

TRABAJO FINAL INTEGRADOR

Materia Sistemas de Control I

“CONTROL DE POSICIÓN DE UN MOTOR DC”

Profesor: Ing. Claudio Agüero

Alumnas: Sol Nou y Juana Pucheta Noguera

Julio 2024

Introducción.....	2
Definición del problema.....	3
Análisis de la planta.....	4
Modelo matemático.....	4
Diagrama de bloques.....	5
Análisis de respuesta temporal.....	9
Tiempo de establecimiento.....	10
Polos dominantes.....	11
Especificaciones de diseño.....	11
Diseño del controlador.....	12
Controlador PID.....	12
Conclusiones.....	13
Bibliografía.....	15

Introducción

En el siguiente informe se realiza el control de un motor de corriente continua que forma parte de un brazo robótico. Se busca un controlador PID para tal aplicación con el objetivo de controlar la posición del motor.

Para el trabajo se utilizó el programa MatLab que nos permite analizar sistemas en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace mediante herramientas sencillas de trabajar mostrándonos conclusiones simples e importantes.

El desarrollo del trabajo fue articulado con la materia Sistemas de Control 2, donde el motor DC fue un caso de estudio, por lo que traemos y adaptamos las simulaciones hechas en dicha materia para un análisis pertinente a los temas vistos en Sistemas de Control 1, como función de transferencia, análisis de estabilidad, entre otros con el fin de lograr un controlador satisfactorio y eficiente, así integrando los conocimientos obtenidos.

Definición del problema

Respecto a la aplicación del motor podemos pensar que es similar a la de un motor paso a paso, más detenidamente, su principio de funcionamiento es un mecanismo de varias piezas enlazadas que logran movilizarse y articularse por un motor. Si se activa el brazo, el eje del motor rotará un 1 radián y quedará en esa posición hasta la próxima activación. No indagaremos demasiado en el esquema del brazo robótico sino más bien en la configuración del motor.

En este tipo de sistemas la precisión es fundamental, por lo que buscaremos controlar la posición angular del motor para mover una articulación del brazo robótico, obteniendo movimientos exactos. Para controlar la posición utilizaremos como actuador un controlador PID que ajustará la posición del brazo. De forma arbitraria elegimos controlar la posición a 1 radián por movimiento, de todos modos si el cliente lo desea o necesita esta referencia puede ser editada.

Partiremos del análisis de mediciones tomadas aleatoriamente, brindadas por la cátedra de Sistema de Control 2. A partir de estas estudiaremos el comportamiento de las variables en el motor para luego aplicar el controlador.

Se contempla la acción de un torque al cual lo estudiaremos como una perturbación en el sistema, esta puede representar desde un obstáculo en el camino que está haciendo el brazo hasta suciedad en el rotor.

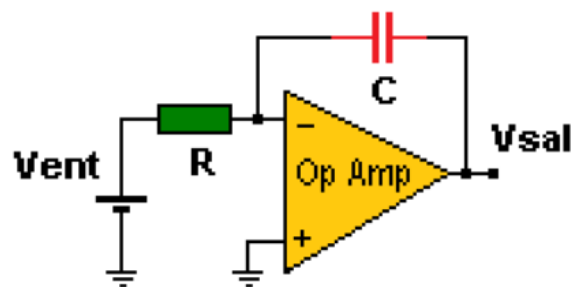
Obtención de la señal

En este proyecto buscamos controlar la posición del eje del motor. Tenemos dos maneras para medir esta señal.

Por un lado podemos aplicar un tacómetro para medir la velocidad angular en RPM, luego a esta señal la pasamos por un circuito integrador conformado por un amplificador operacional y un capacitor. De este modo, midiendo velocidad angular obtenemos la señal de posición en radianes.

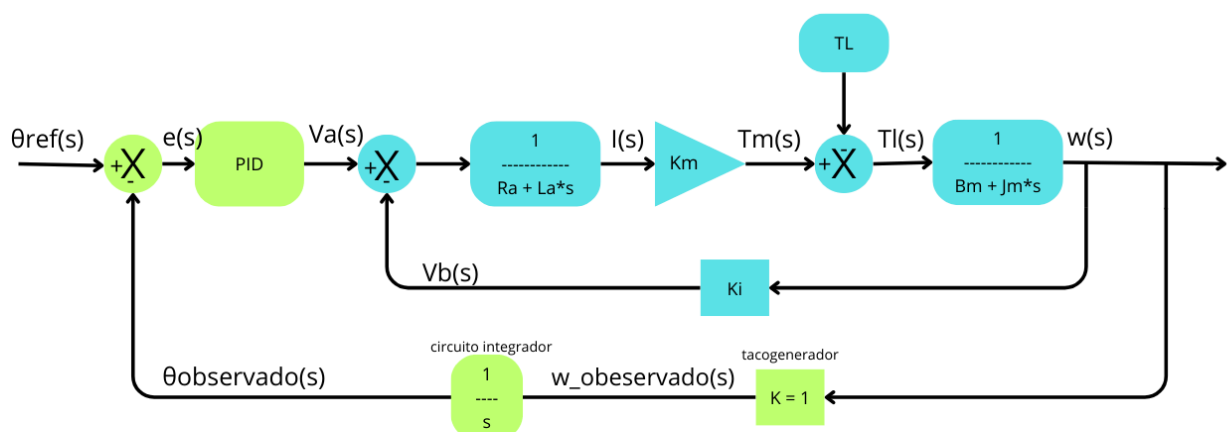
Podemos hacer uso de un [tacómetro FT3406](#) que nos dé una señal analógica con un rango de trabajo de 0V a 1V. Trabajamos con la equivalencia $1 \text{ RPM} = 2\pi/60 \text{ rad/seg}$.

Definimos la ganancia del tacómetro y del integrador como unitaria.



Esquema del circuito integrador.

Definimos a continuación el *diagrama en bloques* del sistema con obtención de la señal con tacogenerador.



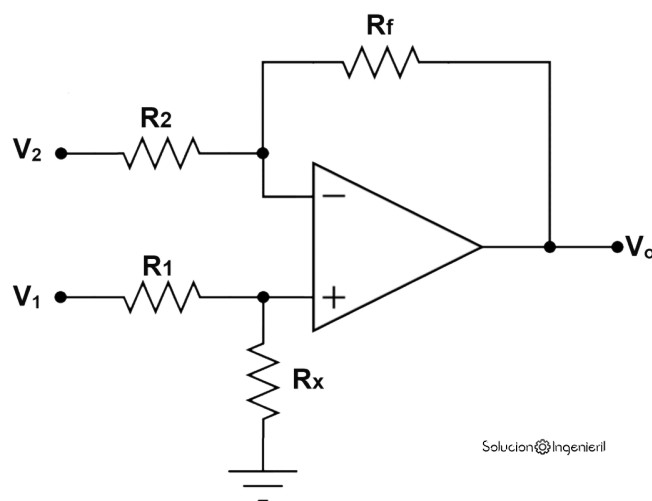
El problema de esta manera de obtener la señal es que el tacómetro no logra medir la RPM nula, que generaría el motor en un ángulo, por lo tanto tendríamos un amplio

rango de movimiento del eje del motor que no se captaría en la medición generando un error grande que no se puede medir. De este modo no obtenemos una señal que represente al sistema y por lo tanto no podremos controlarla satisfactoriamente.

La otra forma de obtener la señal de ángulo de rotación del eje del motor sería a través de un Encoder. Esto no tiene error porque podemos medir directamente la posición del eje del motor sin necesidad de aplicar un integrador.

Podemos aplicar [Encoder absoluto con salida analógica](#) el cual tiene la posibilidad de suministrarse con salida analógica 4/20mA. Este instrumento nos permite obtener la medición de velocidad nula del motor y por lo tanto podremos controlar el comportamiento del motor de manera correcta.

A la señal generada por el encoder la pasaremos por una resistencia de 250 ohm para obtener las mediciones expresadas en voltios, de 1V a 5V. Luego a esta señal, por el tipo de mediciones dadas por la cátedra de SC2, la debemos convertir en un rango de 0V a 4V, por lo que la pasamos por un circuito restador.



Esquema circuito restador.

V_1 sería 1V, el valor que queremos restar. V_2 es el valor de voltaje obtenido por el encoder. La salida de este circuito restador es un voltaje V_0 que a continuación deberá ser mapeado al ángulo en radianes que represente. Una vez obtenida la posición angular observada, podemos compararla con la de referencia para crear la acción de control.

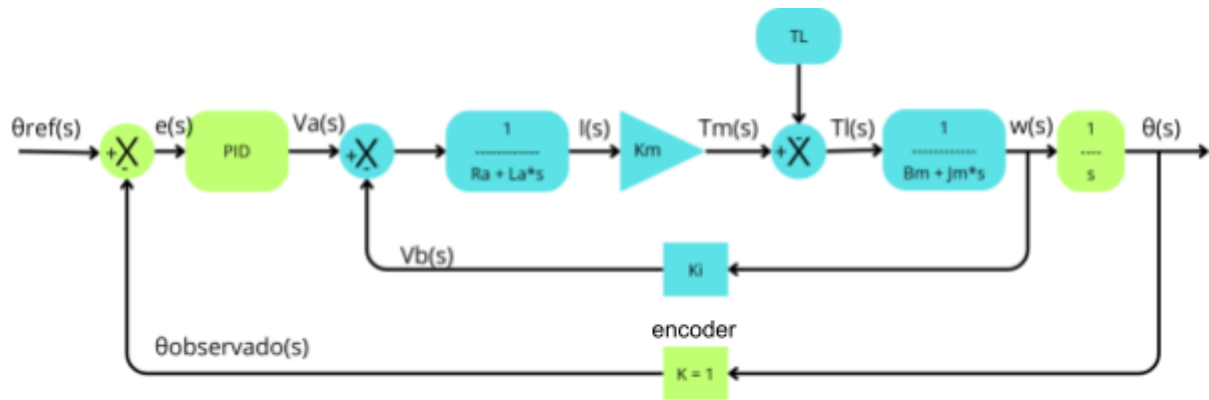


Diagrama de bloques del sistema completo

Análisis de la planta

Para el análisis del sistema se busca el modelo matemático del mismo, en primera instancia.

Modelo matemático

Se plantean el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del sistema a partir del modelo eléctrico.

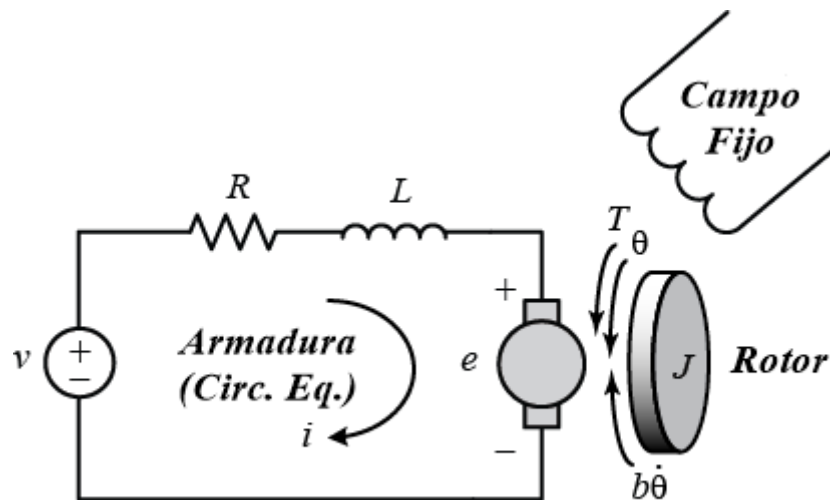


FIG 1: Esquema análogo eléctrico del sistema

A partir de esto se plantea la ecuación de la malla de armadura:

$$v_a(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + v_b(t) \quad (1)$$

El bloque mecánico del motor queda expresado por la siguiente ecuación:

$$T_m(t) = J_m \frac{dw(t)}{dt} + b_m w(t) \quad (2)$$

Se define una relación proporcional entre el voltaje inducido al motor y la velocidad angular mediante la constante contraelectromotriz K_i :

$$v_b(t) = K_i w(t) \quad (3)$$

También se define una proporcionalidad entre el torque mecánico y la corriente eléctrica que circula por el motor:

$$T_m(t) = K_m i(t) \quad (4)$$

Se llevan las ecuaciones planteadas al dominio de Laplace, despejando las variables de interés:

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_b(s) \quad (5)$$

$$T_m(s) = J_m s \omega(s) + B_m \Omega(s) \quad (6)$$

$$V_b(s) = K_b \omega(s) \quad (7)$$

$$T_m(s) = K_m I_a(s) \quad (8)$$

Se despeja el término referido a la inductancia de la ecuación 5 para luego reescribir las ecuaciones 6 y 8:

$$L_a s I_a(s) = V_a(s) - R_a I_a(s) - V_b(s) \quad (9)$$

Reescribiendo la ecuación la ecuación 9 a partir de las 7 y 8:

$$L_a s \frac{T_m(s)}{K_m} = V_a(s) - R_a \frac{T_m(s)}{K_m} - K_b \omega(s) \quad (10)$$

Despejando la variable de interés queda expresada la entrada:

$$V(s) = \frac{(R_a + L_a s)(T_m(s))}{K_m} + K_b \omega(s) \quad (11)$$

De la ecuación 7 se despeja la salida del sistema:

$$\omega(s) = \frac{T_m(s)}{(J_m s + B_m)} \quad (12)$$

Finalmente la *función de transferencia* queda expresada tal que así:

$$FdTLA = \frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s)} \quad (13)$$

Tal expresión corresponde a la función de transferencia a lazo abierto del sistema, como tenemos un K_i de realimentación dejaremos expresada también la función de transferencia a lazo cerrado.

$$FdTLC = \frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s) + K_i K_m} \quad (14)$$

Diagrama de bloques

Realizamos la modelización del diagrama en bloques de la planta, a esta le aplicaremos el controlador.

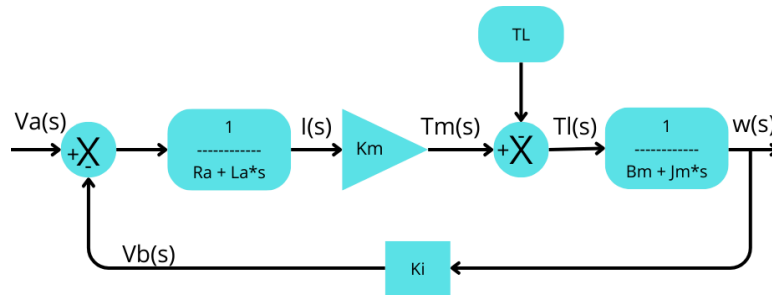


FIG 2: Diagrama de bloques de la planta.

Cálculo de parámetros del motor.

Comenzamos calculando el valor de la resistencia de armadura R_a . Conocemos los valores de corriente que se generan y, sabiendo que la tensión de alimentación son 12V, podemos aplicar Ley de Ohm y conocer la resistencia.

$$i_{max} = 0.4266 \text{ A}$$

$$R_a = 12/i_{max} = 28.131 \text{ } [\Omega]$$

Luego definimos el valor de la constante K_m como el cociente entre la tensión de alimentación y la ganancia de régimen del motor.

$$K_m = 12/198.2488022 = 0.060530 \text{ } [N.m/A]$$

Recordando la función de transferencia de la velocidad angular respecto al voltaje de entrada y de la posición respecto al voltaje de entrada podemos despejar los parámetros que quedan de calcular.

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s) + K_i K_m}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{(R_a + L_a s)(B_m + J_m s) + K_i K_m}$$

MatLab nos da una función de transferencia normalizada y sabemos que los coeficientes del denominador representan el producto entre ciertos parámetros del motor. Despejando estos mismos podemos calcular K_i .

$$K_i = \frac{R_a}{40e3 * K_m} = 1.1619e - 05$$

El valor 40e3 se da por la combinación de $\frac{\omega}{\tau_L}$ y luego desnormalizar esa expresión. Nos

queda entonces $\frac{\omega}{\tau_L} = \frac{\tau_L * R_a}{K_i * K_m}$

A partir de acá asumimos al coeficiente de viscosidad B como nulo y despejamos J y L.

$$J_m = (K_i * K_m * \text{sys_va.den}\{1\}(2)) / R_a = 2.2328e - 09 [kg.m^2]$$

$$L_a = (K_i * K_m * \text{sys_va.den}\{1\}(1)) / J_m = 6.2811e - 04 [Hy]$$

Siendo sys_va.den{1}(2) el coeficiente que acompaña a S en la función de transferencia y sys_va.den{1}(1) el coeficiente que acompaña a S^2.

Finalmente, los resultados obtenidos son:

$$K_i = 1.1619e - 05 [Vs/rad] : \text{Constante contraelectromotriz}$$

$$K_m = 0.060530 [N.m/A] : \text{Constante de torque}$$

$$R_a = 28.131 [\Omega] : \text{Resistencia}$$

$$L_a = 6.2811e - 04 [Hy] : \text{Inductancia}$$

$$J_m = 2.2328e - 09 [kg.m^2] : \text{Inercia mecánica}$$

$$B_m = 0 [N.m/(rad/s)] : \text{Coeficiente de rozamiento interno}$$

$$FdTLC = \frac{40000}{1.994e-09 s^2 + 8.931e-05 s + 1}$$

Estabilidad

Se realiza un previo análisis de estabilidad a la función de transferencia obtenida con el fin de revisar cómo podría responder a variaciones en los parámetros.

En principio se puede estudiar estabilidad a partir de un pequeño análisis del polinomio característico, es decir el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado. Es condición necesaria pero no suficiente para afirmar la estabilidad del sistema que el polinomio sea completo y que los coeficientes sean positivos. Se observa que esto ocurre, dando indicios de una estabilidad, pero se procede con un análisis más significativo.

El estudio se hará a partir del criterio de Routh-Hurwitz, revisando si existe algún polo en el semiplano derecho del plano complejo s . En el caso de que haya uno o más polos en tal semiplano se considera al sistema inestable; en caso contrario, será estable. Se utiliza el arreglo de Routh a partir del polinomio característico $D(s)$:

$$D(s) = a_0 s^2 + a_1 s^1 + a_2 = 1.994e - 09 s^2 + 8.931e - 05 s + 1$$

s^2	$a_0 = 1.994e - 09$	$a_2 = 1$
s^1	$a_1 = 8.931e - 05$	0
s^0	$b_1 = 1.994e - 09$	0

$$b_1 = \frac{a_1 a_0 - a_3 a_2}{a_1} = a_0 = 1.994e - 09$$

Teniendo en cuenta el arreglo, Routh establece la condición necesaria y suficiente de estabilidad: *“Un sistema será estable si y sólo si todos los elementos de la primera columna del Arreglo de Routh son positivos”*. De esta forma, se puede afirmar que el sistema es estable.

Análogamente, utilizando *MatLab*, se puede aplicar la herramienta de **lugar de raíces** para estudiar la estabilidad de una función de transferencia. Similar al criterio de Routh-Hurwitz, si al aplicar *RLOCUS(FdT)* obtenemos un gráfico con polos en el semiplano derecho del plano complejo definimos a la función como inestable. En este caso al variar el valor de la ganancia K , todos los polos están ubicados en el semiplano izquierdo por lo tanto se reafirma que la función es estable.

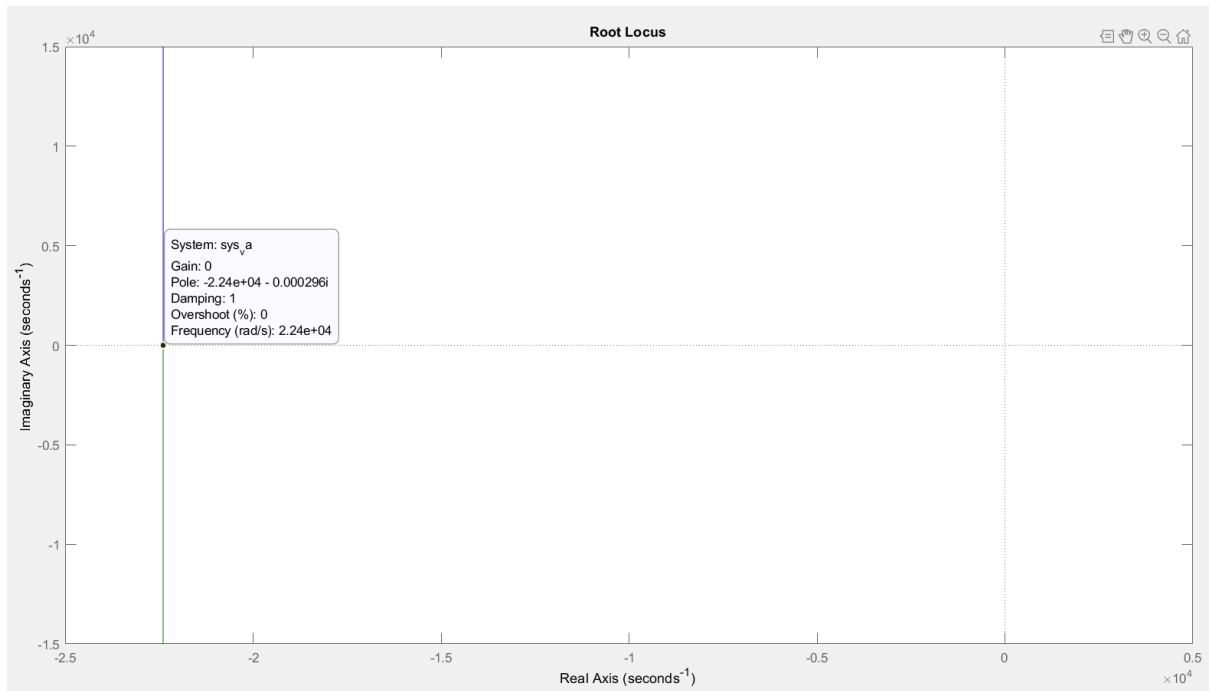


FIG 5: Lugar de raíces del sistema

La función presenta dos polos pero ningún cero. Se forma entonces un punto de separación en -2.24×10^4 , y se definen teóricamente un cero en $+\infty$ y otro en $-\infty$.

Análisis de respuesta temporal

En este apartado nos dedicaremos al estudio del sistema en el dominio temporal. El sistema es uno de segundo orden, ya que su función de transferencia posee dos polos. El comportamiento de estos sistemas está caracterizado por 3 parámetros: $K = \text{ganancia estática}$, $\zeta = \text{coeficiente de amortiguamiento}$ y $\omega_n = \text{frecuencia natural}$.

Se puede escribir la función de transferencia en base a estos parámetros de la forma:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Podemos ir determinando los valores conociendo nuestra función de transferencia. La ganancia estática es el valor de la función cuando $s=0$, por lo que $K = 40000$.

Al tener polos reales negativos iguales se puede definir que $\zeta = 1$ y el sistema es críticamente amortiguado. La respuesta va a ser una función monótona creciente, estable, sin retardo ni cambio de concavidad, como se puede ver en la siguiente gráfica:

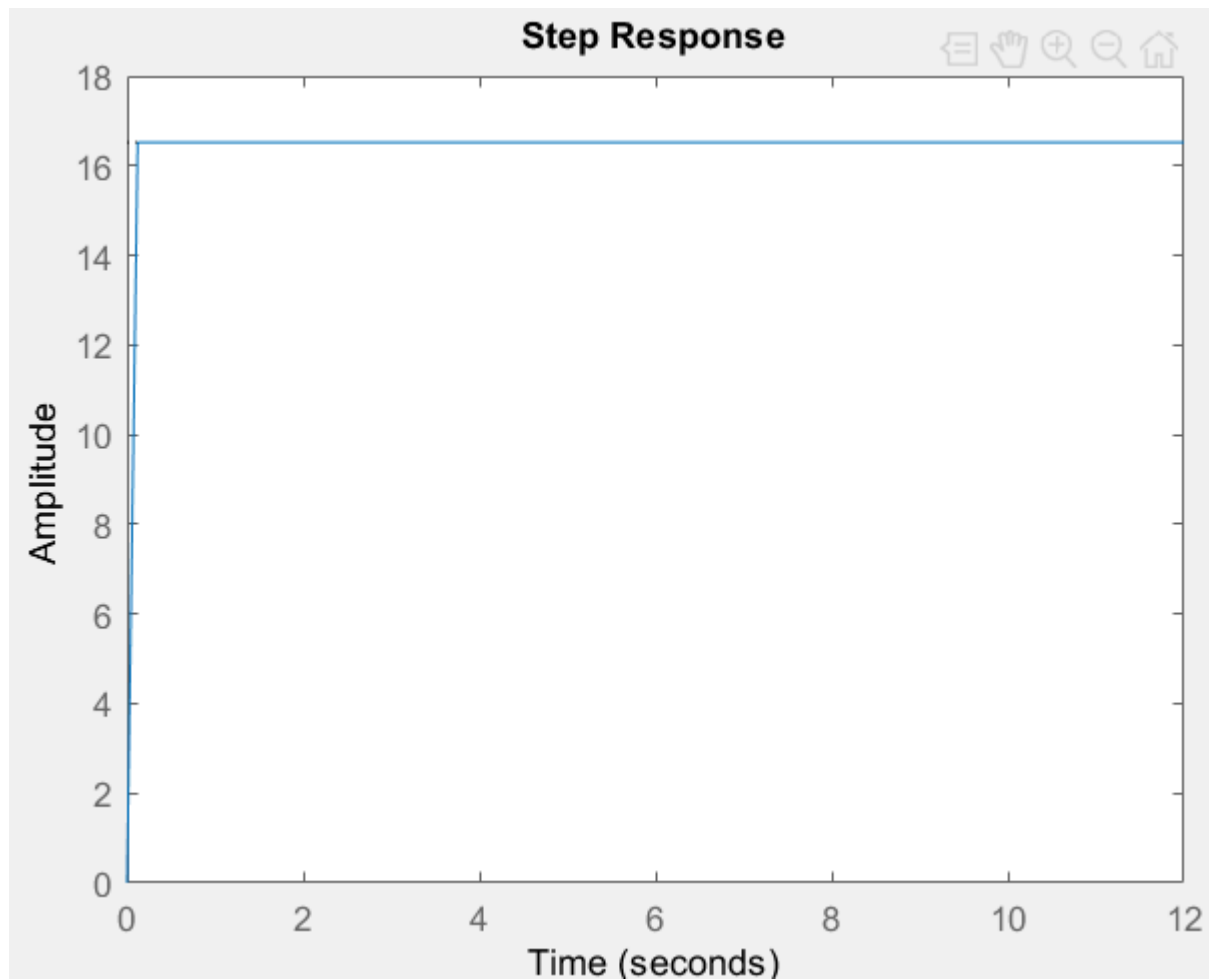


FIG 6: Respuesta temporal a entrada escalón de 12 voltios.

Tiempo de establecimiento

En esta sección se hará referencia al tiempo que demora el sistema en llegar a su estado estable luego de una perturbación. En otras palabras, cuánto demora su estado transitorio.

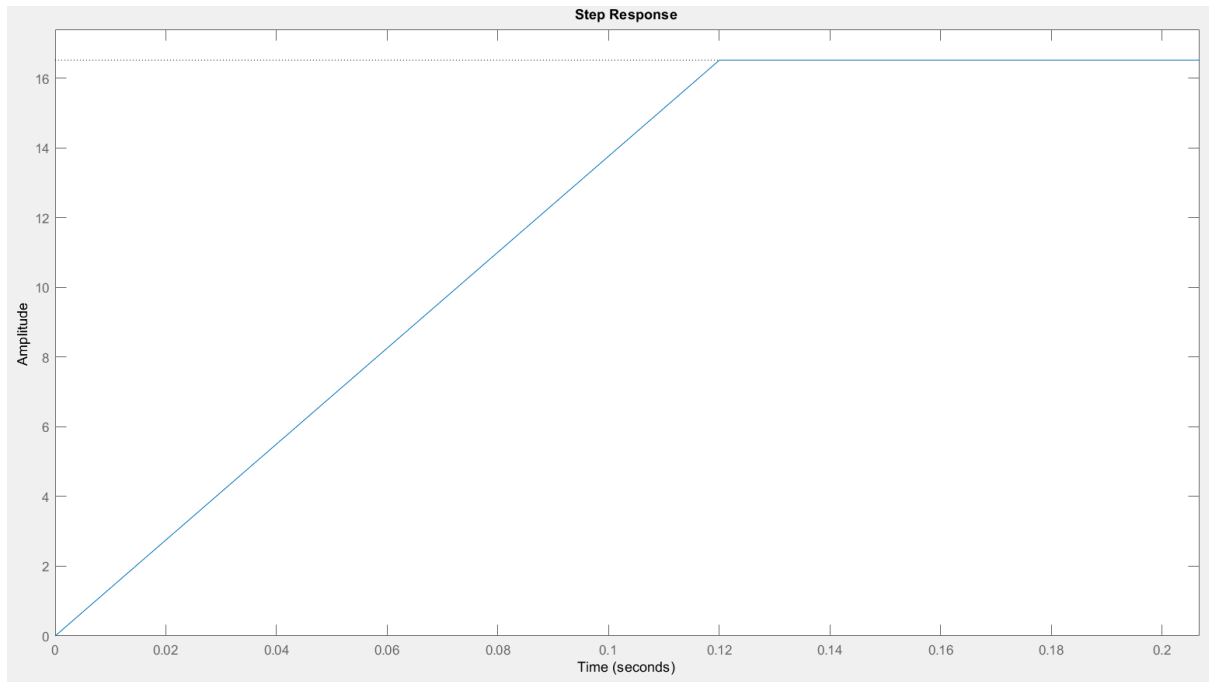


FIG 7: Respuesta temporal a entrada escalón de 12 voltios

Se considera que un sistema llegó a su estado estable cuando alcanza el 98% de su valor de régimen. Analizando a partir del gráfico se asegura que el tiempo de establecimiento de este sistema es de **0.11 segundos**.

Polos dominantes

Se le llama polo dominante a aquel que está ubicado más cerca del origen en el semiplano complejo. Este polo es el que más influye en la respuesta temporal, determinando la velocidad de la respuesta. En este sistema el polo dominante será en **-2.24e+04** dado que es la única ubicación de los polos.

Especificaciones de diseño

Planteamos a continuación las especificaciones de diseño en dominio temporal que queremos alcanzar con nuestro controlador:

Tiempo de establecimiento: No permitimos que el tiempo de establecimiento de la salida del sistema sea mayor a 0.5 segundos pues la aplicación de este motor debe dar una respuesta rápida.

Error en estado estable: Buscamos que sea el mínimo posible, preferentemente nulo.

Sobrepasamiento máximo: No permitimos que haya sobrepasamiento debido a que la referencia exigida debe cumplirse de manera precisa.

En este modelo el criterio de sobrepasamiento se cumple de manera satisfactoria ya que la función de transferencia tiene polos reales e iguales lo que genera que la respuesta sea críticamente amortiguada. Este análisis ya se hizo en un apartado previo.

Diseño del controlador

Controlador PID

Con este método desarrollaremos un controlador de la forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t)$$

Trabajamos con el error a través de tres parámetros que nos permiten obtener la respuesta deseada. Contemplamos una acción proporcional al error, una acción integral la cual acumulará el valor del error y por último una acción derivativa que busca prever los cambios del sistema.

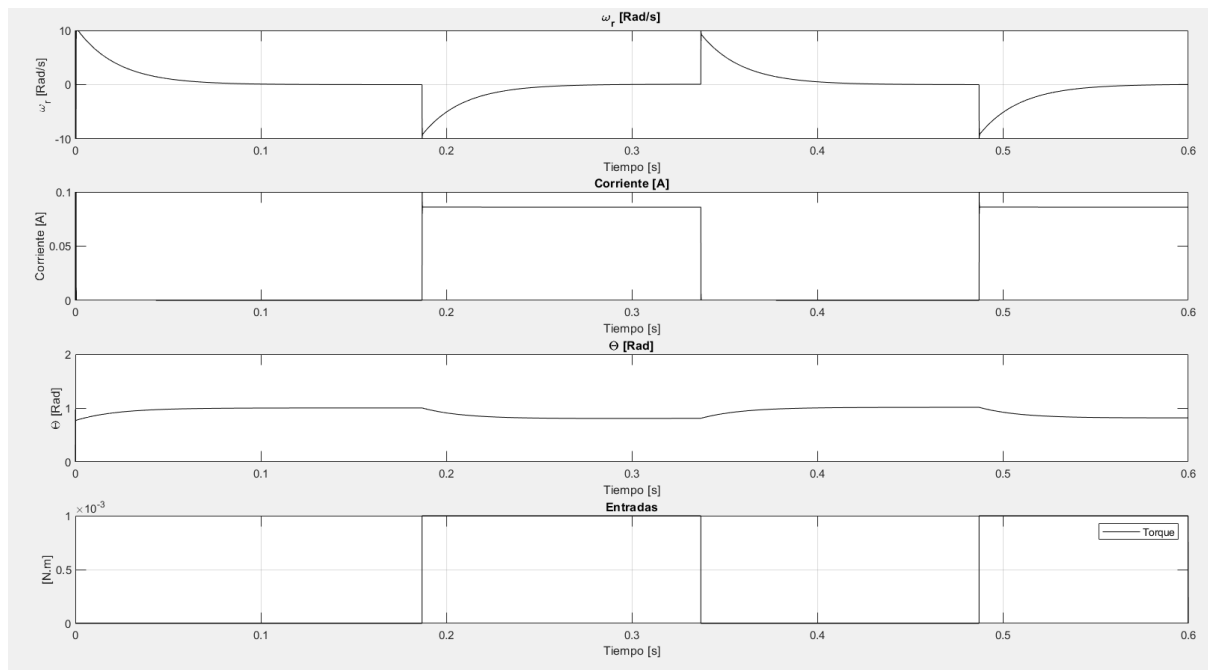
En la práctica no es muy recomendable trabajar con un valor de K_d considerablemente grande dado que esta acción es muy sensible a los cambios y si se presenta, por ejemplo, un pico de corriente en el sistema esta acción no se comportará de manera deseada en ese pico y puede llegar a inestabilizar un sistema previamente definido estable.

En este proyecto definimos el valor de K_d mucho menor al valor de la constante proporcional, lo hemos considerado pero no queremos que actúe de forma muy influenciada.

Nos fijamos como objetivo que el ángulo del motor permanezca en una referencia de 1 radian sometido al torque siendo las condiciones iniciales nulas, por lo tanto estaremos implementando un controlador de posición.

Constantes del PID: $K_p = 12$, $K_i = 5$, $K_d = 0.2$.

Quedan las gráficas:



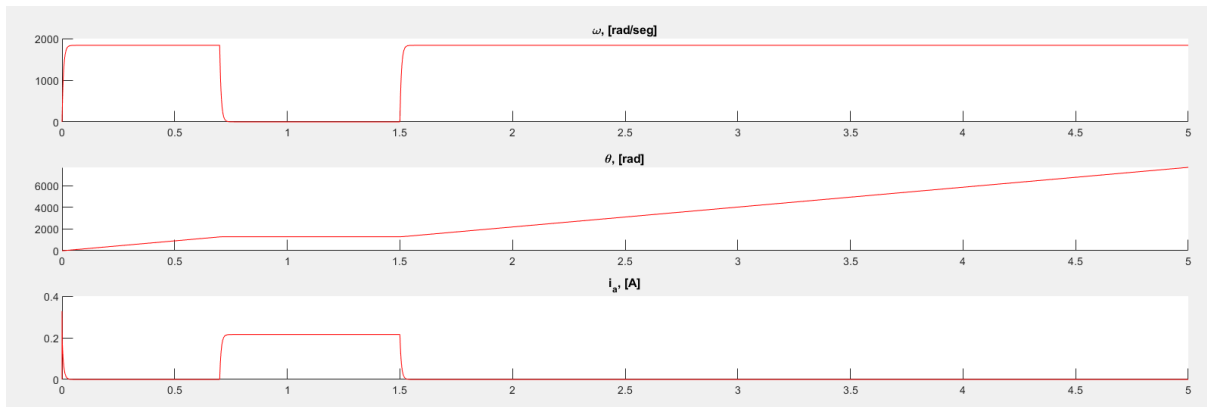
Se pudo mantener claramente la referencia de la posición del motor en 1 radián, vemos que cuando el torque afecta al motor se ve también afectada la corriente y un tiempo breve después también se perturba la salida.

Enfatizamos en que cuando la salida es perturbada por el torque rápidamente llega a un valor estable y cuando la perturbación desaparece logra volver a la referencia que le fué indicada. Podríamos minimizar ese pequeño tiempo de establecimiento de la salida aumentando el valor de la acción integral pero para la aplicación de este proyecto es suficiente.

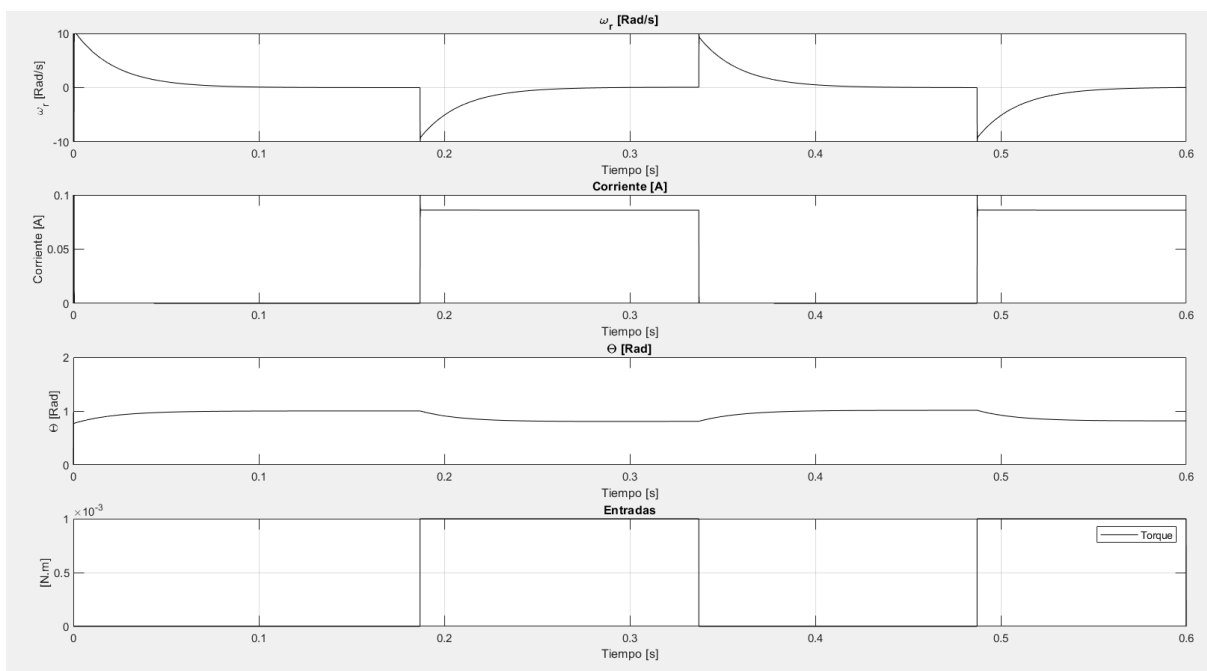
Conclusiones

Respecto a la eficiencia del compensador se desarrolla a continuación el modelo del motor sin controlador y el modelo con controlador.

Modelo sin controlador:



Modelo con controlador:



Vemos que se logró controlar la salida del sistema y mantenerla en el valor especificado en el diseño. Se contempló una perturbación cada cierto tiempo lo que permite que el sistema sea más robusto y más propenso a rechazar perturbaciones por lo tanto lo hace de mejor calidad.

De acuerdo a la velocidad angular se la mantuvo en un valor razonable para la aplicación del motor. Podemos decir que se desarrolló un controlador eficiente.

La realización de este proyecto fué interesante para aplicar conceptos vistos en la materia de manera eficiente y sobre todos comprenderlos usándolos. Se lograron integrar conceptos y comprender mejor las herramientas para el análisis de sistemas.

Bibliografía

Sistemas de Control Automático - Benjamin Kuo

Apuntes de la cátedra Sistemas de Control 1 - 2023

Tabla de datos - Cátedra de Sistemas de Control 2