Ejercicio 1. Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde f es un símbolo unario y g es binario:

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(n) = \sqrt{n}$, $g_I(n,m) = n + m$.

b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(n) = n^2$, $g_I(n,m) = n + m$, $c_I = 2$.

c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n,m) = n^2 - n$, $c_I = d_I = 0$.

a) No es apropiado porque $f_I(n) \notin \mathbb{N}$.

b) Tiene toda la pinta que anda ππ QQ.

c) FUNCA

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados. Cuando sea posible determinar si el enunciado es verdadero o falso en la interpretación correspondiente.

a. $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z((Q(z) \wedge P(x,z)) \wedge P(z,y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

Para todo par de 2 números, si $x < y \Rightarrow$ existe un racional $e \,/\, x < e < y$] Verdadero

b. $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y,x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x,y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un hombre libre.

Para todo día, existe un hombre libre cuyo nacimiento es ese día] Parece verdadero

c. $\forall x \forall y ((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x,y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x,y) = x + y$.

Para todo par de pares, su suma da impar] Falso

Ejercicio 3. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

φ_a a. Existen al menos dos elementos. $(\exists x)(\exists y)[x \neq y]$

φ_b b. Existen exactamente dos elementos. $(\exists x)(\exists y)[x \neq y \wedge (\nexists z)(x \neq z \wedge y \neq z)]$

φ_c c. Existen a lo sumo dos elementos. $\neg[\varphi_a \vee \varphi_b]$

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escribir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P. $\varphi_c \wedge (\exists x)[P(x)]$

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único. $(\forall x)[P(x) \rightarrow (\nexists y)(x \neq y)]$

f. Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único. $(\exists x)[P(x) \wedge (\nexists y)(x \neq y)]$

Ejercicio 4. Considerar un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Escribir una fórmula φ que cumpla $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es inyectiva pero no sobreyectiva. ¿Es φ satisfacible? ¿Es satisfacible por un modelo finito?

$\varphi : (\forall x_1, x_2)[f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2] \wedge (\exists y)(\forall x)[f(x) \neq x]$

$I: [C = \emptyset, F = \{f\}, P = \{=\}, U_I = \mathbb{N}, f_I(x) = 2 \cdot x]$ SAT

No se puede para un modelo finito porque al ir de un U finito a otro U finito si o si vas a tener una f sobreyectiva.

Ejercicio 5. Sea P un símbolo de relación unario y sea f un símbolo de función binario. Para cada una de las fórmulas $\forall x \forall y\ f(x, y) = x$, $\exists x \forall y\ f(x, y) = y$, $\exists x(P(x) \wedge \forall y\ P(f(x, y)))$ hallar una interpretación que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

$U_I = \mathbb{N}$, $P_I(x) = x > 0$, no SAT: $f_I(x,y) = x+y$, SAT: $f_I(x,y) = x$

$U_{I_2} = \mathbb{N}$, $P_{I_2}(x) = x > 0$, no SAT: $f_{I_2}(x,y) = y+1$, SAT: $f_{I_2}(x,y) = x+y$] $(x=0)$

$U_{I_3} = \mathbb{N}$, $P_{I_3}(x) = x$ par, no SAT: $f_{I_3}(x,y) = x+y$, SAT: $f_{I_3}(x,y) = 2.(x+y)$

Ejercicio 6. Decimos que un elemento e del universo de una interpretación $\mathcal{I}$ es *distinguible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{I} \models \varphi(x)[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Dar un ejemplo de un lenguaje sin constantes y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguible.

Sea $I = \langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$

$\varphi_0(x) = (\nexists y)[y < x]$

$\varphi_1(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge (\forall y)[y < x \rightarrow \varphi_0(y)]$

$\varphi_i(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge \dots \wedge \neg\varphi_{i-1}(x) \wedge (\forall y)[y < x \rightarrow \varphi_0(y) \vee \dots \vee \varphi_{i-1}(y)]$

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$$

donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

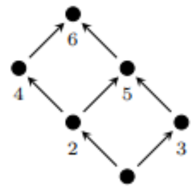
$I_1)$ $\varphi_1(x) = (\forall y)[y < x \rightarrow \varphi_0(x)]$

$x < y = (\exists z)[x + z = y \wedge x \neq y]$

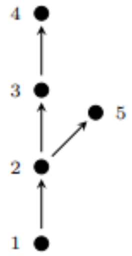
$\varphi_0(x) = (\forall y)[x + y = y]$

$I_2)$ $\varphi_1(x) = (\forall y)[x \cdot y = y]$

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,



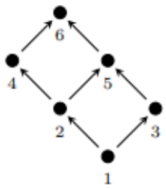
a)



b)

Observación: Estos esquemas se conocen como "Diagramas de Hasse" y la relación que describen es la menor relación reflexiva y transitiva que contiene a los pares explicitados en el diagrama. Por ejemplo, en a), se tienen los pares $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,6)$ entre otros aunque no estén explícitamente en el esquema.

a)



$\varphi_1(x) = (\forall y)[x \leq y]$ Soy menor o igual a todos

$\varphi_6(x) = (\forall y)[y \leq x]$ Todos son menores o iguales a mi

$\varphi_3(x) = (\forall y)[y \leq x \to \varphi_1(x) \vee y = x] \wedge (\exists x')(\exists y)(\exists z)[x' \neq y \neq z$

$\wedge\ x \leq x', y, z$

$\wedge\ (\nexists a)[a \neq x, x', y, z \wedge x \leq a]]$

Los unicos menores a X son 1 y si mismo.

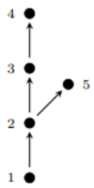
X es menor o igual a exactamente 3 elementos.

$\varphi_5(x) = \neg\varphi_6(x) \wedge \neg\varphi_3(x) \wedge (\forall y)[\varphi_3(y) \to y \leq x]$ No soy 6 ni 3 y soy mayor o igual a 3.

$\varphi_4(x) = \neg\varphi_5(x) \wedge \neg\varphi_6(x) \wedge (\forall y)[x \leq y \to x = y \vee \varphi_6(y)]$ No soy 5 ni 6 y mi unico mayor o igual es 6 o yo mismo.

$\varphi_2(x) = \neg\varphi_1(x) \wedge \neg\varphi_3(x) \wedge \neg\varphi_4(x) \wedge \neg\varphi_5(x) \wedge \neg\varphi_6(x)$ No soy nadie mas que el 2.

b)



$\varphi_1(x) = (\forall y)[x \leq y]$ Soy menor o igual a todos

$\varphi_2(x) = \neg\varphi_1(x) \wedge (\forall y)[y \leq x \to x = y \vee \varphi_1(x)]$ No soy 1 y solo son menores o iguales a a mi 1 y yo mismo

$\varphi_3(x) = (\exists y)[x \neq y \wedge x \leq y] \wedge \neg\varphi_1(x) \wedge \neg\varphi_2(x)$ No soy 1 ni 2 y tengo algun mayor a mi

$\varphi_4(x) = (\nexists y)[x \neq y \wedge x \leq y] \wedge (\forall z)[\varphi_3(z) \to z \leq x]$ Soy el mayor y 3 es menor o igual a mi

$\varphi_5(x) = \neg\varphi_1(x) \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_4(x)$ Soy distinto a todos los demas

Ejercicio 9. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n+1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

$\varphi_n(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge \dots \wedge \neg\varphi_{n-1}(x)]$

Ejercicio 10. Dada una interpretación $\mathcal{I}$ con universo A, decimos que una relación $R \subseteq A^n$ es *expresable* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ con n variables libres tal que para toda valuacín v cumpla $\mathcal{I} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[v]$ sii $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in R$. Demostrar que las siguientes relaciones son expresables.

a. $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, *, = \rangle$ con $*$ el producto de naturales.
   $R_1 = \{(n,m) : n$ divide a $m\}$. $\varphi_{R_1}(x,y) = (\exists z)[x.z = y]$
   $P_1 = \{n : n$ es primo$\}$. $\varphi_{P_1}(x) = (\forall y)[\varphi_{R_1}(y,x) \to y = 1 \vee y = x]$

b. $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, +, =, 0, 1 \rangle$ con $+$ la suma de naturales.
   $R_2 = \{(n,m) : n < m\}$. $\varphi_{R_2}(x,y) = (\exists z)[x + z = y \wedge x \neq y]$

c. $\mathcal{I}_3 = \langle L, \circ, = \rangle$ con L el conjunto de todas las listas, $\circ$ la concatenación de listas.
   $R_3 = \{(a,b) : a$ es sublista de $b\}$. $\varphi_{R_3}(a,b) = (\exists l)(\exists l')[l \circ a \circ l' = b]$

Ejercicio 11. Decimos que una clase de modelos K es *definible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una sentencia φ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ y valuación v cumpla $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{I} \in \mathsf{K}$. Demostrar que las siguientes clases de modelos son definibles con su respectivo lenguaje.

a. $\mathcal{L}_0 = \{=\}$. $\mathsf{K}_0 = \emptyset$. $\varphi : (\nexists x)[x = x]$

b. $\mathcal{L}_1 = \{=\}$. $\mathsf{K}_1 = \{$todas las interpretaciones$\}$. $\varphi : (\forall x)[x = x]$

c. $\mathcal{L}_2 = \{P, =\}$ con P predicado binario. $\mathsf{K}_2 = \{\mathcal{I} : P^{\mathcal{I}}$ es reflexivo y transitivo$\}$. $\varphi : (\forall x)[P(x,x)] \wedge (\forall x,y,z)[P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)]$

d. $\mathcal{L}_3 = \{f, g, =\}$ con f, g funciones unarias. $\mathsf{K}_3 = \{\mathcal{I} : \operatorname{Im} f^{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{Im} g^{\mathcal{I}}\}$. $\varphi : (\forall x,y)[f(x) = y \to (\exists x')[g(x') = y]]$