HOJA N°

FECHA

$c \Rightarrow d$

$\exists\, \beta$ tq $\beta \in con(\{\alpha_1 \dots \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in con(\{\alpha_1 \dots \alpha_n\})$

$\cdot\, \beta \in con(\{\bar{\alpha}_n\}) \Leftrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$

$\cdot\, \neg\beta \in con(\{\bar{\alpha}_n\}) \Leftrightarrow \{\alpha_1 \dots \alpha_n\} \models \neg\beta$

$\Leftrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ insat

uno val no puede sat a β y a $\neg\beta$ … FORM

$\Rightarrow con(\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}) = FORM$

$\Rightarrow \forall\, \beta \in FORM,\ \beta \in con(\{\bar{\alpha}_n\})$

$d \Rightarrow a$

$\beta \in con(\{\bar{\alpha}_n\})\ \forall\, \beta \in FORM$

$\Rightarrow con(\{\bar{\alpha}_n\}) = FORM \Rightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ insat $\Rightarrow \nexists\, v$ val tq

$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \forall\, v$ val $\neg(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ es sat $\Rightarrow \neg(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ es

taut $\Rightarrow \neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \in con(\varnothing) = TAUT$

Pr 5

1) a) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$. puedo llegar a $\{conj\} \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$

Sea $\Gamma = \{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma,\ \alpha\}$ pvq $\Gamma \vdash \gamma$ $\Rightarrow$ p/ usar Teo Ded

1. $\alpha \to \beta$ $[\alpha \to \beta \in \Gamma]$
2. α $[\alpha \in \Gamma]$
3. β $[MP\ 1\ y\ 2]$
4. $\beta \to \gamma$ $[\beta \to \gamma \in \Gamma]$
5. γ $[MP\ 3\ y\ 4]$

Luego, $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \underset{\text{Teo de la deducción}}{\Rightarrow} \{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

b) $\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

1. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ SP3

NOTA

a) 3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ taut $\Leftrightarrow$ $\forall$ val v $\quad v \models SP3$

$v \models (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow v \models (\psi \to \varphi) \lor v \not\models (\neg\varphi \to \neg\psi) \Leftrightarrow$

$(v \models \varphi \lor v \models \neg\psi) \lor (v \not\models \neg\psi \lor v \not\models \varphi) \Leftrightarrow$

$(v \models \varphi \lor v \models \neg\psi) \lor (v \models \psi \lor v \models \neg\varphi) \Leftrightarrow \underbrace{v \models \varphi \lor v \models \neg\varphi}_{\text{siempre vale}} \lor$

$\underbrace{v \models \psi \lor v \not\models \neg\psi}_{\text{siempre vale}}$

$\Rightarrow v \models SP3 \quad \forall v \quad \Rightarrow SP3$ es taut

b) si $\varphi, \varphi \to \psi \in TAUT \overset{pvq}{\Rightarrow} MP\ \varphi, \psi$ taut

Veamos que $\forall v$ val vale $v \models (MP\ \varphi, \psi)$

Sabemos que

$v \models \varphi \quad$ y $\quad v \models \varphi \to \psi$

$v \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow v \models \psi \lor v \models \neg\varphi \quad \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \quad v \models \psi \quad \to$ vale xq $v \models \varphi \to \psi$

φ taut $\Rightarrow v \models \varphi \Rightarrow v \not\models \neg\varphi$

$\Rightarrow v \models \psi \quad \forall v$ val $\Rightarrow$ el rdo de MP es taut.

c) Prop a dem: $P(n)$= si $\varphi_1 \cdots \varphi_n = \varphi$ es una derivación de φ a partir de Γ ent $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$.

CB: sup v tq $v \models \Gamma$.

1) φ es axioma de SP, ent $v \models \varphi$.

2) $\varphi \in \Gamma$, ent $v \models \varphi$

CI: sup que vale $P(m)\ \forall m \leq n$, pvq vale $P(n+1)$. Sup $\varphi_1 \cdots \varphi_{n+1} = \varphi$ deriv de φ a partir de Γ tenemos 3 pos.

1) φ axioma de SP $\Rightarrow v \models \varphi$
2) $\varphi \in \Gamma$ $\Rightarrow v \models \varphi$
3) φ es cons directa de φ_i y $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi$ $(i, j \leq n)$. Por HI $v \models \varphi_i$ y $v \models \varphi_i \to$
Luego, como MP es ~~taut~~ vale si las prem valen, $v \models \varphi$.

Luego, vale $P(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow$ SP es correcto.

NOTA

HOJA N°

FECHA

3) q.v.q. Γ inc $\iff \Gamma \vdash \alpha \ \forall \alpha$.

$\Rightarrow$) Γ inc $\Rightarrow \exists \beta$ tq $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$

$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ inc $\rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, $\Rightarrow \exists \beta$ tq $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\beta$

Tomando la misma β que antes vemos que esto se cumple.

Por prop de la teo, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ incons $\Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

$\rightarrow$ esto vale $\forall \alpha \in FORM$.

4) $\Gamma \subseteq FORM$. símb: $\{\neg, \rightarrow\}$

a) Si Γ max cons $\Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.

$\Rightarrow$) $\Gamma \vdash \alpha$, Γ mc.

Sup $\alpha \notin \Gamma$.

Por prop de la teo, si Γ mc $\Rightarrow \forall \varphi \in FORM$, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.

$\Rightarrow$ si $\alpha \notin \Gamma \Rightarrow \neg\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$

Luego $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow$ abs xq Γ cons $\Rightarrow \alpha \in \Gamma$.

$\Leftarrow$) $\alpha \in \Gamma$

Como Γ mc $\Rightarrow \Gamma$ consistente

Si $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ $\square$

c) Si Γ mc y $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma \Rightarrow \alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$

Por abs: sup $\alpha \notin \Gamma$ y $\beta \notin \Gamma$

Si $\alpha \notin \Gamma \underset{\Gamma \text{ mc}}{\Rightarrow} \neg\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$

Si $\beta \notin \Gamma \Rightarrow \neg\beta \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\beta$

. $\neg\alpha$ [$\neg\alpha \in \Gamma$]
. $\neg\alpha \rightarrow \beta$ [$\neg\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$]
. β [MP 1 y 2]

$\Rightarrow \Gamma \vdash \beta \rightarrow$ abs xq Γ cons, $\Gamma \vdash \neg\beta$

$\Rightarrow \neg(\alpha \notin \Gamma$ y $\beta \notin \Gamma) \Rightarrow$

NOTA

$\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$.

5) a) . cada Γ_i es cons. → Vamos x ind en i

CB: $i=0$

Γ_0 es consistente xq $\Gamma_0 = \Gamma$ y Γ cons x sup.

CI: sup que Γ_n es cons y $n \in \mathbb{N}$, qvq Γ_{n+1} cons

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el cto es cons.} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{'' no} \end{cases}$$

Si $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ $\Rightarrow$ Γ_{n+1} consist

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ sii $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ cons.

Si no, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$.

Sup $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ inc.

Como Γ_n cons x HI, $\Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ inc $\Leftrightarrow$ $\Gamma_n \vdash \alpha_n$ $\rightarrow$ $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ consist

$\Rightarrow$ ABS! xq si $\Gamma_n \cup \{\alpha_n\}$ consist $\Rightarrow$ Γ_{n+1} sería igual a ese cto.

Luego $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\}$ cons.

$\Rightarrow \Gamma_{n+1}$ cons.

$\Rightarrow$ Vale CB y CI $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\Rightarrow$ Γ_i consistente $\forall i \in \mathbb{N}$

b) Ex. 1 de α y $\neg\alpha \in \Gamma^+$ $\forall \alpha$

Fijo α.

Sup $\alpha \notin \Gamma^+$ y $\neg\alpha \notin \Gamma^+$

Sabemos que, si Γ^+ cons (probado en (a))

. $\Gamma \cup \{\alpha\}$ inc $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg\alpha$

. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ inc $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \alpha$

} Luego Γ^+ inc $\rightarrow$ abs!

$\Rightarrow$ $\alpha \in \Gamma^+$ o $\neg\alpha \in \Gamma^+$

NOTA

HOJA N°

FECHA

c) Todos los teoremas están en Γ^+.

Como $\vdash \varphi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi \quad \forall \; \Delta \subseteq FORM$:

① $\vdash \varphi$ si $\exists \; \varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi$ tq φ_i ax o φ_i cons inm de $\varphi_k, \varphi_l, \; k, l <$

② $\Delta \vdash \varphi$ si $\exists \; \varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi$ tq $\varphi_i \in \Gamma$ o φ_i ax o φ_i cons inm de $\varphi_k, \varphi_l, \; k, l <$

Es fácil ver que si se cumple ①, se cumple ②.

Luego $\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma^+ \vdash \varphi$

algo $\varphi \in \Gamma^+$

Sea j tq $\alpha_j = \varphi$.

$$\Gamma_j = \begin{cases} \Gamma_{j-1} \cup \{\alpha_j\} & \text{si es cons} \\ \Gamma_{j-1} \cup \{\neg \alpha_j\} & \text{si no} \end{cases}$$

Como $\Gamma_j \subseteq \Gamma^+$, y Γ^+ cons (dem en (a))

$\Rightarrow \Gamma_j = \Gamma_{j-1} \cup \{\neg \alpha_j\} \Rightarrow \Gamma_j \vdash \neg \varphi \underset{\Gamma_j \subseteq \Gamma^+}{\Rightarrow} \Gamma^+ \vdash \neg \varphi$ — abs $\times$ Γ^+ cons y $\Gamma^+ \vdash \varphi$

$\Rightarrow \Gamma_j = \Gamma_{j-1} \cup \{\alpha_j\} = \Gamma_{j-1} \cup \{\varphi\}$

$\Rightarrow \varphi \in \Gamma_j$ y $\Gamma_j \subseteq \Gamma^+ \Rightarrow \varphi \in \Gamma^+$.

d) Γ^+ es mc

Por (a) sabemos que Γ^+ cons. Falta ver que es max.

Por teo, Γ^+ max cons $\Leftrightarrow$ Γ^+ cons ✓
$\forall \varphi \in FORM, \rightarrow \varphi \in \Gamma^+$ o

$\rightarrow \Gamma^+ \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma^+ \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ (es inc).

Sup $\exists \; \alpha \in FORM$ tq $\Gamma^+ \cup \{\alpha\}$ es consistente, $\Gamma^+ \not\ni \alpha$
$\rightarrow$ x (b) esto es abs $\Rightarrow \nexists \; \alpha \in FORM$ tq $\Gamma^+ \cup \{\alpha\}$ es consiste

NOTA
Luego Γ^+ mc

6) Veamos que b ⇔ c

b: $\forall\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, Γ_0 sat $\Rightarrow \Gamma$ sat $\;\equiv\;$ Γ sat o $\exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito / Γ_0 insat

son iguales

c: Γ insat $\Rightarrow \exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito / Γ_0 insat $\;\equiv\;$ $\exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ fin / Γ_0 insat o Γ sat

Queda ver a ⇒ b o c y b o c ⇒ a

a ⇒ c: Γ insat $\Rightarrow \exists\, \alpha$ tq. $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \neg\alpha$

Por a, si $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \alpha$

$\Gamma \models \neg\alpha \Rightarrow \exists\, \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_1 \models \neg\alpha$

Luego, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ insat.
$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \models \neg\alpha$

Γ

c ⇒ a, pues cuando vale c vale.

c vale si

- Γ insat $\Rightarrow \exists\, \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e insat

  luego $\Gamma_0 \models \alpha \;\forall\, \alpha \in FORM$, en part. $\Gamma_0 \models \alpha \;\forall\, \alpha$ tq. $\Gamma \models \alpha$

- Γ sat

  si $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \forall\, v$ val tq ($v \models \psi \;\forall\, \psi \in \Gamma \Rightarrow v \models \alpha$)

  En particular, $\exists\, v$ val tq $v \models \psi \;\forall\, \psi \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow v \models \alpha$

  Luego a vale

a) c) Ej 11 p. 4.

2) Sup $\exists\, \varphi \in con(\Gamma)$ y $\varphi \notin \Gamma$.

$\varphi \in con(\Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \{\varphi\}$ es consistente → absurdo xq Γ era max

$\Rightarrow \forall\, \varphi \in con(\Gamma)$, $\varphi \in \Gamma$

Luego $\Gamma = con(\Gamma)$

NOTA

HOJA N°

FECHA

10) Γ^{∞} es sat $\Leftrightarrow$ todos sus subc son sat.

Tomo Γ, subc finito de Γ^{∞}.

$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

Como $\Gamma^{\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\Gamma_i\}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i \in \Gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Como $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ es finito, $\exists\ l$ tq Γ_l contiene a algún α_i y que además es el máx k tq $\Gamma_k \supseteq \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Como $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}$, en part. Γ_l contiene a todos los Γ_k que contienen al menos a un α_i, luego $\Gamma \subseteq \Gamma_l$, y por lo tanto Γ es sat.

Luego, todos los subc finitos de Γ^{∞} son sat $\Rightarrow \Gamma^{\infty}$ sat.

11) Por comp. si Γ unsat $\Rightarrow \exists$ subc finito de Γ unsat.

Sea Δ ese subc.

Sé que en Δ hay al menos un elem de Γ_1 y uno de Γ_2, sino $\Delta \subseteq \Gamma_{1/2} \Rightarrow \Delta$ sat.

Luego, sea $\Delta = \{\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ donde $\alpha_i \in \Gamma_1$ y $\beta_i \in \Gamma_2$ y Δ unsat

Δ unsat $\Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \alpha_m \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n$ es contr

$\Rightarrow (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m) \wedge (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)$ contr

$\Rightarrow \underbrace{\neg(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m)}_{\alpha} \vee \underbrace{\neg(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n)}_{\beta}$ taut

$\Rightarrow \alpha \Rightarrow \neg\beta$ es taut con $\alpha \in con(\Gamma_1)$ y $\beta \in con(\Gamma_2)$

si $\alpha_1 \dots \alpha_m \in \Gamma$ y Γ sat $\Rightarrow \exists\ v$ tq $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m$ sat

NOTA

$\Rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_m \in con(\Gamma$

(B) sea $\tilde{\Gamma} = \{\neg\alpha_i\} \ \forall \alpha_i \in \Gamma$.

$\tilde{\Gamma}$ es no sat: $\forall v$ val, v sat a algún $\alpha_i \Rightarrow v$ no sat $\neg\alpha_i \Rightarrow$ no hay ning val que sat a todos los α_i al mismo tiempo.

$\Rightarrow$ (comp) $\exists$ subc finito de $\tilde{\Gamma}$ no sat $\Rightarrow \exists \Delta \subseteq \Gamma$ tq $\Delta = \{\neg\alpha_1 \ldots \neg\alpha_n\}$, $\alpha_i \in \Gamma$.

no sat. $\{\neg\alpha_1 \ldots \neg\alpha_n\}$ no sat $\Rightarrow \neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n$ es contradicción

$\Rightarrow \neg(\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n)$ es taut $\overset{\text{deMorgan}}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ taut ☐

TEO 11

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ un leng fijo.

Sea $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$, $t \in TERM(\mathcal{L})$ y $x \in VAR$. $\varphi[x/t]$ es la fórm obt a partir de φ sust todas las apar libres de x por t.

Si $c \in \mathcal{C}$, $\varphi[c/t]$ es la fórm obt a partir de φ sust todas las ap de la cte c por t.

Sea $t \in TERM(\mathcal{L})$, $x \in VAR$, $\varphi \in FORM(\mathcal{L})$.

Decimos que x es reemplazable por t en φ cuando

1. t térm cerrado (no tiene var) o
2. t tiene variables pero ning de ellas queda atrapada por un cuantificador en el reemplazo $\varphi[x/t]$.

lema de sustitución $\rightarrow$ Si x es reempl en φ por $t \Rightarrow \mathcal{A} \models (\varphi[x/t])[v]$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[v(x=$

Mecanismo ded SQ

Para un leng fijo $\mathcal{L}$:

$\rightarrow$ axiomas: $\varphi, \psi, \rho \in FORM(\mathcal{L})$, $x \in VAR$, $t \in TERM(\mathcal{L})$

SQ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
SQ2 $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$
SQ3 $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
SQ4 $(\forall x)\varphi \to \varphi[x/t]$ si x es reempl x t en φ.
SQ5 $\varphi \to (\forall x)\varphi$ si x no aparece libre en φ
SQ6 $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi)$
SQ7 si φ ax $\Rightarrow (\forall x)\varphi$ ax.

$\rightarrow$ regla infer: MP ψ cons inm de $\varphi \to \psi$ y φ.

NOTA

HOJA N°

FECHA

b_ Dado una $\mathcal{L}$-interpr $\mathcal{M}$, con universo M, decimos que una rel es expresable si $\exists$ $\mathcal{L}$-form φ con n variables libres $x_1 \dots x_n$ tq $\forall$ val v, vale que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in R$.

$I_2(x,y) =$ " x subc de y"

$\varphi_1(x,y) = u(x,y) = y$

$\varphi_1'(x,y) = (\exists c)(u(x,c) = y)$

$T_1(x) =$ "todas las form de x son taut".

$\varphi_2(x) = (\forall y)\ s(y) \rightarrow g(u(x,y)) = g(y)$

$\varphi_2' := (\forall y)\ (\varphi_2(y) \rightarrow \varphi_1(g(x), g(y))$

como 3ª opción podemos poner x.

$\forall$ cto de form que sea vacío, las cons de este cto tiene que ser un subc de las consec del $\emptyset$ (solo hay taut)

c. Si todo subc finito de Γ es sat $\Rightarrow$ Γ también (con $\Gamma \subseteq$ FORM).

$\varphi := (\forall x)\ ((\forall y)\ ((\varphi_1(y,x) \wedge F(y)) \rightarrow S(y)) \rightarrow S(x))$.

7) Sea α no taut.

- $\alpha \in$ PROP $\Rightarrow$ α lo reemplazo por $p \wedge \neg p$ $\rightarrow$ contrad.
- $\alpha \notin$ PROP se que $\exists$ v tq $v \not\models \alpha$ (α no taut)

$\Rightarrow$ Sean $p_1 \dots p_n$ las var prop de α, defino una instanciación $\tilde{\alpha}$ de α donde

$$p_i = \begin{cases} p \wedge \neg p & \text{si } v(p_i) = 0 \\ p \vee \neg p & \text{si } v(p_i) = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ esta instanciación es una contradicción

8) Γ consistente

$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \{\beta\}$ inc $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \neg\beta$ $\Rightarrow$ $\tilde{\Gamma}$ cons

$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{\neg\beta\}$ inc $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vdash \beta$ $\Rightarrow$ $\bar{\Gamma}$ cons

Luego, $\exists$ Γ_1, Γ_2 mc tq $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma_1$ y $\bar{\Gamma} \subseteq \Gamma_2$

NOTA

· hay que $con(\Gamma) \subseteq con(\Gamma_1)$

como $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ x ej 11)b) $con(\Gamma) \subseteq con(\Gamma_1)$

$\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma_1$

y lo mismo vale para $con(\Gamma) \subseteq con(\Gamma_2)$

· Falta ver que $\Gamma_1 \vdash \beta \rightarrow$ vale xq $\beta \in \bar{\Gamma} \subseteq \Gamma_1$

$\Gamma_2 \vdash \neg\beta \rightarrow$ " " $\neg\beta \in \bar{\Gamma} \subseteq \Gamma_2$

P 6

1) a) No, porque $f_1(n) = \sqrt{n}$ no va a los nat $\Rightarrow$ sx $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
$U_1 = \mathbb{N}$

b) Sí

c) Sí

2) a) $\forall x \forall y \, (P(x,y) \rightarrow \exists z \, ((Q(z) \wedge P(x,z)) \wedge P(z,y))$ $U = \mathbb{R}$

$P = \leq$ $Q(x) = x \in \mathbb{Q}$

$\rightarrow$ Para todo par de n°, tq el primero sea menor o igual al segundo, existe un racional entre ellos.

Es verdadero

b) $\forall x \, (Q(x) \rightarrow \exists y \, (P(y) \text{ y } P(y,x)))$

Para todo día x, existe un hombre que nació ese día.

Verdadero

c) $\forall x \forall y \, ((Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x,y)))$

Para todo par de n° ~~impares~~ impares, su suma da par un

Falso, da par.

3) a) $(\exists x \exists y)(\neg(x=y))$

b) $(\exists x \exists y) \, (\neg(x=y) \wedge \neg((\exists z)(\neg(x=z) \wedge \neg(y=z)))$

c) $\neg(\exists x \exists y (\neg(x=y)) \vee \exists x (\neg(\exists y \neg(x=y))) \vee (b)$

$\neg a$ b

NOTA