Te amo mucho lindo ♡

Ejercicio 1. Considerar la axiomatización SP para la lógica proposicional dada en la teórica. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas

a. $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

b. $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Sugerencia: recordar que en SP vale el teorema de la deducción.

Teorema de la deducción:

Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

a) qvq: Dado $\Gamma = \{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\}$
$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$

1.	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta \in \Gamma$
2.	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma \in \Gamma$
3.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	SP1
4.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	MP 2, 3
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	SP2
6.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	MP 4, 5
7.	$\alpha \to \gamma$	MP 1, 6

b) qvq: $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ o sea, esa cosa es un teorema

Podemos ver que $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ es SP3. $\Rightarrow$ Como llegué a que vale sin haber usado ninguna hipótesis previa, $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ es un TEO.

SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Ejercicio 2.

a. Demostrar que (toda instanciación de) SP3 es una tautología.

b. Demostrar que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.

c. Suponiendo además que (todas las instanciaciones de) SP1 y SP2 también son tautologías, demostrar que SP es correcto.

SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

a)

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \to \neg\beta$	$\beta \to \alpha$	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ TAUT
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

b) MP: Dadas φ y $\psi \in$ FORM, ψ es consecuencia inmediata de $\varphi \to \psi$ y φ.

Sabemos que $v \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow v \models \neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow v \not\models \varphi$ o $v \models \psi$

Por HIP: $v \models \varphi$, $\therefore$ $v \models \psi$.

Luego ψ es TAUT.

c) SP es correcto $\Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha$

Sabemos que SP_1, SP_2, SP_3 y MP TAUT.

qvq: SP correcto

Sea α / $\vdash \alpha$.

$q \vee q$: α es TAUT

Inducción en # pasos

CB: 1 paso

1. α] α en S_1, S_2 y S_3 porque parte de SP $\Rightarrow$ por Hip es TAUT y a)

PI: K pasos

1. α
2. ...

$\vdots$

K-1. φ ($\varphi \in FORM$)

K. ___

Sabemos que en 1, ..., K-1 tenemos TAUT. K se puede tomar de 4 formas.

1) $K = MP\ i,j$, $i \neq j$ y $i,j < k$] TAUT por y b)

(sabemos que i y j son TAUT por Hi)

2,3,4) SP_1, SP_2, SP_3. Básicamente puedo meter un SP con lo que quiera] TAUT por Hip y a)

Ejercicio 3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \to\}$. Demostrar que Γ es inconsistente (i.e. existe β tal que $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$) sii $\Gamma \vdash \alpha$ para todo α.

$\Leftarrow$ | $\Gamma \vdash \alpha \quad \forall \alpha$

qvq: $\exists\, \beta \,/\, \Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$

Si $\Gamma \vdash \alpha \ \forall \alpha$, en particular con $\beta = p$ y $\neg\beta = \neg p$

$\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$]

$\Rightarrow$ | $\exists\, \beta \,/\, \Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$

qvq: $\Gamma \vdash \alpha \quad \forall \alpha$

SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Sea $\alpha \in$ FORM

1. β — $\beta \in \Gamma$
2. $\neg\beta$ — $\neg\beta \in \Gamma$
3. $\neg\beta \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ — SP1
4. $\neg\alpha \to \neg\beta$ — MP 2,3
5. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ — SP3
6. $\beta \to \alpha$ — MP 4,5
7. α — MP 1,5

Puedo deducir un α genérico desde $\Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha \ \forall \alpha \in$ FORM]

Ejercicio 4. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \to\}$. Demostrar los siguientes puntos:

a. Si Γ es un conjunto maximal consistente, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.

Que Γ sea MC $\Rightarrow$ $\forall \varphi : \varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$

$\Rightarrow$ | $\Gamma \vdash \alpha$

qvq: $\alpha \in \Gamma$

Sup $\alpha \notin \Gamma \Rightarrow \neg\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$] ABS! porque $\Gamma \vdash \alpha$ y es consistente

Luego $\alpha \in \Gamma$]

$\Leftarrow$ | $\alpha \in \Gamma$

qvq: $\Gamma \vdash \alpha$

Por definición, si $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$]

b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:

?? 1. Para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien ('o' exclusivo) $\neg\alpha \in \Gamma$.
2. Todos los axiomas de SP están en Γ.
3. Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.

$\Rightarrow$ | Γ es MC, $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$

qvq: $(\forall \alpha) [\alpha \in \Gamma \veebar \neg\alpha \in \Gamma]$

Sea $\alpha \in FORM$

Ejercicio 5. Recordemos el procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ.

