Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Complemento- Física Computacional

Marlon R Fulla

Problema: Solucionar mediante el método de Runge-Kutta para sistemas vectoriales el P.V.I.:

$$\begin{cases} x'''(t) + [x''(t)]^2 + [x'(t)]^2 - x(t) + 2cos(t) = 0 \\ x(0) = 3,\ x'(0) = 1, x''(0) = -1 \end{cases}$$

realicemos el cambio de variable:

$$\begin{array}{rcl} y_0 = t & & y_0' = 1 \\ y_1 = x & \text{derivando} \curvearrowright & y_1' = x' = y_2 \\ y_2 = x' & & y_2' = x'' = y_3 \\ y_3 = x'' & & y_3' = x''' = -2cos(y_0) + y_1 - y_2^2 - y_3^2 \end{array}$$

donde explícitamente en función de t tenemos:

$$y_0'(t) = 1$$
$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_3(t)$$
$$y_3'(t) = -2cos(y_0(t)) + y_1(t) - [y_2(t)]^2 - [y_3(t)]^2$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{array}{c} y_0(0) = 0 \\ y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = -1 \end{array}$$

Ahora, si definimos a Y: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $t \to Y(t)$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t \\ x \\ x \\ x'' \end{bmatrix} \quad derivando \curvearrowright \quad Y'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_1 - 2cos(y_0) - y_2^2 - y_3^2 \end{bmatrix}$$

y si definimos a F: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ como:

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = F(\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_1 - 2cos(y_0) - y_2^2 - y_3^2 \end{bmatrix}$$

Entonces el P.V.I. se puede escribir en forma vectorial autónoma así:

$$\begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \qquad \text{donde } Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

como $Y(t) = \begin{bmatrix} t \\ x \\ x' \\ x'' \end{bmatrix}$

entonces para encontrar a $x(0.1)$, $x'(0.1)$, $x''(0.1)$ debemos encontrar a $Y(0.1)$, así usando la fórmula de avance de Runge-Kutta 4 para sistemas vectoriales:

$Y(t_i + h) = Y(t_i) + \frac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4]$

tenemos que para h=0.1

$Y(0.1) = Y(0) + \frac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4]$

donde

$$F_1 = hF(Y(0)) = 0.1F(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 - 2cos(0) - (1)^2 - (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

ahora con F_1 calculamos F_2:

$$F_2 = hF(Y(0) + \frac{F_1}{2}) = 0.1F(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}) = 0.1F(\begin{bmatrix} 0.05 \\ 3.05 \\ 0.95 \\ -1.05 \end{bmatrix})$$

$$= 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.95 \\ -1.05 \\ -2cos(0.05) + 3.05 - (0.95)^2 - (1.05)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.095 \\ -0.105 \\ -0.095 \end{bmatrix}$$

Ahora con F_2 se puede calcular en cascada F_3 y F_4:

$$F_3 = hF(Y(0) + \frac{F_2}{2}) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.09475 \\ -0.10475 \\ -0.09375 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = hF(Y(0) + F_3) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.0989 \\ -0.1094 \\ -0.11255 \end{bmatrix}$$

Así finalmente:

$$Y(0.1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 3.0964 \\ 0.7626 \\ -1.2672 \end{bmatrix}$$

así que para $t = 0.1$, tenemos:

$x(0.1) = 3.0964$

$x'(0.1) = 0.7626$

$x''(0.1) = -1.2672$