Guía práctica para la resolución de Ecuaciones de Recurrencia Lineales de coeficientes constantes

Alberto Salguero

23 de noviembre de 2017

Esquema general de resolución

1. Expresar la ecuación general de la forma
   $t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$
2. Si $h(n) = 0 \Rightarrow$ ERL Homogénea
   1. Hallar $\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de la ecuación característica
      1. Raíces simples
      2. Raíces múltiples
   2. Reescribir ecuación original como
      $t(n) = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n + \cdots + \lambda_p {r_p}^n$
   3. Plantear sistema de ecuaciones con los casos base
   4. Determinar los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$
3. Si $h(n) \neq 0 \Rightarrow$ ERL No Homogénea
   1. Añadir a la ecuación característica los factores aportados por $h(n)$
   2. Resolver como ERL Homogénea

Ejemplo 1

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 5t(n-1) - 6t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma
$t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

Ejemplo 1

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 5t(n-1) - 6t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma
$t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

$$t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$$
$$a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$$

2. $h(n) = 0 \Rightarrow$ ERL Homogénea

Ejemplo 1

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 5t(n-1) - 6t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. Definir una nueva ecuación de la forma
   $c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$.

Ejemplo 1

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 5t(n-1) - 6t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5$, $a_2 = 6$, $k = 2$, $h(n) = 0$
2. Definir una nueva ecuación de la forma
   $c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$.

$$c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

$$\frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow R = \{3, 2\}$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. Expresar la ecuación de la forma
   $c(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)$.

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. Expresar la ecuación de la forma
   $c(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_k)$.

$$c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. Definir la base B del conjunto de soluciones como
   $B = \{{r_1}^n, {r_2}^n, \cdots, {r_p}^n\}$.

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. Definir la base B del conjunto de soluciones como
   $B = \{{r_1}^n, {r_2}^n, \cdots, {r_p}^n\}$.

$$B = \{3^n, 2^n\}$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. Reescribir la ecuación original como
   $t(n) = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n + \cdots + \lambda_p {r_p}^n$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. Reescribir la ecuación original como
   $t(n) = \lambda_1 {r_1}^n + \lambda_2 {r_2}^n + \cdots + \lambda_p {r_p}^n$

$$t(n) = \lambda_1 3^n + \lambda_2 2^n$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. $t(n) = \lambda_1 3^n + \lambda_2 2^n$
8. Plantear un sistema de p ecuaciones, incluyendo los casos base

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. $t(n) = \lambda_1 3^n + \lambda_2 2^n$
8. Plantear un sistema de p ecuaciones, incluyendo los casos base

$$\begin{cases} t(0) = \lambda_1 3^0 + \lambda_2 2^0 = 0 \\ t(1) = \lambda_1 3^1 + \lambda_2 2^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 3 + \lambda_2 2 = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. $t(n) = \lambda_1 3^n + \lambda_2 2^n$
8. Plantear un sistema de p ecuaciones, incluyendo los casos base

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 3 + \lambda_2 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 3 - \lambda_1 2 = 1$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -1$$

Ejemplo 1

1. $t(n) - 5t(n-1) + 6t(n-2) = 0$
   $a_1 = -5, a_2 = 6, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 5x^{2-1} + 6x^{2-2} = x^2 - 5x^1 + 6$
3. $r_1 = 3, r_2 = 2$
4. $c(x) = (x-3)(x-2) = (x-3)^1(x-2)^1, \quad m_1 = 1, m_2 = 1$
5. $\nexists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces simples.
6. $B = \{3^n, 2^n\}$
7. $t(n) = \lambda_1 3^n + \lambda_2 2^n$
8. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$$t(n) = 1 \cdot 3^n + (-1) \cdot 2^n = 3^n - 2^n$$

Ejemplo 2

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 2t(n-1) - t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma
   $t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

Ejemplo 2

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 2t(n-1) - t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma $t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

$$t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$$
$$a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$$

2. $h(n) = 0 \Rightarrow$ ERL Homogénea

Ejemplo 2

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 2t(n-1) - t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. Definir una nueva ecuación de la forma
   $c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$.

Ejemplo 2

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} 2t(n-1) - t(n-2) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. Definir una nueva ecuación de la forma
   $c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$.

$$c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow R = \{1, 1\}$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$
3. $r_1 = 1, r_2 = 1$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$
3. $r_1 = 1, r_2 = 1$
4. Expresar la ecuación de la forma
   $c(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = x^2 - 2x^{2-1} + 1x^{2-2} = x^2 - 2x^1 + 1$
3. $r_1 = 1, r_2 = 1$
4. Expresar la ecuación de la forma
   $c(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_k)$

$$c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$
\begin{aligned}
B = \{ & n^0 {r_1}^n, n^1 {r_1}^n, \cdots, n^{m_1-1} {r_1}^n, \\
& \cdots, n^0 {r_2}^n, n^1 {r_2}^n, \cdots, n^{m_2-1} {r_2}^n, \\
& \cdots, \\
& \cdots, n^0 {r_p}^n, n^1 {r_p}^n, \cdots, n^{m_p-1} {r_p}^n, \}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$\begin{aligned} B = \{ & n^0 {r_1}^n, n^1 {r_1}^n, \cdots, n^{m_1-1} {r_1}^n, \\ & \cdots, n^0 {r_2}^n, n^1 {r_2}^n, \cdots, n^{m_2-1} {r_2}^n, \\ & \cdots, \\ & \cdots, n^0 {r_p}^n, n^1 {r_p}^n, \cdots, n^{m_p-1} {r_p}^n, \} \end{aligned}$$

$$B = \{n^0 1^n, n^1 1^n\} = \{1, n\}$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. Reescribir la ecuación original como
   $t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. Reescribir la ecuación original como
   $t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$

$$t(n) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n$
6. Plantear un sistema de i ecuaciones, incluyendo los casos base

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n$
6. Plantear un sistema de i ecuaciones, incluyendo los casos base

$$\begin{cases} t(0) = \lambda_1 + \lambda_2 0 = 0 \\ t(1) = \lambda_1 + \lambda_2 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n$
6. Plantear un sistema de i ecuaciones, incluyendo los casos base

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 1$$

Ejemplo 2

1. $t(n) - 2t(n-1) + 1t(n-2) = 0$
   $a_1 = -2, a_2 = 1, k = 2, h(n) = 0$
2. $c(x) = (x-1)^2, \quad r_1 = 1, m_1 = 2$
3. $\exists m_i > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n$
6. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

$$t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n = 0 \cdot +1 \cdot n = n$$

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(n-1)+2 & n>0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma $t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

Ejemplo 3

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(n-1)+2 & n>0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

1. Expresar la ecuación general de la forma
   $t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$

$$t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$$

2. $h(n) = 2 \Rightarrow$ ERL No Homogénea

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. Reescribir $h(n)$ como $\sum_1^i p(n) S_i^n$, donde $p(n)$ es un polinomio de grado m_i

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $$h(n) = 2 = \sum_1^1 2 = \sum_1^1 (2 \cdot 1 \cdot 1) = \sum_1^1 2n^0 1^n \Rightarrow S_1 = 1, m_1 = 0$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $S_1 = 1, m_1 = 0$
3. Definir una nueva ecuación de la forma

$$c_1(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$$
$$c_2(x) = (x - S_1)^{m_1+1}(x - S_2)^{m_2+1} \cdots (x - S_i)^{m_i+1}$$
$$c(x) = c_1(x)c_2(x)$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $S_1 = 1, m_1 = 0$
3. Definir una nueva ecuación de la forma

$$c_1(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$$
$$c_2(x) = (x - S_1)^{m_1+1}(x - S_2)^{m_2+1} \cdots (x - S_i)^{m_i+1}$$
$$c(x) = c_1(x) c_2(x)$$

$$c_1(x) = x^1 + (-1) = x - 1$$
$$c_2(x) = (x-1)^{0+1} = x - 1$$
$$c(x) = c_1(x) c_2(x) = (x-1)(x-1)$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. Calcular las $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$

$$R = \{1, 1\}$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. $R = \{1, 1\}$
4. Expresar la ecuación de la forma
   $c(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. $R = \{1, 1\}$
4. Expresar la ecuación de la forma $c(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_k)$

$$c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. $R = \{1, 1\}$
4. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
5. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1)$
3. $R = \{1, 1\}$
4. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
5. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $R = \{1, 1\}$
3. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
4. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
5. Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$
\begin{aligned}
B = \{ & n^0 {r_1}^n, n^1 {r_1}^n, \cdots, n^{m_1 - 1} {r_1}^n, \\
& \cdots, n^0 {r_2}^n, n^1 {r_2}^n, \cdots, n^{m_2 - 1} {r_2}^n, \\
& \cdots, \\
& \cdots, n^0 {r_p}^n, n^1 {r_p}^n, \cdots, n^{m_p - 1} {r_p}^n, \}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $R = \{1, 1\}$
3. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
4. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
5. Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$
\begin{aligned}
B = \{ & n^0 {r_1}^n, n^1 {r_1}^n, \cdots, n^{m_1-1} {r_1}^n, \\
& \cdots, n^0 {r_2}^n, n^1 {r_2}^n, \cdots, n^{m_2-1} {r_2}^n, \\
& \cdots, \\
& \cdots, n^0 {r_p}^n, n^1 {r_p}^n, \cdots, n^{m_p-1} {r_p}^n, \}
\end{aligned}
$$

$$B = \{n^0 1^n, n^1 1^n\} = \{1, n\}$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
3. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
3. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. Reescribir la ecuación original como $t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$.

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2, \quad m_1 = 2$
3. $\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.
4. $B = \{1, n\}$
5. Reescribir la ecuación original como
   $t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$.

$$t(n) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Ejemplo 3

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $t(n) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + \lambda_2 n$
3. Para cada parámetro ligado i, hallar el valor de λ_i por sustitución, añadiendo al sistema de ecuaciones una nueva ecuación, donde

$t(n)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$
$t(n-1)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$, restando 1 a n en b_i
$t(n-2)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$, restando 2 a n en b_i
$\dots$

c_2 aporta a $c(x)$ el parámetro ligado λ_2, luego se puede hallar sustituyendo en la ecuación original $t(n)$ por $\lambda_2 n$, $t(n-1)$ por $\lambda_2(n-1)$, $t(n-2)$ por $\lambda_2(n-2)$...

Ejemplo 3

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(n-1)+2 & n>0 \\ 0 & n=0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $t(n) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + \lambda_2 n$
3. Sustituir en la ecuación original $t(n)$ por $\lambda_2 n$ y $t(n-1)$ por $\lambda_2(n-1)$

Ejemplo 3

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(n-1)+2 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1. $t(n) - 1t(n-1) = 2, \quad a_1 = -1, k = 1, h(n) = 2$
2. $t(n) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + \lambda_2 n$
3. Sustituir en la ecuación original $t(n)$ por $\lambda_2 n$ y $t(n-1)$ por $\lambda_2(n-1)$

$$\begin{aligned} t(n) = t(n-1) + 2 \Rightarrow \lambda_2 n &= \lambda_2(n-1) + 2 \\ \lambda_2 n &= \lambda_2 n - \lambda_2 1 + 2 \\ \lambda_2 1 &= \lambda_2 n - \lambda_2 n + 2 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

1. Sustituir en la ecuación original $t(n)$ por $\lambda_2 n$ y $t(n-1)$ por $\lambda_2(n-1)$

$$\begin{aligned} t(n) = t(n-1) + 2 \Rightarrow \lambda_2 n &= \lambda_2(n-1) + 2 \\ \lambda_2 n &= \lambda_2 n - \lambda_2 1 + 2 \\ \lambda_2 1 &= \lambda_2 n - \lambda_2 n + 2 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

2. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + 2 \cdot n$

Ejemplo 3

1. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + 2 \cdot n$
2. Plantear un sistema de ecuaciones, incluyendo los casos base

Ejemplo 3

1. $t(n) = \lambda_1 + \lambda_2 n = \lambda_1 + 2 \cdot n$
2. Plantear un sistema de ecuaciones, incluyendo los casos base

$$t(0) = \lambda_1 + 2 \cdot 0 = \lambda_1 = 0$$

$$t(n) = 0 + 2 \cdot n = 2n$$

Ejemplo 4

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(\frac{n}{2}) + t(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$$

Expresar la ecuación general de la forma
$t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$.

Ejemplo 4

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(\frac{n}{2}) + t(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$$

Expresar la ecuación general de la forma
$t(n) + a_1 t(n-1) + a_2 t(n-2) + \cdots + a_k t(n-k) = h(n)$.

$$t(n) - t(\frac{n}{2}) - t(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$$
$$t(n) - 2t(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$$

Ejemplo

$$t(n) = \begin{cases} t(\frac{n}{2}) + t(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases}$$

$$t(n) - 2t(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$$

Es una ecuación que no sabemos resolver, pero si suponemos que $n = 2^k$.

$$t(2^k) - 2t(\frac{2^k}{2}) = \frac{2^k}{2}, \quad 2^k > 1$$
$$t(2^k) - 2t(2^{k-1}) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

Ejemplo 4

$$t(2^k) - 2t(2^{k-1}) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

Si realizamos un cambio de variable donde $T(k) = t(2^k)$, tenemos que

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

que ya se encuentra expresada de una forma que sabemos resolver, y donde $a_1 = -2, k = 1, h(k) = \frac{1}{2}2^k$.

$h(k) = \frac{1}{2}k \Rightarrow$ ERL No homogénea $\Rightarrow$ Reescribir $h(k)$ como $\sum_1^i p(k)S_i^k$, donde $p(k)$ es un polinomio de grado m_i.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

que ya se encuentra expresada de una forma que sabemos resolver, y donde $a_1 = -2, k = 1, h(k) = \frac{1}{2}2^k$.
$h(k) = \frac{1}{2}k \Rightarrow$ ERL No homogénea $\Rightarrow$ Reescribir $h(k)$ como $\sum_1^i p(k)S_i^k$, donde $p(k)$ es un polinomio de grado m_i.

$$h(k) = \frac{1}{2}2^k = \sum_1^1 \frac{1}{2}2^k = \sum_1^1 (\frac{1}{2} \cdot k^0 \cdot 2^k) \Rightarrow S_1 = 2, m_1 = 0$$

Definir una nueva ecuación de la forma

$$c_1(x) = x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \cdots + A_k$$
$$c_2(x) = (x - S_1)^{m_1+1}(x - S_2)^{m_2+1} \cdots (x - S_i)^{m_i+1}$$
$$c(x) = c_1(x)c_2(x)$$

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$S_1 = 2, m_1 = 0$$

Definir una nueva ecuación de la forma

$$\begin{aligned} c_1(x) &= x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \cdots + A_k \\ c_2(x) &= (x - S_1)^{m_1+1}(x - S_2)^{m_2+1} \cdots (x - S_i)^{m_i+1} \\ c(x) &= c_1(x)c_2(x) \end{aligned}$$

donde $c_2(x)$ aporta i parámetros ligados a $c(x)$.

$$\begin{aligned} c_1(x) &= x^1 + (-2) = x - 2 \\ c_2(x) &= (x-2)^{0+1} = (x-2) \\ c(x) &= c_1(x)c_2(x) = (x-2)(x-2) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$c(x) = c_1(x)c_2(x) = (x-2)(x-2)$$

Calcular las $\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$c(x) = c_1(x)c_2(x) = (x-2)(x-2)$$

Calcular las $\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ raíces de $c(x)$.

$$R = \{2, 2\}$$

Expresar la ecuación de la forma
$c(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_k)$.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$
$$c(x) = c_1(x)c_2(x) = (x-2)(x-2)$$

$$c(x) = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

$\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.

$$c(x) = (x-2)^2, m_1 = 2$$

Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$\begin{aligned} B = \{&k^0 {r_1}^k, k^1 {r_1}^k, \cdots, k^{m_1-1} {r_1}^k, \\ &\cdots, k^0 {r_2}^k, k^1 {r_2}^k, \cdots, k^{m_2-1} {r_2}^k, \\ &\cdots, \\ &\cdots, k^0 {r_p}^k, k^1 {r_p}^k, \cdots, k^{m_p-1} {r_p}^k, \} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$c(x) = c_1(x)c_2(x) = (x-2)(x-2)$$

$$c(x) = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

$\exists m_p > 1 \Rightarrow$ Raíces múltiples.

$$c(x) = (x-2)^2, m_1 = 2$$

Definir la base B del conjunto de soluciones como

$$B = \{k^0 2^k, k^1 2^k\} = \{2^k, k2^k\}$$

Reescribir la ecuación original como
$t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$B = \{k^0 2^k, k^1 2^k\} = \{2^k, k2^k\}$$

Reescribir la ecuación original como
$t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$.

$$T(k) = \lambda_1 \cdot 2^k + \lambda_2 k 2^k$$

Para cada parámetro ligado i, hallar el valor de λ_i por sustitución, añadiendo al sistema de ecuaciones una nueva ecuación, donde

$T(k)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$

$T(k-1)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$, restando 1 a k en b_i

$T(k-2)$ se sustituye por $\lambda_i b_i$, restando 2 a k en b_i

$\ldots$

c_2 aporta a $c(x)$ el parámetro ligado λ_2, luego se puede hallar sustituyendo en la ecuación original $T(k)$ por $\lambda_2 k 2^k$, $T(k-1)$ por $\lambda_2(k-1)2^(k-1)$, $T(k-2)$ por $\lambda_2(k-2)2^(k-2)$...

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$
$$B = \{k^0 2^k, k^1 2^k\} = \{2^k, k2^k\}$$

$$T(k) = 2T(k-1) + \frac{1}{2}2^k \Rightarrow \lambda_2 k2^k = 2(\lambda_2 (k-1)2^{(k-1)}) + \frac{1}{2}2^k$$
$$\lambda_2 k2^k = \lambda_2 (k-1)2^k + \frac{1}{2}2^k$$
$$\lambda_2 k = \lambda_2 (k-1) + \frac{1}{2}$$
$$\lambda_2 k = \lambda_2 k - \lambda_2 + \frac{1}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Quedando la ecuación como

1

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

Reescribir la ecuación original como
$t(n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_i b_i$.

$$T(k) = \lambda_1 \cdot 2^k + \lambda_2 k 2^k$$

$$T(k) = 2T(k-1) + \frac{1}{2}2^k \Rightarrow \lambda_2 k 2^k = 2(\lambda_2 (k-1) 2^{(k-1)}) + \frac{1}{2}2^k$$

$$\lambda_2 k 2^k = \lambda_2 (k-1) 2^k + \frac{1}{2}2^k$$

$$\lambda_2 k = \lambda_2 (k-1) + \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 k = \lambda_2 k - \lambda_2 + \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$T(k) = \lambda_1 \cdot 2^k + \frac{1}{2}k2^k$$

Deshacer el cambio $T(k) = t(2^k)$,

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$T(k) = \lambda_1 \cdot 2^k + \frac{1}{2}k2^k$$

Deshacer el cambio $T(k) = t(2^k)$.

$$2^k = n \Rightarrow k = \log_2 n \Rightarrow t(n) = \lambda_1 2^{\log_2 n} + \frac{1}{2}(\log_2 n)2^{\log_2 n}, \quad n > 1$$

$$t(n) = \lambda_1 n^{\log_2 2} + \frac{1}{2}(\log_2 n)n^{\log_2 2}, \quad n > 1$$

$$t(n) = \lambda_1 n + \frac{1}{2}(\log_2 n)n, \quad n > 1$$

Plantear un sistema de ecuaciones, incluyendo los casos base.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$t(n) = \lambda_1 n + \frac{1}{2}(\log_2 n)n, \quad n > 1$$

Plantear un sistema de ecuaciones, incluyendo los casos base.

$$t(1) = \lambda_1 1 + \frac{1}{2}(\log_2 1)1 = \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = \lambda_1 = 0$$

Determinar los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$.

Ejemplo 4

$$T(k) - 2T(k-1) = \frac{1}{2}2^k, \quad k > 0$$

$$t(n) = \lambda_1 n + \frac{1}{2}(\log_2 n)n, \quad n > 1$$

Plantear un sistema de ecuaciones, incluyendo los casos base.

$$t(1) = \lambda_1 1 + \frac{1}{2}(\log_2 1)1 = \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = \lambda_1 = 0$$

$$t(n) = \frac{1}{2}(\log_2 n)n$$