Juan Camilo López Duque

Parcial señales y sistemas 2024-1

Pregunta A:
La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}$ $x_2(t) \in \mathbb{R}$ se puede expresar

$$\bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

$$x_1(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$
$$x_2(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

Con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$, Determine la distancia entre las dos señales

$$= \bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\int_T |x_1(t)|^2 - 2x_1(t)x_2(t) + |x_2(t)|^2 \right) dt$$

se Reparte la integral

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\underbrace{\int_T |x_1(t)|^2 dt}_{\bar{P}_{x_1}} - 2\int_T x_1(t)x_2(t)dt + \underbrace{\int_T |x_2(t)|^2 dt}_{\bar{P}_{x_2}} \right)$$

se calcula cada integral evaluando

$(0, T) \to$ Reales positivos

$$\bar{P}_{x_1} = \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)|^2 dt$$

Por complejo conjugado

$$|x_1(t)|^2 = x_1(t) * x_1^*(t)$$

$$\bar{P}_{x_1} = \frac{1}{T}\int_0^T Ae^{j\omega t} \cdot Ae^{-j\omega t} dt$$

$$\bar{P}_{x_1} = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 e^0 dt$$

$$\bar{P}_{x_1} = \frac{A^2}{T} \cdot \left(t \Big|_0^T \right) = \frac{A^2}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} = A^2$$

$$\bar{P}_{x_1} = A$$

$$I \; -2\int_T [x_1(t)\, x_2(t)] \, dt$$

el euler complejo se puede expresar

$$Ae^{j\omega_0 t} = (\cos(\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(\omega_0 t))A$$

$$Be^{j5\omega_0 t} = (\cos(5\omega_0 t + j\,\mathrm{sen}(5\omega_0 t)B$$

en la integral

$$-2\int_T (\cos \omega_0 t + j\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t)A \cdot B(\cos(5\omega_0 t) + j\,\mathrm{sen}(5\omega_0 t)$$

$$-\frac{2AB}{T}\int_0^T e^{jw_0t}\cdot e^{j5w_0t}\,dt$$

para agrupar la integral es mejor en euler complejo

$$-\frac{2AB}{T}\int_0^T e^{jw_0t+j5w_0t}\,dt$$

$u = jw_0t + j5w_0t$

$du = (jw_0 + j5w_0)\,dt$

$$-\frac{2AB}{T(jw_0+j5w_0)}\int_0^T e^u$$

$$= -\frac{2AB}{T(jw_0+j5w_0)}\cdot\left[e^{jw_0t+j5w_0t}\Big|_0^T\right]$$

se abre en cosenos y senos

$$= \frac{-2AB}{T(jw_0+j5w_0)}\cdot\left[j\,sen(w_0t)+cos(w_0t)\,(cos5w_0t)+j(sen5w_0t)\right]$$

$$= \frac{-2AB}{T\left(j\frac{2\pi}{T}+j5\frac{2\pi}{T}\right)}\cdot\left[cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+j\,sen\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\left(cos\left(\frac{10\pi}{T}t\right)\right)\left(sen\left(\frac{10\pi}{T}t\right)\right)\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{-2AB}{T\left(j\frac{2\pi}{T}+j5\frac{2\pi}{T}\right)}\cdot\left[\cancel{(1+0)(1+0)-\left[(1+j(0))(1+j0)\right]}\right] \quad 0$$

$$= 0$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T}\int_0^T |Be^{j5w_0t}|^2 dt$$

Por complejo conjugado

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T}\int_0^T |Be^{j5w_0t} \cdot Be^{-j5w_0t} dt$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T}\int_0^T B^2 e^0 dt$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T} \cdot \left(B^2 t \Big|_0^T \right)$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{B^2 \cancel{T}}{\cancel{T}}$$

$$\bar{P}_{x_2} = B^2$$

$$\bar{P}_{x_1 - x_2} = d(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} A^2 - 0 + B^2$$

$$\boxed{d(x_1, x_2) = A^2 + B^2}$$ — la distancia esta dada por B y A al cuadrado

B) Cual es la señal obtenida en el tiempo discreto al utilizar un conversor analogo digital aplicando una frencuencia de muestreo de 5kHz para la señal

$$x(t) = 3(\cos 1000\pi t) + 5(\sin(2000\pi t)) + 10\cos(11000\pi t)$$

$\omega_1 = 1000\pi$

$\omega_2 = 2000\pi$

$\omega_3 = 11000\pi$

\# se busca la frecuencia mayor

$f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500Hz$

$f_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000H_2$

$f_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500H_2$

Nyquist $f max \cdot 2 \rightarrow fs = fmax \cdot 2$

$fs = 5500 \cdot 2 = 11000 \rightarrow$ frecuencia de muestreo

$Ts = \frac{1}{5000}$

En discreto : $t = nTs$

$x[n] = 3\cos[1000\pi \cdot \frac{n}{5000}]$

$x_1[n] = 3\cos(\frac{\pi}{5}n)$

$x_2[n] = 5\sin\left(2000\pi \frac{n}{5000}\right)$

$x_2[n] = 5\sin\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$

$x_3[n] = 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{5000}\right)$

$x_3[n] = 10\cos\left(\frac{11\pi}{5} n\right.$

$\Omega_{ori} = \frac{11\pi}{5} - 2\pi = \frac{\pi}{5}$

$\Omega_{ori} = 10\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)$

$x_T[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi}{5} n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right.$

$13\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + 5\sin\left(\frac{2\pi}{5} n\right) = x_T[n]$

señal recomendada, recomiendo un conversor de 12KHz

$x_T[n] = 3\cos\left(1000\pi \frac{n}{12000}\right) + 5\sin\left(2000 \frac{n}{12000}\right)$
$+ 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{12000}\right.$

$x_T[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{12} n\right) + 5\sin\left(\frac{\pi}{6} n\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi}{12} n\right.$

c) implementar una simulación para encontrar la salida del sistema lineal. con respuesta escalon $h_e(n) = [2, 4, 1, 5, 0, 10)$ $n \in \mathbb{Z}$

$x(t) = 20(\cos(t/3) + \cos(t/4))$ [A]

microprocesador con entrada analoga de 4mA a 20mA

Solución para ver si es cuasi periodica

$\omega_1 = \frac{1}{3}$ $\omega_2 = \frac{1}{4}$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$\frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$ → Racional, si es una señal cuasi periodica

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$T = T_1 L = k T_2$ $L = 4$

$T = L 6\pi = k 8\pi$

con $L, k \in \mathbb{Z}$ $mcm(6,8) = 24$ $L = 4$
$k = 3$

$\boxed{T = 24\pi s}$ — Periodo usado para discretizar la señal cuasi periodica