Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Conceptos básicos de dinámica discreta
parte 2
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Sistemas Dinámicos

- Un sistema dinámico es uno cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.
- Ejemplo: un ejemplo de un sistema dinámico se puede ver en la representación de las fluctuaciones de inflación, de tal forma que este año el nivel de inflación es x_t, el año próximo será x_{t+1}. De esta manera podemos poner nombres a los niveles de inflación que habrá cada año, así: año inicial x_0, año primero x_1,..., año t x_t. Como se puede observar: $x_{t+1} = f(x_t)$, se cumple para cualquier año t; lo cual significa que el nivel de inflación se puede determinar si se sabe el valor del año anterior. Por consiguiente esta ecuación representa un sistema dinámico.

Problemas y preguntas que interesan:

- Hacia donde evolucionan los **iterados** de x_0 mediante f?
- Cuáles son las regularidades e irregularidades que podemos detectar?
- Como varía el comportamiento dinámico según varía el valor inicial x_0?
- Como varía este comportamiento según varían los parámetros del sistema?

Ecuaciones en diferencias: Introducción

Las ecuaciones en diferencias se usan para describir la evolución de fenómenos dinámicos cuando se toma el tiempo como una variable discreta. Por ejemplo, si una cierta población tiene generaciones discretas, el tamaño de la $t+1-$ésima generación x_{t+1} es una función de la $n-$ésima generación x_t. Esta relación se expresa mediante la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = f(x_t); \forall t \geq 0 \tag{1}$$

Este problema puede ser visto desde otro punto de vista. Empezando con la condición inicial x_0, uno puede generar la **sucesión**

$$x_0, f(x_0), f\left(f\left(x_0\right)\right), f(f\left(f\left(x_0\right)\right)), \ldots, f(f(f(\ldots(f(x_0))))), \ldots$$

que puede ser denotada como

$$x_0, f(x_0), f^2\left(x_0\right), f^3\left(x_0\right), \ldots, f^t(x_0), \ldots$$

Los valores $f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0)$ se llaman respectivamente primer, segundo, tercer **iterado** de x_0 bajo f

Este procedimiento iterativo es un ejemplo de *sistema dinámico discreto*

Si escribimos

$$x_t = f^t(x_o)$$

tenemos que

$$x_{t+1} = f^{t+1}(x_o) = f\left(f^t(x_o)\right) = f(x_t)$$

volviendo de este modo a la ecuación (1).

Entonces las ecuaciones en diferencias y los sistemas dinámicos discretos representan dos caras de una misma moneda.

Si la función f de la ecuación (1) viene reemplazada por una función g dependiente de las variables x_n y n entonces obtenemos la ecuación

$$x_{t+1} = g(x_t, t); \forall t \geq 0 \tag{2}$$

La ecuación (2) se llama **no autónoma** (o dependiente del tiempo) mientras que la ecuación (1) se llama **autónoma** (o invariante en el tiempo).

Solución de una ecuación en diferencias

Una sucesión $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación (2) si y solo si

$$a_{t+1} = g(a_t, t); \forall t \geq 0$$

Ejemplo

La sucesión $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *tal que* $a_t = 2^t, \forall t \geq 0$ *es* **una solución** *de la ecuación*

$$a_{t+1} = a_t + 2^t$$

Si $a_t = 2^t \Rightarrow a_{t+1} = 2^{t+1} = 2\ 2^t = 2^t + 2^t = a_t + 2^t$

Ejemplo

La sucesión $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *tal que* $a_t = 1, \forall t \geq 0$ *es* **una solución** *de la ecuación*

$$a_{t+1} = 3a_t^3 + 2a_t^2 - 4a_t$$

Si $a_t = 1, \forall t \geq 0 \Rightarrow a_{t+1} = 1 = 3(1)^3 + 2(1)^2 - 4(1) = 3a_t^3 + 2a_t^2 - 4a_t$

Ejemplo

La sucesión $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *tal que* $a_t = t, \forall t \geq 0$ **no** *es una solución de la ecuación*

$$a_{t+1} = 4ta_t + 2$$

$a_{t+1} = t + 1 \neq 4t(t) + 2, \; \forall t \in \mathbb{N}$

Observación:
Si se conoce la condición inicial x_{t_0}, entonces, para $t \geq t_0$, **existe una única** solución $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la ecuación (2) que verifica la condición inicial x_{t_0}. Esta solución queda definida en modo inductivo.

$$\begin{cases} x_{t+1} = g(x_t, t); \forall t \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}, \text{ dado} \end{cases}$$

Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Una ecuación en diferencias de primer orden es **lineal** si es del tipo

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t; \ \forall t \geq 0 \tag{3}$$

donde $(a_t)_{t \in \mathbb{N}}$ y $(b_t)_{t \in \mathbb{N}}$ son sucesiones reales dadas.

Ejemplos

Ejemplo

Progresión aritmética de diferencia β

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \mathbf{a}_t + \beta \textit{ con } \ t \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \beta, \ \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + 2\ \beta, \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 + 3\ \beta, \ \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3 + 4\ \beta, \ \ldots, \mathbf{a}_t = \mathbf{a}_0 + (t)\ \ \beta$$

entonces, la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_0 + (t)\ \ \beta$ para cada $t \in \mathbb{N}$ con $t \geq 1$ y $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}$ dado es la única solución de la ecuación

Ejemplo

Progresión geométrica de razón α

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \alpha\,\mathbf{a}_t \ \textit{con} \ \ t \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \alpha\,\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_2 &= \alpha(\mathbf{a}_1) = \alpha(\alpha\,\mathbf{a}_0) = \alpha^2\,\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_3 &= \alpha(\mathbf{a}_2) = \alpha(\alpha^2\,\mathbf{a}_0) = \alpha^3\,\mathbf{a}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_t &= \alpha^t\,\mathbf{a}_0,
\end{aligned}$$

la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de término general $\mathbf{a}_t = \alpha^t\,\mathbf{a}_0$ siendo $\mathbf{a}_0$ un real dado es la unica solución la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es solución de la ecuación en diferencia finita

$$\mathbf{a}_{t+1} = \alpha\,\mathbf{a}_t, \tag{4}$$

si y sólo si, $\mathbf{a}_t = k\ \alpha^t$
para algún $k \in \mathbb{R}$ que se determinará con la condición inicial.

(Si $\mathbf{a}_t = k\ \alpha^t \Rightarrow \mathbf{a}_{t+1} = k\ \alpha^{t+1} = \alpha\ k\ \alpha^t = \alpha\ \mathbf{a}_t\ \forall k \in \mathbb{R}$, esto es, hay infinitas soluciones de la ecuación (4))

Observación

Se considera el conjunto

$V = \left\{ (\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}} \in S_{\mathbb{R}} \ / \ \mathbf{a}_{t+1} = \alpha \, \mathbf{a}_t \ \textit{para} \ t = 0\,1,\, 2,\, 3, \ldots \right\}$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ *un real fijo.*

V *es el conjunto de sucesiones reales solución de la ecuación* (4)

Se puede demostrar que V *es un subespacio vectorial de* $S_{\mathbb{R}}$ *y cuando el real* α *no es cero* V *tiene dimensión* 1

(alcanza con observar que la sucesión $(\alpha^t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es una base de* V*, todos los elementos de* V *se pueden expresar como C.L. de los elementos de la base).*

Ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes

Utilizando los dos ejemplos anteriores se quiere obtener la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\,\in\,\mathbb{N}}$ que verifique la ecuación en diferencia finita

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \alpha\,\mathbf{a}_t + \beta \text{ con } t \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{siendo } \alpha,\ \beta,\ \mathbf{a}_0 \text{ reales dados}$$

Observar que en la progresión aritmética ($\alpha = 1$ y $\beta = 0$)
y la progresión geométrica ($\beta = 0$) son casos particulares. $a_{t+1} = f(a_t)$

siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \alpha x + \beta$ lineal

$$\mathbf{a}_1 = \alpha\, \mathbf{a}_0 + \beta$$

$$\mathbf{a}_2 = \alpha\, \mathbf{a}_1 + \beta, \text{ entonces, } \mathbf{a}_2 = \alpha(\alpha\, \mathbf{a}_0 + \beta + \beta) = \alpha^2\, \mathbf{a}_0 + (1+\alpha)\ \beta$$

