Ejercicio 1. Demostrar que MP preserva validez para toda clase de modelos. Es decir que, si $\mathcal{C} \models \alpha \to \beta$ y $\mathcal{C} \models \alpha$ entonces $\mathcal{C} \models \beta$.

Sea $A \in C$, por diap 12 de Teo 10 sabemos que:

$$A \models (\alpha \to \beta) \iff \text{no } A \models \alpha \text{ o } A \models \beta \underset{A \models \alpha}{\Longrightarrow} A \models \beta$$

Como $A \in C \Rightarrow C \models \beta \Rightarrow$ Vale para toda clase de modelos

Ejercicio 2. Sea $\Delta = \{SQ1, \ldots, SQ7\}$ el conjunto de todos los axiomas de SQ.

a. Supongamos que agregamos a Δ una fórmula φ que no es universalmente válida. Mostrar que el sistema resultante no es correcto con respecto a la clase de todos los modelos.

b. Yendo al otro extremo, supongamos que eliminamos todos los axiomas, esto es, $\Delta = \emptyset$. Mostrar que el sistema resultante no es completo con respecto a la clase de todos los modelos.

c. Supongamos que agregamos a Δ una nueva fórmula universalmente válida φ. Explicar por qué el sistema resultante es correcto y completo con respecto a la clase de todos los modelos.

a)

qvq: $\vdash_{SQ'} \alpha \Rightarrow \models_{SQ'} \alpha$

Sabemos que $\exists\ A \in C \ / \ A \not\models \varphi$.

Tomamos ese A y supongo que SQ' es correcto:

$\Rightarrow \vdash_{SQ'} \varphi$ porque φ es axioma. Ademas $\vdash_{SQ'} \varphi \Rightarrow \models_{SQ'} \varphi$] ABS!

$\Rightarrow SQ'$ no es correcto]

b) Tomo $A \in C \ / \ \exists\ \varphi$ donde $\models_{SQ'} \varphi$.

Se que existe, tiro un ejemplo o como lo aseguro?

Sup SQ' completo por lo que $\models_{SQ'} \varphi \Rightarrow \vdash_{SQ'} \varphi$] ABS!

Absurdo porque al no tener axiomas no puedo demostrar nada, en particular no puedo demostrar phi.

Luego SQ' no es completo.

c) SQ' es completo $\mid \models_{SQ'} \varphi \Rightarrow \vdash_{SQ'} \varphi$

y M

Si agregamos una formula universalmente valida SQ', entonces el conjunto de psis que son consecuencia semantica de SQ' se mantiene igual ya que esta ultima phi no aporta nada nuevo. Ademas, si yo podia demostrar todas las psis sin meter al axioma phi, ahora puedo seguir demostrandolos, es tan facil como no usar el nuevo axioma.

Chequear

Ejercicio 3. Se dice que un modelo de primer orden es transitivo cuando todas sus relaciones binarias son transitivas. Partiendo de la axiomatización para SQ, proponer una extensión SQ^T que caracterice la clase de modelos transitivos.

a. Demostrar que SQ^T es correcta con respecto a la clase de los modelos transitivos.

b. Demostrar que SQ^T es completa con respecto a la clase de todos los modelos.

c. Demostrar que SQ^T es completa con respecto a la clase de los modelos transitivos.

d. Demostrar que SQ^T no es correcta con respecto a la clase de todos los modelos.

Vale ($\forall P$: predicado)?

