Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

2021

Conceptos básicos de dinámica discreta

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\substack{\uparrow \\ \in\ \mathbb{N}}}{t} \xrightarrow{\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \in\ \mathbb{R}}}{\varphi(t)}$.

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}}$.

Observación

Al real $\varphi(t)$ *se denomina la imagen del número natural* t *por la función* φ

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\substack{\uparrow \\ \in\ \mathbb{N}}}{t} \xrightarrow{\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \in\ \mathbb{R}}}{\varphi(t)}$.

Observación

Al real $\varphi(t)$ *se denomina la imagen del número natural* t *por la función* φ *y al real* $\varphi(t)$ *será llamado término t - ésimo de de la sucesión* φ.

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ t,\ \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}}$.

Observación

Al real $\varphi(t)$ *se denomina la imagen del número natural* t *por la función* φ *y al real* $\varphi(t)$ *será llamado término* t *- ésimo de de la sucesión* φ*. El real* $\varphi(t)$ *será denotado con* $\mathbf{a}_t$;

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}}$.

Observación

Al real $\varphi(t)$ *se denomina la imagen del número natural* t *por la función* φ *y al real* $\varphi(t)$ *será llamado término* t *- ésimo de de la sucesión* φ*. El real* $\varphi(t)$ *será denotado con* $\mathbf{a}_t$*; o sea, que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}} = \mathbf{a}_t$

Sucesiones en $\mathbb{R}$

Definición

Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, t, \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}}$.

Observación

Al real $\varphi(t)$ *se denomina la imagen del número natural* t *por la función* φ *y al real* $\varphi(t)$ *será llamado término* t *- ésimo de de la sucesión* φ. *El real* $\varphi(t)$ *será denotado con* $\mathbf{a}_t$; *o sea, que* $\underset{\in\ \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{t}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\ \mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(t)}} = \mathbf{a}_t$ *y con*

$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *o simplemente* $(\mathbf{a}_t)$ *a la función* φ.

Observación

Si $\mathbb{N}_h = \{h,\ h+1,\ h+2,\ h+3, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *(con* $h \geq 1$*)* *y* $\varphi : \mathbb{N}_h \to \mathbb{R}$; *o sea, que esta función también será considerada una sucesión que denotaremos* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}_h} = (\mathbf{a}_t)_{t \geq h}$.

Ejemplo

Algunas sucesiones

$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_t = (\frac{1}{2})^{t-1}$;

Observación

Si $\mathbb{N}_h = \{h,\ h+1,\ h+2,\ h+3, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *(con* $h \geq 1$*) y* $\varphi : \mathbb{N}_h \rightarrow \mathbb{R}$; *o sea, que esta función también será considerada una sucesión que denotaremos* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}_h} = (\mathbf{a}_t)_{t \geq h}$.

Ejemplo

Algunas sucesiones

$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_t = (\frac{1}{2})^{t-1}$;

$(\mathbf{b}_t)_{t \geq 3}$ *con* $\mathbf{b}_t = \dfrac{t+1}{t-2}$;

Observación

Si $\mathbb{N}_h = \{h,\ h+1,\ h+2,\ h+3, \ldots,\ t,\ \ldots\}$ *(con* $h \geq 1$*) y* $\varphi : \mathbb{N}_h \to \mathbb{R}$;
o sea, que esta función también será considerada una sucesión que denotaremos $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}_h} = (\mathbf{a}_t)_{t \geq h}$.

Ejemplo

Algunas sucesiones

$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_t = (\frac{1}{2})^{t-1}$;

$(\mathbf{b}_t)_{t \geq 3}$ *con* $\mathbf{b}_t = \dfrac{t+1}{t-2}$;

$(\mathbf{c}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{c}_t = (-1)^{t+1}$.

Ejemplo

Se considera la sucesión $(\mathbf{u}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *con*

$$\mathbf{u}_0 = 0,\ \mathbf{u}_1 = 2,\ \mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t) \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{N}$$

Ejemplo

Se considera la sucesión $(\mathbf{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *con*
$\mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_1 = 2$, $\mathbf{u}_{t+2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ *para cada* $t \in \mathbb{N}$*; o sea, que en este caso la sucesión* $(\mathbf{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *no viene dada en forma explicita sino que* $(\mathbf{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *esta definida por* **recurrencia**.

- La expresión $\mathbf{u}_{t+2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ permite afirmar que a partir de $t = 1$ cada término de la sucesión $(\mathbf{u}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es el promedio de los dos anteriores.

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = 2$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 &= 2 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & \end{aligned}$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 &= 2 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 &= \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 &= 2 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 &= \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \end{aligned}$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t\right)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t\right)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 &= 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 &
\end{aligned}$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 &= 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 &= \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)
\end{aligned}
$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 & = & 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2} & &
\end{array}
$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t\right)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t\right)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 & = & 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_{t-2} - \mathbf{u}_{t-3}\right)
\end{array}
$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 & = & 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t-2} - \mathbf{u}_{t-3}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-2} 2 \\
\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1} & &
\end{array}
$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 & = & 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t-2} - \mathbf{u}_{t-3}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-2} 2 \\
\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2})
\end{array}
$$

- Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{t+2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{u}_t)$ como $\mathbf{u}_{t+2} - \mathbf{u}_{t+1} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t+1} - \mathbf{u}_t)$ con $t \geq 2$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 & = & 2 \\
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & \left(-\dfrac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \left(-\dfrac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\dfrac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2} & = & \left(-\dfrac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t-2} - \mathbf{u}_{t-3}) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{t-2} 2 \\
\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1} & = & \left(-\dfrac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-2}) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{t-1} 2
\end{array}
$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_0$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_0 = 2$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_0 = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]$$

con $n \geq 2$.

Con esto se puede expresar $(\mathbf{u}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_0 = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]$$

con $n \geq 2$.

Con esto se puede expresar $(\mathbf{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = 0;\ \mathbf{u}_1 = 2 \\ \mathbf{u}_t = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right] \quad \text{con} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Sucesión acotada

Definición

Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *es acotada, si y sólo si, existen dos reales* $\alpha,\ \beta$ *tal que* $\alpha \leq \mathbf{a}_t \leq \beta$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$.

Sucesión acotada

Definición

Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada, si y sólo si, existen dos reales* $\alpha,\ \beta$ *tal que* $\alpha \leq \mathbf{a}_t \leq \beta$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$.

Esto equivale a decir que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada, si y sólo si, existe un real* γ *positivo tal que* $|\,\mathbf{a}_t| \leq \gamma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y con esto podemos afirmar que* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada, si y sólo si,* $(|\,\mathbf{a}_t|)_{t \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t\,\in\,\mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{a}_t = \frac{1}{t}$$

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \quad \left[0 < \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \leq 1 \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{N} \right]$$

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \quad \left[0 < \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \leq 1 \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{b}_t)_{t\in\mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t$$

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \quad \left[0 < \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \leq 1 \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{b}_t)_{t \in \mathbb{N}} \quad con \quad \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \quad \left[-1 \leq \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \leq 3 \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{N}\right]$$

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}} \ \ \textit{con} \ \ \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \ \ \left[0 < \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \leq 1 \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{b}_t)_{t \in \mathbb{N}} \ \ \textit{con} \ \ \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \ \ \left[-1 \leq \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \leq 3 \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{c}_t)_{t \in \mathbb{N}} \ \ \textit{con} \ \ \mathbf{c}_t = \frac{2t}{t+1}$$

Ejemplo

Las sucesiones siguientes son acotadas

$$(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}} \;\; \textit{con} \;\; \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \quad \left[0 < \mathbf{a}_t = \frac{1}{t} \leq 1 \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{b}_t)_{t\in\mathbb{N}} \;\; \textit{con} \;\; \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \quad \left[-1 \leq \mathbf{b}_t = 1 + 2\,(-1)^t \leq 3 \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{N}\right]$$

$$(\mathbf{c}_t)_{t\in\mathbb{N}} \;\; \textit{con} \;\; \mathbf{c}_t = \frac{2t}{t+1} \quad \left[1 \leq \mathbf{c}_t = \frac{2t}{t+1} < 2 \;\; \forall \;\; t \in \mathbb{N}\right]$$

Definición

Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada* **superiormente**, *si y sólo si, existe un real* β *tal que* $\mathbf{a}_t \leq \beta$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$.

Definición

Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada* **superiormente**, *si y sólo si, existe un real* β *tal que* $\mathbf{a}_t \leq \beta$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$.

En forma análoga, diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es acotada* **inferiormente**, *si y sólo si, existe un real* α *tal que* $\alpha \leq \mathbf{a}_t$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$.

Sucesión creciente

Definición

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *se denomina* **estrictamente creciente** , *si y sólo si,* $\mathbf{a}_t < \mathbf{a}_{t+1}$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$

Sucesión creciente

Definición

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *se denomina* **estrictamente creciente** , *si y sólo si,* $\mathbf{a}_t < \mathbf{a}_{t+1}$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathbf{a}_t \leq \mathbf{a}_{t+1}$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *se denominará* **creciente**.

Sucesión creciente

Definición

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *se denomina* **estrictamente creciente** *, si y sólo si,* $\mathbf{a}_t < \mathbf{a}_{t+1}$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathbf{a}_t \leq \mathbf{a}_{t+1}$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *se denominará* **creciente**.

Definición

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *se denomina* **estrictamente decreciente**, *si y sólo si,* $\mathbf{a}_{t+1} < \mathbf{a}_t$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $\mathbf{a}_{t+1} \leq \mathbf{a}_t$ *para todo* $t \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *se denominará* **decreciente**.

Observación

Las sucesiones estrictamente crecientes, crecientes, estrictamente decrecientes y decrecientes son llamadas sucesiones **monótonas**.

Observación

Toda sucesión estrictamente creciente o creciente es acotada inferiormente Y cualquier sucesión estrictamente decreciente o decreciente es acotada superiormente.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes sucesiones son crecientes
   1. $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{a}_t = t - \dfrac{1}{t+1}$
   2. $(\mathbf{b}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{b}_t = t^3 - 4t^2 + 10t + 7$

      Sugerencia:

      Observe que $\mathbf{b}_t = \left[x^3 - 4x^2 + 10x + 7\right]_{x=t}$ y calcule la derivada de $x^3 - 4x^2 + 10x + 7$.
   3. $(\mathbf{c}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{c}_t = \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t+4}$
   4. $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{d}_t = \dfrac{t\,!}{t^t}$
2. Demuestre que las siguientes sucesiones son decrecientes
   1. $(\mathbf{u}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{u}_t = t + \dfrac{1}{t+1}$
   2. $(\mathbf{v}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{v}_t = 4^{\frac{1}{t\,!}}$

Definición

Diremos que la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *es convergente, si y sólo si, hay un real* $\mathbf{l}$ *tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *(este natural* t_0 *depende de* ε*) verificandose que* $|\mathbf{a}_t - \mathbf{l}| < \varepsilon$ *para todo* $t > t_0$.

Definición

Diremos que la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *es convergente, si y sólo si, hay un real* $\mathbf{l}$ *tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *(este natural* t_0 *depende de* ε*) verificandose que* $|\mathbf{a}_t - \mathbf{l}| < \varepsilon$ *para todo* $t > t_0$.
El hecho de que la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *converge al real* $\mathbf{l}$ *será denotado con*

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t \quad \textit{ó}\ \mathbf{a}_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \textit{ó}\ \mathbf{a}_t \longrightarrow \mathbf{l}$$

sucesión convergente

Definición

Diremos que la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *es convergente, si y sólo si, hay un real* $\mathbf{l}$ *tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *(este natural* t_0 *depende de* ε*) verificandose que* $|\mathbf{a}_t - \mathbf{l}| < \varepsilon$ *para todo* $t > t_0$.

El hecho de que la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *converge al real* $\mathbf{l}$ *será denotado con*

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notación}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t \quad \text{ó } \mathbf{a}_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \text{ó } \mathbf{a}_t \longrightarrow \mathbf{l}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ t_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall t \in \mathbb{N} \text{ que cumple } t > t_0 \text{ implica que } |\mathbf{a}_t - \mathbf{l}| < \varepsilon$$

Observación

Si se cumple que

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t \quad \textit{ó } \mathbf{a}_t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \textit{ó } \mathbf{a}_t \longrightarrow \mathbf{l} \quad \textit{con } \mathbf{l} \in \mathbb{R}$$

entonces, cualquiera sea el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \mathbf{B}_{a,\varepsilon}$*(o sea, la bola en* $\mathbb{R}$ *de centro* $\mathbf{l}$ *y radio* ε*) se verifica que hay un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$\mathbf{a}_t \in \mathbf{B}_{l,\varepsilon} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *para todo* $t > t_0$

Observación

Si se cumple que

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t \quad \text{ó } \mathbf{a}_t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \text{ó } \mathbf{a}_t \longrightarrow \mathbf{l} \ \text{ con } \mathbf{l} \in \mathbb{R}$$

entonces, cualquiera sea el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \mathbf{B}_{a,\varepsilon}$*(o sea, la bola en* $\mathbb{R}$ *de centro* $\mathbf{l}$ *y radio* ε*) se verifica que hay un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathbf{a}_t \in \mathbf{B}_{l,\varepsilon} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *para todo* $t > t_0$ *(significa que a lo sumo un número finito de términos de la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{n \in \mathbb{N}}$ *no pertenecen a* $\mathbf{B}_{l,\varepsilon} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$;

Observación

Si se cumple que

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t \quad \textit{ó } \mathbf{a}_t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \textit{ó } \mathbf{a}_t \longrightarrow \mathbf{l} \quad \textit{con } \mathbf{l} \in \mathbb{R}$$

entonces, cualquiera sea el intervalo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \mathbf{B}_{a,\varepsilon}$*(o sea, la bola en* $\mathbb{R}$ *de centro* $\mathbf{l}$ *y radio* ε*) se verifica que hay un* $t_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$\mathbf{a}_t \in \mathbf{B}_{l,\varepsilon} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *para todo* $t > t_0$ *(significa que a lo sumo un número finito de términos de la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{n \in \mathbb{N}}$ *no pertenecen a*

$\mathbf{B}_{l,\varepsilon} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *; o sea, que los términos de la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *que verifican* $|\mathbf{a}_t - \mathbf{l}| \geq \varepsilon$ *como máximo son* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_{t_0}$*).*

Se debe agregar a lo dicho que suele decirse que el real $\mathbf{l}$ *es el l ímite de la sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *.*

Algunos resultados

Algunos resultados

- Si la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{l}$, entonces, $\mathbf{l}$ es único.

Algunos resultados

- Si la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{l}$, entonces, $\mathbf{l}$ es único.
- Toda sucesión convergente es acotada.

Algunos resultados

- Si la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{l}$, entonces, $\mathbf{l}$ es único.
- Toda sucesión convergente es acotada.

- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ y la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $f(t) = \mathbf{a}_t$

Algunos resultados

- Si la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{l}$, entonces, $\mathbf{l}$ es único.
- Toda sucesión convergente es acotada.
- Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ y la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ tal que $f(t) = \mathbf{a}_t$, entonces, la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{L}$; o sea, que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t = \mathbf{L} \in \mathbb{N}$$

- Si $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{b}_t = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$

- Si $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{b}_t = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$, entonces, $\lim_{t \to +\infty} (\mathbf{a}_t + \mathbf{b}_t) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

- Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{b}_t = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$, entonces, $\lim\limits_{t \to +\infty} (\mathbf{a}_t + \mathbf{b}_t) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

- Si $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{l}$,

- Si $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{b}_t = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$, entonces, $\lim_{t \to +\infty} (\mathbf{a}_t + \mathbf{b}_t) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

- Si $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{l}$, entonces, $\lim_{t \to +\infty} f(\mathbf{a}_t) = f(\mathbf{l})$

Ejercicios

Determine (si existe) el límite de las sucesiones reales siguientes:

1. $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\alpha_t = \dfrac{t^2+3}{2t^2-1}$.
2. $(\beta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\beta_t = \dfrac{4^{\frac{1}{t\,!}}+2\,t}{5\,t+3^{\frac{5}{t}}}$.
3. $(\gamma_t)_{t\geq 1\,\in\mathbb{N}}$ siendo $\gamma_t = \sqrt{t^2+4t} - \sqrt{t^2+t}$.
4. $(\delta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ siendo $\delta_t = \sqrt{t^2+4kt+5} - \sqrt{t^2+2}$ siendo k un real positivo
5. $(\epsilon_t)_{t\geq 1\,\in\mathbb{N}}$ siendo $\epsilon_t = \dfrac{2t+(-1)^t}{t^2+sen\,(t)}$

Sucesión divergente

Definición

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ se dice que diverge a $+\infty$, si y sólo si, para cada real $M > 0$ hay un $t_0 \in \mathbb{N}$ (el número natural t_0 depende del real M) tal que $\mathbf{a}_t > M$ para todo $t > t_0$ y esto lo indicaremos con

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notación}}}{=} \lim \mathbf{a}_t = +\infty$$

Una sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ se dice que diverge a $-\infty$,si y sólo si, se cumple que

$$\lim_{t \to +\infty} (-\mathbf{a}_t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notación}}}{=} \lim (-\mathbf{a}_t) = +\infty$$

Teorema

Una sucesión monótona converge, si y sólo si, es acotada.

Teorema

Una sucesión monótona converge, si y sólo si, es acotada.

Ejemplo

- *Toda sucesión* $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{a}_t = k$ *cualquiera sea* $t \in \mathbb{N}$; *o sea, una sucesión constante es convergente y su límite es el real* k.
- *Se considera* $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_t = \dfrac{t+2}{t+1}$ *sabiendo que es decreciente, acotada inferiormente y utilizando el último teorema se concluye que tiene límite (dicho límite se el infimo del conjunto* $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_t, \ldots\}$.

¿Cómo determinar este real?.

¿Cómo determinar este real?.

Utilicemos el hecho de que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f\left(x\right) = \dfrac{x+2}{x+1}$

¿Cómo determinar este real?.

Utilicemos el hecho de que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ cumple que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x+2}{x+1}\right] = 1$ y como $f(t) = \dfrac{t+2}{t+1} = \mathbf{a}_t \ \forall\ t \in \mathbb{N}$, entonces, se deduce que

¿Cómo determinar este real?.

Utilicemos el hecho de que la función $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ cumple que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x+2}{x+1}\right] = 1$ y como $f(t) = \dfrac{t+2}{t+1} = \mathbf{a}_t \;\forall\; t\in\mathbb{N}$, entonces, se deduce que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_t \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} 1$$

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \ \forall\ t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \; \forall \; t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \ \forall \ t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \ \forall \ t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_1 = 2$; con este resultado se obtiene

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \; \forall \; t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_1 = 2$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{a}_2 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \ \forall\ t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_1 = 2$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{a}_2 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \;\forall\; t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_1 = 2$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{a}_2 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{a}_4 = 2\sqrt{\mathbf{a}_3} = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

La sucesión real $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1 \\ \mathbf{a}_{t+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_t} \ \forall\, t \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 0 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{a}_0 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_1 = 2$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{a}_2 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{a}_3 = 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{a}_4 = 2\sqrt{\mathbf{a}_3} = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_t = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{t-1}}} \ \textit{con } n \geq 2$$

se puede expresar $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

se puede expresar $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1;\ \mathbf{a}_1 = 2 \\ \mathbf{a}_t = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{t-1}}} \ \textit{con } t \geq 2 \end{cases}$$

se puede expresar $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1;\ \mathbf{a}_1 = 2 \\ \mathbf{a}_t = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{t}-1}}\ con\ t \geq 2 \end{cases}$$

para obtener $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t$ vamos a utilizar que

se puede expresar $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1;\ \mathbf{a}_1 = 2 \\ \mathbf{a}_t = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{t-1}}} \ con\ t \geq 2 \end{cases}$$

para obtener $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{a}_t$ vamos a utilizar que

$$\lim_{n \to +\infty} \left[1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^n\right] = \frac{1}{1-k}$$ para todo $k \in \mathbb{R}$ con

$|\, k \,| < 1$

se puede expresar $(\mathbf{a}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente

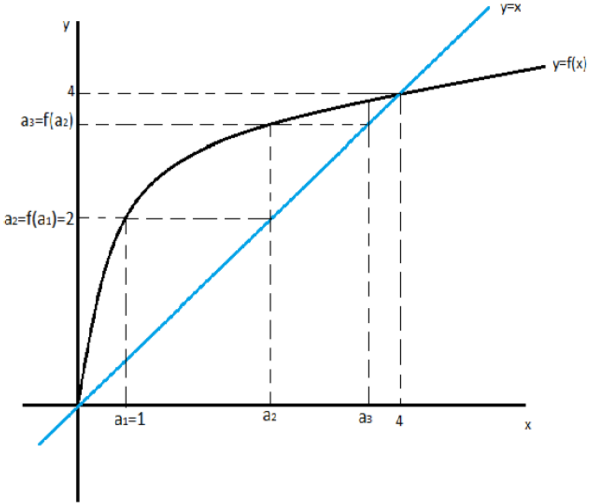
$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = 1;\ \mathbf{a}_1 = 2 \\ \mathbf{a}_t = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{t-1}}} \ con\ t \geq 2 \end{cases}$$

para obtener $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{a}_t$ vamos a utilizar que

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+k+k^2+k^3+\cdots+k^n\right] = \dfrac{1}{1-k}$ para todo $k\in\mathbb{R}$ con

$|\,k\,|<1$ permitiendo concluir que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{a}_t = 2^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 4.$

Gráficamente



La sucesión real $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = -2 \\ \mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5}\ \forall\, t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

La sucesión real $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = -2 \\ \mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} \;\forall\; t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{d}_0 = -2$ se obtiene $\mathbf{d}_1 = 0$; con este resultado se obtiene

La sucesión real $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = -2 \\ \mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} \ \forall \ t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{d}_0 = -2$ se obtiene $\mathbf{d}_1 = 0$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{d}_2 = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$$

La sucesión real $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = -2 \\ \mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\left(\mathbf{d}_t + 2\right)}{\mathbf{d}_t + 5} \; \forall\; t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{d}_0 = -2$ se obtiene $\mathbf{d}_1 = 0$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{d}_2 = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{d}_3 = \frac{2\left(\dfrac{4}{5} + 2\right)}{\dfrac{4}{5} + 5} = \frac{28}{29} = 1 - \frac{1}{29}$$

La sucesión real $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}_0 = -2 \\ \mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} \;\forall\; t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

(la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)

Al conocer $\mathbf{d}_0 = -2$ se obtiene $\mathbf{d}_1 = 0$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{d}_2 = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{d}_3 = \frac{2\left(\dfrac{4}{5} + 2\right)}{\dfrac{4}{5} + 5} = \frac{28}{29} = 1 - \frac{1}{29}$$

$$\mathbf{d}_4 = \frac{2\left(\dfrac{28}{29} + 2\right)}{\dfrac{28}{29} + 5} = \frac{172}{173} = 1 - \frac{1}{173}$$

$$\mathbf{d}_5 = \frac{2\left(\frac{172}{173}+2\right)}{\frac{172}{173}+5} = \frac{1036}{1037} = 1 - \frac{1}{1037}$$

$$\mathbf{d}_5 = \frac{2\left(\frac{172}{173}+2\right)}{\frac{172}{173}+5} = \frac{1036}{1037} = 1 - \frac{1}{1037}$$

$$\mathbf{d}_6 = \frac{2\left(\frac{1036}{1037}+2\right)}{\frac{1036}{1037}+5} = \frac{6220}{6221} = 1 - \frac{1}{6221}$$

en este caso parece que no es sencillo encontrar una fórmula de modo que la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ tenga una expresión manejable como en el ejemplo anterior.

Lo realizado permite inducir que $\mathbf{d}_t < 1$ para todo $t \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente y, a continuación realizaremos una demostración de estas cuestiones que se infieren luego de calcular los siete primeros téminos.

Lo realizado permite inducir que $\mathbf{d}_t < 1$ para todo $t \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente y, a continuación realizaremos una demostración de estas cuestiones que se infieren luego de calcular los siete primeros téminos.

⧫Supongamos que para algún $t \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbf{d}_t < 1$ y vamos a demostrar que $\mathbf{d}_{t+1} < 1$.

Como $\mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} = \left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_t}$ y la función $\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}$ es estrictamente creciente en su dominio se concluye que

$\mathbf{d}_{t+1}$

Lo realizado permite inducir que $\mathbf{d}_t < 1$ para todo $t \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente y, a continuación realizaremos una demostración de estas cuestiones que se infieren luego de calcular los siete primeros téminos.

⧫Supongamos que para algún $t \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbf{d}_t < 1$ y vamos a demostrar que $\mathbf{d}_{t+1} < 1$.

Como $\mathbf{d}_{t+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} = \left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_t}$ y la función $\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}$ es estrictamente creciente en su dominio se concluye que

$$\mathbf{d}_{t+1} = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_t} < \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=1} = 1.$$

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que
$\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1} \; \forall \; t \in \mathbb{N}$ $[\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t \; \forall \; t \in \mathbb{N}]$

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1} \; \forall \; t \in \mathbb{N}$ $[\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t \; \forall \; t \in \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$; esto último implica que

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1}\ \forall\ t\ \in\ \mathbb{N}\ [\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t\ \forall\ t\ \in\ \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$; esto último implica que

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \frac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} - \mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5} - x\right]_{x=\mathbf{d}_t}$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

y $\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x+5} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $-4 < x < 1$,

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1} \; \forall \; t \in \mathbb{N}$ $[\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t \; \forall \; t \in \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$; esto último implica que

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \frac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} - \mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5} - x\right]_{x=\mathbf{d}_t}$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

y $\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x+5} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $-4 < x < 1$, entonces, como $-4 < \mathbf{d}_t < 1 \; \forall \; t \in \mathbb{N}$ se deduce que

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1} \; \forall \; t \in \mathbb{N} \; [\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t \; \forall \; t \in \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$; esto último implica que

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \frac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} - \mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5} - x\right]_{x=\mathbf{d}_t}$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

y $\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x+5} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $-4 < x < 1$,

entonces, como $-4 < \mathbf{d}_t < 1 \; \forall \; t \in \mathbb{N}$ se deduce que

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_t} > 0,$$

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_t \leq \mathbf{d}_{t+1}\ \forall\ t\ \in\ \mathbb{N}\ [\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t\ \ \forall\ t\ \in\ \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$; esto último implica que

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \frac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} - \mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5} - x\right]_{x=\mathbf{d}_t}$$

$$\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

y $\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x+5} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $-4 < x < 1$, entonces, como $-4 < \mathbf{d}_t < 1\ \forall\ t\ \in\ \mathbb{N}$ se deduce que $\mathbf{d}_{t+1} - \mathbf{d}_t = \left[\dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_t} > 0$, esto demuestra que la sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ es creciente (estricta).

♦La sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces, existe un número real $\mathbf{d}$ tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{d}_t = \mathbf{d} \leq 1$ (además se cumple que $-2 = \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_t < 1 \; \forall \; t \in \mathbb{N}$.

♦La sucesión $(\mathbf{d}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces, existe un número real $\mathbf{d}$ tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{d}_t = \mathbf{d} \leq 1$ (además se cumple que $-2 = \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_t < 1 \; \forall \; t \in \mathbb{N}$. Además se cumple $\mathbf{d} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{d}_{t+1} =$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{2\,(\mathbf{d}_t + 2)}{\mathbf{d}_t + 5} = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x = \mathbf{d}_t} = \frac{2\,(\mathbf{d} + 2)}{\mathbf{d} + 5}$$ y la ecuación

$\mathbf{d} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}+2)}{\mathbf{d}+5}$ tiene dos raíces $(-4 \text{ y } 1)$, pero, se sabe que $-2 < \mathbf{d} \leq 1$, entonces, $\mathbf{d} = \lim\limits_{\mathbf{t} \to +\infty} \mathbf{d}_{\mathbf{t}} = 1$.

Ecuaciones en diferencia finita

Una ecuación en diferencia finita es un problema cuya incógnita es una sucesión. Observamos que en la sección anterior en la parte de ejemplos y ejercicios se han obtenido el límite de algunas sucesiones $(\mathbf{a}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ que venían expresadas (dijimos que estaban definidas por recurencia) de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \in A \text{ (esto significa que se conoce el valor del primer término de la sucesión)} \\ \mathbf{a}_{t+1} = f(\mathbf{a}_t, t) \;\; \forall \; t \in \mathbb{N} \text{ con } t \geq 1 \end{cases}$$

Donde $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_t, t) \in A, \; \forall t \in \mathbb{N}$

Sistema dinámico discreto

Definición

Un sistema dinámico discreto de primer orden es una ecuación de la forma: $X_{t+1} = f(X_t, t)$. *Si la variable* t *no aparece explícitamente, se dice que el sistema es autónomo.*
El sistema es de orden m *si es de la forma:*
$X_{t+m} = f(X_{t+m-1}, X_{t+m-2}, \ldots, X_t, t)$
es decir que **el estado** *de la variable no solo depende del estado en el periodo anterior, sino de los* m *periodos anteriores.*
Si f *es lineal, decimos que el sistema es lineal.*

Bibliografía:

Ignacio Aemilius (2012) Notas del curso Cálculo III
cap. 6 - Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido. Thomson Editorial. México.

2021

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY