Ejercicio 1. Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$f_1'(x) \overset{\text{computable}}{=} f_1(x,x)$$

$$f_1'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow \\ 0 & cc \end{cases}$$

Supongamos que f1' es computable. Sea P el programa que la computa. $(\Psi_P(x) = f_1(x))$

P':

$Z_1 \leftarrow \Psi_P(X_1)$

$[A]$ if $Z_1 = 1$ goto A

$Y \leftarrow 0$

$$\Psi_{P'}(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \\ 0 & cc \end{cases}$$

$\Psi_{P'}(x)$ se puede indefinir? $\Psi_{P'}(x)\uparrow \Leftrightarrow \Psi_P(x) = 1 \Leftrightarrow \Phi_x(x)\downarrow$

Sea $e = \#P'$: $\Phi_e(x)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_x(x)\downarrow$ (Debería valer para todo x)

Veamos que para si $x = e$: $\Phi_e(e)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_e(e)\downarrow$ ABS! $\Psi_{P'}$ no se puede indefinir.

$\Psi_{P'}(x)$ se puede definir? $\Psi_{P'}(x)\downarrow \Leftrightarrow \Psi_{P'}(x) = 0 \Leftrightarrow \Psi_P(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_x(x)\uparrow$

Sea $e = \#P'$: $\Phi_e(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi_x(x)\uparrow \overset{x=e}{\Longrightarrow} \Phi_e(e) = 0 \Leftrightarrow \Phi_e(e)\uparrow$ ABS! $\Psi_{P'}$ no se puede definir

$\Rightarrow \Psi_{P'}(x)$ no es computable $\Rightarrow \Psi_P(x)$ no es computable $\Rightarrow f_1'$ no es computable $\Rightarrow f_1$ no es computable.

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y) = 0 \\ 0 & cc \end{cases}$, $f_2'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x) = 0 \\ 0 & cc \end{cases}$

cc: $\Phi_x(x)\uparrow$ o $\Phi_x(x) \neq 0$

hora de ahorrar tiempo y hojas virtuales

f_2' computable, P computa f_2' | P'

$Z_1 \leftarrow \Psi_P(X_1)$

loop $(Z_1 = 1)$

$Y \leftarrow 0$

$\Psi_{P'}(x)\uparrow \iff \Psi_P(x)=1 \iff \Phi_x(x)=0$

$e=\#P,\ \Phi_e(x)\uparrow \iff \Phi_x(x)=0 \overset{x=e}{\Rightarrow} \Phi_e(e)\uparrow \iff \Phi_e(e)=0\ ]$ ABS!

$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Psi_{P'}(x)=0 \iff \Phi_x(x)\neq 0 \vee \Phi_x(x)\uparrow$

VALE 0 — está definido a Izq

$e=\#P,\ \Phi_e(x)=0 \iff \Phi_x(x)\neq 0 \vee \Phi_x(x)\uparrow \overset{x=e}{\Rightarrow} \Phi_e(e)=0 \iff \Phi_e(e)\cancel{\neq 0} \vee \cancel{\Phi_e(e)\uparrow}\ ]$ ABS!

$\Psi_{P'}(x)$ no computable $\Rightarrow \ldots \Rightarrow f_2$ no computable]

---

queda implícito

$f_3(x,y,z)=\begin{cases}1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x(y)>z\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$, $f_3'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } \cancel{\Phi_x(x)\downarrow} \text{ y } \Phi_x(x)>x\\ 0 & \Phi_x(x)\uparrow \text{ o } \Phi_x(x)\leq x\end{cases}$

f_3' computable, P computa a f_3': $P')$ $z_1 \leftarrow \Psi_P(x_1)$
loop $(z_1=1)$
$y \leftarrow x_1+1$

$\Psi_{P'}(x)\uparrow \iff \Psi_P(x)=1 \iff \Phi_x(x)>x$, $e=\#P'$, $\Phi_e(e)\uparrow \iff \Phi_e(e)>e\ ]$ ABS!

$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Psi_{P'}(x)=x+1 \iff \Psi_P(x)=0 \iff \Phi_x(x)\uparrow \vee \Phi_x(x)\leq x$, $e=\#P'$,

$\Phi_e(e)=e+1 \iff \Phi_e(e)\uparrow$ o $\Phi_e(e)\leq e\ ]$ ABS!

$\Rightarrow$ NO COMPUTABLE]

$f_4(x)=\begin{cases}1 & \Phi_x(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x(x)\neq x\\ 0 & \text{c.c.}\end{cases}$

$\Phi_x(x)\uparrow$ o $\Phi_x(x)=x$

f_4 computable, P el programa. P': loop $(\Psi_P(x_1)=1)$, $y \leftarrow x+1$

$\Psi_{P'}(x)\uparrow \iff \Psi_P(x)=1 \iff \Phi_x(x)\downarrow$ y $\Phi_x(x)=x$, $e=\#P$, $\Phi_e(e)\uparrow \iff \Phi_e(e)\downarrow \wedge \ldots\ ]$ ABS!

$\Psi_{P'}(x)\downarrow \iff \Psi_{P'}(x)=x+1 \iff \Psi_P(x)=0 \iff \Phi_x(x)\uparrow$ o $\Phi_x(x)=x$, $e=\#P$, $\Phi_e(e)=e+1 \iff \Phi_e(e)\uparrow$ o $\Phi_e(e)=e\ ]$ ABS!

NO COMPUTABLE]

Ejercicio 2. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\uparrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$f_1(x,y) = 1 - g_1(x,y)$ Si g1 fuera computable => podria calcular f1 de forma trivial (y computable) y eso es un absurdo por lo probado en el 1.

$$g_2(x,y,z,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(\overset{y}{\cancel{z}})\downarrow \text{ y } \underset{\text{ID}}{\Phi_y^{(1)}}(\overset{z}{\cancel{w}})\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(\overset{y}{\cancel{z}}) > \underset{\text{ID}}{\Phi_y^{(1)}}(\overset{z}{\cancel{w}}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

DIVINO (ESTÁ IGUAL A f_3)

$$f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x(y) > z \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_3(x,y,z) = g_2'(x,y,z) \overset{\text{computable}}{=} g_2(x, \overset{\neq \text{ID}}{e}, y, z) \rightarrow g_2'(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \overset{\text{SIEMPRE}}{\cancel{\Phi_e(z)\downarrow}} \text{ y } \Phi_x(y) > \overset{z}{\cancel{\Phi_e(z)}} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$g_3(x,y,z) = \begin{cases} \overset{x}{\cancel{z}} + 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(\overset{x}{\cancel{y}})\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(\overset{x}{\cancel{y}}) \neq \overset{x}{\cancel{z}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

casi igual a f_4

$$f_4(x) = g_3'(x) \overset{\text{COMPUTABLE}}{=} \alpha(\alpha(g_3(x,x,x))) \rightarrow g_3'(x) = \begin{cases} \overbrace{\alpha(\alpha(x+1))}^{1} & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x(x) \neq x \\ \underbrace{\alpha(\alpha(0))}_{0} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$g_4(x,y,z) = \begin{cases} (\underset{\text{cte } 1}{\Phi_x^{(1)}} \circ \Phi_{\underset{x}{\cancel{y}}}^{(1)})(\overset{y}{\cancel{z}}) & \text{si } \Phi_{\underset{x}{\cancel{y}}}^{(1)}(\overset{y}{\cancel{z}})\downarrow \text{ y } (\underset{\text{cte } 1}{\Phi_x^{(1)}} \circ \Phi_{\underset{x}{\cancel{y}}}^{(1)})(\overset{y}{\cancel{z}})\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_1(x,y) = g_4'(x,y) = g_4(\overset{\text{cte } 1}{e}, x, y) \rightarrow g_4'(x,y) = \begin{cases} \overset{1}{\cancel{1(\Phi_x(y))}} & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \overset{\text{SIEMPRE}}{\cancel{1(\Phi_x(y))\downarrow}} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Probar que la siguiente función no es computable reduciendo la función f_4 del Ej. 1.

$$g_3'(x,y,z) = \begin{cases} \cancel{z} & \text{si } \Phi_x^{(1)}(\cancel{y}) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(\cancel{y}) \neq \cancel{z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x(x) \neq x \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Sugerencia: Revisar que la reducción maneje correctamente el caso $f_4(0)$.

Esto va a salir igual que antes, pero tiene la sutileza de que cuando x = 0 se rompe porque quedaria g3'(0,0,0) = 0 != f4(0). Lo importante es que se rompe en un numero finito de casos y eso lo podemos arreglar a mano poniendo guardas.
Ojo al piojo, no seas gil y no intentes hacer esto con infinitos casos que la vas a pasar mal.

$$g_3''(x) = \alpha(\alpha(g_3'(x))) \Rightarrow f_4(x) = \begin{cases} g_3''(x) & \text{si } x > 0 \\ f_4(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Decimos que una función parcial computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{Dom} f$. Probar que existe una función parcial computable que no es extensible (*Sugerencia*: considerar una función tal que con su extensión se podría computar alguna variante del halting problem). Preparate porque f y h son los galerasos más galerasos de la historia de los galerasos.

Sea $f(x) = \min_t STP(x,x,t)$ Supongamos que f es extensible

Sea $h(x) = STP(x,x,f(x))$
- si $\Phi_x(x)\downarrow \Rightarrow h(x) = 1$ (porque $f(x)$ nos decía en que paso terminaba)
- si $\Phi_x(x)\uparrow \Rightarrow h(x)\uparrow$ (porque se indefine $f(x)$)

Sea $g(x)$ la extensión de $f(x)$, $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)\downarrow \\ \text{fruta} & \text{si } f(x)\uparrow \\ \text{random} & \end{cases}$

$h'(x) = STP(x,x,g(x))$
- si $\Phi_x(x)\downarrow \Rightarrow h(x) = 1$ (porque $f(x)$ nos decía en que paso terminaba)
- si $\Phi_x(x)\uparrow \Rightarrow h(x) = 0$ (porque $g(x)$ me tiró algún valor fruta y $STP(x,x,*) = 0$ porque $\Phi_x(x)\uparrow$)

A mi me suena que h' es halt. Vos fijate a que te suena señor (o señora) estudiante de computabilidad.

∴ f no es extensible

Ejercicio 5. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1 y usando el teorema del parámetro, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Halt}(1337, x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Voy a tratar de reducirla a halt, es decir queremos h P.C./

$\mathrm{halt}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

$\mathrm{halt}(x) = g_1(h(x))$

Sea $h(x,u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & \text{cc} \end{cases}$, como h es P.C. $\Rightarrow \exists e / \Phi_e(x,u) = h(x,u)$

$\overset{T.P.}{\Rightarrow} \exists s / \Phi_{s(u,e)}(x) = \Phi_e(x,u)$

$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(1337)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \Leftrightarrow g_1(s(u,e)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{s(u,e)}(1337)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

$g_1(s(u,e)) = 1 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(1337)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_e(x,u)\downarrow \Leftrightarrow h(x,u)\downarrow \Leftrightarrow h(x,u) = 1 \Leftrightarrow \Phi_u(u)\downarrow$

$g_1(s(u,e)) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(1337)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_e(x,u)\uparrow \Leftrightarrow h(x,u)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_u(u)\uparrow$

$\Rightarrow g_1(s(u,e)) = \underbrace{\begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}}_{\mathrm{Halt}(u)}$

Veamos que g1 no es computable: Supongamos que lo fuera, como S es P.C. y g1 es P.C. => su composicion debería ser parcial computable. Pero vimos que su composicion nos da Halt, que es no computable. Entonces tenemos un absurdo que provino de suponer que g1 era computable.

$$g_2(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Longrightarrow f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Voy a intentar reducir a f_3. Sea i el número de programa que computa la identidad $\Rightarrow$

$$g_2(x,i,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z)\downarrow \text{ y } \cancel{\Phi_i(z)\downarrow} \text{ y } \Phi_x(z) > \overset{z}{\cancel{\Phi_i(z)}} \\ 0 & cc \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x(z) > z \\ 0 & cc \end{cases}$$

TRUE

quiero ahora una h P.C. / $f_3(x,y,z) = \underline{g_2(h(x), i, z)}$, Sea h:

$$h(x,u) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & cc \end{cases}$$, Como h es P.C. $\Rightarrow \exists e / \Phi_e(x,u) = h(x,u)$

$\overset{T.P.}{\Rightarrow} \exists s$ P.R. / $\Phi_{s(u,e)}(x) = \Phi_e(x,u)$

$$g_2(x,i,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x(z) > z \\ 0 & cc \end{cases} \Leftrightarrow g(s(u,e), i, z) = \begin{cases} 1 & \Phi_{s(u,e)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_{s(u,e)}(z) > z \\ 0 & cc \end{cases}$$

$g_2(s(u,e), i, z) = 1 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(z) > z \Leftrightarrow \Phi_e(z,u) > z \Leftrightarrow h(z,u) > z \Leftrightarrow \Phi_u(u)\downarrow$

$g_2(s(u,e), i, z) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(z)\uparrow$ o $\cancel{\Phi_{s(u,e)} \leq z}$ $\Leftrightarrow \Phi_e(z,u)\uparrow \Leftrightarrow h(z,u)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_u(u)\uparrow$

FALSO

por como definimos a e no puede pasar lo primero

$$g_2(s(u,e), i, z) = \left.\begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ 0 & cc \end{cases}\right] \text{Halt}(u)$$

Con el mismo cuentito que antes podes decir que g2 no es computable. Por ahi te diste cuenta, sin querer reducí a Halt(u) cuando quería reducir a f3. Vamos a probar de nuevo a ver si puedo llegar a f3. Volvamos a definir la h

$$g_2(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(z) > \Phi_y^{(1)}(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Longrightarrow f_3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_2(x,i,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(z)\downarrow \text{ y } \Phi_x(z) > z \\ 0 & cc \end{cases}$$ Sea h:

$$h(x,u,v) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \Phi_u(v) \overset{?}{>} x \\ \uparrow & cc \end{cases}$$, $\exists e / \Phi_e(x,u,v) = h(x,u,v) \overset{T.P.}{\Rightarrow} \exists s$ P.R / $\Phi_{s(u,v,e)}(x) = \Phi_e(x,u,v)$

$$g_2(s(u,v,e), i, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{s(u,v,e)}(z)\downarrow \text{ y } \Phi_{s(u,v,e)}(z) > z \\ 0 & cc \end{cases}$$

$g_2(s(u,v,e), i, z) = 1 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,v,e)}(z) > z \Leftrightarrow \Phi_e(z,u,v) > z \Leftrightarrow h(z,u,v) > z \Leftrightarrow \Phi_u(v) > z$

FALSO

$g_2(s(u,v,e), i, z) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\Phi_{s(u,v,e)}(z) \leq z}$ o $\Phi_{s(u,v,e)}(z)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_e(z,u,v)\uparrow \Leftrightarrow h(z,u,v)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_u(v)\uparrow$ o $\Phi_u(v) \leq z$

$\Rightarrow g_2(s(u,v,e),i,z) = \underbrace{\begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_u(v) > z \\ 0 & cc \end{cases}}_{} \quad f_3(u,v,z)$

Mismo textito de siempre y probamos que g2 no es computable

$$g_3(x) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ es la constante } 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vamos hacia Halt(x)

queremos $Halt(x) = g_3(h(x))$, Sea $h /$

$h(x,u) = \begin{cases} 7 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & cc \end{cases} \Rightarrow \exists e / h(x,u) = \Phi_e(x,u) \overset{T.P.}{\Rightarrow} \exists s / \Phi_e(x,u) \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(x)$

$g_3(s(u,e)) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_{s(u,e)}^{(1)} \text{ es cte } 7 \\ 0 & cc \end{cases}$

$g_3(s(u,e)) = 13 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(x) = 7 \ \forall x \Leftrightarrow \Phi_e(x,u) = 7 \ \forall x \Leftrightarrow h(x,u) = 7 \ \forall x \Leftrightarrow \Phi_u(u)\downarrow$

$g_3(s(u,e)) = 0 \Leftrightarrow \exists x \ \Phi_{s(u,e)}(x) \not\simeq 7 \Leftrightarrow \exists x \ \Phi_e(x,u) \not\simeq 7 \Leftrightarrow \exists x \ h(x,u) \neq 7 \Leftrightarrow h(x,u)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_u(u)\uparrow$

$g_3(s(u,e)) = \underbrace{\begin{cases} 13 & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ 0 & cc \end{cases}}_{} \quad 13 \cdot Halt(u)$

Mismo textito para demostrar que g3 no es computable. Detalle menor, reducimos a H'(u)=13*Halt(u), eso no es problema porque es facil probar que H' tampoco es computable.

$$g_4(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \neq \Phi_y^{(1)}(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Rightarrow f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(x) \neq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Reducimos a f_4, primero vamos a reescribirla: $f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \text{ y } \Phi_x(x) - x \neq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$

$g_4(x,0) = \begin{cases} 1 & \Phi_x(0)\downarrow \text{ y } \overset{TRUE}{\cancel{\Phi_0(x)\downarrow}} \text{ y } \Phi_x(0) \neq \overset{0}{\cancel{\Phi_0(x)}} \\ 0 & cc \end{cases} = \begin{cases} 1 & \Phi_x(0)\downarrow \text{ y } \Phi_x(0) \neq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$

queremos $h / f_4(x) = g_4(h(x), 0)$

Sea h: $h(x,u) = \begin{cases} 1 & \Phi_u(u) - u \neq 0 \text{ y } \Phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & cc \end{cases}$ $\Rightarrow \exists e \,/\, h(x,u) = \Phi_e(x,u) \overset{T.P.}{\Rightarrow} \exists s \,/\, \Phi_e(x,u) = \Phi_{s(u,e)}(x)$

$$g_4(s(u,e),0) = \begin{cases} 1 & \Phi_{s(u,e)}(0)\downarrow \text{ y } \Phi_{s(u,e)}(0) \neq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$g_4(s(u,e),0) = 1 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(0)\downarrow \text{ y } \Phi_{s(u,e)}(0) \neq 0 \Leftrightarrow \Phi_e(0,u)\downarrow \text{ y } \Phi_e(0,u) \neq 0 \Leftrightarrow h(0,u)\downarrow \text{ y } h(0,u) \neq 0 \Leftrightarrow h(0,u) = 1 \Leftrightarrow \Phi_u(u) - u \neq 0 \text{ y } \Phi_u(u)\downarrow$

$g_4(s(u,e),0) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{s(u,e)}(0) = 0 \text{ o } \Phi_{s(u,e)}(0)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_e(0,u) = 0 \text{ o } \Phi_e(0,u)\uparrow \Leftrightarrow \overset{\text{FALSO}}{\cancel{h(0,u) = 0}} \text{ o } h(0,u)\uparrow \Leftrightarrow \Phi_u(u) - u = 0 \text{ o } \Phi_u(u)\uparrow$

$$g_4(s(u,e),0) = \left.\begin{cases} 1 & \Phi_u(u)\downarrow \text{ y } \Phi_u(u) - u \neq 0 \\ 0 & cc \end{cases}\right] f_4(u)$$

Metes el textito de siempre suponiendo a g4 computable y ves que podes conseguir f4. Bello absurdo => g4 no computable.

Ejercicio 6. Demostrar que existe un programa p tal que $\Psi_p^{(1)}(x)\downarrow$ si y sólo si $x = \#p$.

Sea $g(u,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = u \\ \uparrow & \text{cc} \end{cases}$ (g es parcial computable)

recursión

$\Rightarrow \exists e \,/\, \Phi_e(x) = g(e,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e \\ \uparrow & \text{cc} \end{cases}$] lo que queríamos

Ejercicio 7. Demostrar, usando el teorema de la recursión, que las siguientes funciones no son computables:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) > x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} \Phi_x^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\operatorname{Dom} \Phi_x^{(1)}| = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$h_1'(u,y) = \begin{cases} u & \text{si } h_1(u) = 0 \\ u+1 & \text{cc} \end{cases} \xRightarrow{\text{recursión}} \Phi_e(y) = \begin{cases} e & \text{si } h_1(e) = 0 \\ e+1 & \text{cc} \end{cases}$ $e \notin \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)}$

$e \in \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)} \Leftrightarrow h_1(e) = 0 \Leftrightarrow e \notin \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)}$] ABS!

$e \notin \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)} \Leftrightarrow h_1(e) = 1 \Leftrightarrow e \in \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)}$] ABS!

$h_2'(u,y) = \begin{cases} u & \text{si } h_2(u,y) = 1 \\ u+1 & \text{cc} \end{cases} \xRightarrow{\text{recursión}} \Phi_e(y) = \begin{cases} e & \text{si } \Phi_e(y)\downarrow \text{ y } \Phi_e(y) > e \\ e+1 & \text{cc} \end{cases}$

$\Phi_e(y) = e \Leftrightarrow \Phi_e(y)\downarrow$ y $\Phi_e(y) > e$] ABS!

$\Phi_e(y) = e+1 \Leftrightarrow \Phi_e(y)\uparrow$ o $\Phi_e(y) \leq e$] ABS!

$h_3'(u,y) = \begin{cases} y & \text{si } h_3(u,y) = 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases} \xRightarrow{\text{recursión}} \Phi_e(y) = \begin{cases} y & \text{si } \operatorname{Im} \Phi_e^{(1)} \text{ finita} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

$\Phi_e(y)$ tiene imagen $\infty \Leftrightarrow \Phi_e(y)$ tiene imagen finita] ABS!

ANÁLOGO] ABS!

$h_4'(u,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_4(u,y) = 0 \text{ y } y < u \\ \uparrow & \text{si } h_4(u,y) = 0 \text{ y } y \geq u \\ 0 & \text{si } h_4(u,y) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{recursión}} \Phi_e(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } h_4(e,y) = 0 \text{ y } y < e \\ \uparrow & \text{si } h_4(e,y) = 0 \text{ y } y \geq e \\ 0 & \text{si } h_4(e,y) = 1 \end{cases}$

$|\operatorname{Dom} \Phi_e(y)| = e \Leftrightarrow h(e,y) = 0 \Leftrightarrow |\operatorname{Dom} \Phi_e(y)| \neq e$] ABS!

$|\operatorname{Dom} \Phi_e(y)| = \infty \Leftrightarrow h(e,y) = 1 \Leftrightarrow |\operatorname{Dom} \Phi_e(y)| = e$] ABS!