Ejercicios de ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos discretos. (1)

GIDE

UDELAR 2024

1. Exprese a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leq n-1$) y resuelva la relativa ecuación en diferencias correspondiente, siendo a_n:

   (a) El monto de una cuenta bancaria al $n-$ésimo mes de haber sido abierta si se paga un interés del $i\%$ mensual y el dueño retira r euro por mes.

   (b) El número de puntos de cortes de n líneas diferentes no paralelas ni concurrentes del plano.

   (c) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

   (d) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros ni dos unos seguidos.

   (e) La cantidad de saludos que se dieron los primeros n invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludó el resto.

2. Supongamos que la suma constante T se deposita al final de cada período fijo en un banco que paga una tasa de interés r por período. Sea a_n la cantidad acumulada en el banco luego de n períodos.

   (a) Escribir la ecuación en diferencias que describe a_n.

   (b) Resolver la ecuación.

3. Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \alpha x_n$$

   A partir de un valor inicial x_0 dado, esbozar el gráfico de la telaraña x_n en los casos: $1 < \alpha < 0, \alpha < 1$ y $\alpha = 1$ y a partir de esto calcular $\lim_{n\to+\infty} x_n$ dicutiendo según el valor de α. Idem para la ecuación

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

4. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

   (a) $a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n; a_0 = 1$
   (b) $a_{n+1} = na_n; a_0 = a$
   (c) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n; n > 0$
   (d) $a_{n+1} + a_n = 2n + 3; a_0 = 1$
   (e) $a_{n+1} - 2a_n = 3n^2 - n; a_0 = 3$
   (f) $a_{n+1} - 2a_n = 6; a_0 = 1$
   (g) $a_{n+1} - 4a_n = 2^n; a_0 = -1$

5. **Ecuaciones no lineales transformables a ecuaciones lineales**

   (a) Ecuación de Riccati: Resolver la ecuación

   $$x_{n+1}x_n + px_{n+1} + qx_n = 0$$

   mediante el cambio de variable

   $$y_n = \frac{1}{x_n}$$

   (b) Generalización: Resolver la ecuación

   $$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

   mediante el cambio de variable

   $$\frac{y_{n+1}}{y_n} = cx_n + d$$

   (c) Resolver la ecuación

   $$x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{3x_n + 2}$$

   y estudiar directamente la estabilidad de los equilibrios.

   (d) Resolver la ecuación

   $$x_{n+1} = x_n^2$$

   y calcular $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

   (e) Resolver la ecuación

   $$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$$

   y calcular $\lim_{n\to+\infty} x_n$ dicutiendo según el valor de la condición inicial. Sugerencia: usar el cambio de variable $y_n = 1 - 2x_n$ y la ecuación precedente.

6. En el modelo de oferta y demanda supongamos que la curva de oferta esta dada por
$$S_{n+1} = p_n^2 + 1$$
y la curva de demanda esta dada por
$$D_n = -2p_n + 3$$
   (a) Hallar la ecuación en diferencias que relaciona p_{n+1} con p_n.
   (b) Hallar el precio de mercado p^* y estudiar su estabilidad.

7. Consideremos la siguiente extensión del modelo de la telaraña
$$\begin{aligned} D_n &= b_D - m_D p_n \\ S_n &= b_S + m_S p_n^e \\ D_n &= S_n \\ p_n^e &= p_{n-1}^e + \lambda\left(p_{n-1} - p_{n-1}^e\right) \end{aligned}$$
donde $0 < \lambda < 1$.
   (a) Mostrar que el precio p_n sigue una ecuación en diferencias lineal de primer orden no homogénea.
   (b) Obtener el equilibrio y mostrar que es asintóticamente estable si $0 < \lambda < \frac{2m_D}{m_D + m_S}$.

8. Esbozar el gráfico de $y = 2x^2 - 1$ y considerando el método de la telaraña para la ecuación en diferencias $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ dicutiendo según el valor de la condición inicial.

9. Estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación en diferencias:
   (a) $x_{n+1} = e^{x_n}$
   (b) $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$
   (c) $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$

10. Sea $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$.
   (a) Estudiar el signo de $f(x) - x$.
   (b) Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$. Determinar los equilibrios y estudiar su estabilidad.
   (c) Si $x_0 = 2$, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
   (d) Si $x_0 = \frac{1}{2}$, determinar si x_n puede tomar valores negativos.

11. **Ecuación logística de Pielou** (E.C. Pielou, *An introduction to Mathematical Ecology*, Wiley Interscience, New York, 1969) E.C. Pielou se refiere a la siguiente ecuación como el equivalente discreto de la ecuación logística:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n}$$

donde $\alpha > 1$ y $\beta > 0$.

(a) Hallar el equilibrio positivo p.

(b) Tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, mostrar que el equilibrio p es un atractor.

(c) Discutir la estabilidad de p según los valores de α y β.

(d) Resolver la ecuación de Pielou y obtener nuevamente los resultados de las partes anteriores. (Sugerencia: observar que es una ecuación del tipo Riccati y usar el relativo cambio de variable).

12. Para las siguientes ecuaciones, hallar los puntos de equilibrio y discutir su estabilidad.

(a) $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$

(b) $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$

(c) $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{3}{16}$

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^3 + x_n\right)$

(e) $x_{n+1} = -\left(x_n^3 + x_n\right)$

(f) $x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2 + x_n$

(g) $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + x_n$

13. Mostrar que 0 es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} x_n$.

14. Mostrar que 0 es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación $x_{n+1} = a_n x_n$ si y solo si

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \prod_{i=0}^{n-1} a_i \right| = 0$$

15. Mostrar que $\{-1, 1\}$ es una órbita periódica asintóticamente estable del mapa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

16. Para las siguientes ecuaciones, hallar los equilibrios y los $2-$ciclos y discutir su estabilidad.

(a) $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 4$

(b) $x_{n+1} = 1 - x_n^2$

17. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\{0, 1\}$ es una órbita periódica asintóticamente estable del mapa $f(x) = ax^3 - bx + 1$.

18. Puede una función decreciente tener ciclos? Y una función creciente?

19. Se considera el mapa definido por:

$$B(x) = \left\{ \begin{array}{c} 2x, \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1, \text{ si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{array} \right|$$

    (a) Graficar la función B.

    (b) Mostrar que $x \in [0, 1]$ es un punto eventualmente fijo de B sii es de la forma $x = \frac{k}{2^n}$ con $k = 1, 2, ...2^n - 1$.

    (c) Graficar la función B^2, calcular los $2-$ciclos de B y estudiar su estabilidad.

    (d) Calcular el número de órbitas periódicas de período 3, 4 y 5.

20. **Modelo de crecimiento económico de Solow en tiempo discreto**. Los ingredientes son:

    (a) *Tecnología*: hay un solo bien Y_t que se producen usando dos factores de producción, capital K_t y trabajo L_t de acuerdo con la función de producción $F(K, L)$ que satisface las siguientes condiciones:

        i. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$; $\forall \lambda, K, L \in \mathbb{R}^+$ (retornos constantes a escala)

        ii. $F(K, 0) = F(0, L) = 0$; $\forall K, L \in \mathbb{R}^+$

        iii. $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$

        iv. $\lim\limits_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = +\infty$; $\lim\limits_{K \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$ (condiciones de Inada)

    (b) *Evolución de los factores*: la fuerza de trabajo L_t crece a la tasa constante n de modo que

$$L_{t+1} = (1 + n) L_t \tag{1}$$

    y la tasa de crecimiento del stock de capital iguala la inversión neta $I = sF(K, L)$ menos la depreciación del capital δK :

$$K_{t+1} - K_t = sF(K_t, L_t) - \delta K_t \tag{2}$$

    (c) *Evolución de la economía*: Si $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ es el capital por trabajador y $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1)$ es la función de producción en forma intensiva tenemos que: $f(0) = 0$, $f'(k) > 0, \forall k \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(k) = 0$, $\lim\limits_{k \to 0^+} f'(k) = +\infty$ y $f''(k) < 0, \forall k \in \mathbb{R}^+$. Dividiendo la ecuación (2) por la ecuación (1) se obtiene la ecuación fundamental del modelo de Solow a tiempo discreto. Esta ley describe como varía con el tiempo el capital per cápita:

$$k_{t+1} = \frac{s}{1+n} f(k_t) + \left(\frac{1-\delta}{1+n} \right) k_t$$

Se pide estudiar cualitativamente la dinámica del modelo.

1 Soluciones:

1. Expresión de a_n

   (a) $a_{n+1} = (1+i)\, a_n - r;\ \ a_n = (1+i)^n \lambda + \frac{r}{i}$

   (b) $a_{n+1} = a_n + n; a_1 = 0$

   (c) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}; a_2 = 3$

   (d) $a_n = 2$

   (e) $a_{n+1} = a_n + n$

2. a) $a_{n+1} = (1+r)\, a_n + T$; b) $a_n = -\frac{T}{r} + (1+r)^n \left(a_0 + \frac{T}{r}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ \text{ si } \ -1 < a < 1 \\ \infty \ \text{ si } 1 < |a| \end{array} \right.$; $x_n = x_0\ \forall n$ si $a = 1$ y $x_n = (-1)^n x_0$ $\forall n$ si $a = -1$

4. Soluciones

   (a) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

   (b) $a_n = (n-1)!a$

   (c) $a_n = \frac{1}{n} a_1$

   (d) $a_n = n + 1$

   (e) $a_n = -3n^2 - 5n - 8 + 11.2^n$

   (f) $a_n = -6 + 2^n$

   (g) $a_n = -2^{n-1}$

5. Riccati

   (a) $y_{n+1} = -\frac{p}{q} y_n - \frac{1}{q};\quad x_n = \frac{1}{-\frac{1}{p+q} + \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{p+q}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)^n}$

   (b) $y_{n+2} = (a+d)\, y_{n+1} + (bc - ad)\, y_n$

   (c) $x_n =$

   (d) $x_n = (x_0)^{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ \text{ si } \ -1 < x_0 < 1 \\ \infty \ \text{ si } 1 < |x_0| \end{array} \right.$ y $x_n = 1\ \forall n$ si $x_0 = \pm 1$

   (e) $x_n = \frac{1-(1-2x_0)^{2^n}}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \ \text{ si } 0 < x_0 < 1 \\ \infty \ \text{ si } 1 < |x_0| \end{array} \right.$ y $x_n = 0$ $\forall n \geq 1$ si $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$

6. a) $p_{n+1} = \dfrac{2 - p_n}{2}$; b) $p^* = \sqrt{3} - 1$ atractor

7. a) $p_{n+1} = \dfrac{m_D - \lambda\,(m_D + m_S)}{m_D} p_n + \dfrac{\lambda\,(b_D - b_S)}{m_D}$; b) $p^* = \dfrac{b_D - b_S}{m_S + m_D}$

8. Si $x_0 \leq 0 \Rightarrow x_n \to 0$ y si $x_0 > 0 \Rightarrow x_n \to +\infty$

9. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty,\ \forall x_0$ b) 1 atractor, 3 repulsor c) -1 repulsor, 1 punto silla

10. a) $f(x) - x > 0; \forall x > -1, x \neq 1,\ f(x) - x < 0; \forall x < -1$ y $f(1) = 0$; b) $p^* = 1,\ f'(1) = 1$ y es un punto silla; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$; d) Si

11. a) $p^* = \frac{\alpha-1}{\beta}$; b) $f(p^*) = \frac{1}{2}$ atractor; c) p^* atractor $\forall\alpha > 1$; d) $x_n = \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\beta} + \frac{1}{\alpha^n}\lambda}$

12. puntos de equilibrio

    (a) 2 repulsor y 3 atractor
    (b) 0 repulsor y -2 punto silla
    (c) $\frac{3}{4}$ repulsor y $\frac{1}{4}$ atractor
    (d) ± 1 repulsores y 0 atractor
    (e) 0 repulsor
    (f) -1 repulsor y 0 punto silla
    (g) 1 repulsor y 0 punto silla

13. $x_n = \frac{1}{n} x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

14. $x_n = \left(\prod\limits_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0$ y de alli sale.

15. $f'(1)f'(-1) = 0$ y de alli sale.

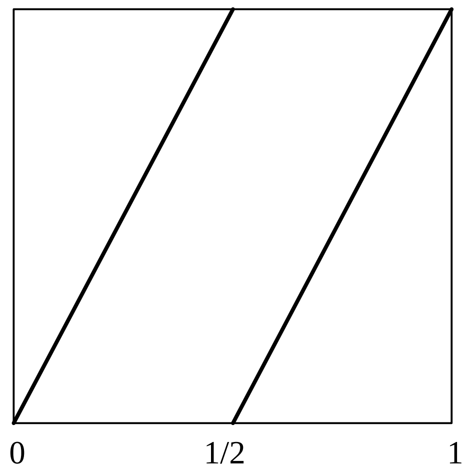
16. a) ± 2 repulsores y 2 atractor; $\left\{-1 \pm \sqrt{2}\right\}$ 2-ciclo repulsor b) $\{0, 1\}$ 2-ciclo atractor; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ puntos fijos

17. $\frac{1-\sqrt{17}}{4} < a < \frac{1+\sqrt{17}}{4}$; $b = a + 1$

18. Una función creciente no puede tener ciclos. Una decreciente si.

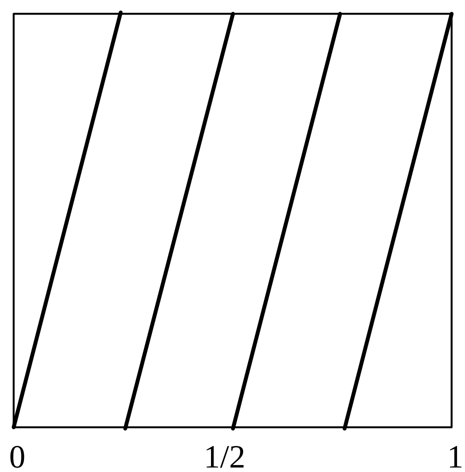
19. Mapa de Baker

    (a) La grafica de la función $B(x)$ es



(b) Sale de la definición: $B\left(x\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ o $x=\frac{3}{4}$ $B\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{4}$ y asi se sigue

(c) El 2-ciclo es $\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$ y es repulsor. La grafica de la función $B^2(x)$ es



(d) Hay 2 3-ciclos, 3 4-ciclos y 6 5-ciclos,