Ejercicio 1. Sea γ una fórmula proposicional del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ tal que ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez. Demostrar que γ es una contingencia.

Inducción en complejidad:

CB:

$\varphi \in FORM$, $p \in PROP$, $\varphi = p$] contingencia porque $v(p) = 1 \Rightarrow v \models \varphi$
$v'(p) = 0 \Rightarrow v' \not\models \varphi$

PI:

1) $\varphi = \neg \psi$

qvq: $\exists v / v \not\models \varphi \Rightarrow v \models \neg\psi \Rightarrow v \not\models \psi$] $\exists$ por HI

qvq: $\exists v' / v' \not\models \varphi \Rightarrow v' \not\models \neg\psi \Rightarrow v' \models \psi$] $\exists$ por HI

2) $\varphi = \psi \rightarrow \gamma$

qvq: $\exists v / v \models \varphi \Rightarrow v \models \psi \rightarrow \gamma \Rightarrow \overset{\checkmark \text{ por HI}}{\boxed{v \models \gamma}}$ ó $v \not\models \psi$

qvq: $\exists v' / v' \not\models \varphi \Rightarrow v' \not\models \psi \rightarrow \gamma \Rightarrow v' \models \neg(\neg\psi \vee \gamma) \Rightarrow v' \models \psi \wedge \gamma$] Vale por (*)

(*) Como en phi no aparece la misma variable proposicional mas de una vez, entonces puedo elegir 2 valuaciones independientes que hagan verdad a psi y a gamma. Esas valuaciones existen por HI y ademas al no compartir variables proposicionales no se molestan entre si y entonces combinando las 2 valuaciones conseguimos la valuacion mega maestra que no satisface a phi.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario $+$. Sea U la $\mathcal{L}$-estructura que tiene como dominio los números naturales y el símbolo $+$ se interpreta como la suma usual. Probar que el conjunto de los números naturales que tienen resto 2 en la división por 3 es definible.

$U : \langle \mathbb{N}, +_{\mathbb{Z}} \rangle$

$\varphi(x) = (\exists y)(\exists z)\,[3*(y) = (x+z) \wedge \varphi_1(z)]$, $3*(x) = x+x+x$

$\varphi_0(x) = x+x = x$

$\varphi_1(x) = \underbrace{(\forall y, z)}\,[[\neg\varphi_0(y) \wedge \neg\varphi_0(z)] \to \neg(y+z=x)] \wedge \neg\varphi_0(x)$

K = clase de modelos cuyo universo es un conjunto de naturales que tienen resto 2 modulo 3.

$M \in K \Leftrightarrow M, v \models \varphi$

$M \models \varphi \Leftrightarrow M, v \models (\forall x)[2 \equiv 3(x)] \Leftrightarrow$ Para todo a $M \models 2 \equiv 3(a)$

$\Leftrightarrow$ Para todo a / $M, v[x \to a] \models (\exists y, z)\,[3*(y) = (a+z) \wedge \varphi_1(z)]$

$\tilde{v}$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, existen b y c / $M, v[x \to a, y \to b, z \to c] \models 3*(b) = (a+c) \wedge \varphi_1(c)$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, existen b y c / $M, \tilde{v} \models \varphi_1(c)$ y $M, \tilde{v} \models b+b+b = a+c$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, existen b y c, c vale 1 y vale $3 \cdot b = a+c$ (vale $3b = a+1$)

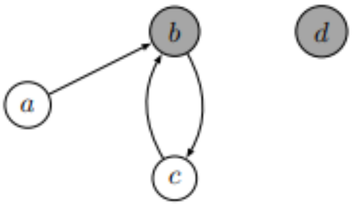
Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L} = \{G, B, E\}$ un lenguaje de primer orden, donde G y B son símbolos de relación unarios y E es un símbolo de relación binario. Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, se puede interpretar como un grafo con conjunto de aristas $E_{\mathcal{M}}$ y algunos vértices clasificados como tipo G (gris) o tipo B (blanco). Sea el sistema SQB que extiende la axiomatización SQ con las siguientes fórmulas:

B1 $(\forall x)(G(x) \vee B(x))$ O sos blanco o sos gris

B2 $(\forall x)(G(x) \leftrightarrow \neg B(x))$ No podes tener 2 colores

B3 $(\forall x)(\forall y)((E(x,y)) \to (G(x) \wedge B(y)) \vee (G(y) \wedge B(x)))$ Si estan relacionados, tienen colores distintos

Demuestre que SQB es correcto y no completo respecto a la siguiente estructura $\mathcal{M}$ (Nota: en el siguiente gráfico el color del nodo indica de qué tipo es, i.e. $G_{\mathcal{M}} = \{b, d\}$ y $B_{\mathcal{M}} = \{a, c\}$.)



Sea $\varphi \in FORM(\mathcal{L}) \,/\, \vdash_{SQB} \varphi \Rightarrow \{B_1, B_2, B_3\} \vdash_{SQ} \varphi \Rightarrow \{B_1, B_2, B_3\} \models \varphi$

q.v.q: $M \models \varphi$] correctitud SQB respecto M

Si puedo demostrar phi en SQB => phi es verdadero en M

Si $M \models \{B_1, B_2, B_3\} \Rightarrow M \models \varphi$

transitividad

$M, v \models B_1$?

$\Leftrightarrow M, v \models (\forall x)[G(x) \vee B(x)]$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, $M, v[x \to a] \models G(a)$ o $M, v[x \to a] \models B(a)$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, vale a es gris o a es blanco] ✓ MIRA EL MODELO

$M, v \models B_2 \iff M, v \models (\forall x)[G(x) \iff \neg B(x)]$

$\iff$ Para Todo a, $M, v[x \to a] \models G(a) \iff \neg B(x)$

$\iff$ Para Todo a, $M, v[x \to a] \models G(a)$ y $M, v[x \to a] \not\models B(a)$

ó $M, v[x \to a] \not\models G(a)$ y $M, v[x \to a] \models B(a)$

$\iff$ Para todo a, vale que a es gris y vale que a no es blanco. O vale que a es blanco y no es gris. (Verdadero mirando el modelo)

$M, v \models B_3 \iff M, v \models$ $(\forall x)(\forall y)((E(x, y)) \to (G(x) \wedge B(y)) \vee (G(y) \wedge B(x)))$

$\iff$ Para Todo a, b $M, \underbrace{v[x \to a, y \to b]}_{\tilde{v}} \not\models E(a,b)$ ó $M, \tilde{v} \models [G(a) \wedge B(b)] \vee [G(b) \wedge B(a)]$

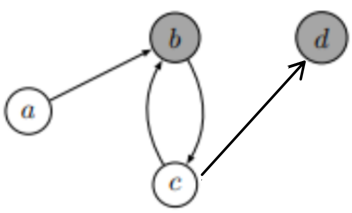
$\iff$ Para Todo a, b, No vale que a y b están conectados o vale que a y b tienen distinto color. (Verdadero mirando el modelo)

b) SQB no completo respecto a M. Hay verdades que no se pueden demostrar

1. Encontrar una formula que valga en el modelo, pero que no parezca deducirse de los axiomas.
2. Encontrar un modelo M', donde los axiomas valgan pero no la formula.
3. Como M' cumple los mismos axiomas que M, entonces si algo es verdad en M, deberia ser verdad en M'. Lo cual es mentira porque la formula la pensamos para que sea falsa.

1) $\varphi : (\exists x)[(\forall y)[\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x)]]$

2) M':



Veamos que los axiomas valen con este modelo.
Como no agregue nodos los axiomas B1 y B2 no se modifican y siguen valiendo.
Como la unica relacion que agregue fue entre nodos de distinto color, sigue valiendo que si 2 nodos estan conectados => son de distinto color

Supongo que SQB es completo con respecto a M. Entonces, M |= phi => {SB1, SB2, SB3} |-- phi. Por correctitud de SQ, {SB1, SB2, SB3} |= phi. Yo encontré un modelo M' |= {SB1,SB2,SB3}, entonces M' |= phi. Abs porque M' |= ¬phi.