Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Introducción a la dinámica discreta en la recta real. Mapas, órbitas, puntos fijos y puntos periodicos. 2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Introducción a la dinámica discreta en la recta real

Con el término dinámica nos referimos en general al estudio de procesos que evolucionan en el tiempo, y el correspondiente sistema de reglas que describe esta evolución se llama sistema dinámico.

Introducción a la dinámica discreta en la recta real

Con el término dinámica nos referimos en general al estudio de procesos que evolucionan en el tiempo, y el correspondiente sistema de reglas que describe esta evolución se llama sistema dinámico.

Nosotros adoptaremos reglas determinísticas, lo que significa que el estado presente de la evolución esta únicamente determinado por los estados pasados.

Introducción a la dinámica discreta en la recta real

Con el término dinámica nos referimos en general al estudio de procesos que evolucionan en el tiempo, y el correspondiente sistema de reglas que describe esta evolución se llama sistema dinámico.

Nosotros adoptaremos reglas determinísticas, lo que significa que el estado presente de la evolución esta únicamente determinado por los estados pasados.

La aleatoriedad no estará presente en nuestra definición de sistema dinámico y ademas nos restringiremos al estudio de sistemas dinámicos a tiempo discreto donde las reglas que describen la evolución están dadas por un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas.

Nos restringimos al caso unidimensional (una única variable de estado), eso nos permitirá usar la estructura topológica de la recta real y las propiedades de **continuidad y diferenciabilidad** de las funciones de variable real para estudiar las propiedades de los sistemas dinámicos.

Nos restringimos al caso unidimensional (una única variable de estado), eso nos permitirá usar la estructura topológica de la recta real y las propiedades de **continuidad y diferenciabilidad** de las funciones de variable real para estudiar las propiedades de los sistemas dinámicos.

El objetivo central es entender como és la **órbita** de un punto cualquiera cuando es iterado repetidamente por la misma función:

Nos restringimos al caso unidimensional (una única variable de estado), eso nos permitirá usar la estructura topológica de la recta real y las propiedades de **continuidad y diferenciabilidad** de las funciones de variable real para estudiar las propiedades de los sistemas dinámicos.

El objetivo central es entender como és la **órbita** de un punto cualquiera cuando es iterado repetidamente por la misma función:

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0) \\ x_{t+1} = f(x_t); \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Nos restringimos al caso unidimensional (una única variable de estado), eso nos permitirá usar la estructura topológica de la recta real y las propiedades de **continuidad y diferenciabilidad** de las funciones de variable real para estudiar las propiedades de los sistemas dinámicos.

El objetivo central es entender como és la **órbita** de un punto cualquiera cuando es iterado repetidamente por la misma función:

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0) \\ x_{t+1} = f(x_t); \forall t \geq 0 \end{cases}$$

En particular interesa entender que pasa con la órbita de un punto cuando t tiende a $+\infty$, pues esto resume el carácter de la dinámica.

Una posibilidad es que haya un **punto fijo atractor** p_0 tal que para todo punto x en un entorno de p_0, $f^t(x) \to p_0$.

Una posibilidad es que haya un **punto fijo atractor** p_0 tal que para todo punto x en un entorno de p_0, $f^t(x) \to p_0$.

Esta situacion simple es solo una de las posibles; puede suceder que el atractor no sea para nada un objeto geométrico simple.

Una posibilidad es que haya un **punto fijo atractor** p_0 tal que para todo punto x en un entorno de p_0, $f^t(x) \to p_0$.

Esta situacion simple es solo una de las posibles; puede suceder que el atractor no sea para nada un objeto geométrico simple.

El atractor puede ser un **conjunto de Cantor** como se puede ver que sucede para mapas unidimensionales muy simples.

algunas definiciones

- Entendemos por **mapa** una función continua de un espacio, llamado el dominio, en si mismo y en el contexto unidimensional en el que trabajaremos, el dominio debe ser un intervalo de la recta real.

- Entendemos por **mapa** una función continua de un espacio, llamado el dominio, en si mismo y en el contexto unidimensional en el que trabajaremos, el dominio debe ser un intervalo de la recta real.
  Un sistema dinámico discreto es generado por la iteración de un mapa. Esto es, el mapa es aplicado una y otra vez, y los puntos se mueven en una trayectoria.

algunas definiciones

- Entendemos por **mapa** una función continua de un espacio, llamado el dominio, en si mismo y en el contexto unidimensional en el que trabajaremos, el dominio debe ser un intervalo de la recta real.
  Un sistema dinámico discreto es generado por la iteración de un mapa. Esto es, el mapa es aplicado una y otra vez, y los puntos se mueven en una trayectoria.

