Modelos dinámicos y computacionales en Economía

Modelos Basados en Agentes: Distribución

Licenciatura en Economía, FCEA, UDELAR

16 de noviembre de 2021

Contenido de la clase:

- Problema de la distribución del ingreso en Economía
- Distribuciones en los sistemas económicos
- Ejemplo: Un modelo simple de intercambio

- Un ejemplo clásico: ¿cómo estudiamos la distribución en modelos con un individuo (o *n individuos iguales*)?
- Problema: la naturaleza del fenómeno a analizar.
- ¿Cuáles son las causas de la desigualdad?
- ¿Existen patrones o regularidades empíricas y estadísticas comunes a la distribución del ingreso en diferentes sociedades y distintos momentos del tiempo?
- Pareto (1906): una fracción pequeña de la sociedad controla una alta proporción de la riqueza.

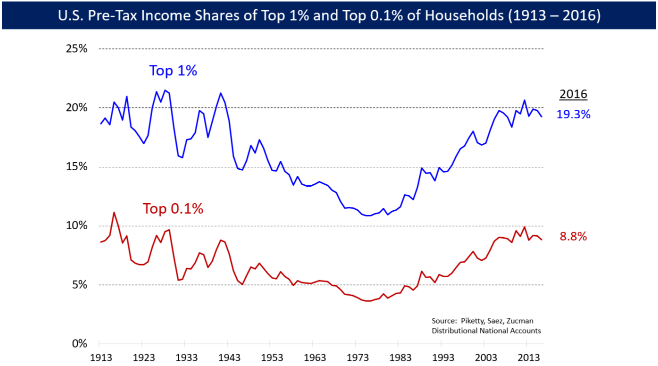
Distribución del ingreso en Economía

Ley de Pareto

- Se utilizan los términos distribución de potencia (*power law*) y ley de Pareto para describir eventos tales como:
    - hay pocas ciudades "grandes" y muchas ciudades "pequeñas".
    - Pocas palabras que se utilizan con mucha frecuencia, mientras que muchas se utilizan pocas veces.
    - Son pocos los grandes terremotos (según la escala de Richter) pero son muchos los movimientos de baja intensidad.
- Como observó Pareto, la distribución del ingreso sigue una *power law*, con un 80% de los ingresos en manos del 20% más rico (regla 80/20).

Distribución del ingreso en Economía

Evolución de la distribución del ingreso en EE.UU. para el top 1% y el top 0.1%. Fuente: Piketty et al. (2018)[1]



[1] Piketty, T., Saez, E., & Zucman, G. (2018). Distributional national accounts: methods and estimates for the United States. *The Quarterly Journal of Economics, 133*(2), 553-609.

Función de distribución:

$$p(x) = Ax^{-\alpha}$$

Si tomamos logaritmos, esta relación puede describirse a partir de una recta con pendiente negativa (e igual a α en valor absoluto):

$$ln[p(x)] = ln[A] - \alpha ln[x]$$

A partir de la función de distribución acumulada, se puede llegar a la siguiente relación:

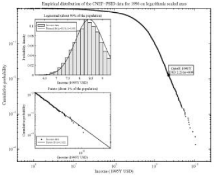
$$W = P^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}}$$

Donde W es la proporción del ingreso en manos de la fracción P más rica.

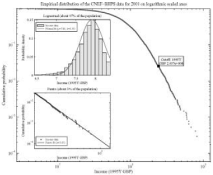
- La relación 80/20 (observada), ¿para qué valor de α se aplica?
- ¿Cuál es el valor aproximado de α para EE.UU. en 2016?

Distribución del ingreso en Economía

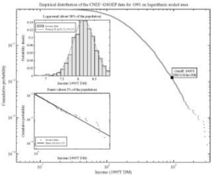
Evidencia empírica [2]



(a) US (1996)



(b) UK (2001)



(c) Germany (1991)

[2] Clementi, F., & Gallegati, M. (2005). Pareto's law of income distribution: Evidence for Germany, the United Kingdom, and the United States. In Econophysics of wealth distributions (pp. 3-14). Springer, Milano.

- En Economía, hay muchas distribuciones que son diferentes a la distribución Normal.
- Distribuciones estables: familia de distribuciones que incluye a la distribución Normal.
- Fenómenos críticos como generadores de procesos agregados que se distribuyen bajo leyes de escala.
- A tomar en cuenta:
    - ¿existen valores representativos del conjunto de datos?
    - ¿qué podemos decir de la incertidumbre?
    - la presencia de una estructura de interdependencias en los datos, ¿qué consecuencias tiene al momento de hacer inferencia?
    - ¿cómo podemos analizar la existencia de leyes de escala en un conjunto de datos?

función de distribución: $p(x) = Ax^{-\alpha}$

función de distribución acumulada:

$$\int_{x_{min}}^{\infty} p(x)dx = \int_{x_{min}}^{\infty} Ax^{-\alpha}dx = \frac{A}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_{x_{min}}^{\infty} = 1$$

Lo cual se cumple si $\alpha > 1$.

Primer momento:

$$\langle x \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^1 p(x)dx = \int_{x_{min}}^{\infty} Ax^{1-\alpha}dx = \frac{A}{2-\alpha}\left[x^{2-\alpha}\right]_{x_{min}}^{\infty}$$

...es finito si:

función de distribución: $p(x) = Ax^{-\alpha}$

función de distribución acumulada:

$$\int_{x_{min}}^{\infty} p(x)dx = \int_{x_{min}}^{\infty} Ax^{-\alpha}dx = \frac{A}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_{x_{min}}^{\infty} = 1$$

Lo cual se cumple si $\alpha > 1$.

Primer momento:

$$\langle x \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^{1} p(x)dx = \int_{x_{min}}^{\infty} Ax^{1-\alpha}dx = \frac{A}{2-\alpha}\left[x^{2-\alpha}\right]_{x_{min}}^{\infty}$$

...es finito si: $\alpha > 2$

Segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{x_{min}}^{\infty} A x^{2-\alpha} dx = \frac{A}{3-\alpha} \left[x^{3-\alpha} \right]_{x_{min}}^{\infty}$$

...es finito si:

Segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{x_{min}}^{\infty} A x^{2-\alpha} dx = \frac{A}{3-\alpha} \left[x^{3-\alpha} \right]_{x_{min}}^{\infty}$$

...es finito si: $\alpha > 3$

En general:

$$\langle x^m \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^m p(x) dx = \frac{\alpha - 1}{\alpha - m - 1} x_{min}^m$$

por lo cual $\langle x^m \rangle$ es finito para $\alpha > m$.

¿Momentos infinitos?

Segundo momento:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{x_{min}}^{\infty} A x^{2-\alpha} dx = \frac{A}{3-\alpha} \left[x^{3-\alpha} \right]_{x_{min}}^{\infty}$$

...es finito si: $\alpha > 3$

En general:

$$\langle x^m \rangle = \int_{x_{min}}^{\infty} x^m p(x) dx = \frac{\alpha - 1}{\alpha - m - 1} x_{min}^m$$

por lo cual $\langle x^m \rangle$ es finito para $\alpha > m$.

¿Momentos infinitos? en la realidad, calculamos los momentos sobre una muestra finita de realizaciones de la variable aleatoria. Son propiedades asintóticas, por lo tanto en la realidad siempre vamos a encontrar valores finitos.

Alta volatilidad en la variación de precios de los productos: cambios en los precios relativos no captados por el índice general.

- Estos resultados nos indican que a medida que aumenta la cantidad de productos en el índice, la volatilidad del índice aumenta.
- En el ejemplo siguiente, se simula el desvío estándar del índice mediante bootstrap, para distintos tamaños del índice (15, 30, 60, 150 productos) y se compara con la serie original.

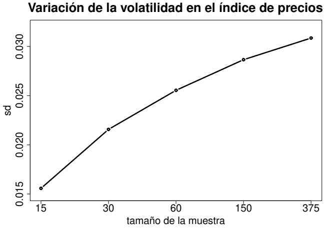


Figure: Aumento de la volatilidad de la serie, respecto de la cantidad de productos. Elaboración propia en base a datos del INE, Uruguay.

- una distribución $p(x)$ es libre de escala si $p(bx) = g(b)p(x)$,
- ejemplo: $p(bx) = A(bx)^{-\alpha} = (Ab^{-\alpha})x^{-\alpha} \longrightarrow p(bx) = Bx^{-\alpha}$, con $B = (Ab^{-\alpha})$
- es decir que es proporcional a la distribución original.
- por lo cual, este factor b es irrelevante al momento de analizar las propiedades: desaparece al normalizar la distribución.
- *Propiedad de universalidad*

	x_{min}	α
frecuencia de uso de palabras	1	2.20
número de citas en artículos	100	3.04
número de clics en sitios web	1	2.4
llamadas recibidas	10	2.22
magnitud de terremotos	3.8	3.04
diámetro de los cráteres en la Luna	0.01	3.14
intensidad de llamaradas solares	200	1.83
frecuencia de nombres	10000	1.94
población en ciudades (US)	40000	2.3

1. Combinación de exponenciales:
   supongamos que y sigue una distribución exponencial; luego, x se distribuye: $x \sim e^{by}$. En este caso, la función de distribución de x sigue una ley de potencias.
2. inversas de cantidades:
   supongamos que y se distribuye $p(y)$, pero nosotros estamos interesados en su recíproco x ($x = 1/y$). Para valores altos de x, $p(x) \sim x^{-2}$
   (en general, para $x = y^{-\gamma}$ tenemos que $p(x) = x^{-\alpha}$, con $\alpha = 1 + 1/\gamma$).
3. Random walks: Gambler's ruin
4. Procesos de Yule: la distribución de especies en un grupo taxonómico sigue una ley de potencias.

Leyes de Potencia II

Mecanismos para generar leyes de potencia

5. Transiciones de fase y fenómenos críticos:
   - En muchos casos los fenómenos macroscópicos tienen un solo estado; sin embargo bajo ciertas circunstancias esto puede cambiar y el sistema pasa a ser libre de escala.
   - En la vecindad de la transición de fase ocurren fenómenos críticos, entre otros la aparición de leyes de potencia.
   - ejemplo: *fire model* (modelos de percolación)
6. Criticalidad auto-organizada (SOC):
   - No es casualidad que en tantas ocasiones ocurran este tipo de fenómenos críticos.
   - Bak et al. (1987): los sistemas se auto-organizan para ir hacia ese estado crítico.
   - Ejemplo: *modelo de la pila de arena*.

Un modelo simple de intercambio[3]

En este caso, analizaremos un modelo muy simple de intercambio:

- Supongamos que tenemos un mundo con 500 individuos, cada uno con \$100 de riqueza inicial.
- En cada tick del reloj, se le entrega \$1 a otra persona *al azar*.
- En este modelo, la cantidad de dinero permanece fija y no podemos pedir prestado.

Preguntas:

- ¿Qué ocurrirá con la distribución del dinero, luego de 10000 períodos?
- ¿La riqueza se concentrará en unas pocas manos o será distribuida equitativamente?

[3] Dragulescu, A., & Yakovenko, V. M. (2000). Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 17*(4), 723-729.

Un modelo simple de intercambio (cont.)

- En **Archivo / Biblioteca de Modelos / IABM Textbook / chapter 2 / "Simple Economy"**
- Chequear:
    - ¿cuántos tipos de agentes tenemos en este modelo?
    - ¿qué variables son específicas de estos agentes?
    - ¿cuáles son las variables globales?
    - ¿qué procedimientos hay en este modelo?

Un modelo simple de intercambio (cont.)

- No hay variables globales. Hay algunos parámetros ya incluidos en el código.
- Tipos de agentes: sólo turtles (hogares en este caso).
- Variable específica: **wealth**.
- Procedimientos: **SETUP**, **GO**, **TRANSACT**.

Un modelo simple de intercambio (cont.)

Ejercicio 1:

- ¿Qué ocurrirá con la distribución del dinero, luego de 10000 períodos?
- ¿La riqueza se concentrará en unas pocas manos o será distribuida equitativamente?

Ejercicio 2:

- Modificar la cantidad de agentes (aumentar a 1000).
- Dar la posibilidad de endeudarse (hasta un tope de $20).
- Modificar la cantidad de dinero a transferir:
  - una cantidad fija > 1
  - una cantidad aleatoria: $U \sim [0; 2]$

Un modelo simple de intercambio (cont.)

Algunos resultados

- La distribución resultante no es Gaussiana.
- Pertenece a una amplia clase de modelos donde una cantidad fija es intercambiada en un sistema cerrado.
- Distribución de Boltzmann: para un sistema de estas características, se encuentra que la distribución final es del tipo exponencial.
- Este tipo de distribuciones son comunes en la *mecánica estadística*, que utiliza la teoría de la probabilidad para analizar el comportamiento termodinámico de sistemas con gran cantidad de partículas.

Un modelo simple de intercambio (cont.)

Algunos resultados

¿Qué sucede cuando permitimos que los agentes se endeuden?

- En este caso, la distribución resultante sigue siendo exponencial.
- La diferencia radica en que existe una mayor desigualdad.
- Esto sucede porque sigue siendo un sistema cerrado. Si asumimos que la riqueza puede acumularse, crearse o destruirse, entonces la distribución resultante es una *power law*.

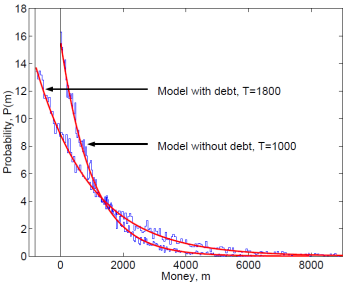


Figure: Distribución del ingreso con y sin posibilidades de endeudameinto. Fuente: Dragulescu & Yakovenko (2000).