AR(1) y MA(1)

Juan Andrés Montero Zúñiga

Septiembre 2024

1. MA(1)

La ecuación del modelo es:

$$y_t = \theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

Con:

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

1.1. Esperanza y Varianza

$$E[y_t] = \theta E[\epsilon_{t-1}] + E[\epsilon_t] = 0$$

Por lo tanto:

$$E[y_t] = 0$$

La varianza se calcula como:

$$\mathrm{Var}(y_t) = E[(y_t - E[y_t])^2] = E[y_t^2]$$

Expandiendo:

$$E[y_t^2] = E[(\theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t)^2]$$

$$= E[\theta^2\epsilon_{t-1}^2 + 2\theta\epsilon_{t-1}\epsilon_t + \epsilon_t^2]$$

$$= \theta^2 E[\epsilon_{t-1}^2] + 2\theta E[\epsilon_{t-1}\epsilon_t] + E[\epsilon_t^2]$$

Dado que:

$$E[\epsilon_{t-1}^2] = \sigma_\epsilon^2, \quad E[\epsilon_t^2] = \sigma_\epsilon^2$$

y

$$E[\epsilon_{t-1}\epsilon_t] = 0 \quad \text{(propiedad de ruido blanco)}$$

Entonces:

$$\mathrm{Var}(y_t) = \theta^2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2$$

Por lo tanto, la varianza de y_t es:

$$\mathrm{Var}(y_t) = (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2$$

1.2. Covarianza

La covarianza entre y_t y y_{t-s} se define como:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-s}) = E[y_t y_{t-s}] - E[y_t]E[y_{t-s}]$$

Dado que $E[y_t] = 0$, esto se simplifica a:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-s}) = E[y_t y_{t-s}]$$

Para $s = 1$, tenemos:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = E[(\theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t)(\theta\epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-1})]$$

Expandiendo:

$$= \theta E[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1}] + \theta E[\epsilon_t\epsilon_{t-2}] + \theta^2 E[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}]$$

Dado que:

$$E[\epsilon_t\epsilon_{t-2}] = 0, \quad E[\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}] = 0$$

Entonces:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \theta\sigma_\epsilon^2$$

Para $s > 1$:

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-s}) = 0$$

1.3. Correlación

La correlación para $s = 1$ es:

$$\mathrm{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1})}{\mathrm{Var}(y_t)} = \frac{\theta\sigma_\epsilon^2}{(1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

2. AR(1)

La ecuación del modelo es:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

Donde:

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

2.1. Esperanza y Varianza

La esperanza de y_t es:

$$E[y_t] = \phi E[y_{t-1}] + E[\epsilon_t]$$

Como $E[\epsilon_t] = 0$, tenemos:

$$E[y_t] = \phi E[y_{t-1}]$$

Si el proceso es estacionario, $E[y_t] = E[y_{t-1}] = \mu$, entonces:

$$\mu = \phi\mu$$

Para que esta igualdad se cumpla, $\mu = 0$. Por lo tanto:

$$E[y_t] = 0$$

2.2. Varianza

La varianza de y_t es:

$$\text{Var}(y_t) = E[(y_t - E[y_t])^2] = E[y_t^2]$$

Usamos la ecuación del modelo para expandir y_t^2:

$$E[y_t^2] = E[(\phi y_{t-1} + \epsilon_t)^2]$$

Expandiendo:

$$E[y_t^2] = E[\phi^2 y_{t-1}^2 + 2\phi y_{t-1}\epsilon_t + \epsilon_t^2]$$

Sabemos que $E[y_{t-1}\epsilon_t] = 0$ (ruido blanco) y $E[\epsilon_t^2] = \sigma_\epsilon^2$, entonces:

$$E[y_t^2] = \phi^2 E[y_{t-1}^2] + \sigma_\epsilon^2$$

Dado que el proceso es estacionario, $E[y_t^2] = E[y_{t-1}^2] = \text{Var}(y_t)$, entonces:

$$\text{Var}(y_t) = \phi^2 \text{Var}(y_t) + \sigma_\epsilon^2$$

Resolviendo para $\text{Var}(y_t)$:

$$\text{Var}(y_t)(1 - \phi^2) = \sigma_\epsilon^2$$

Por lo tanto, la varianza de y_t es:

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}, \quad \text{para } |\phi| < 1$$

2.3. Covarianza

La covarianza entre y_t y y_{t-s} se define como:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) = E[y_t y_{t-s}] - E[y_t]E[y_{t-s}]$$

Dado que $E[y_t] = 0$, esto se simplifica a:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) = E[y_t y_{t-s}]$$

Para $s = 1$, tenemos:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = E[(\phi y_{t-1} + \epsilon_t) y_{t-1}]$$

Expandiendo:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \phi E[y_{t-1}^2] + E[\epsilon_t y_{t-1}]$$

Como $E[\epsilon_t y_{t-1}] = 0$, esto se reduce a:

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \phi \text{Var}(y_{t-1}) = \phi \text{Var}(y_t)$$

Para $s > 1$, por la propiedad del AR(1):

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) = \phi^s \text{Var}(y_t)$$

2.4. Correlación

La correlación entre y_t y y_{t-1} es:

$$\text{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-1})}{\text{Var}(y_t)} = \frac{\phi \text{Var}(y_t)}{\text{Var}(y_t)}$$

Por lo tanto:

$$\text{Corr}(y_t, y_{t-1}) = \phi$$

Para $s > 1$, la correlación es:

$$\text{Corr}(y_t, y_{t-s}) = \phi^s$$