1 Número complejo

Sabemos que la ecuación $x^2+1=0$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$ (quiere decir que no existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -1) y para conseguir que la ecuación $x^2+1=0$ tenga raíces se introduce un número que denotaremos con i (denominada unidad imaginaria) tal que $i^2=-1$. Con esto el polinomio $x^2+1=x^2-i^2=(x-i)(x+i)$ lo que permite concluir que $i, -i$ son las raíces de la ecuación $x^2+1=0$.

Para cada par de reales (a,b) (o sea, para cada elemento de $\mathbb{R}^2$) se define el número $z=a+b\,i$ que denominaremos complejo y el conjunto de los números será denotado con $\mathbb{C}$ (de esta definición se deduce que $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$). Al real a se lo denomina la parte real del complejo $z=a+b\,i$ (la notación para esto es $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Re}(a+b\,i)=a$) y al real b se lo denomina la parte imaginaria del complejo $z=a+b\,i$ (la notación para esto es $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(a+b\,i)=b$).

Si $z=a+b\,i$, $v=p+q\,i$ con a, b, p, q números reales y, a continuación se define:

1. Igualdad: $z=v \Leftrightarrow a=p \;\; y \;\; b=q$.
   Esta definición de igualdad nos dice que dos complejos son iguales, si y sólo si, sus partes reales e imaginarias son iguales.

2. Suma: $z+v=(a+p)+(b+q)\,i$.
   Observemos que si $z=a+b\,i \leftrightarrow (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $v=p+q\,i \leftrightarrow (p,q)\in\mathbb{R}^2$ y según.la definición de suma realizada en $\mathbb{R}^2$ se deduce que $(a,b)+(p,q)=(a+p,b+q) \leftrightarrow (a+p)+(b+q)\,i=z+v$.

3. Producto: $z\,v=(a\,p-b\,q)+(a\,q+b\,p)\,i$.

Algunos comentarios luego de lo realizado anteriormente

1. Sabemos de Matemática I como representar cada par de reales en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y cuando nos interese interpretar geometricamente algún resultado hablaremos indistintamente del punto (a,b) del plano o del vector $(a,b)\leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ o del complejo $a+b\,i$.

2. Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{C}$ permiten afirmar que cualquiera sean los complejos z, v, w se cumplen las propiedades siguientes:

   (a) Conmutativa: $z+v=v+z$, $z\,v=v\,z$.

   (b) Asociativa: $(z+v)+w=z+(v+w)$, $(z\;v)\;w=z\;(v\;w)$.

   (c) Existencia de neutro. $z+0=z$, $z\,1=z$ (siendo $0=0+0\,i$ es el neutro para la suma y $1=1+0\,i$ es el neutro para el producto).

   (d) Existencia de opuesto: $z+(-z)=0$; si $z=a+b\,i$, entonces, el opuesto de z que indicamos con $-z=(-a)+(-b)\,i$.

(e) Existencia de inverso: $z\,z^{-1} = 1$ siendo $z \neq 0$; si $z = a + b\,i$, entonces, el inverso de z que indicamos con $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\,i$.

(f) Distributiva: $(z + v)\,w = z\,w + v\,w$

Resumiendo $\mathbb{C}$ es un cuerpo, ya que, se definieron las operaciones de suma, producto que permiten demostrar las propiedades anteriores.

Definición 1.1 *Si $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, el módulo o valor absoluto del complejo z es el real no negativo* $|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Observación 1.1 *El módulo o valor absoluto del complejo $z = a + b\,i$ coincide con la norma euclidiana del vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow (a, b)$; o sea, que desde el punto de vista geométrico es la longitud del segmento que une el origen con el punto $(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.*

Observación 1.2 *Lo expresado en la observación anterior implica que el módulo o valor absoluto de un complejo tiene las propiedades siguientes:*

1. $|\,z\,| \geq 0 \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

2. $|\,z\,| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

3. $|\,k\,z\,| = |\,k\,|\,|\,z\,| \ \forall\, k \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$.

4. $|\,z\,+ v\,| \leq |\,z\,| + |\,v\,| \ \forall\, z \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}$ (*propiedad triangular*).

Si $z = a+b\,i \in \mathbb{C}$ es un complejo se puede representar geometricamente como el punto (a, b) del plano o como el vector $(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces, si $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ es un complejo no nulo existe un único real φ que verifica

$$[\bigstar]\left\{\begin{array}{c} \varphi \in (-\,\pi,\,\pi] \ \ (o\ \varphi \in [0, 2\,\pi)) \\ \left.\begin{array}{l} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{|\,z\,|} \Leftrightarrow a = r\,\cos(\varphi) \\ sen\,(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{\mathrm{Im}\,(z)}{|\,z\,|} \Leftrightarrow b = r\,sen\,(\varphi) \end{array}\right\}\ \textit{siendo}\ \ r = |\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

Este real φ que verifica $[\bigstar]$ se denomina el **argumento principal** del complejo y es el ángulo que forma el vector $(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con el semieje de abcisas no negativas (o también es el ángulo que forma el vector $(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$). Lo expresado permite escribir el complejo $z = a+b\,i \neq 0$ de la forma siguiente:

$$z = a + b\,i = \underset{\substack{\text{expresión trigonométrica} \\ \text{del complejo } z = a+b\,i}}{\underset{\uparrow}{r\,(\cos(\varphi) + i\,sen\,(\varphi))}} = \underset{\substack{\text{notación polar} \\ \text{del complejo } z = a+b\,i}}{\underset{\uparrow}{r_{\varphi}}}$$

en el caso que z sea el complejo nulo el módulo es cero y se puede usar cualquier real $\varphi \in (-\pi, \pi]$ o $\varphi \in [0, 2\pi)$ como argumento.principal.

Observación 1.3 *Si* $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ *es un complejo no nulo lo anterior permite escribirlo como* $z = r\,(\cos(\varphi) + i\,sen\,(\varphi)) = r_{\varphi}$ *siendo* $r = |\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *y* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *o* $\varphi \in (-\pi, \pi]$. *Se sabe que* $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + k\,2\pi)$, $sen(\varphi) = sen(\varphi + k\,2\pi)$ $\forall\, k$ *entero y con este resultado se demuestra que* $z = r\,(\cos(\varphi) + i\,sen\,(\varphi)) = r\,(\cos(\varphi + k\,2\pi) + i\,sen\,(\varphi + k\,2\pi))$ $\forall\, k$ *entero. Esto último con la notación polar se escribe como sigue* $z = r_{\varphi} = r_{\varphi + k\,2\pi}$ $\forall\, k$ *entero. Cuando* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *o* $\varphi \in (-\pi, \pi]$ *diremos que es el ángulo (o argumento) principal del complejo* z *y en el caso de* $\varphi + k\,2\pi$ *diremos que es el ángulo (o argumento) del complejo* z*. En nuestro curso el ángulo (o argumento) principal del complejo* z *se tomará en el intervalo* $(-\pi, \pi]$ *y debemos aclarar que algunos autores toman para este ángulo el intervalo* $[0, 2\pi)$ *no cambiando con esto nunguno de los resultados que se obtengan.*

Ejercicios

1. Escriba los números complejos siguientes de la forma $a + b\,i$

$$\begin{array}{llll} a) & (2+i)^2 & e) & \dfrac{i}{2+i} \\ b) & (2+i)^4 & f) & \dfrac{1-i^3}{2+i} \\ c) & \dfrac{1}{i} & g) & 1 - i + i^3 + 2\,i^4 + 5\,i^7 \\ d) & (1-3\,i)\,(3+i) & h) & \dfrac{1}{4}\left(1-i^3\right)\left(5+3\,i^{-12}\right) \end{array}$$

2. Escriba los números complejos siguientes de la forma r_{φ} (siendo r el módulo y φ el ángulo del complejo):

$$\begin{array}{llll} a)\ 3\,i & b)\ 2\,i^3 & c)\ 1 & d)\ -1+i \\ e)\ (1-i)^3 & f)\ \dfrac{1+i}{1-i} & g)\ 1 + i\sqrt{3} & h)\ \dfrac{1}{(1-i)^2} \end{array}$$

3. Si $z = a + b\,i$, se llama conjugado del complejo al complejo $\overline{z} = a - b\,i$ ($\overline{z}$ es el simétrico de z respecto al eje $\overrightarrow{ox}$), demuestre que

$$\begin{array}{ll} a)\ |z| = |\overline{z}| & d)\ z - \overline{z} = 2\,i\,b \\ b)\ z\overline{z} = (|z|)^2 & e)\ \overline{z+v} = \overline{z} + \overline{v} \\ c)\ z + \overline{z} = 2\,a & f)\ \overline{z\,v} = \overline{z}\,\overline{v} \end{array}$$

4. Demuestre que:

   (a) $z\,v = (r\,\rho)_{\varphi+\delta}$ con $z = r_\varphi,\ v = \rho_\delta$.

   Recuerde que: $\begin{cases} \cos(b)\cos(d) - \,sen\,(b)\,sen\,(d) = \cos(b+d) \\ \cos(b)\,sen\,(d) + \cos(d)\,sen\,(b) = sen\,(b+d) \end{cases}$

   (b) $\overline{z} = r_{-\varphi}$ con $z = r_\varphi$

   (c) $z^k = \left(r^k\right)_{k\,\varphi} = r^k\left(\cos(k\,\varphi) + i\,\mathrm{sen}\,(k\,\varphi)\right)\ \forall\ k$ *entero* con $z = r_\varphi$.

Observación 1.4

De la parte c del ejercicio anterior se deduce que $(\cos(\varphi) + i\,sen\,(\varphi))^k = \cos(k\,\varphi) + i\,sen(k\,\varphi)\ \forall\ k$ *entero y este resultado se conoce como fórmula de Moivre.*

5. Utilizando lo expresado en la observación anterior, demuestre que las igualdades siguientes se cumplen $\forall\ \varphi \in \mathbb{R}$

   (a) $\cos(4\,\varphi) = \cos^4(\varphi) - 6\cos^2(\varphi)\,\mathrm{sen}^2(\varphi) + \mathrm{sen}^4(\varphi)$

   (b) $\mathrm{sen}(4\,\varphi) = 4\left[\cos^3(\varphi)\ \mathrm{sen}\,(\varphi) - \cos(\varphi)\ \mathrm{sen}^3(\varphi)\right]$

   Recuerde que: $(p+q)^4 = p^4 + 4\,p^3q + 6\,p^2q^2 + 4\,p\,q^3 + q^4$

6. Utilizando un razonamiento similar al propuesto en el ejercicio 6, determine las fórmulas que dan $\cos(2\,\varphi)\,,\ sen\,(2\,\varphi)\,,\ \cos(3\,\varphi)\,,\ sen\,(3\,\varphi)$ en función de $\cos(\varphi)\,,\ sen\,(\varphi)$ cualquiera sea $\varphi \in \mathbb{R}$

7. Determine todos los complejos $z = a + b\,i$ que cumplen $z^3\,\overline{z} = i$.

8. Determine todos los complejos $z = a + b\,i$ que cumplen $z\,\overline{z} = 4$ y $z^2 + \overline{z}^2 = -4$. Obtenga la expresión polar de los complejos obtenidos.

9. Determine las raíces de los polinomios siguientes:

   (a) $\mathbf{P}_1(x) = x^2 - 2x + 17$

   (b) $\mathbf{P}_2(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

   (c) $\mathbf{P}_3(x) = x^4 + 16$

10. (Examen 29/01/09)

    (a) Demuestre que $(1 - 7\,i)^2 - 4\,(-4 + 28\,i) = (7 - 9\,i)^2$.

    (b) Se considera el polinomio complejo $\mathbf{P} : \mathbf{P}(z) = z^2 - (1 - 7\,i)\ z + (-4 + 28\,i)$.
    Determine las raíces de $\mathbf{P}$ expresándolas en forma binómica.

    (c) Si $z_1,\ z_2$ son las raíces del polinomio $\mathbf{P}$, obtenga la forma binómica y polar de los números complejos $\dfrac{z_1}{z_2}$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$.

11. Realice un bosquejo gráfico de los conjuntos de números complejos que satisfacen cada una de las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{rl} a)\ \mid z\mid = 2 & d)\ \mid z-i\mid < \mid z+1\mid \\ b)\ \mid 2\,z-i\mid = \mid z+i\mid & e)\ \mid z+i\mid \leq \mid z-i\mid \\ c)\ z+\overline{z} \leq (\mid z\mid)^2 & f)\ \mid z+i\mid \leq \mid 2\,z-1\mid \end{array}$$

Definición 1.2 (exponencial compleja) *Si $z = a + b\,i$ es un número complejo ($a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$), entonces, al número complejo $\mathbf{e}^a\ (\cos(b) + i\,sen(b))$ se lo denomina exponencial compleja de $z = a+b\,i$ que se indicará con*

$$\exp(z) = \mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} = \mathbf{e}^a\ (\cos(b) + i\,sen(b))$$

La exponencial $\mathbf{e}^x$ cuando $x \in \mathbb{R}$ cumple la propiedad $\mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x\,\mathbf{e}^y$ para todo $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ siendo esta propiedad conocida con el nombre de ley de los exponentes y la ecuación $\mathbf{e}^x = 1$ tiene como única raiz a $x = 0$ siendo la idea de la definición de exponencial compleja que conseve estas propiedades, pero, además cuando el comlejo tenga parte imaginaria cero coincida con la exponencial real.

Teorema 1.1 *Si $z = a + b\,i$, $v = c + d\,i$, entonces, $\mathbf{e}^{z+v} = \mathbf{e}^z\mathbf{e}^v$.*

Demostración: $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} = \mathbf{e}^a\ (\cos(b) + i\,\text{sen}(b))\,;\ \mathbf{e}^v = \mathbf{e}^{c+d\,i} = \mathbf{e}^c\ (\cos(d) + i\,\text{sen}(d))$

$$\mathbf{e}^z\mathbf{e}^v = [\mathbf{e}^a\ (\cos(b) + i\,\text{sen}(b))]\,[\mathbf{e}^c\ (\cos(d) + i\,\text{sen}(d))]$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{e}^z\mathbf{e}^v = \mathbf{e}^{a+c}\,[(\cos(b)\cos(d) - \text{sen}(b)\,\text{sen}(d)) + i\ (\cos(b)\,\text{sen}(d) + \cos(d)\,\text{sen}(b))]$$

$$\textit{como} \begin{cases} \cos(b)\cos(d) - \text{sen}(b)\,\text{sen}(d) = \cos(b+d) \\ \cos(b)\,\text{sen}(d) + \cos(d)\,\text{sen}(b) = \text{sen}(b+d) \end{cases} \textit{se obtiene}$$

$$\mathbf{e}^z\mathbf{e}^v = \mathbf{e}^{a+c}\,[\cos(b+d) + i\ \text{sen}(b+d)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por definición}}}{=} \mathbf{e}^{(a+c)+(b+d)\,i} = \mathbf{e}^{z+v}$$

Teorema 1.2 $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} \neq 0\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Demostración:

$\mathbf{e}^z\,\mathbf{e}^{-z} = \mathbf{e}^{a+b\,i}\,\mathbf{e}^{-a-b\,i} = \mathbf{e}^0 = 1$ lo que implica que $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} \neq 0\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.3 $\left|\mathbf{e}^{b\,i}\right| = 1\ \forall\, b \in \mathbb{R}$.

Demostración:

$$\mathbf{e}^{b\,i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{utilizamos la definición} \\ \text{de exponencial compleja cuando } a=0}}{=} \cos(b) + i\,\text{sen}(b) \ \text{ y } \ \left|\mathbf{e}^{b\,i}\right| = \sqrt{\cos^2(b) + \text{sen}^2(b)} = 1\ \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.4 $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} = 1 \Leftrightarrow a = 0,\, b = k\,(2\,\pi)$ *siendo* k *un número entero.*

Demostración:

$\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} = 1 \Leftrightarrow \mathbf{e}^{a+b\,i} = \mathbf{e}^a\,(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}\,(b)) = 1$; de esto se concluye que

$$\begin{cases} & \mathbf{e}^a \cos(b) = 1 \\ \underset{>0}{\underset{\uparrow}{\mathbf{e}^a}}\ sen\,(b) = 0 \Leftrightarrow & \mathrm{sen}\,(b) = 0 \\ & \Updownarrow \\ & b = k\,\pi \textit{ siendo } k \textit{ un número entero} \end{cases} \quad \text{y como}$$

$$\cos(k\,\pi) = \begin{cases} 1 & si \quad k \textit{ un número entero par} \\ -1 & si \quad k \textit{ un número entero impar} \end{cases}$$ se deduce que $a = 0,\, b = k\,(2\,\pi)$ *siendo* k *un número entero.*

Corolario 1.1 $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^w \Leftrightarrow z - w = k\,(2\,\pi)$ *siendo* k *un número entero.*

Demostración: $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^w \Leftrightarrow \mathbf{e}^{z\,-\,w} = 1 \underset{\text{teorema 1.4}}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} z - w = k\,(2\,\pi)$ siendo k un número entero

Observación 1.5 *Como* $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}^{a+b\,i} \neq 0\ \forall\ z \in \mathbb{C}$ *vamos a tratar de responder lo siguiente: "Dado* $w \in \mathbb{C}$ *con* $w \neq 0$*, entonces, la ecuación* $\mathbf{e}^x = w$ *se puede resolver en* $\mathbb{C}$*; o sea, existe un* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathbf{e}^z = w$*". Como* $w \neq 0$*, entonces,* $|\mathbf{e}^x| = \mathbf{e}^{\mathrm{Re}(x)} = |w| > 0$ *y con este resultado se concluye que* $\mathrm{Re}\,(x) = \mathbf{L}\,(|w|)$*. Con este resultado la ecuación* $\mathbf{e}^x = w$ *se puede expresar de siguiente forma*

$$\mathbf{e}^{\mathrm{Re}(x)}\,(\cos(\mathrm{Im}\,(x)) + i sen\,(\mathrm{Im}\,(x))) = |w|\,((\cos(\varphi) + i\ sen\,(\varphi)))$$

siendo φ *el argumento principal del complejo* w *lo que permite concluir que* **una** *raíz de la ecuación* $\mathbf{e}^x = w$ *es* $\mathbf{L}\,(|w|) + i\varphi$.
A lo anterior se agrega la pregunta siguiente ¿$\mathbf{L}\,(|w|) + i\varphi$ *es el único complejo que es ráiz de la ecuación la ecuación* $\mathbf{e}^x = w$*?. La forma de responder la pregunta planteada es suponer que existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathbf{e}^{z_0} = w = \mathbf{e}^{\mathbf{L}(|w|)+i\varphi} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{z_0-(\mathbf{L}(|w|)+i\varphi)} = 1 \Leftrightarrow z_0 - (\mathbf{L}\,(|w|) + i\varphi) = ik\,(2\,\pi) \Leftrightarrow z_0 = \mathbf{L}\,(|w|) + i\,(\varphi + k\,(2\,\pi))$ *siendo* k *un número entero.*
Dado el complejo w *con* $w \neq 0$*, entonces, la ecuación* $\mathbf{e}^x = w \Leftrightarrow x = \mathbf{L}\,(|w|) + i\,(\varphi + k\,(2\,\pi))$ *siendo* φ *el argumento principal del complejo* w *y* k *un número entero.*

Definición 1.3 (logaritmo complejo) *Si* $w \in \mathbb{C}$ *con* $w \neq 0$*, entonces,* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathbf{e}^z = w$ *(esto significa que* $z \in \mathbb{C}$ *es raíz de la ecuación* $\mathbf{e}^x = w$*) se denomina logaritmo de* w*. Se denomina logaritmo principal de* $w \in \mathbb{C}$ *a* $z = \mathbf{L}\,(|w|) + i\varphi$ *siendo* φ *el argumento principal del complejo* w *y en este caso escribiremos* $z = \mathbf{Log}\,(w)$.

Ejercicios:

1. Escriba los números complejos siguientes de la forma $a + b\,i$

$$a)\ \mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}\,i} \quad b)\ \mathbf{e}^{-\,\pi\,i} \quad c)\ \mathbf{e}^{\frac{\pi}{4}\,i} \quad d)\ \mathbf{e}^{\frac{7\,\pi}{4}\,i} \quad e)\ i^5 + \mathbf{e}^{\pi\,i} \quad f)\ \mathbf{e}^{\frac{\pi}{6}\,i} - \mathbf{e}^{\frac{\pi}{3}\,i}$$

$$g)\ \frac{\mathbf{e}^{\frac{\pi}{6}\,i}+\mathbf{e}^{\frac{7\pi}{3}\,i}}{1-i} \quad h)\ \frac{\mathbf{e}^{\frac{5\pi}{2}\,i}+1}{\mathbf{e}^{\frac{\pi}{4}\,i}-\sqrt{2}} \quad i)\ \mathbf{Log}\,(-1) \quad j)\ \mathbf{Log}\,(i) \quad k)\ \mathbf{Log}\,(1-i) \quad l)\ \mathbf{Log}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

2. En cada uno de los casos siguientes determine los reales a, b para que se cumpla

$$a)\ a+b\,i = a\,\mathbf{e}^{b\,i} \qquad d)\ \mathbf{e}^{a+b\,i} = -1$$
$$b)\ a+b\,i = b\,\mathbf{e}^{b\,i} \qquad e)\ \mathbf{e}^{a+b\,i} = \frac{2i-3}{2+3\,i}$$

3. Si $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ y $v \in \mathbb{C}$, se define $w^v = \mathbf{e}^{v\ \mathbf{Log}(w)}$.

   (a) Calcule $(-1)^i$, i^i, i^{-i}.

   (b) Si $z \in \mathbb{C}$, demuestre que $w^{v\,+\,z} = w^v\ w^z$.

2 Sucesiones reales

2.1 Definición de sucesión, límite de una sucesión y sucesiones monótonas.

Definición 2.1.1 *Llamaremos sucesión real a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de los números reales; o sea, que el conjunto de los números naturales que vamos a considerar en esta parte es* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ *y la función* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in\,\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{n}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\,\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(n)}}$.

Observación 2.1.1 *Recordando lo visto anteriormente al real* $\varphi(n)$ *se denomina la imagen del número natural* n *por la función* φ *y al real* $\varphi(n)$ *será llamado término* n *- ésimo de de la sucesión* φ. *El real* $\varphi(n)$ *será denotado con* $\mathbf{a}_n$; *o sea, que* $\underset{\in\,\mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{n}} \xrightarrow{\varphi} \underset{\in\,\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{\varphi(n)}} = \mathbf{a}_n$ *y con* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *o simplemente* $(\mathbf{a}_n)$ *a la función* φ.