- Si $f : I \to I$ es un mapa, eligiendo una **condición inicial** p_0, sea $p_1 = f(p_0)$ y en general $p_{t+1} = f(p_t)$ para $t \geq 0$. La sucesión infinita $(p_t)_{t\in\mathbb{N}} = (f^t(p_0))_{t\in\mathbb{N}}$ se llama la **trayectoria** de p_0.

algunas definiciones

- Entendemos por **mapa** una función continua de un espacio, llamado el dominio, en si mismo y en el contexto unidimensional en el que trabajaremos, el dominio debe ser un intervalo de la recta real. Un sistema dinámico discreto es generado por la iteración de un mapa. Esto es, el mapa es aplicado una y otra vez, y los puntos se mueven en una trayectoria.

- Si $f : I \to I$ es un mapa, eligiendo una **condición inicial** p_0, sea $p_1 = f(p_0)$ y en general $p_{t+1} = f(p_t)$ para $t \geq 0$. La sucesión infinita $(p_t)_{t\in\mathbb{N}} = (f^t(p_0))_{t\in\mathbb{N}}$ se llama la **trayectoria** de p_0.

  Esta sucesión puede tomar un mismo valor repetidas veces

algunas definiciones

- Entendemos por **mapa** una función continua de un espacio, llamado el dominio, en si mismo y en el contexto unidimensional en el que trabajaremos, el dominio debe ser un intervalo de la recta real. Un sistema dinámico discreto es generado por la iteración de un mapa. Esto es, el mapa es aplicado una y otra vez, y los puntos se mueven en una trayectoria.

- Si $f : I \to I$ es un mapa, eligiendo una **condición inicial** p_0, sea $p_1 = f(p_0)$ y en general $p_{t+1} = f(p_t)$ para $t \geq 0$. La sucesión infinita $(p_t)_{t\in\mathbb{N}} = (f^t(p_0))_{t\in\mathbb{N}}$ se llama la **trayectoria** de p_0.

  Esta sucesión puede tomar un mismo valor repetidas veces; el **mínimo** conjunto de puntos que contiene la trayectoria se llama la **órbita** del punto p_0 bajo f y se denota por $o(p_0)$.

- El objetivo central de la teoría de los sistemas dinámicos discretos es describir completamente las órbitas de un mapa.

- El objetivo central de la teoría de los sistemas dinámicos discretos es describir completamente las órbitas de un mapa.

  Hay muchos tipos distintos de órbitas en un sistema dinámico típico. Seguramente los tipos mas importantes de órbitas son los puntos fijos y los ciclos que introduciremos a continuación.

  En los ejemplos ilustraremos otros tipos de órbitas (convergentes a un punto fijo, divergentes al infinito, etc.) y mas adelante describiremos otros tipos de órbitas mas complicadas.

Definición

Decimos que $p \in I$ *es un* **punto periódico** *de* f *de período* k *si* $f^k(p) = p$ *y* $f^j(p) \neq p$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Definición

Decimos que $p \in I$ *es un* **punto periódico** *de* f *de período* k *si* $f^k(p) = p$ *y* $f^j(p) \neq p$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Un **punto fijo**, *definido por* $f(p) = p$, *es un tipo especial de punto periódico cuya órbita contiene un único punto.* $o(p) = \{p\}$

Definición

Decimos que $p \in I$ *es un* **punto periódico** *de* f *de período* k *si* $f^k(p) = p$ *y* $f^j(p) \neq p$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$.
Un **punto fijo**, *definido por* $f(p) = p$, *es un tipo especial de punto periódico cuya órbita contiene un único punto.* $o(p) = \{p\}$

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa. Decimos que el punto* p *es un* **punto eventualmente fijo** *de* f *si existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{t+1}(p) = f^t(p)$ *para todo* $t \geq j$.

Definición

Decimos que $p \in I$ *es un* **punto periódico** *de* f *de período* k *si* $f^k(p) = p$ *y* $f^j(p) \neq p$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k-1$.
Un **punto fijo**, *definido por* $f(p) = p$, *es un tipo especial de punto periódico cuya órbita contiene un único punto.* $o(p) = \{p\}$

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa. Decimos que el punto* p *es un* **punto eventualmente fijo** *de* f *si existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{t+1}(p) = f^t(p)$ *para todo* $t \geq j$.
Decimos que el punto p *es un* **punto eventualmente periódico** *de* f *si existen* $j, i \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{k+j}(p) = f^k(p)$ *para todo* $k \geq i$. *O sea que un punto es eventualmente fijo (periódico) si tiene algún punto iterado fijo (periódico).*

- La órbita de un punto periódico es finita y su numero de elementos es el período del ciclo.

- La órbita de un punto periódico es finita y su numero de elementos es el período del ciclo.
- Si una órbita periódica contiene k puntos decimos que es un $k-$ ciclo.

- La órbita de un punto periódico es finita y su numero de elementos es el período del ciclo.
- Si una órbita periódica contiene k puntos decimos que es un $k-$ ciclo.
- Una función real tiene un punto fijo en p si y solo si el punto (p, p) pertenece a su gráfico.

- La órbita de un punto periódico es finita y su numero de elementos es el período del ciclo.
- Si una órbita periódica contiene k puntos decimos que es un $k-$ ciclo.
- Una función real tiene un punto fijo en p si y solo si el punto (p, p) pertenece a su gráfico.
  Luego, una funcion tiene un punto fijo en p si y solo si su gráfico interseca la recta $y = x$ en el punto (p, p). Esto nos dá un método gráfico para encontrar los puntos fijos de un mapa.

- La órbita de un punto periódico es finita y su numero de elementos es el período del ciclo.
- Si una órbita periódica contiene k puntos decimos que es un $k-$ ciclo.
- Una función real tiene un punto fijo en p si y solo si el punto (p, p) pertenece a su gráfico.
  Luego, una funcion tiene un punto fijo en p si y solo si su gráfico interseca la recta $y = x$ en el punto (p, p). Esto nos dá un método gráfico para encontrar los puntos fijos de un mapa.
- Si p es un punto periódico de período k de f entonces es un punto fijo de f^k. El recíproco no es verdadero pues p podria tener período menor que k.

- Los puntos fijos son tambien llamados **equilibrios** o **estados estacionarios** del sistema dinámico.

- Los puntos fijos son tambien llamados **equilibrios** o **estados estacionarios** del sistema dinámico.
- Ya que los puntos fijos son importantes para analizar la dinámica de un sistema, enunciaremos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos:

- Los puntos fijos son tambien llamados **equilibrios** o **estados estacionarios** del sistema dinámico.

- Ya que los puntos fijos son importantes para analizar la dinámica de un sistema, enunciaremos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos:
    1. Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to I$ una función continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo en I.

- Los puntos fijos son tambien llamados **equilibrios** o **estados estacionarios** del sistema dinámico.

- Ya que los puntos fijos son importantes para analizar la dinámica de un sistema, enunciaremos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos:

    1. Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to I$ una función continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo en I.

    2. Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(I) \subseteq I$ entonces f tiene al menos un punto fijo en I.

- Los puntos fijos son tambien llamados **equilibrios** o **estados estacionarios** del sistema dinámico.

- Ya que los puntos fijos son importantes para analizar la dinámica de un sistema, enunciaremos las siguientes condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos:
  1. Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to I$ una función continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo en I.
  2. Sean $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(I) \subseteq I$ entonces f tiene al menos un punto fijo en I.

Ambas proposiciones son consecuencia directa del Teorema de Darboux (o del valor intermedio)

- Para encontrar los puntos fijos de un mapa f es suficiente con resolver la ecuación

- Para encontrar los puntos fijos de un mapa f es suficiente con resolver la ecuación

$$f(x) = x$$

Buscar los puntos periódicos de período k es una tarea mucho mas dura pues hay que resolver la ecuación

- Para encontrar los puntos fijos de un mapa f es suficiente con resolver la ecuación

$$f(x) = x$$

Buscar los puntos periódicos de período k es una tarea mucho mas dura pues hay que resolver la ecuación

$$f^k(x) = x$$

y para valores de k grandes esto puede resultar algebraicamente complicado, aún para los mapas polinómicos

- Para encontrar los puntos fijos de un mapa f es suficiente con resolver la ecuación

$$f(x) = x$$

Buscar los puntos periódicos de período k es una tarea mucho mas dura pues hay que resolver la ecuación

$$f^k(x) = x$$

y para valores de k grandes esto puede resultar algebraicamente complicado, aún para los mapas polinómicos. El gráfico del mapa f^k puede ayudar a resolver esta tarea

- Para encontrar los puntos fijos de un mapa f es suficiente con resolver la ecuación
$$f(x) = x$$
Buscar los puntos periódicos de período k es una tarea mucho mas dura pues hay que resolver la ecuación
$$f^k(x) = x$$
y para valores de k grandes esto puede resultar algebraicamente complicado, aún para los mapas polinómicos. El gráfico del mapa f^k puede ayudar a resolver esta tarea. Una vez encontrados los puntos periódicos, para buscar los puntos eventualmente periódicos, se resuelven las ecuaciones $f^n(x) = p$, para todo p periódico y $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ *tiene punto fijo* 0 *y todos los demas puntos son* $2 - ciclos$.

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ *tiene punto fijo* 0 *y todos los demas puntos son* $2 - ciclos$.

Ejemplo

Sea el **mapa lineal** $f(x) = ax + b$. *En los ejemplos anteriores estudiamos este mapa para* $a = \pm 1$ *y* $b = 0$.

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ *tiene punto fijo* 0 *y todos los demas puntos son* $2-$ *ciclos.*

Ejemplo

Sea el **mapa lineal** $f(x) = ax + b$*. En los ejemplos anteriores estudiamos este mapa para* $a = \pm 1$ *y* $b = 0$*.*

- Si $a = 1$ y $b \neq 0$ entonces f no tiene puntos fijos ni periódicos.

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ *tiene punto fijo* 0 *y todos los demas puntos son* $2-$ *ciclos.*

Ejemplo

Sea el **mapa lineal** $f(x) = ax + b$. *En los ejemplos anteriores estudiamos este mapa para* $a = \pm 1$ *y* $b = 0$.

- Si $a = 1$ y $b \neq 0$ entonces f no tiene puntos fijos ni periódicos.
- Si $a \neq 1$ entonces f tiene un único punto fijo $p = \frac{b}{1-a}$

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ *tiene todos sus puntos fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ *tiene punto fijo* 0 *y todos los demas puntos son* $2 -$ *ciclos.*

Ejemplo

Sea el **mapa lineal** $f(x) = ax + b$*. En los ejemplos anteriores estudiamos este mapa para* $a = \pm 1$ *y* $b = 0$*.*

- Si $a = 1$ y $b \neq 0$ entonces f no tiene puntos fijos ni periódicos.
- Si $a \neq 1$ entonces f tiene un único punto fijo $p = \frac{b}{1-a}$
- si $a \neq -1$ no tiene puntos periódicos.

Ejemplo

El mapa identidad $f(x) = x$ tiene todos sus puntos fijos.

Ejemplo

El mapa $f(x) = -x$ tiene punto fijo 0 y todos los demas puntos son $2-$ ciclos.

Ejemplo

Sea el **mapa lineal** *$f(x) = ax + b$. En los ejemplos anteriores estudiamos este mapa para $a = \pm 1$ y $b = 0$.*

- Si $a = 1$ y $b \neq 0$ entonces f no tiene puntos fijos ni periódicos.
- Si $a \neq 1$ entonces f tiene un único punto fijo $p = \frac{b}{1-a}$
- si $a \neq -1$ no tiene puntos periódicos.
- Cuando $a = -1$, todos los puntos distintos de p son periódicos de período dos.

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2$ *tiene puntos fijos* 0 *y* 1

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2$ tiene puntos fijos 0 y 1 y -1 es el único punto eventualmente fijo. ($f(-1) = 1$ y $f^2(-1) = 1$)

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2$ *tiene puntos fijos* 0 *y* 1 *y* -1 *es el único punto eventualmente fijo. (*$f(-1) = 1$ *y* $f^2(-1) = 1$*)*
Ademas es fácil ver que la ecuación $f^k(x) = x$ *tiene como únicas raices reales* 0 *y* 1 *y por lo tanto* f *no tiene puntos periódicos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2$ *tiene puntos fijos* 0 *y* 1 *y* -1 *es el único punto eventualmente fijo.* ($f(-1) = 1$ *y* $f^2(-1) = 1$)
Ademas es fácil ver que la ecuación $f^k(x) = x$ *tiene como únicas raices reales* 0 *y* 1 *y por lo tanto* f *no tiene puntos periódicos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = 2 - x^2$ *tiene puntos fijos* 1 *y* -2

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2$ *tiene puntos fijos* 0 *y* 1 *y* -1 *es el único punto eventualmente fijo.* $(f(-1) = 1$ *y* $f^2(-1) = 1)$
Ademas es fácil ver que la ecuación $f^k(x) = x$ *tiene como únicas raices reales* 0 *y* 1 *y por lo tanto* f *no tiene puntos periódicos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = 2 - x^2$ *tiene puntos fijos* 1 *y* -2 *y* $2-$ *ciclo* $\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ejemplo

El mapa $f(x) = |x - 1|$ *tiene un único punto fijo* $p = \frac{1}{2}$ *que es la solución de* $|x - 1| = x$.

Ejemplo

El mapa $f(x) = |x-1|$ *tiene un único punto fijo* $p = \frac{1}{2}$ *que es la solución de* $|x-1| = x$.

Las preimágenes de $p = \frac{1}{2}$ *por* f^k *son los puntos del tipo* $q = \frac{1}{2} + z$, *con* z *entero y por lo tanto estos son todos los puntos eventualmente fijos.*

Ejemplo

El mapa $f(x) = |x-1|$ *tiene un único punto fijo* $p = \frac{1}{2}$ *que es la solución de* $|x-1| = x$.
Las preimágenes de $p = \frac{1}{2}$ *por* f^k *son los puntos del tipo* $q = \frac{1}{2} + z$, *con* z *entero y por lo tanto estos son todos los puntos eventualmente fijos.*
Para encontrar los $2-$ *ciclos debemos resolver la ecuación* $f^2(x) = x$

Ejemplo

El mapa $f(x) = |x-1|$ *tiene un único punto fijo* $p = \frac{1}{2}$ *que es la solución de* $|x-1| = x$.
Las preimágenes de $p = \frac{1}{2}$ *por* f^k *son los puntos del tipo* $q = \frac{1}{2} + z$, *con* z *entero y por lo tanto estos son todos los puntos eventualmente fijos.*
Para encontrar los $2-$ *ciclos debemos resolver la ecuación* $f^2(x) = x$. *Es fácil ver que:*

$$f^2(x) = \begin{cases} x-2, \ si\ x \geq 2 \\ -x+2, \ si\ 1 \leq x < 2 \\ x, \ si\ 0 \leq x < 1 \\ -x, \ si\ x < 0 \end{cases}$$

y por lo tanto todos los puntos pertenecientes a $[0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo

El mapa $f(x) = |x-1|$ *tiene un único punto fijo* $p = \frac{1}{2}$ *que es la solución de* $|x-1| = x$.
Las preimágenes de $p = \frac{1}{2}$ *por* f^k *son los puntos del tipo* $q = \frac{1}{2} + z$, *con* z *entero y por lo tanto estos son todos los puntos eventualmente fijos.*
Para encontrar los $2-$ *ciclos debemos resolver la ecuación* $f^2(x) = x$. *Es fácil ver que:*

$$f^2(x) = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y por lo tanto todos los puntos pertenecientes a $[0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *son los únicos puntos periódicos de período* 2.

Finalmente, cualquier otro punto z no clasificado hasta ahora es eventualmente periódico pues algún iterado de z esta $[0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Finalmente, cualquier otro punto z no clasificado hasta ahora es eventualmente periódico pues algún iterado de z esta $[0, 1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Para probar esto, basta observar que $f([n, n+1]) = [n-1, n]$ para todo natural $n \geq 1$ y que $f((-\infty, 0]) = [1, +\infty]$.

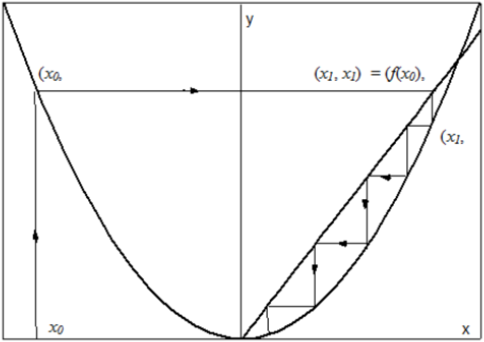
vamos a introducir un método gráfico para representar y analizar las órbitas de los sistemas dinámicos unidimensionales.

Este método utiliza la gráfica del mapa para representar su dinámica.

Método gráfico (de la telaraña o cobweb)

descripción general del método:
Dado el mapa $f : I \to I$, tomemos un punto x_0 en el eje Ox. Trazamos por este punto una recta vertical que corta a $y = x$ en (x_0, x_0) y al gráfico del mapa f en $(x_0, f(x_0))$.
Luego trazamos el segmento vertical desde este punto hacia el punto de la diagonal $(f(x_0), f(x_0))$.
Gráficamente esto muestra como pasamos del punto x_0 al punto $x_1 = f(x_0)$. Repetimos el proceso con el segmento de recta de (x_1, x_1) a $(x_1, f(x_1))$ y luego de $(x_1, f(x_1))$ a $(f(x_1), f(x_1))$ obtenemos el siguiente punto $x_2 = f(x_1)$. La repetición de este proceso determina la órbita del punto x_0.

telaraña para el mapa cuadrático



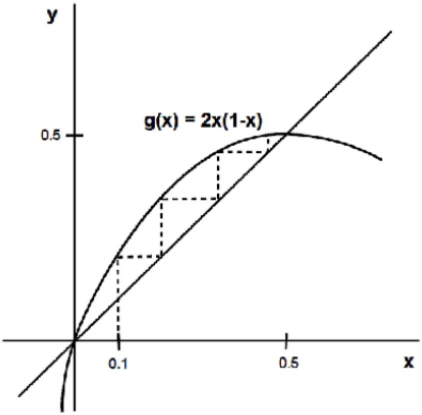
Proceso de la telaraña para el mapa cuadrático $f(x) = x^2$ y condición i
x_0 tal que $-1 < x_0 < 0$.

Ejemplo

Consideremos el mapa $g(x) = 2x(1-x)$. *El gráfico de* g *y de la recta* $y = x$ *estan dibujados en la siguiente figura. Tambien está representada la órbita del punto* 0.1 *que converge al punto fijo* $\frac{1}{2}$.

Ejemplo

Consideremos el mapa $g(x) = 2x(1-x)$*. El gráfico de* g *y de la recta* $y = x$ *estan dibujados en la siguiente figura. Tambien está representada la órbita del punto* 0.1 *que converge al punto fijo* $\frac{1}{2}$*.*

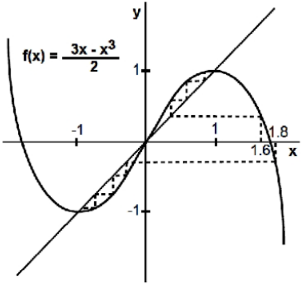


Ejemplo

Consideremos el mapa $f(x) = \dfrac{3x - x^3}{2}$. *El gráfico de* f *y de la recta* $y = x$ *estan dibujados en la siguiente figura. Tambien están representada las órbitas con condiciones iniciales* 1.6 *y* 1.8 *que convergen a los puntos fijos* ± 1

Ejemplo

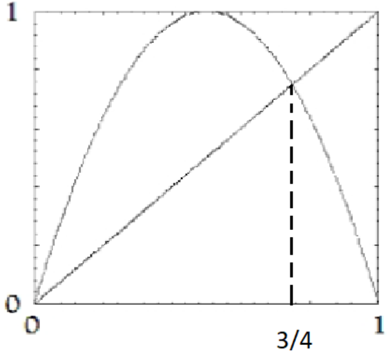
Consideremos el mapa $f(x) = \dfrac{3x - x^3}{2}$. *El gráfico de* f *y de la recta* $y = x$ *estan dibujados en la siguiente figura. Tambien están representada las órbitas con condiciones iniciales* 1.6 *y* 1.8 *que convergen a los puntos fijos* ± 1



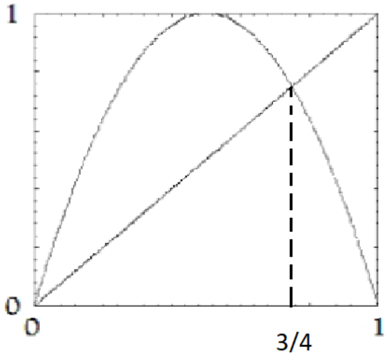
Ejemplo

Consideremos el mapa logístico $f(x) = 4x(1-x)$. *Hallar los puntos fijos, los puntos eventualmente fijos, las órbitas periódicas de período dos y los puntos eventualmente periódicos de período dos.*

Puntos fijos

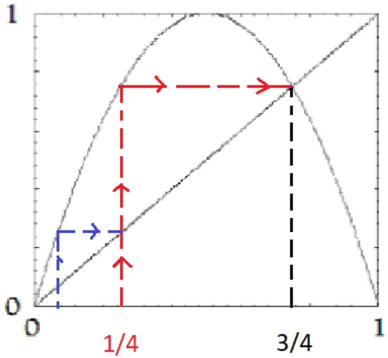


Puntos fijos

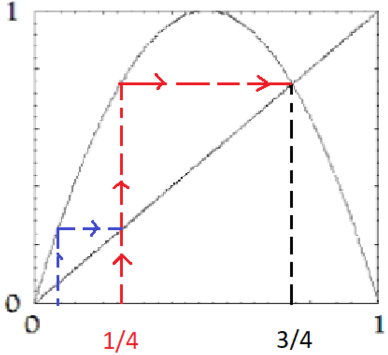


Puntos fijos: 0 y $\frac{3}{4}$ ($f(0) = 0$ y $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$)

Puntos eventualmente fijos

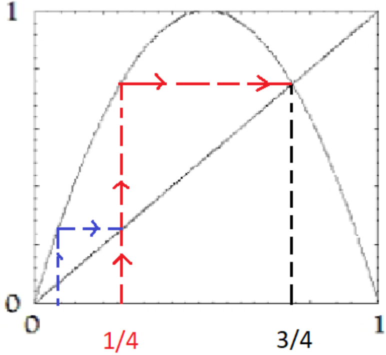


Puntos eventualmente fijos



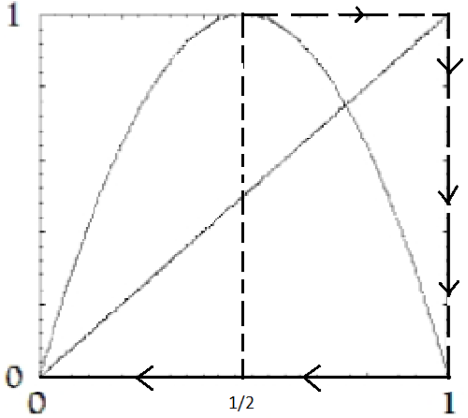
$\frac{1}{4}$ es eventualmente fijo: $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ y $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$

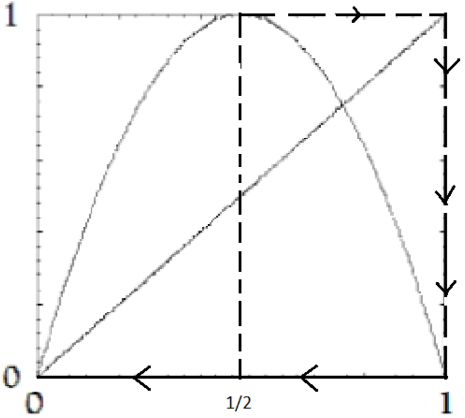
Puntos eventualmente fijos



$\frac{1}{4}$ es eventualmente fijo: $f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ y $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ también es eventualmente fijo: $f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{1}{4}$


1
0
0
1/2
1



$\frac{1}{2}$ es eventualmente fijo: $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f(1) = 0$

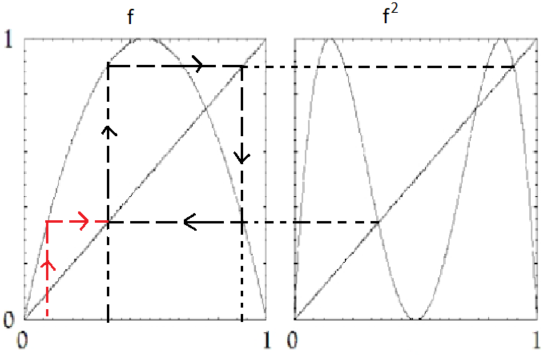
Puntos periódicos de periodo 2

Puntos periódicos de periodo 2

Puntos fijos de f^2 que no son puntos fijos de f

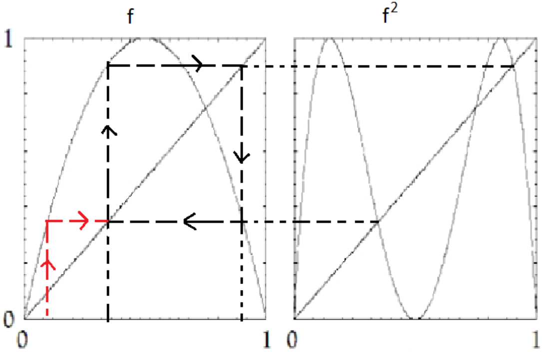
Puntos periódicos de periodo 2

Puntos fijos de f^2 que no son puntos fijos de f



Puntos periódicos de periodo 2

Puntos fijos de f^2 que no son puntos fijos de f



Hay un 2−ciclo: $\left\{ \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}, \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} \right\}$

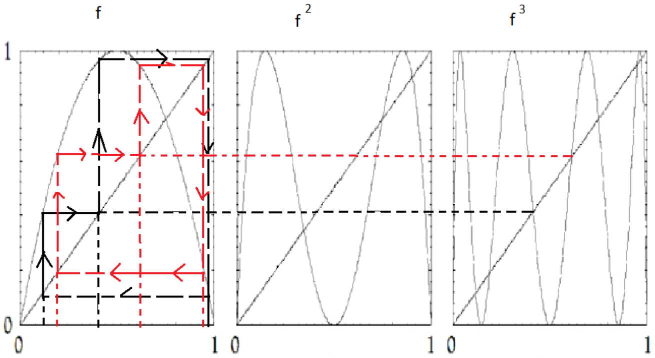
Puntos periodicos de periodo 3

Puntos periodicos de periodo 3

Puntos fijos de f^3 que no son puntos fijos de f ni de f^2

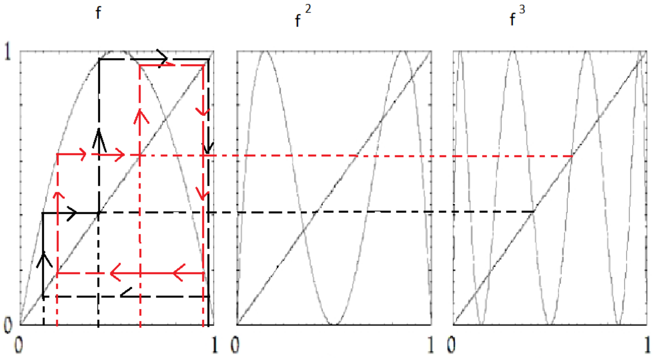
Puntos periodicos de periodo 3

Puntos fijos de f^3 que no son puntos fijos de f ni de f^2



Puntos periodicos de periodo 3

Puntos fijos de f^3 que no son puntos fijos de f ni de f^2



Hay dos 3−ciclos

Otro ejemplo

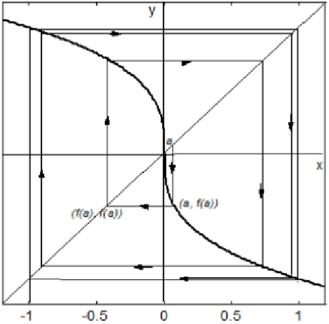
Ejemplo

Consideremos el mapa $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$. *El gráfico de* f *y de la recta* $y = x$

Otro ejemplo

Ejemplo

Consideremos el mapa $f(x) = -x^{\frac{1}{3}}$*. El gráfico de* f *y de la recta* $y = x$ *estan dibujados en la siguiente figura.*



Único punto fijo es el origen.

Único punto fijo es el origen.
resolviendo la ecuación $f^2(x) = x$, que se puede escribir como $x^{1/3} = x$

Único punto fijo es el origen.
resolviendo la ecuación $f^2(x) = x$, que se puede escribir como $x^{1/3} = x$ tenemos que el único $2 - \mathit{ciclo}$ de f es $\{-1, 1\}$.
Empezemos el proceso de la telaraña con un punto a cercano al 0 y en el intervalo $(0, 1)$.Partiendo de la condición inicial $x = a$ hacemos un análisis gráfico de la órbita usando el proceso de la telaraña y podemos ver que $f^t(a)$ converge a la órbita periódica de período dos $\{-1, 1\}$.

Único punto fijo es el origen.
resolviendo la ecuación $f^2(x) = x$, que se puede escribir como $x^{1/3} = x$ tenemos que el único $2 - \mathit{ciclo}$ de f es $\{-1, 1\}$.
Empezemos el proceso de la telaraña con un punto a cercano al 0 y en el intervalo $(0, 1)$.Partiendo de la condición inicial $x = a$ hacemos un análisis gráfico de la órbita usando el proceso de la telaraña y podemos ver que $f^t(a)$ converge a la órbita periódica de período dos $\{-1, 1\}$.
Esto es válido para todo $a \in (0, 1) \neq 0$. Estos son los **ciclos límite**.

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa y un punto cualquiera* p *de* I*. Decimos que el punto* $x \in I$ *es* **asintótico** *a* p *si y solo si*

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa y un punto cualquiera* p *de* I. *Decimos que el punto* $x \in I$ *es* **asintótico** *a* p *si y solo si*

$$\lim_{t \to +\infty} \left[f^t(x) - f^t(p) \right] = 0$$

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa y un punto cualquiera* p *de* I*. Decimos que el punto* $x \in I$ *es* **asintótico** *a* p *si y solo si*

$$\lim_{t \to +\infty} \left[f^t(x) - f^t(p) \right] = 0$$

En particular, si p *es un punto periódico de período* k, x *es asintótico a* p *si y solo si*

$$\lim_{t \to +\infty} f^{tk}(x) = p$$

Definición

Sea $f : I \to I$ *un mapa y un punto cualquiera* p *de* I*. Decimos que el punto* $x \in I$ *es* **asintótico** *a* p *si y solo si*

$$\lim_{t \to +\infty} \left[f^t(x) - f^t(p) \right] = 0$$

En particular, si p *es un punto periódico de período* k*,* x *es asintótico a* p *si y solo si*

$$\lim_{t \to +\infty} f^{tk}(x) = p$$

y en este caso decimos que la órbita de x *es un* **k-ciclo límite** *con límite la órbita de* p*.*

Definición

Se llama **variedad estable** *de* p *y se denota por* $W^s(p)$ *al conjunto de todos los puntos de* I *que son asintóticos a* p

Definición

Se llama **variedad estable** *de p y se denota por $W^S(p)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a p. Si la sucesión $|f^t(x)|$ crece y es no acotada decimos que x es asintótico a infinito. Se llama variedad estable de infinito y se denota por $W^S(\infty)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a infinito.*

Definición

Se llama **variedad estable** *de p y se denota por $W^S(p)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a p. Si la sucesión $|f^t(x)|$ crece y es no acotada decimos que x es asintótico a infinito. Se llama variedad estable de infinito y se denota por $W^S(\infty)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a infinito.*

- La variedad estable de un punto p es no vacía pues al menos $p \in W^S(p)$.

Definición

Se llama **variedad estable** *de p y se denota por $W^S(p)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a p. Si la sucesión $|f^t(x)|$ crece y es no acotada decimos que x es asintótico a infinito. Se llama variedad estable de infinito y se denota por $W^S(\infty)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a infinito.*

- La variedad estable de un punto p es no vacía pues al menos $p \in W^S(p)$.
- Si $p \neq q$ son puntos periódicos distintos entonces $W^S(p) \cap W^S(q) = \theta$.

Definición

Se llama **variedad estable** *de p y se denota por $W^S(p)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a p. Si la sucesión $|f^t(x)|$ crece y es no acotada decimos que x es asintótico a infinito. Se llama variedad estable de infinito y se denota por $W^S(\infty)$ al conjunto de todos los puntos de I que son asintóticos a infinito.*

- La variedad estable de un punto p es no vacía pues al menos $p \in W^S(p)$.
- Si $p \neq q$ son puntos periódicos distintos entonces $W^S(p)$ $\cap W^S(q) = \theta$.
- En el mapa $f(x) = 2x(1-x)$ es $W^S(0) = \{0, 1\}$, $W^S(\frac{1}{2}) = (0, 1)$ y $W^S(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2021

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY