Clase Algoritmos 3 - complejidad computacional

Resumen

Junio 2021

Definiciones

P: lo puedo resolver en tiempo polinomial en función de la entrada

NP: puedo certificar la respuesta positiva en tiempo polinomial en función de la entrada

co-NP: puedo certificar la respuesta negativa en tiempo polinomial en función de la entrada

NP-HARD: $\Pi \in$ NP-Hard si $\forall \Pi' \in$ NP $\Pi' <_p \Pi$

NP-Completo (análogo para coNP-Completo): si está en NP y NP-HARD

Ejercicio 1

a) Describir certificados para los siguientes problemas y cómo los verificarían. ¿Con qué complejidad se pueden verificar?

i Dominating Set
entrada: Grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo $k \leq |V|$
respuesta: ¿Existe un subconjunto $V' \subseteq V$ con $|V'| \leq k$ tal que todo vértice de $V - V'$ tiene al menos un eje conectándolo con un vértice de V'?

ii Well Colored Graph
entrada: Grafo $G = (V, E)$
respuesta: ¿Es cierto que la estrategia de coloreo golosa usa la misma cantidad de colores independientemente del orden en el que se eligen los colores para pintar vértices?

Ejercicio 1

b) Describir certificados que se puedan verificar en tiempo polinomial respecto del tamaño de las instancias.

i Bounded Degree Spanning Tree
entrada: Un grafo $G = (V, E)$ y un entero no negativo $k \leq |V| - 1$
respuesta: ¿Existe un árbol generador para G en el que los grados de los vértices no sean $\geq k$?

ii Partition Triangles
entrada: Un grafo $G = (V, E)$ tal que $V = 3q$ con q un número entero positivo.
respuesta: ¿Existe una partición de V en q conjuntos disjuntos $V_1, V_2, .., V_q$ de 3 vertices tal que para cada $V_i = \left\{V_{i[1]}, V_{i[2]}, V_{i[3]}\right\}$ las 3 aristas $(V_{i[1]}, V_{i[2]})$, $(V_{i[1]}, V_{i[3]})$, $(V_{i[2]}, V_{i[3]})$ pertenecen a E?

Ejercicio 2

Sea $k - COLOREO$ el problema definido de la siguiente manera:

Entrada: Un grafo G

Pregunta: ¿Existe un coloreo válido de G con k o menos colores?

Dar un certificado polinomial para el problema de k-COLOREO y una reducción polinomial de k-COLOREO en $(k+1)$-COLOREO.

Ejercicio 3

Suponiendo que $3 - COLOREO$ es NP-Completo demostrar que $k - COLOREO$ es NP-Completo $\forall k \in \mathcal{Z}$

Ejercicio 4

Demostrar que los siguientes problemas son NP-Completos. Observar que restringiendo las entradas podemos resolver problemas NP-Completos ya conocidos

a Bounded Degree Spanning Tree
 Dado un grafo G = (V,E) y un numero entero positivo K, existe un árbol de spannig para G en el que ningún vértice tiene un grado que exceda K?, es decir, un subconjunto $E' \subseteq E$ tal que E' = V - 1, esta el grafo G' = (V,E) conectado y no hay vertices in V que estan incluidos en mas que K aristas de E'?

b Subgraph Isomorphism
 Dados dos grafos $G = (V_1, E_1) H = (V_2, E_2)$, contiene G un subgrafo isomorfo a H?, es decir, un subconjunto $V \subseteq V_1$ y un subconjunto $E \subseteq E_1$ tal que $V = V_2$, $E = E_2$, y existe una función uno-a-uno f: $V_2 \rightarrow V$ satisfaciendo $\{u, v\} \in$E$_2$ si y solo si $\{f(u), f(v)\} \in E$?

Ejercicio Integrador

Suponiendo que *CLIQUE* es NP-Completo demostrar que *SAT* es NP-Completo.

Sugerencia: para la reducción construir variables que codifiquen la matriz de adyacencia del grafo de entrada G y variables v_{ij} que representen que el i-ésimo elemento de la clique es el vértice j.