Observación 2.1.2 *Si* $\mathbb{N}_h = \{h, h+1, h+2, h+3, \ldots, n, \ldots\}$ *(con* $h \geq 2$*) y* $\varphi : \mathbb{N}_h \to \mathbb{R}$; *o sea, que esta función también será considerada una sucesión que denotaremos* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}_h} = (\mathbf{a}_n)_{n\geq h}$.

Ejemplo 2.1.1 *Algunas sucesiones* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $(\mathbf{b}_n)_{n\geq 3}$ *con* $\mathbf{b}_n = \frac{n+1}{n-2}$; $(\mathbf{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{c}_n = (-1)^{n+1}$.

Ejemplo 2.1.2 *Se considera la sucesión* $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_2 = 2$, $\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$; *o sea, que en este caso la sucesión* $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no viene dada en forma explicita sino que* $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *esta definida por recurrencia.*

1. La expresión $\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)$ permite afirmar que a partir de $n = 3$ cada término de la sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el promedio de los dos anteriores.

2. Si se expresa la igualdad $\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)$ como $\mathbf{u}_{n+2} - \mathbf{u}_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)$ con $n \geq 3$ y utilizando este último resultado se obtiene

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 & = & 2 \\
\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \\
\mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 2 \\
\mathbf{u}_5 - \mathbf{u}_4 & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_3) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{n-2} - \mathbf{u}_{n-3}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} 2 \\
\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} & = & \left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} 2
\end{array}
$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_1 = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$$

con $n \geq 3$.

Con esto se puede expresar $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forma siguiente

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = 0;\ \mathbf{u}_2 = 2 \\ \mathbf{u}_n = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] & \textit{con } n \geq 3 \end{cases}$$

Definición 2.1.2 *Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, si y sólo si, existen dos reales $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ tal que $\boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{a}_n \leq \boldsymbol{\beta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto equivale a decir que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, si y sólo si, existe un real $\boldsymbol{\gamma}$ positivo tal que $|\,\mathbf{a}_n| \leq \boldsymbol{\gamma}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con esto podemos afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, si y sólo si, $(|\,\mathbf{a}_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Ejemplo 2.1.3 *Utilizando la definición anterior se demuestra que las sucesiones siguientes son acotadas*

$(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = \dfrac{1}{n}$ $\left[0 < \mathbf{a}_n = \dfrac{1}{n} \leq 1 \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}\right]$

$(\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{b}_n = 1 + 2\,(-1)^n$ $[-1 \leq \mathbf{b}_n = 1 + 2\,(-1)^n \leq 3 \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}]$

$(\mathbf{c}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{c}_n = \dfrac{2n}{n+1}$ $\left[1 \leq \mathbf{c}_n = \dfrac{2n}{n+1} < 2 \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}\right]$

Definición 2.1.3 *Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente, si y sólo si, existe un real $\boldsymbol{\beta}$ tal que $\mathbf{a}_n \leq \boldsymbol{\beta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En forma análoga, diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada inferiormente, si y sólo si, existe un real $\boldsymbol{\alpha}$ tal que $\boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{a}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 2.1.3 *Utilizando las definciones anteriores se concluye que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, si y sólo si, $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente e inferiormente.*

Ejemplo 2.1.4 *Utilizando la definición anterior se demuestra que las sucesiones siguientes son acotadas superiormente o inferiormente*

$(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{v}_n = n\,[1 + (-1)^n]$ *es acotada inferiormente, pero, no superiormente, ya que,* $\mathbf{v}_n = 0$ *cuando n es par y* $\mathbf{v}_n = 2\,n$ *cuando n es impar*

$(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{w}_n = 4 - n$ *es acotada superiormente* $[\mathbf{w}_n = 4 - n \leq 3 \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}]$*, pero, no inferiormente.*

Observación 2.1.4 *En los dos ejemplos anteriores se ha utilizado que el conjunto $\mathbb{N}$ es acotado inferiormente, pero, no lo es superiormente. Esto significa que para número real k existe un número natural n_0 tal que $k < n_0$ (esto permite concluir que $k < n \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}$ con $n_0 \leq n$).*

Definición 2.1.4

Una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se denomina estrictamente creciente , si y sólo si, $\mathbf{a}_n < \mathbf{a}_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{a}_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *se denominará creciente.*

Definición 2.1

Una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *se denomina estrictamente decreciente, si y sólo si,* $\mathbf{a}_{n+1} < \mathbf{a}_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
Si $\mathbf{a}_{n+1} \leq \mathbf{a}_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *se denominará decreciente.*

Observación 2.1.5 *Las sucesiones estrictamente crecientes, crecientes, estrictamente decrecientes y decrecientes son llamadas sucesiones monótonas.*

Observación 2.1.6 *Toda sucesión estrictamente creciente o creciente es acotada inferiormente y cualquier sucesión estrictamente decreciente o decreciente es acotada superiormente.*

Ejemplo 2.1.5

1. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión constante; esto significa que hay un real k tal que $\mathbf{a}_n = k$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y se deduce que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (k)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, no decreciente y no creciente.

2. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se puede afirmar que es acotada inferiormente, pero, no superiormente y creciente (ya que, $\mathbf{a}_n = n < n+1 = \mathbf{a}_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$).

3. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = \dfrac{n+1}{n}$, entonces, se deduce que es acotada $\left(0 < \mathbf{a}_n = \dfrac{n+1}{n} \leq 2\ \forall\ n \in \mathbb{N}\right)$ y decreciente $\left(\mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ n < n+1}}{<} 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n} = \mathbf{a}_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}\right)$.

4. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = (-1)^{n+1}\, n$ se puede afirmar que si n es número natural par (significa que se puede escribir como $n = 2\,i$ para cada $i \in \mathbb{N}$), entonces, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{2\,i} = -2\,i$ y si n es número natural impar (o sea, que $n = 2\,i - 1$), entonces, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{2\,i-1} = 2\,i - 1$. Con lo realizado se concluye que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = (-1)^{n+1}\, n$ no es acotada superiormente ni inferiormente y además no es monótona.

5. Se considera la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_1 = 1$ y con $\mathbf{a}_n = 1.2.3\ldots(n-2)\,.\,(n-1)$ con $n = 2, 3, 4, \ldots$ entonces, $\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ definición}}{=} (n-1)\,!$ con $n \in \mathbb{N}$ (esto se denomina factorial de $n \in \mathbb{N}$). Esta sucesión es creciente, ya que, $\dfrac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}_n} \geq 1\ \ \forall\ \ n \in \mathbb{N}$ y es acotada inferiormente por ser una sucesión positiva, pero, no es acotada superiormente (eso se debe a que $n! \geq n\ \ \forall\ \ n \in \mathbb{N}$).

6. La sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ es una sucesión creciente (alcanza con plantear $\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$) y como se cumple que $2^{n-1} \geq n!\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces, se puede afirmar que $\mathbf{a}_n < 1 + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ lo que demuestra que la sucesión es acotada superiormente (con esto se demuestra que la sucesión es acotada).

7. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{2\,i} = i$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{2\,i-1} = i$ (se deduce que $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 = 1$; $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_3 = 2$; $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_5 = 3$; $\mathbf{a}_8 = \mathbf{a}_7 = 4$) y se plantea

$$\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n = \begin{cases} (i+1) - i = 1 & si \quad n = 2i; \text{ en el caso de ser } n \text{ un número par} \\ i - i = 0 & si \quad n = 2i-1; \text{ en el caso de ser } n \text{ un número impar} \end{cases}.$$

Este último resultado nos permite afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión monótona creciente acotada inferiormente (esto es por ser una sucesión positiva), pero, no es acotada superiormente (alcanza con demostrar que $\mathbf{a}_n \geq \dfrac{n}{2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$).

Definición 2.1.5 *Sucesión convergente.*

La intuición nos dice que un real $\mathbf{l}$ *es el valor al que converge la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, si y sólo si, para valores "grandes " de* n *los términos* $\mathbf{a}_n$ *se encuentran tan próximos al real* $\mathbf{l}$ *como uno quiera. Se tratará de formalizar esta idea indicando el "error "cometido a partir de un real dado. Para cada real positivo* ε *hay un número natural* n_0 *tal que cualquiera sea* $n > n_0$ *se cumple que* $\mathbf{a}_n \in (l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)$ *(significa que* $\mathbf{a}_n$ *con* $n > n_0$ *es una aproximación del real* $\mathbf{l}$ *con "error " menor que* ε*). Lo expresado nos lleva a la siguiente defínción:*

Diremos que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente, si y sólo si, hay un real* $\mathbf{l}$ *tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(este natural* n_0 *depende de* ε*) verificandose que* $|\mathbf{a}_n - \mathbf{I}| < \varepsilon$ *para todo* $n > n_0$*. El hecho de que la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al real* $\mathbf{l}$ *será denotado con*

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{l}$$

Quiere decir que

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{l} \quad con\ \mathbf{l} \in \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ tal\ que\ todo\ n \in \mathbb{N}\ que\ cumple\ n > n_0\ implica\ que\ \ |\mathbf{a}_n - \mathbf{I}| < \varepsilon$$

Observación 2.1 *Si se cumple que*

$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{l} \quad \acute{o}\ \mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{l} \quad con\ \mathbf{l} \in \mathbb{R}$$

entonces, cualquiera sea el intervalo $(I-\varepsilon, I+\varepsilon) = \mathbf{B}_{a,\varepsilon}$*(o sea, la bola en* $\mathbb{R}$ *de centro* $\mathbf{I}$ *y radio* ε*) se verifica que hay un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathbf{a}_n \in \mathbf{B}_{I,\varepsilon} = (I-\varepsilon, I+\varepsilon)$ *para todo* $n > n_0$ *(significa que a lo sumo un número finito de términos de la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no pertenecen a* $\mathbf{B}_{I,\varepsilon} = (I-\varepsilon, I+\varepsilon)$*; o sea, que los términos de la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que verifican* $|\mathbf{a}_n - \mathbf{I}| \geq \varepsilon$ *como máximo son* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_{n_0}$*).*

Se debe agregar a lo dicho que suele decirse que el real $\mathbf{I}$ *es el límite de la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

Teorema 2.1.1 *Si la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al real* $\mathbf{l}$*, entonces,* $\mathbf{l}$ *es único.*

Demostración: Supongamos que hay dos reales $\mathbf{l}$ y $\mathbf{k}$ que son el límite de la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, se plantea $|\,\mathbf{l} - \mathbf{k}\,| \leq |\,\mathbf{l} - \mathbf{a}_n| + |\,\mathbf{a}_n - \mathbf{k}| \underset{\substack{\uparrow \\ \forall\, n > n_0}}{<} 2\,\varepsilon$; este resultado es consecuencia de aplicar la definición de límite con los reales $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}$. Como $|\,\mathbf{l}-\mathbf{k}\,| < 2\,\varepsilon\;\forall\,\varepsilon > 0$ se concluye que $|\,\mathbf{l}-\mathbf{k}\,| = 0$ y se deduce que

$\mathbf{l} = \mathbf{k}$ lo que justifica la unicidad del límite.

Teorema 2.1.2 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración: Utilicemos la defінción de sucesión convergente

$$\text{la sucesión } (\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} \text{ es convergente}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{l} \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \text{ para algún real } \mathbf{l}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que todo } n \in \mathbb{N} \text{ que cumple } n > n_0 \text{ implica que } |\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| < \varepsilon$$

se toma $\varepsilon = 1$, entonces, hay un n_0 tal que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| < 1\;\forall\,n > n_0$ y este resultado nos permite afirmar

que $\mathbf{a}{-}1 < \mathbf{a}_n < \mathbf{a}{+}1\;\forall\,n > n_0$.

Consideremos los reales $\boldsymbol{\alpha} = mín\,\{\mathbf{a}{-}1, \mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots\,,\,\mathbf{a}_{n_0}\}$, $\boldsymbol{\beta} = máx\,\{\mathbf{a}{+}1, \mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots\,,\,\mathbf{a}_{n_0}\}$ lo

que permite concluir que $\boldsymbol{\alpha} \le \mathbf{a}_n \le \boldsymbol{\beta}\;\forall\,n \in \mathbb{N}$, entonces, se concluye que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es acotada.

Teorema 2.1.3 *Si* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim\limits_{x\,\to\,+\,\infty} f\,(x) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ *y la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *tal que* $f\,(n) = \mathbf{a}_n$, *entonces, la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *converge al real* $\mathbf{L}$; *o sea, que*

$$\lim_{x\,\to\,+\,\infty} f\,(x) = \lim_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim\,\mathbf{a}_n = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$$

Demostración: Utilicemos la defінción de $\lim\limits_{x\,\to\,+\,\infty} f\,(x) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ que nos dice:

para cada $\varepsilon > 0$ hay un real $k > 0$ tal que para todo $x > k = k\,(\varepsilon)$ se cumple que $|\,f\,(x) - \mathbf{L}| < \varepsilon$

y con este resultado se concluye que para cada $\varepsilon > 0$ alcanza con elegir n_0 mayor que la parte entera del

real $k = k\,(\varepsilon)$ lo que implica que si $n > n_0$, entonces, $|\mathbf{a}_n - \mathbf{L}| = |\,f\,(n) - \mathbf{L}| < \varepsilon$. Lo hecho quiere decir

que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{L} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim\,\mathbf{a}_n = \mathbf{L}$.

Teorema 2.1.4 *Si* $\lim\limits_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$, *entonces,* $\lim\limits_{n\,\to+\,\infty} (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

Demostración: Como $\lim\limits_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l}_1$, $\lim\limits_{n\,\to+\,\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{l}_2$ se deduce que para cada $\varepsilon > 0$ hay un n_0 tal

que todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple $n > n_0$ implica que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{l}_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $|\mathbf{b}_n - \mathbf{l}_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; utilizando que

$|(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) - (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2)| \leq |\mathbf{a}_n - \mathbf{l}_1| + |\mathbf{b}_n - \mathbf{l}_2| \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ resulta que $|(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) - (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2)| < \varepsilon \ \forall\, n > n_0$

con esto se concluye que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$.

Teorema 2.1.5 *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbf{l}$, *entonces,* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{l})$

Demostración: Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l}$ se deduce que para cada $\varepsilon > 0$ hay un n_0 tal que todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple $n > n_0$ implica que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| < \varepsilon$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{l}$, entonces, para cada $r > 0$ hay un $k > 0$ tal que $|f(x) - f(\mathbf{l})| < r$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $|x - \mathbf{l}| < k$.

Utilizando estas dos definiciones se cumple que para cada $r > 0$ hay un $k > 0$ y para este último real positivo hay un n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple $n > n_0$ implica que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{l}| < k$, entonces, $|f(\mathbf{a}_n) - f(\mathbf{l})| < r$.

Resumiendo lo realizado se deduce que para cada $r > 0$ hay un n_0 tal que todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple $n > n_0$ implica que $|f(\mathbf{a}_n) - f(\mathbf{l})| < r$ y esto significa que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{l})$.

1. El teorema 2.5 demostrado nos permite decidir sobre la convergencia de muchas sucesiones y esto se debe al hecho de lo ya estudiado con referencia a límite de funciones en $+\infty$.

2. Hay que observar que el recíproco del teorema demostrado no es cierto y para ello alcanza con considerar la función $f : f(x) = sen(\pi x)$ que el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} sen(\pi x)$ no existe y si se considera la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(n) = \mathbf{a}_n = sen(\pi n) = 0$ (una sucesión constante) que converge (en este caso al real cero).

3. El teorema 1.0.5 demostrado nos permite decidir sobre la convergencia de muchas sucesiones y esto se debe al hecho de lo ya estudiado con referencia a la continuidad de funciones siendo uno de los casos a utilizar el caso de las operaciones con sucesiones convergentes . Por ejemplo si se quiere demostrar el teorema siguiente:

$$\textit{hipótesis} : \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \textit{tesis} : \lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha\, \mathbf{a}_n) = \alpha\, \mathbf{l}$$

   alcanza con tomar la función $f : f(x) = \alpha\, x$ que es continua en $\mathbb{R}$ y utilizando el teorema mencionado resulta que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{l})$ como $f(\mathbf{a}_n) = \alpha\, \mathbf{a}_n$, $f(\mathbf{l}) = \alpha\, \mathbf{l}$, entonces, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha\, \mathbf{a}_n) = \alpha\, \mathbf{l}$.

Ejemplo 2.1.6 *Para obtener el límite de algunas sucesiones se utilizarán algunos resultados obtenidos en el curso de 6º año*

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\
\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{x}} = 1 \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+ & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1 \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+ \\
\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e} & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e} \\
\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{L}(x)}{x^\alpha} = 0 \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+ & \Rightarrow & \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbf{L}(n)}{n^\alpha} = 0 \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^+
\end{array}$$

Definición 2.1.6 *Sucesión divergente.*

Una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que diverge a* $+\infty$, *si y sólo si, para cada real* $M>0$ *hay un* $n_0\in\mathbb{N}$ *(el número natural* n_0 *depende del real* M*) tal que* $\mathbf{a}_n > M$ *para todo* $n>n_0$ *y esto lo indicaremos con*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n = +\infty$$

Una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que diverge a* $-\infty$,*si y sólo si, se cumple que*

$$\lim_{n\to+\infty}(-\mathbf{a}_n) \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim(-\mathbf{a}_n) = +\infty$$

Ejemplo 2.1.7 *Algunas sucesiones divergentes*

1. $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = n$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
2. $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{b}_n = n\,!$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{b}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\,! = +\infty$.
   (alcanza con recordar que $n\,!\geq n\ \forall\, n\in\mathbb{N}$)
3. $(\mathbf{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{c}_n = \mathbf{e}^n$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{c}_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{e}^n = +\infty$.
   (como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente, entonces, para real positivo $M>0$ hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n_0 > \mathbf{L}(M)$; o sea, que para todo $n>n_0$ se cumple que $n>\mathbf{L}(M)$ y esto último nos dice que $\mathbf{e}^n > M$)

Ejemplo 2.1.8 *Límite de algunas sucesiones*

1. $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{z}_n = k^n$ *con* $k\in\mathbb{R}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{z}_n = \lim\limits_{n\to+\infty}k^n = \begin{cases} +\infty & si \quad k>1 \\ 1 & si \quad k=1 \\ 0 & si \quad -1<k<1 \\ \nexists & si \quad k\leq -1\end{cases}$.
   (este resultado fue analizado en el curso de Matemática I)
2. $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{v}_n = \dfrac{k^n}{n\,!}$ *con* $k\in\mathbb{R}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{v}_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k^n}{n\,!} = 0.$
   (el resultado planteado es trivial cuando $k=0$, ya que, $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión nula).
   Vamos a estudiar el $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{v}_n$ cuando $k>0$ y para esto vamos utilizar que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente lo que implica que existe $i\in\mathbb{N}$ tal que $2\,k<i$, pero, esta desigualdad se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq i$; o sea, que $2\,k<n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq i$..
   Sabiendo que.
   $$\mathbf{v}_n = \frac{k^n}{n\,!} \underset{\substack{\uparrow\\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ con\ n\geq i}}{=} \underbrace{\frac{k}{1}\frac{k}{2}\frac{k}{3}\cdots\frac{k}{i}}_{\substack{\uparrow\\ i\ \text{factores}}}\underbrace{\frac{k}{i+1}\frac{k}{i+2}\cdots\frac{k}{n}}_{\substack{\uparrow\\ n-i\ \text{factores}}} < \underbrace{\frac{k}{1}\frac{k}{2}\frac{k}{3}\cdots\frac{k}{i}}_{\substack{\uparrow\\ i\ \text{factores}}}\ \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow\\ n-i\ \text{factores}}} = \frac{k^i}{i\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = \frac{(2\,k)^i}{i\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   y al ser $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión positiva que se encuentra acotada por la sucesión $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ que

converge a cero se concluye que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{v}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k^n}{n!} = 0$ para todo $k > 0$.
Si $k < 0$ alcanza con tomar su opuesto $-k$ que es positivo utilizando el resultado anterior en el caso de la sucesión $\dfrac{k^n}{n!} = (-1)^n \dfrac{(-k)^n}{n!}$ se demuestra lo planteado al comienzo de este ejemplo.

Observación 2.1.7 *Una sucesión puede no ser ni convergente ni divergente y para esto alcanza con considerar la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = n \, sen\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ *que vale cero si* n *es par,* n *si* $n = \dot{4} + 1$*(o sea, si* n *es* $1, 5, 9, \dots$*)* *y* $-n$ *si* $n = \dot{4} + 3$*(o sea, si* n *es* $3, 7, 11, \dots$*). Con los resultados obtenidos se deduce que la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = n \, sen\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ *no converge ni diverge a* $+\infty$ *ni a* $-\infty$.

Teorema 2.1.6 *Una sucesión monótona converge, si y sólo si, es acotada.*

Demostración: Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente se demostrará que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, si y sólo si, $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

$(\Longrightarrow)$ Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (sabemos que toda sucesión convergente es acotada; como caso particular ese teorema se cumple para las sucesiones monótonas), entonces, $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

$(\Longrightarrow)$ Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente, entonces, el conjunto de reales $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$ tiene supremo o extremo superior que se llamará $\mathbf{l}$ y utilizando la defінción de supremo o extremo superior resulta que para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\mathbf{a}_{n_0}$ tal que $\mathbf{l} - \varepsilon < \mathbf{a}_{n_0}$. Como $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente se deduce que $\mathbf{a}_{n_0} \leq \mathbf{a}_n$ para todo $n > n_0$, entonces, $\mathbf{l} - \varepsilon < \mathbf{a}_{n_0} \leq \mathbf{a}_n \leq \mathbf{l} < \mathbf{l} + \varepsilon \;\forall\, n > n_0 \Leftrightarrow |\,\mathbf{a}_n - \mathbf{l}\,| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0$ y con esto se demuestra que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge siendo su límite el supremo del conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$.

Observación 2.1.8

1. Si $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, entonces, se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \text{supremo}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada superiormente}$$

2. $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, entonces, se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \text{ínfimo}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada inferiormente}$$

Ejemplo 2.1.9

1. Toda sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_n = k$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$; o sea, una sucesión constante es convergente y su límite es el real k.

2. Se considera $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = \dfrac{n+1}{n}$ sabiendo que es decreciente, acotada inferiormente y utilizndo el último teorema se concluye que tiene límite (dicho límite se el infimo del conjunto $\{\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_3,\, \mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_n, \dots\}$. ¿Cómo determinar este real?). Utilicemos el hecho de que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ cumple que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x}\right] = 1$ y como $f(n) = \dfrac{n+1}{n} = \mathbf{a}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces, se deduce que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} 1$$

3. La sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces, esta sucesión tiene límite y no es posible utilizar lo realizado en el ejemplo anterior.
Recordemos que $\mathbf{e} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\mathbf{e}^c}{(n+1)!}$ con c tal que $0 < c < 1$ (lo que se puede decir es que $\dfrac{1}{(n+1)!} < \dfrac{\mathbf{e}^c}{(n+1)!} < \dfrac{\mathbf{e}}{(n+1)!}$) y con estos resultados se concluye que $\mathbf{e} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$.

4. La sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente $\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}_{n+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_n}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$
(la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia)
Al conocer $\mathbf{a}_1 = 1$ se obtiene $\mathbf{a}_2 = 2$; con este resultado se obtiene
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_3 &= 2\sqrt{\mathbf{a}_2} = 2\sqrt{2} = 2^{1+\frac{1}{2}} \\
\mathbf{a}_4 &= 2\sqrt{\mathbf{a}_3} = 2\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \\
\mathbf{a}_5 &= 2\sqrt{\mathbf{a}_4} = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_n &= 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}\ con\ n \geq 3
\end{aligned}$$
Con esto se puede expresar $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente $\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 1;\ \mathbf{a}_2 = 2 \\ \mathbf{a}_n = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}\ con\ n \geq 3 \end{cases}$
y para obtener $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$ vamos a utilizar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^n\right] = \frac{1}{1-k}$ para todo $k \in \mathbb{R}$ con $|\,k\,| < 1$ permitiendo concluir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = 2^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 4$.

5. La sucesión real $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es definida de la forma siguiente $\begin{cases} \mathbf{d}_1 = -2 \\ \mathbf{d}_{n+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_n + 2)}{\mathbf{d}_n + 5}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$

(la sucesión $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no viene dada en forma explicita sino que $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta definida por recurrencia) Al conocer $\mathbf{d}_1 = -2$ se obtiene $\mathbf{d}_2 = 0$; con este resultado se obtiene

$$\mathbf{d}_3 = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{d}_4 = \frac{2\left(\frac{4}{5}+2\right)}{\frac{4}{5}+5} = \frac{28}{29} = 1 - \frac{1}{29}$$

$$\mathbf{d}_5 = \frac{2\left(\frac{28}{29}+2\right)}{\frac{28}{29}+5} = \frac{172}{173} = 1 - \frac{1}{173}$$

$$\mathbf{d}_6 = \frac{2\left(\frac{172}{173}+2\right)}{\frac{172}{173}+5} = \frac{1036}{1037} = 1 - \frac{1}{1037}$$

$$\mathbf{d}_7 = \frac{2\left(\frac{1036}{1037}+2\right)}{\frac{1036}{1037}+5} = \frac{6220}{6221} = 1 - \frac{1}{6221}$$

pero, en este caso parece que no es sencillo encontrar una fórmula de modo que la sucesión $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga una expresión manejable como en el ejemplo anterior. Lo realizado permite inducir que $\mathbf{d}_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y, a continuación realizaremos una demostración de estas cuestiones que se infieren luego de calcular los siete primeros téminos.

♦Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbf{d}_n < 1$ y vamos a demostrar que $\mathbf{d}_{n+1} < 1$. Como $\mathbf{d}_{n+1} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}_n+2)}{\mathbf{d}_n+5} = \left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$ y la función $\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}$ es estrictamente creciente en su dominio se concluye que $\left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n} < \left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=1} = 1$.

♦Demostrar que $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente implica que $\mathbf{d}_n \leq \mathbf{d}_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $[\Leftrightarrow 0 \leq \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}]$ y para esto utilicemos como se encuentra definida la sucesión $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$; esto último implica que

$$\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \frac{2\,(\mathbf{d}_n+2)}{\mathbf{d}_n+5} - \mathbf{d}_n$$

$$\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \left[\frac{2\,(x+2)}{x+5} - x\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

$$\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \left[\frac{-x^2-3x+4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n}$$

y $\dfrac{-x^2-3x+4}{x+5} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumple $-4 < x < 1$, entonces, como $-4 < \mathbf{d}_n < 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se deduce que $\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \left[\dfrac{-x^2-3x+4}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n} > 0$, esto demuestra que la sucesión $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (estricta).

♦La sucesión $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces, existe un número real $\mathbf{d}$

tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{d}_n = \mathbf{d} \leq 1$ (además se cumple que $-2 = \mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_n < 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Además se cumple $\mathbf{d} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{d}_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,(\mathbf{d}_n+2)}{\mathbf{d}_n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{2\,(x+2)}{x+5}\right]_{x=\mathbf{d}_n} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}+2)}{\mathbf{d}+5}$ y la ecuación $\mathbf{d} = \dfrac{2\,(\mathbf{d}+2)}{\mathbf{d}+5}$ tiene dos raíces $(-4 \ y \ 1)$, pero, se sabe que $-2 < \mathbf{d} \leq 1$, entonces, $\mathbf{d} = \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{d_n} = 1$.

Ejercicios

1. Demuestre que las siguientes sucesiones son crecientes

   (a) $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{a}_n = n - \dfrac{1}{n}$

   (b) $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{b}_n = n^3 - 4n^2 + 10n + 7$

   Sugerencia:
   Observe que $\mathbf{b}_n = \left[x^3 - 4x^2 + 10x + 7\right]_{x=n}$ y calcule la derivada de $x^3 - 4x^2 + 10x + 7$.

   (c) $(\mathbf{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{c}_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+4}$

   (d) $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{d}_n = \dfrac{n\,!}{n^n}$

   Sugerencia:
   Observe que $(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión positiva y demuestre que $\dfrac{\mathbf{d}_{n+1}}{\mathbf{d}_n} > 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

   (e) $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{e}_n = n\,!\,(1+2^n)$

2. Demuestre que las siguientes sucesiones son decrecientes

   (a) $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{u}_n = n + \dfrac{1}{n}$

   (b) $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{v}_n = 4^{\frac{1}{n!}}$

   (c) $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{w}_n = \begin{cases} \frac{1}{i} & si \quad n = 2\,i \\ \frac{1}{i} & si \quad n = 2\,i - 1 \end{cases}$

3. Determine (si existe) el límite de las sucesiones reales siguientes:

   (a) $(\boldsymbol{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\alpha}_n = \dfrac{n^2+3}{2n^2-1}$.

   (b) $(\boldsymbol{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\beta}_n = \dfrac{4^{\frac{1}{n!}} + 2\,n}{5\,n + 3^{\frac{5}{n}}}$.

   (c) $(\boldsymbol{\gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\gamma}_n = \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n}$.

   (d) $(\boldsymbol{\delta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\delta}_n = \sqrt{n^2+4kn+5} - \sqrt{n^2+2}$ siendo k un real positivo

   (e) $(\boldsymbol{\epsilon}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\epsilon}_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{n^2+sen\,(n)}$

(f) $(\boldsymbol{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\eta}_n = \dfrac{5^n + (-2)^{n+3}}{5^{n+2} + (-2)^n}$.

(g) $(\boldsymbol{\lambda}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\lambda}_n = 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27} + \cdots + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(h) $(\boldsymbol{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\mu}_n = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$

(i) $(\boldsymbol{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\nu}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

(j) $(\boldsymbol{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\boldsymbol{\phi}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$

4. Demuestre las siguientes afirmaciones

(a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{a}_n)^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n^2 = \mathbf{l}^2$

(b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{l}_2 \in \mathbb{R}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{a}_n\, \mathbf{b}_n) = \mathbf{l}_1\, \mathbf{l}_2$.

Sugerencia: Recuerde que $p\,q = \dfrac{1}{2}\left[(p+q)^2 - \left(p^2+q^2\right)\right]$

(c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$ con $\mathbf{l} > \mathbf{0}$, entonces, existe un n_0 tal que $\mathbf{a}_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.con $n > n_0$

(d) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{l} \in \mathbb{R}$ con $\mathbf{l} > \mathbf{0}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{\mathbf{a}_n}\right] = \dfrac{1}{\mathbf{l}}$

5. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

(a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathbf{a}_n| = |\,\mathbf{a}\,|$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathbf{a}_n\,| = |\,\mathbf{a}\,|$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$.

(c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |\,\mathbf{a}_n\,| = 0$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = 0$.

(d) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\mathbf{a}_n} = \sqrt[3]{\mathbf{a}}$.

(e) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\mathbf{a}_n} = \mathbf{a}$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}^3$.

6. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 > 0 \\ \mathbf{a}_{n+1} = 4\, \sqrt[3]{\mathbf{a}_n}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ en función de $\mathbf{a}_1$

(b) Indique una expresión de $\mathbf{a}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$.

(c) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$.

7. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 0 \\ \mathbf{a}_{n+1} = \sqrt{2+\mathbf{a}_n}\ \forall\, n\in\mathbb{N} \text{ con } n\geq 1 \end{cases}$$

   (a) Demuestre que $0 \leq \mathbf{a}_n < 2\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 1$.

   (b) Demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (se sugiere estudiar el signo de $\dfrac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}$).

   (c) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$.

8. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{a}_n^3 - 2}{3}\ \forall\, n\in\mathbb{N} \text{ con } n\geq 1 \end{cases}$$

   (a) Si $-1 < \mathbf{a}_1 < 2$, demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y determinar el valor del $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$.

   (b) Si $\mathbf{a}_1 < -1$, demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = -\infty$.

   (c) Si $\mathbf{a}_1 > 2$, demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = +\infty$.

   (d) Si $\mathbf{a}_1 = -1$ o $\mathbf{a}_1 = 2$, demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión constante.

9. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{a}_n - 1}\ \forall\, n\in\mathbb{N} \text{ con } n\geq 1 \end{cases}$$

   Determinar el $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$ discutiendo según el real $\mathbf{a}_1$ (se sugiere realizar el gráfico de $\mathbf{e}^{x-1} - x$).

10. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_1 > 0$ y $\mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{(\mathbf{a}_n + 1)^2}{2}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 1$.

   (a) Demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y divergente.

   (b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}_n^2} = \dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{L}(\mathbf{a}_{n+1})}{\mathbf{L}(\mathbf{a}_n)} = 2$

11. Si $S_{\mathbb{R}}$ es el espacio vectorial de las sucesiones reales.

   (a) ¿Es $\left\{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{\mathbb{R}} \ /\ (\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ creciente}\right\}$ un subespacio vectorial de $S_{\mathbb{R}}$? Justifique la respuesta.

   (b) ¿Es $\left\{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{\mathbb{R}} \ /\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = 0\right\}$ un subespacio vectorial de $S_{\mathbb{R}}$? Justifique la respuesta.

   (c) ¿Es $\left\{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{\mathbb{R}} \ /\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \neq 0\right\}$ un subespacio vectorial de $S_{\mathbb{R}}$? Justifique la respuesta.

2.2 Sucesiones parciales, de Cauchy y contractivas

Definición 2.2.1 (sucesión de naturales estrictamente creciente) *La función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que h es estrictamente creciente (para todo $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ se cumple $h(n) < h(m)$), diremos que $(h(n))_{n \in \mathbb{N}} \underset{\substack{\uparrow \\ Notación}}{=} (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente. Observemos que el un número natural h_n es la imagen del número natural n por la función h verificandose que:*

$$(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \Longleftrightarrow h_n < h_m \; \forall \, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \quad con \; n < m$$

Observación 2.2.1

1. Si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente, entonces, se verifica que $h_n \geq n \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

   Utilicemos el método de inducción completa para justificar la afirmación realizada y como $h_1 \in \mathbb{N}$ se deduce que $h_1 \geq 1$. Supongamos que $h_i \geq i$ (hipótesis de inducción completa) y vamos a demostrar que $h_{i+1} \geq i+1$ (tesis de inducción completa). Como $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ se concluye que $h_{i+1} > h_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por la hip. de I. C.}}}{\geq} i$, entonces, resulta que $h_{i+1} > i$ y se deduce que $h_{i+1} \geq i+1$.

   Esta propiedad que poseen las sucesiones de naturales estrictamente creciente nos permiten afirmar que cualquiera sea $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ cumple con $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = +\infty$.

2. Si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$, $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ son dos sucesiones de naturales estrictamente crecientes, entonces, $(h_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente. Esto es sencillo de justificar alcanza con observar $k_n \in \mathbb{N} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ lo que permite decir $h_{k_n} \in \mathbb{N} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ y si $n < m$, entonces, $k_n < k_m$ (como $k_n \in \mathbb{N}$, $k_m \in \mathbb{N}$) se obtiene que $h_{k_n} < h_{k_m}$.

Ejemplo 2.2.1

1. Observemos las sucesiones $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $h_n = 2n$, $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $k_n = 4n - 3$, $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $l_n = 5^n$ son algunos ejemplos de sucesiones de naturales estrictamente creciente.

2. Si se considera la sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $h_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ es una sucesión estrictamente creciente, pero, $h_n \notin \mathbb{N} \; \forall \, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

3. La sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $h_n = 3 - (-1)^{n+1}$ es una sucesión de naturales, pero no es estrictamente creciente.

Definición 2.2.2 (Sucesión parcial o subsucesión) *Se considera la sucesión de reales $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y la sucesión de naturales $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ estrictamente creciente, llamaremos a la sucesión de reales $(\mathbf{a}_{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión parcial o subsucesión de $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Ejemplo 2.2.2 *Consideremos la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{a}_n = \dfrac{n+1}{n}$ *y las sucesiones de naturales* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $h_n = 2\,n$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $k_n = 4\,n-3$, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $l_n = 5^n$, *entonces, las sucesiones*

$$(\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbf{a}_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}} \quad con\ \mathbf{a}_{2\,n} = \frac{2\,n+1}{2\,n}$$

$$(\mathbf{a}_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbf{a}_{4\,n-3})_{n\in\mathbb{N}} \quad con\ \mathbf{a}_{4\,n-3} = \frac{4\,n-2}{4\,n-3}$$

$$(\mathbf{a}_{l_n})_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbf{a}_{5^n})_{n\in\mathbb{N}} \quad con\ \ \mathbf{a}_{5^n} = \frac{5^n+1}{5^n}$$

son sucesiones parciales o subsucesiones de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Teorema 2.1 *Si* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de reales que converge al real* $\mathbf{a}$, *entonces, toda subsucesión* $(\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge y lo hace al real* $\mathbf{a}$.

Demostración:

Como $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{a}$, entonces, $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que todo $n\in\mathbb{N}$ que cumple $n>n_0$ implica que $|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}|<\varepsilon$ y como $(\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quiere decir que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\uparrow$, entonces, $h_n\geq n>n_0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ que cumple $n>n_0$ y con este resultado se concluye que $|\mathbf{a}_{h_n}-\mathbf{a}|<\varepsilon\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ que cumple $n>n_0$.

Lo demostrado se puede expresar de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a}\in\mathbb{R}\\ (\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ con } h_n\in\mathbb{N}\ \forall\ n\in\mathbb{N}\\ \text{y}\ \ h_n<h_m\ \forall\ n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}\ \text{ con } n<m\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_{h_n} \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a}\in\mathbb{R}$$

Observación 2.2 *Si se considera la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = (-1)^{n+1}$ *que no es convergente y las sucesiones parciales* $(\mathbf{a}_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_{2\,n} = (-1)^{2\,n+1} = -1$, $(\mathbf{a}_{2\,n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = (-1)^{2n} = 1$ *que son convergentes (por ser sucesiones constantes) para concluir que el recíproco del teorema anterior no es cierto.*

Teorema 2.2.1 *Si* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de reales acotada, entonces, existe una subsucesión* $(\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que es convegente.*

Demostración:

Como $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales acotada se sabe que existen los reales $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ $(\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta})$ tal que

$\boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{a}_n \leq \boldsymbol{\beta} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$; .o sea, $\mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_0 = [\boldsymbol{\alpha},\, \boldsymbol{\beta}] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \boldsymbol{\alpha} \leq x \leq \boldsymbol{\beta}\} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ y además este intervalo $\mathbf{I}$t$_0$ iene amplitud $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$.

Se indicara con $\mathbb{N}_0$ al conjunto de todos los números naturales y este conjunto tiene asociado el intervalo $\mathbf{I}_0 = [\boldsymbol{\alpha},\, \boldsymbol{\beta}]$ (cuando se dice que $\mathbb{N}_0$ tiene asociado el intervalo $\mathbf{I}_0$ significa que $\mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} = \mathbb{N}_0$) y, a continuación, se divide a $\mathbf{I}_0$ en dos intervalos iguales que denotaremos de la forma siguiente $\mathbf{I}_{0,1} = \left[\boldsymbol{\alpha},\, \dfrac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2}\right]$, $\mathbf{I}_{0,2} = \left[\dfrac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2},\, \boldsymbol{\beta}\right]$ (estos dos intervalos tienen amplitud $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$).

Se consideran los conjuntos $\mathbb{N}_{0,1} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{0,1}\}$, $\mathbb{N}_{0,2} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{0,2}\}$ sabiendo que por lo menos uno de estos dos conjuntos es infinito, ya que, $\mathbb{N}_{0,1} \cup \mathbb{N}_{0,2} = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$. Se indica con $\mathbb{N}_1$ al conjunto $\mathbb{N}_{0,i}$ que cumpla que tenga la propiedad de ser infinito e $\mathbf{I}_1 = [\boldsymbol{\alpha}_1,\, \boldsymbol{\beta}_1] \subseteq \mathbf{I}_0$ al intervalo correspondiente.

Los intervalos $\mathbf{I}_{1,1} = \left[\boldsymbol{\alpha}_1,\, \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1}{2}\right]$, $\mathbf{I}_{1,2} = \left[\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1}{2},\, \boldsymbol{\beta}_1\right]$ se obtuvieron al dividir en dos partes iguales a $\mathbf{I}_1 = [\boldsymbol{\alpha}_1,\, \boldsymbol{\beta}_1]$ ($\mathbf{I}_{1,1}$, $\mathbf{I}_{1,2}$ tienen amplitud $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$) y se denomina $\mathbb{N}_{1,1} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{1,1}\}$, $\mathbb{N}_{1,2} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{1,2}\}$ alguno de estos conjuntos es infinito, ya que, $\mathbb{N}_{1,1} \cup \mathbb{N}_{1,2} = \mathbb{N}_1$. Se indica con $\mathbb{N}_2$ al conjunto $\mathbb{N}_{1,i}$ que tenga la propiedad de ser infinito e $\mathbf{I}_2 = [\boldsymbol{\alpha}_2,\, \boldsymbol{\beta}_2] \subseteq \mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{I}_0$ al intervalo correspondiente.

Se continua con el procedimiento anterior, es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$ hay un $\mathbb{N}_k$ que es infinito y tiene asociado el intervalo $\mathbf{I}_k = [\boldsymbol{\alpha}_k,\, \boldsymbol{\beta}_k]$ (este intervalo tiene amplitud $\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\alpha}_k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$) al que se procede a dividir en dos intervalos iguales $\mathbf{I}_{k,1} = \left[\boldsymbol{\alpha}_k,\, \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k}{2}\right]$, $\mathbf{I}_{k,2} = \left[\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k}{2},\, \boldsymbol{\beta}_k\right]$ tal que cada uno tiene amplitud $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha})$. Como $\mathbb{N}_{k,1} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{k,1}\}$ es el conjunto asociado $\mathbf{I}_{k,1}$, $\mathbb{N}_{k,2} = \{n \in \mathbb{N} \;/\; \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_{k,2}\}$ es el conjunto asociado $\mathbf{I}_{k,2}$ cumpliéndose que $\mathbb{N}_{k,1} \cup \mathbb{N}_{k,2} = \mathbb{N}_k$, entonces, al ser $\mathbb{N}_k$ se concluye que $\mathbb{N}_{k,1}$ o $\mathbb{N}_{k,2}$ es infinito y se indica con $\mathbb{N}_{k+1}$ al conjunto $\mathbb{N}_{k,i}$ que tenga la propiedad de ser infinito e $\mathbf{I}_{k+1} = [\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\, \boldsymbol{\beta}_{k+1}] \subseteq \mathbf{I}_k \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{I}_0$ al intervalo correspondiente.

El procedimiento descripto anteriormente permite construir dos sucesiones $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\boldsymbol{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números reales que cumplen

1. $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente y $(\boldsymbol{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

2. $\mathbf{I}_k = [\boldsymbol{\alpha}_k,\, \boldsymbol{\beta}_k] \subseteq \mathbf{I}_0 = [\boldsymbol{\alpha},\, \boldsymbol{\beta}] \;\forall\, k \in \mathbb{N}$, entonces, $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada superiormente y $(\boldsymbol{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada inferiomente.

3. $\boldsymbol{\alpha}_k < \boldsymbol{\beta}_k \;\forall\, k \in \mathbb{N}$.

4. $\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\alpha}_k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) \;\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Estas cuatro propiedades de las sucesiones $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\boldsymbol{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ permiten afirmar que existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{\alpha}_k = \lim\limits_{k \to +\infty} \boldsymbol{\beta}_k = z$ y además se sabe que asociado a cada intervalo $\mathbf{I}_k = [\boldsymbol{\alpha}_k,\, \boldsymbol{\beta}_k]$ hay un

$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \mathbf{a}_n \in \mathbf{I}_k\}$ que es infinito. Lo que sigue es la construcción de la subsucesión $\left(\mathbf{a}_{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_{h_n} \in \mathbf{I}_n$ y para esto basta con elegir $\mathbf{a}_{h_1} \in \mathbf{I}_1$ (o sea, $h_1 \in \mathbb{N}_1$), $\mathbf{a}_{h_2} \in \mathbf{I}_2$ (o sea, $h_2 \in \mathbb{N}_2$ con $h_1 < h_2$), $\mathbf{a}_{h_3} \in \mathbf{I}_3$ (o sea, $h_3 \in \mathbb{N}_3$ con $h_2 < h_3$) y de esta forma se construye cada $\mathbf{a}_{h_n} \in \mathbf{I}_n$ (o sea, $h_n \in \mathbb{N}_n$ con $h_{n-1} < h_n$) cumpliéndose además que $\boldsymbol{\alpha}_n \leq \mathbf{a}_{h_n} \leq \boldsymbol{\beta}_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ siendo $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$ lo que permite concluir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_{h_n} = z$.

Definición 2.2.3 *Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ (este natural k depende unicamente de ϵ) verificandose que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \epsilon$ para todo $n > k$ y $p > k$.*

1. Suele decirse que la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la condición de Cauchy cuando *"para cada $\epsilon > 0$ existe un $k \in N$ (este natural k depende unicamente de ϵ) verificandose que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \epsilon$ para todo $n > k$ y $p > k$"*.

2. Toda sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente es una sucesión de Cauchy y esto se demuestra utilizando la definición 2.1.5; o sea, $\mathbf{a}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, si y sólo si, $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple $n > n_0$. Utilizando que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > n_0$ y $|\mathbf{a}_p - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $p > n_0$ resulta que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| = |(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}_p)| \leq |(\mathbf{a}_n - \mathbf{a})| + |\mathbf{a} - \mathbf{a}_p| < \dfrac{\epsilon}{2}$ lo que demuestra que se cumple la condción de Cauchy.

3. Un ejemplo de sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que no cumple con la condición de Cauchy es $\mathbf{a}_n = \mathbf{L}\,(n)$, ya que, $|\mathbf{L}\,(\mathbf{e}n) - \mathbf{L}\,(n)| = \mathbf{L}\,(\mathbf{e}) = 1$ y si se toma $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbf{L}\,(\mathbf{e}n) - \mathbf{L}\,(n)| < \dfrac{1}{2}$.

4. Por último es importante que cuando se afirma que "$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy $\Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ verificandose que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \epsilon$ para todo $n > k$ y $p > k$*" no es suficiente que se cumpla la desigualdad para infinitos $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_p$; esto último se justifica con la sucesión $(\mathbf{L}\,(n))_{n\in\mathbb{N}}$ que no cumple con la condición de Cauchy, pero, $|\mathbf{L}\,(n+1) - \mathbf{L}\,(n)| = \mathbf{L}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema 2.2.2 *Toda sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple con la condición de Cauchy es acotada.*

Demostración:

$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la condición de Cauchy $\Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ verificandose que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \epsilon$ para todo $n > k$ y $p > k$, entonces para $\epsilon = 1$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{k+1}| < 1$ para todo $n > k$ y con esto se demuestra que $|\mathbf{a}_n| < 1 + |\mathbf{a}_{k+1}|$ para todo $n > k$.
Si $M = \max\{|\mathbf{a}_1|,\ |\mathbf{a}_2|,\ \ldots,\ |\mathbf{a}_k|,\ 1 + |\mathbf{a}_{k+1}|\}$ resulta que $|\mathbf{a}_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto último nos indica que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Teorema 2.2.3 *Toda sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple con la condición de Cauchy es convergente.*

Demostración:

$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la condición de Cauchy, entonces, por el teorema anterior es acotada lo que permite afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una sucesión parcial convergente; o sea, $\mathbf{a}_{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ para alguna sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$ con $h_n \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple con la condición de Cauchy, entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ verificandose que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > k$ y $p > k$; además $\mathbf{a}_{h_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a}$ implica que para cada $\epsilon > 0$ existe un $j \in \mathbb{N}$ verificandose que $|\mathbf{a}_{h_n} - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > j$ (recordemos que $h_n \geq n \; \forall \; n \in \mathbb{N}$) y tomando $m = \max\{k,\; j\}$ se cumple que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > m,\; p > m$ a lo que se agrega $|\mathbf{a}_{h_n} - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $h_n \geq n > m$.

Lo realizado permite concluir que $|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{h_n}| + |\mathbf{a}_{h_n} - \mathbf{a}| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$ para todo $n > m$ y este resultado nos dice que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que es convergente.

Definición 2.2.4 (sucesión contractiva) *Diremos que una sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es contractiva, si y sólo si, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ y se cumple $|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n| \leq \alpha\, |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.2.4 *Toda sucesión contractiva es una suceción de Cauchy.*

Demostración:

$(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contractiva; o sea, hay un real α con $0 < \alpha < 1$ tal que $|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n| \leq \alpha\, |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}| \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, entonces, $|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n| \leq \alpha\, |\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}| \leq \alpha^2\, |\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_{n-2}| \leq \alpha^3\, |\mathbf{a}_{n-2} - \mathbf{a}_{n-3}| \leq \cdots \leq \alpha^{n-1}\, |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|$.
Lo realizado permite concluir que $|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n| \leq \alpha^{n-1}\, |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y planteando

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| = \left| \sum_{i=p}^{i=n-1} (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) \right| \leq \sum_{i=p}^{i=n-1} |\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i| \underset{\forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, p \in \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{\leq}} |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1| \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha^{i-1}$$

$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| \underset{\forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, p \in \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{\leq}} |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1| \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha^{i-1} = |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1| \frac{\alpha^{p-1} - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} = \frac{|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|}{1 - \alpha} \left(\alpha^{p-1} - \alpha^{n-1} \right).$$

Como el real $\alpha \,/\, 0 < \alpha < 1$ se concluye que $\alpha^{j-1} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces, $\left(\alpha^{j-1}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y esto permite afirmar que para cada $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\alpha^{p-1} - \alpha^{n-1}\right| < \epsilon \dfrac{(1 - \alpha)}{1 + |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|} \; \forall \; n > k,\; \forall \; p > k$.

Se sabe que
$$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_p| \underset{\forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, p \in \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{\leq}} \frac{|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1|}{1 - \alpha} \left(\alpha^{p-1} - \alpha^{n-1} \right) \underset{\substack{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n > k \text{ y} \\ \forall\, p \in \mathbb{N} \text{ con } p > k}}{\underset{\uparrow}{<}} \epsilon.$$

Lo realizado demuestra que toda sucesión contractiva es una sucesión que cumple con la condición de Cauchy y además demuestra que toda sucesión contractiva es convergente.

Ejercicios

1. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, demuestre que $\mathbf{a}_{n+p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \; \forall \, p \in \mathbb{N}$.

2. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a}_{2n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, demuestre que $\mathbf{a}_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{a}$.

3. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)$ tal que $(\mathbf{a}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{a}$ y $(\mathbf{a}_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge al real $\mathbf{b}$, demuestre que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

4. Si la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ tiene dos subsucesiones convergentes ¿se puede afirmar que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge? Justifique la respuesta.

5. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ que cumple

   (a) $|\mathbf{a}_n| < 2\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

   (b) $|\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n| \leq \dfrac{1}{8}\left|\mathbf{a}_n^2 - \mathbf{a}_{n-1}^2\right|\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

   Demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge.

6. Se considera la función $f : f(x) = \dfrac{4x+3}{2x+5}$

   (a) Demuestre que $|f(u) - f(v)| \leq \dfrac{14}{25}|u - v|\ \ \forall\ u \geq 0,\ \ v \geq 0.$

   (b) Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ definida de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \geq 0 \\ \mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{4\mathbf{a}_n + 3}{2\mathbf{a}_n + 5}\ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$$

   i. Demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es una sucesión contractiva.

   ii. Obtenga $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$.

7. Se considera la función φ tal que $\varphi([a,b]) = \{\varphi(x)\ \ /\ x \in [a,b]\} \subseteq [a,b]$ y $\left|\varphi'(x)\right| \leq \alpha < 1\ \forall\ x \in [a,b]$.

   (a) Demuestre que $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \alpha|u - v|\ \ \forall\ u \in [a,b],\ \ v \in [a,b]$.

   (b) Si $\mathbf{a}_1 \in [a,b]$ y $\mathbf{a}_{n+1} = \varphi(\mathbf{a}_n)\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es una sucesión contractiva.

   (c) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, demuestre que $\mathbf{a}$ es raíz de la ecuación $\varphi(x) = x$.

8. Se considera la función $\varphi : \varphi(x) = x + 2 - 2L(x)$.

   (a) Demuestre que $\max\left\{\varphi'(x)\ \ /\ x \in [2,4]\right\} = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Demuestre que $2 \leq \varphi(x) \leq 4\ \forall\ x \in [2,4]$.

   (c) Si $\mathbf{a}_1 \in [2,4]$ y $\mathbf{a}_{n+1} = \varphi(\mathbf{a}_n)\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge y obtenga el $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$.

9. Si $\mathbf{a}_1 > 0$, $\mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{6}{\mathbf{a}_n + 5}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, demuestre que $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ converge y obtenga el $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$.

2.3 Series numéricas

Definición 2.3.1 (sucesión de sumas parciales) *Dada una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se construye una nueva sucesión $(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple*

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{a}_1,\ \mathbf{A}_2=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\ \mathbf{A}_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\dots,\ \mathbf{A}_n=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\cdots+\mathbf{a}_n$$

La sucesión de sumas parciales $(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathbf{a}_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se denomina serie generada por $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se denota con $\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathbf{a}_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 2.3.2 (serie convergente, divergente, oscilante) *Dada una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales y $\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathbf{a}_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que*

1. *$\sum\mathbf{a}_n$ converge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}_n=\mathbf{A}\in\mathbb{R}$ y el real $\mathbf{A}$ se denominara suma de la serie $\sum\mathbf{a}_n$ que se denota con $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{a}_n=\mathbf{A}$.*

2. *$\sum\mathbf{a}_n$ diverge $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}_n=+\infty$ $\left(o\ \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}_n=-\infty\right)$. En este caso no se asigna ningún valor al símbolo $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{a}_n$.*

3. *$\sum\mathbf{a}_n$ oscila $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}_n$ no existe. En este caso tampoco se asigna valor al símbolo $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{a}_n$.*

4. *Cuando $\sum\mathbf{a}_n$ diverge u oscila, diremos que $\sum\mathbf{a}_n$ no converge.*

Ejemplo 2.3.1 *Se considera la serie $\sum\mathbf{a}_n=\sum\frac{1}{2^{n-1}}$ generada por $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces,*

$$\sum\frac{1}{2^{n-1}}=\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

y se calcula $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{A}_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2.$

Este resultado nos dice que la serie $\sum\mathbf{a}_n=\sum\frac{1}{2^{n-1}}$ converge siendo la suma de la serie igual a 2; o sea, $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2.$

Ejemplo 2.3.2 *Se considera la serie $\sum\mathbf{a}_n=\sum\frac{1}{n!}$ generada por $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces,*

$$\sum\frac{1}{n!}=\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

y se calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathbf{e}$.

Este resultado nos dice que la serie $\sum \mathbf{a}_n = \sum \frac{1}{n!}$ *converge siendo la suma de la serie igual a* $\mathbf{e}$*; o sea,* $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n!} = \mathbf{e}$.

Ejemplo 2.3.3 *Se considera la serie* $\sum \mathbf{a}_n = \sum (\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n))$ *generada por* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n))_{n \in \mathbb{N}}$*, entonces,* $\sum (\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)) = \sum \mathbf{a}_n = (\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *siendo*

$$\mathbf{A}_n = \left(\underbrace{\mathbf{L}(2) - \mathbf{L}(1)}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_1}}\right) + \left(\underbrace{\mathbf{L}(3) - \mathbf{L}(2)}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_2}}\right) + \left(\underbrace{\mathbf{L}(4) - \mathbf{L}(3)}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_3}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{\mathbf{L}(n) - \mathbf{L}(n-1)}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_{n-1}}}\right) + \left(\underbrace{\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)}_{\substack{\parallel \\ \mathbf{a}_n}}\right)$$

y con esto se concluye que $\mathbf{A}_n = \mathbf{L}(n+1)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{L}(n+1) = +\infty$*, entonces,* $\sum ((\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)))$ *diverge.*

Ejemplo 2.3.4 *Se considera la serie* $\sum \mathbf{a}_n = \sum \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ *generada por* $\left(\mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$*, entonces,* $\sum \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \sum \mathbf{a}_n = (\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *siendo*

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^2}{1}\right) = \mathbf{L}(2) \\
\mathbf{a}_2 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^3}{2}\right) = \mathbf{L}(1) - \mathbf{L}(2) \\
\mathbf{a}_3 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^4}{3}\right) = \mathbf{L}(4) - \mathbf{L}(3) \\
\mathbf{a}_4 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^5}{4}\right) = \mathbf{L}(3) - \mathbf{L}(4) \\
\mathbf{a}_5 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^6}{5}\right) = \mathbf{L}(6) - \mathbf{L}(5) \\
\mathbf{a}_6 &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^7}{6}\right) = \mathbf{L}(5) - \mathbf{L}(6) \\
&\ \vdots \\
\mathbf{a}_{n-1} &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n-1}\right) = \mathbf{L}(n - 1 + (-1)^n) - \mathbf{L}(n-1) \\
\mathbf{a}_n &= \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \mathbf{L}\left(n + (-1)^{n+1}\right) - \mathbf{L}(n)
\end{aligned}$$

y con esto se concluye que $\mathbf{A}_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ es par} \\ \mathbf{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n) & si \quad n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathbf{A}_{2k} = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_{2k-1} = 0$*, entonces,* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = 0$ *y con este resultado se concluye que* $\sum \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ *converge; o sea,* $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 0$.

Ejemplo 2.3.5 *Se considera la serie* $\sum \mathbf{a}_n = \sum (-1)^{n\,+\,1}$ *generada por* $\left((-1)^{n\,+\,1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, *entonces,* $\sum (-1)^{n\,+\,1} = (\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *siendo*

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_1 = \mathbf{a}_1 = 1\\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 1 + (-1) = 0\\ \mathbf{A}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 1 + (-1) + 1 = 1\\ \mathbf{A}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0\\ \vdots\\ \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \cdots + \mathbf{a}_{n-1} = 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n\\ \mathbf{A}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \cdots + \mathbf{a}_n = 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n + (-1)^{n\,+\,1}\end{gathered}$$

y con esto se concluye que $\mathbf{A}_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ es par} \\ 1 & si \quad n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$
Como $\mathbf{A}_{2k} = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ *y* $\mathbf{A}_{2k-1} = 1\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, *entonces, no existe el* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = 0$ *y con este resultado se concluye que* $\sum (-1)^{n\,+\,1}$ *oscila.*

Observación 2.3.1 *Cuando la serie* $\sum \mathbf{a}_n$ *diverge u oscila, diremos que* $\sum \mathbf{a}_n$ *no converge; o sea, que las series* $\sum (\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n))$ *y* $\sum (-1)^{n\,+\,1}$ *son no convergentes.*

Teorema 2.3.1 (condición necesaria de convergencia) *Si* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge, entonces,* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = 0$

<u>**Demostración:**</u>

Como $\sum \mathbf{a}_n$ converge se puede afirmar que existe $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \mathbf{a}_i = \mathbf{A}$, entonces, como $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \cdots + \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{A}_n + \mathbf{a}_{n+1}$ y esto implica que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = 0$, ya que, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}$.

Observación 2.3.2 *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$ *no es cero o no existe, entonces,* $\sum \mathbf{a}_n$ *no converge.*

$$\lim_{n \to +\infty} (\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{L}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \text{ y } \lim_{n \to +\infty} \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 0$$

pero, $\sum ((\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)))$ diverge y $\sum \mathbf{L}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ converge.

Esto explica porque el teorema último es una condición necesaria.

Teorema 2.3.2 (linealidad) *Sabiendo que* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge,* $\sum \mathbf{b}_n$ *converge,* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *entonces,* $\sum (\alpha \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{b}_n)$ *converge y* $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} (\alpha \mathbf{a}_n + \beta \mathbf{b}_n) = \alpha \sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n + \beta \sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{b}_n$

<u>**Demostración:**</u>

Por hipótesis se sabe que $\sum \mathbf{a}_n$ y $\sum \mathbf{b}_n$converge, entonces, existen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \mathbf{a}_i = \mathbf{A}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{B}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \mathbf{b}_i = \mathbf{B}$.

Como $\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}(\alpha\mathbf{a}_i+\beta\mathbf{b}_i)=\alpha\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}\mathbf{a}_i+\beta\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}\mathbf{b}_i\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$ se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}(\alpha\mathbf{a}_i+\beta\mathbf{b}_i)\right)=\alpha\mathbf{A}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{B}\in\mathbb{R}$$

este último resultado nos dice que $\sum(\alpha\mathbf{a}_n+\beta\mathbf{b}_n)$ converge y $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty}(\alpha\mathbf{a}_n+\beta\mathbf{b}_n)=\alpha\mathbf{A}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{B}$; o sea, $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty}(\alpha\mathbf{a}_n+\beta\mathbf{b}_n)=\alpha\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty}\mathbf{a}_n+\beta\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty}\mathbf{b}_n$

2.3.1 Series de términos positivos

Definición 2.3.3 *Si $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales no negativos ($\Leftrightarrow\mathbf{a}_n\geq 0\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$), entonces, diremos que $\sum\mathbf{a}_n$ es una serie de términos positivos*

Teorema 2.3.3 *Si $\sum\mathbf{a}_n$ es una serie de términos positivos, entonces, $\sum\mathbf{a}_n$ es creciente.*

Demostración:

Como $\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ con $\mathbf{A}_{n+1}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\cdots+\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_{n+1}=\mathbf{A}_n+\mathbf{a}_{n+1}\geq\mathbf{A}_n\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$, ya que, $\mathbf{a}_{n+1}\geq 0$ y este resultado nos dice que $\sum\mathbf{a}_n=(\mathbf{A}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ es creciente.

Observación 2.3.3 *Si $\sum\mathbf{a}_n$ es una serie de términos positivos, entonces, $\sum\mathbf{a}_n$ converge o diverge no oscila.*

Ejemplo 2.3.6 *Se considera la serie generada por $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$; o sea, $\sum\dfrac{1}{n}$ es una serie de términos positivos lo que permite afirmar que converge o diverge. Se sabe que la función $f.f(x)=\dfrac{1}{x}$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$ y esto nos permite afirmar que $\dfrac{1}{n}=\max\left\{\dfrac{1}{x}\ /\ \dfrac{1}{n}\leq x\leq\dfrac{1}{n+1}\right\}$ para cada $n\ \in\ \mathbb{N}$, entonces, se concluye que $\mathbf{L}(n+1)-\mathbf{L}(n)=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx=\frac{1}{n}$ para cada $n\ \in\ \mathbb{N}$.*

Como $\mathbf{L}(n+1)=\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}(\mathbf{L}(i+1)-\mathbf{L}(i))\leq\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}\dfrac{1}{i}$ para cada $n\ \in\ \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{L}(n+1)=+\infty$, enoneces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}\dfrac{1}{i}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}\right)+\infty$ y este resultado nos dice que $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge.

Ejemplo 2.3.7 *Se considera la serie generada por $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$; o sea, $\sum\dfrac{1}{n^2}$ es una serie de términos positivos lo que permite afirmar que converge o diverge.*
Como $\sum\dfrac{1}{n^2}=(\mathbf{A}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ siendo

$$\mathbf{A}_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\leq 1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n}$$
$$\mathbf{A}_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\leq 2-\frac{1}{n}\leq 2$$

Lo realizado nos dice que $\sum \frac{1}{n^2} = (\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y por ser creciente se concluye que* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Observación 2.3.4 *Sabiendo que*

$$\sum \left(\mathbf{L}(n+1) - \mathbf{L}(n)\right) = \left(\sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \left(\mathbf{L}(i+1) - \mathbf{L}(i)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{L}(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}$$

$$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

lo que interesa observar es que la sucesión que genera cada una de las series menciondas en este punto permiten obtener en cada caso una suma parcial enésima muy manejable.
Estos dos casos de series se denominan teléscopicas y en general, diremos que $\sum \mathbf{a}_n$ *es una serie teléscopica, si y sólo si, existe* $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{a}_n = \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. *Se demuestra que* $\sum \mathbf{a}_n = \sum (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n+1})$ *es convergente, si y sólo si,* $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge y* $\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{z}_1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbf{z}_n$.

Teorema 2.3.4 (criterio integral) *Se considera la función* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua, decreciente, no negativa y la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$, *entonces,* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge, si y sólo si,* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge y* $\left(\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n\right) - \mathbf{a}_1 \le \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n \le .f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$

<u>**Demostración:**</u>

Se sabe que $\mathbf{a}_{n+1} = f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt \le \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le \int_n^{n+1} f(n)\,dt = f(n) = \mathbf{a}_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ por ser $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ decreciente y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\sum_{i\,=\,2}^{i\,=\,n\,+1} \mathbf{a}_i \le \int_1^{n+1} f(t)\,dt \le \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \mathbf{a}_i \Leftrightarrow \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n\,+1} \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_1 \le \int_1^{n+1} f(t)\,dt \le \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \mathbf{a}_i\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Supongamos que $\sum \mathbf{a}_n$ converge, entonces, $\sum \mathbf{a}_n$ es acotada superiormente y con este resultado se concluye que $\left(\int_1^{n+1} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente.

Además para cada $x \ge 1$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\int_1^{x} f(t)\,dt \le \int_1^{n+1} f(t)\,dt$, entonces, la función $\int_1^{x} f(t)\,dt$ es acotada superiormente en $[1, +\infty)$ y como $f(x) \ge 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ con $x \ge 1$, entonces, la función $\int_1^{x} f(t)\,dt$ es creciente lo que permite afirmar que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Supongamos que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, entonces, $\int_1^{x} f(t)\,dt \le \int_1^{+\infty} f(t)\,dt\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ *con* $x \ge 1$; o sea,

$\left(\int_1^{n+1} f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente y este resultado nos dice que $\sum \mathbf{a}_n$ es acotada superiormente, pero, además $\sum \mathbf{a}_n$ es creciente esto implica que $\sum \mathbf{a}_n$ converge.
Como se cumple

$$\sum_{i=2}^{i=n+1} \mathbf{a}_i \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{a}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n+1} \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_1 \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{a}_i \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

entonces, haciendo $n \to +\infty$ se obtiene la siguiente desigualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathbf{a}_n\right) - \mathbf{a}_1 \leq \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathbf{a}_n \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathbf{a}_n \leq .f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

Observación 2.3.5 *El criterio integral nos da una herramienta para decidir si una serie converge o diverge utilizando un instrumento ya estudiado.*

Ejemplo 2.3.8 *Estudiar si* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge o diverge para cada* $\alpha > 0$.

Como $\sum \frac{1}{n^\alpha} = \sum f(n)$ siendo $f : f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ cumpliendo esta función las hipótesis del criterio integral en $[1, +\infty)$ y $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \mathbf{L}(x) & si \quad \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & si \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 1$.

