MICELI, JUAN PABLO

LU: 424/19

LOGICA 1°P

HOJA N° 1

FECHA 26/11/2021

11) a) Decidir si f es computable o no y demostrarlo.

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$n(x) = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \min_t \Phi_x^2(t,y)\downarrow & \text{si } \exists t / \Phi_x^2(t,y)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Sea $f'(x) = \alpha(\alpha(f(x, \underbrace{n(x)}_{=0}))) = \begin{cases} \cancel{\alpha(\alpha(1 + \min_t \Phi_x^2(t,0)\downarrow))} \;\; \alpha(\alpha(1+*)) = 1 & \text{si } \exists t / \Phi_x^2(t,0)\downarrow \\ \alpha(\cancel{\alpha(0)}) \;\; 0 & \text{cc} \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists t / \Phi_x^2(t,0)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Podemos ver que f' es la función característica del conjunto A, para A:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \exists t / \Phi_x^2(t,0)\downarrow\}$$

A es el conjunto de índices que corresponde a las funciones que están definidas para algún t, 0 (o sea, t de primer parámetro y 0 de segundo parámetro).

Veamos que A no es $\emptyset$:

$\#P \in A$, $\Psi_P(t,u) = t$, $\#P$ pertenece a A porque $\Psi_P(0,0)\downarrow$

Veamos que A no es $\mathbb{N}$:

$\#Q \notin A$, $\Psi_P(t,u) = \uparrow$, $\#Q$ no pertenece a A porque $\Psi_P(t,u)$ no está definida para ningún t.

Como la pertenencia de x en A depende sólo de la función computada y no del programa que la computa entonces:

Para todo par P y Q, $\Psi_P^{(1)} = \Psi_Q^{(1)}$ $\#P \in A \Rightarrow \#Q \in A$

NOTA

Si no aseguraba lo anterior no podía afirmar que A fuera un conjunto de índices. Ahora, como vimos que A es un conjunto de índices no trivial, por Rice podemos asegurar que el conjunto A no es computable. Como A no es computable, su función característica (f') no es computable.

Sabemos además:

$$f'(x) = \alpha(\alpha(f(x, m(x))))$$

Vemos que f no es computable por absurdo.

Supongamos que fuera computable:

Sabemos que α es computable, m también y f (por HIP) también. Entonces la composición de todas esas funciones es computable, esto es porque el conjunto de funciones computables está cerrado por composición. Pero pero pero, la composición de esas funciones nos dió a f', entonces f' debería ser computable, lo cual es ABSURDO porque ya vimos que no lo era. El absurdo provino de suponer a f computable, esto quiere decir que f no es computable.

MICELI, JUAN PABLO
LU: 424/19

LOGICA 1°P

1) b) Sea P computable y g dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } P(\Phi_x(y)) = 1 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

I) Buscamos P que haga a g computable:

$P(x) = 0$

Si $P(x) = 0 \Rightarrow g$ queda

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \overset{\text{FALSE}}{\cancel{0 = 1}} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

FALSE $\wedge$ * = FALSE

No hay entrada para la cual $g(x,y) = 1$ por el "FALSE" hardcodeado, entonces $g(x,y) = 0$ $(\forall x,y)$.

$g(x,y) = n(x) = 0$

Como n es computable $\Rightarrow g$ es computable]

II) Buscamos P que haga a g no computable:

$P(x) = 1$

Si $P(x) = 1 \Rightarrow g$ queda

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \text{ y } \overset{\text{TRUE}}{\cancel{1 = 1}} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

TRUE $\wedge$ * = *

Al haber quedado el "TRUE" hardcodeado, lo podemos sacar porque no aporta nada y g quedaría:

NOTA

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(y)\downarrow \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

(o Halt(y, x), nunca me acuerdo)

Con el P elegido $g(x,y) = Halt(x,y)$, y como Halt no es computable, entonces podemos asegurar que g no es computable.

NOTA