Sea $\mathcal{L}: C \cup F \cup P$, donde $P = \{R_1, \ldots, R_n\}$

$SE1: (\forall x)[x R_1 x] \wedge \ldots \wedge (\forall x)[x R_n x]$

$SE2: (\forall x,y)[x R_1 y \rightarrow y R_1 x] \wedge \ldots \wedge (\forall x,y)[x R_n y \rightarrow y R_n x]$

$SE3: (\forall x,y,z)[(x R_1 y \wedge y R_1 z) \rightarrow x R_1 z] \wedge \ldots \wedge (\forall x,y,z)[(x R_n y \wedge y R_n z) \rightarrow x R_n z]$

a) $\vdash_{SQ^T} \varphi \Rightarrow \models_{SQ^T} \varphi$

Supongo $\vdash_{SQ^T} \varphi$

$\{SE1, SE2, SE3\} \vdash_{SQ} \varphi$

Como SQ es completo y correcto puedo usar correctitud fuerte

$\{SE1, SE2, SE3\} \models_{SQ} \varphi$

Si probamos que toda L estructura C_e transitiva sat $\{\} \Rightarrow C_e$ sat φ.

$SE1: (\forall x)[x R_1 x] \wedge \ldots \wedge (\forall x)[x R_n x]$

I Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_1 x$
$\wedge$ Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_2 x$
$\wedge \ldots$
$\wedge$ Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_n x$

II Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_1 x$
y Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_2 x$
y ...
y Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_n x$

III Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_1^M x$

y Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_2^M x$

y ...

y Para todo $a \in |M|$ $M, v[x \to a] \models x R_n^M x$

Como parto de clases transistivas, entonces SE1 es SAT. legal ?

$SE2: (\forall x,y)[xR_1y \to yR_1x] \wedge \dots \wedge (\forall x,y)[xR_ny \to yR_nx]$

I Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_1y \to yR_1x$

$\wedge$ Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_2y \to yR_2x$

$\wedge$ ...

$\wedge$ Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_ny \to yR_nx$

II Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_1y \to yR_1x$

y Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_2y \to yR_2x$

y ...

y Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \models xR_ny \to yR_nx$

Cambiar por no vale

III Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \not\models xR_1y$ ó $v[x\to a, y\to b] \models xR_1y$

y Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \not\models xR\,y$ ó $v[x\to a, y\to b] \models xR\,y$

y ...

y Para todo $a,b \in |M|$, $M, v[x\to a, y\to b] \not\models xR\,y$ ó $v[x\to a, y\to b] \models xR\,y$

Tarea SE3

Como C_e es SAT para $\{\} \Rightarrow C_e$ SAT φ. $\therefore \vdash_{SAT} \varphi \Rightarrow \models_{SAT} \varphi$

La cagamos e hicimos equivalencia. Una verdadera pena, el ejercicio es analogo.

b. Demostrar que SQ^T es completa con respecto a la clase de todos los modelos.

Sea φ / Para todo modelo M: $M \models \varphi$

Por completitud de SQ $\Rightarrow \vdash \varphi$. $Q_vQ: \{SE3\} \vdash_{SQ} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{SQ^T} \varphi$]

Basicamente metiste un axioma extra, o sea que lo que podias demostrar antes lo podes seguir demostrando
=> estas como queres

c. Demostrar que SQ^T es completa con respecto a la clase de los modelos transitivos.

c) Sea φ / $C \models \varphi$ con C modelo transitivo. Todo C SAT SE3 es de transitividad y cualquier modelo SAT $\varphi \Rightarrow \{SE3\} \vdash \varphi \Rightarrow \vdash_{SQ^T} \varphi$]

d. Demostrar que SQ^T no es correcta con respecto a la clase de todos los modelos.

qvq: $\vdash_{SQ^T} \varphi \not\Rightarrow \models_{SQ^T} \varphi$ o sea $\vdash_{SQ^T} \varphi \wedge \not\models_{SQ^T} \varphi$

$\mathcal{L}$: $C = \emptyset$, $P = \{mitad\}$, $F = \emptyset$

mitad(x,y): x es la mitad de y

no vale que [mitad(x,y) ∧ mitad$(y,z) \rightarrow$ mitad(x,z)]

$\vdash_{SQ^T}$ SE3 por SE3 axioma]

Sup SQ^T CORRECTO $\Rightarrow \models_{SQ^T}$ SE3

O sea que SE3 es tautologia y no deberia haber ninguna valuacion ni modelo que no lo satisfaga. Datazo, encontramos el de arriba => ABS!

Ejercicio 6. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binario $+$ y dos constantes 0 y 1. Sea P la axiomatización que extiende a SQ con: (SQ^+)

MODELO: $I: \langle U_I : \mathbb{N}, \{0_I = 0, 1_I = 1, +_I = +\} \rangle$

P1 $(\forall x)\neg(0 = x+1)$ No hay x / x+1 = 0

P2 $(\forall x)(\forall y) x+1 = y+1 \rightarrow x = y$ sucesores iguales => x e y iguales

P3 $(\forall x)(\forall y)(x+y)+1 = x+(y+1)$ Asociativa

Demostrar que P no es completa con respecto al modelo de los naturales con la suma.

1. Encontras una formula que valga en el modelo de los naturales con la suma, pero que parezca no ser consecuencia de los axiomas.
2. Encontrar un modelo donde valgan los axiomas pero no valga la formula
3. Sup que el modelo original es completo respecto a SQ U {P1,P2,P3}, como este modelo satisface fi entonces fi deberia ser demostrable en SQ U {P1,P2,P3}. Pero como en el modelo 2 fi no vale (el modelo 2 cumple SQ U {P1,P2,P3}) entonces tenemos un abs!

1) $\varphi : \boxed{(\forall x)(x+0=x)}$

P1 $(\forall x)\neg(0 = x+1)$ No hay x / x+1 = 0

P2 $(\forall x)(\forall y) x+1 = y+1 \rightarrow x = y$ sucesores iguales => x e y iguales

P3 $(\forall x)(\forall y)(x+y)+1 = x+(y+1)$ Asociativa

2) $U_{I'} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0_{I'} = 1_{\mathbb{N}}$, lo demás es I

Tengo un modelo I' donde todos los axiomas de P son verdaderos, pero no vale phi.
Por ejercicio 1, si en I' valen todos los axiomas de P, entonces cualquier cosa que pueda ser demostrada por P, va a ser verdad en I' (esto pasa porque MP preserva validez y parto de los axiomas de P, que son verdades de I').

Dem con inducción

3) Sup P completa respecto a I.

Sea $\varphi / I \models \varphi \Rightarrow \vdash_P \varphi \Rightarrow \boxed{I' \models \varphi}$ ABS! Sabemos que $\underbrace{I' \not\models \varphi}_{\text{por 2}}$

P completa respecto a I

HIP

P correcta respecto a I' (por 2)

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad.

a. Dar un conjunto de fórmulas Γ tal que si Γ es satisfacible en un modelo $\mathcal{M}$ entonces el dominio de $\mathcal{M}$ sea infinito. *Sugerencia*: escribir una fórmula que, dado un n fijo, fuerce a que el modelo tenga al menos n elementos.

b. Usando compacidad y el ítem anterior, demostrar que no existe ninguna fórmula φ tal que φ es satisfacible en un modelo $\mathcal{M}$ sii el dominio de $\mathcal{M}$ es finito.

a) Queremos Γ / $M \models \Gamma \Rightarrow |M| = \infty$

$\Gamma = \{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, $\varphi_i = (\exists x_1, \dots, x_i)[\text{TodosDistintos}(x_1, \dots, x_n)]$

Tomo M / $|M| = K$, $K \in \mathbb{N}$

Como $M \models \Gamma \Rightarrow M \models \varphi_{K+1}$, pero φ_{K+1} = "Al menos K+1 distintos" y M tiene K distintos] ABS! Por suponer M finito $\Rightarrow$ M infinito

b) qvq: $\nexists \varphi$ / $M \models \varphi \Leftrightarrow M$ finito

Sup que $\exists \varphi$ / $M \models \varphi \Leftrightarrow M$ finito

se interpreta como

φ = "el dominio es finito"

Sea $\Gamma = \{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ del punto a y $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$.

Tomo Γ_0 finito $\subseteq \Gamma'$.

$MAX = \max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})$

Tomo M / $|M| \geq MAX$ y es finito]

$\Rightarrow M \models \Gamma_0$] Esto pasa porque M hace verdadero a todas las phi_{i}, (i < MAX) y como es finito en particular tambien hacer verdadero a phi. Luego, M |= Gamma0

Por compacidad, como M satisface a todo Γ_0 finito $\subseteq \Gamma$, $\exists \tilde{M}$ / $\tilde{M} \models \Gamma'$]

VER nas SAT

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado R binario. Demostrar usando compacidad que no existe una fórmula $\varphi_R(x,y)$ tal que su interpretación en cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ sea que (x,y) pertenece a la clausura transitiva de la relación binaria $R^{\mathcal{M}}$.

qvq: No existe $\varphi_R(x,y)$ / $(x,y) \in$ clausura transitiva de R^M $\forall M$

$\varphi_R(x,y) = xR^+y$ = Existe camino de relaciones entre x e y.

$\varphi_1(x,y) = x \not R y = \neg(xRy)$

$\varphi_i(x,y) = (\forall y_1,\dots,y_{i-1})\left[\neg(xRy_1 \wedge y_1Ry_2 \wedge \dots \wedge y_{i-1}Ry)\right]$

$\Gamma = \{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$

$\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$

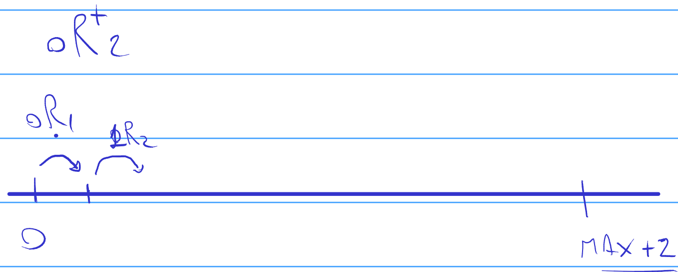
Γ' es no SAT

[si vale $\varphi \Rightarrow$ Existe camino entre x e y, digamos de longitud k.
Pero si para eso φ_k no vale] Γ' no SAT

Γ' es SAT

Tomo Γ_0 finito $\subseteq \Gamma'$

Para MAX vale



$I: \langle \{0,\dots,MAX+2\}, R^I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y=x+1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

Haces compacibilidad y tenes un absurdo.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado R, y $\mathcal{M}$ cualquier modelo cuyo dominio represente a los nodos de un grafo no orientado, y el símbolo R pueda ser interpretado como la relación "es adyacente a" (esto es, cualquier interpretación donde la relación $R^{\mathcal{M}}$ sea irreflexiva y simétrica). Demostrar que no es posible expresar la propiedad que afirma que un grafo es conexo, es decir, que entre cualquier par de nodos hay un camino de longitud finita.

φ se interpreta como "Hay un camino entre todo par de nodos"

$\varphi_1 : \cancel{(\exists x,y)}[\neg(xRy)]$

$\varphi_2 : \cancel{(\exists x,y)}[(\forall z)[\neg(xRz \wedge zRy)]]$

$\varphi_i : \cancel{(\exists x,y)}[(\forall z_1,\dots,z_{i-1})[\neg(xRz_1 \wedge \dots \wedge z_{i-1}Ry)]]$

φ_i se interpreta como "Existen 2 nodos no conectados por un camino $\leq i$."

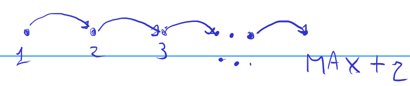
$\Gamma = \{\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$

Γ' es SAT

Tomo Γ_0 finito $\subseteq \Gamma'$

Existen M modelo y v val / $M, v \models \Gamma_0$

$MAX = \max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_0\} \cup \{1\})$



$I : \langle \{m_1, \dots, m_{MAX+2}\}, R = \{(1,2), \dots, (MAX+1, MAX+2)\} \rangle$, $v(x) = m_1$, $v(y) = m_{MAX+2}$

El modelo satisface phi_{MAX} ya que los nodos 1 y MAX+2 estan a distancia mayor a MAX.
En particular entonces se satisfacen todos los phis_{i} tomados a Gamma0.
Ademas, como el grafo es conexo tambien se satisface phi.

$\Rightarrow I, v \models \Gamma_0$ para cualquier Γ_0 finito $\subseteq \Gamma'$ $\Rightarrow$ Por compacidad Γ' es SAT

Γ' es no SAT

$\Gamma' = \{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$

Supongo Γ' SAT

Como Gamma' es SAT en particular phi es SAT y el grafo es conexo. Entonces existen 2 nodos i y j cuya distancia es maxima en el grafo y tiene distancia MAX.
Si tomamos phi_{MAX+1} entonces existen 2 nodos i' y j' que no tienen un camino menor a MAX+1. Esto es absurdo porque el camino entre i y j era el maximo.

$\Rightarrow \Gamma$ no SAT]

Ejercicio 10. Una función f se dice *circular* cuando para todo elemento e en el dominio de f existe un natural $n > 0$ tal que $f^n(e) = e$, en donde f^n representa el resultado de aplicar n veces la función f en forma sucesiva. Mostrar que no es expresable en primer orden la proposición "f es una función circular".

φ se interpreta como "f es circular"

$\varphi_1(x) = \neg(f(x) = x)$

$\varphi_i(x) = \neg(f^i(x) = x)$

φ_i se interpreta como "f aplicada i veces es distinta de x"

Ejercicio 11. Un número r es llamado *infinitesimal* si es mayor que cero y menor que todos los reales positivos. Claramente, en el modelo estándar de los reales (notación: $\mathcal{R}$) no hay números infinitesimales. Sea $SQ_{\mathbb{R}}$ una axiomatización de primer orden correcta con respecto a $\mathcal{R}$ sobre el lenguaje $S = \{0, suc, <, +, -, *, /\}$, que extiende a SQ con nuevos axiomas. Sea $SQ^+_{\mathbb{R}}$ una extensión de $SQ_{\mathbb{R}}$ en donde se agrega un nuevo símbolo de constante c y los siguientes (infinitos) axiomas:

Positivo $\quad c > 0$

Menor$_n$ $\quad c < \frac{1}{suc^{(n)}(0)}$ $\quad$ para todo $n > 1$

a. Demostrar que si $\mathcal{M}$ es modelo de $SQ^+_{\mathbb{R}}$, entonces $\mathcal{M}$ es modelo de $SQ_{\mathbb{R}}$.

b. Demostrar que $SQ^+_{\mathbb{R}}$ es satisfacible (*Sugerencia*: usar compacidad).

c. Demostrar que cualquier axiomatización correcta con respecto a $\mathcal{R}$ admite un modelo que posee números infinitesimales. ??

a) Claramente si M cumple $SQ^+_R \Rightarrow$ cumple SQ_R. O sea, $SQ_R \subseteq SQ^+_R$ ...

b) SQ^+_R es un conjunto de axiomas infinito.

Tomemos $\overline{SQ^+_R}$ finito $\subseteq SQ^+_R$.

Sabemos que existe MAX / $Menor_{MAX} \in \overline{SQ^+_R}$ pero $Menor_i \not\in \overline{SQ^+_R}$: $i > MAX$

Queremos un M' / $M' \models \overline{SQ^+_R}$.

Sea M' / $M' \models SQ_R$, agregamos a M' la cte $c = \frac{1}{MAX+1}$.

Sabemos que $c > 0 \Rightarrow M' \models$ Positivo.

Además, $M' \models Menor_i$, $i \leq MAX \Rightarrow M' \models \overline{SQ^+_R}$

Por compacidad, $\exists \tilde{M}$ / $\tilde{M} \models SQ^+_R$ $\rfloor$

Ejercicio 12. Vamos a llamar $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; 0; suc \rangle$ al modelo usual de los números naturales con cero y sucesor. Considerar un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}$ con un símbolo de constante 0 y un símbolo unario de función *suc*. Sea la siguiente axiomatización SQ_N, que extiende a SQ con infinitos axiomas:

S1	$(\forall x) suc(x) \neq 0$	0 no tiene predecesor
S2	$(\forall x)(\forall y)(suc(x) = suc(y) \to x = y)$	sucesor iguales ⇒ mismo origen
S3	$(\forall y)(y \neq 0 \to (\exists x)(y = suc(x)))$	Todos tienen predecesor, salvo el 0.
S4$_n$	$(\forall x)(suc^{(n)}(x) \neq x)$ para todo $n > 1$	Nunca pega la vuelta

a. Demostrar que $S1$ y toda instancia de $S4_n$ es verdadera en $\mathcal{N}$.

a) $M, v \models (\forall x)\, suc(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ Para todo a $M, v[x \to a] \models suc(a) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ Para todo a vale que su sucesor es distinto de 0] VALE EN $\mathbb{N}$

$M, v \models (\forall x)[suc^n(x) \neq x] \Leftrightarrow$ Para todo a $M, v[x \to a] \models suc^n(a) \neq a$

$\Leftrightarrow$ Para todo a vale que aplicar sucesor n veces es distinto de a] VALE EN $\mathbb{N}$ $\forall n \geq 1$

b. Dado un conjunto de fórmulas de primer orden Σ, demostrar que si existe un conjunto finito de fórmulas Γ tal que $Con(\Gamma) = Con(\Sigma)$, entonces existe un conjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \Sigma$. *Sugerencia*: usar alguna de las formulaciones del teorema de compacidad.

b) Sea Σ, $\exists \Gamma$ finito / $CON(\Gamma) = CON(\Sigma) \Rightarrow \exists \Sigma_0$ finito $\subseteq \Sigma$ / $\Sigma_0 \models \Sigma$.

T COMPACIDAD:

Si $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \exists \Gamma_0$ finito $\subseteq \Gamma / \Gamma_0 \models \alpha$

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$

$CON(\Gamma) = CON(\Sigma) \Rightarrow \Gamma \in CON(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \in CON(\Sigma) \Rightarrow \Sigma \models \Gamma$

Análogo $\Gamma \models \Sigma$

Como $\Sigma \models \Gamma \Rightarrow \Sigma \models \gamma_1$ y $\Sigma \models \gamma_2$ y ... y $\Sigma \models \gamma_n$

Por compacidad, existen $\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_n$ finitos /

$\tilde{\Sigma}_1 \models \gamma_1, \dots, \tilde{\Sigma}_n \models \gamma_n$

Sea $\Sigma_0 = \bigcup \tilde{\Sigma}_i$, $1 \leq i \leq n \Rightarrow \Sigma_0 \models \Gamma$

Además, como $\Gamma \models \Sigma$ por transitividad $\Sigma_0 \models \Sigma$]

c. Demostrar que para cualquier subconjunto finito Γ de axiomas de SQ_N existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$ pero $\mathcal{M} \not\models SQ_N$.

Tengo un axioma MAX. Tomo $M = \langle \{0, \ldots, MAX + 10\}, suc(x) = x + 1 \% MAX+10 \rangle$

d. Sabiendo que SQ_N es correcta y completa con respecto a $\mathcal{N}$, demostrar que ninguna axiomatización correcta y finita de primer orden es completa con respecto a $\mathcal{N}$. Sugerencia, aplicar el punto b al ítem anterior.

b. Dado un conjunto de fórmulas de primer orden Σ, demostrar que si existe un conjunto finito de fórmulas Γ tal que $Con(\Gamma) = Con(\Sigma)$, entonces existe un conjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \models \Sigma$. *Sugerencia*: usar alguna de las formulaciones del teorema de compacidad.

Sea $\overline{SQ_N}$ una axiomatización correcta y finita de SQ_N