Modelos Dinámicos y Computacionales en Economía

Presentación del curso
2021

Gabriel Brida - Emiliano Alvarez - Gaston Cayssials

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Presentación del curso

Aspectos formales

Presentación del curso

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.

Presentación del curso

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.
- forma de evaluación:

Presentación del curso

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.
- forma de evaluación:
    1. una prueba escrita (50 %) durante la última clase de la primer mitad del curso, el jueves 7 de octubre en horario de clase

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.
- forma de evaluación:
  1. una prueba escrita (50 %) durante la última clase de la primer mitad del curso, el jueves 7 de octubre en horario de clase (presencial y fecha a confirmar)

Presentación del curso

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.
- forma de evaluación:
  1. una prueba escrita (50 %) durante la última clase de la primer mitad del curso, el jueves 7 de octubre en horario de clase (presencial y fecha a confirmar)
  2. un trabajo escrito grupal presentación oral (50 %)
     fecha limite de entrega: último día de clase

Presentación del curso

Aspectos formales

- Dos clases semanales, martes y jueves, hasta el martes 5 de octubre virtual.
- forma de evaluación:
  1. una prueba escrita (50 %) durante la última clase de la primer mitad del curso, el jueves 7 de octubre en horario de clase (presencial y fecha a confirmar)
  2. un trabajo escrito grupal presentación oral (50 %)
     fecha limite de entrega: último día de clase
- Bibliografía: carpeta de dropbox, enviar un mail a gacayssials@gmail.com

Contenido sintético

1. El tiempo en economía.
2. Conceptos básicos de dinámica discreta
3. Dinámicas caóticas
4. Modelo de Solow y la extensión de Day
5. Segundo orden y sistemas dinámicos
6. Modelos de inventario de Metzler
7. Modelo de Sraffa y una extensión
8. Modelo de la telaraña
9. Modelos de inflación de costos.
10. Introducción a la complejidad.
11. Modelos basados en agentes heterogéneos.

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

- La naturaleza del tiempo

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

- La naturaleza del tiempo
- modelos como una descripción del mundo físico, en particular los modelos dinámicos

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

- La naturaleza del tiempo
- modelos como una descripción del mundo físico, en particular los modelos dinámicos
- cual es la mejor forma de tratar el tiempo en economía?

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

- La naturaleza del tiempo
- modelos como una descripción del mundo físico, en particular los modelos dinámicos
- cual es la mejor forma de tratar el tiempo en economía?
- como sea que se opte por modelar el tiempo, cuales son las implicaciones?

El tiempo en economía

"El elemento TIEMPO... es el centro de la principal dificultad de casi todo problema económico". A. Marshall (1890, p. VII del prefacio a la 1ª edición de Principles of Economics)

- La naturaleza del tiempo
- modelos como una descripción del mundo físico, en particular los modelos dinámicos
- cual es la mejor forma de tratar el tiempo en economía?
- como sea que se opte por modelar el tiempo, cuales son las implicaciones?
- algún resultado depende crucialmente de la forma de modelar el tiempo?

Modelización: modelo en tiempo continuo o discreto?

- Al momento de formular un modelo dinámico, donde el objetivo es estudiar las **trayectorias** especificas en el **tiempo** de las variables, determinar si dado un tiempo suficiente estas convergen (o no) a ciertos valores de equilibrio, describir la interrelación y el **comportamiento temporal** de las variables relevantes, una elección fundamental que debe tomar el investigador es la forma de modelar el tiempo.

Modelización: modelo en tiempo continuo o discreto?

- Al momento de formular un modelo dinámico, donde el objetivo es estudiar las **trayectorias** especificas en el **tiempo** de las variables, determinar si dado un tiempo suficiente estas convergen (o no) a ciertos valores de equilibrio, describir la interrelación y el **comportamiento temporal** de las variables relevantes, una elección fundamental que debe tomar el investigador es la forma de modelar el tiempo.
- En tiempo continuo, t puede tomar cualquier valor en la recta real y la descripción es instante a instante.

Modelización: modelo en tiempo continuo o discreto?

- Al momento de formular un modelo dinámico, donde el objetivo es estudiar las **trayectorias** especificas en el **tiempo** de las variables, determinar si dado un tiempo suficiente estas convergen (o no) a ciertos valores de equilibrio, describir la interrelación y el **comportamiento temporal** de las variables relevantes, una elección fundamental que debe tomar el investigador es la forma de modelar el tiempo.
- En tiempo continuo, t puede tomar cualquier valor en la recta real y la descripción es instante a instante.
- En tiempo discreto el tiempo transcurre en término de periodos, los ticks de un reloj.

- Desde una perspectiva matemática, en tiempo continuo se utiliza la teoría de las ecuaciones diferenciales, mientras que en tiempo discreto las ecuaciones en diferencia finita.

- Desde una perspectiva matemática, en tiempo continuo se utiliza la teoría de las ecuaciones diferenciales, mientras que en tiempo discreto las ecuaciones en diferencia finita.
- Implementación computacional: necesariamente discreto

tiempo continuo

$$S(t) = sY(t),\ s \text{constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

tiempo continuo

$$S(t) = sY(t),\ s \text{constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

$$I(t) = \dot{K}(t) = v\dot{Y}(t) = v\frac{\partial Y}{\partial t}(t),\ v \text{ constante (coeficiente de inversión)}$$

tiempo continuo

$$S(t) = sY(t), \; s \text{constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

$$I(t) = \dot{K}(t) = v\dot{Y}(t) = v\frac{\partial Y}{\partial t}(t), \; v \text{ constante (coeficiente de inversión)}$$

En Equilibrio:

$$S(t) = I(t)$$

tiempo continuo

$$S(t) = sY(t), \; s \text{constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

$$I(t) = \dot{K}(t) = v\dot{Y}(t) = v\frac{\partial Y}{\partial t}(t), \; v \text{ constante (coeficiente de inversión)}$$

En Equilibrio:

$$S(t) = I(t)$$

$$sY(t) = v\dot{Y}(t) \Leftrightarrow \dot{Y}(t) = \frac{s}{v}Y(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \frac{s}{v} Y(t)$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada instante.

Solución:

$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}$, donde $Y(0)$ es el producto inicial o en el instante $t = 0$

$$\dot{Y}(t) = \frac{s}{v} Y(t)$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada instante.

Solución:

$Y(t) = Y(0)e^{\left(\frac{s}{v}\right)t}$, donde $Y(0)$ es el producto inicial o en el instante $t = 0$

(Se puede verificar fácilmente que es la solución:

$\dot{Y}(t)$

$$\dot{Y}(t) = \frac{s}{v} Y(t)$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada instante.

Solución:

$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}$, donde $Y(0)$ es el producto inicial o en el instante $t = 0$

(Se puede verificar fácilmente que es la solución:
$\dot{Y}(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}(\frac{s}{v})$

$$\dot{Y}(t) = \frac{s}{v} Y(t)$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada instante.

Solución:

$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}$, donde $Y(0)$ es el producto inicial o en el instante $t = 0$

(Se puede verificar fácilmente que es la solución:
$\dot{Y}(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}(\dfrac{s}{v}) = \frac{s}{v} Y(t)$)

$$\dot{Y}(t) = \frac{s}{v} Y(t)$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada instante.

Solución:

$Y(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}$, donde $Y(0)$ es el producto inicial o en el instante $t = 0$

(Se puede verificar fácilmente que es la solución:
$\dot{Y}(t) = Y(0)e^{(\frac{s}{v})t}(\frac{s}{v}) = \frac{s}{v} Y(t))$
Conociendo $Y(0)$, el producto en el instante $t = 0$, y el valor de los parámetros s y v es posible conocer el valor del producto en cualquier instante.

tiempo discreto

$S_t = sY_t$, s constante (propensión marginal a ahorrar)

tiempo discreto

$$S_t = sY_t,\ s \text{ constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

el ahorro en el periodo t es una proporción constante del producto del periodo.

$$I_t = v(Y_t - Y_{t-1}),\ v \text{ constante (coeficiente de inversión)}$$

tiempo discreto

$$S_t = sY_t, \ s \text{ constante (propensión marginal a ahorrar)}$$

el ahorro en el periodo t es una proporción constante del producto del periodo.

$$I_t = v(Y_t - Y_{t-1}), \ v \text{ constante (coeficiente de inversión)}$$

En Equilibrio, el ahorro en el periodo t es igual a la inversión del periodo.

$$S_t = I_t$$

$$sY_t = v(Y_t - Y_{t-1}) \Leftrightarrow Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

$$Y_t = \frac{v}{v - s} Y_{t-1}$$

$$Y_t = \frac{v}{v - s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo.

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 \left(\frac{v}{v-s}\right)^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo 0}$$

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 (\frac{v}{v-s})^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo 0}$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t$

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 \left(\frac{v}{v-s}\right)^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo } 0$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t =$

Y_0

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 (\frac{v}{v-s})^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo 0}$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t = Y_0 \frac{v}{v-s} \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1}$

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 (\frac{v}{v-s})^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo 0}$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t = Y_0 \frac{v}{v-s} \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1} = \frac{v}{v-s}$

$$Y_t = \frac{v}{v - s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 \left(\frac{v}{v - s}\right)^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo } 0$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t = Y_0 \frac{v}{v-s} \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1} = \frac{v}{v-s} \left[Y_0 \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1} \right]$

$$Y_t = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Describe la dinámica del modelo, en este caso, la evolución temporal del producto en cada periodo. **Solución:**

$$Y_t = Y_0 (\frac{v}{v-s})^t \text{ , donde } Y(0) \text{ es el producto en el periodo } 0$$

Se puede verificar fácilmente que es la solución: $Y_t = Y_0(\frac{v}{v-s})^t =$

$$Y_0 \frac{v}{v-s} \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1} = \frac{v}{v-s} \left[Y_0 \left(\frac{v}{v-s}\right)^{t-1} \right] = \frac{v}{v-s} Y_{t-1}$$

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.
Por lo general la elección es por conveniencia técnica o preferencia del investigador y predomina (ampliamente) la formulación en tiempo continuo.

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.
Por lo general la elección es por conveniencia técnica o preferencia del investigador y predomina (ampliamente) la formulación en tiempo continuo.
Pero: No es trivial ni neutral

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.
Por lo general la elección es por conveniencia técnica o preferencia del investigador y predomina (ampliamente) la formulación en tiempo continuo.
Pero: No es trivial ni neutral

- la descripción del fenómeno puede ser muy distinta

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.
Por lo general la elección es por conveniencia técnica o preferencia del investigador y predomina (ampliamente) la formulación en tiempo continuo.
Pero: No es trivial ni neutral

- la descripción del fenómeno puede ser muy distinta
- puede tener consecuencias sobre los resultados y las predicciones que se derivan

Afecta algo la forma de modelizar el tiempo?

Comúnmente se cree que esta elección no afecta el comportamiento cualitativo del modelo, en el ejemplo visto anteriormente es similar en los dos modelos.
Es raro encontrar una justificación del porqué se opto por una u otra alternativa.
Por lo general la elección es por conveniencia técnica o preferencia del investigador y predomina (ampliamente) la formulación en tiempo continuo.
Pero: No es trivial ni neutral

- la descripción del fenómeno puede ser muy distinta
- puede tener consecuencias sobre los resultados y las predicciones que se derivan
- recomendaciones de política que de ellos se derivan.

Un ejemplo clásico: la ecuación logística.

Un ejemplo clásico: la ecuación logística.

en tiempo continuo

$$\dot{P}(t) = \frac{r}{\bar{P}} P(t)(\bar{P} - P(t)),\ r,\ \bar{P} > 0$$

Un ejemplo clásico: la ecuación logística.

en tiempo continuo

$$\dot{P}(t) = \frac{r}{\bar{P}} P(t)(\bar{P} - P(t)),\ r,\ \bar{P} > 0$$

Solución:

- si $P(0) = 0 \Rightarrow P(t) = 0,\ \forall t$

Un ejemplo clásico: la ecuación logística.

en tiempo continuo

$$\dot{P}(t) = \frac{r}{\bar{P}} P(t)(\bar{P} - P(t)),\ r,\ \bar{P} > 0$$

Solución:

- si $P(0) = 0 \Rightarrow P(t) = 0,\ \forall t$
- si $P(0) = \bar{P} \Rightarrow P(t) = \bar{P},\ \forall t$

- si $P(0) \neq 0$ y $P(0) \neq \bar{P}$:

- si $P(0) \neq 0$ y $P(0) \neq \bar{P}$:

$$P(t) = \frac{P(0)\bar{P}e^{rt}}{\bar{P} + P(0)(e^{rt} - 1)}$$

- si $P(0) \neq 0$ y $P(0) \neq \bar{P}$:

$$P(t) = \frac{P(0)\bar{P}e^{rt}}{\bar{P} + P(0)(e^{rt} - 1)}$$

convergen monótonamente a un valor constante para cualquier condición inicial $P(0)$

- Si $P(0) > \bar{P} \Rightarrow P$ decrece monótonamente y converge a $\bar{P}$

- si $P(0) \neq 0$ y $P(0) \neq \bar{P}$:

$$P(t) = \frac{P(0)\bar{P}e^{rt}}{\bar{P} + P(0)(e^{rt} - 1)}$$

convergen monótonamente a un valor constante para cualquier condición inicial $P(0)$

- Si $P(0) > \bar{P} \Rightarrow P$ decrece monótonamente y converge a $\bar{P}$
- Si $P(0) < \bar{P} \Rightarrow P$ crece monótonamente y converge a $\bar{P}$

ecuación logística en tiempo discreto

ecuación logística en tiempo discreto

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t), \ r, \ \bar{P} > 0$$

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t), \; r, \; \bar{P} > 0$$

Fijemos el valor de $\bar{P} = 1$ y tomemos distintos valores para r en $(0, 4)$

ecuación logística en tiempo discreto

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t), \ r, \ \bar{P} > 0$$

Fijemos el valor de $\bar{P} = 1$ y tomemos distintos valores para r en $(0, 4)$

$$P_{t+1} = 2P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 2)$$

ecuación logística en tiempo discreto

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t),\ r,\ \ \bar{P} > 0$$

Fijemos el valor de $\bar{P} = 1$ y tomemos distintos valores para r en $(0, 4)$

$$P_{t+1} = 2P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1,\ \ r = 2)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$

ecuación logística en tiempo discreto

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t), \ r, \ \bar{P} > 0$$

Fijemos el valor de $\bar{P} = 1$ y tomemos distintos valores para r en $(0, 4)$

$$P_{t+1} = 2P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 2)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$

ecuación logística en tiempo discreto

$$P_{t+1} = \frac{r}{\bar{P}} P_t(\bar{P} - P_t),\ r,\ \ \bar{P} > 0$$

Fijemos el valor de $\bar{P} = 1$ y tomemos distintos valores para r en $(0, 4)$

$$P_{t+1} = 2P_t(1 - P_t)\ \ (\bar{P} = 1,\ r = 2)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1 = 2(\frac{1}{2})\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{1}{2}$

Si $P_0 = \frac{1}{4}$

Si $P_0 = \frac{1}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{1}{4})\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

Si $P_0 = \frac{1}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{1}{4})\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\left(1 - P_1\right) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$

Si $P_0 = \frac{1}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{1}{4})\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\left(1 - P_1\right) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$
- $P_3 = \dfrac{255}{2(256)}$

Si $P_0 = \frac{1}{4}$

- $P_1 = 2P_0\,(1 - P_0) = 2(\frac{1}{4})\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\,(1 - P_1) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$
- $P_3 = \dfrac{255}{2(256)}$

es sencillo demostrar que en este caso converge a $\dfrac{1}{2}$

Si $P_0 = \frac{3}{4}$

Si $P_0 = \frac{3}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{3}{4})\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$

Si $P_0 = \frac{3}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{3}{4})\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\left(1 - P_1\right) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$

Si $P_0 = \frac{3}{4}$

- $P_1 = 2P_0\left(1 - P_0\right) = 2(\frac{3}{4})\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\left(1 - P_1\right) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$
- $P_3 = \dfrac{255}{2(256)}$

Si $P_0 = \frac{3}{4}$

- $P_1 = 2P_0\,(1 - P_0) = 2(\frac{3}{4})\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- $P_2 = 2P_1\,(1 - P_1) = 2(\frac{3}{8})\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32}$
- $P_3 = \dfrac{255}{2(256)}$

El comportamiento a partir del periodo 1 es igual que el anterior, pero no es monótona (primero decrece y luego es creciente).

Consideremos ahora $r = 3$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 3)$$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \quad (\bar{P} = 1, \; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \dots$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \;\; (\bar{P} = 1, \;\; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \quad (\bar{P} = 1, \; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right)$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Si $P_0 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \;\; (\bar{P} = 1, \; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Si $P_0 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

- $P_1 = 3P_0\,(1 - P_0) = 3(\frac{7}{12})\left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{35}{48} > \frac{2}{3}$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \;\; (\bar{P} = 1,\; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Si $P_0 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

- $P_1 = 3P_0\,(1 - P_0) = 3(\frac{7}{12})\left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{35}{48} > \frac{2}{3}$
- $P_2 = \frac{35(13)}{16(48)} < \frac{2}{3}$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \;\; (\bar{P} = 1, \; r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Si $P_0 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

- $P_1 = 3P_0\,(1 - P_0) = 3(\frac{7}{12})\left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{35}{48} > \frac{2}{3}$
- $P_2 = \frac{35(13)}{16(48)} < \frac{2}{3}$

Se puede demostrar que converge (en forma oscilatoria, no monótona) a $\frac{2}{3}$

Consideremos ahora $r = 3$

$$P_{t+1} = 3P_t(1 - P_t) \ \ (\bar{P} = 1, \ r = 3)$$

- Si $P_0 = 0 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \bar{P} = 1 \Rightarrow P_t = 0, \forall t = 1, 2, \ldots$
- Si $P_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1 = 3(\frac{2}{3})\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow P_2 = P_3 = \cdots = P_t = \dfrac{2}{3}$

Si $P_0 = \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$

- $P_1 = 3P_0\left(1 - P_0\right) = 3(\frac{7}{12})\left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{35}{48} > \frac{2}{3}$
- $P_2 = \frac{35(13)}{16(48)} < \frac{2}{3}$

Se puede demostrar que converge (en forma oscilatoria, no monótona) a $\frac{2}{3}$
Observar que la dinámica en este caso es cualitativamente distinta que el caso anterior y diferente al caso continuo.

A partir de $r > 3$, por ejemplo para $r = \frac{10}{3}$ aparecen los puntos periódicos de periodo 2, los $2-$ciclos

A partir de $r > 3$, por ejemplo para $r = \frac{10}{3}$ aparecen los puntos periódicos de periodo 2, los $2-$ciclos

Y a medida que r toma valores mayores que 3 aparecen puntos periódicos de todos los periodos.

A partir de $r > 3$, por ejemplo para $r = \frac{10}{3}$ aparecen los puntos periódicos de periodo 2, los $2-$ciclos

Y a medida que r toma valores mayores que 3 aparecen puntos periódicos de todos los periodos.
Además hay sensibilidad a las condiciones iniciales, partiendo de condiciones iniciales cercanas las trayectorias son bien distintas.

A partir de $r > 3$, por ejemplo para $r = \frac{10}{3}$ aparecen los puntos periódicos de periodo 2, los $2-$ciclos

Y a medida que r toma valores mayores que 3 aparecen puntos periódicos de todos los periodos.
Además hay sensibilidad a las condiciones iniciales, partiendo de condiciones iniciales cercanas las trayectorias son bien distintas.

La ecuación logística en tiempo discreto tiene un comportamiento radicalmente distinto a la versión continua (donde la convergencia es siempre monótona) y puede producir dinámicas muy complejas y hasta caóticas para un intervalo continuo del los parámetro r.

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En el trabajo de Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica.

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En el trabajo de Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica.

Sistemas dinámicos deterministas (como la logística, sin una componente aleatoria) pueden generar resultados cualitativamente similares a los observados en series reales. (Modelo de Day (1982))

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En el trabajo de Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica.

Sistemas dinámicos deterministas (como la logística, sin una componente aleatoria) pueden generar resultados cualitativamente similares a los observados en series reales. (Modelo de Day (1982))

Para explicar las fuctuaciones y las irregularidades no necesariamente se debe recurrir a los choques aleatorios.

La complejidad del modelo logístico discreto ha producido una línea de investigación en el área de sistemas dinámicos. En el trabajo de Sordi (1996) se puede encontrar una revisión exhaustiva de la bibliografía acerca de teoría del caos y dinámica económica.

Sistemas dinámicos deterministas (como la logística, sin una componente aleatoria) pueden generar resultados cualitativamente similares a los observados en series reales. (Modelo de Day (1982))

Para explicar las fuctuaciones y las irregularidades no necesariamente se debe recurrir a los choques aleatorios.

Sordi, S. (1996). Chaos in macrodynamics: an excursion through the literature. Siena: Universitá di Siena.
Day, R. H. (1982). Irregular growth cycles. The American Economic Review, 72(3), 406 - 414.

Modelar la irregularidad implica (necesaria y unicamente) introducir perturbaciones estocásticas?

Modelar la irregularidad implica (necesaria y unicamente) introducir perturbaciones estocásticas?

o existe una fuente de irregularidad que es endógena, explicada por la propia dinámica del modelo?

Modelar la irregularidad implica (necesaria y unicamente) introducir perturbaciones estocásticas?

o existe una fuente de irregularidad que es endógena, explicada por la propia dinámica del modelo?

Implicaciones de la teoría del caos a la Economía

Implicaciones de la teoría del caos a la Economía

En un sistema dinámico caótico, la predicción (mas allá del cortisimo plazo) es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Implicaciones de la teoría del caos a la Economía

En un sistema dinámico caótico, la predicción (mas allá del cortisimo plazo) es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Diferencias mínimas en las condiciones iniciales generan trayectorias muy distintas (efecto mariposa). Dada esta característica, no es posible una solución analítica y la posibilidad de simular numéricamente es muy limitada.

Implicaciones de la teoría del caos a la Economía

En un sistema dinámico caótico, la predicción (mas allá del cortisimo plazo) es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Diferencias mínimas en las condiciones iniciales generan trayectorias muy distintas (efecto mariposa). Dada esta característica, no es posible una solución analítica y la posibilidad de simular numéricamente es muy limitada.

Esto cuestiona seriamente la teoría de las expectativas racionales: los agentes tendrían que tener una precisión infinita para evitar la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Implicaciones de la teoría del caos a la Economía

En un sistema dinámico caótico, la predicción (mas allá del cortisimo plazo) es imposible. Dada la dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Diferencias mínimas en las condiciones iniciales generan trayectorias muy distintas (efecto mariposa). Dada esta característica, no es posible una solución analítica y la posibilidad de simular numéricamente es muy limitada.

Esto cuestiona seriamente la teoría de las expectativas racionales: los agentes tendrían que tener una precisión infinita para evitar la sensibilidad a las condiciones iniciales.

La situación se agrava si además hay perturbaciones aleatorias.

Sin caos

Aún sin dinámicas caóticas, el comportamiento puede cambiar segun la forma en que se modele el tiempo:

Sin caos

Aún sin dinámicas caóticas, el comportamiento puede cambiar segun la forma en que se modele el tiempo:

- Modelos donde es neutral (la dinámica es similar) y modelos que no lo son.

Sin caos

Aún sin dinámicas caóticas, el comportamiento puede cambiar segun la forma en que se modele el tiempo:

- Modelos donde es neutral (la dinámica es similar) y modelos que no lo son.

- Modelos donde estabilidad del equilibrio cambia en una u otra formulación (es cualitativamente diferente)

Sin caos

Aún sin dinámicas caóticas, el comportamiento puede cambiar segun la forma en que se modele el tiempo:

- Modelos donde es neutral (la dinámica es similar) y modelos que no lo son.
- Modelos donde estabilidad del equilibrio cambia en una u otra formulación (es cualitativamente diferente)
- por ende las recomendaciones de política que se pueden derivar pueden cambiar según la forma de modelizar el tiempo.

Sin caos

Aún sin dinámicas caóticas, el comportamiento puede cambiar segun la forma en que se modele el tiempo:

- Modelos donde es neutral (la dinámica es similar) y modelos que no lo son.
- Modelos donde estabilidad del equilibrio cambia en una u otra formulación (es cualitativamente diferente)
- por ende las recomendaciones de política que se pueden derivar pueden cambiar según la forma de modelizar el tiempo.
- En modelos discretos: la importancia de la frecuencia en la toma de decisiones para la dinámica económica y cómo la estabilidad local puede cambiar a partir de cambios en la longitud del período.

Modelización discreta

Modelización discreta

Algunos argumentos a favor de una modelización en tiempo discreto (desde el punto de vista económico):

Modelización discreta

Algunos argumentos a favor de una modelización en tiempo discreto (desde el punto de vista económico):

- es mas natural, en termino de la descripción, períodos económicos

Modelización discreta

Algunos argumentos a favor de una modelización en tiempo discreto (desde el punto de vista económico):

- es mas natural, en termino de la descripción, períodos económicos
- información económica (datos) es recolectada a intervalos discretos y los estudios empíricos lo son.

Modelización discreta

Algunos argumentos a favor de una modelización en tiempo discreto (desde el punto de vista económico):

- es mas natural, en termino de la descripción, períodos económicos
- información económica (datos) es recolectada a intervalos discretos y los estudios empíricos lo son.
- decisiones fundamentales (inversión, ahorro) se toman en intervalos discretos.

Modelización discreta

Algunos argumentos a favor de una modelización en tiempo discreto (desde el punto de vista económico):

- es mas natural, en termino de la descripción, períodos económicos
- información económica (datos) es recolectada a intervalos discretos y los estudios empíricos lo son.
- decisiones fundamentales (inversión, ahorro) se toman en intervalos discretos.
- implementación computacional, necesariamente discreta

No existe un resultado general desde el punto de vista matemático que permita afirmar que el comportamiento dinámico es invariante a la forma de modelar el tiempo, excepto para un número reducido de casos .

No existe un resultado general desde el punto de vista matemático que permita afirmar que el comportamiento dinámico es invariante a la forma de modelar el tiempo, excepto para un número reducido de casos .

Cuál es la mejor forma de modelizar el tiempo en economía es un problema abierto.

plan para las próximas dos semanas

Conceptos básicos de dinámica discreta.

- Ecuaciones en diferencias
- Concepto de solución y análisis cualitativo

Bibliografía: cap. 6 - Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido. Thomson Editorial. México.

2021

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY