MIGELI, JUAN PABLO

LU: 424/19

LOGICA 2°P

HOJA N° 1

FECHA 19/11/2021

11) Veamos que SIP es correcto:

Sea $\varphi \in FORM$ / $\vdash_{SIP} \varphi$

corrección fuerte SQ

$\Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \vdash_{SQ} \varphi \Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \models \varphi$

Nosotros queremos probar $\vdash_{SIP} \varphi \Rightarrow M \models \varphi$.

Si pudiéramos probar $M \models \{A_1, A_2, A_3\}$, como $\{A_1, A_2, A_3\} \models \varphi$, tendríamos que:

$M \models \varphi$ por transitividad.

Veamos entonces $M \models \{A_1, A_2, A_3\}$:

$M \models \{A_1, A_2, A_3\} \Leftrightarrow M \models A_1$ y $M \models A_2$ y $M \models A_3$

$M, v \models A_1$?

Aclaración: siempre que diga "Para todo «letra»" o "Existe «letra»" esa letra está confinada al universo de M, se me olvidó escribirlo en su momento

$M, v \models A_1 \Leftrightarrow M, v \models \neg \exists x (\forall y (\neg (S(y) = x)))$

$\Leftrightarrow$ No existe a tal que $M, v[x \to a] \models \forall y (\neg (S(y) = a)))$

$\Leftrightarrow$ No existe a tal que para todo b $M, v[x \to a, y \to b] \models \neg (S(b) = a)$

$\Leftrightarrow$ No existe a tal que para todo b no vale que el sucesor de b sea igual a a.

Dicho de otra forma (para mi un toque más claro)

$\Leftrightarrow$ No existe a tal que para todo b vale que el sucesor de b es distinto a a.

Esto es super satisfecho por $\mathbb{Z}$ ya que todos los elementos tienen un predecesor.

$\Rightarrow M \models A_1$]

NOTA

$M, v \models A_2$?

$M, v \models A_2 \Leftrightarrow M, v \models (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg P(S(x)))$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, $M, v[x \to a] \models P(a) \rightarrow \neg(P(S(a)))$, $v[x \to a] = v'$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, $M, v' \models \neg P(a)$ o $M, v' \models \neg P(S(a))$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, vale que a es impar o su sucesor es impar.

Es fácil ver que $\mathbb{Z}$ satisface esto.] $\Rightarrow M \models A_2$]

$M, v \models A_3$?

$M, v \models A_3 \Leftrightarrow M, v \models \forall x \forall y \, (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, b $M, v[x \to a, y \to b] \models S(a) = S(b) \rightarrow a = b$, $v' = v[x \to a, y \to b]$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, b $M, v' \models \neg(S(a) = S(b))$ o $M, v' \models a = b$

$\Leftrightarrow$ Para todo a, b vale que el sucesor de a es distinto al sucesor de b o a es igual a b.

$\mathbb{Z}$ satisface esto ya que si no vale la segunda parte $(a=b)$, entonces si o si el sucesor de esos 2 números distintos va a ser diferente.] $\Rightarrow M \models A_3$

Vimos que $M \models A_1$, $M \models A_2$ y $M \models A_3 \Rightarrow M \models \{A_1, A_2, A_3\}$

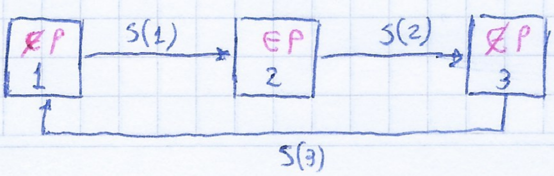
Luego, por lo ya planteado, $M \models \varphi$] $\therefore$ SIP es correcto con respecto a M.

Veamos ahora que SIP no es completo respecto a M.

Sea $\bar{\varphi} = \forall x (\neg P(x) \rightarrow P(S(x)))$, $\bar{\varphi}$ se interpreta como: "si x es impar entonces su sucesor es par"

Tomamos $M' : \left\langle \{1, 2, 3\},\ S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases},\ P(x) = x \% 2 = 0 \right\rangle$

Para verlo de forma gráfica:



NOTA

MICELI, JUAN PABLO
LU: 424/19

LOGICA 2°P

Podemos ver que $M' \not\models \overline{\varphi}$ ya que $S(3) = 1$ y ~~dado~~ que 3 es impar pero su sucesor no es par, cosa pedida por $\overline{\varphi}$.

Además, veamos que $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$

$M' \models A_1$?

$\Leftrightarrow$ (Re copio lo obtenido para correctitud) No existe $a \in |M'|$ tal que para todo $b \in |M'|$ vale que el sucesor de b es distinto a a.

M' satisface esto ya que los 3 elementos tienen un predecesor

$M' \models A_2$?

$\Leftrightarrow$ Para todo $a \in |M'|$ vale que a es impar o su sucesor es impar.

Veamos elemento a elemento:

$\boxed{1}$ es impar ✓

$\boxed{2}$ su sucesor es impar ✓

$\boxed{3}$ es impar ✓

$\Rightarrow M' \models A_2$

$M' \models A_3$?

$\Leftrightarrow$ Para todo $a, b \in |M'|$ vale que el sucesor de a es distinto al sucesor de b o a es igual a b.

M' satisface A_3 porque ningún elemento tiene 2 predecesores.

$\Rightarrow M' \models A_3$. Luego $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$

NOTA

Supongamos ahora que SIP es completo respecto a M. Entonces $M \models \varphi \Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \vdash \varphi$.

Si tomamos a φ como $\bar{\varphi}$, como vimos que $M \models \bar{\varphi}$ (me acabo de dar cuenta que en realidad no había dicho antes que $M \models \bar{\varphi}$, pero es super trivial, perdonadmeeee ;;)

(guiño guiño)

Como decía, vimos que $M \models \bar{\varphi}$, entonces como SIP es completo respecto a M, $\{A_1, A_2, A_3\} \vdash \bar{\varphi}$. Por corrección fuerte de SQ, $\{A_1, A_2, A_3\} \models \bar{\varphi}$.

Pero ojo al piojo porque nosotros (o sea yo) encontramos un $M' / M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$.

Entonces, por transitividad ($\{A_1, A_2, A_3\} \models \bar{\varphi}$ y $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$) $M' \models \bar{\varphi}$.] ABS! Habíamos visto que $M' \not\models \bar{\varphi}$

El absurdo provino de suponer que SIP era completo respecto a M.

Luego, SIP no es completo respecto a M.]