Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

2021

Ecuaciones en diferencias de orden superior

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

La forma normal de una ecuación en diferencias lineal de orden k es

$$x_{t+k} + p_t^1 x_{t+k-1} + p_t^2 x_{t+k-2} + \cdots + p_t^k x_t = a_t \tag{1}$$

Si $a_t = 0, \forall t \in \mathbb{N}$, la ecuación (1) es homogénea. Como sucede en el caso de las ecuaciones de primer orden, si se conocen las condiciones iniciales x_0, $x_1, \ldots, x_{k-1}$, entonces, para $t \geq t_0$, *existe una única* solución $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de la ecuación (1) que verifica estas condiciones iniciales.
Esta solucíon queda definida en modo inductivo. La cuestión es ahora como se hace para encontrar una solución cerrada de la ecuación (1).
Esto en general no es sencillo, pero, como veremos mas adelante, si los coeficientes de la ecuación (1) son constantes, entonces es posible encontrar una solución cerrada.

Ecuación homogénea

propiedades de la ecuación homogénea

$$x_{t+k} + p_t^1 x_{t+k-1} + p_t^2 x_{t+k-2} + \cdots + p_t^k x_t = 0, \quad \forall t \geq 2 \tag{2}$$

Teorema

El conjunto de soluciones de la ecuación (2) es un espacio vectorial de dimensión k.

Ejercicios

1. Mostrar que t y 2^t son soluciones linealmente independientes de la ecuación
$$x_{t+2} - \frac{3t-2}{t-1}x_{t+1} + \frac{2t}{t-1}x_t = 0$$
y hallar la solución que verifica $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$.
2. Mostrar que $2^t, (-2)^t$ y $(-3)^t$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación
$$x_{t+3} + 3x_{t+2} - 4x_{t+1} - 12x_t = 0$$
y hallar la solución que verifica $x_0 = 3, x_1 = 3$ y $x_2 = 17$.

Coeficientes constantes

Consideremos la ecuación homogénea de orden k con coeficientes constantes

$$x_{t+k} + p_1 x_{t+k-1} + p_2 x_{t+k-2} + \cdots + p_k x_t = 0 \tag{3}$$

Asociada a la ecuación (3) tenemos la ecuación característica

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1} \lambda + p_k = 0 \tag{4}$$

Ecuación característica

Sabemos que una base del espacio vectorial formado por todas las sucesiones $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ que verifican la ecuación en diferencia finita $x_{t+1} = \lambda x_t$ con $t = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ es el conjunto $\{(\lambda^t)_{t\in\mathbb{N}}\}$
Vamos a usar la misma idea para encontrar soluciones de

$$x_{t+k} + p_1 x_{t+k-1} + p_2 x_{t+k-2} + \cdots + p_k x_t = 0$$

esto es buscar soluciones de la forma λ^t, para que valores de λ λ^t es solución.

λ^t es solución de

$$x_{t+k} + p_1 x_{t+k-1} + p_2 x_{t+k-2} + \cdots + p_k x_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda^{t+k} + p_1 \lambda^{t+k-1} + p_2 \lambda^{t+k-2} + \cdots + p_k \lambda^t = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \lambda^t \left(\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k \right) = 0$$

$\Rightarrow \lambda^t$ es solución si λ es raiz del polinomio $P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \cdots + p_k$, que es la **ecuación característica** o **polinomio característico**.

Cada raíz de la ecuación característica
$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k$
nos da una solución de la ecuación
$x_{t+k} + p_1 x_{t+k-1} + p_2 x_{t+k-2} + \cdots + p_k x_t = 0$ del modo siguiente.

1. Una raíz real simple λ nos brinda la solución $x_t = \lambda^t$
2. Una raíz real doble λ nos brinda dos soluciones $a_t = \lambda^t$ y $b_t = t\lambda^t$
3. Una raíz real triple λ nos brinda tres soluciones $a_t = \lambda^t$, $b_t = t\lambda^t$y $c_t = t^2\lambda^t$
4. Dos raíces complejas conjugadas $\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ nos brindan dos soluciones $p_t = \rho^t \cos t\varphi$ y $q_t = \rho^t \sin t\varphi$

A partir de esto podemos formar una base de las soluciones.

