

11) Veremos que SIP es correcto:

Son $\Psi \in \text{FORM}$ / $\vdash_{\text{SIP}} \Psi$

$$\Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \vdash_{\text{SQ}} \Psi \Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \models \Psi$$

(incorrecto) fuente SQ

Nosotros queremos probar $\vdash_{\text{SIP}} \Psi \Rightarrow M \models \Psi$.

Si pudieramos probar $M \models \{A_1, A_2, A_3\}$, como $\{A_1, A_2, A_3\} \models \Psi$, tendrímos que:

$M \models \Psi$ por transitividad.

Veremos entonces $M \models \{A_1, A_2, A_3\}$:

$$M \models \{A_1, A_2, A_3\} \Leftrightarrow M \models A_1 \text{ y } M \models A_2 \text{ y } M \models A_3$$

$M, \nu \models A_1 ?$

Aclaración: siempre que diga "Para todo «letra» Existe «letra»" era letra esta confundiéndolo con el universo de M , no me olvidé escribirlo en mi cuaderno.

$$M, \nu \models A_1 \Leftrightarrow M, \nu \models \neg \exists x (\forall y (\neg (s(y) = x)))$$

$$\Leftrightarrow \text{No existe } a \text{ tal que } M, \nu[x \rightarrow a] \models \forall y (\neg (s(y) = a))$$

$$\Leftrightarrow \text{No existe } a \text{ tal que para todo } b \quad M, \nu[x \rightarrow a, y \rightarrow b] \models \neg (s(b) = a)$$

\Leftrightarrow No existe a tal que para todo b no vale que el sucesor de b sea igual a a .

Dicho de otra forma (para mí un toque más clara)

\Leftrightarrow No existe a tal que para todo b vale que el sucesor de b es distinto a a .

Esto es super rotulado por \mathbb{Z} ya que todos los elementos tienen un sucesor.

$$\Rightarrow M \models A_1$$

(2)

$M, \nu \models A_2 ?$

$$M, \nu \models A_2 \Leftrightarrow M, \nu \models (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg P(s(x)))$$

\Leftrightarrow Para todo a , $M, \nu[x \rightarrow a] \models P(a) \rightarrow \neg P(s(a))$, $\nu[x \rightarrow a] = \nu'$

\Leftrightarrow Para todos a , $M, \nu' \models \neg P(a)$ o $M, \nu' \models \neg P(s(a))$

\Leftrightarrow Para todos a , vale que a es impar o a no sea impar.

Es fácil ver que Z satisface esto. $\Rightarrow M \models A_2$

$M, \nu \models A_3 ?$

$$M, \nu \models A_3 \Leftrightarrow M, \nu \models (\forall x \forall y)(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

\Leftrightarrow Para todos a, b $M, \nu[x \rightarrow a, y \rightarrow b] \models s(a) = s(b) \rightarrow a = b$, $\nu' = \nu[x \rightarrow a, y \rightarrow b]$

\Leftrightarrow Para todos a, b $M, \nu' \models \neg(s(a) = s(b))$ o $M, \nu' \models a = b$

\Leftrightarrow Para todos a, b vale que el recorrido de a es distinto al recorrido de b o a es igual a b .

Z satisface esto ya que ni no vale la regla de poste ($a = b$), entonces ni si el recorrido de esos 2 números distintos no son diferentes. $\Rightarrow M \models A_3$

Vemos que $M \models A_1$, $M \models A_2$ y $M \models A_3 \Rightarrow M \models \{A_1, A_2, A_3\}$

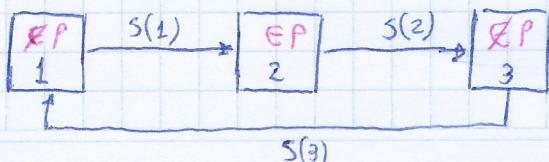
Luego, por lo ya planteado, $M \models \psi$ \therefore SIP es correcto con respecto a M .

Vemos ahora que SIP no es completo respecto a M .

Sea $\bar{\psi} = (\forall x(\neg P(x) \rightarrow P(s(x)))) \wedge \bar{\psi}$ se interpreta como: "si x es par entonces su recorrido es par"

Tomemos $M' : \langle \{1, 2, 3\}, S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=3 \\ 2 & \text{si } x=1 \\ 3 & \text{si } x=2 \end{cases}, P(x) = x \% 2 = 0 \rangle$

Para verlo de forma gráfica:



Podemos ver que $M' \models \bar{\varphi}$ ya que $s(3) = 1$ \oplus dice que 3 es ímpar pero no nro menor es en par, cosa pedida por $\bar{\varphi}$.

Además, veímos que $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$

$M' \models A_1$?

\Leftrightarrow (Re copio lo obtenido para correctness) No existe $a \in |M'|$ tal que para todo $b \in |M'|$ vale que el nro menor de b es distinto a a .

M' satisface esto ya que los 3 elementos tienen un predecessor.

$M' \models A_2$?

\Leftrightarrow Para todos $a \in |M'|$ vale que a es ímpar \oplus su nro menor es ímpar.

Veremos elementos a elementos:

[1] es ímpar ✓

[2] nro menor es ímpar ✓

[3] es ímpar ✓

$\Rightarrow M' \models A_2$

$M' \models A_3$?

\Leftrightarrow Para todos $a, b \in |M'|$ vale que el nro menor de a es distinto al nro menor de b $\oplus a$ es igual a b .

M' satisface A_3 porque ningún elemento tiene 2 predecesores.

$\Rightarrow M' \models A_3$. Luego $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$

(4)

Supongamos ahora que SIP es completo respecto a M. Entonces $M \models \varphi \Rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \vdash \varphi$.

Si tomamos a φ como $\bar{\varphi}$, como veremos que $M \models \bar{\varphi}$ (me oculto de dos cuentas que en realidad no habíais dicho anterior que $M \models \bar{\varphi}$, pero es super trivial, perdonad por :))

Como decís, vemos que $M \models \bar{\varphi}$, entonces como SIP es completo respecto a M, $\{A_1, A_2, A_3\} \vdash \bar{\varphi}$. En consecuencia fuerte de SQ, $\{A_1, A_2, A_3\} \models \bar{\varphi}$.

Pero ojo al piejo porque nosotros encontramos un $M'/M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$.

Entonces, por transitividad ($\{A_1, A_2, A_3\} \models \bar{\varphi}$ y $M' \models \{A_1, A_2, A_3\}$) $M' \models \bar{\varphi}$. ABS! Habíamos visto que $M \not\models \varphi$

El próximo punto de suponer que SIP era completo respecto a M.

Luego, SIP no es completo respecto a M.]

Comentario:

Correctitud:

Bien el desarrollo.

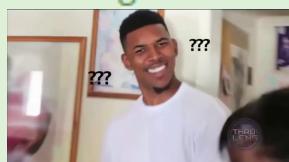
SUPER VÁLIDO ✅

A1: Bien la interpretación. Super satisfacible = válido, sucesor = siguiente.

A2: Bien. No usaría la palabra "impar", más bien "no par".

A3: Bien. Mismo comentario que en A1.

??



No completitud:

Detalle de la interpretación en palabras de la fórmula: "si x no es par, entonces su siguiente es par".

Bien el desarrollo, faltó decir por qué φ es válido en M.