UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía
Primer parcial 13 de octubre 2020

Nombre:	
Apellido:	
C.I.:	

Ejercicios

1. Considere el siguiente caso del modelo de oferta y demanda dinámico con inventario:

$$\begin{cases} D_t = 22 - p_t \\ S_t = -2 + 15p_t \\ p_{t+1} = p_t - \dfrac{1}{10}\left(S_t - D_t\right) \end{cases} \qquad \forall t = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

donde S_t, D_t y p_t son la oferta, la demanda y el precio en el periodo t respectivamente y sea p_1 el precio inicial (Observe que el coeficiente de ajuste inducido por inventario es 10 %). se pide:

(a) Hallar la ecuación en diferencias que describe la dinámica del precio.
Solución:

$$p_{t+1} = p_t - \frac{1}{10}\left(S_t - D_t\right) = p_t - \frac{1}{10}\left(-2 + 15p_t - (22 - p_t)\right)$$

$$\Rightarrow p_{t+1} = \left(1 - \frac{16}{10}\right)p_t + \frac{24}{10} = -\frac{3}{5}p_t + \frac{12}{5}$$

(b) Hallar el precio de equilibrio.
Solución: Sea p^* el precio de equilibrio

$$p^* = -\frac{3}{5}p^* + \frac{12}{5} \Leftrightarrow p^* = \frac{3}{2}$$

(c) Estudiar la estabilidad del equilibrio.
Solución:

$$p_t = \left(p_1 - \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^{t-1} + \frac{3}{2},\ \forall t = 1,\ 2,\ \cdots$$

$$\lim_{t\to+\infty} p_t = \frac{3}{2} = p^*$$

elequilibrio es globalmente estable

2. Determine la solución de cada una de las ecuaciones en diferencia finita que tienen los valores iniciales indicados y estudie si la solución es convergente o no en los siguientes casos:

$$(a)\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{1}{3}x_t + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^t \\ x_1 = 8 \end{cases}$$

Solución: $x_t = 11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{t-1} - 3\left(\dfrac{1}{5}\right)^{t-1}$

$$(b)\begin{cases} x_{t+1} = 3\sqrt{x_t} = 3x_t^{\frac{1}{2}} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\textbf{Solución:}\quad \begin{cases} x_2 = 3x_1^{\frac{1}{2}} = 3(1)^{\frac{1}{2}} = 3 \\ x_3 = 3x_2^{\frac{1}{2}} = 3(3)^{\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} \\ x_4 = 3x_3^{\frac{1}{2}} = 3(3^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\ \vdots \\ x_t = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_t = 3^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}} \text{ y } \lim_{t\to+\infty} x_t = 3^2 = 9$$

$$(c)\begin{cases} 6x_{t+2} + 5x_{t+1} + x_t = 24 \\ x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Solución:

Ecuación característica:

$$6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

Raíces: $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Todas las soluciones de la homogénea son de la forma: $k_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{t-1} + k_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}$

Una solución particular, el equilibrio, la solución constante es: $x_t = \bar{x} = \frac{24}{12} = 2$

La solución general de la ecuación completa es:

$$x_t = k_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{t-1} + k_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} + 2\ ,\ \text{para todo } k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall t = 1,\ 2,\ \cdots$$

apartir de las condiciones iniciales ($x_1 = 5$, $x_2 = 1$) tenemos que $k_1 = 3$ y $k_2 = 0$

La única solución de la ecuación

$$\begin{cases} 6x_{t+2} + 5x_{t+1} + x_t = 24 \\ x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

es:

$$x_t = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{t-1} + 2\ ,\forall t = 1,\ 2,\ \cdots$$

Y converge al equilibrio ($\lim_{t\to+\infty} x_t = 2$)

3. Considere el siguiente caso particular del modelo de fijación de precios de Sraffa que puede resumirse en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} p_{1t} = \frac{3}{10}p_{1t-1} + \frac{4}{10}p_{2t-1} + 3 \\ p_{2t} = \frac{3}{10}p_{1t-1} + \frac{2}{10}p_{2t-1} + 5 \end{cases}$$

Halle los precios de equilibrio y estudie la estabilidad.

Solución: precios de equilibrio

es la solución del sistema:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{3}{10}p_1 + \frac{4}{10}p_2 + 3 \\ p_2 = \frac{3}{10}p_1 + \frac{2}{10}p_2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{10}p_1 - \frac{4}{10}p_2 = 3 \\ -\frac{3}{10}p_1 + \frac{8}{10}p_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 10 \\ p_2 = 10 \end{cases}$$

El sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p_{1t} \\ p_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1t-1} \\ p_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ecuacón caracteristica:

$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{12}{100} = 0$

Valores propios: $\lambda_1 = \dfrac{3}{5}$ $\lambda_2 = -\frac{1}{10}$

Como los valores propios tienen modulo menor a 1 el sistema es estable, el equilibrio es un atractor.