Ejemplos

1. Mostrar que la solución general de la ecuación

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0, \quad \text{es} \quad x_t = c_1 + c_2 2^t$$

2. Mostrar que la solución de la ecuación

$$x_{t+3} - 7x_{t+2} + 16x_{t+1} - 12x_t = 0$$

que verifica las condiciones $x_0 = 0, x_1 = 1$ y $x_2 = 1$

$$\text{es } x_t = 3.2^t + 2t2^t - 3^{t+1}$$

3. Mostrar que la solución general de la ecuación

$$x_{t+2} + x_t = 0, \quad \text{es } x_t = c_1 \cos t\frac{\pi}{2} + c_2 \sin t\frac{\pi}{2}$$

Ecuación no homogénea

Propiedades de la ecuación no homogénea

$$x_{t+k} + p_t^1 x_{t+k-1} + p_t^2 x_{t+k-2} + \cdots + p_t^k x_t = g_t \tag{5}$$

donde p_t^i es una sucesión dada (para cada $i = 1, 2, \ldots, k$) y g_t también.

Teorema

La solución general de la ecuación no homogénea (5) es la suma de una solución particular de ella misma **mas** *la solución general de la ecuación homogénea.*

Observación

Esto implica que para resolver la ecuación no homogénea (5) o completa, tenemos que encontrar una solución particular y resolver la ecuación homogénea.

Ejemplo

Mostrar que la solución general de la ecuación

$$x_{t+2} - 4x_t = 2$$

es

$$x_t = -\frac{2}{3} + C_1 \left(-2\right)^t + C_2 2^t, \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}$$

Dinámica de las soluciones

Nos limitaremos a analizar el caso de las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden 2:

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \tag{6}$$

Supongamos que las raices de la ecuación característica son λ_1 y λ_2. Entonces tenemos tres casos.

1 λ_1 y λ_2 son dos raices reales distintas. Asumamos sin perder generalidad que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. La solución general de la ecuación (6) puede ser escrita como

$$x_t = \lambda_1^t \left(C_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \right)$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{t \to +\infty} x_t = \lim_{t \to +\infty} C_1 \lambda_1^t$$

$$\lim_{t \to +\infty} x_t = \lim_{t \to +\infty} C_1 \lambda_1^t$$

1. si $\lambda_1 > 1$, entonces x_t diverge (0 es un equilibrio inestable. Repulsor si tambien es $\lambda_2 \geq 1$ y punto silla si es $\lambda_2 < 1$)
2. si $\lambda_1 = 1$, entonces x_t converge a C_1 (0 es un equilibrio estable no atractor)
3. si $-1 < \lambda_1 < 1$, entonces x_t converge a 0 (0 es un equilibrio estable atractor)
4. si $\lambda_1 = -1$, entonces x_t oscila entre dos valores (0 es un equilibrio estable no atractor)
5. si $\lambda_1 < -1$, entonces x_t diverge (0 es un equilibrio repulsor)

2 Si $\lambda_1 = \lambda_2$, la solución general de la ecuación (6) puede ser escrita como

$$x_t = \lambda_1^t \, (C_1 + C_2 t)$$

Luego tenemos que

1. si $|\lambda_1| \geq 1$, entonces x_t diverge (0 es un equilibrio inestable repulsor)
2. si $|\lambda_1| < 1$, entonces converge a 0 (0 es un equilibrio estable atractor)

3 Si λ_1 y λ_2 son dos raíces complejas conjugadas:

- $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ tiene por raíces los **números complejos**

$$\lambda = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2} \iff \lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm i\sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{4}}$$

$$\iff \qquad \lambda = a \pm b\, i$$

$$\uparrow$$

$$a = -\frac{\alpha}{2} \ \ y \ \ b = \sqrt{\frac{4\beta - \alpha^2}{4}}$$

- Se escribe la expresión polar del complejo $z = a + b\, i$; o sea, $z = r\,(cos\,(\varphi) + i\, sen\,(\varphi)) = r_\varphi$ siendo
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\varphi \in (-\pi, \pi]$ es el único real que verifica las ecuaciones $\begin{cases} cos\,(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ sen\,(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \neq 0 \end{cases}$