1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Gamma^+ &= \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n \end{aligned}$$

Demostrar los siguientes puntos:

a. Cada Γ_i es consistente.
b. Exactamente una de las fórmulas α y $\neg\alpha$ está en Γ^+ para cada fórmula α.
c. Todos los teoremas están en Γ^+.
d. Γ^+ es un conjunto maximal consistente.

a) ✓

b) ✓

c) Todos los teoremas están en Γ^+

Sea α_i teorema, sabemos que $\vdash \alpha_i$ y $\nvdash \alpha_i$. En particular, $\Gamma_i \vdash \alpha_i$ y $\Gamma_i \nvdash \alpha_i$

$$\Rightarrow \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} & \text{si } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \text{ consistente} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\alpha_i\} & \text{cc} \end{cases}$$

Como $\Gamma_i \vdash \alpha_i$ y $\Gamma_i \nvdash \neg\alpha_i \Rightarrow \Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$

O sea que siempre que haya un teorema va a entrar al conjunto y entonces a Γ^+.

d) Γ^+ es maximal consistente

Por 4b)

b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:

1. Para toda α, o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien ('o' exclusivo) $\neg\alpha \in \Gamma$.
2. Todos los axiomas de SP están en Γ.
3. Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.

Veamos que Γ^+ cumple 1, 2 y 3. Si esto pasa Γ^+ es MC.

1. Por definición, al crear Γ^+ en cada paso se elige a α o a $\neg\alpha$.
2. Probado en 2c. (α_i axioma, $\vdash$ axioma $\Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \alpha_i \Rightarrow \Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\alpha_i\}$)
3. Sea $\Gamma / \alpha \to \beta \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$. Veamos que $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ inconsistente.

$\Gamma \vdash \neg\alpha$ ó $\Gamma \vdash \beta$, sabemos que $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \nvdash \neg\alpha \therefore \Gamma \vdash \beta \Rightarrow$ si metemos $\neg\beta$

$[\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta]$
INCONSISTENTE

LUEGO: $\alpha_{i+1} = \beta \Rightarrow \Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta\}$ y $\Gamma \vdash \beta$

Ejercicio 6. Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

a. Si $\Gamma \models \alpha$ entonces para algún subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \alpha$.

b. Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

c. Si Γ es insatisfacible, entonces algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible.

Teorema (Compacidad)

Sea $\Gamma \subseteq$ FORM. Si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

$a \Rightarrow b$ / si $\Gamma \models \alpha \Rightarrow (\exists \Gamma_0 \subseteq \Gamma)[\Gamma_0 \models \alpha]$

qvq: Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es SAT $\Rightarrow$ Γ es SAT

ABS

Sea Γ / $\forall \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, Γ_0 es SAT, Supongo Γ no SAT

. SALDRÁ ALGÚN DÍA? NADIE LO SABE

Ejercicio 7. Sea α una fórmula que no es una tautología, y sea Γ el conjunto de todas las instanciaciones de α (por instancia de α nos referimos a reemplazar uniformemente las variables proposicionales de α por fórmulas arbitrarias). Demostrar que Γ es inconsistente.

qvq: $\exists \beta \,/\, \Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \nvdash \beta$

$\exists v \,/\, v \not\models \alpha$, Sea $v \,/\, v(p_0)=1,\ v(p_1)=0, \ldots, v(p_n)=1$

Puedo cambiar en $\bar{\alpha}$ todos los $p_i \,/\, v(p_i)=0$ por CONTRADICCIONES y los $p_j \,/\, v(p_j)=1$ por TAUT.

$\Rightarrow$ Como $\bar{\alpha} \in \Gamma$ y $\bar{\alpha}$ es CONTRADICCION $\Rightarrow$ Γ es no SAT.

Γ no SAT $\Leftrightarrow$ Γ inconsistente

Como SP es correcto y completo Γ es inconsistente]

Ejercicio 8. Sea β una fórmula fija y Γ un conjunto consistente, mostrar que si $\Gamma \nvdash \beta$ y $\Gamma \nvdash \neg\beta$, entonces existen Γ_1 y Γ_2 maximales consistentes, tales que $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$, y $\Gamma_1 \vdash \beta$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$.

Sea Γ / $\Gamma \nvdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$

Tomamos $\overline{\Gamma_1} = \Gamma \cup \{\beta\}$, $\Gamma_1 = \text{lindenbaum}(\overline{\Gamma_1})$

$\overline{\Gamma_2} = \Gamma \cup \{\neg\beta\}$, $\Gamma_2 = \text{lindenbaum}(\overline{\Gamma_2})$

qvq: $\text{CON}(\Gamma) \subseteq \text{CON}(\Gamma_1)$

Sea φ / $\Gamma \models \varphi$, $\text{i}\ v \models \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m \wedge \dots \Rightarrow v \models \varphi$

$\Gamma_1 = \Gamma \cup \Gamma_1^*$ $\quad v \models \varphi_1 \overset{?}{\Rightarrow} v \models \varphi$

$v \models \varphi_1 \Leftrightarrow v \models \Gamma \wedge v \models \Gamma_1^* \overset{v \models \Gamma}{\Rightarrow} v \models \varphi$] Γ_2 es análogo

Ejercicio 9. Demostrar que si Γ es un conjunto maximal consistente entonces $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

- $\Gamma \subseteq \text{CON}(\Gamma)$

Sale por definición. $\text{CON}(\Gamma)$ son todos los φ que evaluan verdad siempre que Γ evalua verdad. En particular todos los γ_i de Γ evaluan verdad cuando Γ evalua verdad

- $\text{CON}(\Gamma) \subseteq \Gamma$

qvq: $\nexists\ \varphi \,/\, v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$ y $\underline{\varphi \notin \Gamma}$

Sup que existe.

completitud fuerte Γ es M.C.

$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$, $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$ ABS!

Luego, no existe φ y $\text{CON}(\Gamma) \subseteq \Gamma$.

$\therefore\ \text{CON}(\Gamma) = \Gamma$ ⌋

Ejercicio 10. Dados $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿Es $\Gamma^\infty = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ satisfacible?

Esto sale como piña con COMPACIDAD.

Tomamos Γ_0 finito / $\Gamma_0 \subseteq \Gamma^\infty$

Este Γ_0 tiene un $MAX = \{i : \Gamma_i \in \Gamma_0\}$

Veamos que Γ_{MAX} SAT $\Rightarrow \Gamma_0$ SAT

$\boxed{\Gamma_i \subseteq \Gamma_{MAX} \; \forall \Gamma_i \in \Gamma_0}$ O sea, para satisfacer Γ_0 si o si tengo que satisfacer a los demás.

Por HIP Γ_{MAX} es SAT $\Rightarrow \Gamma_i$ es SAT $\forall \Gamma_i \in \Gamma_0 \Rightarrow \Gamma_0$ es SAT

$\Rightarrow$ Como cualquier Γ_0 finito $\subseteq \Gamma^\infty$ es SAT, por compacidad Γ^∞ es SAT$\rfloor$

Ejercicio 11. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ tales que $\alpha \to \neg\beta$ es una tautología. *Sugerencia*: usar el Teorema de Compacidad.

Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, por compacidad $\exists\, \Delta$ finito $\subseteq \Gamma$ / Δ es no SAT

Como Γ_1 y Γ_2 son SAT $\Rightarrow$ En Δ sí o sí hay fórmulas de Γ_1 y Γ_2

Sea $\Delta = \{ \overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}^{\in \Gamma_1}, \overbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}^{\in \Gamma_2} \}$

$\Rightarrow \overbrace{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}^{\alpha} \wedge \overbrace{\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m}^{\beta}$ CONTRADICCION

$\Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$ CONTRADICCION

$\Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$ TAUT

$\Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ TAUT

$\Leftrightarrow \alpha \to \neg\beta$ TAUT puede ser infinito

Ejercicio 13. Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ. Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

Quiero $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ con $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Gamma$ y $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ en TAUT

$\Rightarrow$ En lo mismo encontrar $\neg(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n)$ CONTRADICCION

$\Rightarrow$ o sea $\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n$ CONTRADICCION

Sea $\bar{\Gamma} / \neg\alpha \in \bar{\Gamma} \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$]

Por HIP sabemos que $\forall v \; \exists \alpha_i / v \models \alpha_i \Rightarrow v \not\models \neg\alpha_i$]

$\Rightarrow v \not\models \bar{\Gamma}$] Como esto es $\forall v$, $\bar{\Gamma}$ es no SAT.

$\bar{\Gamma}$ no SAT $\Rightarrow \exists \bar{\Gamma}_0 \overset{\text{finito}}{\subseteq} \bar{\Gamma}$ no SAT

$\bar{\Gamma}_0 = \{\neg\alpha_1, \ldots, \neg\alpha_n\}$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$

Si $\bar{\Gamma}_0$ es no SAT $\Rightarrow \neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n$ es CONTRADICCION

$\Rightarrow \neg(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n)$ es CONTRADICCION $\Rightarrow (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n)$ es TAUT]

Ejercicio 14. Sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología ó $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \eta$, entonces existe $\delta \in \Gamma$ tal que $\{\delta\} \models \eta$.

ALGUN DIA TE HAGO

O TAL VEZ NO ¯_(ツ)_/¯