$$\mathbf{a}_3 = \alpha\, \mathbf{a}_2 + \beta, \text{ entonces, } \mathbf{a}_3 = \alpha^3\, \mathbf{a}_0 + \left(1+\alpha+\alpha^2\right)\ \beta$$

$$\mathbf{a}_4 = \alpha\, \mathbf{a}_3 + \beta, \text{ entonces, } \mathbf{a}_4 = \alpha^4\, \mathbf{a}_0 + \left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\right)\ \beta$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_t = \alpha\, \mathbf{a}_{t-1} + \beta, \text{ entonces, } \mathbf{a}_t = \alpha^t\, \mathbf{a}_0 + \left(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{t-1}\right)\ \beta$$

Recordando que:

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{t-1} = \begin{cases} t \text{ si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^t}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$a_t = \begin{cases} \mathbf{a}_0 + t\beta \text{ si } \alpha = 1 \\ \alpha^t \mathbf{a}_0 + \left(\dfrac{1 - \alpha^t}{1 - \alpha} \right) \beta \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$a_t = \begin{cases} \mathbf{a}_0 + t\beta \text{ si } \alpha = 1 \\ \left(\mathbf{a}_0 - \dfrac{\beta}{1 - \alpha} \right) \alpha^t + \dfrac{\beta}{1 - \alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Es la **única** solución de la ecuación:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \alpha\, \mathbf{a}_t + \beta \text{ con } t \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \dfrac{1}{2}\mathbf{a}_t + 4 \text{ con } t \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_0 = -3 \end{cases}$ *y estudiar el* $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t$.

$\alpha = \dfrac{1}{2} \; (\neq 1)$, $\beta = 4$

La solución es:

$$a_t = \left(\mathbf{a}_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)\alpha^t + \frac{\beta}{1-\alpha} = \left(-3 - \frac{4}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{4}{1-\frac{1}{2}}$$

$$a_t = -8\left(\frac{1}{2}\right)^t + 8 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{t-3} + 8 \text{ y } \lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = 8$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación:

$$a_{t+1} = \alpha a_t + \beta \text{ con } t \in \mathbb{N}$$

$$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}} \qquad \text{tal que } a_t = \begin{cases} K + t\beta \text{ si } \alpha = 1 \\ K\alpha^t + \dfrac{\beta}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

es solución de la ecuación para cada $K \in \mathbb{R}$

Si se conoce la condición inicial, se puede determinar K

Observar que si $\alpha \neq 1$:

$(K\alpha^t)_{t\in\mathbb{N}}$ son **todas** las soluciones de la ecuación (homogénea) $a_{t+1} = \alpha a_t$ y

$\left(\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)_{t\in\mathbb{N}}$ es **una** solución de la ecuación completa:

$$p_t = \frac{\beta}{1-\alpha} \Rightarrow p_{t+1} = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\alpha p_t + \beta = \alpha\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \beta = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} + \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha} =$$

$\alpha p_t + \beta = \dfrac{\alpha\beta + \beta - \alpha\beta}{1-\alpha} = \dfrac{\beta}{1-\alpha} = p_{t+1}$ (la sucesión p_t, constante, es solución)

Dinámica de la ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes

- Si $|\alpha| < 1$ entonces para toda condición inicial x_0 la solución $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la ecuación converge al equilibrio $p = \frac{\beta}{1-\alpha}$.
- Si $|\alpha| > 1$ entonces la solución $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la ecuación diverge a ∞, cualquiera sea la condición inicial x_0.
- Si $\alpha = -1$ entonces para toda condición inicial x_0 la solución $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la ecuación oscila entre los valores x_0 y $-x_0 + \beta$.
- Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ entonces la solución $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la ecuación es constante e igual a la condición inicial x_0.

Ejercicios

Determine la solución de cada una de las ecuaciones en diferencia finita que tiene el valor inicial indicado y estudie si la solución obtenida es convergente o no en los casos siguientes:

1. $$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \dfrac{2}{3}\,\mathbf{a}_n + 1 \text{ con } \; n = 0,\, ,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_0 = 5 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = \dfrac{2}{3}\,\mathbf{a}_t + 1 \text{ con } \; n = 0,\; 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = 3\,\mathbf{a}_t - 5\,(\dfrac{1}{2})^t \text{ con } \; t = 0,\; 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_0 = 5 \end{cases}$$

   $$\left[\underline{\textit{Sugerencia}} : \text{ Buscar una solución de la forma } b\,(\frac{1}{2})^n \text{ con } b \in \mathbb{R}\right]$$

4. $$\begin{cases} \mathbf{a}_{t+1} = -\,\mathbf{a}_t + 2 \text{ con } \; t = 0,\; 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ecuación lineal de primer orden, caso general

Una ecuación en diferencias de primer orden es lineal si es del tipo:

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t; \forall t \geq 0 \tag{5}$$

donde $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ y $(b_t)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones dadas.
Asociada a la ecuación (5) tenemos la **ecuación homogénea**:

$$x_{t+1} = a_t x_t; \forall t \geq 0 \tag{6}$$

Las soluciones de estas ecuaciones se pueden encontrar por iteración. Se puede ver que la solución de la ecuación (6) que verifica la condición inicial x_0 viene dada por

$$x_t = \left(\prod_{i=0}^{t-1} a_i\right) x_0; \forall t \geq 1$$

y que la solución de la ecuación (5) que verifica la condición inicial x_0 es

$$x_t = b_{t-1} + \sum_{j=0}^{t-2} \left[\left(\prod_{i=j+1}^{t-1} a_i \right) b_j \right] + \left(\prod_{i=0}^{t-1} a_i \right) x_0; \forall t \geq 1 \tag{7}$$

Ejemplo

Determine la solución de la ecuación en diferencia finita que tiene el valor inicial indicado y estudie si la solución obtenida es convergente

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \dfrac{t+1}{t+2}\mathbf{x}_t \ \ \textit{con} \ \ t = 0, \ 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es tal que: $a_t = \dfrac{t+1}{t+2}$

la solución es:

$$x_t = \left(\prod_{i=0}^{t-1} a_i\right) x_0 = \left(\prod_{i=0}^{t-1}\left(\frac{i+1}{i+2}\right)\right) x_0$$

$$x_t = \left((\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}) \ldots (\frac{t-2+1}{t-1+1})(\frac{t-1+1}{t+1}) \right) x_0 = (\frac{1}{t+1})x_0$$

Hallar la solución de

$$\begin{cases} x_{t+1} = (t+1)x_t + 2^t\,(t+1)! \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Propiedades de la ecuación en diferencias lineal

Sea la ecuación en diferencias de primer orden lineal

$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t; \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $(a_t)_{t\in\mathbb{N}}$ y $(b_t)_{t\in\mathbb{N}}$ son sucesiones dadas y la ecuación homogénea asociada

$$x_{t+1} = a_t x_t; \forall t \geq 0 \tag{9}$$

- Si $(p_t)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución **particular** de la ecuación (8) entonces la solución de la ecuación (8) que verifica la condición inicial x_0 viene dada por

$$x_t = p_t + \left(\prod_{i=0}^{t-1} a_i\right) x_0; \forall t \geq 1$$

Entonces la solución general de la ecuación (8) se puede formar sumando una solución particular de la ecuación (8) con la solución general de la ecuación (9).

En particular, la solución de la ecuación en diferencias de primer orden lineal

$$x_{t+1} = \alpha x_t + b_t; \forall t \geq 0 \tag{10}$$

que verifica la condición inicial x_0 viene dada por

$$x_t = p_t + a^t x_0; \forall t \geq 0$$

siendo $(p_t)_{t \in \mathbb{N}}$ una solución particular de la ecuación (10). Se pueden buscar soluciones particulares de la ecuación (10) usando las siguientes observaciones:

- Si b_t es constante, entonces una posible solución particular de la ecuación (10) es una sucesión constante.
- Si $b_t = k^t$, entonces una posible solución particular de la ecuación (10) es una sucesión del tipo $p_t = \lambda k^t$ para algún valor de λ.
- Si b_t es un polinomio de grado k en t, entonces una posible solución particular de la ecuación (10) es es un polinomio de grado k en t.

Ejercicios

Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias

1. $$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - 4 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + 3^t \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_{t+1} = -4x_t + 10t - 3 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y estudiar la estabilidad.

2021

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY