Métodos Computacionales I.
Ejercicios Teóricos Tarea 2.

Juana Granados y José Gutierrez

16 de marzo de 2023

1. Derivación

2. Problema 8

La siguiente función se deriva así de forma analítica

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{tan(x)}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(tanx)^{\frac{-1}{2}} * \frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x} = 1 + tan(x)^2$$

$$1 + tan(x)^2 = \frac{1}{cos(x)^2}$$

$$sec(x)^2 = \frac{1}{cos(x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{tan(x)}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}(tanx)^{\frac{-1}{2}} * sec(x)^2$$

3. Interpolación de Lagrange.

3.1. Problema 1.

Para demostrar el polinomio interpolador que pasa por j $\epsilon[(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ es único se hará uso de las matrices de vandermonde, ya que estas permiten encontrar los coeficientes de los polinomios de Lagrange.

Sea P(x) el polinomio interpolador

$$P(x) = C_O + C_1X + C_2X^2.$$

Se propone lo siguiente:

$$P(X_0) = Y_0,$$

$$P(X_1) = Y_1,$$
$$P(X_2) = Y_2,$$

es decir,

$$C_0 + C_1X_0 + C_2X_0^2 = Y_0,$$
$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_1^2 = Y_1,$$
$$C_0 + C_1X_2 + C_2X_2^2 = Y_2.$$

Note que este sistema de ecuaciones se puede generalizar en una matriz que será la matriz de Vandermonde de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Y_O \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 \\ 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_O \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Es posible observar que el determinante de esta matriz debe que ser diferente de 0 para que satisfaga el teorema de unicidad y existencia, siendo la única posibilidad en que $J < K$ en los sub indices para su determinante $V = \prod(X_k - X_j)$, demostrando así que este polinomio es único.

Por otro lado, que los puntos (X_n, Y_n), ya están definidos y que la matriz que se tiene es cuadrada. Esto hace que sea posible tener una matriz inversa de la forma:

$$\begin{bmatrix} C_O \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 \\ 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_O \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

En base a esta matriz ya se pueden obtener los coeficientes de nuestro polinomio los cuales satisfacen la forma general y por lo tanto de forma analítica se solucionó el problema.

$$C_0 + C_1X + C_2X^2 = Y$$

Ahora por inducción basta con demostrar que esto funciona para $n + 1$ casos para demostrar la unicidad y existencia para cualquier polinomio

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$$

con la condición de que

$$P(x_j) = y_j$$

entonces,

$$y_j = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$$

con

$$j = (0, 1, 2, 3, ...n)$$

$$[y_j]^n = \sum_{k=0}^{n} [C_k x^k]^n$$

con

$$j = (0, 1, 2, 3, ...n)$$

y por lo tanto tenemos unicidad y existencia, ya que tenemos un sistema de ecuaciones n+1 con n+1 incógnitas $V = \prod(X_k - X_j)$ diferente de 0 cumpliendo que el polinomio es único.

4. Integración.

4.1. Problema 1.

Se demostrarán los pasos intermedios de la regla del trapecio, es decir, la siguiente expresión:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Se tiene que

$$f(x) \approx p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-1}{b-a}f(b).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I &\approx \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)dx \\
&\approx \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b x - b\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b x - a\,dx \\
&\approx \frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{x^2}{2} - bx\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} dx \\
&\approx \frac{f(a)}{a-b}\left(ab - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{f(b)}{b-q}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab\right) \\
&\approx \frac{f(a)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab\right) + \frac{f(b)}{b-q}\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab\right) \\
&\approx \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} - ab\right)\frac{1}{b-a}(f(a) + f(b)) \\
&\approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))
\end{aligned}$$

4.2. Problema 3.

Se quiere demostrar la regla se Simsomp $I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ simple para esto se va a proponer lo siguiente.

$$\int_{-h}^{h} Ax^2 + Bx + cdx = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6c)$$

Después se evalúa el polinomio de simsomp de forma general en las siguientes condiciones las cuales son donde están definidas los puntos del conjunto soporte:

$$P(0) = c = y_1$$

$$P(-h) = Ah^2 - Bh + c = y_0$$
$$P(h) = Ah^2 + B_h + c = y_2$$

Ahora sumamos las ecuaciones obteniendo

$$2Ah^2 + 2c = y_0 + y_2$$

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2c$$
$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - y1$$

Ahora reemplazamos en la primera ecuación y se demuestra la regla de simsomp simple

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6c)$$
$$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1)$$
$$I = \frac{h}{3}(y_0 + y_2 + 4y_1)$$

4.3. Problema 14.

Sea $p(x) = 3 + 5x + x^2$. Teniendo en cuenta los primeros tres polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \iff x^2 = \frac{2P_2 + 1}{3} = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0(x).$$

Luego, es posible reescribir el polinomio $p(x)$ en términos de la base de Legendre como:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 + 5x + x^2 \\ &= 3P_0(x) + 5P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \\ &= \frac{10}{3}P_0(x) + 5P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) \end{aligned}$$