3 Raices complejas $\lambda_1; \lambda_2 = \rho\,(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$. La solución general de la ecuación (6) puede ser escrita como

$$x_t = \rho^t\,(C_1 \cos t\varphi + C_2 \sin t\varphi)$$

Luego tenemos que

1. si $\rho > 1$, entonces x_t diverge (0 es un equilibrio inestable repulsor)
2. si $\rho = 1$, entonces x_t oscila (0 es un equilibrio estable no atractor)
3. si $0 \leq \rho < 1$, entonces x_t converge a 0 (0 es un equilibrio estable atractor)

Podemos resumir la discución anterior en el siguiente teorema.

Teorema

Las soluciones de la ecuación (6) convergen a cero si y solo si $\text{máx}\left\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\right\} < 1.$

Teorema (condiciones de estabilidad)

La condición necesaria y suficiente para que las soluciones de la ecuación (6) convergen a cero es que los coeficientes a y b verifiquen:

$$\begin{cases} 1 + a + b > 0 \\ 1 - b > 0 \\ 1 - a + b > 0 \end{cases} \tag{7}$$

(6) $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0$

condiciones bajo las cuales las trayectorias de solución de la ecuación en diferencias (6) resulta en un **comportamiento cíclico** a lo largo del tiempo.

Teorema

Una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes tendrá como solución trayectorias intertemporales cíclicas u oscilantes en la medida que se den al menos uno de los siguientes casos:

- *raíces características complejas con parte imaginaria no nula*
- *al menos una raíz característica real negativa*

Ajustes de mercado y espectativas racionales

La teoría de las espectativas racionales fué propuesta por primera vez por John F. Muth de la Indiana University en los años 60 (Muth, J. A. Rational Expectations and the Theory of Price Movements." *Econometrica* 29, no. 6 (1961): 315-35).

El introdujo la teoría para describir diversas situaciones económicas donde el producto depende parcialmente de lo que la gente espera que va a suceder.

El precio de un bien agrícola, por ejemplo, depende en la cantidad de hectáreas plantadas, que a su vez depende del precio que los productores esperan que se de cuando vayan a vender su producto. Situaciones similares se observan en los valores de inflación, tasas de cambio, precios de stocks, etc.

El Modelo

Consideremos como en el trabajo original de Muth un mercado cerrado con un desfasaje en la producción.

Suponemos (como en el modelo de la telaraña con espectativas) que el consumo actual C_t depende del precio corriente p_t, mientras que la producción corriente P_t depende del precio p_t^e que se esperaba fuera el del período corriente.

Asumimos ademas que el bien producido no es perecedero, por lo que existen inventarios I_t, que se tienen con fines especulativos.

Suponemos ademas que el mercado esta en equilibrio de modo que en cada período la suma del consumo e inventario corriente es igual a la suma de la producción corriente mas el inventario del período precedente.

Tenemos entonces el siguiente modelo, donde las variables están medidas como desviaciones del equilibrio:

$$\begin{cases} I_t = \alpha \left(p^e_{t+1} - p_t \right) \\ C_t = -\beta p_t \\ P_t = \gamma p^e_t \\ C_t + I_t = P_t + I_{t-1} \end{cases} \tag{8}$$

donde α, β y γ son constantes positivas. Asumamos ademas que valen las espectativas racionales

$$p^e_t = p_t ; \forall t$$

y entonces, susttituyendo en (8) obtenemos la siguiente ecuación en diferencias

$$p_{t+1} - \left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} \right) p_t + p_{t-1} = 0$$

nos da la evolución del precio de mercado

$p_{t+1} - \left(\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\right) p_t + p_{t-1} = 0$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - \left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha}\right) \lambda + 1 = 0$$

y tenemos que su discriminante

$$\Delta = \left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha}\right)^2 - 4$$

es positivo, por lo que tiene dos raíces reales. Ademas el producto de las raíces es igual a 1 y la suma $\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}$, por lo que ambas raíces son positivas y una inversa de la otra. Entonces cualquiera sea la condición inicial no nula, p_t diverge.

El modelo de Metzler de ciclos de inventario

Uno de los primeros trabajos que tratan de explicar el rol de las fluctuaciones cíclicas sobre las fluctuaciones de inventarios el el trabajo de Metzler, L.A. (1941) "The Nature and Stability of Inventory Cycles", Review of Economic Studies, Vol. 23, p.113-29.
La idea esencial de Metzler es que los productores desean mantener un stock de inventario como una parte de las ventas esperadas en el futuro, pero debido a los desfasajes entre producción y ventas, la política de inventario elegida por los productores afecta la conducta dinámica de la economía.

El modelo de Metzler

Sea S_t el stock de inventario. Las ventas coinciden con el consumo C_t. Por simplicidad, podemos asumir que hay expectativas adaptativas estáticas de modo que las ventas previstas en el tiempo t sean simplemente ventas del período pasado:

$$C_t^e = C_{t-1}$$

Entonces la cantidad deseada de inventario en el tiempo t es

$$S_t = kC_{t-1}$$

donde el parámetro k (llamado el acelerador de inventario) refleja la proporción de las ventas previstas que los productores desean mantener como inventario ($0 < k < 1$). Supongamos que tenemos una función de consumo no-desfasada simple

$$C_t = cY_t \text{ }, 0 < c < 1$$

$$S_t = kC_{t-1} = kcY_{t-1}$$

es el inventario deseado en el tiempo t. Sin embargo debemos tener en cuenta que pudo haber inventario heredado del período pasado. A saber, retrasándo todo una vez,

$$S_{t-1} = kC_{t-2} = kcY_{t-2}$$

era el nivel deseado del inventario en el período pasado. No hay ninguna razón para suponer que este inventario era correcto, y las venta esperadas en el período precedente $C^e_{t-1} = C_{t-2}$ pueden haber sido diferentes de las ventas actuales C_{t-1}. Entonces la diferencia

$$C_{t-1} - C_{t-2} = c\left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$$

refleja la discrepancia inesperada en ventas a partir de las expectativas y todo lo no vendido

Luego, los inventarios que resultan a finales del período $t-1$ son $S_{t-1}-c\left(Y_{t-1}-Y_{t-2}\right)$ y por lo tanto

$$S_{t-1}-c\left(Y_{t-1}-Y_{t-2}\right)=kcY_{t-2}-c\left(Y_{t-1}-Y_{t-2}\right)$$

representa el stock de inventario a finales del período $t-1$.
Ahora bien, la inversión total en el período t (llamada I_t) se divide en el aumento del stock de capital $\left(I_t^K\right)$ y el aumento del inventario $\left(I_t^S\right)$de modo que

$$I_t=I_t^K+I_t^S$$

Por simplicidad, suponemos que I_t^K es autónomo y constante, es decir:

$$I_t^K=\bar{I}$$

Entonces la inversión total es simplemente inversión en inventarios. La inversión de los productores en inventarios en el tiempo t es la diferencia entre el stock de inventario deseado en el tiempo t $\left(S_t\right)$ y el stock de inventario remanente del período $t-1$ (como vimos, $S_{t-1}-c\left(Y_{t-1}-Y_{t-2}\right)$), o:

$$I_t^S=S_t-\left[S_{t-1}-c\left(Y_{t-1}-Y_{t-2}\right)\right] \tag{9}$$

Substituyendo S_t y S_{t-1} en (9) tenemos que:

o simplemente:

$$I_t^S = (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

es nuestra inversión de inventario deseada en el tiempo t.
Ahora bien, se produce para satisfacer las ventas esperadas (C_t^e) y acumular los inventarios deseados (I_t^S) y el capital (I_t^K) de modo que:

$$Y_t = C_t^e + I_t^K + I_t^S \tag{10}$$

(que es evocador pero no lo mismo que nuestro viejo requisito del equilibrio de mercado de las mercancías - la diferencia es que tenemos las expectativas de las firmas en el consumo en vez del consumo real incorporado en esta ecuación). Entonces substituyendo nuestros términos en (10) tenemos que:

$$Y_t = cY_{t-1} + \bar{I} + (1+k)\, c\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

y por lo tanto es:

$$Y_t - c\,(2+k)\, Y_{t-1} + (1+k)\, cY_{t-2} = \bar{I}$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes cosntantes

$Y_t - c\,(2+k)\,Y_{t-1} + (1+k)\,cY_{t-2} = \bar{I}$

La solución particular (que es un equilibrio) es simplemente:

$$Y_p = \frac{\bar{I}}{1-c}$$

mientras que es la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - c\,(2+k)\,\lambda + (1+k)\,c = 0$$

El discriminante de la ecuación característica de la ecuación es

$$\Delta = c^2\,(2+k)^2 - 4\,(1+k)\,c \tag{11}$$

y por lo tanto $\Delta \geq 0$ si solo si

$$c \geq \frac{4\,(1+k)}{(2+k)^2} \tag{12}$$

o, en forma equivalente

$$k \leq \frac{2}{c}\left(1-c-\sqrt{1-c}\right) \text{ o } \frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \leq k$$

Pero como es $0 < c < 1$ entonces $1-c < \sqrt{1-c} \Rightarrow$
$\frac{2}{c}\left(1-c-\sqrt{1-c}\right) < 0$ y la desigualdad izquierda no se verifica nunca.
Entonces la condición (12) es equivalente a

$$\frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \leq k$$

Las condiciones de estabilidad son

$$\left\{\begin{array}{c} 1 - c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(2+k) + (1+k)\,c > 0 \end{array}\right. \qquad (13)$$

o, equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{c} 1 - c > 0 \\ 1 - (1+k)\,c > 0 \\ 1 + c\,(3+k) > 0 \end{array}\right. \qquad (14)$$

Dado que la primera y la última condición se verifican siempre, la condición de estabilidad del equilibrio es

$$c < \frac{1}{1+k}$$

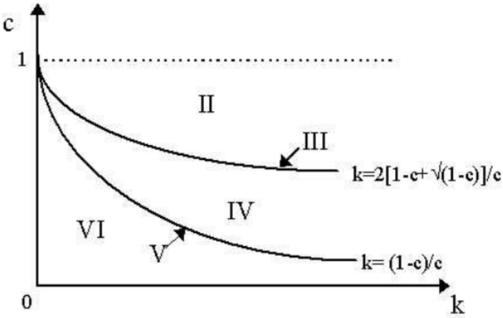
o, en forma equivalente

$$k < \frac{1-c}{c}$$

En la siguiente figura hemos representado las curvas

$$k = \frac{1-c}{c};\ k \leq \frac{2}{c}\left(1 - c - \sqrt{1-c}\right)$$

que dividen el plano kOc en 3 regiones donde la conducta dinámica del modelo puede ser diferenciada.



- a **Región II**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \\ k > \frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices reales positivas e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

b **Curva III**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \\ k = \frac{2}{c}\left(1-c+\sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay una raíz real doble positiva e inestabilidad. El sistema monótonamente explosivo.

c **Región IV**: Como es

$$\begin{cases} k > \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas e inestabilidad. El sistema muestra oscilaciones explosivas.

d **Curva V**: Como es

$$\begin{cases} k = \frac{1-c}{c} \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay raices complejas conjugadas con módulo menor que uno y por lo tanto el sistema es cíclico.

e **Región VI**: Como es

$$\begin{cases} k < \frac{1-c}{c} \\ \\ k < \frac{2}{c}\left(1 - c + \sqrt{1-c}\right) \end{cases}$$

entonces hay dos raices complejas y estabilidad. El sistema muestra convergencia (oscilatoria) al equilibrio.

Esto muestra que las políticas de inventario de las firmas pueden provocar conductas dinámicas muy diferentes.

Bibliografía:

Ignacio Aemilius (2012) Notas del curso Cálculo III

cap. 6 - Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido. Thomson Editorial. México.

2021

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY