

데이터 구조 입문

김종현

05

재귀 알고리즘

05-1 재귀 알고리즘의 기본

05-2 재귀 알고리즘 분석

05-3 하노이의 탑

05-4 8퀸 문제란?

재귀 알아보기

재귀recursion

- 어떠한 이벤트에서 자기 자신을 포함하고 다시 자기 자신을 사용하여 정의되는 경우
- 무한히 존재하는 자연수를 재귀적 정의recursive definition를 사용하여 두 문장으로 정의
 - 1은 자연수
 - 어떤 자연수의 바로 다음 수도 자연수
- 재귀를 효과적으로 사용하면 이러한 정의 뿐만 아니라 프로그램을 간결하고 효율성 좋게 작성할 수 있음



팩토리얼 알아보기 - (1)

■ 팩토리얼factorial

- 양의 정수의 곱을 구하는 문제
- 양의 정수를 순서대로 곱한다는 의미로 순차 곱셈이라고도 함
- 재귀를 사용하는 대표적인 예
- 양의 정수 n의 팩토리얼(n!)의 재귀적 정의
 - 0! = 1
 - n > 0이면 n! = n × (n 1)!

■ 실습 5-1

• 양의 정수 n의 팩토리얼을 구하는 프로그램

Do it! 실습 5-1

• 완성 파일 chap05/factorial.py

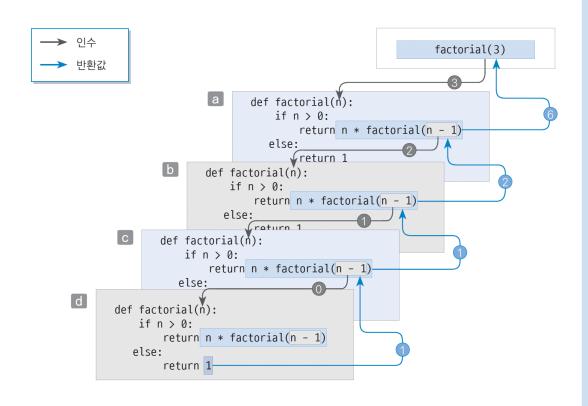
```
01: # 양의 정수 n의 팩토리얼 구하기
02:
03: def factorial(n: int) -> int:
04: """양의 정수 n의 팩토리얼값을 재귀적으로 구함"""
05: if n > 0:
06: return n * factorial(n - 1)
07: else:
08: return 1
09:
10: if __name__ == '__main__':
11: n = int(input('출력할 팩토리얼값을 입력하세요.: '))
12: print(f'{n}의 팩토리얼은 {factorial(n)}입니다.')
```

실행 결과

출력할 팩토리얼값을 입력하세요.: 3 3의 팩토리얼은 6입니다.

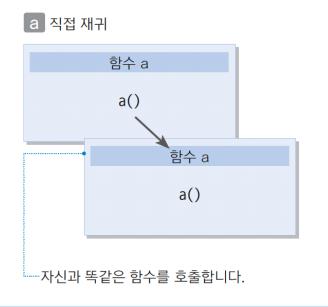
팩토리얼 알아보기 - (2)

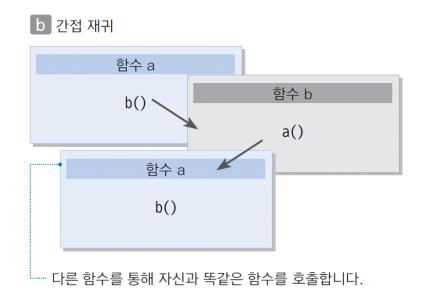
- 재귀 호출recursive call
 - 자기 자신과 똑같은 함수를 호출
 - a : factorial(3)을 실행하면 factorial() 함수가 호출됨
 - 매개변수 n에 3을 전달받아 3 * factorial(2) 값 반환
 - 값을 구하기 위해 인수로 2를 전달하여 factorial(2) 호출
 - b : 매개변수 n에 2를 전달받아 2 * factorial(1)을 실행하기 위해 factorial(1) 호출
 - c : 매개변수 n에 1을 전달받아 1 * factorial(0)을 실행하기 위해 함수 factorial(0) 호출
 - d : 매개변수 n에 0을 전달받아 1을 반환
 - 처음으로 retum 문이 실행되고 반환값 1을 로보냄
 - c : 반환된 값 1을 전달받아 1 * factorial(0), 즉 (1 * 1) 반환
 - b : 반환된 값 1을 전달받아 2 * factorial(1), 즉 (2 * 1) 반환
 - a : 반환된 값 2를 전달받아 3 * factorial(2), 즉 (3 * 2) 반환
 - → 최종 3의 팩토리얼값인 6을 얻을 수 있음



팩토리얼 알아보기 - (3)

- 직접direct 재귀
 - 자신과 똑같은 함수를 호출하는 방식
- 간접indirect 재귀
 - a() 함수가 b() 함수를 호출하고 다시 b() 함수가 a() 함수를 호출하는 구조

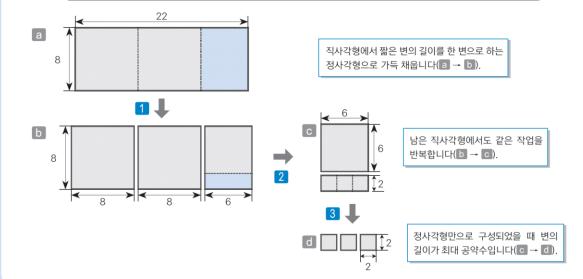




유클리드 호제법 알아보기 - (1)

- 두 정숫값의 최대 공약수GCD 재귀로 구하기
 - 2개의 정숫값을 직사각형 두 변의 길이라고 할 때

Q. 직사각형 안을 정사각형 여러 개로 가득 채워 나간다. 이렇게 만들 수 있는 정사각형 가운데 가장 작은 정사각형의 변의 길이를 구하라.



- 2개의 정숫값을 직사각형 두 변의 길이라고 할 때
 - 1 : 22 × 8 크기의 직사각형에서 짧은 변의 길이인 8을 한 변으로 하는 정사각형으로 나눔
 → 8 × 8 크기의 정사각형 2개가 만들어지고
 8 × 6 크기의 직사각형이 남음
 - 2 : 남은 8 × 6 크기의 직사각형에서도 같은 과정 수행
 → 6 × 6 크기의 정사각형 1개가 만들어지고
 6 × 2 크기의 직사각형이 남음
 - 3 : 남은 6 × 2 크기의 직사각형에서도 같은 과정 수행 → 2 × 2 크기의 정사각형 3개가 만들어짐
 - → 최종 정사각형 변의 길이인 2가 8과 22의 최대 공약수!

유클리드 호제법 알아보기 - (2)

- 유클리드 호제법Euclidean agorithm
 - 두 정수 x와 y의 최대 공약수를 gcd(x, y)라 표기
 - x = az와 y = bz를 만족하는 정수 a, b와
 최대의 정수 z가 존재할 때 z는 gcd(x, y)
 - 최대 공약수 구하기
 - y가 0이면 ... x
 - y가 0이 아니면 ... gcd(y, x % y)
- 실습 5-2
 - 유클리드 호제법으로 두 정숫값의 최대 공약수를 구하는 프로그램

Do it! 실습 5-2

• 완성 파일 chap05/gcd.py

```
01: # 유클리드 호제법으로 최대 공약수 구하기
02:
03: def gcd(x: int, y: int) -> int:
      """정숫값 x와 y의 최대 공약수를 반환"""
04:
      if y == 0:
05:
06:
          return x
07:
      else:
          return gcd(y, x % y)
08:
09:
10: if __name__ == '__main__':
      print('두 정숫값의 최대 공약수를 구합니다.')
      x = int(input('첫 번째 정숫값을 입력하세요.: '))
12:
      y = int(input('두 번째 정숫값을 입력하세요.: '))
13:
14:
      print(f'두 정숫값의 최대 공약수는 {gcd(x, y)}입니다.')
15:
```

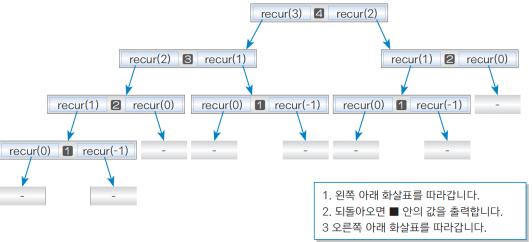
실행 결과

두 정숫값의 최대 공약수를 구합니다. 첫 번째 정숫값을 입력하세요.: 22 두 번째 정숫값을 입력하세요.: 8 두 정숫값의 최대 공약수는 2입니다.

재귀 알고리즘의 2가지 분석 방법 - (1)

- 실습 5-3
 - recur()라는 재귀 함수 프로그램
 - recur() 함수는 함수 안에서 재귀 호출을 2번 실행
 - 순수한genuinely 재귀: 재귀 호출을 여러 번 실행하는 함수
 - 하향식top-down 분석
 - 가장 상위 함수 호출부터 시작하여 계단식으로 자세히 조사해 나가는 분석 방법
 - recur(4)의 실행 과정
 - 1. recur(3) 실행
 - 2. 4 출력
 - 3. recur(2) 실행
 - 같은 함수를 여러 번 호출할 수 있어, 효율성 ↓





재귀 알고리즘의 2가지 분석 방법 - (2)

- 실습 5-3
 - 상향식bottom-up 분석
 - 하향식 분석과는 반대로 아래쪽부터 쌓아 올리며 분석하는 방법
 - recur(1)의 실행 과정
 - 1. recur(0) 실행
 - 2. 1 출력
 - 3. recur(-1) 실행
 - recur(2)의 실행 과정
 - 1. recur(1) 실행
 - 2. 2 출력
 - 3. recur(0) 실행

recur(-1) : 아무것도 하지 않음

recur(0) : 아무것도 하지 않음

recur(1) : recur(0) 1 $recur(-1) \rightarrow 1$

recur(2) : recur(1) 2 recur(0) \rightarrow 1 2

recur(3) : recur(2) 3 recur(1) \rightarrow 1 2 3 1

recur(4) : recur(3) 4 recur(2) \rightarrow 1 2 3 1 4 1 2

재귀 알고리즘의 비재귀적 표현 - (1)

- 꼬리 재귀 제거하기
 - recur() 함수의 맨 끝에서 재귀 호출하는 꼬리 재귀 recur(n 2) 함수의 의미는 '인수로 n-2의 값을 전달하고 recur() 함수를 호출하는 것'
 - 다음 동작으로 변경 가능

n의 값을 n- 2로 업데이트하고 함수의 시작 지점으로 돌아감

■ 실습 5-4

• 함수의 맨 끝에서 실행된 재귀 호출인 꼬리 재귀^{tail recursion} 제거한 프로그램

Do it! 실습 5-4

• 완성 파일 chap05/recur1a.py

```
01: # 비재귀적으로 재귀 함수 구현하기(꼬리 재귀를 제거)
02:
03: def recur(n: int) -> int:
04: """꼬리 재귀를 제거한 recur() 함수"""
05: while n > 0:
06: recur(n - 1)
07: print(n)
08: n = n - 2
(… 생략 …)
```

재귀 알고리즘의 비재귀적 표현 - (2)

■ 재귀 제거하기

- n값을 출력하기 전에 recur(n 1)을 실행해야 하기 때문에, 맨 앞에서 재귀 호출하는 recur(n 1) 함수 제거는 까다로움
- 현재의 n값을 임시로 저장해야함
 → 04장에서 다룬 스택stack으로 해결 가능

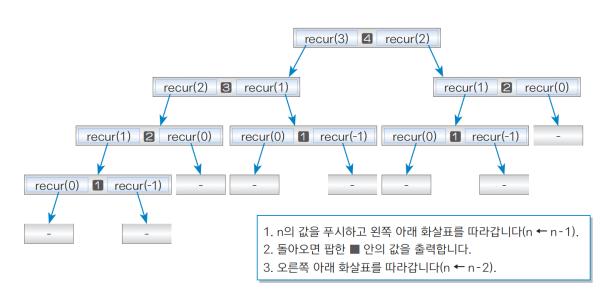
■ 실습 5-5

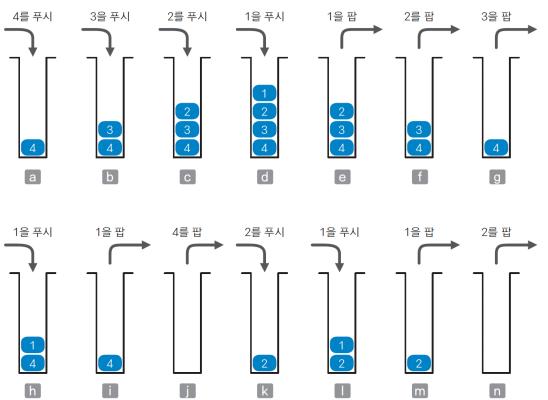
• 스택을 사용하여 비재귀적으로 구현한 recur() 함수

```
• 완성 파일 chap05/recur1b.py
 Do it! 실습 5-5
01: # 스택으로 재귀 함수 구현하기(재귀를 제거)
02:
03: from stack import Stack
                                 # stack.py의 Stack 클래스를 임포트
04:
05: def recur(n: int) -> int:
       """재귀를 제거한 recur( ) 함수"""
07:
       s = Stack(n)
08:
       while True:
09:
           if n > 0:
10:
11:
              s.push(n)
                                 # n값을 푸시
12:
              n = n - 1
13:
              continue
14:
           if not s.is_empty():
                                 # 스택이 비어 있지 않으면
15:
              n = s.pop()
                                 # 저장한 값을 n에 팝 -4
              print(n)
16:
17:
              n = n - 2
              continue
18:
19:
           break
21: x = int(input('정숫값을 입력하세요.: '))
22:
23: recur(x)
```

재귀 알고리즘의 비재귀적 표현 - (3)

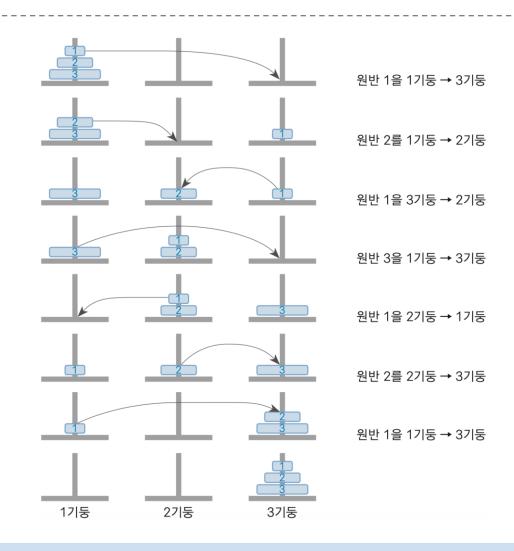
■ 실습 5-5의 recur() 함수 실행에 따른 스택의 변화





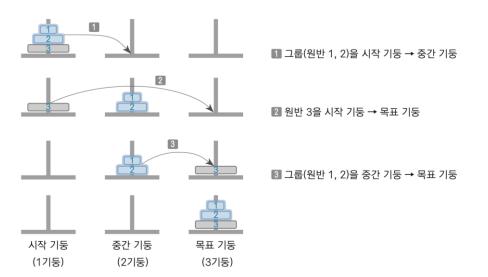
하노이의 탑 알아보기 - (1)

- 하노이의 탑towers of Hanoi
 - 작은 원반이 위에, 큰 원반이 아래에 위치하는 규칙을 지키면서 기둥 3개를 이용해서 원반을 옮기는 문제
 - 크기가 모두 다른 원반이 첫 번째 기둥에 쌓여 있는 상태로 시작
 - 작은 원반은 위에, 큰 원반은 아래에 쌓여 있음
 - 원반은 1개씩 옮길 수 있으며 큰 원반은 작은 원반 위에 쌓을 수 없음

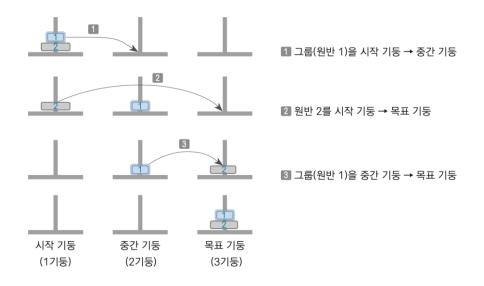


하노이의 탑 알아보기 - (2)

- 하노이의 탑towers of Hanoi
 - 집 원반이 3개일 때
 - 원반 1과 원반 2를 그룹으로 묶으면,
 가장 먼저 이 그룹을 중간 기둥으로 옮긴 후에
 가장 큰 원반 3을 목표 기둥으로 옮김
 - 총 3 단계로 이동 가능

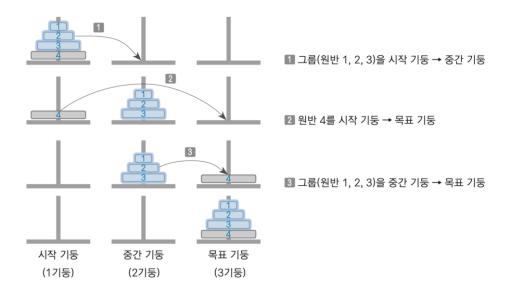


- b 원반이 2개일 때
 - 원반 1과 원반 2를 묶은 그룹을 풀어서 옮기는 단계를 어떻게 구현할까?
 - 원반 1을 그룹으로 본다면, a 와 똑같이 3단계로 이동 가능



하노이의 탑 알아보기 - (3)

- 하노이의 탑towers of Hanoi
 - 집 원반이 4개일 때
 - 원반 1, 원반 2, 원반 3을 그룹으로 묶으면 3단계로 이동 가능
 - 원반 3개를 묶었던 그룹을 풀어서 이동
 - 원반이 n개인 하노이의 탑 문제 해결 가능!



하노이의 탑 알아보기 – (4)

- 실습 5-6
 - 하노이의 탑을 구현하는 프로그램
 - move() 함수의 매개변수 no: 옮겨야 할 원반의 개수
 - x: 시작 기둥 번호
 - y: 목표 기둥 번호

Do it! 실습 5-6

• 완성 파일 chap05/hanoi.py

```
01: # 하노이의 탑 구현하기
02:
03: def move(no: int, x: int, y: int) -> None:
       """원반 no개를 x기둥에서 y기둥으로 옮김"""
     if no > 1:
05:
06:
          move(no - 1, x, 6 - x - y)
07:
       print(f'원반 [{no}]을(를) {x}기둥에서 {v}기둥으로 옮깁니다.')
08:
09:
10:
       if no > 1:
          move(no - 1, 6 - x - y, y)
11:
12:
```

13: print('하노이의 탑을 구현합니다.')

14: n = int(input('원반의 개수를 입력하세요.: '))

15:

16: move(n, 1, 3) # 1기둥에 쌓인 원반 n개를 3기둥으로 옮김

실행 결과

하노이의 탑을 구현합니다.

원반의 개수를 입력하세요.: 3

원반 [1]을 1기둥에서 3기둥으로 옮깁니다. 원반 [2]를 1기둥에서 2기둥으로 옮깁니다. 원반 [1]을 3기둥에서 2기둥으로 옮깁니다. 원반 [3]을 1기둥에서 3기둥으로 옮깁니다. 원반 [1]을 2기둥에서 1기둥으로 옮깁니다. 원반 [2]를 2기둥에서 3기둥으로 옮깁니다. 원반 [1]을 1기둥에서 3기둥으로 옮깁니다.

하노이의 탑 알아보기 - (5)

- 실습 5-6
 - move() 함수의 동작
- 11 바닥에 있는 원반을 제외한 그룹(원반[1]~원반[no 1]) 1기둥 → 2기둥
- 2 바닥에 있는 원반 [no]를 1기둥 → 3기둥
- ③ 바닥에 있는 원반을 제외한 그룹(원반[1]~원반[no 1]) 2기둥 → 3기둥
 - 11, 3 과정은 재귀 호출로 구현



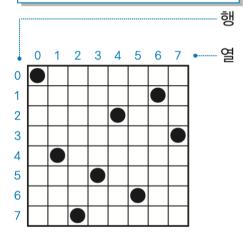
8퀸 문제 알아보기 - (1)

- 8퀸 문제^{8-Queen problem}
 - 재귀 알고리즘을 설명할 때 자주 나오는 예제
 - 19세기의 수학자 카를 F. 가우스Carl F. Gauss가 오답을 발표한 것으로 유명

8개의 퀸이 서로 공격하여 잡을 수 없도록 8 × 8 체스판에 배치하세요

■ 총 92가지 해결 방법

서로 공격하여 잡을 수 없도록 8개의 퀸을 배치합니다.



퀸 배치하기

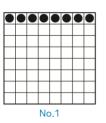
- 퀸 8개의 배치 조합
 - 체스판 64칸(8 × 8)
 - 첫 번째 퀸을 배치할 때는 64칸 중 한 곳 선택
 - 두 번째 퀸을 배치할 때는 63칸 중 한 곳 선택
 - 이렇게 8번째까지 퀸을 배치하면

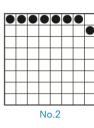
 $64 \times 63 \times 62 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58 \times 57 = 178,462,987,637,760$

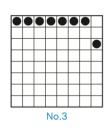
■ 규칙 1

규칙 1 각 열에 퀸을 1개만 배치

 $8 \times 8 = 16,777,216$

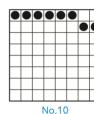


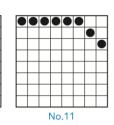


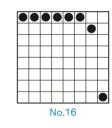




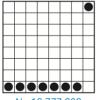


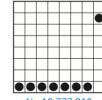


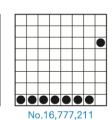


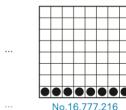










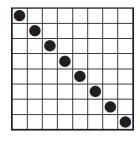


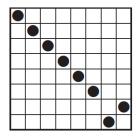
퀸 배치하기

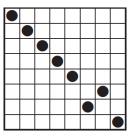
- 퀸 8개의 배치 조합
 - 규칙 2

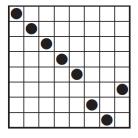
규칙 2 각 행에 퀸을 1개만 배치

• 규칙 1과 규칙 2를 만족하는 예시



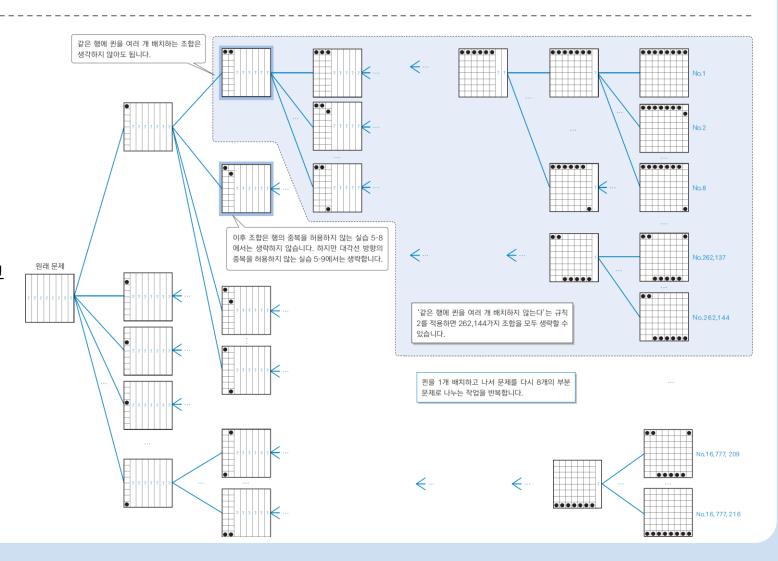






퀸 배치하기

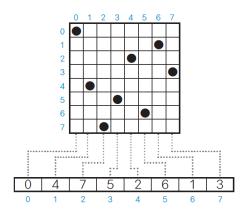
- 퀸 8개의 배치 조합
 - 분기^{branching} 작업
 - 차례대로 가지가 뻗어 나가듯이 배치 조합을 열거하는 방법
 - 분할 정복법divide and conquer
 - 하노이의 탑이나 8퀸 문제처럼
 큰 문제를 작은 문제로 분할하고
 작은 문제 풀이법을 결합하여
 전체 풀이법을 얻는 방법



8퀸 문제 알아보기

- 실습 5-7
 - 모든 조합을 나열하는 프로그램
 - 배열 pos는 퀸의 배치를 나타냄
 - i열에 배치한 퀸의 위치가 j행이면, pos[i] = j

i열에 배치한 퀸의 위치가 j행이면 pos[i]의 값을 i로 합니다.



Do it! 실습 5-7

20: set(0) # 0열에 퀸을 배치

```
실행 결과
01: # 각 열에 퀸을 1개 배치하는 조합을 재귀적으로 나열하기
                                                          0000000
02:
                                                         0000001
03: pos = [0] * 8
                      # 각 열에서 퀸의 위치를 출력
                                                          00000002
04:
                                                         0000003
05: def put() -> None:
                                                          00000004
      """각 열에 배치한 퀸의 위치를 출력"""
                                                          00000005
      for i in range(8):
07:
                                                          00000006
08:
         print(f'{pos[i]:2}', end='')
                                                         00000007
      print()
09:
                                                         0000010
10:
                                                          0000011
11: def set(i: int) -> None:
                                                          0000012
12:
      """i열에 퀸을 배치"""
                                                          0000013
      for j in range(8):
                                                          0000014
14:
         pos[i] = j
                      # 퀸을 i행에 배치
                                                          0000015
15:
                      # 모든 열에 퀸 배치를 종료
         if i == 7 :
                                                         00000016
16:
            put()
                                                         (… 생략 …)
17:
         else:
                                                         7777776
18:
            set(i + 1) # 다음 열에 퀸을 배치
                                                         7777777
19:
```

• 완성 파일 chap05/8queen_b.py

한정 작업과 분기 한정법 - (1)

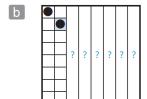
- 실습 5-8
 - 각 행에 퀸을 1개만 배치하는 규칙 1를 적용한 프로그램
 - flag 배열
 - 같은 행에 중복하여 퀸을 배치하지 않기 위한 표시
 - j행에 퀸을 배치하면 flag[j] = True, 배치하지 않으면 False

0행 0열에 퀸을 배치한 상태에서 1열에 퀸을 배치하는 방법 검토합니다.



 True False False False False False False False False False 		
False False False False False False	0	True
False False False False	1	False
4 False 5 False 6 False	2	False
5 False 6 False	3	False
6 False	4	False
	5	False
7 False	6	False
	7	False

0행에는 이미 퀸을 배치했으므로 이 결합은 생각할 필요가 없습니다.



0	True	
1	False	-
2	False	
3	False	
4	False	
5	False	
6	False	
7	False	

1행에는 퀸을 아직 배치하지 않았으므로 퀸을 배치합니다.

※ 2~7행도 마찬가지로 배치합니다.

Do it! 실습 5-8

24: set(0)

```
실행 결과
01: # 행과 열에 퀸을 1개 배치하는 조합을 재귀적으로 나열하기
                                                           01234567
02:
                                                           01234576
03: pos = [0] * 8
                          # 각 열에서 퀸의 위치
                                                           01234657
04: flag = [False] * 8
                          # 각 행에 퀸을 배치했는지 체크
                                                           01234675
05:
                                                           01234756
06: def put() -> None:
                                                           01234765
      """각 열에 배치한 퀸의 위치를 출력"""
                                                           01235467
      for i in range(8):
                                                           01235476
09:
         print(f'{pos[i]:2}', end='')
                                                           01235647
10:
      print()
                                                           01235674
11:
                                                           01235746
12: def set(i: int) -> None:
                                                           01235764
      """i열의 알맞은 위치에 퀸을 배치"""
                                                           01236457
14:
      for j in range(8):
                                                           01236475
         if not flag[j]:
15:
                          # i행에 퀸을 배치하지 않았으면
                                                           01236547
             pos[i] = i
16:
                          # 퀸을 j행에 배치
                                                           01236574
17:
            if i == 7:
                          # 모든 열에 퀸 배치를 완료
                                                           01236745
18:
                put()
                                                           01236754
19:
             else:
                                                           01237456
20:
                flag[j] = True
                                                           01237465
                set(i + 1) # 다음 열에 퀸을 배치
21:
                                                           (… 생략 …)
22:
                flag[j] = False
                                                           76543210
23:
```

0열에 퀸을 배치

• 완성 파일 chap05/8queen_bb.py

한정 작업과 분기 한정법 – (2)

- 실습 5-8
 - set() 함수에서는 퀸을 아직 배치하지 않은 행 (flag[j]가 False인 행)에만 퀸을 배치할 수 있음
 - 한정bounding 작업
 - 필요하지 않은 분기를 없애서 불필요한 조합을 열거하지 않는 방법
 - 분기 한정법^{branching} and bounding method
 - 분기 작업과 한정 작업을 조합하여 문제를 풀이하는 방법

Do it! 실습 5-8

02:

08:

09:

10:

11:

13:

14:

15:

16:

17:

18:

19:

20:

21:

22:

23:

24: set(0)

```
실행 결과
01: # 행과 열에 퀸을 1개 배치하는 조합을 재귀적으로 나열하기
                                                          01234567
                                                          01234576
03: pos = [0] * 8
                          # 각 열에서 퀸의 위치
                                                          01234657
04: flag = [False] * 8
                          # 각 행에 퀸을 배치했는지 체크
                                                          01234675
                                                          01234756
06: def put() -> None:
                                                          01234765
      """각 열에 배치한 퀸의 위치를 출력"""
                                                          01235467
      for i in range(8):
                                                          01235476
         print(f'{pos[i]:2}', end='')
                                                          01235647
      print()
                                                          01235674
                                                          01235746
12: def set(i: int) -> None:
                                                          01235764
      """i열의 알맞은 위치에 퀸을 배치"""
                                                          01236457
      for j in range(8):
                                                          01236475
                          # j행에 퀸을 배치하지 않았으면
         if not flag[j]:
                                                          01236547
            pos[i] = j
                          # 퀸을 j행에 배치
                                                          01236574
            if i == 7:
                          # 모든 열에 퀸 배치를 완료
                                                          01236745
               put()
                                                          01236754
            else:
                                                         01237456
               flag[j] = True
                                                          01237465
               set(i + 1) # 다음 열에 퀸을 배치
                                                         (… 생략 …)
               flag[j] = False
                                                          76543210
```

0열에 퀸을 배치

• 완성 파일 chap05/8queen_bb.py

8퀸 문제 해결 프로그램 만들기

■ 실습 5-9

- 체스에서 퀸은 대각선 방향으로 이동할 수 있으므로 어떤 대각선에서 보더라도 퀸을 1개만 배치하는 한정 작업을 추 가로 적용해야 함
- 8퀸의 대각선 배치 문제까지 고려하여 해결한 프로그램
- flag_b, flag_c 배열
 - 양쪽 대각선 방향에 퀸을 배치했는지 검토하는 배열



b flag_c를 검토하는 라인

Do it! 실습 5-9

```
실행 결과
01: #8퀸 문제 알고리즘 구현하기
                                                              04752613
                                                              05726314
03: pos = [0] * 8
                                                              06357142
04: flag_a = [False] * 8
                                                              06471352
05: flag_b = [False] * 15
                                                              13572064
06: flag_c = [False] * 15
07:
                                                              14602753
                                                              14630752
08: def put() -> None:
                                                              (… 생략 …)
      """각 열에 배치한 퀸의 위치를 출력"""
                                                              72051463
      for i in range(8):
                                                              73025164
          print(f'{pos[i]:2}', end='')
12:
      print()
13:
14: def set(i: int) -> None:
       """i열의 알맞은 위치에 퀸을 배치"""
      for j in range(8):
                                      # j행에 퀸이 배치되지 않았다면
          if( not flag_a[j]
                                      # 대각선 방향(//)으로 퀸이 배치되지 않았다면
              and not flag_b[i + j]
             and not flag_c[i - j + 7]): # 대각선 방향(\)으로 퀸이 배치되지 않았다면
             pos[i] = j
                                      # 퀸을 i행에 배치
             if i == 7:
                                      # 모든 열에 퀸을 배치 완료
                 put()
              else:
                 flag_a[j] = flag_b[i + j] = flag_c[i - j + 7] = True
25:
                                      # 다음 열에 퀸을 배치
                 set(i + 1)
                flag_a[j] = flag_b[i + j] = flag_c[i - j + 7] = False
26:
28: set(0)
                # 0열에 퀸을 배치
```

• 완성 파일 chap05/8queen.py