Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Análisis cualitativo - estabilidad
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Estabilidad.

Definición

Si $f : I \to I$ *es un mapa y* p *es un punto de* I*, decimos que* p *es* **estable** *si y solo si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in I$ *y* $|x - p| < \delta$ *entonces* $|f^t(x) - f^t(p)| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{N}$.

Estabilidad.

Definición

Si $f : I \to I$ *es un mapa y* p *es un punto de* I*, decimos que* p *es* **estable** *si y solo si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in I$ *y* $|x - p| < \delta$ *entonces* $|f^t(x) - f^t(p)| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{N}$.

Decimos que p *es* **asintóticamente estable** *si y solos es estable y* $W^S(p)$ *contiene un entorno de* p *en* I.

Observación (1)

p es un punto asintóticamente estable si y solo si es estable y $\exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in I$ *y* $|x - p| < \delta$ *entonces* $\lim_{t \to +\infty} [f^t(x) - f^t(p)] = 0$.

Observación (1)

p es un punto asintóticamente estable si y solo si es estable y $\exists\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$ entonces $\lim_{t\to+\infty} [f^t(x) - f^t(p)] = 0$.

Observación

En el mapa $f(x) = -x$, el punto fijo 0 es estable y no es asintóticamente estable.

Observación (1)

p es un punto asintóticamente estable si y solo si es estable y $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$ entonces $\lim_{t \to +\infty} [f^t(x) - f^t(p)] = 0$.

Observación

En el mapa $f(x) = -x$, el punto fijo 0 es estable y no es asintóticamente estable.

Observación (2)

Si un punto p es estable, entonces para todo punto x suficientemente cercano a p la órbita de x se mantiene cercana a la órbita de p.

Observación (1)

p es un punto asintóticamente estable si y solo si es estable y $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$ entonces $\lim_{t \to +\infty} [f^t(x) - f^t(p)] = 0$.

Observación

En el mapa $f(x) = -x$, el punto fijo 0 es estable y no es asintóticamente estable.

Observación (2)

Si un punto p es estable, entonces para todo punto x suficientemente cercano a p la órbita de x se mantiene cercana a la órbita de p.
Si ademas es asintóticamente estable, las órbitas de todos los puntos suficientemente cercanos a p tienden a ser la órbita de p.

Observación

Si un punto no es estable decimos que es **inestable**.

Observación

Si un punto no es estable decimos que es **inestable**.

Si p *es un punto fijo de un sistema dinámico discreto dado por* $x_{t+1} = f(x_t)$ *(es lo mismo que decir que* f *es un mapa) y se satisface la condición que para todo* $\delta > 0$ *existen un punto* x_1 *y un natural* t_0 *tal que*

$|x_0 - p| < \delta$ *y*

$|x_t - p| \geq \delta \ \forall t \geq t_0$

Observación

Si un punto no es estable decimos que es **inestable**.
Si p *es un punto fijo de un sistema dinámico discreto dado por* $x_{t+1} = f(x_t)$ *(es lo mismo que decir que* f *es un mapa) y se satisface la condición que para todo* $\delta > 0$ *existen un punto* x_1 *y un natural* t_0 *tal que*
$|x_0 - p| < \delta$ *y*
$|x_t - p| \geq \delta \; \forall t \geq t_0$
Es decir, todos los puntos cercanos a p*, sus iterados se alejan de* p*, se dice que el equilibrio es* **inestable**.

Observación

La cuestión de la estabilidad es importante pues en los sistemas dinámicos del mundo real (que estan sujetos a pequeñas perturbaciones) si uno observa un equilibrio, este debe ser estable.

Observación

La cuestión de la estabilidad es importante pues en los sistemas dinámicos del mundo real (que estan sujetos a pequeñas perturbaciones) si uno observa un equilibrio, este debe ser estable.
Si un punto fijo es inestable, pequeñas perturbaciones hacen que la órbita se aleje del punto fijo y por lo tanto este no será observable.

Definición

Si $f : I \to I$ es un mapa y p es un punto periódico de período k de f, decimos que p es un **atractor** *(o sumidero) si y solo si p es asintóticamente estable.*

Definición

Si $f : I \to I$ *es un mapa y* p *es un punto periódico de período* k *de* f*, decimos que* p *es un* **atractor** *(o sumidero) si y solo si* p *es asintóticamente estable.*

Decimos que p *es un* **repulsor** *(o fuente) si y solo si* $\exists \delta > 0$ *tal que si* $x \in I$, $x \neq p$ *y* $|x - p| < \delta$ *entonces existe* $t = t(x) \in \mathbb{N}$ *tal que* $\left| f^{tk}(x) - p \right| > \delta$.

Definición

Si $f : I \to I$ es un mapa y p es un punto periódico de período k de f, decimos que p es un **atractor** *(o sumidero) si y solo si p es asintóticamente estable.*
Decimos que p es un **repulsor** *(o fuente) si y solo si $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in I$, $x \neq p$ y $|x - p| < \delta$ entonces existe $t = t(x) \in \mathbb{N}$ tal que $\left|f^{tk}(x) - p\right| > \delta$.*
Si p es inestable y no es repulsor diremos que es un **punto silla**.

Observación

Un punto fijo atractor p tiene la propiedad de que puntos cercanos a él se acercan cada vez mas a p bajo el sistema dinámico.

Observación

Un punto fijo atractor p tiene la propiedad de que puntos cercanos a él se acercan cada vez mas a p bajo el sistema dinámico.

Observación

Para un punto fijo repulsor p, puntos x cercanos a él se alejan de p bajo iteraciones con f. O sea que si p es un punto fijo repulsor hay un entorno E de p en el cual todos los puntos distintos de p dejan E bajo iteración por f.

Observación

Un punto fijo atractor p tiene la propiedad de que puntos cercanos a él se acercan cada vez mas a p bajo el sistema dinámico.

Observación

Para un punto fijo repulsor p, puntos x cercanos a él se alejan de p bajo iteraciones con f. O sea que si p es un punto fijo repulsor hay un entorno E de p en el cual todos los puntos distintos de p dejan E bajo iteración por f. Esto no quiere decir que todos los iterados de x esten fuera de un entorno de centro p a partir de un cierto natural t_0

Observación

Un punto fijo atractor p tiene la propiedad de que puntos cercanos a él se acercan cada vez mas a p bajo el sistema dinámico.

Observación

Para un punto fijo repulsor p, puntos x cercanos a él se alejan de p bajo iteraciones con f. O sea que si p es un punto fijo repulsor hay un entorno E de p en el cual todos los puntos distintos de p dejan E bajo iteración por f.
Esto no quiere decir que todos los iterados de x esten fuera de un entorno de centro p a partir de un cierto natural t_0.
Mas adelante veremos ejemplos de puntos fijos repulsores cuyos iterados retornan cerca de p una y otra vez.

Observación

Los puntos periódicos atractores muy comunmente atraen órbitas de un conjunto bastante grande de condiciones iniciales cercanas.

Observación

Los puntos periódicos atractores muy comunmente atraen órbitas de un conjunto bastante grande de condiciones iniciales cercanas.
El conjunto de los puntos cuya órbita converge al atractor periódico p (esto es, $W^S(p)$) se llama la **cuenca de atracción** *de p.*

Observación

El mapa $f(x) = -x^{1/3}$ tiene un único punto fijo 0 que es un repulsor

Observación

Los puntos periódicos atractores muy comunmente atraen órbitas de un conjunto bastante grande de condiciones iniciales cercanas.
El conjunto de los puntos cuya órbita converge al atractor periódico p (esto es, $W^S(p)$) se llama la **cuenca de atracción** *de p.*

Observación

El mapa $f(x) = -x^{1/3}$ tiene un único punto fijo 0 que es un repulsor y tiene un único 2-ciclo $\{-1, 1\}$ que es un atractor periódico.

Un criterio de clasificación

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 (esto es, con derivada primera continua). Entonces:

Un criterio de clasificación

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *(esto es, con derivada primera continua). Entonces:*

1. *si* p *es un punto fijo de* f *con* $|f'(p)| < 1$*, entonces* p *es un atractor.*

Un criterio de clasificación

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 (esto es, con derivada primera continua). Entonces:

1. *si p es un punto fijo de f con $|f'(p)| < 1$, entonces p es un atractor.*
2. *Si p es un punto periódico de período k de f con $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| < 1$, entonces p es un atractor.*

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)|$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists\epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x - p| < \lambda |x - p|$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x-p| < \lambda |x-p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x - p|$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x-p| < \lambda |x-p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x)-p| < |x-p| \implies f(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right|$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x - p| < \lambda \, |x - p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x - p| \implies f(x) \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| = |f(f(x)) - p)| < \lambda \, |f(x) - p|$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x - p| < \lambda \, |x - p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x - p| \implies f(x) \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| = |f(f(x)) - p)| < \lambda \, |f(x) - p| < \lambda^2 \, |x - p|$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \ = \left|f'(z)\right| |x - p| < \lambda \, |x - p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x - p| \implies f(x) \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| \ = |f(f(x)) - p)| < \lambda \, |f(x) - p| \ < \lambda^2 \, |x - p|$$

Continuando por inducción tenemos que:

$$\left|f^t(x) - p\right| < \lambda^t \, |x - p| \,, \forall x \in [p - \epsilon, p + \epsilon] \text{ y } \forall t \in \mathbb{N}^+$$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x-p| < \lambda |x-p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x-p| \implies f(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| = |f(f(x)) - p)| < \lambda |f(x) - p| < \lambda^2 |x-p|$$

Continuando por inducción tenemos que:

$$\left|f^t(x) - p\right| < \lambda^t |x-p|, \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon] \text{ y } \forall t \in \mathbb{N}^+$$

Entonces tenemos que $f^t(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon] \ \forall t \in \mathbb{N}^+$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda,\ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x-p| < \lambda |x-p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x-p| \implies f(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| = |f(f(x)) - p)| < \lambda |f(x) - p| < \lambda^2 |x-p|$$

Continuando por inducción tenemos que:

$$\left|f^t(x) - p\right| < \lambda^t |x-p|, \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon] \text{ y } \forall t \in \mathbb{N}^+$$

Entonces tenemos que $f^t(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]\ \forall t \in \mathbb{N}^+$ (lo que implica que p es estable) y que $\lim_{t \to +\infty} [f^t(x) - p] = 0$

Demostración: a) Como $|f'(p)| < 1$ y f' es continua, $\exists \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|f'(p)| < \lambda, \ \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Luego, por el teorema del valor medio, $\forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, $\exists z$ perteneciente al intervalo de extremos p y x tal que:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = \left|f'(z)\right| |x-p| < \lambda |x-p|$$

Como $\lambda < 1$ es $|f(x) - p| < |x-p| \implies f(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ y podemos repetir el argumento $\implies$

$$\left|f^2(x) - p\right| = |f(f(x)) - p)| < \lambda |f(x) - p| < \lambda^2 |x-p|$$

Continuando por inducción tenemos que:

$$\left|f^t(x) - p\right| < \lambda^t |x-p|, \forall x \in [p-\epsilon, p+\epsilon] \text{ y } \forall t \in \mathbb{N}^+$$

Entonces tenemos que $f^t(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ $\forall t \in \mathbb{N}^+$ (lo que implica que p es estable) y que $\lim\limits_{t \to +\infty} [f^t(x) - p] = 0$. Por lo tanto p es un atractor.

Demostración: b) Si p es un punto periódico de período k, basta considerar $g = f^k$

Demostración: b) Si p es un punto periódico de período k, basta considerar $g = f^k$. Sabemos que $g(p) = p$ y que $|g'(p)| < 1$ por la parte a) tenemos que para todo punto x suficientemente cercano a p es

$$\lim_{j \to +\infty} f^{kj}(x) = \lim_{j \to +\infty} g^j(x) = p$$

Demostración: b) Si p es un punto periódico de período k, basta considerar $g = f^k$. Sabemos que $g(p) = p$ y que $|g'(p)| < 1$ por la parte a) tenemos que para todo punto x suficientemente cercano a p es

$$\lim_{j \to +\infty} f^{kj}(x) = \lim_{j \to +\infty} g^{j}(x) = p$$

y por la continuidad de las funciones f^j para $1 \leq j \leq k$ se deduce que

$$\lim_{n \to +\infty} [f^{n}(x) - f^{n}(p)] = 0$$

lo que implica que p es un atractor.

Observación

Notese que de la demostración se deduce que la tasa de convergencia de la órbita de x cercano a p a la órbita de p es exponencial. (de base λ)

Observación

Notese que de la demostración se deduce que la tasa de convergencia de la órbita de x cercano a p a la órbita de p es exponencial. (de base λ)

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 Entonces:

1. *si p es un punto fijo de f con $|f'(p)| > 1$, entonces p es un repulsor.*
2. *Si p es un punto periódico de período k de f con $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| > 1$, entonces p es repulsor.*

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un mapa derivable y sea* p *es un punto periódico de* f *de período* k*. Si* $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| \neq 1$, *entonces* p *se llama* **punto hiperbólico**

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un mapa derivable y sea p es un punto periódico de f de período k. Si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| \neq 1$, entonces p se llama **punto hiperbólico** *y si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| = 1$, entonces p se dice* **neutral** *(o* **no hiperbólico***).*

Observación

Si $o(p_1) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ es una órbita periódica de período k de f entonces por la regla de la cadena vale que:

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un mapa derivable y sea* p *es un punto periódico de* f *de período* k. *Si* $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| \neq 1$, *entonces* p *se llama* **punto hiperbólico** *y si* $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| = 1$, *entonces* p *se dice* **neutral** *(o* **no hiperbólico***).*

Observación

Si $o(p_1) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ *es una órbita periódica de período* k *de* f *entonces por la regla de la cadena vale que:*

$$\left(f^k\right)'(p_1) = \left(f \circ f^{k-1}\right)'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1)).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \quad (1)$$

$$= f'(p_k).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \cdots = f'(p_1)\ldots f'(p_k) \quad (2)$$

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un mapa derivable y sea p es un punto periódico de f de período k. Si $\left|(f^k)'(p)\right| \neq 1$, entonces p se llama **punto hiperbólico** *y si $\left|(f^k)'(p)\right| = 1$, entonces p se dice* **neutral** *(o* **no hiperbólico***).*

Observación

Si $o(p_1) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ es una órbita periódica de período k de f entonces por la regla de la cadena vale que:

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)'(p_1) &= \left(f \circ f^{k-1}\right)'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1)).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \quad (1) \\ &= f'(p_k).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \cdots = f'(p_1)\ldots f'(p_k) \quad (2) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

1. *Si $|f'(p_1)\ldots f'(p_k)| < 1$*

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un mapa derivable y sea p es un punto periódico de f de período k. Si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| \neq 1$, entonces p se llama **punto hiperbólico** *y si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| = 1$, entonces p se dice* **neutral** *(o* **no hiperbólico***).*

Observación

Si $o(p_1) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ es una órbita periódica de período k de f entonces por la regla de la cadena vale que:

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)'(p_1) &= \left(f \circ f^{k-1}\right)'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1)).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \qquad (1) \\ &= f'(p_k).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \cdots = f'(p_1)\ldots f'(p_k) \qquad (2) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

1. *Si $|f'(p_1)\ldots f'(p_k)| < 1$ entonces p_1 es un atractor periódico.*
2. *Si $|f'(p_1)\ldots f'(p_k)| > 1$ entonces p_1*

Definición

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un mapa derivable y sea p es un punto periódico de f de período k. Si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| \neq 1$, entonces p se llama **punto hiperbólico** *y si $\left|\left(f^k\right)'(p)\right| = 1$, entonces p se dice* **neutral** *(o* **no hiperbólico***).*

Observación

Si $o(p_1) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ es una órbita periódica de período k de f entonces por la regla de la cadena vale que:

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)'(p_1) &= \left(f \circ f^{k-1}\right)'(p_1) = f'(f^{k-1}(p_1)).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = && (1) \\ &= f'(p_k).\left(f^{k-1}\right)'(p_1) = \cdots = f'(p_1)\dots f'(p_k) && (2) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

1. *Si $|f'(p_1)\dots f'(p_k)| < 1$ entonces p_1 es un atractor periódico.*
2. *Si $|f'(p_1)\dots f'(p_k)| > 1$ entonces p_1 es un repulsor periódico.*

Observación

Cuando un punto periódico atractor (repulsor) es un punto no hiperbólico se dice que es **débilmente atractor** *(repulsor)*

Observación

Cuando un punto periódico atractor (repulsor) es un punto no hiperbólico se dice que es **débilmente atractor** *(repulsor)*

Ejemplo

Ya vimos que el mapa $f(x) = x^2$ *tiene puntos fijos* 0 *y* 1 *y no tiene otros puntos periódicos.*
Como $f'(0) = 0$ *y* $f'(1) = 2$*, entonces* 0 *es un atractor y* 1 *es un repulsor.*
Notese ademas que $W^S(0) = (-1, 1)$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$*,*
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$,
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

Para el mapa $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$,
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

Para el mapa $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, $\{0, 1, 2\}$ *es un ciclo de período tres. Como*

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$,
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

Para el mapa $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, $\{0, 1, 2\}$ *es un ciclo de período tres. Como*

$$f'(x) = -3x + \frac{5}{2}$$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$,
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

Para el mapa $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, $\{0, 1, 2\}$ *es un ciclo de período tres. Como*

$$f'(x) = -3x + \frac{5}{2}$$

tenemos que

$$f'(0)f'(1)f'(2) = \frac{35}{8} > 1$$

Ejemplo

El mapa $f(x) = x^2 - 1$ *tiene un* $2-$ *ciclo* $\{0, -1\}$ *y como es* $f'(0) = 0$ *y* $f'(-1) = -2$*,*
entonces es un atractor periódico pues

$$f'(0)f'(-1) = 0$$

Ejemplo

Para el mapa $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$, $\{0, 1, 2\}$ *es un ciclo de período tres. Como*

$$f'(x) = -3x + \frac{5}{2}$$

tenemos que

$$f'(0)f'(1)f'(2) = \frac{35}{8} > 1$$

y por lo tanto este ciclo es un repulsor.

Ecuación logística

Para introducir alguna de las propiedades características de los sistemas dinámicos caóticos vamos a volver a utilizar la ecuación logística:

$$x_{t+1} = f(x_t, r) = rx_t(1 - x_t),\ x_t \in [0, 1]$$

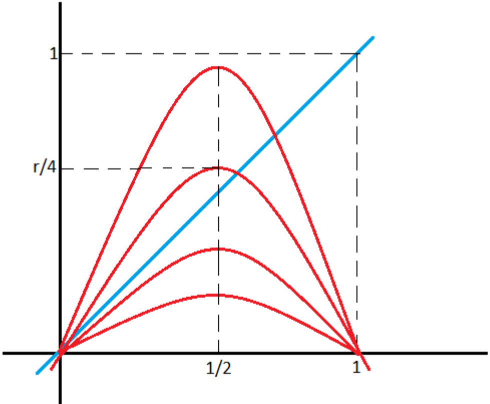
y r es un parámetro que puede tomar valores en $[0, 4]$

Ecuación logística

Para introducir alguna de las propiedades características de los sistemas dinámicos caóticos vamos a volver a utilizar la ecuación logística:

$$x_{t+1} = f(x_t, r) = rx_t(1 - x_t),\ x_t \in [0, 1]$$

y r es un parámetro que puede tomar valores en $[0, 4]$



Puntos Fijos - Equilibrios

Vamos a estudiar el comportamiento de la órbitas del sistema para distintos valores del parámetro r.

- Para $r = 0$ se tiene $\forall x_0 \in [0, 1]$, $x_t = 0, \forall t \geq 1$

Puntos Fijos - Equilibrios

Vamos a estudiar el comportamiento de la órbitas del sistema para distintos valores del parámetro r.

- Para $r = 0$ se tiene $\forall x_0 \in [0, 1]$, $x_t = 0, \forall t \geq 1$
- Los puntos fijos están dados al resolver $x^* = rx^*(1 - x^*)$ y son:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r} \text{ (para } r > 0) \end{cases}$$

Puntos Fijos - Equilibrios

Vamos a estudiar el comportamiento de la órbitas del sistema para distintos valores del parámetro r.

- Para $r = 0$ se tiene $\forall x_0 \in [0,1]$, $x_t = 0, \forall t \geq 1$
- Los puntos fijos están dados al resolver $x^* = rx^*(1-x^*)$ y son:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r} \text{ (para } r > 0) \end{cases}$$

- Para $0 < r \leq 1$, $x_1^* = 0$ es el único punto fijo en $[0,1]$, es un punto fijo asintóticamente estable. Es fácil verificar que dada cualquier condición inicial $x_0 \in [0,1]$ su órbita converge a 0. $(f'(x) = r(1-2x) \Rightarrow f'(0) = r)$

- Si $1 < r < 3$ surge $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ como un segundo punto fijo en $[0, 1]$

- Si $1 < r < 3$ surge $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ como un segundo punto fijo en $[0, 1]$
- En este caso $f'(0) = r > 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ pasa a ser inestable.

- Si $1 < r < 3$ surge $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ como un segundo punto fijo en $[0, 1]$
- En este caso $f'(0) = r > 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ pasa a ser inestable.
- Y el nuevo punto fijo $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ es asintóticamente estable. $(f'(x_2^*) = 2 - r \in (-1, 1)\ )$ Dado $x_0 \in [0, 1]$, su órbita converge a $1 - \dfrac{1}{r}$.

- Si $1 < r < 3$ surge $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ como un segundo punto fijo en $[0,1]$
- En este caso $f'(0) = r > 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ pasa a ser inestable.
- Y el nuevo punto fijo $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ es asintóticamente estable. $(f'(x_2^*) = 2 - r \in (-1,1)$) Dado $x_0 \in [0,1]$, su órbita converge a $1 - \dfrac{1}{r}$.
- Al cambiar de $r \leq 1$ a $r > 1$ se dice que ocurre una **bifurcación transcrítica**: el equilibrio estable $(x_1^* = 0)$ pasa a ser inestable.

- Si $1 < r < 3$ surge $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ como un segundo punto fijo en $[0,1]$
- En este caso $f'(0) = r > 1 \Rightarrow x_1^* = 0$ pasa a ser inestable.
- Y el nuevo punto fijo $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ es asintóticamente estable. $(f'(x_2^*) = 2 - r \in (-1,1)$) Dado $x_0 \in [0,1]$, su órbita converge a $1 - \dfrac{1}{r}$.
- Al cambiar de $r \leq 1$ a $r > 1$ se dice que ocurre una **bifurcación transcrítica**: el equilibrio estable $(x_1^* = 0)$ pasa a ser inestable.
- Esta situación se mantiene para $1 < r < 3$.

Para $r = 3$ el comportamiento empieza a complicarse.

Para $r = 3$ el comportamiento empieza a complicarse.

Para este valor de r, $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ pasa a ser inestable y emerge un ciclo de período dos (**bifurcación de duplicación de período**).

Para $r = 3$ el comportamiento empieza a complicarse.
Para este valor de r, $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ pasa a ser inestable y emerge un ciclo de período dos (**bifurcación de duplicación de período**). Vamos a

encontrar los puntos de periodo 2
Esto es, los puntos x que satisfacen $f(f(x)) = x$

$$f(rx(1-x)) = x \Leftrightarrow r(rx(1-x))\,(1 - rx(1-x)) = x$$

$$r^3x^4 - 2r^3x^3 + (r^3 + r^2)x^2 - (r^2 - 1)x = 0$$

Para $r = 3$ el comportamiento empieza a complicarse.

Para este valor de r, $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ pasa a ser inestable y emerge un ciclo de período dos (**bifurcación de duplicación de período**). Vamos a

encontrar los puntos de periodo 2

Esto es, los puntos x que satisfacen $f(f(x)) = x$

$$f(rx(1-x)) = x \Leftrightarrow r(rx(1-x))(1 - rx(1-x)) = x$$

$$r^3x^4 - 2r^3x^3 + (r^3 + r^2)x^2 - (r^2 - 1)x = 0$$

De la última ecuación conocemos dos raíces ($x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$), podemos hallar su descomposición factorial:

$$x(x-(1-\frac{1}{r}))\left(x - \frac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}\right)\left(x - \frac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1}}{2r}\right.$$

los puntos de periodo 2 están dados por

$$\begin{cases} x_3^* = \dfrac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \\ x_4^* = \dfrac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \end{cases}$$

los puntos de periodo 2 están dados por

$$\begin{cases} x_3^* = \dfrac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \\ x_4^* = \dfrac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \end{cases}$$

Notar, que estos puntos periódicos de periodo 2 antes no existían, cuando $r < 3$, en ese caso las raíces no son reales.

los puntos de periodo 2 están dados por

$$\begin{cases} x_3^* = \dfrac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \\ x_4^* = \dfrac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \end{cases}$$

Notar, que estos puntos periódicos de periodo 2 antes no existían, cuando $r < 3$, en ese caso las raíces no son reales.

Para $r = 3$ se tiene que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = \dfrac{2}{3}$ y para $r > 3$, x_3^* y x_4^* son puntos periódicos de periodo 2.

los puntos de periodo 2 están dados por

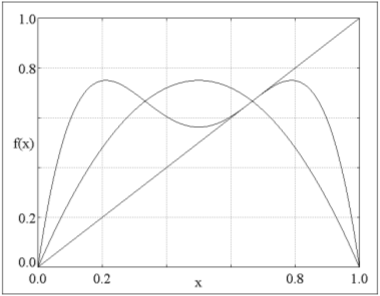
$$\begin{cases} x_3^* = \dfrac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \\ x_4^* = \dfrac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \end{cases}$$

Notar, que estos puntos periódicos de periodo 2 antes no existían, cuando $r < 3$, en ese caso las raíces no son reales.

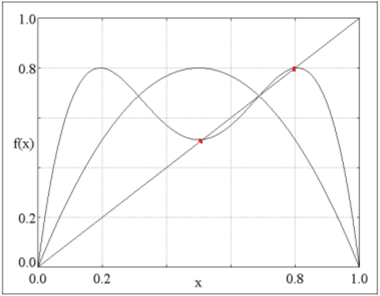
Para $r = 3$ se tiene que $x_2^* = x_3^* = x_4^* = \dfrac{2}{3}$ y para $r > 3$, x_3^* y x_4^* son puntos periódicos de periodo 2.

Decimos que $r = 3$ es un punto de bifurcación (**bifurcación de duplicación de período**), para este valor del parámetro r el sistema sufre un cambio cualitativo en comportamiento.

gráficas de f y f^2 para $r = 3$



gráficas de f y f^2 para $r = \frac{16}{5} > 3$



Para $r > 3$, $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ ambos son inestables
$(f'(0) = r > 1$ y $f'(1 - \dfrac{1}{r}) = 2 - r > 1)$
Para estudiar la estabilidad del ciclo periódico veamos que:

$$f'(x_3^*)f'(x_4^*) = r(1 - 2x_3^*)r(1 - 2x_4^*) = \left|4 + 2r - r^2\right|$$

$\Rightarrow$ la órbita periódica será estable si $\left|4 + 2r - r^2\right| < 1$ y esto se cumple para $3 < r < 1 + \sqrt{5}$

Para $3 < r < 1 + \sqrt{5}$, $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ inestables y aparece una órbita periódica de periodo 2 estable

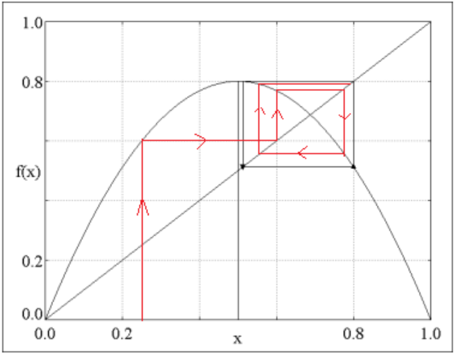
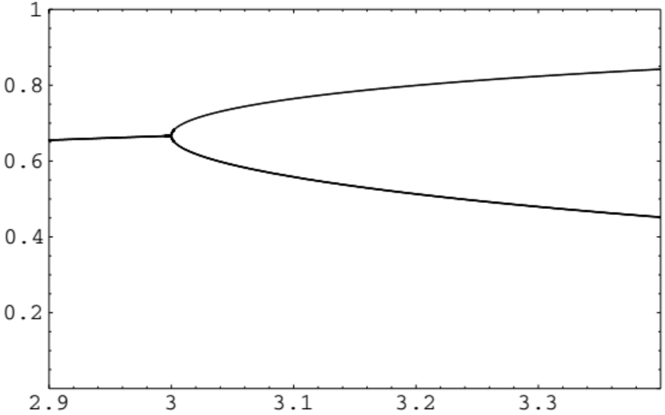


Diagrama de Bifurcación para $2,9 < r < 1+\sqrt{5}$

Graficamos, en el eje de las absisas valores de r y en el eje de las ordenadas x^*



$r > 1 + \sqrt{5}$

Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período 2 se vuelve inestable, es otro punto de bifurcación (y de nuevo es una bifurcación de periodo) ya que:

$r > 1 + \sqrt{5}$

Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período 2 se vuelve inestable, es otro punto de bifurcación (y de nuevo es una bifurcación de periodo) ya que:
si $r > 1 + \sqrt{5}$ se puede ver que aparecen 4-ciclos

$r > 1 + \sqrt{5}$

Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período 2 se vuelve inestable, es otro punto de bifurcación (y de nuevo es una bifurcación de periodo) ya que:
si $r > 1 + \sqrt{5}$ se puede ver que aparecen 4-ciclos

para $r > 3{,}54409...$ aparecen 8-ciclos,

$r > 1 + \sqrt{5}$

Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período 2 se vuelve inestable, es otro punto de bifurcación (y de nuevo es una bifurcación de periodo) ya que:
si $r > 1 + \sqrt{5}$ se puede ver que aparecen 4-ciclos

para $r > 3{,}54409...$ aparecen 8-ciclos,

para $r > 3{,}5644$ aparecen 16-ciclos,

$r > 1 + \sqrt{5}$

Cuando $r = 1 + \sqrt{5}$ el ciclo de período 2 se vuelve inestable, es otro punto de bifurcación (y de nuevo es una bifurcación de periodo) ya que:
si $r > 1 + \sqrt{5}$ se puede ver que aparecen 4-ciclos

para $r > 3{,}54409...$ aparecen 8-ciclos,

para $r > 3{,}5644$ aparecen 16-ciclos,

para $r > 3{,}569946$ aparecen 32-ciclos y observamos que las bifurcaciones aparecen cada vez más frecuentemente.
Existe un valor límite $r_\infty = 3{,}569946...$ para el cual el periodo es infinito.

Diagrama de bifurcación para $3,4 < r < 3,6$

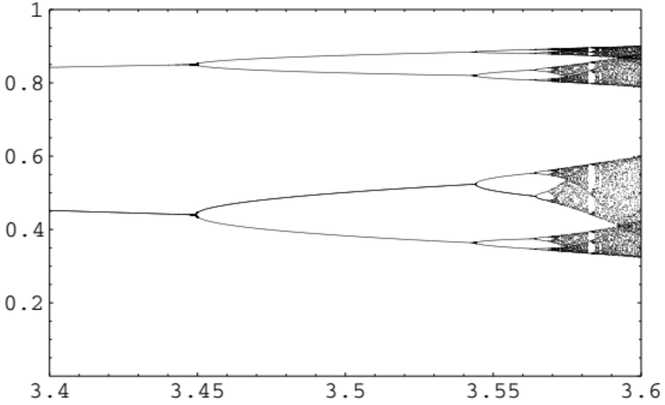
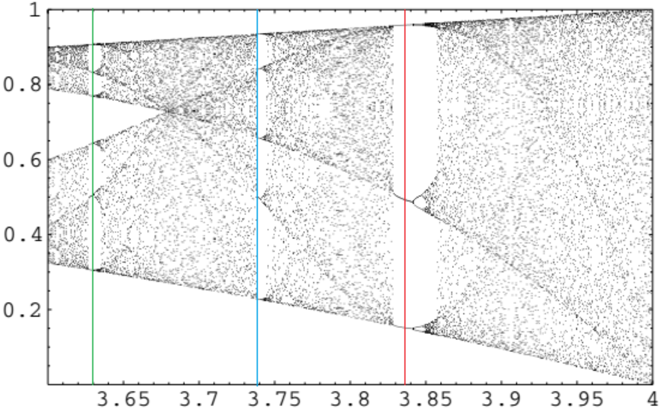


Diagrama de bifurcación para $3,6 < r < 4$



orbita periodica de periodo 6 estable

orbita periodica de periodo 5 estable

orbita periodica de periodo 3 estable

Exponente de Lyapunov de una órbita

Dados un sistema $x_{t+1} = f(x_t)$ y una condición inicial x_0, consideremos un punto cercano $y_0 = x_0 + \delta_0$
Iteramos repetidamente n veces comenzando con x_0 y y_0, y definimos:
$\delta_n = y_n - x_n$, la separación que existe después de n iteraciones.
Si $|\delta_n| = |f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)| \approx \delta_0 \left| \dfrac{\partial f^n(x_0)}{\partial x} \right| = \delta_0 e^{n\lambda}$

Exponente de Lyapunov de una órbita

Dados un sistema $x_{t+1} = f(x_t)$ y una condición inicial x_0, consideremos un punto cercano $y_0 = x_0 + \delta_0$

Iteramos repetidamente n veces comenzando con x_0 y y_0, y definimos:

$\delta_n = y_n - x_n$, la separación que existe después de n iteraciones.

Si $|\delta_n| = |f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)| \approx \delta_0 \left| \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x} \right| = \delta_0 e^{n\lambda}$

e^λ sería el factor medio por el cual la distancia entre dos puntos cercanos del espacio de fases del sistema se incrementa tras n iteraciones

Al exponente λ se le denomina **exponente de Lyapunov** y mide la tasa de divergencia exponencial de las órbitas del sistema cercanas inicialmente a x_0

Tomando logaritmos y límites cuando $\delta_0 \to 0$ y $n \to +\infty$ obtenemos:

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0)}{\partial x} \right|$$

Si el exponente de Lyapunov es positivo indica divergencia o separación de las órbitas de puntos (expansión del espacio de fases) próximos, hay **sensibilidad a las condiciones iniciales**

mientras que si es negativo implica convergencia de dichas órbitas (contracción del espacio de fases).

Retomando la ecuación logística, es exponente de Lyapunov de la órbita de periodo 2 para $3 < r < 1 + \sqrt{5}$ (es una órbita estable) es:
$\frac{1}{2} \ln \left|4 + 2r - r^2\right| < 0$ ya que $\left|4 + 2r - r^2\right| < 1$

Periodo 3 implica caos: teorema de Li-Yorke (1975)

Teorema

Sea I *un intervalo y sea* $f : I \to I$ *continua. Supongamos que existe un punto* $a \in I$ *para el cual* $b = f(a)$, $c = f^2(a) = f(f(a))$, *y* $d = f^3(a)$ *cumplen* $d \leq a < b < c$ *(ó* $d \geq a > b > c$*) Entonces*

Periodo 3 implica caos: teorema de Li-Yorke (1975)

Teorema

Sea I un intervalo y sea $f : I \to I$ continua. Supongamos que existe un punto $a \in I$ para el cual $b = f(a)$, $c = f^2(a) = f(f(a))$, y $d = f^3(a)$ cumplen $d \leq a < b < c$ (ó $d \geq a > b > c$) Entonces

1. *para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto periódico en I con período n.*

Periodo 3 implica caos: teorema de Li-Yorke (1975)

Teorema

Sea I *un intervalo y sea* $f : I \to I$ *continua. Supongamos que existe un punto* $a \in I$ *para el cual* $b = f(a)$, $c = f^2(a) = f(f(a))$, *y* $d = f^3(a)$ *cumplen* $d \leq a < b < c$ *(ó* $d \geq a > b > c$*) Entonces*

1. *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe un punto periódico en* I *con período* n.
2. *existe un conjunto no numerable* $S \subset I$ *el cual satisface las siguientes condiciones:*
    1. *Para cada* $p, q \in S$ *con* $p \neq q$

       $$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} Sup\,|f^n(p) - f^n(q)| > 0 \ y \\ \lim\limits_{n \to +\infty} inf\,|f^n(p) - f^n(q)| = 0 \end{cases}$$

    2. *Para todo* $p \in S$ *y cada punto periódico* $q \in I$

       $$\lim_{n \to +\infty} Sup\,|f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

Una caracterización del caos

Lo que dice el teorema, en realidad, es que la dinámica generada por f es muy complicada, en el sentido de que existen muchas órbitas periódicas distintas y además existe **dependencia de las condiciones iniciales**.

Una caracterización del caos

Lo que dice el teorema, en realidad, es que la dinámica generada por f es muy complicada, en el sentido de que existen muchas órbitas periódicas distintas y además existe **dependencia de las condiciones iniciales**.

Esto es, sin importar lo cercano que inicien dos puntos, en el futuro se separarán.

Una caracterización del caos

Lo que dice el teorema, en realidad, es que la dinámica generada por f es muy complicada, en el sentido de que existen muchas órbitas periódicas distintas y además existe **dependencia de las condiciones iniciales**.

Esto es, sin importar lo cercano que inicien dos puntos, en el futuro se separarán.

Por otro lado, cada órbita no periódica se mueve arbitrariamente cerca de cualquier órbita.

Una caracterización del caos

Lo que dice el teorema, en realidad, es que la dinámica generada por f es muy complicada, en el sentido de que existen muchas órbitas periódicas distintas y además existe **dependencia de las condiciones iniciales**.

Esto es, sin importar lo cercano que inicien dos puntos, en el futuro se separarán.

Por otro lado, cada órbita no periódica se mueve arbitrariamente cerca de cualquier órbita.

Finalmente, si una órbita no periódica se aproxima a una órbita periódica, después de algún tiempo se separará.

Una caracterización del caos

Lo que dice el teorema, en realidad, es que la dinámica generada por f es muy complicada, en el sentido de que existen muchas órbitas periódicas distintas y además existe **dependencia de las condiciones iniciales**.

Esto es, sin importar lo cercano que inicien dos puntos, en el futuro se separarán.

Por otro lado, cada órbita no periódica se mueve arbitrariamente cerca de cualquier órbita.

Finalmente, si una órbita no periódica se aproxima a una órbita periódica, después de algún tiempo se separará.

En esencia, el comportamiento es impredecible y muy complicado.

Teorema de Sarkovskii, 1964

Teorema

Sea el siguiente orden de los números naturales:
$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ \cdots \succ 2^n 3 \succ 2^n 5 \succ \cdots \succ 2^m \succ \cdots 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$
Si f es continua y tiene un ciclo de período n, entonces tiene un ciclo de período n' para todo entero n' tal que $n \succ n'$.

Teorema de Sarkovskii, 1964

Teorema

Sea el siguiente orden de los números naturales:
$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ \cdots \succ 2^n 3 \succ 2^n 5 \succ \cdots \succ 2^m \succ \cdots 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$
Si f es continua y tiene un ciclo de período n, entonces tiene un ciclo de período n' para todo entero n' tal que $n \succ n'$.

Si hay una órbita periódica de periodo 3 hay órbitas periódicas de todos los periodos.

Teorema de Sarkovskii, 1964

Teorema

Sea el siguiente orden de los números naturales:
$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ \cdots \succ 2^n 3 \succ 2^n 5 \succ \cdots \succ 2^m \succ \cdots 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$
Si f es continua y tiene un ciclo de período n, entonces tiene un ciclo de período n' para todo entero n' tal que $n \succ n'$.

Si hay una órbita periódica de periodo 3 hay órbitas periódicas de todos los periodos.

Periodo 3 implica caos.