Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Modelo de Oferta y Demanda - telaraña
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Un modelo de oferta y demanda

Sea S_t el número de unidades ofertadas en el período t, D_t el número de unidades demandadas en el período t y p_t el precio por unidad en el período t.
Por simplicidad asumimos que S_t y D_t dependen linealmente de p_t, de modo que la curva de oferta esta dada por

$$S_{t+1} = m_S p_t + b_S$$

y la curva de demanda esta dada por

$$D_t = -m_D p_t + b_D$$

m_S, b_S, m_D y b_D son positivos, donde m_S y m_D representan la sensibilidad al precio de los productores y consumidores respectivamente.

La pendiente de la curva de demanda $(-m_D)$ es negativa pues un aumento en los precios disminuye la demanda
y la pendiente de la curva de oferta (m_S) es positiva pues un aumento en lo precios aumenta la oferta.

Supongamos ademas que en cada período la oferta iguala a la demanda

$$S_{t+1} = D_{t+1}$$

fijandose de esta manera el precio de mercado p^*.
Entonces vale que

$$m_S p_t + b_S = -m_D p_{t+1} + b_D$$

o equivalentemente

$$p_{t+1} = Ap_t + B = f\left(p_t\right) \tag{1}$$

donde

$$A = -\frac{m_S}{m_D} \text{ y } B = \frac{b_D - b_S}{m_D} \tag{2}$$

La ecuación (1) es una ecuación en diferencias lineal de primer orden y el precio de equilibrio es

$$p^* = \frac{B}{1-A} = \frac{b_D - b_S}{m_D - m_S}$$

$$p_{t+1} = Ap_t + B = f\left(p_t\right)$$

Es una ecuación en diferencias lineal, de primer orden con coeficientes constantes.
La solución de la ecuación está dada por

$$p_t = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^t + \frac{B}{1-A}$$

$$p_t = \left(p_0 - (\frac{b_D - b_S}{m_D - m_S})\right) (-\frac{m_S}{m_D})^t + \frac{b_D - b_S}{m_D - m_S}$$

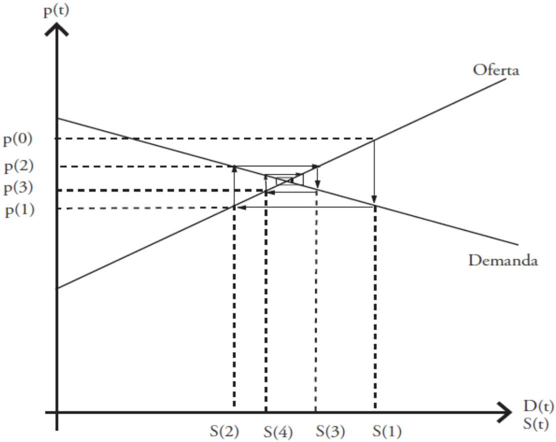
Entonces la razón $\frac{m_S}{m_D}$ entre las pendientes de las curvas de oferta y demanda determina la conducta de la sucesión de precios y podemos establecer la siguiente proposición.

Teorema (de la telaraña)

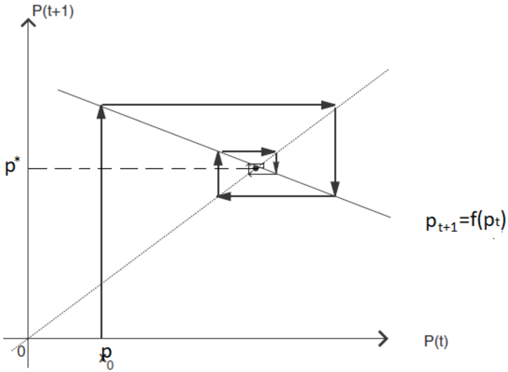
1. *Si los productores son menos sensibles al precio que los consumidores* $\left(m_S < m_D \Rightarrow \left|-\frac{m_S}{m_D}\right| < 1\right)$, *entonces la sucesión de precios* p_t *converge al precio de equilibrio* p^*
2. *Si los productores son más sensibles al precio que los consumidores* $\left(m_S > m_D \Rightarrow \left|-\frac{m_S}{m_D}\right| > 1\right)$, *entonces la sucesión de precios* p_t *oscila y diverge a* ∞.
3. *Si* $m_S = m_D$, *entonces la sucesión de precios* p_n *oscila entre los valores* p_0 *y* $\frac{2B}{1-A} - p_0$.

Análisis gráfico - caso convergencia

$$S_{t+1} = D_{t+1} \Leftrightarrow m_S p_t + b_S = -m_D p_{t+1} + b_D$$



$$p_{t+1} = Ap_t + B = f(p_t)$$



El modelo de la telaraña con espectativas

El modelo anterior puede ser considerado como un caso particular del modelo

$$\begin{cases} D_t = b_D - m_D p_t \\ S_t = b_S + m_S p_t^e \\ D_t = S_t \end{cases} \tag{3}$$

donde p_t^e es el precio esperado por los productores.
En el modelo original supusimos $p_t^e = p_{t-1}$, que se llama de *espectativas ingenuas*.
No parece plausible asumir que los productores creeen que el precio corriente será igual al del período precedente. Todos aprendemos con la experiencia y hay varias alternativas para mejorar esta hipótesis de espectativas ingenuas.

- **Precio normal**: es el precio que los productores creen que obtendrán en algún momento en el mercado. Corresponde al caso en que los productores tienen información perfecta si interpretamos el precio normal como el equilibrio del modelo. La manera mas sencilla de proponer estas espectativas es mediante:

$$p_t^e = p_{t-1} + c\left(p_N - p_{t-1}\right); 0 < c < 1 \tag{4}$$

donde p_N es el precio normal, y si el precio corriente no coincide con este se hacen modificaciones para acercarse. El hecho de que $c < 1$ implica que los productores no creen que el precio normal se obtenga inmediatamente (pues para $c = 1$ es $p_n^e = p_N$) y notese que $c = 0$ es el caso de espectativas ingenuas.

Sustituyendo (4) en (**??**) obtenemos

$$b_D - m_D p_t = b_S + m_S \left[p_{t-1} + c \left(p_N - p_{t-1} \right) \right]$$

o, en forma equivalente

$$-m_D p_t = m_S \left(1 - c\right) p_{t-1} + \left(b_S - b_D\right) + m_S c p_N$$

cuya solución es

$$p_t = p_N + A \left[-\frac{m_S \left(1 - c\right)}{m_D} \right]^t$$

La estabilidad del equilibrio depende de $-\frac{m_S(1-c)}{m_D}$, y como es $0 < c < 1$ podemos afirmar que la introduccion de estas espectativas le dan más estabilidad al modelo.

$$p_t = p_N + A\left[-\frac{m_S(1-c)}{m_D}\right]^t$$

Observar que:

- Si $c = 0$ es el caso de expectativas ingenuas y se encuentra el mismo resultado que antes (obviamente)
- Si $c = 1$ es el caso de información perfecta, $p_t^e = p_N$, los productores esperan el precio normal y en ese caso: $p_t = p_N$; $\forall t \in \mathbb{N}$, la solución es constante.

- **Expectativas Adaptativas** (M. Nerlove, Adaptive expectations and cobweb phenomena, Q*uaterly Journal of Economics* 73, 227-240, 1958) La espectativas se adaptan en cada período en base a las discrepancias entre el valor observado y el valor previamente esperado:

$$p_t^e - p_{t-1}^e = \beta \left(p_{t-1} - p_{t-1}^e \right); 0 < \beta < 1 \tag{5}$$

Esta ecuación no nos da por si sola el valor de p_t^e, sino solo una regla de como varía.

$$p_t^e - p_{t-1}^e = \beta \left(p_{t-1} - p_{t-1}^e \right); 0 < \beta < 1$$

Podemos considerarla como una ecuación en diferencias en la variable p_n^e.

$$p_t^e = (1-\beta)\, p_{t-1}^e + \beta p_{t-1}$$

La solución de esta ecuación es

$$p_t^e = K\,(1-\beta)^t + \beta \sum_{j=0}^{\infty} (1-\beta)^j\, p_{t-1-j}$$

Como $\beta \sum_{j=0}^{\infty} (1-\beta)^j = 1, \quad (\beta \in (0,1))$

implica que el precio esperado es una media ponderada de todos los valores observados en el pasado. De todos modos no necesitamos esta solución para resolver nuestro modelo.

(5) $p_t^e - p_{t-1}^e = \beta \left(p_{t-1} - p_{t-1}^e\right) \; ; 0 < \beta < 1$

De

$$S_t = b_S + m_S p_t^e$$

tenemos que

$$p_t^e = \frac{S_t - b_S}{m_S} \text{ y } p_{t-1}^e = \frac{S_{t-1} - b_S}{m_S}$$

Sustituyendo en (5) y reordenando es

$$S_t = (1 - \beta)\, S_{t-1} + b_S \beta + m_S p_{t-1}$$

Usando ahora que $D_t = b_D - m_D p_t$ y que $D_{t-1} = b_D - m_D p_{t-1}$ se llega a

$$b_D - m_D p_t = (1 - \beta)\,(b_D - m_D p_{t-1}) + b_S \beta + m_S p_{t-1}$$

y por lo tanto la dinámica de los precios esta dada por

$$p_t = \frac{1}{m_D}\left[(1-\beta)\,m_D - m_S\right]p_{t-1} + b_D - b_S\beta - (1-\beta)\,b_D \qquad (6)$$

Una solución particular de esta ecuación es el precio de equilibrio p^* (solución constante) y por lo tanto la solución general de (6) es

$$p_t = p^* + A\left(\frac{(1-\beta)\,m_D - m_S}{m_D}\right)^t$$

La condición de convergencia hacia el precio de equilibrio $\left(\left|\frac{(1-\beta)m_D - m_S}{m_D}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|(1-\beta)\left(-\frac{m_S}{m_D}\right)\right| < 1\right)$ puede ser expresada como

$$-2 + \beta < -\frac{m_S}{m_D} < \beta$$

o, como sabemos que

$$\frac{m_S}{m_D} > 0$$

es

$$\frac{m_S}{m_D} < 2 - \beta$$

y como es $0 < \beta < 1$ entonces

$$1 < 2 - \beta$$

lo que implica que la introducción de espectativas adaptativas le da más estabilidad al modelo.

2021

FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY