Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Modelo de inventario de Meztler y Sistemas de Ecuaciones en diferencias
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

El modelo de Metzler

Sea S_t el stock de inventario. Las ventas coinciden con el consumo C_t

El modelo de Metzler

Sea S_t el stock de inventario. Las ventas coinciden con el consumo C_t. Por simplicidad, podemos asumir que hay expectativas adaptativas estáticas de modo que las ventas previstas en el tiempo t sean simplemente ventas del período pasado:

$$C_t^e = C_{t-1}$$

El modelo de Metzler

Sea S_t el stock de inventario. Las ventas coinciden con el consumo C_t. Por simplicidad, podemos asumir que hay expectativas adaptativas estáticas de modo que las ventas previstas en el tiempo t sean simplemente ventas del período pasado:

$$C_t^e = C_{t-1}$$

Entonces la cantidad deseada de inventario en el tiempo t es

$$S_t = kC_{t-1}$$

donde el parámetro k (llamado el acelerador de inventario) refleja la proporción de las ventas previstas que los productores desean mantener como inventario $(0 < k < 1)$

El modelo de Metzler

Sea S_t el stock de inventario. Las ventas coinciden con el consumo C_t. Por simplicidad, podemos asumir que hay expectativas adaptativas estáticas de modo que las ventas previstas en el tiempo t sean simplemente ventas del período pasado:

$$C_t^e = C_{t-1}$$

Entonces la cantidad deseada de inventario en el tiempo t es

$$S_t = kC_{t-1}$$

donde el parámetro k (llamado el acelerador de inventario) refleja la proporción de las ventas previstas que los productores desean mantener como inventario ($0 < k < 1$). Supongamos que tenemos una función de consumo no-desfasada simple

$$C_t = cY_t \ , 0 < c < 1$$

$$S_t = kC_{t-1} = kcY_{t-1}$$

es el inventario deseado en el tiempo t

$$S_t = kC_{t-1} = kcY_{t-1}$$

es el inventario deseado en el tiempo t. Sin embargo debemos tener en cuenta que pudo haber inventario heredado del período pasado. A saber, retrasándo todo una vez,

$$S_{t-1} = kC_{t-2} = kcY_{t-2}$$

$$S_t = kC_{t-1} = kcY_{t-1}$$

es el inventario deseado en el tiempo t. Sin embargo debemos tener en cuenta que pudo haber inventario heredado del período pasado. A saber, retrasándo todo una vez,

$$S_{t-1} = kC_{t-2} = kcY_{t-2}$$

era el nivel deseado del inventario en el período pasado. No hay ninguna razón para suponer que este inventario era correcto, y las venta esperadas en el período precedente $C^e_{t-1} = C_{t-2}$ pueden haber sido diferentes de las ventas actuales C_{t-1}. Entonces la diferencia

$$C_{t-1} - C_{t-2} = c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

$$S_t = kC_{t-1} = kcY_{t-1}$$

es el inventario deseado en el tiempo t. Sin embargo debemos tener en cuenta que pudo haber inventario heredado del período pasado. A saber, retrasándo todo una vez,

$$S_{t-1} = kC_{t-2} = kcY_{t-2}$$

era el nivel deseado del inventario en el período pasado. No hay ninguna razón para suponer que este inventario era correcto, y las venta esperadas en el período precedente $C^e_{t-1} = C_{t-2}$ pueden haber sido diferentes de las ventas actuales C_{t-1}. Entonces la diferencia

$$C_{t-1} - C_{t-2} = c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

refleja la discrepancia inesperada en ventas a partir de las expectativas y todo lo no vendido

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$.
Ahora bien, la inversión total en el período t (llamada I_t) se divide en el aumento del stock de capital (I_t^K) y el aumento del inventario (I_t^S)de modo que

$$I_t = I_t^K + I_t^S$$

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$.
Ahora bien, la inversión total en el período t (llamada I_t) se divide en el aumento del stock de capital (I_t^K) y el aumento del inventario (I_t^S)de modo que

$$I_t = I_t^K + I_t^S$$

Por simplicidad, suponemos que I_t^K es autónomo y constante, es decir:

$$I_t^K = \bar{I}$$

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$.
Ahora bien, la inversión total en el período t (llamada I_t) se divide en el aumento del stock de capital (I_t^K) y el aumento del inventario (I_t^S)de modo que

$$I_t = I_t^K + I_t^S$$

Por simplicidad, suponemos que I_t^K es autónomo y constante, es decir:

$$I_t^K = \bar{I}$$

Entonces la inversión total es simplemente inversión en inventarios. La inversión de los productores en inventarios en el tiempo t es la diferencia entre el stock de inventario deseado en el tiempo t (S_t) y el stock de inventario remanente del período $t-1$ (como vimos, $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$), o:

$$I_t^S = S_t - \left[S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)\right] \tag{1}$$

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right) = kcY_{t-2} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$.
Ahora bien, la inversión total en el período t (llamada I_t) se divide en el aumento del stock de capital (I_t^K) y el aumento del inventario (I_t^S)de modo que

$$I_t = I_t^K + I_t^S$$

Por simplicidad, suponemos que I_t^K es autónomo y constante, es decir:

$$I_t^K = \bar{I}$$

Entonces la inversión total es simplemente inversión en inventarios. La inversión de los productores en inventarios en el tiempo t es la diferencia entre el stock de inventario deseado en el tiempo t (S_t) y el stock de inventario remanente del período $t-1$ (como vimos, $S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$), o:

$$I_t^S = S_t - \left[S_{t-1} - c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)\right] \tag{1}$$

Substituyendo S_t y S_{t-1} en (1) tenemos que:

o simplemente:

$$I_t^S = (1+k)\,c\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

es nuestra inversión de inventario deseada en el tiempo t.

o simplemente:

$$I_t^S = (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

es nuestra inversión de inventario deseada en el tiempo t.
Ahora bien, se produce para satisfacer las ventas esperadas (C_t^e) y acumular los inventarios deseados (I_t^S) y el capital (I_t^K) de modo que:

$$Y_t = C_t^e + I_t^K + I_t^S \tag{2}$$

(que es evocador pero no lo mismo que nuestro viejo requisito del equilibrio de mercado de las mercancías - la diferencia es que tenemos las expectativas de las firmas en el consumo en vez del consumo real incorporado en esta ecuación). Entonces substituyendo nuestros términos en (2) tenemos que:

$$Y_t = cY_{t-1} + \bar{I} + (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

o simplemente:

$$I_t^S = (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

es nuestra inversión de inventario deseada en el tiempo t.
Ahora bien, se produce para satisfacer las ventas esperadas (C_t^e) y acumular los inventarios deseados (I_t^S) y el capital (I_t^K) de modo que:

$$Y_t = C_t^e + I_t^K + I_t^S \tag{2}$$

(que es evocador pero no lo mismo que nuestro viejo requisito del equilibrio de mercado de las mercancías - la diferencia es que tenemos las expectativas de las firmas en el consumo en vez del consumo real incorporado en esta ecuación). Entonces substituyendo nuestros términos en (2) tenemos que:

$$Y_t = cY_{t-1} + \bar{I} + (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

y por lo tanto es:

$$Y_t - c\,(2+k)\, Y_{t-1} + (1+k)\, cY_{t-2} = \bar{I}$$

o simplemente:

$$I_t^S = (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

es nuestra inversión de inventario deseada en el tiempo t.
Ahora bien, se produce para satisfacer las ventas esperadas (C_t^e) y acumular los inventarios deseados (I_t^S) y el capital (I_t^K) de modo que:

$$Y_t = C_t^e + I_t^K + I_t^S \tag{2}$$

(que es evocador pero no lo mismo que nuestro viejo requisito del equilibrio de mercado de las mercancías - la diferencia es que tenemos las expectativas de las firmas en el consumo en vez del consumo real incorporado en esta ecuación). Entonces substituyendo nuestros términos en (2) tenemos que:

$$Y_t = cY_{t-1} + \bar{I} + (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

y por lo tanto es:

$$Y_t - c\,(2+k)\, Y_{t-1} + (1+k)\, cY_{t-2} = \bar{I}$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$Y_t - c\,(2+k)\,Y_{t-1} + (1+k)\,cY_{t-2} = \bar{I}$

La solución particular (que es un equilibrio) es simplemente:

$Y_t - c(2+k)\,Y_{t-1} + (1+k)\,cY_{t-2} = \bar{I}$

La solución particular (que es un equilibrio) es simplemente:

$$Y_p = \frac{\bar{I}}{1-c}$$

$Y_t - c\,(2+k)\,Y_{t-1} + (1+k)\,cY_{t-2} = \bar{I}$

La solución particular (que es un equilibrio) es simplemente:

$$Y_p = \frac{\bar{I}}{1-c}$$

mientras que es la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - c\,(2+k)\,\lambda + (1+k)\,c = 0$$

$Y_t - c(2+k)\,Y_{t-1} + (1+k)\,cY_{t-2} = \bar{I}$

La solución particular (que es un equilibrio) es simplemente:

$$Y_p = \frac{\bar{I}}{1-c}$$

mientras que es la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - c(2+k)\,\lambda + (1+k)\,c = 0$$

El discriminante de la ecuación característica de la ecuación es

$$\Delta = c^2(2+k)^2 - 4(1+k)\,c \tag{3}$$

y por lo tanto $\Delta \geq 0$ si solo si

$$c \geq \frac{4(1+k)}{(2+k)^2} \tag{4}$$

y por lo tanto $\Delta \geq 0$ si solo si

$$c \geq \frac{4\,(1+k)}{(2+k)^2} \tag{4}$$

o, en forma equivalente

$$k \leq \frac{2}{c}\left(1-c-\sqrt{1-c}\right) \text{ o } \frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \leq k$$

Pero como es $0 < c < 1$ entonces $1-c < \sqrt{1-c} \Rightarrow$
$\frac{2}{c}\left(1-c-\sqrt{1-c}\right) < 0$ y la desigualdad izquierda no se verifica nunca.
Entonces la condición (4) es equivalente a

$$\frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \leq k$$

Las condiciones de estabilidad son

$$\begin{cases} 1 - c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \end{cases} \tag{5}$$

Las condiciones de estabilidad son

$$\left\{\begin{array}{c} 1 - c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

o, equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{c} 1 - c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(3+k) > 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

Las condiciones de estabilidad son

$$\begin{cases} 1 - c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \end{cases} \tag{5}$$

o, equivalentemente

$$\begin{cases} 1 - c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(3+k) > 0 \end{cases} \tag{6}$$

Dado que la primera y la última condición se verifican siempre, la condición de estabilidad del equilibrio es

$$c < \frac{1}{1+k}$$

o, en forma equivalente

$$k < \frac{1-c}{c}$$

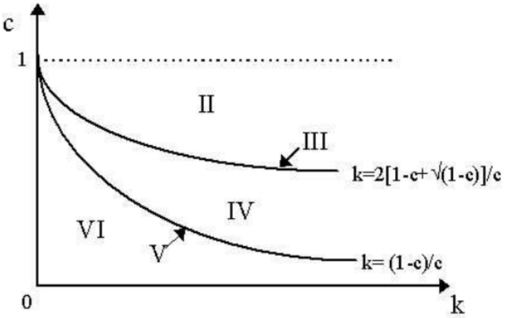
En la siguiente figura hemos representado las curvas

$$k = \frac{1-c}{c};\ k \leq \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right)$$

En la siguiente figura hemos representado las curvas

$$k = \frac{1-c}{c}; \; k \leq \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right)$$

que dividen el plano kOc en 3 regiones donde la conducta dinámica del modelo puede ser diferenciada.



- a **Región II**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k > \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

- a **Región II**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k > \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices reales positivas e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

- a **Región II**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k > \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

  entonces hay dos raices reales positivas e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

- b **Curva III**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k = \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

- a **Región II**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k > \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

  entonces hay dos raices reales positivas e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

  b **Curva III**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k = \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

  entonces hay una raíz real doble positiva e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

- **Región IV**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \text{ (raíces complejas)} \end{cases}$$

- **Región IV**: Como es

$$
\begin{cases}
k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\
k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \text{ (raíces complejas)}
\end{cases}
$$

entonces hay dos raices complejas e inestabilidad. El sistema muestra oscilaciones explosivas.

c **Región IV**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \text{ (raíces complejas)} \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas e inestabilidad. El sistema muestra oscilaciones explosivas.

d **Curva V**: Como es

$$\begin{cases} k = \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

c **Región IV**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \text{ (inestable)} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \text{ (raíces complejas)} \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas e inestabilidad. El sistema muestra oscilaciones explosivas.

d **Curva V**: Como es

$$\begin{cases} k = \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay raices complejas conjugadas con módulo menor que uno y por lo tanto el sistema es cíclico.

e **Región VI**: Como es

$$\begin{cases} k < \frac{1-c}{c} \\ \\ k < \frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

e **Región VI**: Como es

$$\begin{cases} k < \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas y estabilidad. El sistema muestra convergencia (oscilatoria) al equilibrio.

e **Región VI**: Como es

$$\begin{cases} k < \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas y estabilidad. El sistema muestra convergencia (oscilatoria) al equilibrio.

Esto muestra que las políticas de inventario de las firmas pueden provocar conductas dinámicas muy diferentes.

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Vamos a trabajar con dos o mas ecuaciones en las que dos o mas variables estàn relacionadas. En particular trabajaremos con sistemas cuadrados que estan dados por una ecuación del tipo

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Vamos a trabajar con dos o mas ecuaciones en las que dos o mas variables estàn relacionadas. En particular trabajaremos con sistemas cuadrados que estan dados por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = f(X_t); \ \forall t \geq 0$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un mapa vectorial

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Vamos a trabajar con dos o mas ecuaciones en las que dos o mas variables estàn relacionadas. En particular trabajaremos con sistemas cuadrados que estan dados por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = f(X_t);\ \forall t \geq 0$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un mapa vectorial. El caso mas sencillo es el de un sistema bidimensional que puede ser dado del modo siguiente:

$$\begin{cases} x_{t+1} = a\left(x_t, y_t\right) \\ y_{t+1} = b\left(x_t, y_t\right) \end{cases}$$

donde en este caso es $x_t, y_t \in \mathbb{R}$ y $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de dos variables.

Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden bidimensional esta dado por dos ecuaciones como las siguientes:

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_t x_t + b_t y_t + r_t \\ y_{t+1} = c_t x_t + d_t y_t + q_t \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden bidimensional esta dado por dos ecuaciones como las siguientes:

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_t x_t + b_t y_t + r_t \\ y_{t+1} = c_t x_t + d_t y_t + q_t \end{cases}$$

Este sistema puede ser escrito en forma matricial del modo siguiente:

$$X_{t+1} = A_t X_t + B_t$$

donde

$$A_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}, \quad X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_n = \begin{pmatrix} r_t \\ q_t \end{pmatrix}$$

En el caso en que

$$B_t = \begin{pmatrix} r_t \\ q_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el sistema se llama homogéneo.

Sistema Homogéneo

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = A_t X_t; \ \forall t \geq 0 \tag{7}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A_t es una matriz $k \times k$.

Sistema Homogéneo

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = A_t X_t; \ \forall t \geq 0 \tag{7}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A_t es una matriz $k \times k$.

Teorema

El conjunto de soluciones de la ecuación (7) es un espacio vectorial de dimensión k.

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$)

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$) **Demostración**:
$V_{t+1} = \lambda^{t+1} v$

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$) **Demostración**:
$V_{t+1} = \lambda^{t+1} v = \lambda v \lambda^t$

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$) **Demostración**:
$V_{t+1} = \lambda^{t+1} v = \lambda v \lambda^t = Av\left(\lambda^t\right)$

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$) **Demostración**:
$V_{t+1} = \lambda^{t+1} v = \lambda v \lambda^t = Av\left(\lambda^t\right) = A\left(\lambda^t v\right)$

Resolución del caso homogéneo con coeficientes constantes

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes esta dado por una ecuación del tipo

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Teorema

Si $v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio λ, entonces $V_t = \lambda^t v$ es una solución de la ecuación (8)

($v \in \mathbb{R}^k$ es un vector propio de la matriz A con valor propio $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$) **Demostración**:

$V_{t+1} = \lambda^{t+1} v = \lambda v \lambda^t = Av\left(\lambda^t\right) = A\left(\lambda^t v\right) = AV_t; \ \forall t \geq 0$

Soluciones de la Homogénea

Cada valor propio de la matriz A nos da una solución de la ecuación (8) del modo siguiente.

Soluciones de la Homogénea

Cada valor propio de la matriz A nos da una solución de la ecuación (8) del modo siguiente.

1. Una valor propio real simple λ con vector propio asociado v nos brinda la solución $X_t = \lambda^t v$

Soluciones de la Homogénea

Cada valor propio de la matriz A nos da una solución de la ecuación (8) del modo siguiente.

1. Una valor propio real simple λ con vector propio asociado v nos brinda la solución $X_t = \lambda^t v$
2. Una valor propio real doble λ con vector propio asociado v y vector propio generalizado w

Soluciones de la Homogénea

Cada valor propio de la matriz A nos da una solución de la ecuación (8) del modo siguiente.

1. Una valor propio real simple λ con vector propio asociado v nos brinda la solución $X_t = \lambda^t v$
2. Una valor propio real doble λ con vector propio asociado v y vector propio generalizado w (i.e., un vector que verifica $(A - \lambda I)\, w \neq 0$ y $(A - \lambda I)^2\, w = 0$) nos brinda dos soluciones $a_t = \lambda^t v$ y $b_t = \lambda^t\, (tv + w)$
3. Dos valores propios complejos conjugados $\rho\, (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ con vectores propios asociados $v = r \pm si$ nos brindan dos soluciones $p_t = \rho^t\, (r \cos t\varphi - s \sin t\varphi)$ y $q_t = \rho^t\, (s \cos t\varphi + r \sin t\varphi)$

A partir de esto podemos formar una base de las soluciones.

Ejemplos

1. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2x_{t-1} \end{cases}$$

que verifica la condición inicial $x_0 = 1; y_0 = 2.$

Ejemplos

1. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2x_{t-1} \end{cases}$$

que verifica la condición inicial $x_0 = 1; y_0 = 2$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor 2 y autovector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con autovalor -1

Ejemplos

1. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2x_{t-1} \end{cases}$$

que verifica la condición inicial $x_0 = 1; y_0 = 2$.

   1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor 2 y autovector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con autovalor -1
   2. la solución general del sistema es $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \alpha 2^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta (-1)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \text{ y } \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \text{ y } \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_t = \frac{4}{3} 2^t - \frac{1}{3} (-1)^t \\ \\ y_t = \frac{4}{3} 2^t + \frac{2}{3} (-1)^t \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2y_{t-1} \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2y_{t-1} \end{cases}$$

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalor 2 (doble)

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2y_{t-1} \end{cases}$$

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalor 2 (doble)y autovector generalizado $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2y_{t-1} \end{cases}$$

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalor 2 (doble)y autovector generalizado $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = 2^t \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Otra forma de resolver: $\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = 2y_{t-1} \end{cases}$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} - 5y_{t-1} \\ y_t = x_{t-1} - y_{t-1} \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} - 5y_{t-1} \\ y_t = x_{t-1} - y_{t-1} \end{cases}$$

1. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor $2i$ y autovector $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor $-2i$

Ejemplo

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} - 5y_{t-1} \\ y_t = x_{t-1} - y_{t-1} \end{cases}$$

1. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene autovector $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor $2i$ y autovector $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalor $-2i$
2. la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = (2)^t \left[\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{t\pi}{2} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \sin \frac{t\pi}{2} \right]$$

Estabilidad de los Sistemas Lineales

$$X_{t+1} = AX_t;\ \forall t \geq 0 \tag{9}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{9}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Definición

$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \textit{ es un autovalor de } A\}$

Estabilidad de los Sistemas Lineales

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{9}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Definición

$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \textit{ es un autovalor de } A\}$

Teorema

La solución nula de la ecuación (9) es estable si y solo $\rho(A) \leq 1$.

Estabilidad de los Sistemas Lineales

$$X_{t+1} = AX_t; \ \forall t \geq 0 \tag{9}$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^k$ y A es una matriz $k \times k$ con coeficientes constantes.

Definición

$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}$

Teorema

La solución nula de la ecuación (9) es estable si y solo $\rho(A) \leq 1$.

Teorema

La solución nula de la ecuación (9) es asintóticamente estable si y solo si $\rho(A) < 1$.

Estabilidad de los sistemas lineales 2×2

Dado el sistema plano de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t \\ y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t \end{cases} \tag{10}$$

Estabilidad de los sistemas lineales 2×2

Dado el sistema plano de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden homogéneo con coeficientes constantes

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t \\ y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t \end{cases} \tag{10}$$

para estudiar la estabilidad tenemos que analizar los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces, para obtener los valores propios λ_1 y λ_2 calculamos las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

y de aqui se deducen los siguientes resultados.

Teorema

Las soluciones del sistema (10) convergen a cero si y solo si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Teorema

Las soluciones del sistema (10) convergen a cero si y solo si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Teorema (condiciones de estabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema (10) convergen a cero es que los coeficientes a *y* b *del polinomio característico de la matriz asociada al sistema verifiquen:*

Teorema

Las soluciones del sistema (10) convergen a cero si y solo si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Teorema (condiciones de estabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema (10) convergen a cero es que los coeficientes a y b del polinomio característico de la matriz asociada al sistema verifiquen:

$$\begin{cases} 1 + a + b > 0 \\ 1 - b > 0 \\ 1 - a + b > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Teorema (condiciones de ciclicidad)

El sistema (10) tiene trayectorias intertemporales cíclicas u oscilantes si el polinomio característico $p(\lambda)$ *de la matriz asociada al sistema verifica alguno de los siguientes casos*

Teorema

Las soluciones del sistema (10) convergen a cero si y solo si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Teorema (condiciones de estabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema (10) convergen a cero es que los coeficientes a y b del polinomio característico de la matriz asociada al sistema verifiquen:

$$\begin{cases} 1 + a + b > 0 \\ 1 - b > 0 \\ 1 - a + b > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Teorema (condiciones de ciclicidad)

El sistema (10) tiene trayectorias intertemporales cíclicas u oscilantes si el polinomio característico $p(\lambda)$ *de la matriz asociada al sistema verifica alguno de los siguientes casos: 1)* $p(\lambda)$ *tiene raíces características complejas con parte imaginaria no nula o*

Teorema

Las soluciones del sistema (10) convergen a cero si y solo si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Teorema (condiciones de estabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones del sistema (10) convergen a cero es que los coeficientes a y b del polinomio característico de la matriz asociada al sistema verifiquen:

$$\begin{cases} 1 + a + b > 0 \\ 1 - b > 0 \\ 1 - a + b > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Teorema (condiciones de ciclicidad)

El sistema (10) tiene trayectorias intertemporales cíclicas u oscilantes si el polinomio característico $p(\lambda)$ *de la matriz asociada al sistema verifica alguno de los siguientes casos: 1)* $p(\lambda)$ *tiene raíces características complejas con parte imaginaria no nula o2)* $p(\lambda)$ *tiene al menos una raíz característica real negativa*

Estabilidad por aproximación lineal

Consideremos la ecuación **vectorial** en diferencias autónoma

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{12}$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^k$ es un vector y $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un mapa diferenciable que verifica $f(0) = 0$. Queremos estudiar la estabilidad del equilibrio nulo.

Estabilidad por aproximación lineal

Consideremos la ecuación **vectorial** en diferencias autónoma

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{12}$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^k$ es un vector y $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un mapa diferenciable que verifica $f(0) = 0$. Queremos estudiar la estabilidad del equilibrio nulo. Este sistema puede ser escrito como

$$x_{t+1} = Ax_t + g(x_t)$$

Estabilidad por aproximación lineal

Consideremos la ecuación **vectorial** en diferencias autónoma

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{12}$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^k$ es un vector y $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un mapa diferenciable que verifica $f(0) = 0$. Queremos estudiar la estabilidad del equilibrio nulo. Este sistema puede ser escrito como

$$x_{t+1} = Ax_t + g(x_t)$$

donde A es la matriz Jacobiana de f en 0 y $g(x) = f(x) - Ax$

Estabilidad por aproximación lineal

Consideremos la ecuación **vectorial** en diferencias autónoma

$$x_{t+1} = f\left(x_t\right) \tag{12}$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^k$ es un vector y $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un mapa diferenciable que verifica $f(0) = 0$. Queremos estudiar la estabilidad del equilibrio nulo. Este sistema puede ser escrito como

$$x_{t+1} = Ax_t + g\left(x_t\right)$$

donde A es la matriz Jacobiana de f en 0 y $g(x) = f(x) - Ax$. Sabemos que

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Entonces valen los siguientes resultados:

Teorema

Si la solución nula de la ecuación $x_{t+1} = Ax_t$ *es asintóticamente estable entonces la solución nula de la ecuación (12) es asintóticamente estable.*

Entonces valen los siguientes resultados:

Teorema

Si la solución nula de la ecuación $x_{t+1} = Ax_t$ *es asintóticamente estable entonces la solución nula de la ecuación (12) es asintóticamente estable.*

Teorema

Si $\rho(A) = 1$*, entonces la solución nula de la ecuación (12) puede ser estable o inestable*

Entonces valen los siguientes resultados:

Teorema

Si la solución nula de la ecuación $x_{t+1} = Ax_t$ *es asintóticamente estable entonces la solución nula de la ecuación (12) es asintóticamente estable.*

Teorema

Si $\rho(A) = 1$, *entonces la solución nula de la ecuación (12) puede ser estable o inestable*

Teorema

Si $\rho(A) > 1$, *entonces la solución nula de la ecuación (12) es inestable*

Entonces valen los siguientes resultados:

Teorema

Si la solución nula de la ecuación $x_{t+1} = Ax_t$ *es asintóticamente estable entonces la solución nula de la ecuación (12) es asintóticamente estable.*

Teorema

Si $\rho(A) = 1$*, entonces la solución nula de la ecuación (12) puede ser estable o inestable*

Teorema

Si $\rho(A) > 1$*, entonces la solución nula de la ecuación (12) es inestable*

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = \dfrac{-3x_t + 4y_t}{4 + x_t} \end{cases}$$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = \dfrac{-3x_t + 4y_t}{4 + x_t} \end{cases}$$

Sea $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ donde $f_1(x, y) = y$ y $f_2(x, y) = \dfrac{-3x + 4y}{4 + x}$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = \dfrac{-3x_t + 4y_t}{4 + x_t} \end{cases}$$

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ donde $f_1(x,y) = y$ y $f_2(x,y) = \dfrac{-3x+4y}{4+x}$. Entonces la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = \dfrac{-3x_t + 4y_t}{4 + x_t} \end{cases}$$

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ donde $f_1(x,y) = y$ y $f_2(x,y) = \dfrac{-3x+4y}{4+x}$. Entonces la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \rho(A) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} < 1$$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t \\ y_{t+1} = \dfrac{-3x_t + 4y_t}{4 + x_t} \end{cases}$$

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ donde $f_1(x,y) = y$ y $f_2(x,y) = \dfrac{-3x+4y}{4+x}$. Entonces la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \rho(A) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} < 1$$

la solución nula del sistema es asintóticamente estable

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4y_t - 2x_t^2 y_t \\ \\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + x_t y_t^2 \end{cases}$$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4y_t - 2x_t^2 y_t \\ \\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + x_t y_t^2 \end{cases}$$

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ donde $f_1(x,y)$ y $f_1(x,y)$. Entonces la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Investigar la estabilidad del sistema plano

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4y_t - 2x_t^2 y_t \\ \\ y_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + x_t y_t^2 \end{cases}$$

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ donde $f_1(x,y)$ y $f_1(x,y)$. Entonces la matriz Jacobiana en $(0,0)$ es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son

$$\lambda = \pm 2$$

$\Rightarrow \rho(A) > 1$ y por lo tanto la solución nula del sistema es inestable.

2021

FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY