Modelos de crecimiento en tiempo discreto: Solow y una reformulación de Day
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Bibliografia

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics* 70: 65-94.

Day, R. H. (1982). Irregular growth cycles. *The American Economic Review*, 72(3), 406-414.

Acemoglu, D. (2007). *Introduction to Modern Economic Growth: Parts 1-5* . Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology.

¿Cuáles son los hechos generales del crecimiento (del producto per cápita) de las economías industriales avanzadas que un modelo **bien contado** debe ser capaz de reproducir?

Hechos estilizados de Kaldor

1. las porciones del ingreso nacional recibida por el trabajo y el capital son más o menos constante durante largos períodos de tiempo;
2. la tasa de crecimiento del stock de capital es más o menos constante durante largos períodos de tiempo; la mano de obra.
3. la tasa de crecimiento de la producción por trabajador es más o menos constante durante largos períodos de tiempo;
4. la relación capital producto es mas o menos constante (K y Y crecen a la misma tasa)
5. la tasa de retorno de la inversión es más o menos constante durante largos períodos de tiempo;
6. el salario real crece con el tiempo.

2. Modelo de Solow en tiempo discreto

Ecuación Fundamental: ley de movimiento

El capital (K) se deprecia a una tasa contante $\delta \in (0, 1)$ y el capital en el período $t + 1$ es:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \tag{1}$$

Siendo I_t la inversión en el período t.

Consideramos una economía cerrada, con dos factores de producción, trabajo (L) y capital (K), que se combinan para producir un único bien compuesto (Y) -que puede ser usado para consumo o para inversión-de acuerdo a una función de producción $F(K, L)$:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \tag{2}$$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{3}$$

F verifica las propiedades usuales:

1. $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0 \quad , \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0 \quad , \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0.$
2. $F(K,0) = F(0,L) = 0; \forall K, L \in R^+.$
3. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L); \forall \lambda, K, L \in R^+$(retornos constantes a escala).
4. $\lim\limits_{K \longrightarrow 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim\limits_{L \longrightarrow 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = +\infty$

$\lim\limits_{K \longrightarrow +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim\limits_{L \longrightarrow +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$ (condiciones de INADA).

Regla de comportamiento: tasa de ahorro constante (y exógena)

$$S_t = sY_t = I_t \tag{4}$$

$$C_t = (1 - s)Y_t \tag{5}$$

Ecuación fundamental

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, L_t) \tag{6}$$

Por simplicidad asumimos que $L_t = L$ para todo t.

Definición

En el modelo básico de Solow, dado un nivel de capital inicial K_0 y L, un sendero de equilibrio para el stock de capital (K), el producto (Y), el consumo (C), los salarios (w) y la tasa de retorno del capital (R) es aquel donde:

1. $\{K_t\}_{t \in N}$ verifica la ecuación fundamental
2. $\{Y_t\}_{t \in N}$ es tal que verifica (2)
3. $\{C_t\}_{t \in N}$ es tal que verifica (5)
4. $\{w_t\}_{t \in N}$ es tal que verifica: $w_t = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L}$
5. $\{R_t\}_{t \in N}$ es tal que verifica: $R_t = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K}$

Observación

El sendero de equilibrio, la senda de crecimiento balanceado se define como una ruta completa de asignaciones y precios que especifica todo el comportamiento de la economía.

Retornos constantes a escala:

$$Y_t/L_t = y_t = \frac{1}{L_t}F(K_t, L_t) = F(\tfrac{K_t}{L_t}, 1) = f(k_t)$$

Se cumple:

$$R_t = f'(k_t) \tag{7}$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{8}$$

A partir de la ecuación fundamental:

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{(1-\delta)K_t + sF(K_t, L_t)}{L_t} = sf(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{9}$$

$$k_{t+1} = sf(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{10}$$

Ecuación fundamental para la relación capital trabajo

$$k_{t+1} = sf(k_t) + (1-\delta)k_t \tag{11}$$

La ecuación describe el comportamiento dinámico del sendero de equilibrio para el capital per cápita y a partir de este de las demás variables del modelo.

Equilibrio

El equilibrio del estado estacionario es aquel donde el ratio capital trabajo permanece constante. k^* es un equilibrio si verifica: $k_t = k^*$ para todo t.

Proposici ()

El modelo admite un único equilibrio k^* *en* $(0, +\infty)$ *y es tal que:*

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}.$$

Además el producto y el consumo per cápita son $y^* = f(k^*)$ *y* $c^* = (1-s)f(k^*)$

Demostración.

Que k^* es tal que verifica $\dfrac{f(k^*)}{k^*} = \dfrac{\delta}{s}$ es inmediato buscando soluciones constantes de la ecuación fundamental.