Se sabe que $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & si \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & si \quad \alpha > 1 \end{cases}$ y con este resultado se puede concluir que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge si } 0 < \alpha \leq 1 \ y \ \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1$$

Si $\alpha > 1$ resulta que

$$\frac{1}{\alpha-1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Ejemplo 2.3.9 *Estudiar si* $\sum ne^{-2(n-1)}$ *converge o diverge.*

Se sabe que $\sum ne^{-2(n-1)}$ converge o diverge por ser $\left(ne^{-2(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos y $\left(ne^{-2(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}} == (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $f.f(x) = xe^{-2(x-1)}$ continua, no negativa en $[1, +\infty)$.
Además $f'(x) = (1-2x)e^{-2(x-1)} \leq 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ con\ x \geq 1$ y esto nos dice que f es decreciente en $[1, +\infty)$; o sea, f verifica la hipótesis del criterio integral.
Como $\int_1^x te^{-2(t-1)} dt = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2(x-1)} \ \forall\, x \in \mathbb{R}\ con\ x \geq 1$ y $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x te^{-2(t-1)} dt = \frac{3}{4}$, entonces, $\int_1^{+\infty} te^{-2(t-1)} dt$ converge lo que implica que $\sum ne^{-2(n-1)}$ converge.

Lo realizado dice que $\int\limits_{1}^{+\infty} te^{-2(t-1)}dt = \dfrac{3}{4}$ y este último resultado permite afirmar que

$$\frac{3}{4} = \int\limits_{1}^{+\infty} te^{-2(t-1)}dt \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} ne^{-2(n-1)} \leq 1 + \int\limits_{1}^{+\infty} te^{-2(t-1)}dt = \frac{7}{4}$$

2.3.2 Series de términos positivos y negativos

Trataremos de analizar algún caso de serie tal que la sucesión que la genera tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, las restantes se tranforman en series de términos positivos.

Ejemplo 2.3.10 *Demuestre que* $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge (observe que la sucesión* $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *genera la serie* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ *tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos).*

Recordando que $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ $\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}$ con $x \neq 1$ y sustituyendo x por $-x$ se obtiene

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, x^{n-1} = \frac{1-(-1)^n\, x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1}\, \frac{x^n}{1+x}\ \forall\ x\ \in\ \mathbb{R}\ con\ x \neq -1$$

Como $\int\limits_{0}^{1} \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, x^{n-1}\right) dx = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\, \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$

y $\int\limits_{0}^{1} \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, x^{n-1}\right) dx = \int\limits_{0}^{1} \dfrac{1}{1+x}dx + (-1)^{n+1} \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x}dx$, entonces, se obtiene

$$\sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \mathbf{L}\,(2) + (-1)^{n+1} \int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x}dx\ \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$$

Además $0 \leq \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x}dx \leq \int\limits_{0}^{1} x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$ $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$ y este último resultado nos permite afirmar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x}dx = 0$, entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathbf{L}\,(2) + (-1)^{n+1} \int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^n}{1+x}dx\right) = \mathbf{L}\,(2)\,.$

Con el resultado obtenido se concluye que $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge y $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \mathbf{L}\,(2)\,.$

Se consideran las sucesiones reales $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\,,\ (\mathbf{b}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}\,,\ (\mathbf{c}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ que cumplen $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}_n \leq \mathbf{c}_n$ $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$ y las series $\sum \mathbf{a}_n$, $\sum \mathbf{c}_n$ son convergentes, entonces, $\sum \mathbf{b}_n$ converge y $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n \leq \sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{b}_n \leq \sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{c}_n$.

Demostración:

Como $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}_n \leq \mathbf{c}_n$ $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$, entonces, $0 \leq \mathbf{b}_n - \mathbf{a}_n \leq \mathbf{c}_n - \mathbf{a}_n$ $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$ y esto último nos permite decir

que las sucesiones $\sum(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)$, $\sum(\mathbf{c}_n-\mathbf{a}_n)$ son crecientes.
Utilizando que la hipótesis $\sum \mathbf{a}_n$, $\sum \mathbf{c}_n$ son convergentes se concluye que $\sum(\mathbf{c}_n-\mathbf{a}_n)$ es convergente y que $\sum_{i=1}^{i=n}(\mathbf{c}_i-\mathbf{a}_i) \leq \sum_{n=1}^{n=+\infty}(\mathbf{c}_n-\mathbf{a}_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\sum_{i=1}^{i=n}(\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i) \leq \sum_{i=1}^{i=n}(\mathbf{c}_i-\mathbf{a}_i) \leq \sum_{n=1}^{n=+\infty}(\mathbf{c}_n-\mathbf{a}_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Se ha demostrado que la sucesión $\sum(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)$ es creciente y acotada superiormente (esto es consecuencia de la última desigualdad que nos dice que el real $\sum_{n=1}^{n=+\infty}(\mathbf{c}_n-\mathbf{a}_n)$ es cota superior de la sucesión $\sum(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)$) concluyendo que $\sum(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)$ converge.
Además $\mathbf{b}_n=(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)+\mathbf{a}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y se sabe que $\sum \mathbf{a}_n$ converge, $\sum(\mathbf{b}_n-\mathbf{a}_n)$ converge, entonces, $\sum \mathbf{b}_n$ converge.
Utilizando que $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}_n \leq \mathbf{c}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se concluye $\sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{a}_i \leq \sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{b}_i \leq \sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{c}_i\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y que $\sum \mathbf{a}_n$, $\sum \mathbf{b}_n$, $\sum \mathbf{c}_n$ son convergentes se deduce que

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{a}_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{a}_i \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{b}_i}_{\substack{\| \\ \sum_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{b}_n}} \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\mathbf{c}_i = \sum_{n=1}^{n=+\infty}\mathbf{b}_n$$

Ejemplo 2.3.11 *Demuestre que* $\sum \frac{sen\,(n)}{n^2}$ *converge (observe que la sucesión* $\left(\frac{sen\,(n)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *genera la serie* $\sum \frac{sen\,(n)}{n^2}$ *tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos).*

Se sabe que $-1 \leq \cos(n) \leq 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y esto nos dice que $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ lo que implica la convergencia de $\sum \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$, ya que, las series $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum -\frac{1}{n^2}$ son convergentes.
Lo utilizado para la demostración de la convergencia de la serie $\sum \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$ es el teorema de convergencia dominada siendo $\mathbf{a}_n=-\frac{1}{n^2}$, $\mathbf{b}_n=\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$, $\mathbf{c}_n=\frac{1}{n^2}$.

Observación 2.3.6
La serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente cumple que la sucesión* $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *que genera esta serie cumple que cuando n es impar el término correspondiente es positivo y cuando n es par el término correspondiente es negativo.*
En caso de querer utilizar el criterio de convergencia dominada para justificar la convergencia de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *se observa que* $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *siendo las series* $\sum \frac{1}{n}$, $\sum -\frac{1}{n}$ *divergentes.*

Observación 2.3.7
La serie $\sum \dfrac{sen\,(n)}{n^2} = \left(\sum\limits_{i\,=\,1}^{i\,=\,n} \dfrac{sen\,(i)}{i^2}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \left(sen\,(1) + \dfrac{sen\,(2)}{4} + \dfrac{sen\,(3)}{9} + \dfrac{sen\,(4)}{16} + \cdots + \dfrac{sen\,(n)}{n^2}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *se demostro en el ejemplo 2.3.11 que es convergente y la sucesión* $\left(\dfrac{sen\,(n)}{n^2}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *tiene infintos términos positivos y negativos.*
Se sabe que

$$sen\,(x) > 0 \text{ para todo } x \ / \ 2\,(k-1)\,\pi < x < (2k-1)\,\pi \ \forall \ k \ \in \ \mathbb{N}$$

$$sen\,(x) < 0 \text{ para todo } x \ / \ (2k-1)\,\pi < x < 2k\pi \ \forall \ k \ \in \ \mathbb{N}$$

por lo tanto la sucesión $\left(\dfrac{sen\,(n)}{n^2}\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *tiene tres términos positivos y tres negativos en forma alternada.*

Corolario 2.3.1 *Se sabe que* $\sum |\mathbf{a}_n|$ *es convergente (se dice que* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge absolutamente), entonces,* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge y se cumple* $\left|\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n\right| \leq \sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} |\mathbf{a}_n|$.

Demostración:
La demostración de este torema es una aplicación del criterio de convergencia dominada, ya que, se cumple $-|\mathbf{a}_n| \leq \mathbf{a}_n \leq |\mathbf{a}_n| \ \forall \ n \ \in \ \mathbb{N}$ y como $\sum |\mathbf{a}_n|$ converge resulta que $\sum -|\mathbf{a}_n|$ converge, entonces, $\sum \mathbf{a}_n$ converge.
Lo demostrado permite concluir que

$$\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} -|\mathbf{a}_n| \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} |\mathbf{a}_n| \Leftrightarrow -\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} |\mathbf{a}_n| \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} |\mathbf{a}_n|$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n\right| \leq \sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} |\mathbf{a}_n|$$

Observación 2.3.8 *Cuando* $\sum |\mathbf{a}_n|$ *diverge y* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge, diremos que* $\sum \mathbf{a}_n$ *converge condicionalmente. Un ejemplo es la serie* $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *que converge, pero,* $\sum \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum \dfrac{1}{n}$ *diverge.*

Ejercicios

1. Determine

   (a) La sucesión $(\mathbf{A}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \sum \mathbf{a}_n$.

   (b) Indique si $\sum \mathbf{a}_n$ converge o no y, cuando corresponda, determine $\sum\limits_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n$.

   para cada una de las sucesiones $(\mathbf{a}_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ que se indica a continuación

   (a) $\mathbf{a}_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)^2\, n^2}$

   (b) $\mathbf{a}_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

   (c) $\mathbf{a}_n = \cos\,(n+1) - \cos\,(n)$

(d) $\mathbf{a}_n = \mathbf{L}\left(\dfrac{\sqrt[n+2]{n+2}}{\sqrt[n+1]{n+1}}\right)$

(e) $\mathbf{a}_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3^{n+1}}\right)\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3^{n+1}}\right)$
(recuerde que $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2\cos(a)\text{sen}(b)\ \forall\ a \in \mathbb{R},\ \forall\ b \in \mathbb{R}$).

2. Demuestre que

(a) $Arctg\,(x) - Arctg\,(a) = Arctg\left(\dfrac{x-a}{1+ax}\right)\ \forall\ a \in \mathbb{R}^+,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+$

(b) $\sum Arctg\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$ converge y determine $\displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} Arctg\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$

3. Se considera la serie $\sum \mathbf{a}_n = (\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\mathbf{A}_n = \dfrac{2n^2}{(n+1)(n+2)}$

(a) Indique si $\sum \mathbf{a}_n$ converge o no y, si corresponde, determine $\displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \mathbf{a}_n$.

(b) Determine la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Demuestre que

(a) $\sum \left(\dfrac{1+\mathbf{L}(n)}{n^2}\right)$ converge (se sugiere.utilizar el criterio integral)

(b) $2 \leq \displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \left(\frac{1+\mathbf{L}(n)}{n^2}\right) \leq 3$

5. Demuestre que $\sum n\mathbf{e}^{\frac{1-n^2}{8}}$ converge y $4\mathbf{e}^{-\frac{1}{8}} \leq \displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} n\mathbf{e}^{-\frac{n^2}{8}} \leq 5\mathbf{e}^{-\frac{1}{8}}$.

6. Demuestre que la serie $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n}$ converge y obtenga $\displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$.

7. Sabiendo que $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \dfrac{1}{1+x^2} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, demuestre que la serie $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ converge y obtenga $\displaystyle\sum_{n\,=\,1}^{n\,=\,+\,\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

8. Demuestre que la serie $\sum \dfrac{1}{2n-1}$ diverge (se sugiere.utilizar que $2n-1 < 3n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$)

9. Demuestre que

(a) $\sum \dfrac{1}{\left(2n+(-1)^{n-1}\right)2n}$ converge.

(b) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^{n-1}}$ converge
(se sugiere.expresar $\dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^{n-1}} = \left(\dfrac{(-1)^n}{2n+(-1)^{n-1}} - \dfrac{(-1)^n}{2n}\right) + \dfrac{(-1)^n}{2n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$)

2.4 Sucesiones en $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$

Definición 2.4.1 *Llamaremos sucesión en* $\mathbb{R}^d$ *a toda función que su dominio es el conjunto de los números naturales y que su codominio es el conjunto de las d - uplas de números reales; o sea, la función* $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$ *es una sucesión lo que implica que* $\underset{\in \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{n}} \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \underset{\in \mathbb{R}^d}{\underset{\uparrow}{\boldsymbol{\varphi}(n)}}$.

Observación 2.4.1 *Se sabe que* $\boldsymbol{\varphi}(n) \in \mathbb{R}^d$ *es la imagen del número natural* n *por la función* $\boldsymbol{\varphi}$ *y a la d-upla de reales* $\boldsymbol{\varphi}(n)$ *se la denomina término n - ésimo de de la sucesión* $\boldsymbol{\varphi}$. *La d-upla de reales* $\boldsymbol{\varphi}(n)$ *será denotado con* $\mathbf{a}_n$; *o sea, que* $\underset{\in \mathbb{N}}{\underset{\uparrow}{n}} \xrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \underset{\in \mathbb{R}^d}{\underset{\uparrow}{\boldsymbol{\varphi}(n)}} = \mathbf{a}_n$ *y con* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *o simplemente* $(\mathbf{a}_n)$ *a la función* $\boldsymbol{\varphi}$.

Observación 2.4.2 *Si* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}^d$ *implica que cada término* $\mathbf{a}_n$ *es un elemento de* $\mathbb{R}^d$ *y esto significa que cada* $\mathbf{a}_n$ *se puede escribir como combinación lineal de la base canónica. Lo expresado permite concluir que* $\mathbf{a}_n = \sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi_i(\mathbf{a}_n)\, \mathbf{e}_i$ *siendo* $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}, (\pi_2(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (\pi_d(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *sucesiones reales que se denominan componentes* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Esto nos dice que dar una sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *equivale a dar* d *sucesiones reales* $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}, (\pi_2(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (\pi_d(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *que cumplen* $\mathbf{a}_n = \sum\limits_{i=1}^{i=d} \pi_i(\mathbf{a}_n)\, \mathbf{e}_i \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.4.3 *Lo expresado en la observación anterior permite afirmar que si* $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}^2$, *entonces, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se puede escribir* $\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$ *o* $\mathbf{u}_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ *siendo* $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sucesiones de números reales. Si* $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}^3$, *entonces, cada* $\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y}_n \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix}$ *o* $\mathbf{w}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_n, & \mathbf{y}_n, & \mathbf{z}_n \end{pmatrix}$ *siendo* $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *las sucesiones reales componentes de* $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Definición 2.4.2 *Diremos que la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *es acotada, si y sólo si, existe un real* $\mathbf{M} > 0$ *tal que* $\|\mathbf{a}_n\| \leq \mathbf{M}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.1 *Se considera* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^d$, *entonces,* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es acotada, si y sólo si, cada sucesión componente de* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es acotada.*

Demostración: Utilice la siguiente desigualdad $|x_i| \leq \|x\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{i=d} |x_i|$ y la definición sucesión acotada en el caso de ser en $\mathbb{R}^d$ como en el caso de ser en $\mathbb{R}$.

Definición 2.4.3 *Sucesión convergente.*

Diremos que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *es convergente, si y sólo si, existe* $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$ *tal que para cada* $\varepsilon>0$ *existe un* $n_0\in\mathbb{N}$ *(este natural* n_0 *depende de* ε*) verificandose que* $\|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|<\varepsilon$ *para todo* $n>n_0$*. Cuando la sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al vector* $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$ *esto será denotado con*

$$\mathbf{a} \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n$$

Quiere decir que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \textit{ tal que todo } n\in\mathbb{N} \textit{ que cumple } n>n_0 \textit{ implica que } \|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|<\varepsilon$$

1. Si se cumple que
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$$
suele decirse que que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ converge al vector $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$ o su límite es $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$.

2. Si se cumple que
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$$
entonces, cualquiera sea la bola abierta $\mathbf{B}_{\mathbf{a},\varepsilon}$(o sea, la bola en $\mathbb{R}^d$ de centro $\mathbf{a}$ y radio ε) se verifica que hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\mathbf{a}_n\in\mathbf{B}_{\mathbf{a},\varepsilon}$ para todo $n>n_0$ (significa que a lo sumo un número finito de términos de la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no pertenecen a $\mathbf{B}_{\mathbf{a},\varepsilon}$; o sea, que los términos de la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican $\|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|\geq\varepsilon$ como máximo son $\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\ldots,\mathbf{a}_{n_0}$).

3. De la definción de sucesión convergente se deduce que:
$$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}^d \text{ es convergente}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \lim \mathbf{a}_n \underset{\substack{\uparrow\\ Notación}}{=} \mathbf{a} \text{ para algún } \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \text{ tal que todo } n\in\mathbb{N} \text{ que cumple } n>n_0 \text{ implica que } \|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|<\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{la sucesión } (\|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de números reales no negativos converge al real cero}$$

Teorema 2.4.2 *Una sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *es convergente, si y sólo si, cada una de las sucesiones reales* $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}},\ (\pi_2(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}},\ldots,(\pi_d(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *componentes de* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son convergentes y se cumple que*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n=\begin{pmatrix}\lim\limits_{n\to+\infty}\pi_1(\mathbf{a}_n)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\pi_2(\mathbf{a}_n)\\ \vdots\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\pi_d(\mathbf{a}_n)\end{pmatrix}$$

Demostración: Se sugiere utilizar la desigualdad $|x_i| \leq \|x\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i=1}^{i=d} |x_i|$

[$\Rightarrow$] Sabiendo que $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ es convergente para algún $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ se cumple que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ verificandose que $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{a}_n) - a_1 \\ \pi_2(\mathbf{a}_n) - a_2 \\ \vdots \\ \pi_d(\mathbf{a}_n) - a_d \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ y si se utiliza la desigualdad propuesta se obtiene $|\pi_i(\mathbf{a}_n) - a_i| \leq \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{a}_n) - a_1 \\ \pi_2(\mathbf{a}_n) - a_2 \\ \vdots \\ \pi_d(\mathbf{a}_n) - a_d \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ lo que implica $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_i(\mathbf{a}_n) = a_i$ (esto quiere decir que $(\pi_i(\mathbf{a}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y que su límite es el real a_i).

[$\Leftarrow$] Sabiendo que $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_1(\mathbf{a}_n) = a_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_2(\mathbf{a}_n) = a_2 \in \mathbb{R}, \ldots,$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_d(\mathbf{a}_n) = a_d \in \mathbb{R}$ se puede afirma que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_{i,0} \in \mathbb{N}$ verificandose que $|\pi_i(\mathbf{a}_n) - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{d}$ para todo $n > n_{i,0}$ y utilizando la desigualdad propuesta

$$\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{a}_n) - a_1 \\ \pi_2(\mathbf{a}_n) - a_2 \\ \vdots \\ \pi_d(\mathbf{a}_n) - a_d \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i=1}^{i=d} |\pi_i(\mathbf{a}_n) - a_i| < \sum_{i=1}^{i=d} \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon \;\; \forall \;\; n > n_0 = \max\left\{n_{1,0}, n_{2,0}, \ldots, n_{d,0}\right\}$$

Observación 2.4.4 *Del teorema anterior se deduce* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *no es convergente, si y sólo si, alguna de las sucesiones componentes de* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *no es convergente.*

1. Toda sucesión convergente tiene límite único.

2. Toda sucesión convergente es una sucesión acotada.

Observación 2.4.5 *Utilizando el teorema 2.4.2 y lo estudiado en sucesiones reales se demuestran los teoremas propuestos.*

2.4.1 Sucesiones parciales en $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$

Definición 2.4.4 *Sucesión parcial o subsucesión.*
Se considera la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *y la sucesión de naturales* $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$ *estrictamente creciente, llamaremos a la sucesión* $(\mathbf{a}_{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^d$ *sucesión parcial o subsucesión de* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observación 2.4.6 *Utilizando lo realizado en sucesiones reales y la relación que existe entre al convergencia de la sucesión en* $\mathbb{R}^d$ *con sus componentes se demuestra el teorema siguiente:*

$$\textit{hipótesis} \;:\; \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \\ (\mathbf{a}_{h_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathbb{R}^d \textit{ sucesión parcial o subsucesión de } (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

$$\textit{tesis} \;:\; \lim \mathbf{a}_{h_n} = \mathbf{a}$$

Teorema 2.4.3 *Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$ acotada, entonces, existe una sucesión parcial o subsucesión de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente.*

Demostración: Como $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$ acotada,entonces, cada una de las sucesiones reales $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}, \ (\pi_2(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \ (\pi_d(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ componentes de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas.

Como $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real acotada, entonces, hay una subsucesión $\left(\pi_1\left(\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\pi_1(\mathbf{a}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente y con esto se tiene que $\left(\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión parcial de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con primer componente convergente.

A continuación, se considera la segunda sucesión componente de $\left(\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ que es $\left(\pi_2\left(\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y esta última es una sucesión real acotada, entonces, tiene una subsucesión convergente que se indicará con $\left(\pi_2\left(\mathbf{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1(\boldsymbol{\lambda}_2(n))}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\pi_2\left(\mathbf{a}_{(\boldsymbol{\lambda}_1\circ\boldsymbol{\lambda}_2)(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y con lo hecho se obtuvo una subsucesión $\left(\mathbf{a}_{(\boldsymbol{\lambda}_1\circ\boldsymbol{\lambda}_2)(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene las dos primeras componentes convergentes; o sea, $\left(\pi_1\left(\mathbf{a}_{(\boldsymbol{\lambda}_1\circ\boldsymbol{\lambda}_2)(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\pi_2\left(\mathbf{a}_{(\boldsymbol{\lambda}_1\circ\boldsymbol{\lambda}_2)(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales convergentes.

Repitiendo lo realizado anteriormente se observa que se construyen d sucesiones de naturales estrictamente creciente que se denominaron $(\boldsymbol{\lambda}_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, (\boldsymbol{\lambda}_2(n))_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\boldsymbol{\lambda}_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$ y llamando $h_n = (\boldsymbol{\lambda}_1\circ\boldsymbol{\lambda}_2\circ\cdots\circ\boldsymbol{\lambda}_d)(n)$ resulta que $(\mathbf{a}_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión parcial de $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Ejercicios.

1. Se consideran las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad \text{siendo } \mathbf{a}_n = \left(\frac{1}{2^n}, 1-\mathbf{e}^{-n}\right)\\
(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad \text{siendo } \mathbf{b}_n = \left(1+\frac{1}{n}, \mathbf{e}^{n}\right)\\
(\mathbf{c}_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad \text{siendo } \mathbf{c}_n = \left(\frac{1}{n}, 1+(-1)^n\right)\\
(\mathbf{d}_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad \text{siendo } \mathbf{d}_n = \left((-1)^n, \frac{3n^2+1}{n^2+4}\right)
\end{aligned}$$

   (a) Indicar si las sucesiones anteriores son convergentes y, cuando corresponda, determinar su límite.
   (b) Indicar cuales de las sucesiones anteriores están acotadas.
   (c) Indicar cuales de las sucesiones anteriores tienen alguna sucesión parcial convergente.

2. Indique una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^3$ que sea convergente y otra sucesión $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea convergente.

3. Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$, demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n = \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d, \text{ si y sólo si, } \lim_{n\to+\infty}\langle\mathbf{a}_n, z\rangle = \langle\mathbf{a}, z\rangle \ \forall\, z\in\mathbb{R}^d.$$

4. Si $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{R}^d$ con $w\neq\mathbf{0}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{z}_n w = v\in\mathbb{R}^d$, demuestre que existe un real η tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{z}_n = \eta$ y $v=\eta\, w$.

5. Si $\boldsymbol{\varphi}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ es una función continua y $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{a}_n = \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$,

6. Se considera la sucesión real $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\mathbf{a}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{a}_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al real $\mathbf{L}$, demuestre que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{L}$.

7. Si la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ tiene dos subsucesiones convergentes ¿se puede afirmar que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Justifique la respuesta.

8. Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$.

   (a) Si $(\mathbf{a}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{a}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes ¿se puede afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente?.

   (b) Si $(\mathbf{a}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{a}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes al vector $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$¿se puede afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente?.

   (c) Si $(\mathbf{a}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{a}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{a}_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes ¿se puede afirmar que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente?.

9. Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiónes en $\mathbb{R}^d$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{b}_n = \mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ y $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}\| \le r \le \|\mathbf{b}_n - \mathbf{a}\|$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, demostrar que $r = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

10. Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$.

    (a) Indique que debe cumplir $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para ser una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^d$.

    (b) Demuestre que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^d$ es convergente en $\mathbb{R}^d$.

11. Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$.

    (a) Indique que debe cumplir $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para ser una sucesión contractiva en $\mathbb{R}^d$.

    (b) Demuestre que toda sucesión contractiva en $\mathbb{R}^d$ es convergente en $\mathbb{R}^d$.

2.5 Teorema de Weierstrass

Definición 2.5.1 (Máximo, mínimo de una función) *Si* $f\colon \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$

1. *Denominamos al real* M *máximo de* f *en* $\mathbf{D}$*, si y sólo si, existe* $x_M \in \mathbf{D}$ *tal que* $f(x_M) = M$ *y* $f(x) \leq M$ *para todo* $x \in \mathbf{D}$*; o sea,* $M = f(x_M) = \max\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)$.
2. *Denominamos al real* m *mínimo de* f *en* $\mathbf{D}$*, si y sólo si, existe* $x_m \in \mathbf{D}$ *tal que* $f(x_m) = m$ *y* $m \leq f(x)$ *para todo* $x \in \mathbf{D}$*; o sea,* $m = f(x_m) = \min\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)$.

Teorema 2.5.1 (de Weierstrass) *Si* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{A}$ *es cerrado y acotado,* $f\colon \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbf{D}$*, entonces,* f *tiene máximo y mínimo en* $\mathbf{D}$.

Demostración:

Vamos demostrar que f es acotada superiormente en $\mathbf{D}$ y lo haremos por reducción al absurdo.

Supongamos que la función f no esta acotada superiormente en $\mathbf{D}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in \mathbf{D}$ tal que $f(x_n) > n$. Esta sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbf{D}$ que cumple $f(x_n) > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene una sucesión parcial $(x_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbf{D}$ que converge (por ser $\mathbf{D}$ acotado), y converge a $p \in \mathbf{D}$ (por ser $\mathbf{D}$ cerrado). Por lo tanto $f(x_{h_n}) > h_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y como $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ resulta que $f(x_{h_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Teniendo en cuenta que $x_{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in \mathbf{D}$ y que f es continua en $\mathbf{D}$ se concluye que $f(x_{h_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(p)$ que contradice $f(x_{h_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Para demostrar que f es acotada inferiormente se procede de manera análoga, entonces, $\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\}$ es acotado superior e inferiormente. Por lo tanto $\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\}$ tiene supremo e ínfimo; o sea, $I = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\} \leq .f(x) \leq S = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\} \ \forall \ x \in \mathbf{D}$.

Utilizando la definición de supremo se concluye que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un $x_n \in \mathbf{D}$ tal que $S - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq S$ y esta sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbf{D}$ tiene una sucesión parcial $(x_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbf{D}$ que converge (por ser $\mathbf{D}$ acotado), y converge a $p \in \mathbf{D}$ (por ser $\mathbf{D}$ cerrado), entonces, $S - \dfrac{1}{h_n} < f(x_{h_n}) \leq S$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis f es continua en $\mathbf{D}$ esto implica que $f(x_{h_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(p)$ y $S - \dfrac{1}{h_n} \underset{h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}{\to} S$. Estos resultados nos dicen que $f(p) = S = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\}$ siendo p un elemento del conjunto $\mathbf{D}$, entonces, $f(p) = \max\{f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in \mathbf{D}\} = \max\limits_{x\in\mathbf{D}} f(x)$.

La existencia de mínimo se verifica de manera similar, o bien se observa que el mínimo de f en $\mathbf{D}$ es el máximo de $-f$ en $\mathbf{D}$ con signo contrario, pero, el máximo de $-f$ en $\mathbf{D}$ ya se demostro que existe por lo realizado l y esto implica la existencia del mínimo de f en $\mathbf{D}$.

Ejercicio Si $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ es cerrado y acotado, $\varphi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ es una función que cumple $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < \|x - y\|$ para todo $x \in \mathbf{D}$, $y \in \mathbf{D}$ con $x \neq y$, demuestre que existe $x_0 \in \mathbf{D}$ tal que $\varphi(x_0) = x_0$ (esto quiere significa que la función φ tiene un punto fijo).

3 Ecuaciones en diferencia finita

Una ecuación en diferencia finita es un problema cuya incógnita es una sucesión. Observamos que en la sección anterior en la parte de ejemplos y ejercicios se han obtenido el límite de algunas sucesiones $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que venían expresadas (dijimos que estaban definidas por recurencia) de la forma siguiente:

$$(caso\ 1)\begin{cases} \mathbf{a}_1 \in \mathbb{A} \text{ (esto significa que se conoce el valor del primer término de la sucesión siendo } \mathbb{A}\subseteq\mathbb{R}) \\ \mathbf{a}_{n+1} = f(\mathbf{a}_n, n)\ \ \forall\, n\in\mathbb{N} \text{ con } n\geq 1 \end{cases}$$

con la función $f:\mathbb{A}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{a}_n,n)\in\mathbb{A}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$. Los ejercicios presentados de la forma anterior son ecuaciones en diferencia finita y sin determinar una forma explícita de la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en otras palabras es una incognita) se obtuvo el valor de límite de la misma. A lo anterior se agrega que en otros ejercicios la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene presentada como sigue

$$(caso\ 2)\begin{cases} \mathbf{a}_1\ ,\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{A} \text{ (esto significa que se conoce el valor del primer y segundo término de la sucesión)} \\ \mathbf{a}_{n+2} = f(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_n, n)\ \ \forall\, n\in\mathbb{N} \text{ con } n\geq 1 \end{cases}$$

aquí debemos exigir que $f:\mathbb{A}\times\mathbb{A}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ cumpliendo que $f(\mathbf{a}_{n+1},\mathbf{a}_n,n)\in\mathbb{A}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

3.1 Ejemplos de ecuaciones en diferencia finita

Ejemplo 3.1.1 *Progresión aritmética de diferencia* $\boldsymbol{\beta}$

Se considera la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_1$ es dado y se cumple que $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ (esto es una ecuación en diferencia finita de valor inicial $\mathbf{a}_1$ que se denomina progresión aritmética de diferencia $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}$) y este problema será planteado de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta} \text{ con } n\in\mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\beta},\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + 2\,\boldsymbol{\beta}, \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + 3\,\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 4\,\boldsymbol{\beta},\ \ldots, \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + (n-1)\ \boldsymbol{\beta}$$

entonces, la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 + (n-1)\ \boldsymbol{\beta}$ para cada $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 2$ y $\mathbf{a}_1\in\mathbb{R}$ dado es la única solución de la ecuación $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta} \text{ con } n\in\mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Ejemplo 3.1.2 *Progresión geométrica de razón* α

Si se quiere obtener la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que se conoce $\mathbf{a}_1$ y que verifica $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ (esto es una ecuación en diferencia finita de valor inicial $\mathbf{a}_1$ que se denomina progresión geométrica de razón $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$) y lo que será planteado como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solución de esta ecuación es $\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\alpha}^2\, \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_4 = \boldsymbol{\alpha}^3\, \mathbf{a}_1, \ldots,\ \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\, \mathbf{a}_1$, entonces, la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de término general $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\, \mathbf{a}_1$ siendo $\mathbf{a}_1$ un real dado es la unica solución de la ecuación $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Lo realizado nos permite decir que la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de la ecuación en diferencia finita $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n$, si y sólo si, $\mathbf{a}_n = k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1}$ para algún $k \in \mathbb{R}$ que se determinará con la condición inicial.

Observación 3.1.1 *Se considera el conjunto* $V = \left\{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{\mathbb{R}}\ /\ \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ *siendo* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ *un real fijo, entonces, se puede demostrar que* V *es un subespacio vectorial de* $S_{\mathbb{R}}$ *y cuando el real* $\boldsymbol{\alpha}$ *no es cero* V *tiene dimensión 1 (alcanza con observar que la sucesión* $\left(\boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de* V*).*

Ejemplo 3.1.3 *Ecuación lineal de primer orden*

Utilizando los dos ejemplos anteriores se quiere obtener la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique la ecuación en diferencia finita $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$ siendo $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{a}_1$ reales dados y esta será denominada *ecuación lineal de primer orden.* Observemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\beta} \\
&\mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_2 + \boldsymbol{\beta}, \text{ entonces, } \mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\alpha}^2\, \mathbf{a}_1 + (1 + \boldsymbol{\alpha})\ \boldsymbol{\beta} \\
&\mathbf{a}_4 = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_3 + \boldsymbol{\beta}, \text{ entonces, } \mathbf{a}_4 = \boldsymbol{\alpha}^3\, \mathbf{a}_1 + \left(1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^2\right)\ \boldsymbol{\beta} \\
&\mathbf{a}_5 = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_4 + \boldsymbol{\beta}, \text{ entonces, } \mathbf{a}_5 = \boldsymbol{\alpha}^4\, \mathbf{a}_1 + \left(1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\alpha}^3\right)\ \boldsymbol{\beta} \\
&\vdots \\
&\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_{n-1} + \boldsymbol{\beta}, \text{ entonces, } \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\, \mathbf{a}_1 + \left(1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\alpha}^4 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{n-2}\right)\ \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

y recordando que $1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\alpha}^4 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}^{n-2} = \begin{cases} n - 1 \text{ si } \boldsymbol{\alpha} = 1 \\ \dfrac{1 - \boldsymbol{\alpha}^{n-1}}{1 - \boldsymbol{\alpha}} \text{ si } \boldsymbol{\alpha} \neq 1 \end{cases}$ se obtiene que la solución de $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$ es la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que.

$$\mathbf{a}_n = \begin{cases} \mathbf{a}_1 + (n-1)\ \boldsymbol{\beta} \text{ si } \boldsymbol{\alpha} = 1 \\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\, \mathbf{a}_1 + \left(\dfrac{1 - \boldsymbol{\alpha}^{n-1}}{1 - \boldsymbol{\alpha}}\right) \boldsymbol{\beta} \text{ si } \boldsymbol{\alpha} \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{a}_n = \begin{cases} \mathbf{a}_1 + (n-1)\ \boldsymbol{\beta} \text{ si } \boldsymbol{\alpha} = 1 \\ \left(\mathbf{a}_1 - \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\alpha}}\right) \boldsymbol{\alpha}^{n-1} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\alpha}} \text{ si } \boldsymbol{\alpha} \neq 1 \end{cases}$$

Observación 3.1.2 *Cuando se quiere obtener todas las sucesiones* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que cumplen* $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *siendo* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *reales dados se puede afirmar de lo anterior que* $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es la suma de un "múltiplo" de* $\left(\boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *más una solución de* $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ *(cuando* $\boldsymbol{\alpha} = 1$ *la sucesión* $((n-1)\ \boldsymbol{\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ *es una solución de* $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *y en el caso que* $\boldsymbol{\alpha} \neq 1$ *resulta que la sucesión* $\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* *una solución de* $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ *con* $n \in \mathbb{N}$*).*

Ejemplo 3.1.4 *Resolver la ecuación* $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{a}_n + 4 \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1 = -3 \end{cases}$ *y estudiar el* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$.

Utlizando el ejemplo anterior con $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{\beta} = 4$ se obtiene la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que cumple $\mathbf{a}_n = -11\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 8$ y se deduce que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = 8$. Es importante observar que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n$ no depende da la condición inicial, ya que, si $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}$ la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que se obtiene es $\mathbf{a}_n = (\mathbf{a}_1 - 8)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 8$ y como $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, entonces, se puede concluir que $\lim\limits_{n \to +\infty}\left[(\mathbf{a}_1 - 8)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 8\right] = 8$ cualquiera sea el real $\mathbf{a}_1$ que se tome como condición inicial.

Lo realizado permite afirmar que cualquier solución de la ecuación en diferencia finita $\mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{a}_n + 4$ es una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 8$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $k \in \mathbb{R}$ que se obtendrá al conocer el valor inicial.

Ejemplo 3.1.5 *La sucesión* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *definida por recurrencia de la forma siguiente*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 1 \\ \mathbf{a}_{n+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_n}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$$

y encontramos la expresión explícita de $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 1;\ \mathbf{a}_2 = 2 \\ \mathbf{a}_n = 2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}} \text{ con } n \geq 3 \end{cases}$ *obteniendo con esta última el* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = 4$.

Observación 3.1.3 *¿Es posible determinar todas las sucesiones reales* $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{a}_{n+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$*? la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Lo primero a concluir es que* $\mathbf{a}_1 \geq 0$ *y con esto se demuestra que* $\mathbf{a}_n = \left(2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}}\right)(\mathbf{a}_1)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ *con* $n \geq 2$*. lo realizado permite afirmar que se ha resuelto la ecuación* $\mathbf{a}_{n+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$*, ya que, se obtuvieron todas las sucesiones que la verifican. Además para todo* $\mathbf{a}_1 > 0$ *se cumple que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{a}_n = 4$.

Ejemplo 3.1.6 *La sucesión* $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_2 = 2$, $\mathbf{u}_{n+2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *que viene definida por recurrencia y que encontramos la siguiente expresión explícita*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = 0;\ \mathbf{u}_2 = 2 \\ \mathbf{u}_n = 2\left[1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} + \cdots + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right] \text{ con } n \geq 3 \end{cases}$$

y con este resultado se obtiene el $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u}_n = .\dfrac{4}{3}$.

Observación 3.1.4 *¿Es posible determinar todas las sucesiones reales* $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{u}_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n\right)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$*? la respuesta es afirmativa, ya que, la ecuación* $\mathbf{u}_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n\right)$ *para*

todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ se puede expresar de la forma siguiente $\mathbf{u}_{n+2} - \mathbf{u}_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.
Haciendo $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$ se obtiene la ecuación en diferencia finta $\mathbf{w}_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{w}_n$ con $n \in \mathbb{N}$

1. Utilizando el ejemplo 2.3.2 se obtiene $\mathbf{w}_n = k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\forall\ k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

2. Como $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$ y $\mathbf{w}_n = k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\forall\ k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, entonces,

$$\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n = k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall\ k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\ \mathit{con}\ n \geq 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall\ k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\ \mathit{con}\ n \geq 1$$

se construyen infinitas ecuaciones lineales en diferencia de primer orden (una para cada real k) y para resolver cada una se utiliza lo realizado en el ejemplo 2.3.1; o sea, se supone $\mathbf{u}_1$ conocido y a partir de este se construye

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + k\ 1$$
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 + k \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + k \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3 + k \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 + k \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$
$$\mathbf{u}_5 = \mathbf{u}_4 + k \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_1 + k \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \Leftrightarrow \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_1 + k \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_1 + k \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_1 + k \left[\frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right]$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{u}_n = \left(\mathbf{u}_1 + \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

De esto se concluye que para cada pareja de reales $(\mathbf{u}_1,\ k)$ se obtiene una sucesión que verifica la ecuación $\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n\right)$, entonces, toda solución de la ecuación $\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n\right)$ es combinación lineal de la sucesión constante $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ y de la sucesión $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.2 Ecuaciones en diferencia finita de primer orden

Varios de los ejemplos anteriores son ecuaciones en diferencia finita de primer orden es un problema tal que la resolución del mismo consiste en obtener una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{a}_{n+1} = f(\mathbf{a}_n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ siendo f una función real dada.

Si se conoce $\mathbf{a}_1$ (la condición inicial de la ecuación) resulta sencillo obtener

$\mathbf{a}_2 = f(\mathbf{a}_1)$

$\mathbf{a}_3 = f(\mathbf{a}_2)$ (esto se puede expresar como $\mathbf{a}_3 = f(f(\mathbf{a}_1)) = (f \circ f)(\mathbf{a}_1)$)

$\mathbf{a}_4 = f(\mathbf{a}_3)$ (con la idea anterior se expresa $\mathbf{a}_4 = (f \circ f \circ f)(\mathbf{a}_1)$)

y reiterando el razonamiento se concluye que $\mathbf{a}_n = \left(\underset{\text{(n - 1) composiciones}}{\underset{\uparrow}{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}}\right)(\mathbf{a}_1)$ con $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Lo realizado permite concluir que la ecuación en diferencia finita de primer orden $\mathbf{a}_{n+1} = f(\mathbf{a}_n)$ con la condición inicial $\mathbf{a}_1$ tiene una única solución.

Varios de los ejemplos de la sección anterior son casos de ecuaciones en diferencia finita de primer orden y en el caso de la ecuación lineal de primer orden $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ siendo $\boldsymbol{\alpha} \neq 1$, $\boldsymbol{\beta}$ reales dados se deduce que cualquier solución de esta se puede obtener sumando un múltiplo de la sucesión $\left(\boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ más la sucesión constante $\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; o sea, que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta} \Longleftrightarrow \mathbf{a}_n = k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\alpha}}$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $k \in \mathbb{R}$ (este real se determinará con el valor inicial).

Lo anterior se puede expresar de la forma siguiente:

$$\textit{hipótesis}: \begin{cases} (\mathbf{E})\ \mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}_n \ \textit{ siendo } \alpha \text{ un real no nulo y } (\boldsymbol{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ una sucesión real} \\ (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ una solución de } (\mathbf{E}) \Leftrightarrow \mathbf{z}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z}_n + \boldsymbol{\beta}_n \ \ \forall\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\textit{tesis}: \ \left(k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1} + \mathbf{z}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es solución de } (\mathbf{E}) \ \ \forall\ k\in\mathbb{R}$$

la demostración de este resultado es la siguiente $\left(k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n \ \forall\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $k\ \boldsymbol{\alpha}^n = \boldsymbol{\alpha}\left(k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right) \ \forall\ k\in\mathbb{R}, \forall\ n\in\mathbb{N}$ y por hipótesis $\mathbf{z}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z}_n + \boldsymbol{\beta}_n \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, entonces, se cumple $k\ \boldsymbol{\alpha}^n + \mathbf{z}_n = \boldsymbol{\alpha}\left(k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1} + \mathbf{z}_n\right) + \boldsymbol{\beta}_n \left[\Leftrightarrow k\ \boldsymbol{\alpha}^n + \mathbf{z}_n = \boldsymbol{\alpha}\left(k\ \boldsymbol{\alpha}^{n-1}\right) + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z}_n + \boldsymbol{\beta}_n\right] \ \forall\ k\in\mathbb{R}, \forall\ n\in\mathbb{N}$ lo que demuestra el teorema.

Observación 3.2.1 *En la sección 2.3.1. se proponen las siguientes ecuaciones en diferencia de primer orden*

1. *Si β un real dado, entonces, $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = k + (n-1)\,\beta$ verifica la ecuación $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ con $n \in \mathbb{N}$ cualquiera sea el real k.*

2. *Si $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ reales dados con $\alpha \neq 1$, entonces, $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = k\,\boldsymbol{\alpha}^{n-1} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{1-\boldsymbol{\alpha}}$ verifica la ecuación $\mathbf{a}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_n + \boldsymbol{\beta}$ con $n \in \mathbb{N}$ cualquiera sea el real k.*

3. *Cualquiera sea el real k no negativo que la sucesión, $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{a}_n = \left(2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}\right) k^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ verifica la ecuación $\mathbf{a}_{n+1} = 2\sqrt{\mathbf{a}_n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n \geq 1$.*

Observación 3.2.2 *Las ecuaciones en diferencia finita de primer presentadas en la observación anterior se han resuelto, ya que, en cada uno de los casos presentados se determino una forma explicita de la sucesión que verifica dicha ecuación, pero, esto no siempre es posible y alcanza con* $\mathbf{a}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{a}_n^3 - 2}{3}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$ *que se puede afirmar que propiedades tiene la solución según como sea el primer término de la sucesión.*

3.3 Ecuaciones en diferencia finita de segundo orden

Tomando la idea del caso de la ecuación en diferencia finita de primer se puede afirmar que una ecuación en diferencia finita de segundo orden es un problema siendo la resolución del mismo el obtener una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla $\mathbf{a}_{n+2} = f(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1})$ siendo f una función dada y si se conocen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ se determina $\mathbf{a}_3 = f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$,
$\mathbf{a}_4 = f(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{a}_5 = f(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4), \ldots, \mathbf{a}_n = f(\mathbf{a}_{n-2}, \mathbf{a}_{n-1})$ con $n = 3, 4, 5, \ldots$. Lo realizado permite afirmar para cada par de reales $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ hay una única sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica la ecuación $\mathbf{a}_{n+2} = f(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1})$ y este problema será planteado de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} = f(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}) \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R} \text{ (se denominan condiciones iniciales del problema)} \end{cases}$$

3.3.1 Ejemplos de ecuaciones en diferencia finita de segundo orden

Ejemplo 3.3.1 *Ecuación de Fibonacci*

Se denomina a la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Fibonacci aquella que verifica la ecuación

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1} \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 1,\ \mathbf{a}_2 = 2 \end{cases}$$

y se observa que obtener una expresión explícita de la misma con las herramientas que actualmente tenemos es dificultoso, pero, se puede deducir que $\mathbf{a}_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y además que la sucesión que la verifique es de números naturales con este resultado se puede obtener el $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}_n}$.

Lo propuesto será resuelto utilizando la sucesión auxiliar $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{z}_n = \dfrac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}_n}$ que verifica

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\mathbf{z}_n} \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{z}_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{z}_{n+1} = f(\mathbf{z}_n) \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \text{siendo } f : f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \text{ definida en } \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{z}_1 = 2 \end{cases}$$

y como la ecuación $x = f(x)$ en $\mathbb{R}^+$ tiene como única raíz a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ siendo f una función decreciente en $\mathbb{R}^+$ (es importante observar que $f \circ f$ es creciente estricta) resulta que las sucesiones parciales $(\mathbf{z}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\mathbf{z}_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen:

[▲] $(\mathbf{z}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente por $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

[▲] $(\mathbf{z}_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

concluyendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{z}_{2n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{z}_{2n-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, entonces, se deduce que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{a}_{n+1}}{\mathbf{a}_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Observación 3.3.1 *Utilizando un razonamiento similar al aplicado en la observación 3.1.4 se conseguiran toas las sucesiones que verifican la ecuación en diferencia finita* $\mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}$ *con* $n \in \mathbb{N}$; *o sea, se construye la sucesión* $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\mathbf{v}_n = \mathbf{a}_{n+1} - k\mathbf{a}_n$, $\mathbf{v}_{n+1} = \beta\mathbf{v}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *y se determinan los reales* k *y* β *exigiendo que* $\mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{v}_{n+1} + k\mathbf{a}_n = \beta\mathbf{v}_n = \beta(\mathbf{a}_{n+1} - k\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *entonces,* $(1-k-\beta)\,\mathbf{a}_{n+1} + (1+k\beta)\,\mathbf{a}_n = 0\ n \in \mathbb{N}$.

Este último resultado permite obtener el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 1-k-\beta &= 0 \\ 1+k\beta &= 0 \end{cases}$ *y* $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *este par de reales verifica el sistema* $\begin{cases} 1-k-\beta &= 0 \\ 1+k\beta &= 0 \end{cases}$, *entonces , se resuelve*

$$\mathbf{v}_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\mathbf{v}_n\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbf{v}_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}$$

y, a continuación,

$$\mathbf{a}_{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbf{a}_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \mathbf{a}_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\mathbf{a}_n + A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{a}_n = B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3.2 *Se considera la ecuación* $\mathbf{u}_{n+2} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *y en la observación 3.1.4 se obtuvo que toda sucesión que la verifica es combinación lineal de la sucesión constante* $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *y de la sucesión* $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$; *o sea, que la sucesión* $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cumple que*

$$\mathbf{u}_{n+2} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbf{u}_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$$

3.3.2 Ecuaciones en diferencia finita lineales de de 2° orden con coeficientes constantes

Si dados $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ son reales con $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ y una sucesión real $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se denomina ecuación en diferencia finita lineal de 2°orden con coeficientes constantes al problema que tiene por solución a la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Este problema será planteado de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n \textit{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R} \text{ (se denominan condiciones iniciales del problema)} \end{cases}$$

y como se sabe para cada par de reales $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ hay una única sucesión (cada una sucesión que verifique el problema planteado se denomina una solución de la ecuación) que verifica este problema, pero, el método que sugiere el teorema de existencia y unicidad no es muy comodo para obtener la sucesión que resuelve el problema; lo que implica que se debe analizar otro método.

El problema que deseamos resolver es obtener **todas** las sucesiones $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=\mathbf{b}_n$ con $n=1,2,3,4,\ldots$ siendo $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ son reales con $\boldsymbol{\beta}\neq 0$ y una sucesión real $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Llamaremos ecuación en diferencia finita lineal de 2°orden **homogénea o reducida** con coeficientes constantes a

$$(\mathbf{E}_H)\ \ \mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=0 \text{ con } n=1,2,3,4,\ldots$$

y ecuación en diferencia finita lineal de 2°orden **no homogénea o completa** con coeficientes constantes a

$$(\mathbf{E}_{NH})\ \ \mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=\mathbf{b}_n \text{ con } n=1,2,3,4,\ldots$$

siendo $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real no nula.

Teorema 3.3.1 *Si $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son soluciones de $(\mathbf{E}_H)$, entonces, para todo par de reales $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ se cumple que la sucesión $(\mathbf{p}\,\mathbf{w}_n+\mathbf{q}\,\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$.*

Demostración: $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)\Longleftrightarrow \mathbf{w}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{w}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{w}_n=0$ con $n=1,2,3,4,\ldots$ y $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)\Longleftrightarrow \mathbf{z}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{z}_n=0$ con $n=1,2,3,4,\ldots$ utilizando ambos resultados se obtiene $\left(\mathbf{p}\,\mathbf{w}_{n+2}+\mathbf{q}\,\mathbf{z}_{n+2}\right)+\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p}\,\mathbf{w}_{n+1}+\mathbf{q}\,\mathbf{z}_{n+1}\right)+\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{p}\,\mathbf{w}_n+\mathbf{q}\,\mathbf{z}_n\right)=0$ con $n=1,2,3,4,\ldots$; con este último resultado se concluye que $(\mathbf{p}\,\mathbf{w}_n+\mathbf{q}\,\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$.

Observación 3.3.2 *Si se considera el conjunto*

$$\mathbb{U}=\left\{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S_{\mathbb{R}}\ /\ \mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=0 \ \textit{con}\ n=1,2,3,4,\ldots\right\}$$

lo que permite concluir que $\mathbb{U}$ esta formado por **todas** *las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **homogénea o reducida** *con coeficientes constantes y como la sucesión nula es un elemento de $\mathbb{U}$ (significa que $\mathbb{U}\neq\varnothing$) más lo demostrado en el teorema anterior (que nos dice que la combinación lineal de elementos de $\mathbb{U}$ es un elemento de $\mathbb{U}$) permitiendo estos resultados concluir que $\mathbb{U}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial de las sucesiones reales; o sea, $\mathbb{U}$ es un SEV de $S_{\mathbb{R}}$.*
Lo realizado al comienzo del tema en el planteo del problema denominado ecuación en diferencia finita de segundo orden nos dice que fijados los reales $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ hay una **única** *sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica la ecuación $\mathbf{a}_{n+2}=f(\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_{n+1})$ (la existencia y unicidad de la solución de la ecuación en diferencia finita de segundo orden) permitiendo concluir que existen y son únicas las sucesiones*

$$(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{U}\ \textit{tal que}\ \mathbf{u}_1=1,\ \mathbf{u}_2=0$$
$$y$$
$$(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{U}\ \textit{tal que}\ \mathbf{v}_1=0,\ \mathbf{v}_2=1$$

Como para cada par de reales $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ hay una única $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{U}$ verificandose que $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1\ \mathbf{u}_1+\mathbf{a}_2\ \mathbf{v}_1$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_1\ \mathbf{u}_2+\mathbf{a}_2\ \mathbf{v}_2$ y $(\mathbf{a}_1\mathbf{u}_n+\mathbf{a}_2\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{U}$, entonces, se cumple que $\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_1\mathbf{u}_n+\mathbf{a}_2\,\mathbf{v}_n\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ lo que *permite afirmar* $\left\{ (\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} , (\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$ *es una base de* $\mathbb{U}$; *por lo tanto* $\dim(\mathbb{U}) = 2$.

Como $\dim(\mathbb{U}) = 2$, *entonces, para obtener* **todas** *las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2º orden* **homogénea o reducida** *con coeficientes constantes alcanza con hallar un subconjunto de* $\mathbb{U}$ *linealmente independiente con dos elementos.*

Observación 3.3.3 *Recordemos que* $\left\{ (\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}} , (\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$ *que es linealmente independiente, si y sólo si, la única combinación lineal de dicho conjunto que nos da la sucesión nula* ($(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es la sucesión nula, si y sólo si,* $\mathbf{a}_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$) *es la combinación lineal trivial y esto significa que la única raíz común a todas las ecuaciones* $\boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_n + \mu\, \mathbf{z}_n = 0$ *con* $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ *debe ser* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = 0$. *Lo expresado permite enunciar la condición suficente siguiente:*

Teorema 3.3.2 *Si* $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *son sucesiones reales que cumplen* $\mathbf{w}_1\, \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{w}_2\, \mathbf{z}_1$, *entonces,* $\left\{ (\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}} , (\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$ *que es linealmente independiente.*

Demostración: Si $\mathbf{w}_1\, \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{w}_2\, \mathbf{z}_1$ esto permite afirmar que el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_1 + \mu\, \mathbf{z}_1 = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_2 + \mu\, \mathbf{z}_2 = 0 \end{cases}$ tiene como única raíz $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = 0$, entonces, este sistema $\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_1 + \mu\, \mathbf{z}_1 = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_2 + \mu\, \mathbf{z}_2 = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_3 + \mu\, \mathbf{z}_3 = 0 \\ \quad \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{w}_n + \mu\, \mathbf{z}_n = 0 \\ \quad \vdots \end{cases}$ que tiene infinitas ecuaciones siendo la única raíz del mismo es $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = 0$ y este resultado nos indica que $\left\{ (\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}} , (\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}$ que es linealmente independiente.

Teorema 3.3.3 *Si* $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_H)$ *y* $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_{N\,H})$, *entonces,* $(\mathbf{w}_n + \mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_{N\,H})$.

<u>Demostración:</u>

Como $(\mathbf{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H) \iff \mathbf{w}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{w}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\, \mathbf{w}_n = 0$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ y $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H}) \iff \mathbf{z}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\, \mathbf{z}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\, \mathbf{z}_n = \mathbf{b}_n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, entonces, sumando miembro a miembro se obtiene que

$$(\mathbf{w}_{n+2} + \mathbf{v}_{n+2}) + \boldsymbol{\alpha}\ (\mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{v}_{n+1}) + \boldsymbol{\beta}\ (\mathbf{w}_n + \mathbf{v}_n) = \mathbf{b}_n \ \textit{para}\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

y con esto se concluye que $(\mathbf{w}_n + \mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H})$.

Teorema 3.3.4 *Si* $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_{N\,H})$ *y* $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_{N\,H})$, *entonces,* $(\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es solución de* $(\mathbf{E}_H)$.

Demostración:

Como $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH}) \Longleftrightarrow \mathbf{u}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{u}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{u}_n = \mathbf{b}_n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ y $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH}) \Longleftrightarrow \mathbf{z}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{z}_n = \mathbf{b}_n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, entonces, restando miembro a miembro se obtiene que

$$(\mathbf{u}_{n+2}-\mathbf{v}_{n+2})+\boldsymbol{\alpha}\,(\mathbf{u}_{n+1}-\mathbf{v}_{n+1})+\boldsymbol{\beta}\,(\mathbf{u}_n-\mathbf{v}_n)=0 \; para \; n=1,2,3,4,\ldots$$

y con esto se deduce que $(\mathbf{u}_n-\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$.

Teorema 3.3.5 *Si $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH})$, entonces, $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH})$, si y sólo si, existe $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$ tal que $\mathbf{v}_n=\mathbf{w}_n+\mathbf{u}_n$ para $n=1,2,3,4,\ldots$*

Demostración:

($\Longrightarrow$) Como $\mathbf{v}_n=(\mathbf{v}_n-\mathbf{u}_n)+\mathbf{u}_n$ para $n=1,2,3,4,\ldots$ siendo $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E}_{NH})$ y $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E}_{NH})$, entonces, la sucesión $(\mathbf{v}_n-\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$ por aplicación del teorema anterior y con esto se demuestra que toda $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH})$ se puede expresar como suma de una solución de $(\mathbf{E}_H)$ más $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E}_{NH})$.

($\Longleftarrow$) Si $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\mathbf{v}_n=\mathbf{w}_n+\mathbf{u}_n$ para $n=1,2,3,4,\ldots$ para alguna solución $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbf{E}_H)$, entonces, resulta que $(\mathbf{w}_n+\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH})$ y con esto se demuestra que $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{NH})$.

Observación 3.3.4 *El último teorema nos permite concluir que para obtener* **todas** *las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **no homogénea o completa** *con coeficientes constantes alcanza con hallar* **una** *solución de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **no homogénea o completa** *y* **todas** *las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **homogénea o reducida**.

Las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2°orden homogénea o reducida concoeficientes constantes.

Como la única solución de $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+1}=\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{a}_n \text{ con } n\in\mathbb{N} \\ \mathbf{a}_1\in\mathbb{R}\end{cases}$ es la sucesión $\left(\mathbf{a}_1\,\boldsymbol{\lambda}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, si $\boldsymbol{\lambda}\neq 0$ resulta que el conjunto $\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ es una base del espacio vectorial formado por todas las sucesiones $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican la ecuación en diferencia finita $\mathbf{a}_{n+1}=\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{a}_n$ con $n=1,2,3,4,\ldots$.

Utilizando la idea anterior vamos a buscar soluciones de $(\mathbf{E}_H)$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=0$ con $n=1,2,3,4,\ldots$ de la forma $\left(\boldsymbol{\lambda}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; o sea , que

$$\begin{array}{ccc}
\left(\boldsymbol{\lambda}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ es solución de } (\mathbf{E}_H) & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\lambda}^{n+1}+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}^n+\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\lambda}^{n-1}=0\;\forall\, n\in\mathbb{N} \\
 & & \Updownarrow \\
 & & \boldsymbol{\lambda}^{n-1}\left(\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\beta}\right)=0\;\forall\, n\in\mathbb{N} \\
 & & \Updownarrow \\
\text{ecuación característica asociada a } (\mathbf{E}_H) & \longrightarrow & \boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\beta}=0
\end{array}$$

y observamos la ecuación característica asociada a $(\mathbf{E}_H)$ se obtiene sustituyendo $\mathbf{a}_{n+2}$ por $\boldsymbol{\lambda}^2$, $\mathbf{a}_{n+1}$ por $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{a}_n$ por 1.

Si $\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2$ con $\boldsymbol{\lambda}_1 \neq \boldsymbol{\lambda}_2$ son las raíces reales de $\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta} = 0$

Con esto se deduce que $\left(\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\boldsymbol{\lambda}_2^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ son soluciones de $(\mathbf{E}_H)$, entonces, como $\boldsymbol{\lambda}_1 \neq \boldsymbol{\lambda}_2$ resulta

que $\left[\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=1}\left[\boldsymbol{\lambda}_2^{n-1}\right]_{n=2} \neq \left[\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=2}\left[\boldsymbol{\lambda}_2^{n-1}\right]_{n=1}$ y esto implica que $\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\boldsymbol{\lambda}_2^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ es

linealmente independiente lo que permite afirmar que

$$\begin{gathered} (\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{es solución de } (\mathbf{E}_H) \\ \Updownarrow \\ \mathbf{w}_n = k_1\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} + k_2\,\boldsymbol{\lambda}_2^{n-1} \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \text{ con } k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Si $\boldsymbol{\lambda}_1$ es la única raíz real de $\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta} = 0$

Significa que $\left[\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = \left[\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right]'_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = 0$; o sea, que $\left\{\begin{array}{c} \left[\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = 0 \\ \left[2\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\alpha}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = 0 \end{array}\right.$.

Como $\left(\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$ y se sabe que debemos conseguir dos soluciones que formen un

conjunto linealmente independiente para poder escribir cualquier solución de $(\mathbf{E}_H)$ como combinación lineal

de dicho conjunto.

Para ello vamos a demostrar que la sucesión $\left(n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_H)$ y alcanza con observar que

$$\begin{gathered} \left[\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n\right]_{\mathbf{a}_n = n\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}} = (n+2)\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n+1} + \boldsymbol{\alpha}\ (n+1)\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n} + \boldsymbol{\beta}\,n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} \\ \Updownarrow \\ \left[\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n\right]_{\mathbf{a}_n = n\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}} = \left[(n+2)\ \boldsymbol{\lambda}_1^{2} + \boldsymbol{\alpha}\ (n+1)\ \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\beta}\,n\right]\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} \\ \Updownarrow \\ \left[\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n\right]_{\mathbf{a}_n = n\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}} = \left[n\ \left(\boldsymbol{\lambda}_1^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\beta}\right) + \boldsymbol{\lambda}_1\,(2\,\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\alpha})\right]\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} \\ \Updownarrow \\ \left[\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n\right]_{\mathbf{a}_n = n\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}} = \left[n\ \left[\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} + \boldsymbol{\lambda}_1\left[2\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\alpha}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1}\right]\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} \end{gathered}$$

utilizando que $\left[\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = \left[2\,\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\alpha}\right]_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1} = 0$ se concluye que $\left(n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de

$(\mathbf{E}_H)$ .Además se cumple que $\left[\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=1}\left[n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=2} \neq \left[\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=2}\left[n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right]_{n=1}$ y este resultado nos

permite afirmar que $\left\{\left(\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n\,\boldsymbol{\lambda}_1^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ es linealmente independiente concluyendo

$$(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{es solución de } (\mathbf{E}_H) \Leftrightarrow \mathbf{w}_n = (k_1 + n\,k_2)\ \boldsymbol{\lambda}_1^{n-1} \text{ para } n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \text{ con } k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}$$

Si la ecuación $\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\beta}=0$ no tiene raíces reales

Quiere decir que la ecuación característica $\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\beta}=0$ tiene por raíces los <u>**números complejos**</u>

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{-\boldsymbol{\alpha}\pm i\sqrt{4\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}^2}}{2}\iff \boldsymbol{\lambda}=-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\pm i\sqrt{\frac{4\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}^2}{4}}\underset{a=-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\ y\ b=\sqrt{\frac{4\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}^2}{4}}}{\underset{\uparrow}{\iff}}\boldsymbol{\lambda}=a\pm b\,i$$

Se escribe la expresión polar del complejo $z=a+b\,i$; o sea, $z=r\,(cos\,(\varphi)+i\,sen\,(\varphi))=r_\varphi$ siendo

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ y $\boldsymbol{\varphi}\in(-\pi,\,\pi]$ es el único real que verifica las ecuaciones $\begin{cases} cos\,(\boldsymbol{\varphi})=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sen\,(\boldsymbol{\varphi})=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\neq 0\end{cases}$ y como

en los dos casos anteriores la sucesión

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\underset{z_n=(a\,+\,b\,i)^{n-1}}{\underset{\uparrow}{=}}\left((a+bi)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(r\,(cos\,(\varphi)+i\,sen\,(\varphi))^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\underset{z_n=(a\,+\,b\,i)^{n-1}}{\underset{\uparrow}{=}}\left((a+bi)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(r^{n-1}\,(cos\,((n\,-\,1)\,\varphi)+i\,sen\,((n\,-\,1)\,\varphi))\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\underset{z_n=(a\,+\,b\,i)^{n-1}}{\underset{\uparrow}{=}}\left((a+bi)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left[r^{n-1}cos\,((n\,-\,1)\,\varphi)\right]+i\,\left[r^{n-1}sen\,((n\,-\,1)\,\varphi)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

permitiendo lo realizado deducir que $\mathrm{Re}\,(z_n)=r^{n-1}cos((n\,-\,1)\,\varphi)$, $Im\,(z_n)=r^{n-1}sen\,((n\,-\,1)\,\varphi)$ y

como la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de la ecuación $(\mathbf{E}_H)$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=0$ lo que implica

$z_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,z_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,z_n=0\;\forall\,n\in\mathbb{N}$, entonces, se cumple que

$$\left[\mathrm{Re}\left(z_{n+2}\right)+i\,Im\left(z_{n+2}\right)\right]+\boldsymbol{\alpha}\left[\mathrm{Re}\left(z_{n+1}\right)+i\,Im\left(z_{n+1}\right)\right]+\boldsymbol{\beta}\left[\mathrm{Re}\left(z_n\right)+i\,Im\left(z_n\right)\right]=0\;\forall\,n\in\mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\left[\mathrm{Re}\left(z_{n+2}\right)\right]+\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{Re}\left(z_{n+1}\right)+\boldsymbol{\beta}\,\mathrm{Re}\left(z_n\right)\right]+i\,\left[Im\left(z_{n+2}\right)+\boldsymbol{\alpha}\,Im\left(z_{n+1}\right)+\boldsymbol{\beta}\,Im\left(z_n\right)\right]=0\;\forall\,n\in\mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\mathrm{Re}\left(z_{n+2}\right)\right]+\boldsymbol{\alpha}\,\mathrm{Re}\left(z_{n+1}\right)+\boldsymbol{\beta}\,\mathrm{Re}\left(z_n\right)=0\text{ e }Im\left(z_{n+2}\right)+\boldsymbol{\alpha}\,Im\left(z_{n+1}\right)+\boldsymbol{\beta}\,Im\left(z_n\right)=0\;\forall\,n\in\mathbb{N}$$

Con lo anterior se demuestra que las sucesiones reales $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ son soluciones de la

ecuación $(\mathbf{E}_H)$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n=0$ verificandose que $\mathrm{Re}\,(z_1)=1$, $\mathrm{Re}\,(z_2)=r\,\cos\,(\varphi)$, $\mathrm{Im}\,(z_1)=0$,

$\mathrm{Im}\,(z_2) = r\,sen\,(\varphi)$,entonces, como además se cumple que

$$\underbrace{[\mathrm{Re}\,(z_n)]_{n=1}\,[\mathrm{Im}\,(z_n)]_{n=2} \neq [\mathrm{Re}\,(z_n)]_{n=2}\,[\mathrm{Im}\,(z_n)]_{n=1}}_{\uparrow}$$

este resultado permite afirmar que $\left\{(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}\,,(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ es linealmente independiente

y con esto se determinan todas las soluciones de la ecuación $(\mathbf{E}_H)$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = 0$.

$$(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{es solución de } (\mathbf{E}_H)$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{w}_n = r^{n-1}\left[k_1 cos\,((n-1)\,\varphi) + k_2\,sen\,((n-1)\,\varphi)\right] \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \text{ con } k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.3.3 *Resolver la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **homogénea o reducida** *con coeficientes constantes siguiente*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 6\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 7,\ \mathbf{a}_2 = 11 \end{cases}$$

La ecuación característica asociada a $\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 6\,\mathbf{a}_n = 0$ *es* $\boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 6 = 0$ *siendo las raíces de esta última* $\boldsymbol{\lambda}_1 = -2$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = 3$ *y con este resultado se deduce que*

$$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{es solución de } \mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 6\,\mathbf{a}_n = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{a}_n = k_1\,(-2)^{n-1} + k_2\,3^{n-1} \textit{ para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \textit{ con } k_1 \in \mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}$$

Utilizando que $\mathbf{a}_1 = 7$, $\mathbf{a}_2 = 11$ *se obtiene* $\begin{cases} k_1 + k_2 = 7 \\ -2\,k_1 + 3\,k_2 = 11 \end{cases} \Longleftrightarrow k_1 = 2;\ k_2 = 5,$ *entonces, se concluye que* $\underline{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{con } \mathbf{a}_n = 2\,(-2)^{n-1} + 5\,3^{n-1}}$ *es la solución de*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 6\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 7,\ \mathbf{a}_2 = 11 \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.4 *Resolver la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden* **homogénea o reducida** *con coeficientes constantes siguiente*

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 1,\ \mathbf{a}_2 = 8 \end{cases}$$

Como $\boldsymbol{\lambda}^2 - 4\,\boldsymbol{\lambda} + 4 = 0$ *es la ecuación característica asociada a* $\mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0$ *que tiene como única raíz a* 2 $\left(\boldsymbol{\lambda}^2 - 4\,\boldsymbol{\lambda} + 4 = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 = 2\right)$, *entonces, se concluye que*

$$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{es solución de } \mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{a}_n = (k_1 + k_2\, n)\; 2^{n-1} \textit{ para } n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \textit{ con } k_1 \in \mathbb{R},\; k_2 \in \mathbb{R}$$

y las condiciones iniciales del problema son $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_2 = 8$ *obteniendo*

$$\left\{ \begin{array}{c} k_1 + k_2 = 1 \\ (k_1 + 2\,k_2)\; 2 = 8 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 + 2\,k_2 = 4 \end{array} \right. \Longleftrightarrow k_1 = -2;\; k_2 = 3$$

Con este resultado se deduce que $\underline{(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{con } \mathbf{a}_n = (-2 + 3n)\; 2^{n-1}}$ *es la solución de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 1,\, \mathbf{a}_2 = 8 \end{array} \right.$$

Ejemplo 3.3.5 *Resolver la ecuación en diferencia finita lineal de 2º orden* **<u>homogénea o reducida</u>** *con coeficientes constantes siguiente*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+2} + 2\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 3,\, \mathbf{a}_2 = 8 \end{array} \right.$$

La ecuación característica asociada a $\mathbf{a}_{n+2} + 2\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0$ *es* $\boldsymbol{\lambda}^2 + 2\,\boldsymbol{\lambda} + 4 = 0$ *que tiene raíces complejas* $\boldsymbol{\lambda}_1 = -1 + i\,\sqrt{3}$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = -1 - i\,\sqrt{3}$ *con* $i^{\,2} = -1$ *(significa que* $a = -1$, $b = \sqrt{3}$*), entonces, se deduce que*

$$r = \left[\sqrt{a^2 + b^2}\right]_{a\,=\,-1,\; b\,=\,\sqrt{3}} = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} cos\,(\boldsymbol{\varphi}) = \left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]_{a\,=\,-1,\; b\,=\,\sqrt{3}} \\ sen\,(\boldsymbol{\varphi}) = \left[\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]_{a\,=\,-1,\; b\,=\,\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{\varphi} \in (-\pi,\, \pi] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} cos\,(\boldsymbol{\varphi}) = -\dfrac{1}{2} \\ sen\,(\boldsymbol{\varphi}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \boldsymbol{\varphi} \in (-\pi,\, \pi] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \boldsymbol{\varphi} = \frac{2\,\pi}{3}$$

y con esto se deduce que

$$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{es solución de } \mathbf{a}_{n+2} + 2\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{a}_n = 2^{n-1}\left[k_1 cos\left((n-1)\,\frac{2\,\pi}{3}\right) + k_2\, sen\left((n-1)\,\frac{2\,\pi}{3}\right)\right] \quad \textit{para } n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \textit{ con } k_1 \in \mathbb{R},\; k_2 \in \mathbb{R}$$

Utilizando las condiciones iniciales $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_2 = 8$ *resulta que*

$$\left\{ \begin{array}{c} k_1 = 1 \\ 2\,\left(k_1 cos\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right) + k_2\, sen\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\right)\right) = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 = 1 \\ 2\,\left(-\dfrac{1}{2}\,k_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,k_2\right) = 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 = 1 \\ -k_1 + \sqrt{3}\,k_2 = 8 \end{array} \right.$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} k_1 = 1 \\ -k_1 + \sqrt{3}\,k_2 = 8 \end{array} \right.$$

lo que permite decir que la solución de

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}_{n+2} + 2\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0 \textit{ con } n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 3,\, \mathbf{a}_2 = 8 \end{array} \right.$$

es la sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $\mathbf{a}_n = 2^{n-1}\left[\cos\left((n-1)\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + 3\sqrt{3}sen\left((n-1)\,\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2°orden no homogénea o completa con coeficientes constantes. Como se ha demostrado para obtener **todas** las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden **no homogénea o completa** con coeficientes constantes alcanza con hallar **una** solución de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden **no homogénea o completa** y **todas** las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden **homogénea o reducida** . En el punto anterior se demostro como hallar **todas** las soluciones de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden **homogénea o reducida** y, a continuación, se mostrará como obtener **una** solución (que suele denominarse particular) de la ecuación en diferencia finita lineal de 2° orden **no homogénea o completa** para algunas sucesiones $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Primer caso: $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **es un sucesión constante** $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$ siendo $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}$ son reales con $\boldsymbol{\beta}\neq 0$, $c\neq 0$.

Vamos a buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (k)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k\in\mathbb{R}$ (significa que la sucesión $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión constante; o sea, $\mathbf{z}_n = k$ para cada $n\in\mathbb{N}$), entonces, la sucesión $(k)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H}) \Leftrightarrow k+\boldsymbol{\alpha}\,k+\boldsymbol{\beta}\,k = c \Leftrightarrow k\,(1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = c$.

Si $1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq 0$ (esto dice que la suma de los coeficientes de la ecuación característica asociada a $(\mathbf{E}_H)$ es diferente de cero) se concluye que la sucesión constante $\left(\dfrac{c}{1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$.

Si $1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = 0$, entonces, $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}-(1+\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$; vamos a buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (kn)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k\in\mathbb{R}$ y esto implica que $(kn)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H})$, si y solo si, $k\,(n+2)+\boldsymbol{\alpha}\,k\,(n+1)+\boldsymbol{\beta}\,kn = c \Leftrightarrow k\left(\underbrace{1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}_{\substack{\| \\ 0}}\right)n+(2+\boldsymbol{\alpha})\,k = c \Leftrightarrow (2+\boldsymbol{\alpha})\,k = c$.

Si $2+\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}-(1+\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$ es la sucesión $\left(\dfrac{c}{2+\boldsymbol{\alpha}}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = 0$ y $2+\boldsymbol{\alpha} = 0$, entonces, $\boldsymbol{\alpha} = -2$, $\boldsymbol{\beta} = 1$ y con estos resultados se obtiene la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}-2\,\mathbf{a}_{n+1}+\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$, entonces, $(kn^2)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k\in\mathbb{R}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H})$, si y solo si, $k\,(n+2)^2-2\,k\,(n+1)^2+kn^2 = c \Leftrightarrow 2k = c \Leftrightarrow k = \dfrac{c}{2}$. Con este último resultado se concluye que la sucesión $\left(\dfrac{c}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}-2\,\mathbf{a}_{n+1}+\mathbf{a}_n = c$ con $n\in\mathbb{N}$.

Segundo caso: $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **con** $\mathbf{b}_n = c\;A^n$ $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c\;A^n$ con $n\in\mathbb{N}$ siendo $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}$ son reales con $\boldsymbol{\beta}\neq 0$, $c\neq 0$, $A\neq 0$.

Se quiere obtener una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1}+\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c\;A^n$ con $n\in\mathbb{N}$ y esta se puede expresar de la forma siguiente $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\dfrac{\mathbf{a}_{n+2}}{A^{n+2}}+\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A}\,\dfrac{\mathbf{a}_{n+1}}{A^{n+1}}+\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}\,\dfrac{\mathbf{a}_n}{A^n} = \dfrac{c}{A^2}$ con $n\in\mathbb{N}$; o sea, que haciendo $\mathbf{w}_n = \dfrac{\mathbf{a}_n}{A^n}$ se obtiene una nueva ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{w}_{n+2}+\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A}\,\mathbf{w}_{n+1}+\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}\,\mathbf{w}_n = \dfrac{c}{A^2}$ con $n\in\mathbb{N}$ siendo el segundo miembro de esta última una sucesión constante.

Utilizando lo realizado en el caso anterior se resuelve la ecuación

$$\mathbf{w}_{n+2} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{A}\,\mathbf{w}_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}\,\mathbf{w}_n = \frac{c}{A^2} \; con\; n \in \mathbb{N}$$

1. Si $1 + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2} \neq 0 \Leftrightarrow A^2 + \alpha A + \beta \neq 0$ (esto dice que el real A no es raíz de la ecuación característica asociada a $(\mathbf{E}_H)$), entonces, la sucesión constante $\left(\dfrac{\frac{c}{A^2}}{1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{A} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{c}{A^2 + \alpha A + \beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $\mathbf{w}_{n+2} + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A}\,\mathbf{w}_{n+1} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}\,\mathbf{w}_n = \dfrac{c}{A^2}$ con $n \in \mathbb{N}$. Con este resultado se concluye que $\left(\dfrac{c}{A^2 + \alpha A + \beta} A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c\,A^n$ con $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $1 + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2} = 0 \Leftrightarrow A^2 + \alpha A + \beta = 0$ (esto dice que el real A es raíz de la ecuación característica asociada a $(\mathbf{E}_H)$) y $2 + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A} \neq 0 \Leftrightarrow 2A + \boldsymbol{\alpha} \neq 0$, entonces, la sucesión $\left(\dfrac{\frac{c}{A^2}}{2 + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{A}} n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{c}{A\,(2A + \boldsymbol{\alpha})} n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $\mathbf{w}_{n+2} + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A}\,\mathbf{w}_{n+1} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2}\,\mathbf{w}_n = \dfrac{c}{A^2}$ con $n \in \mathbb{N}$.
   Con este resultado una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = c\,A^n$ con $n \in \mathbb{N}$ es $\left(\dfrac{c}{A\,(2A + \boldsymbol{\alpha})} nA^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{c}{2A + \boldsymbol{\alpha}} nA^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Si $1 + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A} + \dfrac{\boldsymbol{\beta}}{A^2} = 0 \Leftrightarrow A^2 + \alpha A + \beta = 0$ y $2 + \dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{A} = 0$, entonces, $\boldsymbol{\alpha} = -2A$, $\boldsymbol{\beta} = A^2$ y con estos resultados se obtiene la ecuación $\mathbf{w}_{n+2} - 2\,\mathbf{w}_{n+1} + \mathbf{w}_n = \dfrac{c}{A^2}$ con $n \in \mathbb{N}$ que una de las soluciones es $\left(\dfrac{c}{2A^2} n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Con este resultado se concluye que $\left(\dfrac{c}{2A^2} n^2 A^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{c}{2} n^2 A^{n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} - 2A\,\mathbf{a}_{n+1} + A^2\,\mathbf{a}_n = c\,A^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

<u>Tercer caso:</u> $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **con** $\mathbf{b}_n = c\,n$ $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = cn$ con $n \in \mathbb{N}$ siendo

$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}$ son reales con $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, $c \neq 0$.

Vamos a buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (kn + h)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, entonces, la sucesión $(kn + h)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H}) \Leftrightarrow (1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,kn + (2 + \boldsymbol{\alpha})\,k + (1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,h = cn \Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{rcl} (1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,k & = & c \\ (2 + \boldsymbol{\alpha})\,k + (1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,h & = & 0 \end{array}\right.$.

Si $1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \neq 0$ resulta que $\left(\dfrac{c}{1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} n - \dfrac{c\,(2 + \boldsymbol{\alpha})}{(1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{a}_n = cn$ con $n \in \mathbb{N}$.

Si $1 + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0$, entonces, $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} - (1 + \boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{a}_n = cn$ con $n \in \mathbb{N}$; vamos a buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\,(kn + h))_{n\in\mathbb{N}}$ con $k \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ y esto implica que $(n\,(kn + h))_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H})$, si y solo si, $(n + 2)\,(kn + 2k + h) + \boldsymbol{\alpha}\,(n + 1)\,(kn + k + h) - (1 + \boldsymbol{\alpha})\,n\,(kn + h) = cn$; o sea, $2\,(2 + \boldsymbol{\alpha})\,kn + (4 + \boldsymbol{\alpha})\,k + (2 + \boldsymbol{\alpha})\,h = cn \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\,(2 + \boldsymbol{\alpha})\,k & = & c \\ (4 + \boldsymbol{\alpha})\,k + (2 + \boldsymbol{\alpha})\,h & = & 0 \end{array}\right.$.

Si $2 + \boldsymbol{\alpha} \neq 0$ una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2} + \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{a}_{n+1} - (1 + \boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{a}_n = cn$ con $n \in \mathbb{N}$ es la sucesión $\left(n\left(\dfrac{c}{2\,(2 + \boldsymbol{\alpha})} n - \dfrac{(4 + \boldsymbol{\alpha})\,c}{2\,(2 + \boldsymbol{\alpha})^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $1+\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=0$ y $2+\boldsymbol{\alpha}=0$, entonces, $\boldsymbol{\alpha}=-2$, $\boldsymbol{\beta}=1$ y con estos resultados se obtiene la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}-2\,\mathbf{a}_{n+1}+\mathbf{a}_n=cn$ con $n\in\mathbb{N}$, entonces, $\left(n^2\left(kn+h\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ con $k\in\mathbb{R}$ es solución de $(\mathbf{E}_{N\,H})$, si y solo si, $(n+2)^2\left(kn+2k+h\right)-2\,(n+1)^2\left(kn+k+h\right)+n^2\left(kn+h\right)=cn \Leftrightarrow 6kn+(6k+2k)=cn$.

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6k & = & c \\ 6k+2h & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$k=\frac{c}{6};\ h=-\frac{c}{2}$$

La sucesión $\left(n^2\left(\frac{c}{6}n-\frac{c}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una solución de la ecuación $(\mathbf{E}_{N\,H})$ $\mathbf{a}_{n+2}-2\,\mathbf{a}_{n+1}+\mathbf{a}_n=cn$ con $n\in\mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Determine la solución de cada una de las ecuaciones en diferencia finita que tiene el valor inicial indicado y estudie si la solución obtenida es convergente o no en los casos siguientes:

   (a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=\frac{2}{3}\,\mathbf{a}_n+1 \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1=5 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=\frac{2}{3}\,\mathbf{a}_n+1 \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=3\,\mathbf{a}_n-5\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1=5 \end{array}\right.$

   $\left[\underline{Sugerencia}:\text{ Buscar una solución de la forma } b\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ con } b\in\mathbb{R}\right]$

   (d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=-\,\mathbf{a}_n+2 \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

   (e) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\,\mathbf{a}_n \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1\in\mathbb{R} \end{array}\right.$

2. Determine la solución de la ecuación en diferencia finta $12\,\mathbf{a}_{n+1}-9\mathbf{a}_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ con $n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots$ que cumple $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{a}_n=11$.

3. Se consider la ecuación en diferencia finita no lineal $(\mathbf{E})$ $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{n+1}=\frac{\mathbf{a}_n}{1+\,\mathbf{a}_n} \text{ con } n=1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots \\ \mathbf{a}_1>0 \end{array}\right.$.

   (a) Demostrar que $\mathbf{a}_n>0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ y si haciendo $\mathbf{b}_n=\frac{1}{\mathbf{a}_n}$, mostrar que la ecuación $(\mathbf{E})$ se transforma en uan ecuación lineal que se determinará.

   (b) Resolver la ecuación $(\mathbf{E})$ y mostrar que toda solución converge a cero.

4. Si $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales, estudie la dependencia lineal de $\left\{(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ en los casos siguientes:

(a) $\mathbf{w}_n = 2^n$, $\mathbf{z}_n = \dfrac{1}{n!}$

(b) $\mathbf{w}_n = n^n$, $\mathbf{z}_n = n!$

(c) $\mathbf{w}_n = 2^n$, $\mathbf{z}_n = 2^{n+3}$

(d) $\mathbf{w}_n = n^2$, $\mathbf{z}_n = n^2 - 3n + 2$

5. Si $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales tal que $\mathbf{w}_1\,\mathbf{z}_2 = \mathbf{w}_2\,\mathbf{z}_1$

   (a) ¿Es posible concluir que $\left\{ (\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$ es linealmente independiente? Justifique la respuesta.

   (b) ¿Es posible concluir que $\left\{ (\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad , (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$ es linealmente dependiente? Justifique la respuesta.

6. Si $(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales

   (a) Indique una condición suficiente para concluir que $\left\{(\mathbf{w}_n)_{n\in\mathbb{N}} , (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}} , (\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$ es linealmente independiente.

   (b) Demuestre que $\left\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}} , \left(n^2 + 3n + 2\right)_{n\in\mathbb{N}} , ((n+2)!)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$ es linealmente independiente utilizando la condición obtenida en la parte anterior.

7. Determine la solución de cada una de las ecuaciones en diferencia finita de 2° orden lineales con coeficientes constantes que tiene el valor inicial indicado y estudie si la solución obtenida es convergente o no en los casos siguientes:

   (a) $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} - \dfrac{5}{2}\,\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 2,\ \mathbf{a}_2 = 4 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 3\,\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 2\,\mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 2,\ \mathbf{a}_2 = 4 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} + 2\ \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = 1,\ \mathbf{a}_2 = -4 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 9\,\mathbf{a}_{n+2} - 6\ \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} + 2\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 = -2,\ \mathbf{a}_2 = -2\left(1 + \sqrt{3}\right) \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} \mathbf{a}_{n+2} + 2\ \mathbf{a}_{n+1} + 2\,\mathbf{a}_n = 0 \text{ con } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

8. Se consideran las siguientes ecuaciones en diferencia finita de 2° orden lineales con coeficientes constantes

   $(\mathbf{E}_1)$ $\mathbf{a}_{n+2} - \dfrac{5}{2}\,\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 0$ con $n \in \mathbb{N}$

   $(\mathbf{E}_2)$ $3\,\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 2\,\mathbf{a}_n = 0$ con $n \in \mathbb{N}$

   $(\mathbf{E}_3)$ $9\,\mathbf{a}_{n+2} - 6\ \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 0 = 0$ con $n \in \mathbb{N}$

(a) Obtenga todas las soluciones de $(\mathbf{E}_1)$, $(\mathbf{E}_2)$, $(\mathbf{E}_3)$.

(b) Para cada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E}_i)$ con $i = 1,\ 2,\ 3$, determine $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(c) Para cada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E}_i)$ con $i = 1,\ 2,\ 3$ tal que $\sum \mathbf{a}_n$ converge, determine $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

9. Se considera la ecuación $(\mathbf{E})$ $\mathbf{a}_{n+2} - \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{a}_{n+1} + (\boldsymbol{\alpha} - 1)\ \mathbf{a}_n = 0$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ siendo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, se pide:

(a) Determine que condición debe cumplir el real $\boldsymbol{\alpha}$ para que toda solución de $(\mathbf{E})$ sea convergente.

(b) Si $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es solución de $(\mathbf{E})$ ¿Para qué valores de $\boldsymbol{\alpha}$ se cumple que $\sum \mathbf{a}_n$ es convergente? Justifique la respuesta.

10. Determine todas las soluciones de las ecuaciones en diferencia finita siguientes:

(a) $3\,\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 2\,\mathbf{a}_n = 3$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(b) $\mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 3\,n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(c) $\mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 2^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(d) $\mathbf{a}_{n+2} - 4\,\mathbf{a}_{n+1} + 4\,\mathbf{a}_n = 3\,n + 2^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
(se sugiere utilizar el principio de superposición).

(e) $8\,\mathbf{a}_{n+2} - 6\,\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n = 85\,sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
(se sugiere buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{z}_n = k\,cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + h\,sen\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$ siendo $k,\ h$ números reales).

(f) $6\,\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 2\,\mathbf{a}_n = 6$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ y obtenga $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{a}_n$ para cualquier $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de la ecuación $6\,\mathbf{a}_{n+2} - \mathbf{a}_{n+1} - 2\,\mathbf{a}_n = 6$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

11. Se considera $(\mathbf{E}_H)$ $\mathbf{a}_{n+2} - 2\,\mathbf{a}_{n+1} - 8\,\mathbf{a}_n = 0$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(a) Determine todas las soluciones de $(\mathbf{E}_H)$.

(b) Determine todas las soluciones de $(\mathbf{E})$ $\mathbf{a}_{n+2} - 2\,\mathbf{a}_{n+1} - 8\,\mathbf{a}_n = 32\,n\,2^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.
(se sugiere buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{z}_n = (k\,n + h)\ 2^n$ siendo $k,\ h$ números reales).

(c) Determine todas las soluciones de $(\mathbf{E})$ $\mathbf{a}_{n+2} - 2\,\mathbf{a}_{n+1} - 8\,\mathbf{a}_n = 144\ n\,4^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.
(se sugiere buscar una solución de la forma $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{z}_n = n\ (k\,n + h)\ 4^n$ siendo $k,\ h$ números reales).

(d) Determine todas las soluciones de $(\mathbf{E})$ $\mathbf{a}_{n+2} - 2\,\mathbf{a}_{n+1} - 8\,\mathbf{a}_n = 16\ n\ (2\,2^n + 9\,4^n)$ con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

12. Se considera la ecuación en diferencia finita $(\mathbf{E})$ $3\,a_{n+2} - 4\,a_{n+1} - 4\,a_n = 8\left(\frac{2}{3}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

(a) Halle todas las soluciones de la ecuación $(\mathbf{E})$.

(b) Para cada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E})$, determine $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(c) Determine $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solución de $(\mathbf{E})$ que cumple $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 6$.