UNIVERSIDAD DEL CEMA

UCEMA

TRABAJO FINAL

Aplicación de metodologías de cálculo de probabilidad de default para los bonos argentinos

Programa de Finanzas Cuantitativas

Alumno: Juan Augusto Sanchez Cimetti

Introducción

En el contexto de finanzas e inversiones en activos financieros, el "riesgo" se refiere a la posibilidad de que los rendimientos reales de una inversión difieran de los rendimientos esperados. En otras palabras, es la probabilidad de que ocurran eventos inesperados que afecten negativamente el desempeño financiero de un activo o una cartera.

Existen varios tipos de riesgo en el ámbito financiero, y algunos de los más comunes incluyen:

1. Riesgo de Mercado: Se refiere a la variabilidad de los rendimientos de un activo debido a cambios en factores macroeconómicos como tasas de interés, tasas de cambio, precios de commodities, índices de acciones, entre otros.
2. Riesgo Crediticio / default: Es el riesgo de pérdida asociado con la incapacidad de un deudor (por ejemplo, una empresa o gobierno) para cumplir con sus obligaciones de pago. Se relaciona con la calidad crediticia del emisor de un activo financiero.
3. Riesgo de Tasa de Interés: Surge de los cambios en las tasas de interés del mercado, que afectan el valor presente de flujos de efectivo futuros, especialmente para bonos y otros instrumentos de deuda.
4. Riesgo de Liquidez: Refiere a la dificultad de vender un activo sin incurrir en pérdidas significativas. Los activos ilíquidos pueden experimentar descuentos en el precio de mercado.
5. Riesgo Operativo: Se relaciona con la posibilidad de pérdidas debido a fallas en los procesos operativos, sistemas internos, fraudes, errores humanos, etc.
6. Riesgo Político: Surge de la influencia de factores políticos en los mercados financieros, como cambios en políticas gubernamentales, elecciones, conflictos internacionales, etc.
7. Riesgo Cambiario: Afecta a inversiones denominadas en monedas extranjeras debido a la volatilidad en las tasas de cambio.
8. Riesgo de Inversión: Relacionado con la posibilidad de pérdida en el valor de una inversión debido a cambios en las condiciones del mercado.

Según la teoría financiera, cada uno de estos riesgos deben estar considerados en la tasa de rendimiento a exigir de las inversiones por una mayor prima de riesgo. Es decir que dicha tasa incluye la tasa libre de riesgo y a la misma se incorpora una tasa de rendimiento exigida por cada riesgo en la cual se encuentra expuesto el activo.

En el caso de la Argentina, uno de los principales riesgos que se encuentra inmerso en los títulos públicos es la del riesgo de default el cual se evidencia por las sucesivas reestructuraciones de deuda que han existido siendo la última en septiembre del 2020 y es por esto por lo que estaremos haciendo foco en este riesgo.

Los inversores cuentan con distintas herramientas para tener una noción del riesgo de default y las principales son:

1. Calificaciones Crediticias: Las agencias de calificación crediticia emiten calificaciones que evalúan la capacidad de un país para cumplir con sus obligaciones de deuda. Algunas de las principales agencias son Moody's, Standard & Poor's y Fitch. Estas calificaciones proporcionan una evaluación general del riesgo crediticio.
2. Índices de Riesgo País: Los índices de riesgo país proporcionan una medida cuantitativa del riesgo crediticio asociado con un país en particular. Ejemplos incluyen el Índice de Riesgo País de J.P. Morgan (EMBI+) y el Índice de Riesgo País de Bloomberg (BCI).
3. CDS (Credit Default Swaps): Los CDS son instrumentos financieros derivados que permiten a los inversores comprar protección contra el incumplimiento de un emisor de deuda soberana. El precio de los CDS refleja la percepción del mercado sobre el riesgo de default.
4. Análisis Fundamental: Los inversores realizan análisis fundamental para evaluar la salud económica, fiscal y política de un país. Esto implica examinar indicadores como el crecimiento económico, la deuda pública, la balanza fiscal y la estabilidad política.

Al momento de invertir estimar las probabilidades de incumplimiento de obligaciones individuales es el primer paso al evaluar la exposición crediticia y las pérdidas potenciales que enfrentan un inversionista o una institución financiera.

Al momento de investigar en que bonos invertir es usual mirar cuál es el rendimiento o TIR que estos ofrecen. Dicho rendimiento no es otra cosa más que el rendimiento teórico que se obtendría en caso de que no ocurra un incumplimiento y se mantenga el título hasta su vencimiento. Cuando existe el riesgo de que el emisor incumpla, un inversor prudente debe esperar obtener un rendimiento inferior a la TIR al vencimiento.

Afortunadamente para quienes realmente compran bonos, los casos de incumplimiento no son tan comunes. Pero cuando ocurre ese desafortunado evento, la tasa de rendimiento del tenedor de bonos depende de cuándo ocurre el incumplimiento y del valor restante del bono.

El propósito de este documento es analizar dos técnicas diferentes para estimar las probabilidades de incumplimiento utilizando información basada en el mercado. Las técnicas basadas en el mercado pueden aplicarse siempre que exista un mercado secundario relativamente líquido, o derivados de crédito que hagan referencia a él. Bajo el supuesto de eficiencia del mercado, los precios de los valores y derivados de crédito son prospectivos y capturan todos información disponible públicamente sobre el riesgo de incumplimiento de un deudor debido a que los precios de mercado son observables y mediante ingeniería inversa permiten extraer la probabilidad de incumplimiento del deudor.

Es práctica habitual que una primera intuición sobre el riesgo de un activo soberano se busque mirando el riesgo país o viendo el diferencial en la TIR de bonos de similares características y de distintos emisores permitiendo dar una noción de la prima de riesgo del activo. Como se ha mencionado, está práctica no permite cuantificar el riesgo de crédito o incumplimiento del pago sino dar una intuición de este.

Este hecho me ha motivado en incursionar en dos metodologías distintas para poder inferir las probabilidades de Default de los títulos soberanos del canje del 2020: la primera comentada por el autor Donald J. Smith en el libro Bond Math el cual calcula una probabilidad marginal / incondicional de default y la segunda es una probabilidad condicional sugerida por el autor Jorge A. Chan-Lau en la publicación realizada por el FMI.

Modelo de probabilidad Marginal / Incondicional

La metodología propuesta por el autor Donald J. Smith se basa en el cálculo de una probabilidad marginal/incondicional de default cuya propuesta se fundamente en que el credit spread, o diferencia entre el valor de un activo descontado a una curva libre de riesgo y el valor de mercado, representa el valor actual de la pérdida esperada en caso de default considerando que el default puede ocurrir en cada fecha de pago de cupón. Matemáticamente esto puede representarse de la siguiente manera:

$$Credit\ Spread = Precio\ Risk\ Free - Precio\ Mercado \quad = Q\sum\frac{Precio\ Risk\ Free\ en\ t - Recovery}{(1+rf)^t}$$

Q: correspondería a la probabilidad de default

Precio Risk Free en t: es el precio del activo en el momento t descontando los flujos de fondos a la curva risk-free.

Recovery o valor de recupero: es el precio al que se espera vender el activo en caso de que ocurra el default. El activo no tiene un valor mínimo de cero debido a que existen fondos de inversión que demandan activos defaulteados con la intención de litigar contra el emisor.

rf: curva libre de riesgo.

Despejando Q calcularíamos la probabilidad marginal de default:

$$PD = \ Q = \frac{Precio\ Risk\ Free - Precio\ Mercado}{\sum\frac{Precio\ Risk\ Free\ en\ t - Recovery}{(1+rf)^t}} \qquad (1)$$

Visualizando la fórmula anterior, puede entenderse que cada uno de dichos elementos pueden calcularse o tomarse de la información del mercado en cada fecha y por ende es sencillo aplicar esta metodología para el cálculo de las probabilidades de default (PDs).

Para mostrar un poco la metodología que comenta el autor, en caso de una bono bullet a 4 años con pago de cupón anual con una tasa del 4% su precio de mercado hoy es de 99.342 y en caso que la curva risk free fuera flat en valores del 3.5% entonces su precio risk free sería de 101.837

$$\frac{4}{(1.0350)^1}+\frac{4}{(1.0350)^2}+\frac{4}{(1.0350)^3}+\frac{104}{(1.0350)^4}=101.837$$

Considerando un recovery de 40 en el cuadro siguiente muestra los valores actuales de la pérdida para cada cobro de cupón.

Año	PD	Precio Risk-Free	Recovery	Pérdida en Default	Valor Presente Pérdida en Default	Pérdida Esperada
1	Q	105.401	40	65.401	63.189	Qx63.19
2	Q	104.950	40	64.950	60.631	Qx60.63
3	Q	104.483	40	64.483	58.160	Qx58.16
4	Q	104.000	40	64.000	55.772	Qx55.77
						Qx237.753

La PD anual es Q y se asume que el incumplimiento ocurre sólo en fechas de pago de cupón. A modo de ejemplo, tomando un evento de incumplimiento al final del segundo año, justo antes del pago del cupón el precio libre de riesgo es de 104,950 y se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{4}{(1.0350)} + \frac{104}{(1.0350)^2} + 4 = 104.950$$

El recovery no es otra cosa que el monto de dinero que espero recuperar en caso de que ocurra el default. Estos valores de mercado suelen aceptarse que estén entre 30-50 y en general nunca toma valores nulos dado que siempre se espera una negociación con los acreedores o inclusive que se canjee el bono que entró en default por uno nuevo. Los valores del recovery suelen depender del tipo de industria y del rango del bono en la estructura de deuda (es decir, senior versus junior).

Luego la “Pérdida en Default” no es otra cosa más que la diferencia entre el “Precio Risk-Free” y el “Recovery”. El “Valor Presente de la Pérdida en Default “no es otra cosa que el valor actual de la pérdida esperada a la curva risk-free que en este ejemplo sería del 3.5%.

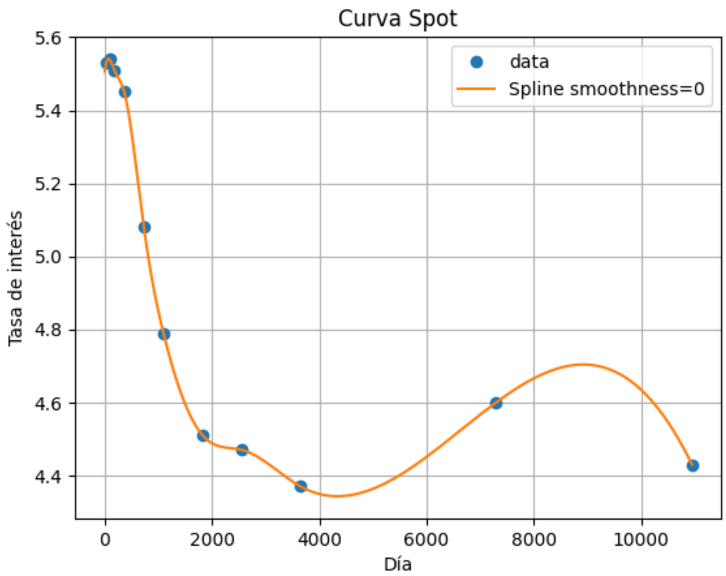
Por otro lado, la “Pérdida Esperada” no será otra cosa más que el valor actual de la pérdida multiplicada por una probabilidad Q que indicaría la potencialidad que eso ocurra.

Luego, la probabilidad de default podría calcularse aplicando la fórmula (1) que sería:

$$PD = Q = \frac{Precio\ Risk\ Free - Precio\ Mercado}{\sum \frac{Precio\ Risk\ Free\ en\ t - Recovery}{(1+rf)^t}} = \frac{101.837 - 99.342}{237.753} = 1.0492\%$$

Llevando este ejemplo a los bonos argentinos aquí se ha definido utilizado como curva risk-free en dólares la proveniente de letras y bonos del tesoro americano y como recovery rate el valor de 30.

Con el fin de ejemplificar lo anterior con un caso real, he aplicado la metodología considerando el bono AL30 tomando la información del mercado del 19/09/2023 que incluye el valor de cierre de dicho activo que fue de 30.68, la curva risk-free e infiriendo el precio risk-free siendo de 87.411. La curva risk-free de esa fecha se encuentra a continuación:



Para fines prácticos en la inferencia de las curvas se ha realizado una interpolación del tipo Spline con un parámetro de suavizamiento nulo. Lógicamente podrían aplicarse otros métodos pero se ha decidido el Spline por su sencillez y también debido a que el fin de este trabajo no es focalizarse en su estimación.

A diferencia del bono del ejemplo anterior que es bullet a 4 años y que se utiliza una tasa risk free flat, a continuación puede visualizarse el cuadro para el caso del AL30 al 19/09/2023 pero al considerar la curva spot a dicha fecha debe tomarse en consideración que para el cálculo del precio risk-free en cada momento debió calcularse la curva forward a cada fecha para poder descontar los flujos de fondos respectivos.

Fecha	PD	Precio Risk-Free	Valor Residual	Recovery	Pérdida en Default	Valor Presente Pérdida en Default	Pérdida Esperada
9/1/2024	Q	88.86	100	30	58.86	57.90	57.9xQ
9/7/2024	Q	90.85	100	30	60.85	58.29	58.29xQ
9/1/2025	Q	88.71	96	28.8	59.91	55.96	55.96xQ
9/7/2025	Q	82.17	88	26.4	55.77	50.92	50.92xQ
9/1/2026	Q	75.42	80	24	51.42	45.98	45.98xQ
9/7/2026	Q	68.50	72	21.6	46.90	41.09	41.09xQ
9/1/2027	Q	61.47	64	19.2	42.27	36.29	36.29xQ
9/7/2027	Q	54.30	56	16.8	37.50	31.55	31.55xQ
9/1/2028	Q	47.02	48	14.4	32.62	26.91	26.91xQ
9/7/2028	Q	39.38	40	12	27.38	22.14	22.14xQ
9/1/2029	Q	31.69	32	9.6	22.09	17.49	17.49xQ
9/7/2029	Q	23.90	24	7.2	16.70	12.95	12.95xQ
9/1/2030	Q	16.04	16	4.8	11.24	8.53	8.53xQ
9/7/2030	Q	8.07	8	2.4	5.67	4.21	4.21xQ
							470.2xQ

[Cuadro A]

Al ser el Credit Spread igual a 56.73 (87.41-30.68) y el valor de la pérdida esperada igual a 470.2 x Q entonces despejando Q llegamos que la probabilidad de default es Q = 56.73 / 470.2 = 12.07% y al anualizar llegamos a que PD = 12.07% x 2 = 24.13%.

A fin de poder visualizar la evolución del riesgo de crédito soberano en el tiempo reciente he aplicado esta metodología utilizando Python para el cálculo diario de dicha probabilidad para los bonos soberanos canjeados en el 2020 desde su emisión hasta el 26/10/2023.

Para esto se ha creado un input en Excel que se llama “Input” que cuenta con las siguientes hojas:

PRICES Local Law: Precios históricos diarios de los bonos emitidos bajo ley local. Los bonos son: AL29, AL30, AL35, AE38 y AL41.

PRICES Foreign Law: Precios históricos diarios de los bonos emitidos bajo ley extranjera. Los bonos son: GD29, GD30, GD35, GD38, GD41 y GD46.

Hojas con los flujos de fondos de cada bono: AL29, AL30, AL35, AE38, AL41, GD29, GD30, GD35, GD38, GD41 y GD46.

Para aplicar estas metodologías se han definido distintas funciones:

```
#Creo función para calcular el Net Present Value (NPV) o valor presente neto risk free de un bono a cada fecha
```

```
def NPV(cf, date, historical_rates):

    #cf: corresponde al data frame con los flujos de fondos y fechas de
pago contractuales
    #date: fecha en la cual voy a estar calculando el valor del bono
    #historical_rates: corresponde al data frame que contiene información
histórica respecto a los nodos de la curva risk free a cada fecha

    date = pd.to_datetime(date)
    cf2 = cf.loc[cf.index > date, ['A+R']]
    cf2['Dias al pago'] = (cf2.index - date).days
    cf2['Tasa Risk Free'] = interpolate.splev(cf2['Dias al
pago'],interpolador(date, historical_rates))/100
    cf2['Factor de Actualizacion'] = (1 + cf2['Tasa Risk Free'] )**-
(cf2['Dias al pago']/365)
    cf2['Valor Actual del Flujo de Fondos'] = cf2['A+R'] * cf2['Factor de
Actualizacion']
    precio = sum(cf2['Valor Actual del Flujo de Fondos'])
    return precio
```

La función NPV me servirá para poder calcular el Spread Crediticio entre el valor risk-free del bono a una fecha determinada y el valor de mercado del activo a dicho momento.

Considerando una fecha "x" determinada se ha definido la función NPV_Forward para que pueda calcular el precio risk-free del bono en cada fecha de pago de cupón.

```
def NPV_Forward(cf, date, date_forward, historical_rates):

    #cf: corresponde al data frame con los flujos de fondos y fechas de
pago contractuales

    #date: fecha en la cual voy a estar buscando saber la probabilidad de
default. Este dato es útil dado que indica que se estará utilizando la
curva spot a dicha fecha

    #date_forward: fecha posterior a "date" en la cual se estará
calculando el precio risk-free a partir de la curva forward que se
desprende de la curva spot de date

    #historical_rates: corresponde al data frame que contiene información
histórica respecto a los nodos de la curva risk free a cada fecha

    date = pd.to_datetime(date)
    cf2 = cf.loc[cf.index > date, ['A+R']]
    date_forward = pd.to_datetime(date_forward)
    cf2 = cf2.loc[cf2.index >= date_forward, ['A+R']]
    cf2['Dias al pago'] = (cf2.index - date).days
```

```
    cf2['Tasa Risk Free'] = interpolate.splev(cf2['Dias al
pago'],interpolador(date, historical_rates))/100
    cf2['Tasa Forward Risk Free'] = ((1+ cf2['Tasa Risk
Free'])**(cf2['Dias al pago']/365) / (1+ cf2['Tasa Risk
Free'][0])**(cf2['Dias al pago'][0]/365))**(365/(cf2['Dias al pago'] -
cf2['Dias al pago'][0])) -1
    cf2['Factor de Actualizacion'] = (1 + cf2['Tasa Forward Risk
Free'])**-((cf2['Dias al pago']-cf2['Dias al pago'][0])/365)
    cf2['Valor Presento del Flujo de Fondos'] = cf2['A+R'] * cf2['Factor
de Actualizacion']
    price = sum(cf2['Valor Presento del Flujo de Fondos'])
    return price
```

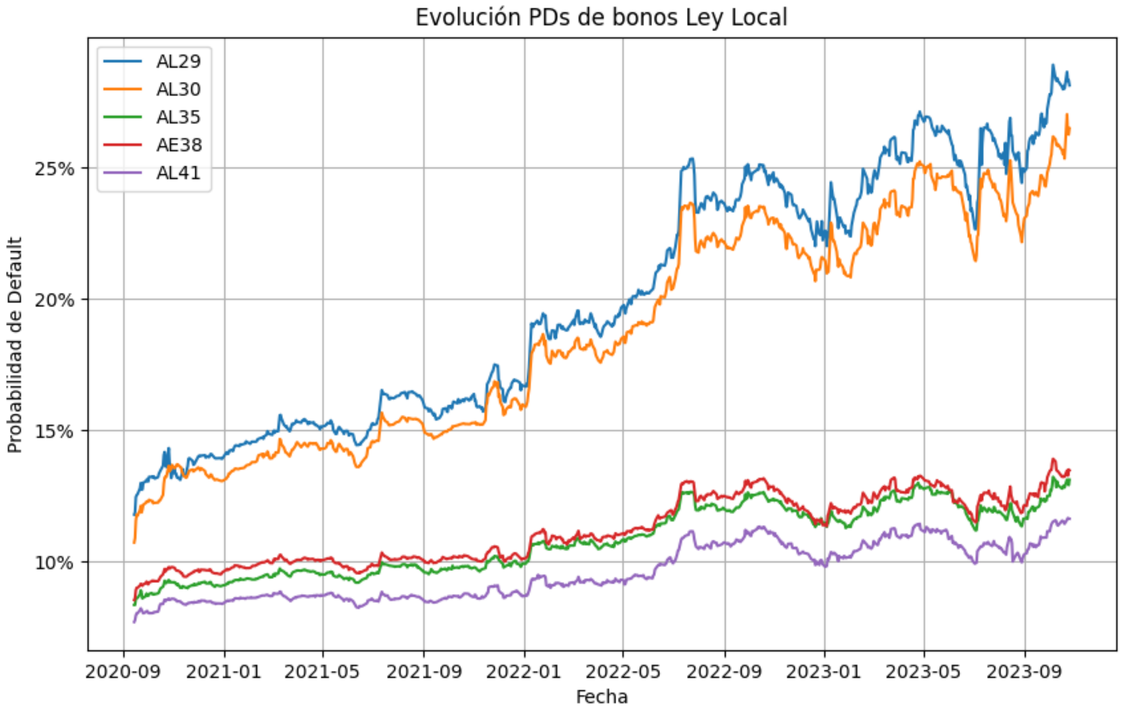
Luego, una vez tenidas las funciones anteriores se ha definido la función LossPV o valor presente de las pérdidas cuyo objetivo es calcular la última columna del cuadro A precedente que nos servirá luego para calcular las PDs.

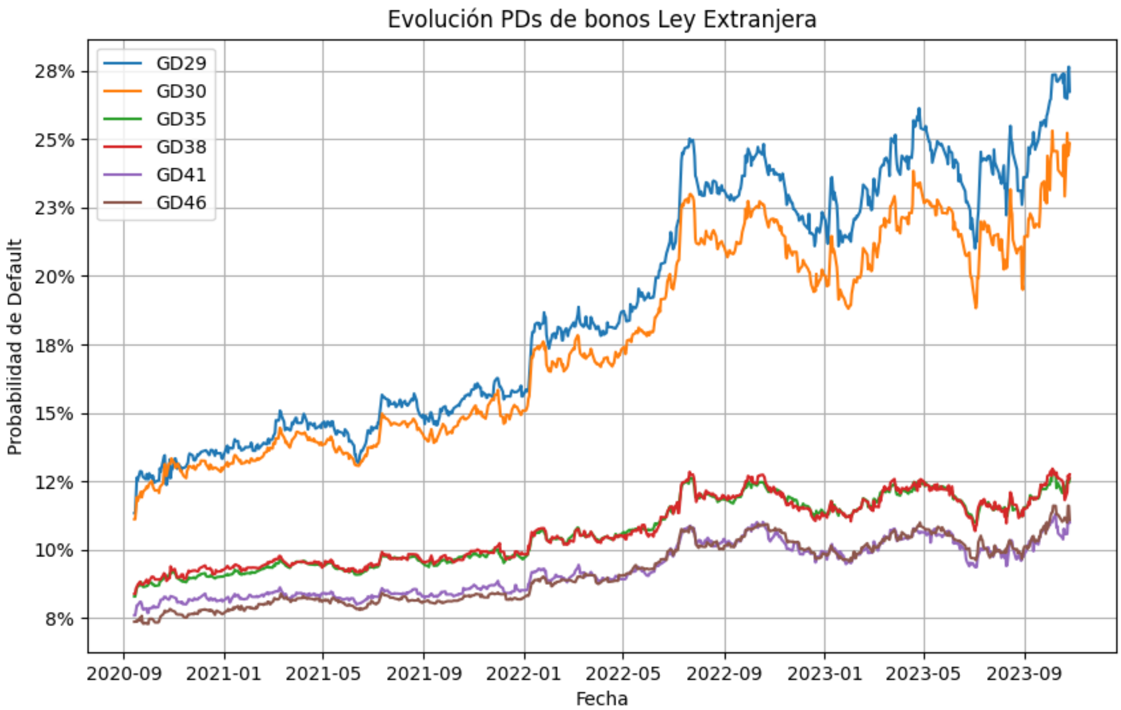
```
def LossPV(cf, date, historical_rates):

    #cf: corresponde al data frame con los flujos de fodos y fechas de
pago contractuales

    #date: fecha en la cual voy a estar buscando saber la probabilidad de
default. Este dato es útil dado que indica que se estará utilizando la
curva spot a dicha fecha

    #historical_rates: corresponde al data frame que contiene información
histórica respecto a los nodos de la curva risk free a cada fecha

    date = pd.to_datetime(date)
    cf2 = cf.loc[cf.index > date, ['VR','A+R']]
    #La columna 'VR' corresponde al valor residual del bono a cada
momento
    cf2['Precio Risk Free'] = [NPV_Forward(cf, date, dates,
historical_rates) for dates, cupon in cf2.iterrows()]
    cf2['Recovery'] = cf2['VR'] * RR
    cf2['Perdida en Default'] = cf2['Precio Risk Free'] - cf2['Recovery']
    cf2['Dias al pago'] = (cf2.index - date).days
    cf2['Tasa Risk Free'] = interpolate.splev(cf2['Dias al
pago'],interpolador(date, historical_rates))/100
    cf2['Factor de actualizacion'] = (1 + cf2['Tasa Risk Free'] )**-
(cf2['Dias al pago']/365)
    cf2['Valor actual de la perdida'] = cf2['Factor de actualizacion'] *
cf2['Perdida en Default']
    PVDL = sum(cf2['Valor actual de la perdida'])
    return PVDL
```

Con la siguiente función se arma entonces la serie histórica de las Probabilidades de Default (PD) de un bono.

```
def PDs(historical_prices, cf, historical_rates):

    #historical_prices: sería la matriz de precios y fechas del activo

    #cf: corresponde al data frame con los flujos de fondos y fechas de
pago contractuales

    #historical_rates: corresponde al data frame que contiene información
histórica respecto a los nodos de la curva risk free a cada fecha

    summary = historical_prices
    summary['Precio Risk Free'] = [NPV(cf, dates, historical_rates) for
dates, prices in summary.iterrows()]
    summary['Spread Crediticio'] = summary['Precio Risk Free'] -
summary.iloc[:, 0]
    summary['Valor actual de la perdida'] = [LossPV(cf, dates,
historical_rates) for dates, prices in summary.iterrows()]
    summary['Probabilidad de Default'] = summary['Spread Crediticio'] /
summary['Valor actual de la perdida'] * 2
    Default_Prob = summary['Probabilidad de Default']
    Default_Prob = pd.DataFrame(Default_Prob)
    Default_Prob.columns = [summary.columns[0]]
    return Default_Prob
```

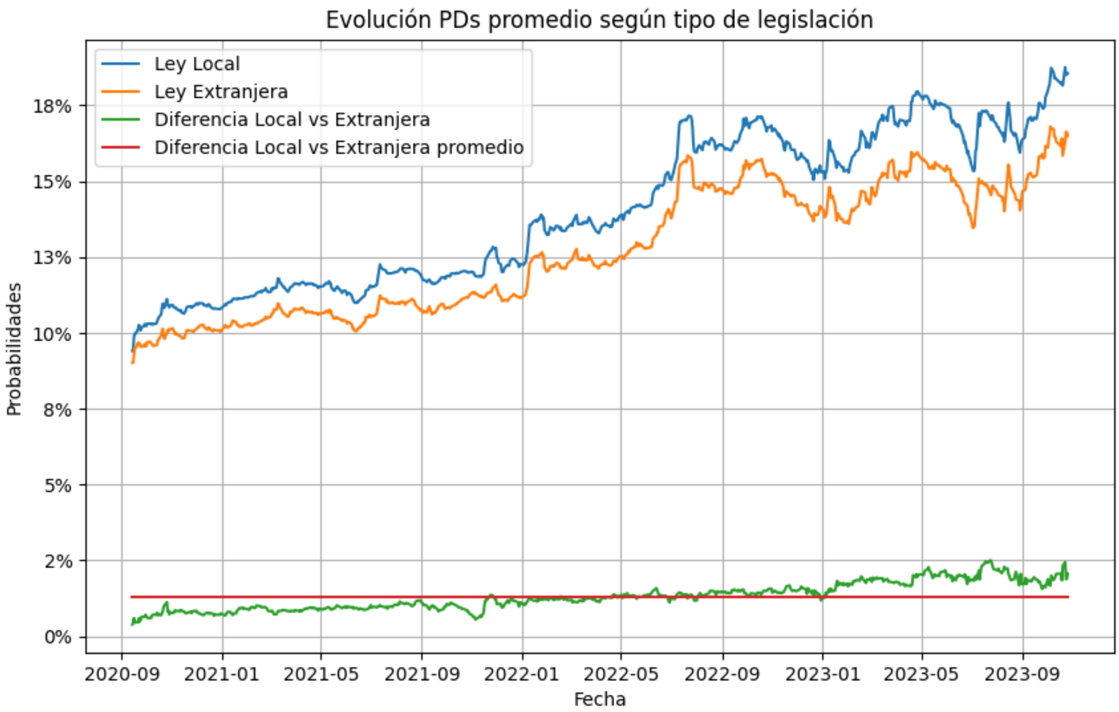
Aplicando lo programado a continuación pueden verse gráficamente la evolución de las PDs de los bonos del canje del 2020 tanto para lo que fue ley local como ley extranjera:





Lo que puede observarse en los gráficos anteriores es la gran diferencia que hay entre las PDs de los bonos con vencimiento en el 2029 y 2030 respecto al resto de los bonos. Esta diferencia podría estar explicada por varios motivos entre los cuales puede destacarse el efecto matemático por una amortización más temprana y que adicionalmente el riesgo de crédito de pagar estos vencimientos es mayor por las lecturas que tiene el mercado respecto a la posibilidad de que Argentina pague los nominales.

Realizando ahora una comparación entre las PDs de bonos ley extranjera y local a continuación puede observarse la probabilidad promedio de cada uno y de la evolución de la diferencia entre ambas, destacándose que los bonos que son ley extranjera tienen una menor probabilidad promedio de default:



Modelo de probabilidad condicional o de supervivencia

La teoría de valoración de activos financieros, específicamente en el contexto de bonos, implica evaluar el valor presente de los flujos de efectivo futuros y ajustarlos por el riesgo asociado. La valoración de bonos generalmente se basa en el principio del valor presente, que establece que el valor de un activo es igual al valor presente de sus flujos de efectivo futuros descontados a una tasa de interés adecuada.

Cuando se incorporan probabilidades de pago, se está considerando el riesgo de incumplimiento o la probabilidad de que el emisor del bono no cumpla con sus obligaciones de pago. En este caso, la valoración de los bonos se realiza de acuerdo con la probabilidad ponderada de los diferentes escenarios de pago de acuerdo con la siguiente manera:

$$B_t = \frac{E_t(C_1)}{1+r_{1t}} + \frac{E_t(C_2)}{1+r_{2t}} + \ldots + \frac{E_t(100+C_N)}{1+r_{Nt}} ,$$

Donde el operador E_t corresponde al valor esperado del flujo de fondos y el denominador 1 + rf es la actualización a la curva libre de riesgo. De esta manera Bt representaría el precio de mercado.

Tal como comenta Jorge A. Chan-Lau en la publicación realizada por el FMI, considerando que la idea es construir una probabilidad de default fija “p” símil a una probabilidad de mortalidad donde los flujos de fondos se encuentren ponderados por dos escenarios posibles y mutuamente excluyentes que son: 1) en caso de pago del n-esimo cupón entonces la probabilidad del pago será $(1-p)^n$ y 2) en caso de default lo que estará cobrando será el recovery multiplicado por la probabilidad de no haber de defaulteado hasta (n-1) pero defaulteado en n y sería entonces $RR\ x\ (1-p)^{n-1}\ p$. La fórmula entonces se plantearía de la siguiente manera:

$$Bt = \frac{CF1[(1-p) \quad + RR\, p]}{1+rf1} + \frac{CF2[(1-p)^2 + RR\,(1-p) \quad p]}{1+rf2} + \cdots + \frac{CFn[(1-p)^n + RR\,(1-p)^{n-1}\, p]}{1+rfn}$$

Siendo CFt el Cash Flow correspondiente al número de cupón t.

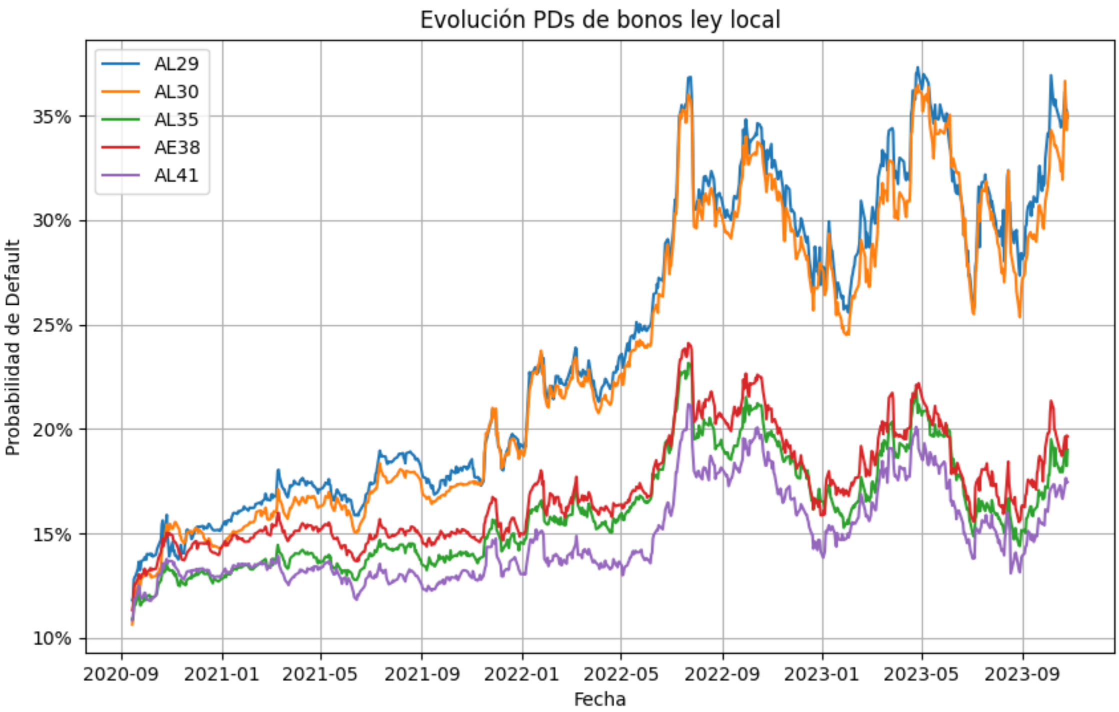
De igual manera, para la actualización se ha utilizado la misma curva risk-free del modelo anterior que corresponde a las letras y bonos del tesoro americano.

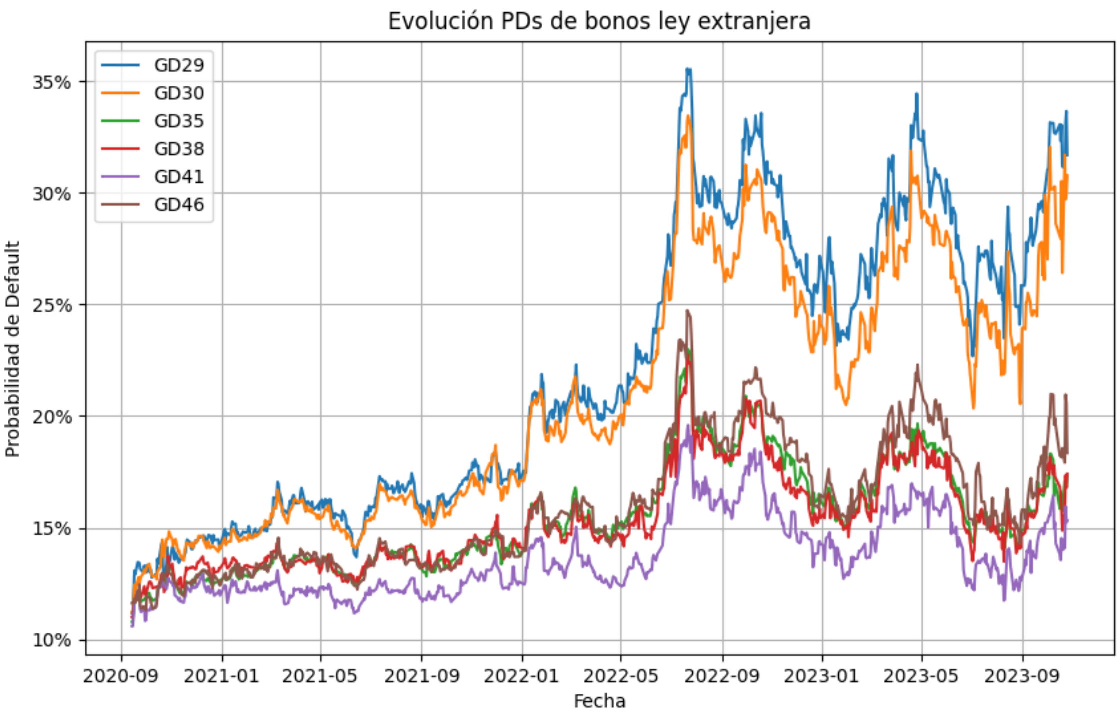
Considerando entonces que ya contamos con los precios diarios de los bonos y con las curvas de actualización correspondientes, entonces puede calcularse el valor "p" de la fórmula anterior. Para esto se ha realizado la búsqueda de "p" utilizando el método de optimización de Newton Raphson (que tiene convergencia cuadrática) mediante Python.

A continuación la función de cálculo de "p" diario realizado:

```
def PDs_Cond_Dia(bond_name, date, historical_rates):

    #bond_name: corresponde al ticker del bono

    #date: fecha en la cual voy a estar buscando saber la probabilidad de
default. Este dato es útil dado que indica que se estará utilizando la
curva spot a dicha fecha

    #historical_rates: corresponde al data frame que contiene información
histórica respecto a los nodos de la curva risk free a cada fecha

    cash_flow = Bonds_CashFlows[bond_name]
    day = pd.to_datetime(date)
    cash_flow = cash_flow.loc[cash_flow.index > day, ['A+R']]
    cash_flow['conteo'] = range(1,(cash_flow).shape[0]+1)

    cash_flow['Días para el pago'] = (cash_flow.index - day).days
    cash_flow['Tasa Libre de Riesgo'] = interpolate.splev(cash_flow['Días
para el pago'],interpolador(day, historical_rates))/100
    cash_flow['Factor de Actualización'] = (1 + cash_flow['Tasa Libre de
Riesgo'] )**-(cash_flow['Días para el pago']/365)

    price = Bonds_Prices[bond_name].iloc[:, 0][day]

    # Definir la función objetivo
    def objetivo(q):

        return sum([(cash_flow['A+R'][i]*(1-q/2)**cash_flow['conteo'][i]
+ cash_flow['A+R'][i] * RR * (1-q/2)**(cash_flow['conteo'][i]-1) * q/2) *
cash_flow['Factor de Actualización'][i]  for i in range(len(cash_flow))])
- price

    punto_inicial = 0.0

    resultado = newton(objetivo, punto_inicial, tol=1e-6)

    return resultado
```

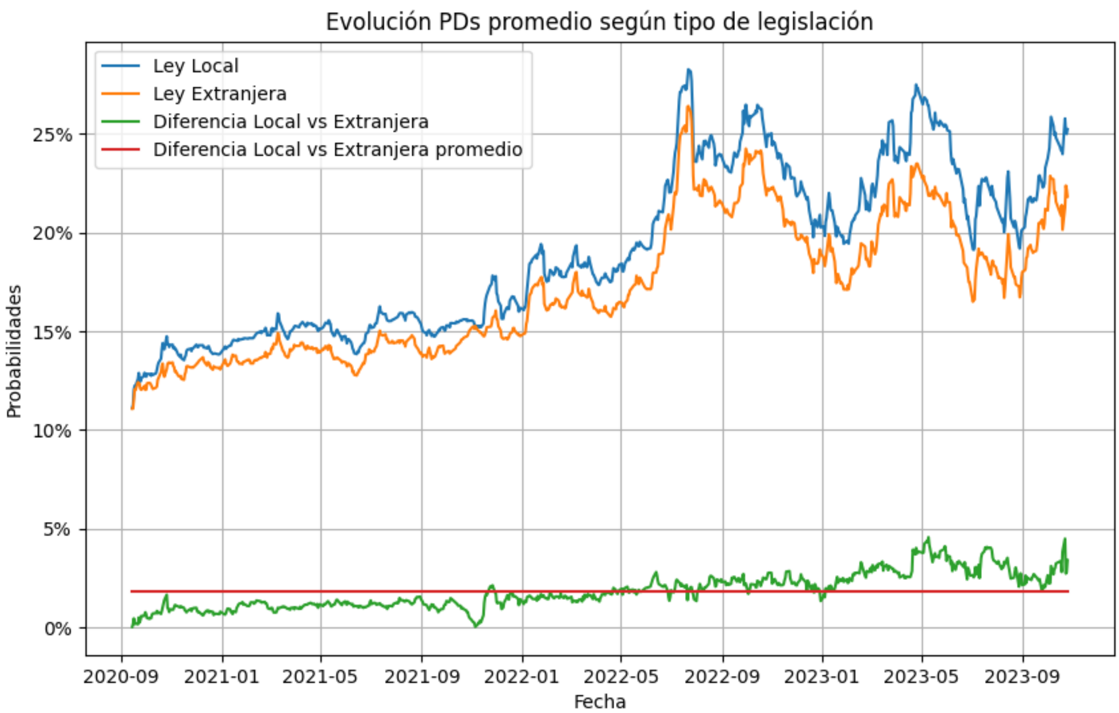
A continuación la evolución de las probabilidades de default bajo esta metodología tanto para los que son ley local como extranjero:





De la misma manera que en el modelo anterior también puede visualizarse la gran diferencia entre las probabilidades de default de los bonos que tienen fecha de vencimiento en 2029 y 2030 respecto al resto de los vencimientos.

A continuación, la evolución de las probabilidades promedio según tipo de legislación y la diferencia entre ellas:



Considerando que "p" es la probabilidad de defaultear en la próxima fecha de pago de cupón y que (1-p) es la probabilidad de que no ocurra dicho evento puede deducirse que esta lógica es similar a las probabilidades de supervivencia y fallecimiento y por ende puede aplicarse matemática propia de biometría. De esta manera se podría calcular la esperanza de vida de un bono a cada momento del tiempo entendiendo la misma como la cantidad de cupones que espero se paguen en promedio.

Matemáticamente la esperanza de vida abreviada se define de la siguiente manera:

$$e(x,0,n) \quad = \sum_{t=0}^{n-1} t\, q(x,t,1) + n\, x\, p(x,n) = \sum_{t=1}^{n} p(x,t)$$

Donde se define:

t: tiempo en años

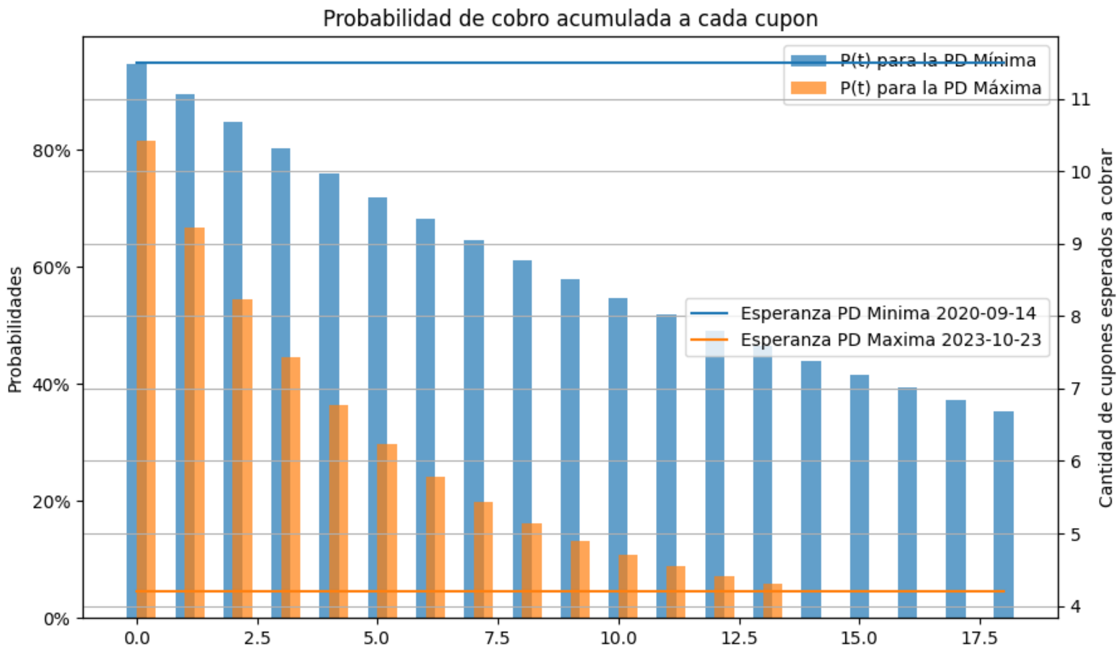
q(x, t, 1): la probabilidad de que de que una persona de edad x haya alcanzado con vida la edad x+t y no alcance con vida la edad x+t+1.

p(x,t) = es la probabilidad de que una persona de edad x alcance con vida la edad x+t.

e(x, 0 ,n): es la esperanza de vida media abreviada que indica la cantidad años que espero viva en promedio.

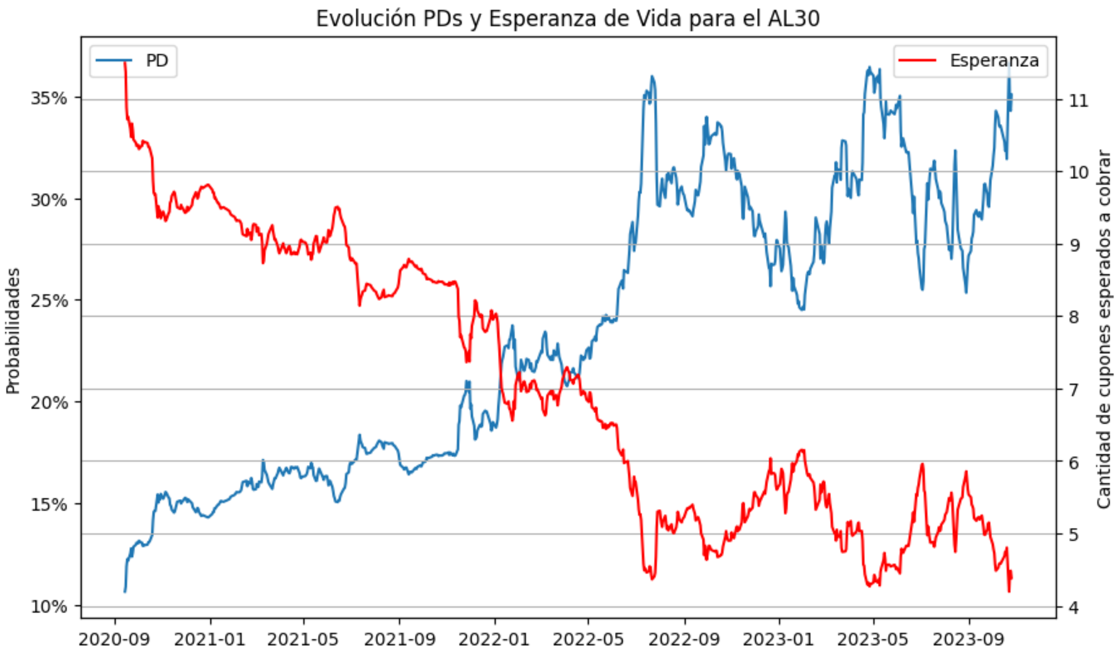
Entonces para calcular la esperanza de vida media abreviada puedo sumar directamente las p(x,t) para todo t considerando que en nuestro caso $p(x,t) = (1-p)^t$ donde t equivale al número de cupón y que e(x, 0 ,n) debe interpretarse como la cantidad de cupones promedio que espero cobrar o que sobreviva el bono.

A modo de ejemplo a continuación se encuentra la evolución de la probabilidad acumulada de pago de cada cupón $p(x,t)$ y la esperanza de vida del AL30 para los momentos en que la probabilidad de default fue máxima y mínima:

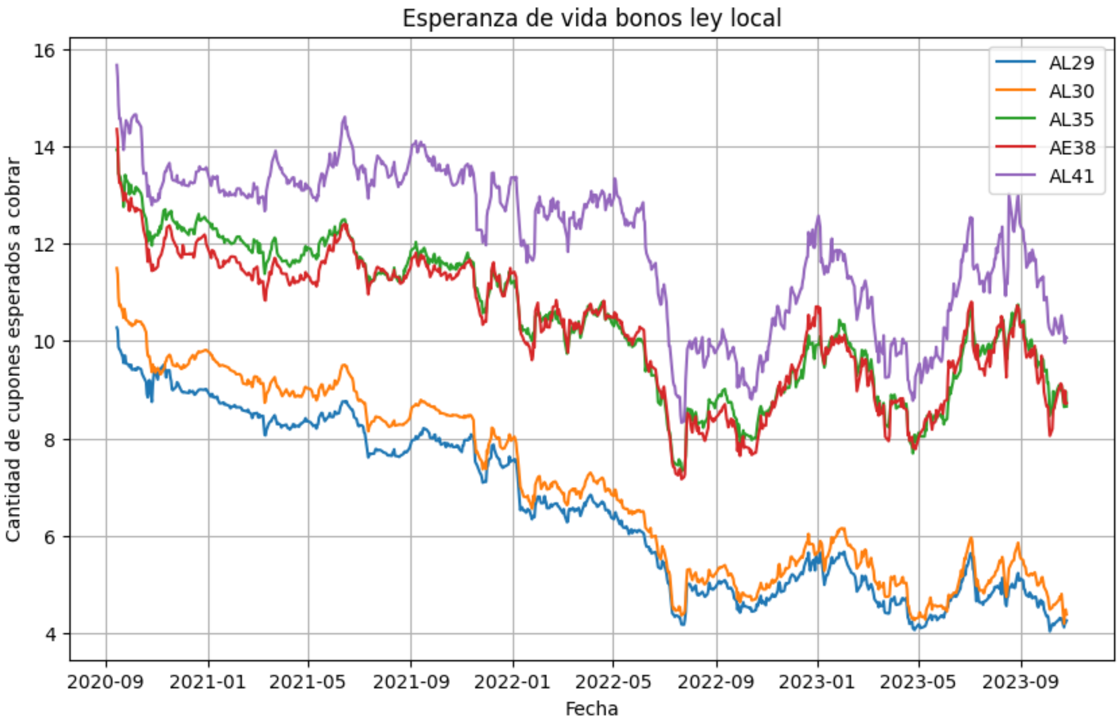


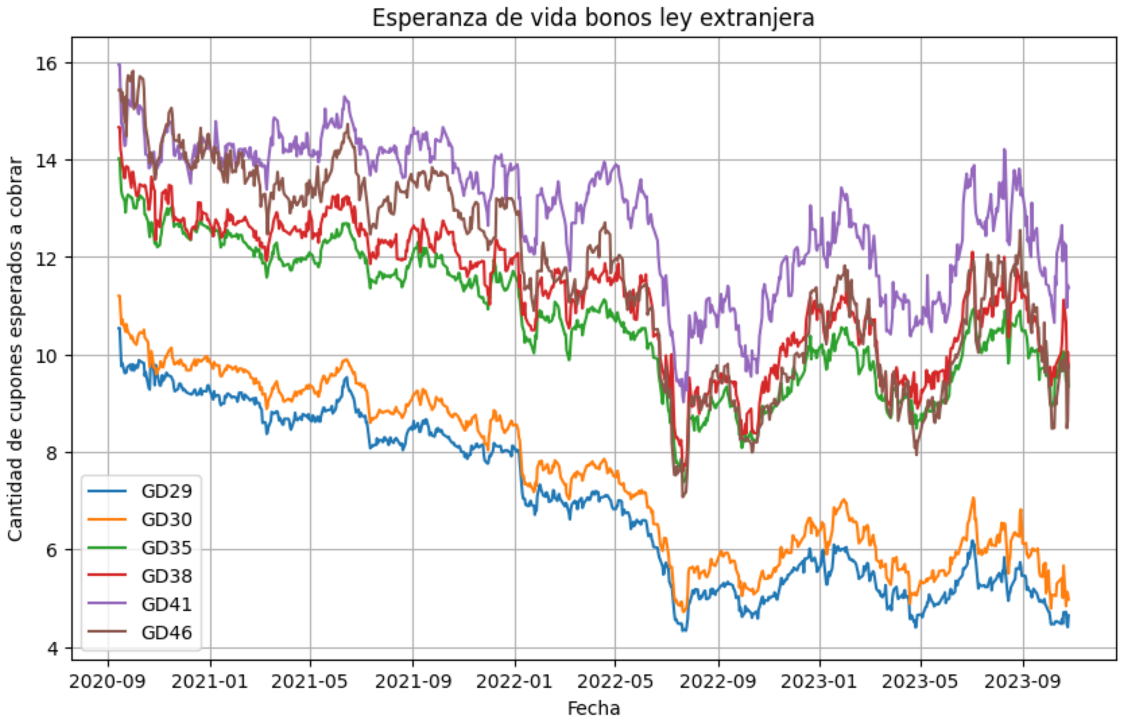
De esta manera, con el gráfico precedente puede visualizarse la sensibilidad que tiene la esperanza de vida respecto a la mayor o menor PD y también en la cantidad de cupones pendientes de cobro.

En la misma línea, para tener la intuición respecto a la relación entre la PD y la esperanza de vida, debe considerarse que lógicamente a mayor probabilidad de default de un bono menor será la esperanza de vida del bono. Debe tenerse en cuenta que en líneas generales la esperanza de vida siempre irá decreciendo porque la cantidad de cupones pendientes de cobro a cada momento irá disminuyendo. Esta relación negativa entre ambos números puede evidenciarse en la evolución tanto de las PDs como de la esperanza para el AL30:



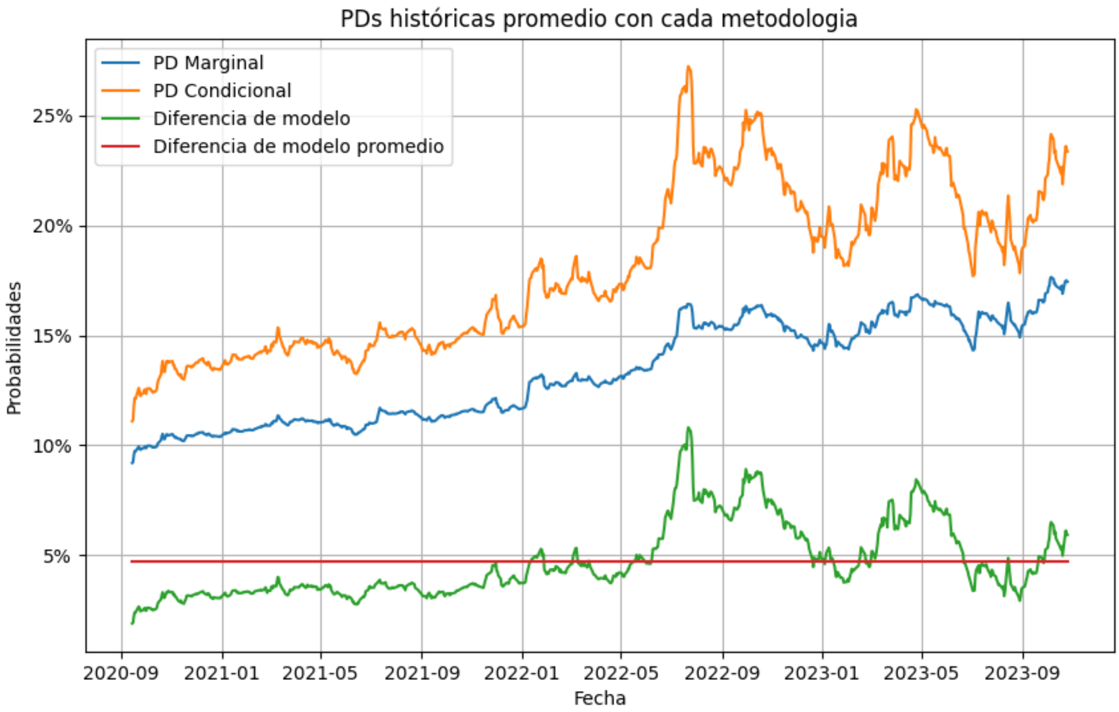
A continuación la evolución gráfica de la esperanza de vida de los bonos tanto ley local como extranjera:




Esperanza de vida bonos ley extranjera
Cantidad de cupones esperados a cobrar
Fecha
16
14
12
10
8
6
4
2020-09
2021-01
2021-05
2021-09
2022-01
2022-05
2022-09
2023-01
2023-05
2023-09
GD29
GD30
GD35
GD38
GD41
GD46

Comparación entre ambos modelos

Puede verse a continuación la evolución de las probabilidades de default promedio utilizando cada metodología y la diferencia que existe entre ambas.



Correlación de las probabilidades respecto al Riesgo País:

Bono	Correlación Marginal	Correlación Condicional	Diferencia
AL29	90.9%	96.2%	-5.3%
AL30	91.5%	96.4%	-4.9%
AL35	95.3%	96.5%	-1.1%
AE38	94.7%	95.5%	-0.9%
AL41	94.4%	93.3%	1.0%
GD29	92.8%	97.4%	-4.6%
GD30	94.5%	98.4%	-3.9%
GD35	95.8%	96.0%	-0.2%
GD38	96.1%	94.7%	1.3%
GD41	96.4%	92.8%	3.6%
GD46	95.4%	97.0%	-1.5%

Correlación Marginal vs Riesgo País: 94.3%

Correlación Condicional vs Riesgo País 95.8%

Diferencia: -1.5%

Se han presentado ambas metodologías que permiten obtener una evaluación del riesgo asociado de Default a los activos de diversos emisores. Considerando la posibilidad de que un emisor pueda emitir nuevos títulos, podría entonces utilizarse estas probabilidades, junto con la curva risk-free y, de corresponder, el recovery, para calcular el precio de mercado que deberían tener estos activos y el precio al que debería comprar.

Por otro lado, al valorar los activos dentro de una cartera de inversiones, puede darse el escenario en el que algunos títulos de un emisor carezcan de suficiente volumen, lo que impide la fijación de un precio de mercado. Sin embargo, otros títulos más líquidos permiten inferir la probabilidad de default correspondiente. Esto brinda una aproximación valiosa para estimar el valor de mercado teórico de aquellos activos que carecen de un precio marcado.

Bibliografía

BODIE, KANE y MARCUS. Investments. Tenth Edition. Mc Graw Hill Education 2014.

CHAN-LAU Jorge A. Market-Based Estimation of Default Probabilities and Its Application to Financial Market Surveillance. IMF Working Paper 2006.

HULL J, PREDESCU M, WHITE A. Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premiums.

SMITH, Donald J. Bond Math: The Theory Behing the Formulas. 2nd Edition. Wiley Finance Series 2014.