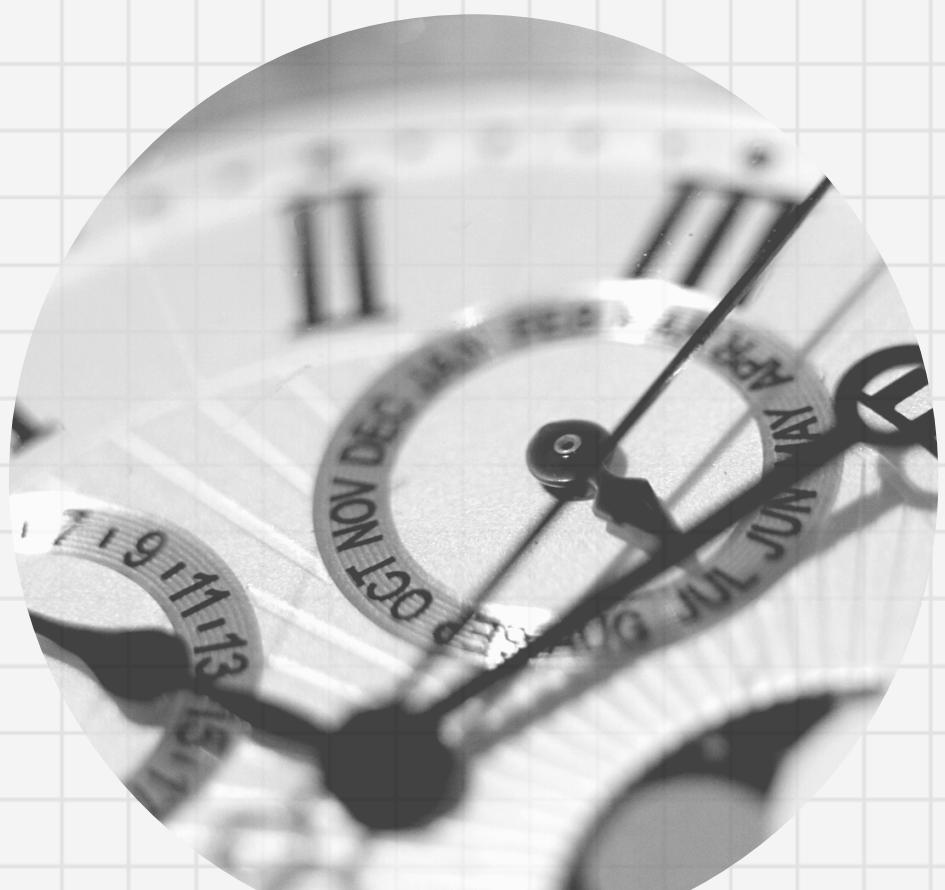


TIEMPO, POBLACIÓN Y MODELOS DE CRECIMIENTO

Cayssials, G. (2018).



Avellanal - Bordagorri - Parrilla

Estructura

1. Introducción
2. Dinámica de la población
3. Modelo de crecimiento de Mankiw- Romer-Weil
(1992)
4. Extensión del modelo en tiempo discreto
5. Comparando resultados
6. Conclusiones
7. Simulaciones

Introducción



Las teorías de crecimiento ocupan un rol central en la literatura económica.

Buscan explicar el crecimiento del producto per cápita. Con dos particularidades:

1- Incorporación de la dinámica poblacional

En general se supone que la fuerza de trabajo, asociada con la población, crece a una tasa constante, $n \geq 0$.

2- Modelización del tiempo

No es trivial ni neutral, ya que repercute en los resultados y la dinámica del modelo.

Modelo de crecimiento de Mankiw-Romer-Weil

Modelo de Solow ampliado con capital humano.



Función de producción

$$Y_{(t)} = K_{(t)}^\alpha H_{(t)}^\beta L_{(t)}^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha + \beta \in (0, 1)$$

Dinámica poblacional

$$\begin{aligned}\dot{L}_{(t)} &= nL_{(t)} \\ L_{(0)} &> 0\end{aligned}$$

Acumulación de capital físico

$$\dot{k} = s_k k_{(t)}^\alpha h_{(t)}^\beta - (\delta + n)k_{(t)}$$

Acumulación de capital humano

$$\dot{h} = s_h k_{(t)}^\alpha h_{(t)}^\beta - (\delta + n)h_{(t)}$$

Equilibrio y convergencia

Resolviendo el modelo

El equilibrio no trivial es el punto (k^* , h^*):

$$\left\{ \begin{array}{l} k^* = \left[\frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \end{array} \right.$$

El equilibrio depende de:

- tasas de ahorro
- grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles
- tasa de depreciación
- tasa de crecimiento de la población

Dinámica de transición al equilibrio

$$G(k, h) = (s_k k^\alpha h^\beta - (\delta + n)k ; s_h k^\alpha h^\beta - (\delta + n)h)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = G(k^*, h^*) + \mathbb{J}_G \begin{pmatrix} k - k^* \\ h - h^* \end{pmatrix} \quad \text{siendo} \quad \mathbb{J}_G = \begin{pmatrix} (\delta + n)(\alpha - 1) & \frac{s_k}{s_h} \beta (\delta + n) \\ \frac{s_h}{s_k} \alpha (\delta + n) & (\delta + n)(\beta - 1) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = |(\delta + n)(\alpha + \beta - 1)| < 1 \longrightarrow \text{velocidad de convergencia}$$

$$\lambda_2 = |-(\delta + n)| < 1$$

Ley de crecimiento de la población

Maynard (1974) plantea que se debe verificar que:

1. Cuando la población es suficientemente **pequeña** en relación con la capacidad de carga, la **población crece a una tasa constante n.**
2. Cuando la población es lo suficientemente **grande** en relación con la capacidad de carga, los recursos se vuelven escasos y esto afecta **negativamente** la tasa de crecimiento de la población.
3. La **tasa** de crecimiento de la población **decrece a cero.**

Adecuación de la ley a tiempo discreto

$$L_{(t+1)} = P(L_{(t)})$$
$$L_{(0)} > 0$$

1

Tasa de crecimiento no negativa
 $P(L) \geq L > 0, \forall L \leq L_\infty$

2

Tasa decreciente
 $\frac{P(L_t)}{L_{(t)}} \geq \frac{P(L_{t+1})}{L_{(t+1)}}, \forall L \leq L_\infty$

3

Crecimiento nulo cuando alcanza capacidad de carga
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(L_t)}{L_{(t)}} - 1 = 0$$

4

Población acotada y convergente
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L_t = L_\infty / L_t \leq L_\infty \forall t$$

Extensión del modelo a tiempo discreto

Función de producción

$$Y_{(t)} = K_{(t)}^\alpha H_{(t)}^\beta L_{(t)}^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha + \beta \in (0, 1)$$

Dinámica poblacional

$$L_{t+1} = P(L_t)$$

Acumulación de capital físico

$$k_{t+1} = \frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)k_t}{P(L_t)/L_t}$$

Acumulación de capital humano

$$h_{t+1} = \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)h_t}{P(L_t)/L_t}$$

Equilibrio y convergencia

Resolviendo el modelo

El equilibrio no trivial es el punto (k^* , h^* , L^*):

$$\left\{ \begin{array}{l} k^* = \left[\frac{s_k^{1-\beta} s_h^\beta}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left[\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^\alpha}{\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ L^* = L_\infty \end{array} \right.$$

El equilibrio depende de:

- tasas de ahorro
- grado de eficiencia de escala de los factores reproducibles
- tasa de depreciación

No depende de:

- tasa de crecimiento de la población

Dinámica de transición al equilibrio

$$T(k, h, L) = \left(\frac{s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)k_t}{P(L_t)/L_t} ; \frac{s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1 - \delta)h_t}{P(L_t)/L_t} ; P(L_t) \right)$$

$$\mathbb{J}_T = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) + 1 & \frac{\beta s_k \delta}{s_h} & k^* \left(\frac{1 - P(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ \frac{\alpha s_h \delta}{s_k} & \delta(\beta - 1) + 1 & h^* \left(\frac{1 - P(L_\infty)}{L_\infty} \right) \\ 0 & 0 & P(L_\infty) \end{pmatrix}$$

Dinámica de transición al equilibrio (cont.)

$$\lambda_1 = \delta(\alpha + \beta - 1) < 1$$

$$\lambda_2 = 1 - \delta < 1$$

$$\lambda_3 = P(L_\infty) < 1$$

Comparación de modelos

Modelo original

1. Tasa de crecimiento poblacional constante
2. La población tiende a infinito
3. El equilibrio depende de los parámetros poblacionales
4. Las variables agregadas tienden a infinito
5. La velocidad de convergencia es menor en el modelo en tiempo discreto que en el modelo original
6. El comportamiento dinámico es cualitativamente similar, ambos presentan un único equilibrio no trivial que es atractor global.

Modelo en tiempo discreto

1. Tasa de crecimiento poblacional decreciente y tiende a cero
2. La población está acotada
3. El equilibrio no depende de los parámetros poblacionales
4. Las variables agregadas convergen

Conclusiones

- La concepción del tiempo es importante y necesaria a la hora de formular un modelo.
- Las regularidades empíricas divergen de los modelos de crecimiento exponencial de la población.
- Para el modelo Mankiw-Romer-Weil ampliado es indiferente la modelización del tiempo, pero a priori no se puede afirmar.



Simulación



Simulamos el modelo para dos leyes de población diferente:

Verhulst (1838) $L_{t+1} = L_t \cdot e^{r(1 - \frac{L_t}{M})}$

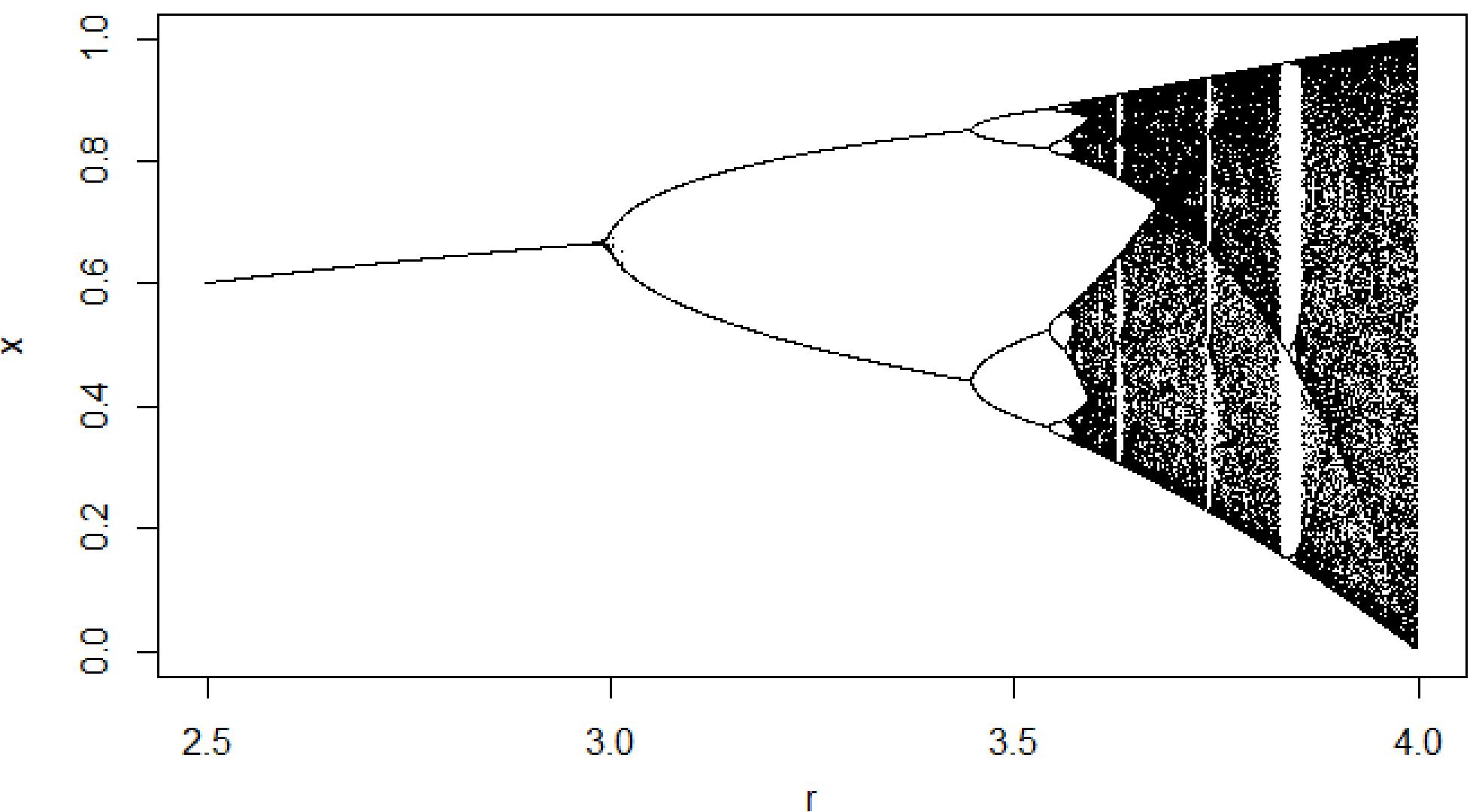
Ricker (1954) $L_{t+1} = aL_t \cdot e^{-bL_t}$

El análisis de sensibilidad se realizó para un solo parámetro.

Resultados Verhulst: $L_{t+1} = L_t \cdot e^{r(1 - \frac{L_t}{M})}$

Probamos con 50 valores distintos del parámetro r ,
 $0.01 < r < 4$

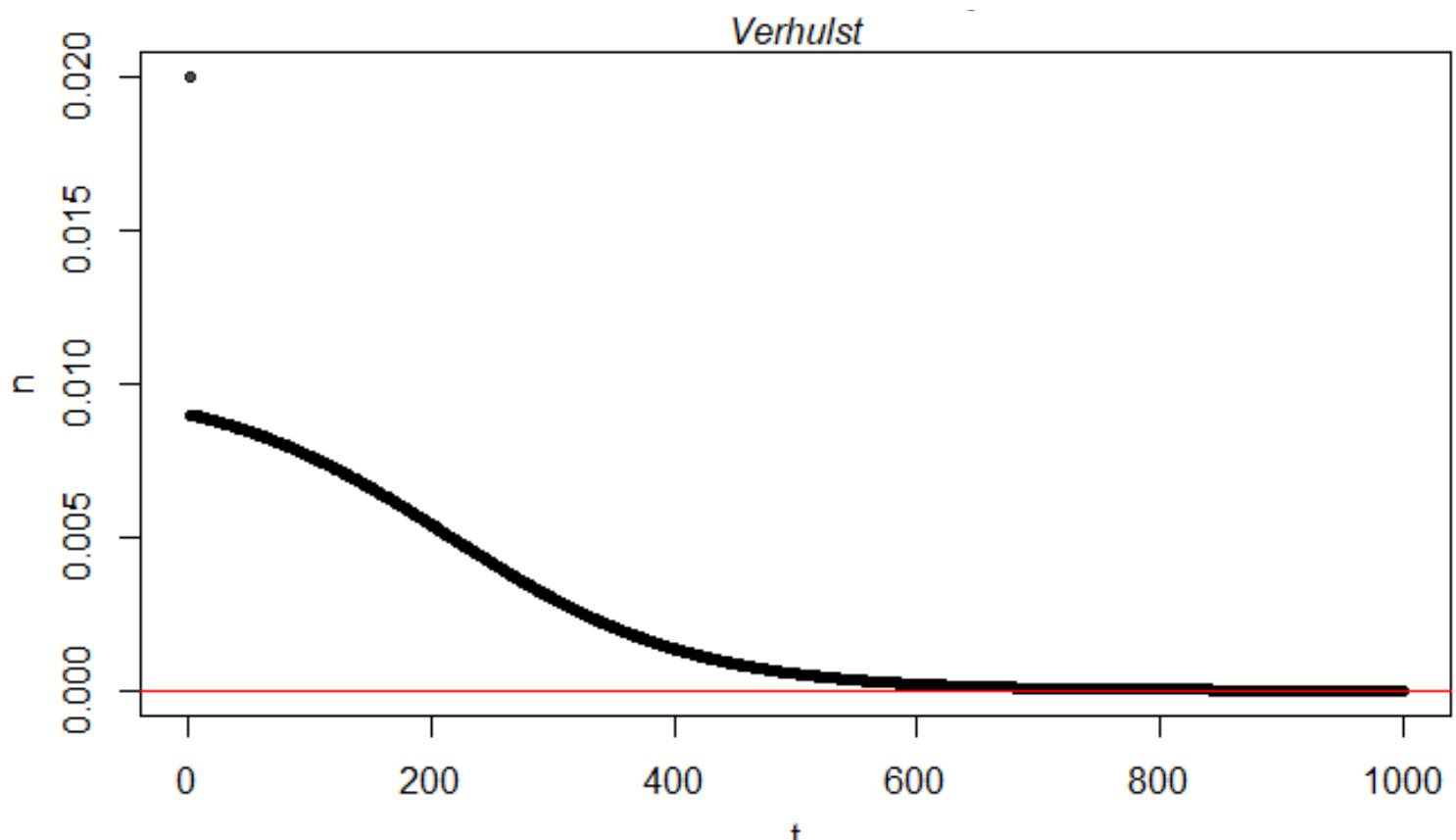
Del resultado de los 50 casos, seleccionamos 3 de estos que denotan 3 dinámicas distintas.



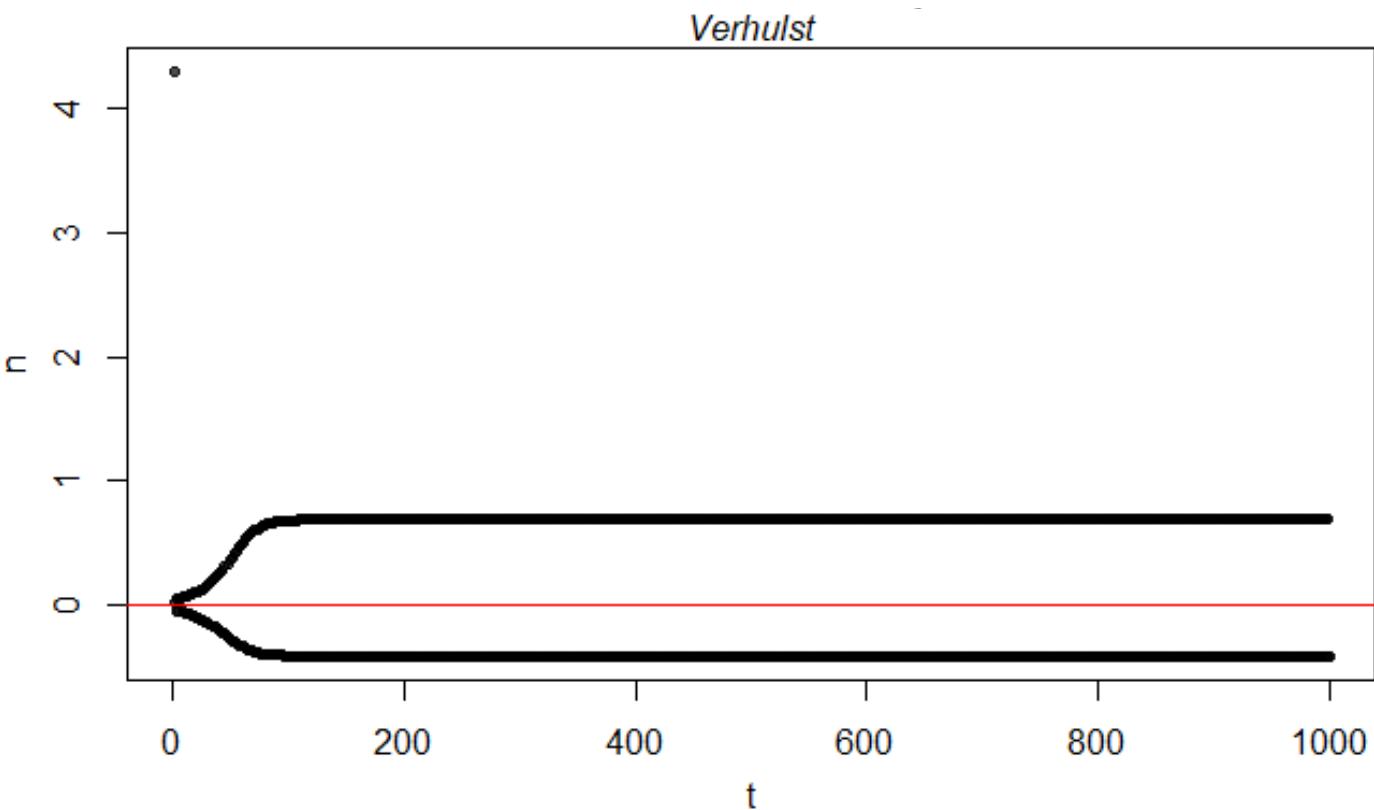
Tasa de crecimiento de la población

$$s_k = 0.25, \quad s_h = 0.30, \quad \delta = 0.05, \quad \alpha = 0.40, \quad \beta = 0.40$$

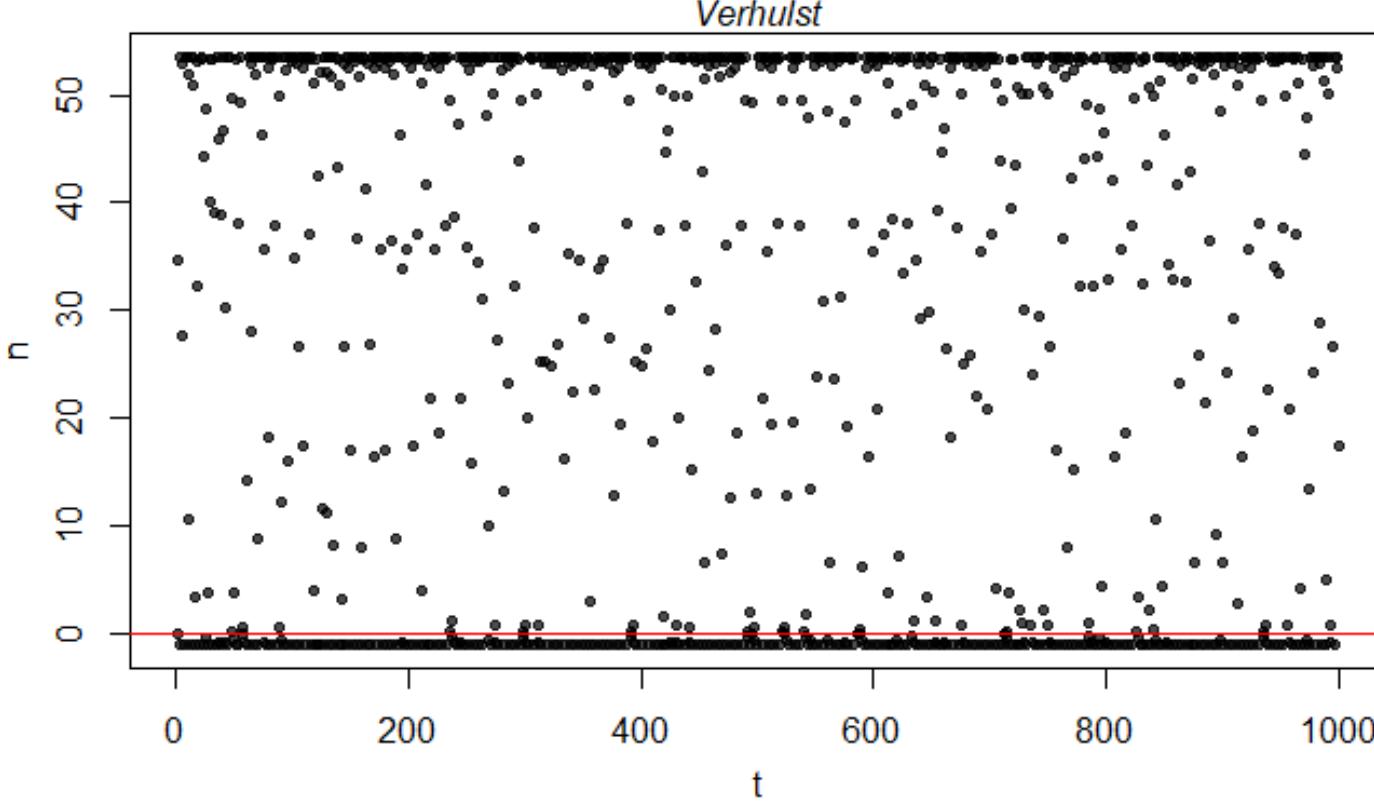
$$r = 0.01$$



$$r = 2.045714$$



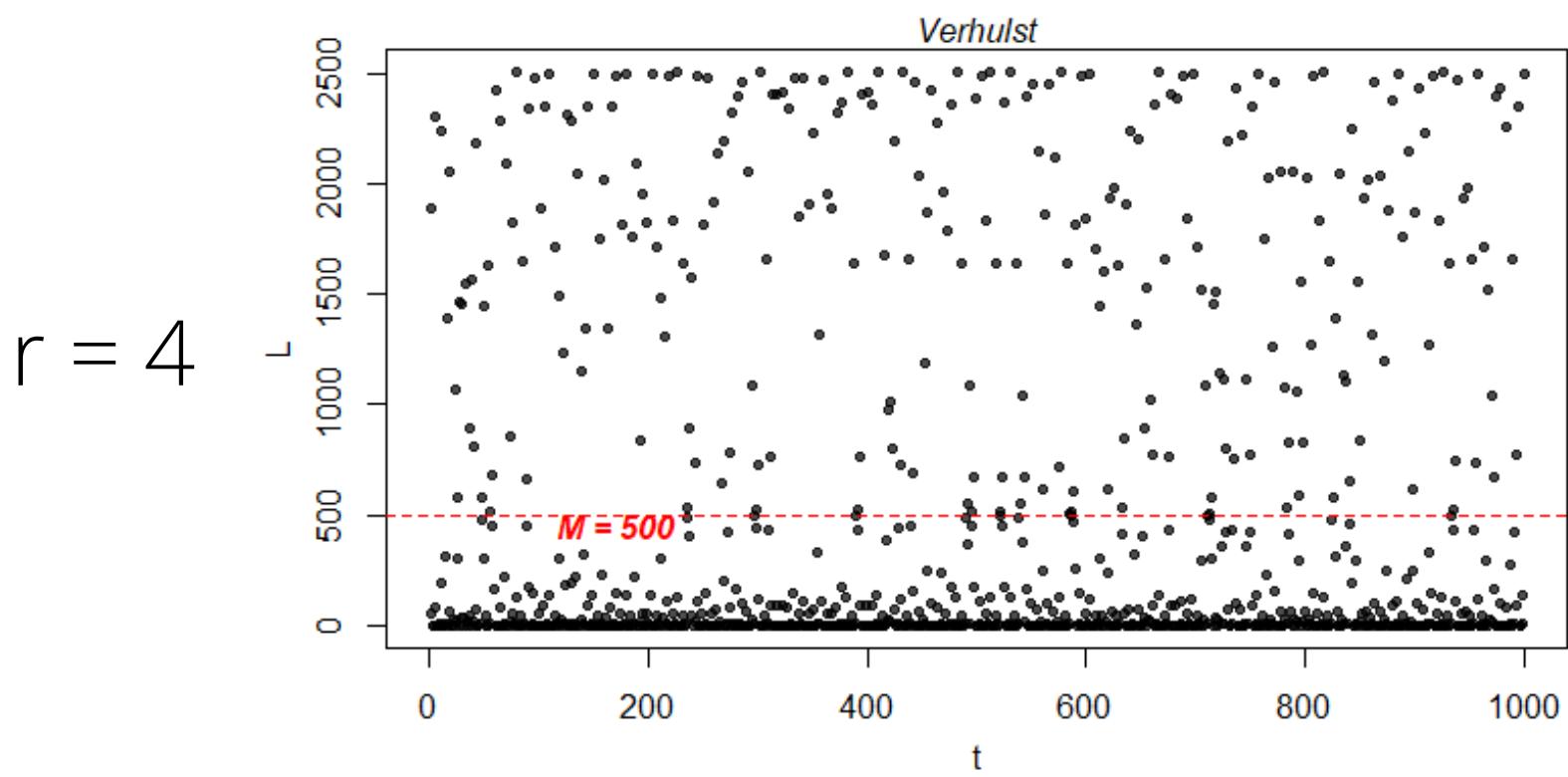
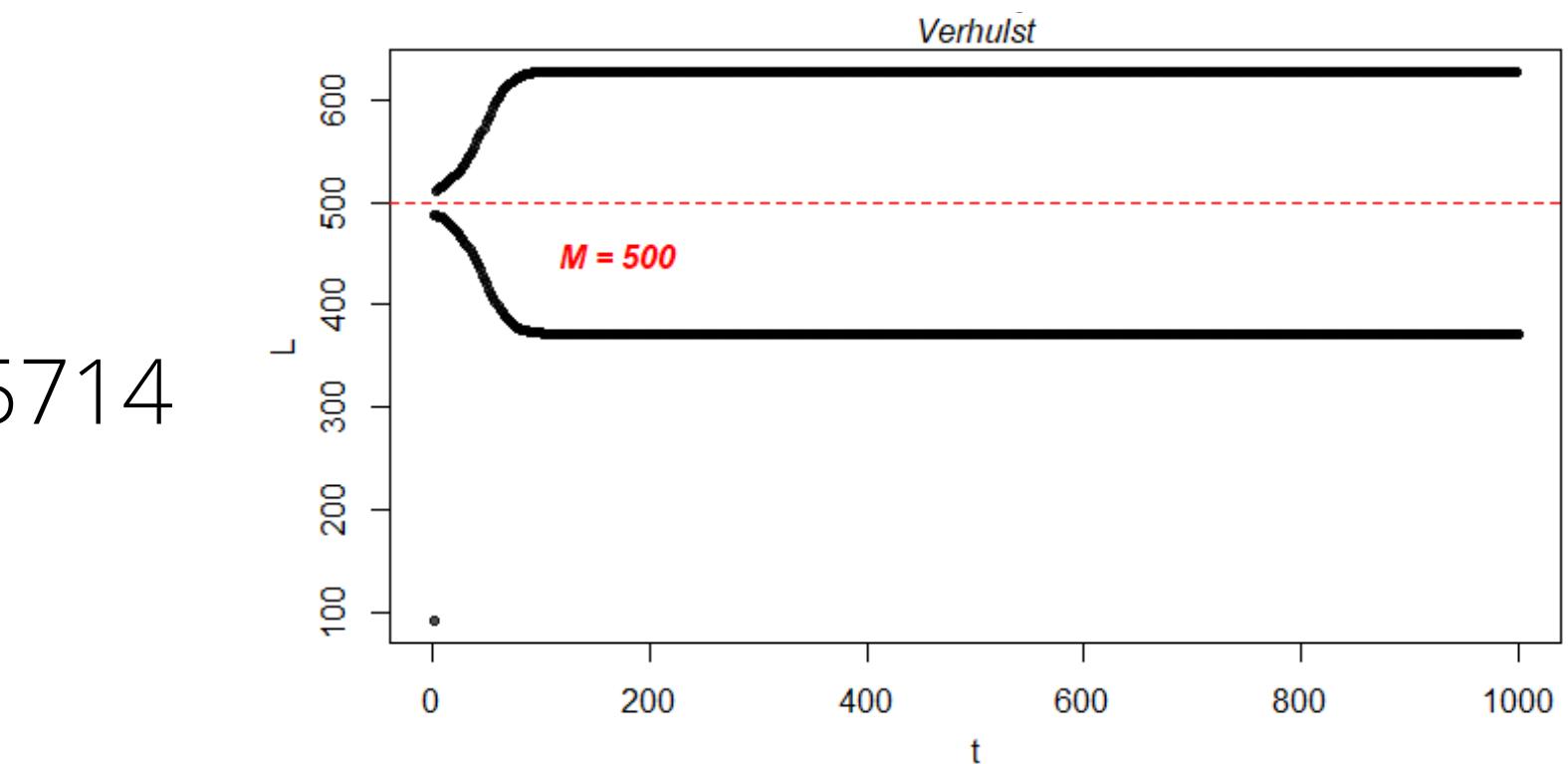
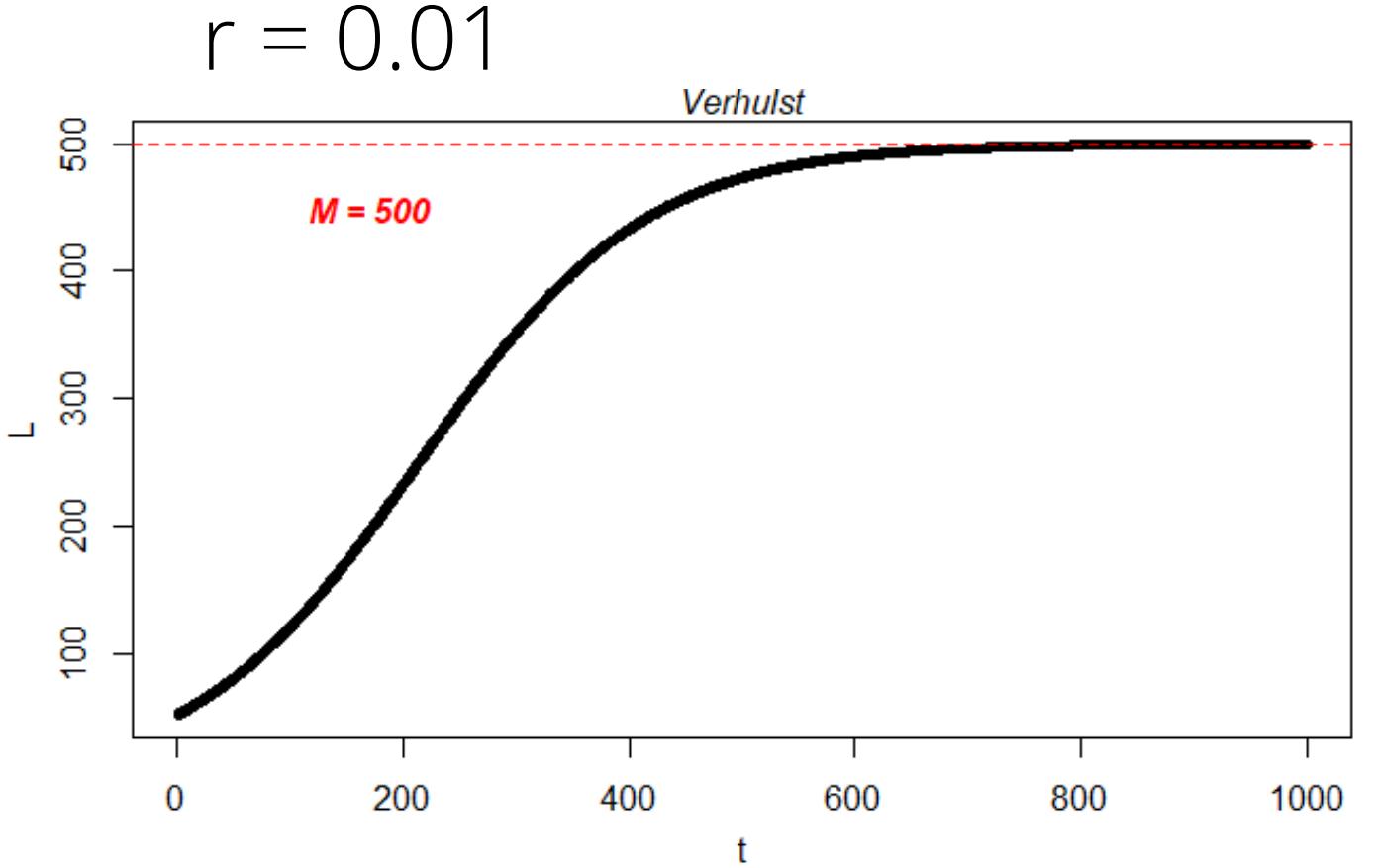
$$r = 4$$



Tamaño de la población

$$s_k = 0.25, \quad s_h = 0.30, \quad \delta = 0.05, \quad \alpha = 0.40, \quad \beta = 0.40$$

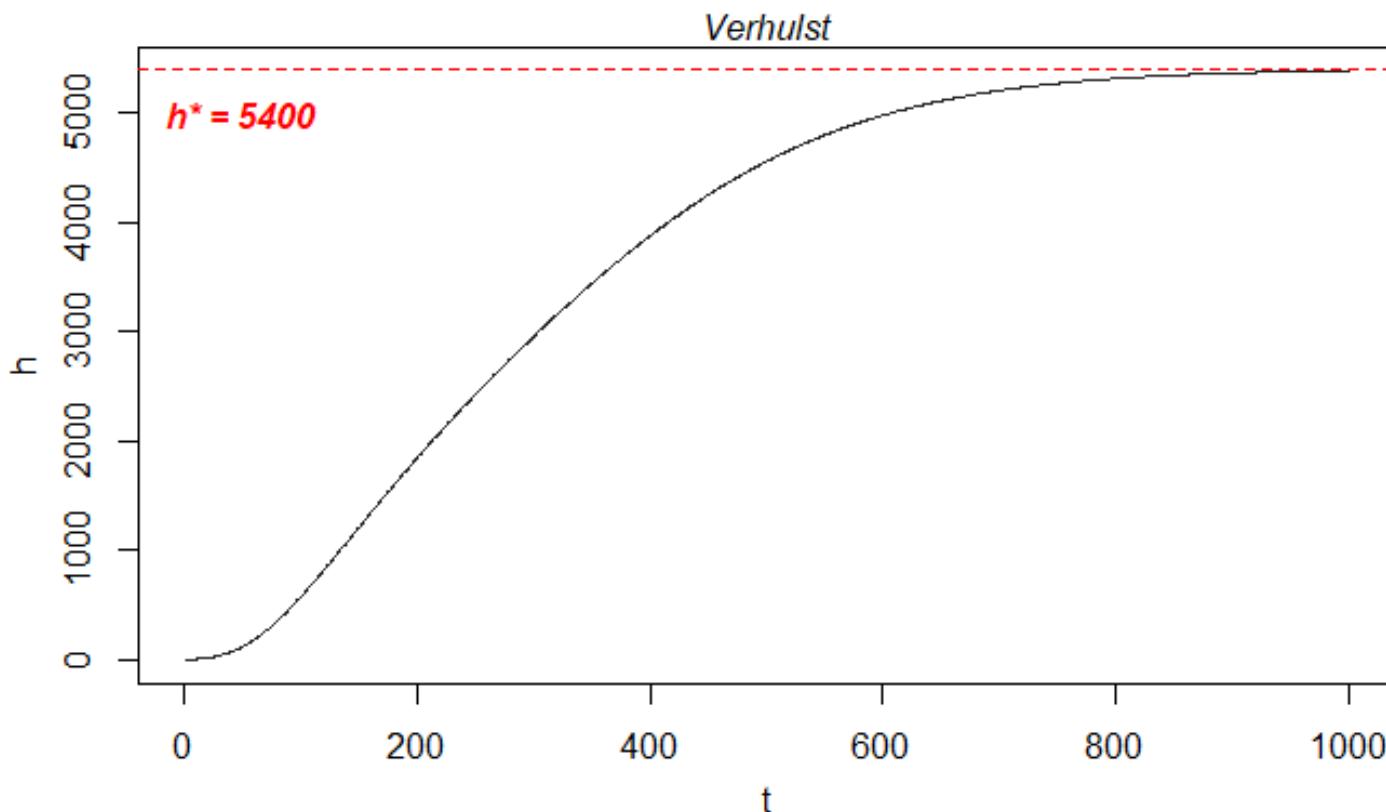
$$r = 2.045714$$



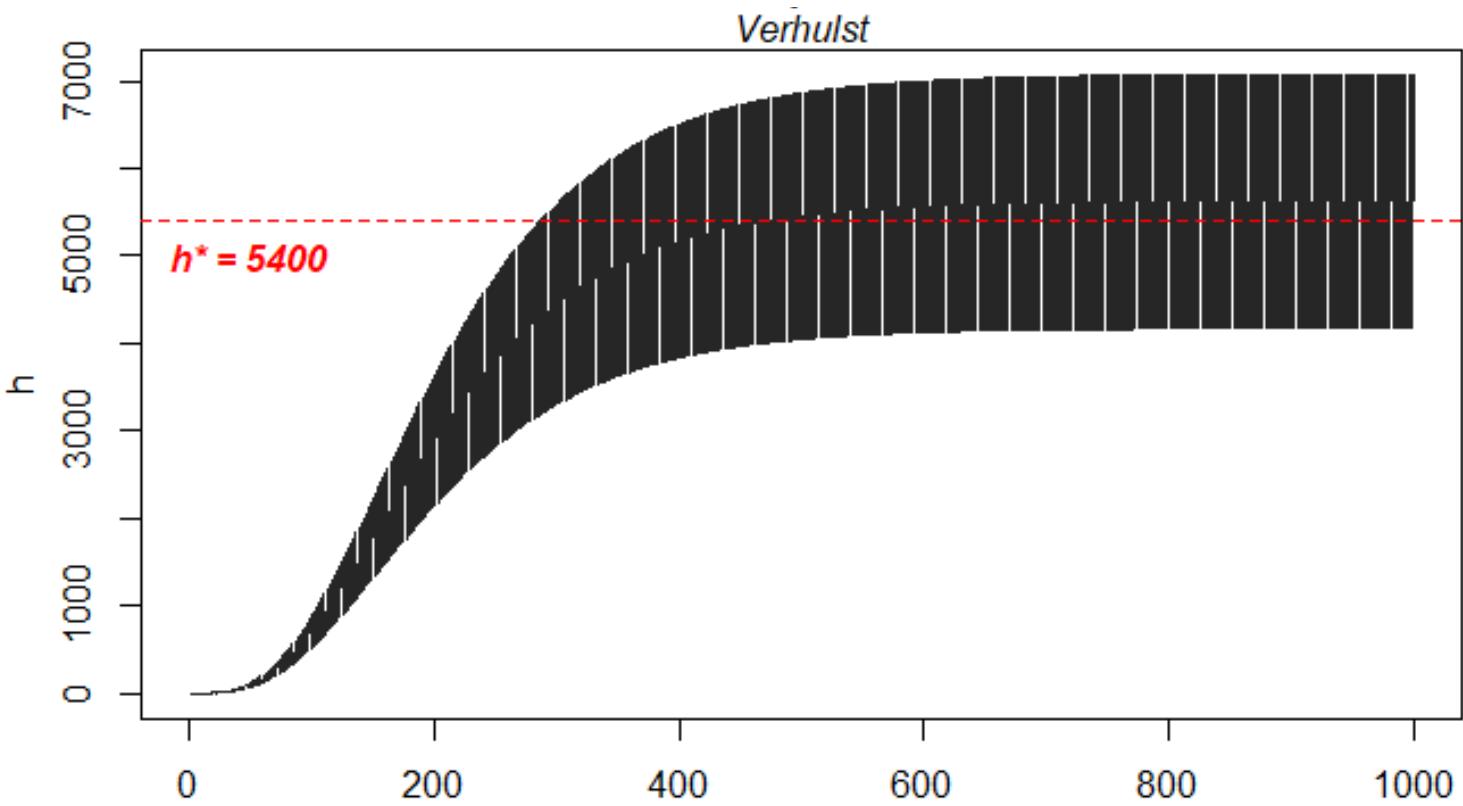
Stock de capital humano

$$s_k = 0.25, \quad s_h = 0.30, \quad \delta = 0.05, \quad \alpha = 0.40, \quad \beta = 0.40$$

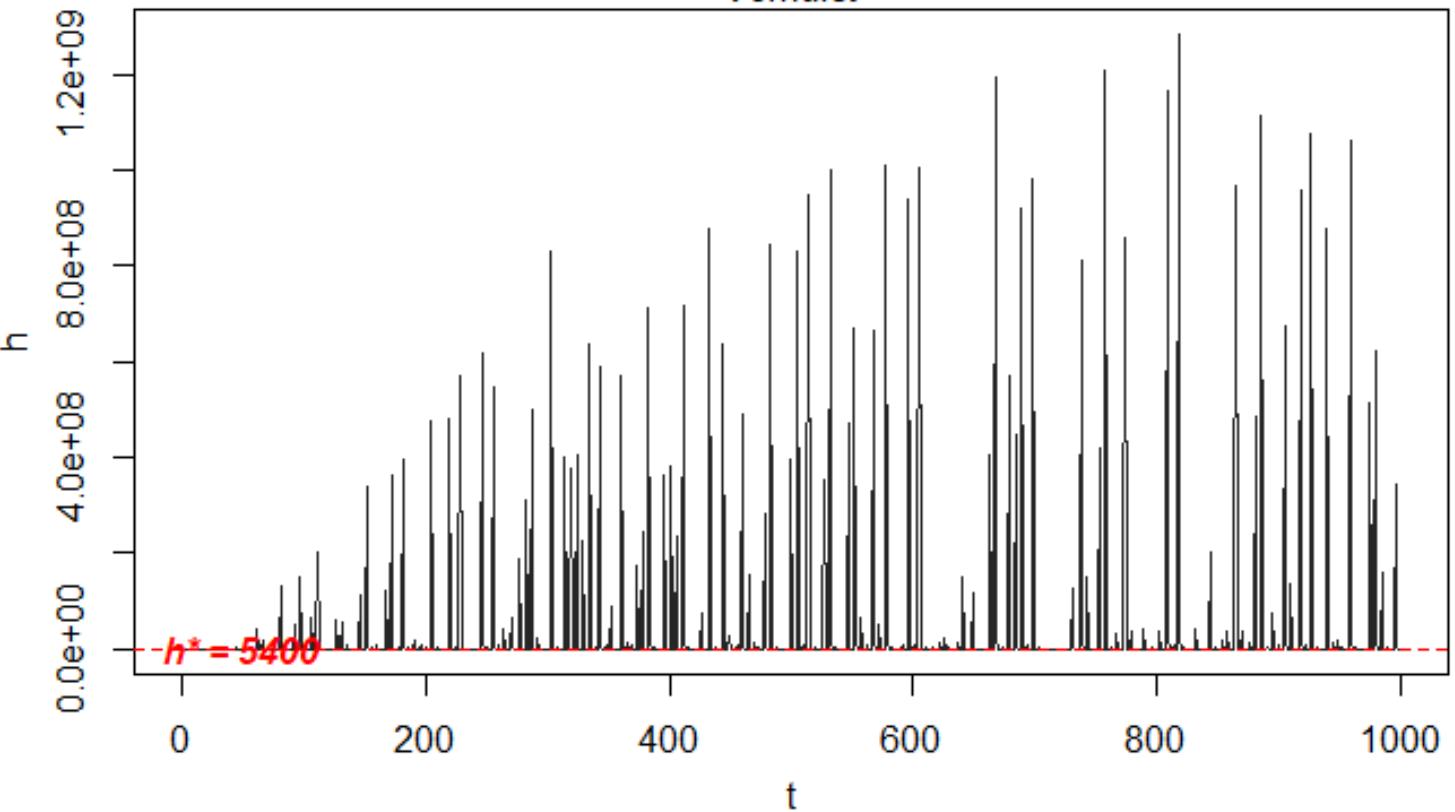
$$r = 0.01$$



$$r = 2.045714$$



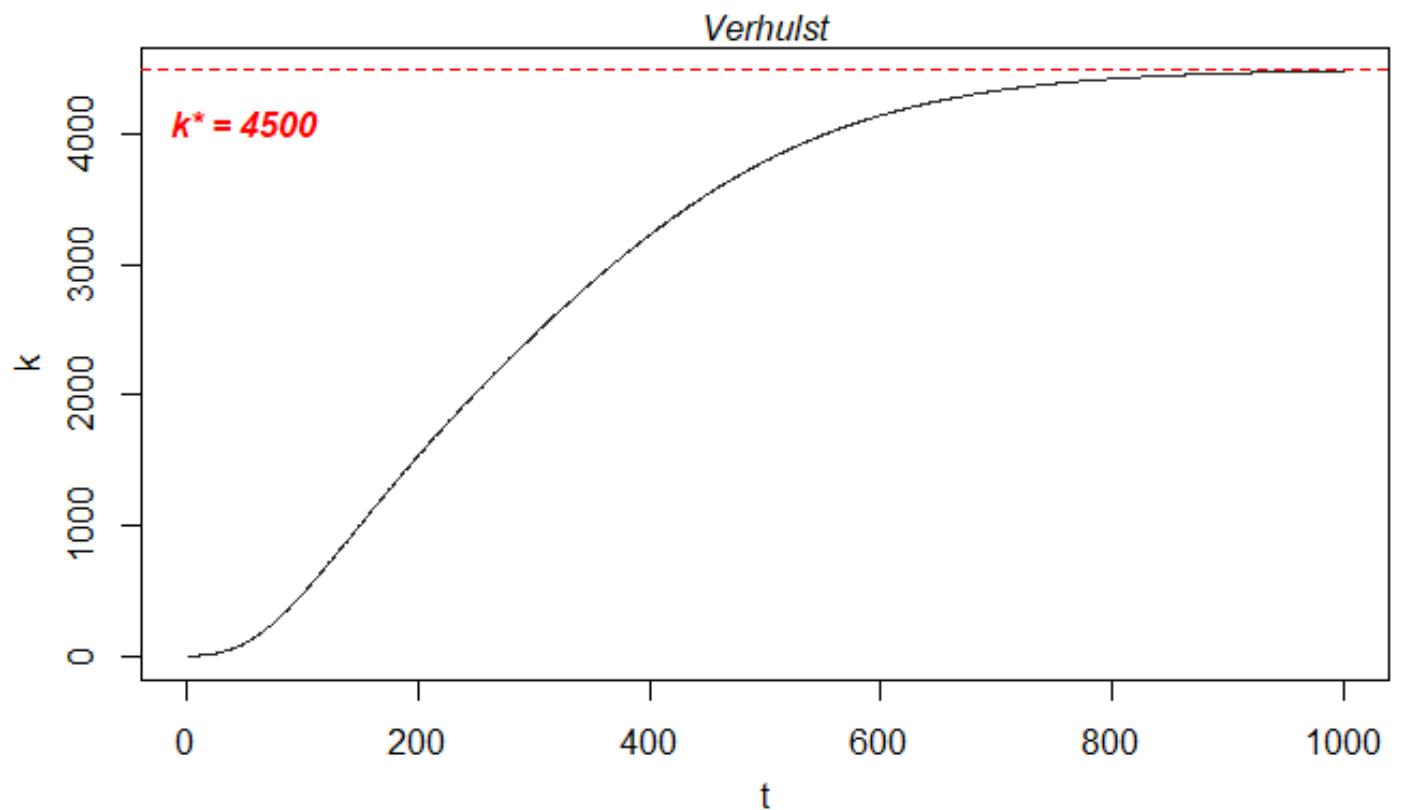
$$r = 4$$



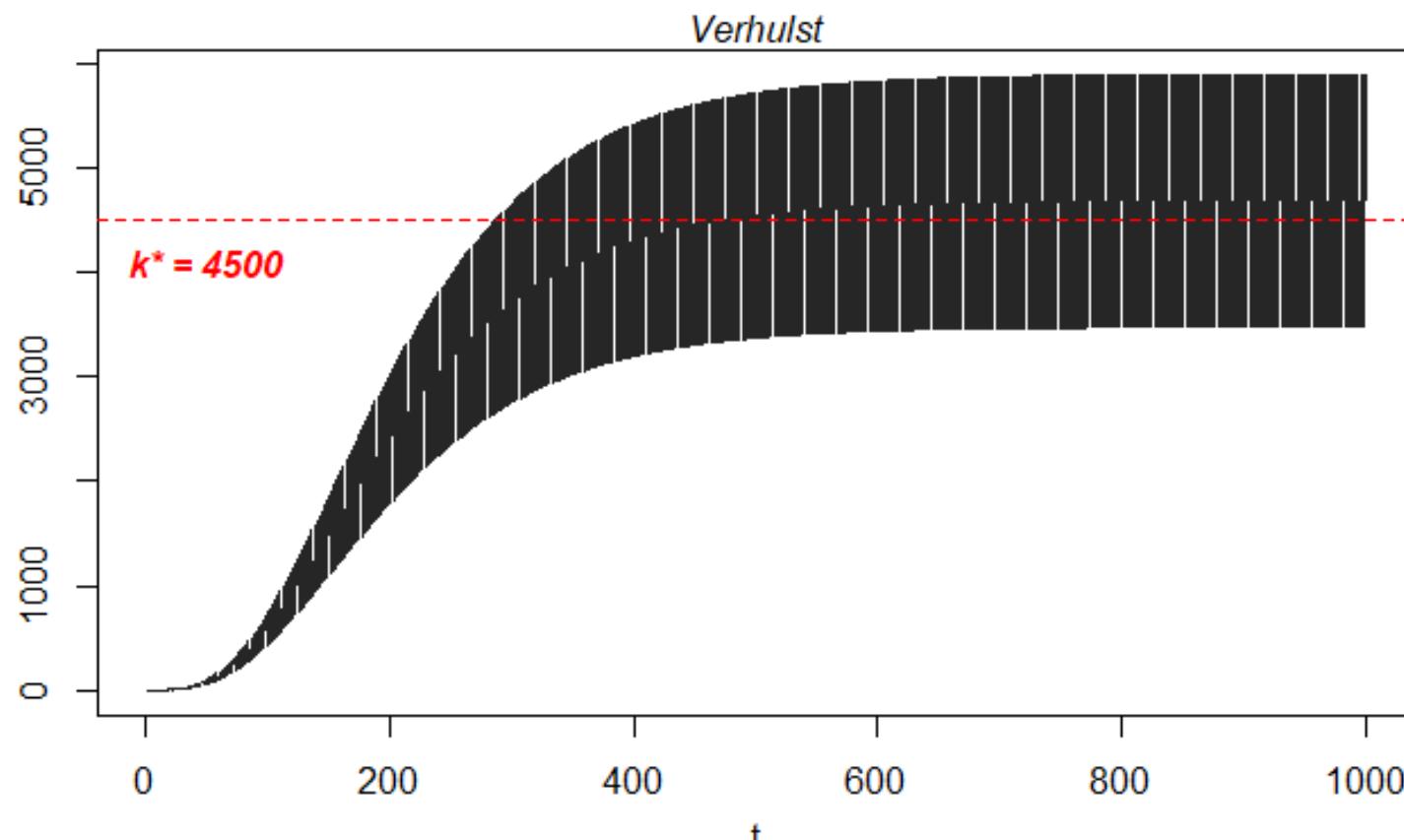
Stock de capital físico

$$s_k = 0.25, \quad s_h = 0.30, \quad \delta = 0.05, \quad \alpha = 0.40, \quad \beta = 0.40$$

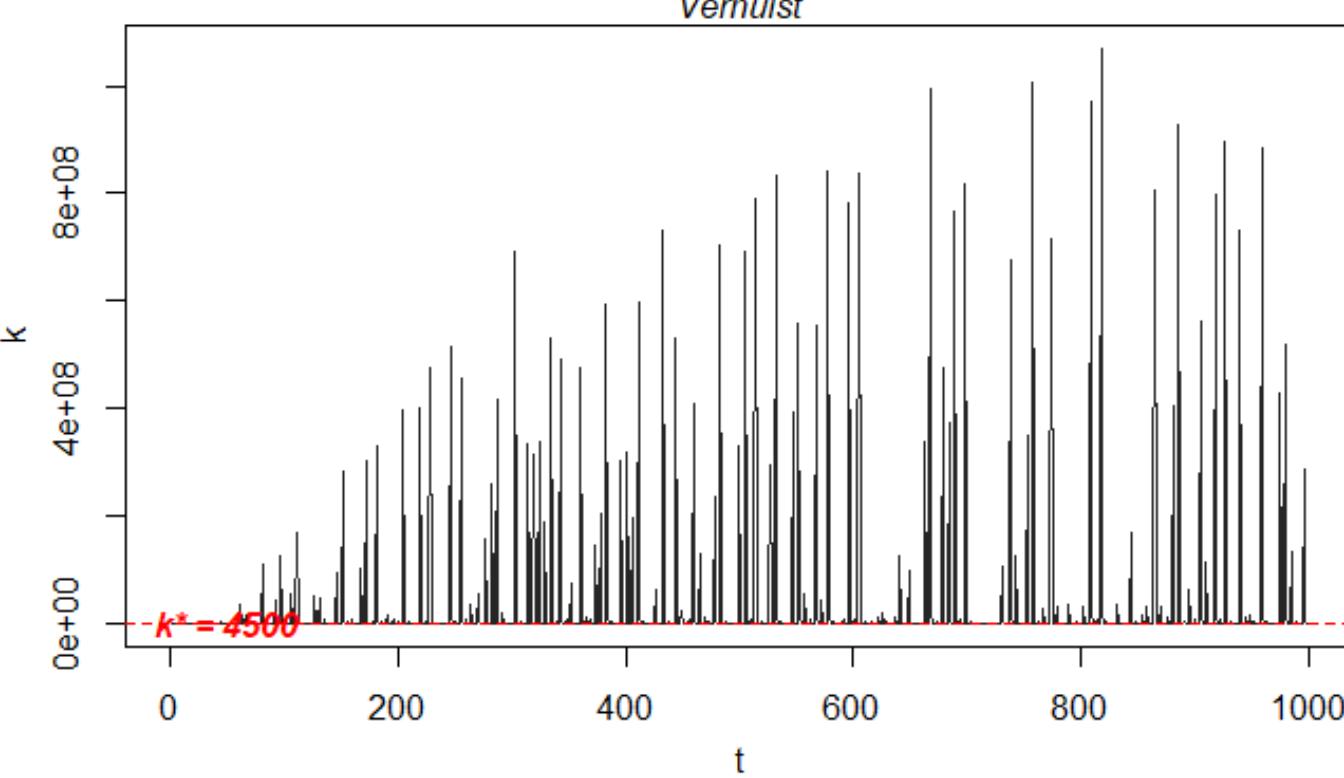
$$r = 0.01$$



$$r = 2.045714$$



$$r = 4$$



Muchas gracias!!