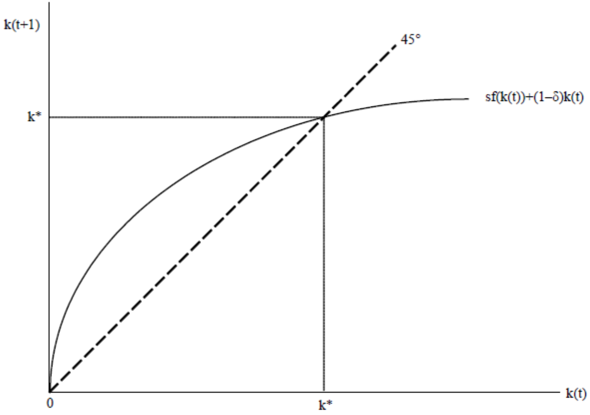
Para demostrar que existe, consideremos la función $h(k) = \dfrac{f(k)}{k}$, es continua en $(0, +\infty)$ y a partir de las propiedades de f es sencillo probar que:

$$\lim_{k \longrightarrow 0^+} \frac{f(k)}{k} = +\infty \tag{12}$$

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{f(k)}{k} = 0 \tag{13}$$

El teorema del valor medio permite asegurar que existe un $k^* \in (0, +\infty)$ tal que: $h(k^*) = \dfrac{\delta}{s}$

$\square$


k(t+1)
45°
sf(k(t))+(1–δ)k(t)
k*
0
k*
k(t)

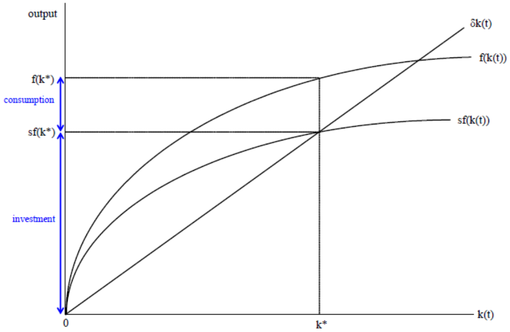
Demostración.

Unicidad:

Como la función h es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$

$$\frac{\partial h(k)}{\partial k} = \frac{\partial \left[\frac{f(k)}{k}\right]}{\partial k} = \frac{kf'(k) - f(k)}{k^2} = -\frac{w}{k^2} < 0 \tag{14}$$

el equilibrio es único. □



observar que las diferencias entre economías se traduce en diferencias en los parámetros y se van a plasmar en diferencias en los niveles de equilibrio de estado estacionario.

Transición dinámica

Sabemos que existe un único equilibrio del estado estacionario, queremos estudiar la dinámica de la transición a partir de un nivel del capital per capita inicial $k_0 > 0$ arbitrario.
¿ la economía tendera a k^*?
si es así ¿como será el comportamiento?, ¿ la dinámica nos lleva a k^*?

Proposici ()

El estado estacionario del modelo es globalmente estable y k converge monótonamente a k^*

Demostración.

Consideremos la función $g(k) = sf(k) + (1-\delta)k$, cumple:

1. $g'(k) = sf'(k) + (1-\delta) > 0$ es estrictamente creciente.
2. $g''(k) = sf''(k) < 0$ cóncava.
3. $k_{t+1} = g(k_t)$
4. existe un único k^* que verifica $g(k^*) = k^*$ $(\delta k^* = sf(k^*))$
5. $g(k) \geq k$ para todo k menor o igual a k^* y $g(k) < k$ si $k > k^*$

$\square$

continuación.

Consideremos k_0 arbitrario tal que: $0 < k_0 \leq k^*$.

$$k_1 = g(k_0) \leq g(k^*) = k^*, \text{por ser } g \text{ creciente} \Rightarrow k_1 \leq k^* \tag{15}$$

$$k_2 = g(k_1) \leq g(k^*) = k^*, \text{por ser } g \text{ creciente} \Rightarrow k_2 \leq k^* \tag{16}$$

$$k_3 = g(k_2) \leq g(k^*) = k^*, \text{por ser } g \text{ creciente} \Rightarrow k_3 \leq k^* \tag{17}$$

y por inducción:

$$k_t = g(k_{t-1}) \leq g(k^*) = k^*, \text{por ser } g \text{ creciente} \Rightarrow k_t \leq k^* \tag{18}$$

Esto es, si $k_0 \leq k^* \Rightarrow \{k_t\}_{t \in N}$ esta **acotada.** $\square$

continuación.

Consideremos ahora:

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = s\frac{f(k_t)}{k_t} - \delta \tag{19}$$

Recordando que la función $h(k) = \dfrac{f(k)}{k}$ es decreciente y quek_t es acotada se cumple:

$$s\frac{f(k_t)}{k_t} - \delta > s\frac{f(k^*)}{k^*} - \delta = s\frac{\delta}{s} - \delta = 0 \tag{20}$$

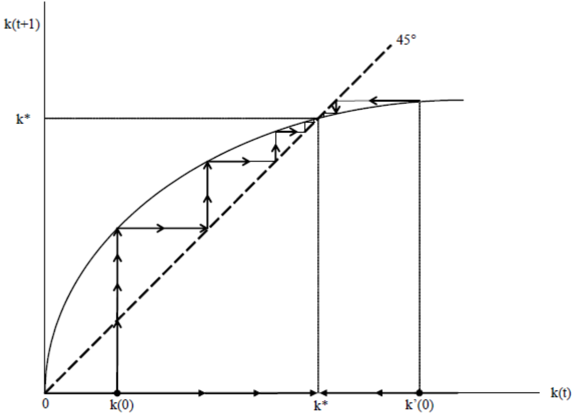
$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} \geq 0 \tag{21}$$

Por lo tanto es **creciente**

En resumen: si $k_0 \leq k^*$ la sucesión k_t es creciente y esta acotada, por lo tanto converge. La demostración es similar si $k_0 > k^*$.

□

Graficamente la transición



Sin progeso técnico, el modelo de Solow solo puede generar crecimiento del producto per capita durante la transición y a medida que se acerca a su estado estacionario lo hará a una tasa cada vez menor.

Modelo de Day

Utilizando la teoría neoclásica de la acumulación de capital (modelo de Solow) muestra como el comportamiento **Complejo** puede surgir a partir de estructuras económicas simples.

Muestra como a partir de una única ecuación en diferencia finita, de primer orden, no lineal y deterministica (sin shocks aleatorios de ningun tipo) la sola interacción de la propensión al ahorro y la productividad marginal del capital puede conducir a un patron de crecimiento errante, no muy diferentes a los observados en la realidad.

El modelo

Partiendo de los mismos supuesto del modelo de Solow, lo reformula suponiendo que la productividad se reduce por un **efecto polución.** A medida que el capital per capita aumenta, la productividad se reduce de acuerdo a un termino multiplicativo:

$$(m - k)^{\gamma} \tag{22}$$

γ es cercano a cero, de forma que para valores pequeños de k el termino es cercano a la unidad y a medida que crece k y se acerca a m cae rapidamente.

En este marco, la función de producción capital intensiva es:

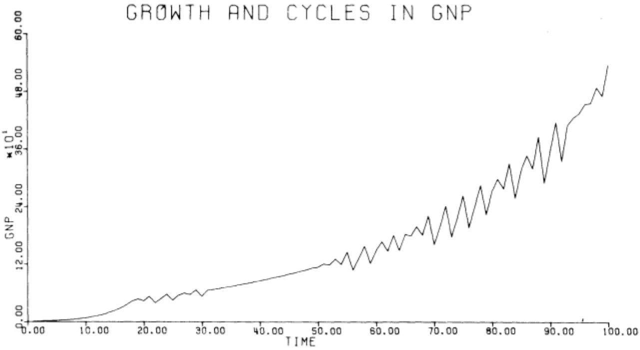
$$f(k) = Bk^{\beta}(m - k)^{\gamma} \tag{23}$$

Y **la ecuación fundamental** es:

$$k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^{\beta}(m - k_t)^{\gamma}}{1 + \lambda} \tag{24}$$

Donde ahora σ es la tasa de ahorro (propensión a ahorrar) y λ es la tasa de crecimiento de la población.

Datos simulados a partir de la ecuación anterior:

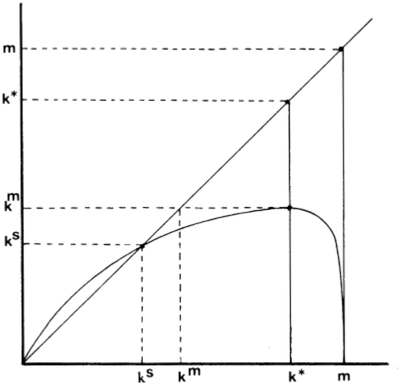


Para valores positivos de β y γ la función es concava y unimodal, con un máximo que se alcanza en: $k^* = (\frac{\beta}{\beta+\gamma})m$ y $k^m = f(k^*)$

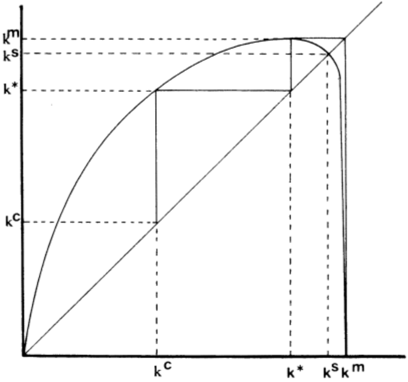
$$k^m = \frac{B\sigma}{1+\lambda}\beta^\beta\gamma^\gamma(\frac{m}{\beta+\gamma})^{\beta+\gamma} \tag{25}$$

Observar que k^m depende de B pero k^* (que lo genera) no.

Para valores de B pequeños, la dinámica que genera el modelo es similar a la del modelo de Solow, convergencia monótona el estado estacionario:



En tanto B sea tal que$k^s \leq k^m \leq k^*$ el comportamiento no cambia, pero si: para algun B se cumple: $k^* < k^m < m$ surgen los ciclos.


k^m
k^s
k^*
k^c
k^c
k^*
k^s
k^m

Implicaciones

- aproximaciones en extremo precisas de los parámetros del modelo o de las condiciones iniciales no hacen posible una predicción precisa de la evolución de las variables del modelo.
- errores de aproximación inevitables de la simulación computacional son suficientes para causar una rapida divergencia del verdadero modelo.
- es mas, no hay forma de saber si es el comportamiento cercano al verdadero u otro.
- teoría de las expectativas racionales
- posibilidades de las politicas