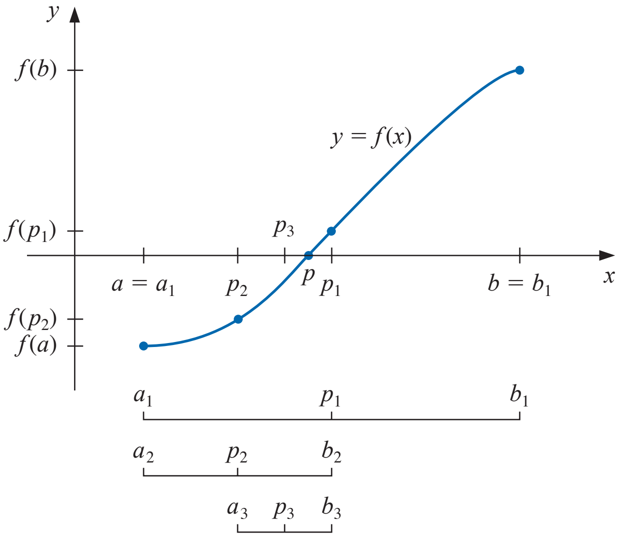
Problema

Buscamos una solución a la ecuación $f(x) = 0$

Métodos aplicables

- Bisección
- Newton-Raphson
- Secante
- Regula-Falsi
- Punto Fijo

Bisección



Punto Fijo

Definiciones

- p es *punto fijo* de una función g si $g(p) = p$
- Buscamos: $f(p) = 0 \Longleftrightarrow g(p) = p$
- Entonces, por ejemplo, $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{f(x) + x}_{g(x)} = x$
- Ejercicio: proponer 4 funciones distintas $g(x)$ tales que hallar un punto fijo de g sea equivalente a hallar una raíz del polinomio $x^3 + 4x^2 - 10$
- Una vez hallada $g(x)$ a partir de $f(x)$ definimos la iteración de punto fijo:

$$x_n = g(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ \ldots$$

Buscamos que la sucesión de valores $x_0, x_1, x_2, \ \ldots$ generados por la iteración converja al punto fijo de g (que a su vez es raíz de f)

Punto Fijo

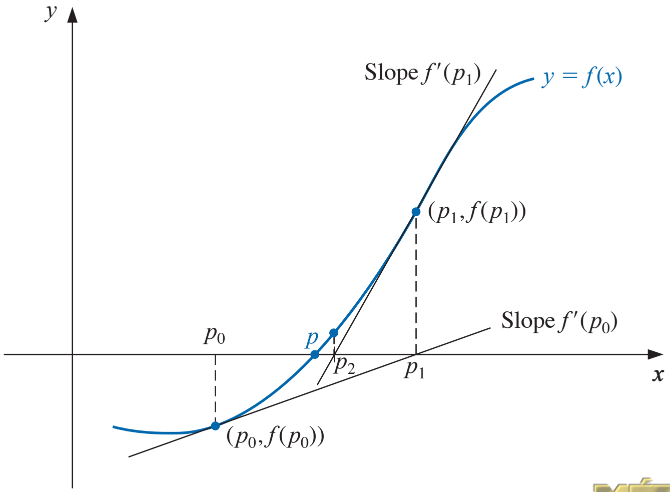
Teorema del Punto fijo

Sea $g(x)$ una función $\underline{\text{continua en } [a,b]}$ tal que $\underline{g(x) \in [a,b] \text{ para todo } x \in [a,b]}$, suponiendo además que existe g' en (a,b) y que $\underline{\text{existe una constante } k}$, con $\underline{0 < k < 1}$ que cumple que $\underline{|g'(x)| \leq k}$, para todo $x \in (a,b)$.
Entonces, para cualquier x_0 en $[a,b]$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0,\ 1,\ \ldots}$ definida por

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

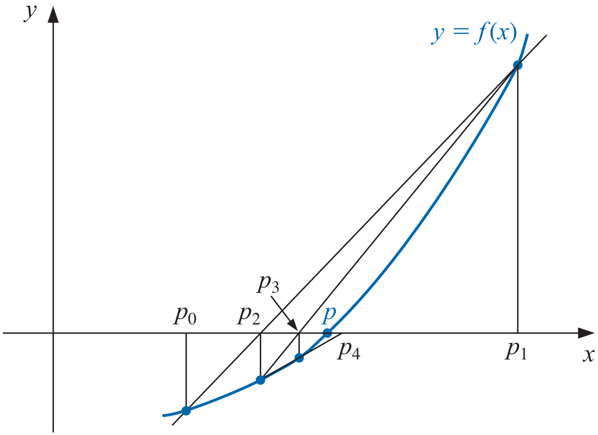
converge al único punto fijo p en $[a,b]$

Newton-Raphson

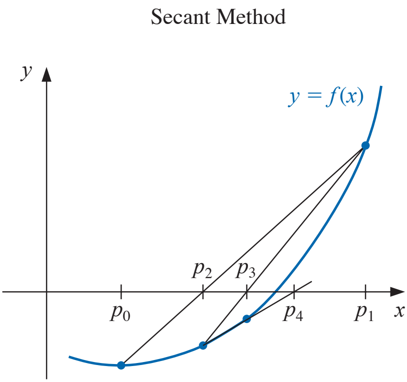


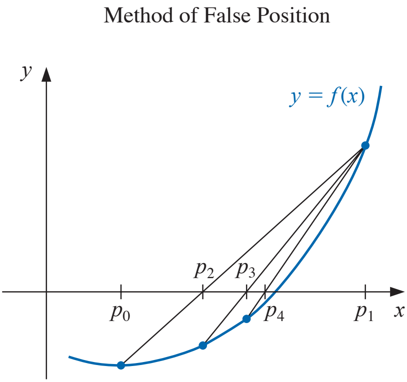
MÉTODOS NUMÉRICOS

Secante

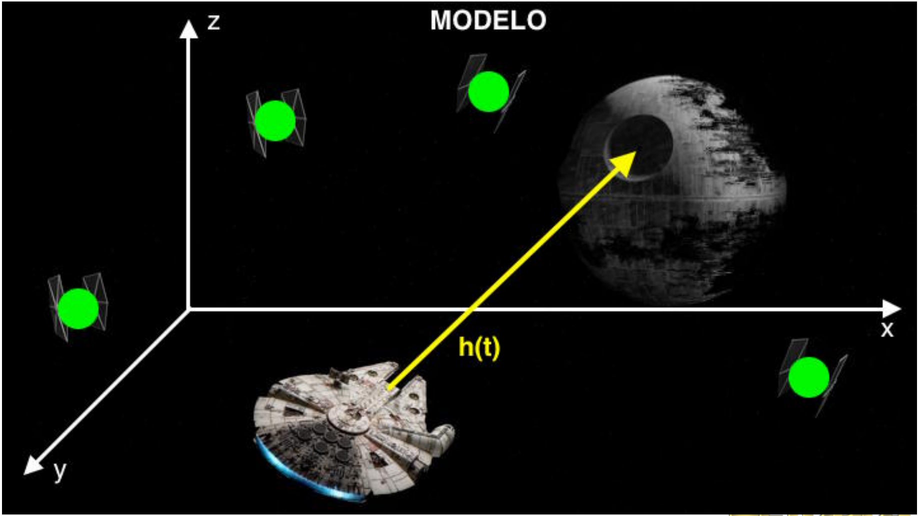


Regula Falsi





Taller 4



Taller 4

Definiciones

- n es la cantidad de naves estelares
- $y_1, \ \ldots, \ y_n \in \mathbb{R}^3$ las ubicaciones de las naves estelares
- $h : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la función de trayectoria
- h es una recta: $h(t) = at + b$, con $a, \ b \in \mathbb{R}^3$.
- El Halcón Milenario en el instante t se encuentra en la posición $h(t)$
- Nivel de peligro en instante t: $A(t) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|h(t) - y_i\|_2}$
- Cada nave estelar aporta al nivel de peligro $A(t)$ una cantidad que es inversamente proporcional a la distancia del Halcón Milenario a la nave

MÉTODOS NUMÉRICOS

Taller 4

Problema

- Han Solo falla en su misión si el nivel de peligro alcanza un valor crítico C
- ¿Podrá Han Solo llegar a la Estrella de la Muerte sin problemas? Veámoslo

$$A(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|h(t) - x_i\|_2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{\|h(t) - x_i\|_2^2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\|h(t) - x_i\|_2^2\right)^{-1/2} = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)$$

donde $g_i(t) = m_i(t)^{-1/2}$, con $m_i(t) = \|h(t) - x_i\|_2^2$.

Luego,

$$A'(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(t)$$

con

$$g_i'(t) = -\frac{1}{2} \cdot m_i(t)^{-3/2} \cdot m_i'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_i'(t)}{m_i(t)^{3/2}}$$

Taller 4

Recordemos que a, b, x_i son vectores y t es un escalar. Así, $m_i(t) = \|h(t) - x_i\|_2^2 = \|at+b-x_i\|_2^2 = (at+b-x_i)^T(at+b-x_i) = (a^Ta)\cdot t^2 + a^T(b-x_i)\cdot t + (b-x_i)^T a\cdot t + \|b-x_i\|_2^2 = (a^Ta)\cdot t^2 + 2a^T(b-x_i)\cdot t + \|b-x_i\|_2^2$

Y su derivada: $m_i'(t) = 2(a^Ta)t + 2a^T(b-x_i) = 2a^T(at+b-x_i) = 2a^T(h(t)-x_i)$

Agrupando todo,

$$A'(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^T(h(t)-x_i)}{(\|h(t)-x_i\|_2^2)^{3/2}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{a^T(h(t)-x_i)}{\|h(t)-x_i\|_2^3} \tag{1}$$

Finalmente, la iteración de Newton-Raphson queda:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{C - A(x_n)}{A'(x_n)}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS