Recuperación de Información Multimedia

Búsquedas por Similitud

CC5213 – Recuperación de Información Multimedia
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile
Juan Manuel Barrios – https://juan.cl/mir/ – 2020

Descripción de Contenido

- Fase previa: extracción de atributos numéricos de imágenes, audio, videos, textos
  - Descriptor de Contenido, Vector Característico, "*feature vector*"
- Similitud entre objetos corresponde a la cercanía entre puntos en el espacio vectorial
- El problema de búsqueda por similitud en el espacio original se convierte en buscar puntos cercanos en un espacio vectorial

Definiciones

- Sea $\mathcal{D}$ el espacio de los objetos, el dominio
- Sea d una función que compara objetos:

$$d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

  - Función de Similitud: Mide el grado de "parecido" entre dos objetos
  - Función de Disimilitud o Distancia: Mide el grado de "diferencia" entre dos objetos

Similitud y Disimilitud

- Transformación de similitud (*s*) a disimilitud (*d*)
  - Lineal: $d = 1 - s, \quad d = \dfrac{\max s - s}{\max s - \min s}$
  - Inverso: $d = \dfrac{1}{s} - 1, \quad d = \dfrac{1}{s - \min s + \varepsilon} - \dfrac{1}{\max s - \min s + \varepsilon}$
  - Exponencial: $d = e^{-s}$
- En general, sirve cualquier función monótona decreciente

Propiedades

- Propiedades de funciones de disimilitud:
  - No-negatividad $d(x, y) \geq 0$
  - Reflexividad $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - Simetría $d(x, y) = d(y, x)$
  - Desigualdad triangular $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- Una función que cumpla con estas cuatro propiedades se denomina **Métrica**

Funciones no-métricas

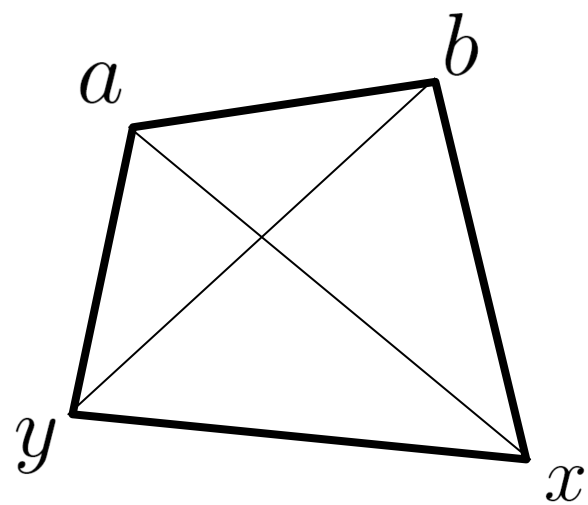
- Cuando una función no cumple alguna de las propiedades anteriores se le denomina **No-Métrica**
- En particular, las no-métricas se definen como:
  - **Pseudométrica**: no cumple reflexividad
  - **Quasimétrica**: no cumple simetría
  - **Semimétrica**: no cumple desigualdad triangular

Otras propiedades

- **Desigualdad Ptolemaica**: Para cualquier cuadrilátero se cumple que:

$$d(a,x) \cdot d(b,y) \leq d(a,b) \cdot d(x,y) + d(a,y) \cdot d(b,x)$$

  - La igualdad se alcanza en cuadriláteros circunscritos



Ver Hetland et al. 2013.

Otras propiedades

- Las **Ultramétricas** son funciones métricas que cumplen una desigualdad triangular más fuerte:

$$\forall x, y, z \quad d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

  - Implica que las distancias entre tripletas de objetos forman un triángulo isósceles con base pequeña o un triángulo equilátero, es decir:

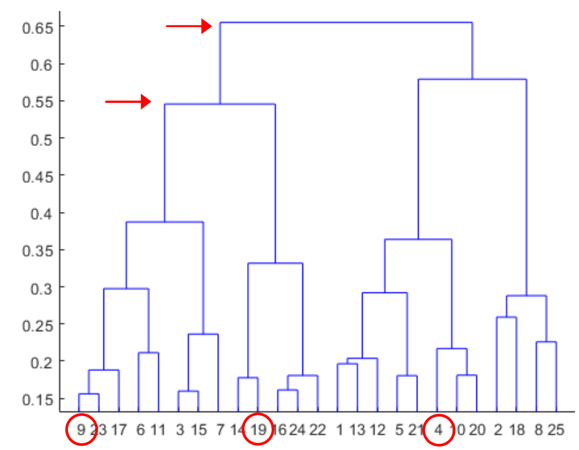
$$d(x,y) \leq d(x,z) = d(y,z)$$

- Aparece de forma natural en taxonomías jeráquicas, cuando se define similitud entre elementos por medio del ancenstro común más cercano

https://en.wikipedia.org/wiki/Ultrametric_space

Ejemplos de ultramétricas

- Ej: En un dendograma (clustering jerárquico), la distancia entre dos elementos es el valor cuando se unen sus clusters



$d(O_9, O_4) = 0.65$
$d(O_9, O_{19}) = 0.55$
$d(O_{19}, O_4) = 0.65$

$d(O_9, O_6) = 0.30$
$d(O_9, O_{15}) = 0.39$
$d(O_{15}, O_6) = 0.39$

- Otro ej: distancia entre dos strings es $d(x,y)=1/2^n$ cuando x e y comparten un prefijo de largo *n*

x=cuadra
y=cuaderno
z=curso

d(cuadra, cuaderno) = 1/16
d(cuadra, curso) = 1/4
d(cuaderno, curso) = 1/4

- Comparar estructuras químicas, secuencias de ADN, similitud entre especies (usan jearquías que inducen una ultramétrica)

Distancias entre vectores

- Distancias de Minkowski (L_P)

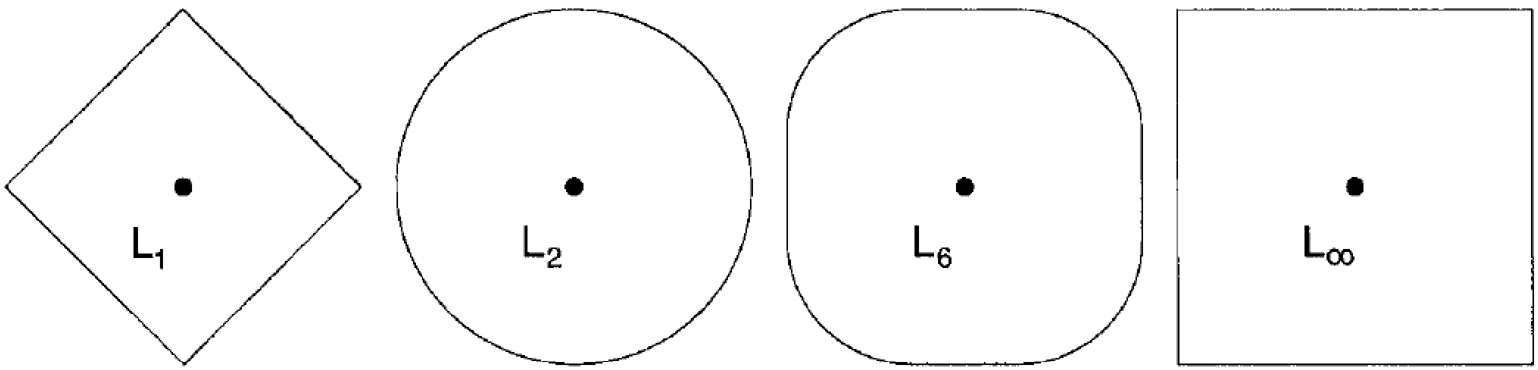
$$\mathrm{L_p}(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

  - p=1: Manhattan, taxicab, city block
  - p=2: Euclidiana
  - p=∞: Máximo, chessboard, Chebyshev

$$\mathrm{L_1}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad \mathrm{L_2}(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \mathrm{L_{max}}(\vec{x},\vec{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

Distancias entre vectores

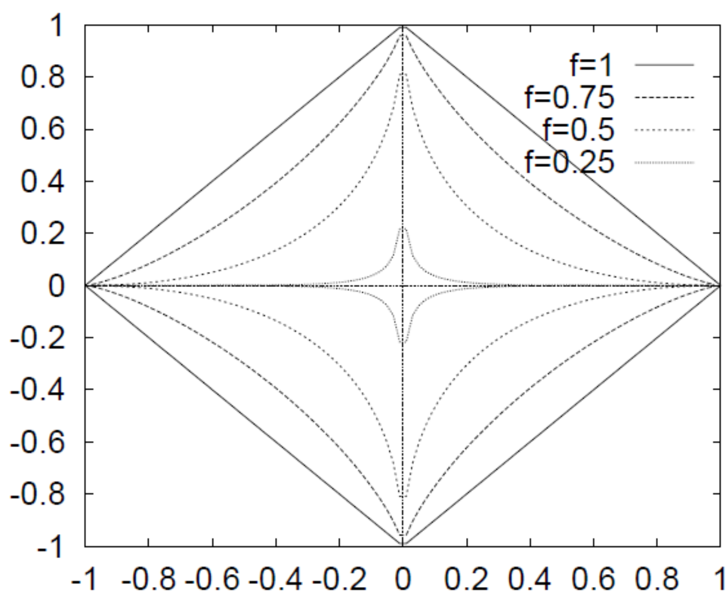
- Distancias de Minkowski:
  - Costo de evaluación: *O(n)*
  - Cumple las propiedades métricas



Círculos según para algunas L_p (puntos a una misma distancia del centro)

Distancias entre vectores

- Distancias Fraccionales:
  - L_P con $0 < p < 1$
  - No cumplen la desigualdad triangular



Círculos radio 1

Ver Aggarwal et al. 2001

Distancias entre vectores

- Distancias Fraccionales:
  - “Prefieren” objetos con cambios concentrados en pocas dimensiones
  - Por ejemplo:
    - Dado **q**=(9, 9, 9, 9) **A**=(5, 5, 5, 5) **B**=(1, 1, 9, 9)
    - Usando L_2 : **A** es el más cercano a **q**
    - Usando L_1 : **A** y **B** están a igual distancia de **q**
    - Usando $L_{0.5}$: **B** es el más cercano a **q**

Distancias entre vectores

- DPF (Dynamic Partial Function)
  - L_P comparando sólo un subconjunto de las dimensiones
  - Δ_m es el conjunto de las *m* dimensiones donde hay menor diferencia
  - Las dimensiones comparadas dependen de los vectores a comparar

$$\mathrm{DPF}(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i\in\Delta_m} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \geq 1$$

Ver Meng et al. 2003

Distancia cuadrática

- Formas cuadráticas $\mathrm{QFD}(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^T \cdot A \cdot (\vec{x}-\vec{y})}$
  - *A*: matriz de similitud
  - Costo de evaluación: $O(n^2)$
- Ejemplos
  - Euclidiana (*A*=matriz identidad)
  - Weighted Euclidean Distance (A=diagonal)
  - Mahalanobis (*A*=inv. matriz de covarianza)
- Cumple propiedades métrica y ptolemaica

Distancia entre conjuntos

- Coeficiente de Jaccard:

$$d(A,B) = 1 - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

  - Usado para comparar conjuntos de respuestas o comparar bits.
  - Cumple las propiedades métricas.
- Distancia de Tanimoto (generalización a vectores):

$$d_{TS}(\vec{x},\vec{y}) = 1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \vec{x}\cdot\vec{y}}$$

Distancia entre nube de puntos

- Distancia Hausdorff:

$$d(A,B) = \max\{d_s(A,B), d_s(B,A)\}$$

$$\begin{aligned} d_s(A,B) &= \sup_{x\in A} d_p(x,B) \\ d_s(B,A) &= \sup_{y\in B} d_p(A,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_p(x,B) &= \inf_{y\in B} d_e(x,y) \\ d_p(A,y) &= \inf_{x\in A} d_e(x,y) \end{aligned}$$

  - Es la “máxima distancia mínima” entre dos nubes de puntos
  - d_e es la ground-distance entre pares de puntos (e.g. L_2)
  - Se usa para comparar el grado de coincidencia entre dos formas o figuras

Ver Huttenlocher et al. 1993.

Búsquedas por similitud

- Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ un conjunto de objetos, el espacio de búsqueda
- Sea $q \in \mathcal{D}$ un objeto de consulta
- Se definen las búsquedas:
  - Búsqueda exacta
  - Búsqueda por rango (range query)
  - Búsqueda del vecino más cercano (nearest neighbors query)

Búsqueda exacta

- Determinar si el objeto q está en $\mathcal{R}$
- Algoritmo secuencial (linear scan):

```
foreach u_i ∈ R do
    if u_i = q then
        return true ;
    end
end
return false ;
```

- Se puede hacer más eficiente si los objetos se pueden ordenar de menor a mayor (ver TDA Diccionario)

Búsqueda por rango

- Recuperar los objetos del espacio de búsqueda a distancia menor o igual a *r* de *q*:
  - $r \in \mathbb{R}$ es el radio de tolerancia

$$\mathrm{R}(q,r) = \{u \in \mathcal{R}, d(u,q) \leq r\}$$

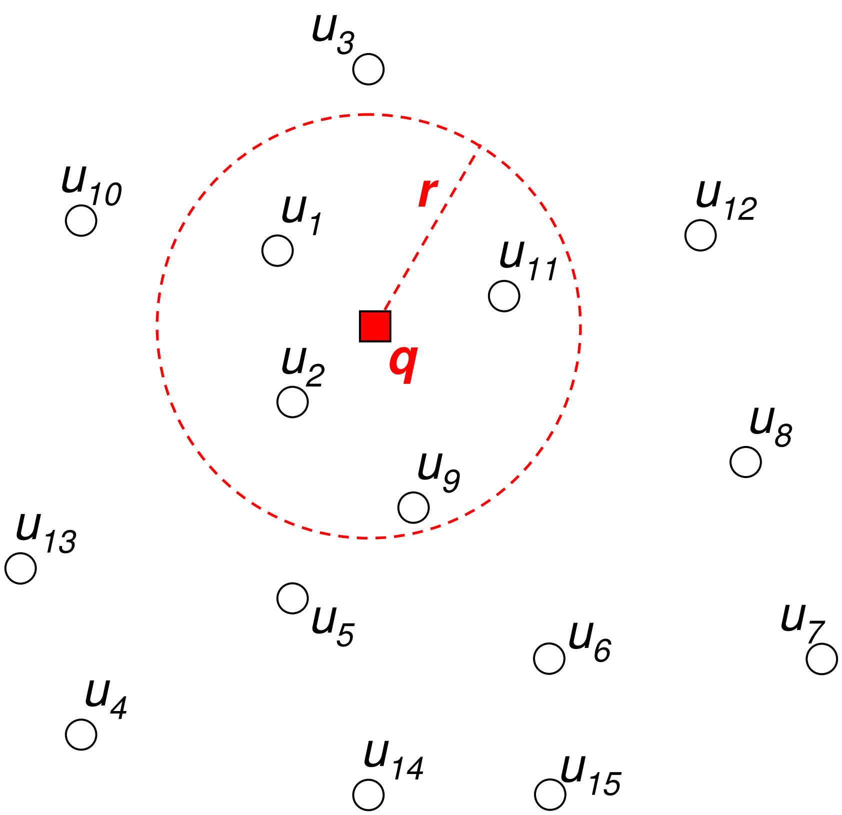
- Se llama "Bola de Consulta" al subespacio:

$$\mathrm{B}(q,r) = \{x \in \mathcal{D}, d(x,q) \leq r\}$$

- La búsqueda por rango es recuperar los objetos de $\mathcal{R}$ que están dentro de la bola de consulta:

$$\mathrm{R}(q,r) = \mathcal{R} \cap \mathrm{B}(q,r)$$

Búsqueda por rango



$R(q, r) = \{ u_1, u_2, u_9, u_{11} \}$

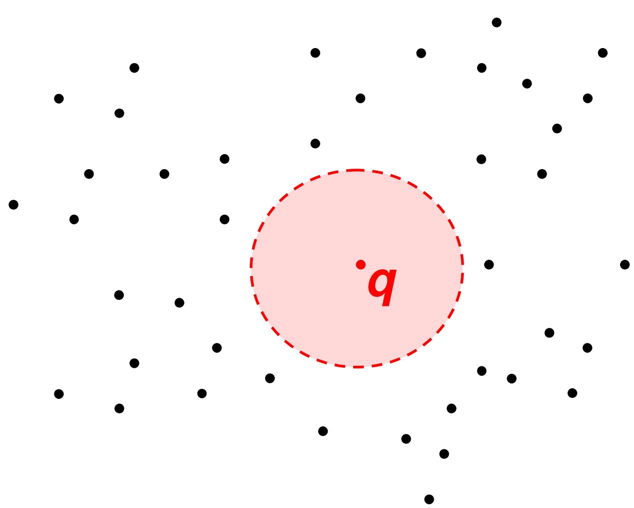
Búsqueda por rango

- Algoritmo secuencial (linear scan):

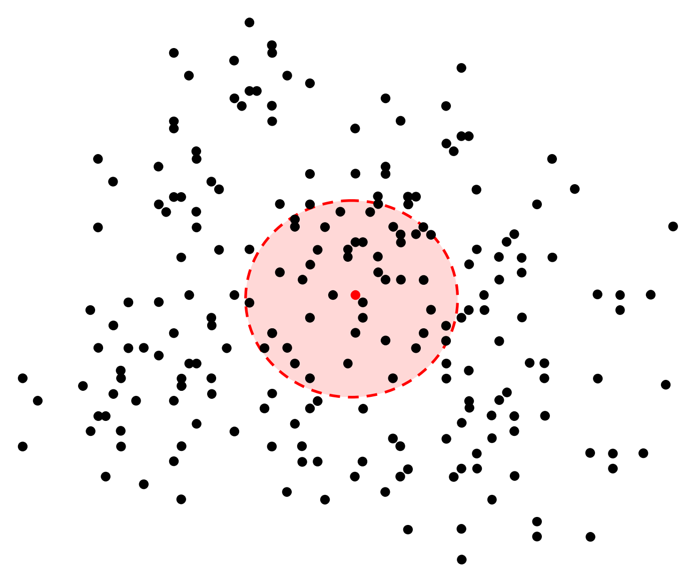
```
queue ← ∅ ;
foreach u_i ∈ R do
    if d(u_i, q) ≤ r then
        queue.Add(u_i) ;
    end
end
Print(queue);
```

Búsqueda por rango

- ¿Cómo fijar el radio de tolerancia?



Muy pequeño: no encuentra nada



Muy grande: encuentra demasiado

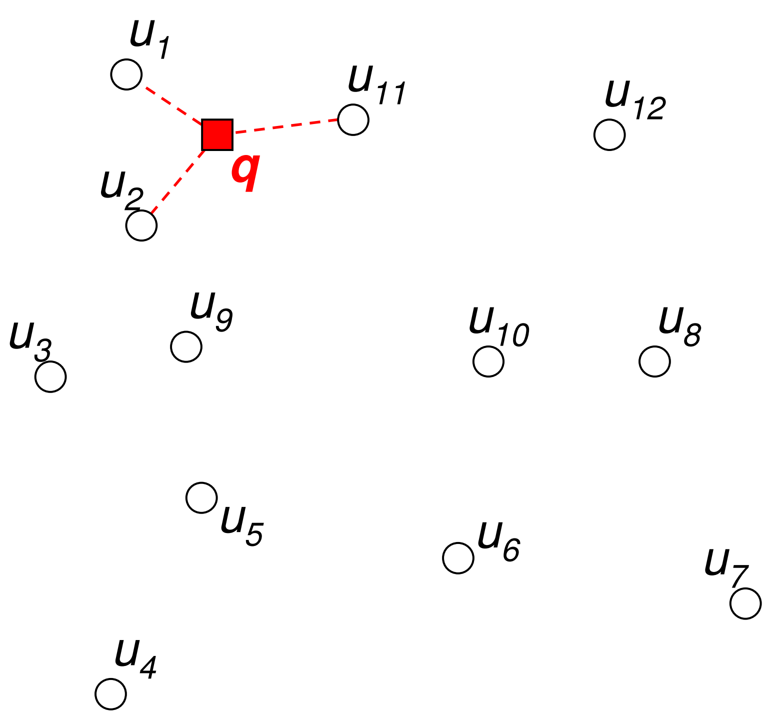
Búsqueda del vecino más cercano

- *k-Nearest Neighbors:* Recuperar los *k* objetos del espacio de búsqueda con menor distancia a *q*

$$
\begin{aligned}
k\mathrm{NN}(q) = \{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}, |\mathcal{C}| = k \ \wedge \\
\forall x \in \mathcal{C}, y \in \mathcal{R} - \mathcal{C}, \ d(x,q) \leq d(y,q)\}
\end{aligned}
$$

  - Parámetro: $k \in \mathbb{N}$
  - Existe más de una respuesta válida cuando hay varios objetos a la misma distancia de *q*

Búsqueda del vecino más cercano



3NN(q) = { u_1, u_2, u_{11}}

Búsqueda del vecino más cercano

- Algoritmo secuencial 1-NN (linear scan):

candidate $\leftarrow$ **null** ;
candidate_dist $\leftarrow +\infty$;
foreach $u_i \in \mathcal{R}$ **do**
    dist $\leftarrow d(u_i, q)$;
    if dist $<$ candidate_dist **then**
        candidate $\leftarrow u_i$;
        candidate_dist $\leftarrow$ dist;
    end
end
Print(candidate);

Búsqueda *k* vecinos más cercanos

- Algoritmo secuencial *k*-NN (linear scan):

```
candidates ← ∅ ; // Priority Queue (Max-Heap)
foreach u_i ∈ R do
    dist ← d(u_i, q) ;
    if candidates.Size() < k then
        candidates.Add(dist, u_i) ;
    else if candidates.Get-Max().priority > dist then
        candidates.Remove-Max() ;
        candidates.Add(dist, u_i) ;
    end
end
Print(candidates);
```

Otros tipos de búsquedas

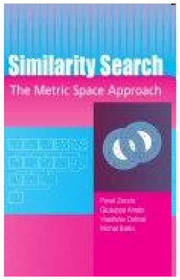
- Combinaciones de criterios:
  - Consulta por rango + k-NN
  - Consulta *k*-NN con región de búsqueda (constrained *k*-NN)
- Reverse Nearest Neighbor:
  - Dado *q* recuperar todos los objetos de *R* para los cuales *q* es uno de sus *k*-NN
- Similarity Join:
  - Dado dos conjuntos *Q* y *R* resolver una búsqueda *k*-NN o por rango para cada q_i en *Q*, es decir, obtener los *k*-NN de todos los objetos en *Q* (All-Nearest Neighbors) o todos los pares donde donde $d(q_i,u_j) \leq r$
- Self Similarity Join:
  - Resolver un Similarity Join cuando $Q=R$

Tipos de Índices

- **Índices Multidimensionales**
  - Asumen que los datos son vectores y usan los valores de las coordenadas para agruparlos
  - **Árboles**: Agrupan vectores en regiones espaciales ordenadas jerárquicamente
  - **Hashing**: Asignan vectores a una o más tablas de tamaño fijo
  - **Filling Curves**: Convierten el espacio multi-dimensional en un espacio unidimensional
- **Índices Métricos**
  - Pueden indexar cualquier tipo de objeto mientras la función de distancia pueda compararlos
  - Usan las propiedades métricas de la función de distancia
  - Seleccionan objetos de referencia y los comparan con el resto

Bibliografía

- **Similarity Search: The Metric Space Approach**. Zezula et al. 2006.
  - Capítulo 1, Secciones 1-4.



Papers

- Hetland et al. **Ptolemaic access methods: Challenging the reign of the metric space model**. 2013.
- Aggarwal et al. **On the Surprising Behavior of Distance Metrics in High Dimensional Space**. 2001.
- Rubner et al. **Empirical Evaluation of Dissimilarity Measures for Color and Texture**. 2001.
- Huttenlocher et al. **Comparing images using the Hausdorff distance**. 1993.
- Meng et al. **Enhancing DPF for near-replica image recognition**. 2003.
- Skopal et al. **On Nonmetric Similarity Search Problems in Complex Domains**. 2011.