

Fundamentos de Computación Gráfica

Modelación Geométrica

Juan Carlos Arbeláez E

Universidad Eafit

Tabla de contenido

Introducción

Modelación geométrica

Representaciones de objetos

Historia

Sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

Barridos (Sweeping)

B-Rep (Boundary Representation)

Contorno o límites

Mallas Poligonales

Curvas y superficies

Transformación de objetos

Transformaciones 2D

Coordenadas homogéneas

Composición de transformaciones

Transformaciones 3D

Introducción

Transformar datos en imágenes

Primer paso Codificar la forma de los objetos

Depende de:

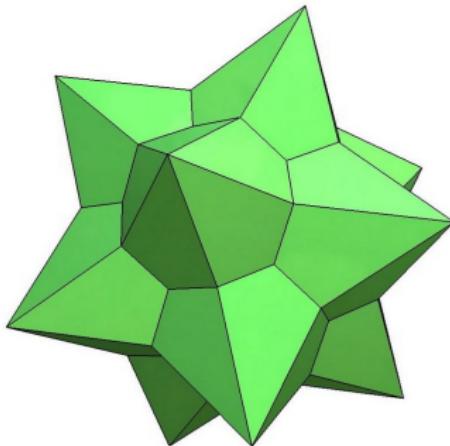
- ▶ Pieza a modelar
- ▶ Problema a resolver



The Matrix 1999

Introducción

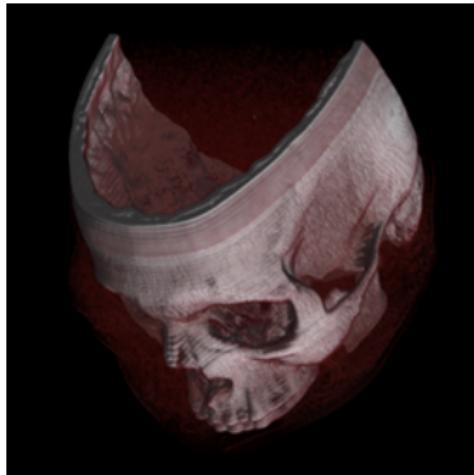
¿Cómo representarían esta información?



Tomado de craftsmanspace.com

Introducción

¿Cómo representarían esta información?



Tomado de Wikipedia

Introducción

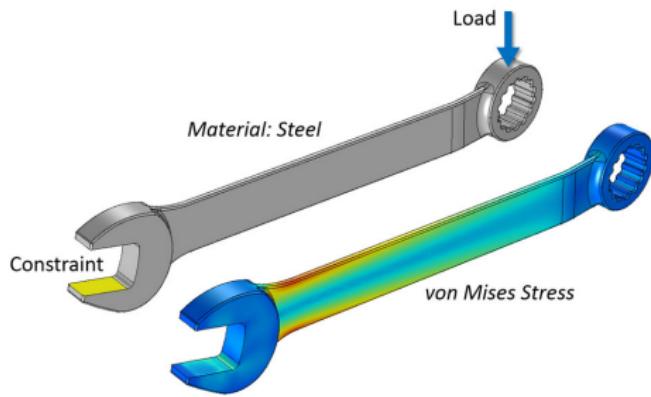
¿Cómo representarían esta información?



Tomado de Wikipedia

Introducción

¿Cómo representarían esta información?



Introducción

¿Cómo representarían esta información?



Tomado de tutorials.cgrecord.net

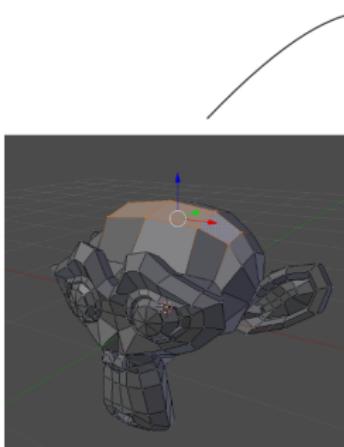
Introducción

¿Cómo representarían esta información?



Tomado de Grass Animation -Youtube

Introducción



Input del usuario

```
solid Exported from Blender-2.70 (sub 0)
facet normal 0.671345 -0.714459 -0.197092
outer loop
vertex 0.468750 -0.757812 0.242188
vertex 0.437500 -0.765625 0.164062
vertex 0.500000 -0.687500 0.093750
endloop
endfacet
facet normal 0.661707 -0.721062 -0.202628
outer loop
vertex 0.500000 -0.687500 0.093750
vertex 0.562500 -0.671375 0.242188
vertex 0.468750 -0.757812 0.242188
endloop
endfacet
facet normal -0.671345 -0.714459 -0.197092
outer loop
vertex -0.500000 -0.687500 0.093750
vertex -0.437500 -0.765625 0.164062
vertex -0.468750 -0.757812 0.242188
endloop
endfacet
facet normal -0.661707 -0.721062 -0.202628
outer loop
vertex -0.468750 -0.757812 0.242188
vertex -0.562500 -0.671375 0.242188
vertex -0.500000 -0.687500 0.093750
endloop
endfacet
facet normal 0.832580 -0.464556 -0.301659
```

Representación
Internacional



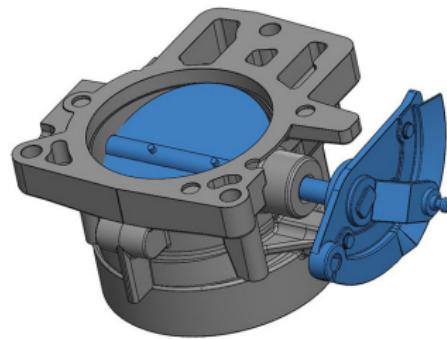
Visualización

Modelación geométrica

Modelación geométrica

Métodos y algoritmos para la descripción de la geometría que sean computacional y matemáticamente compatibles

- ▶ Permitan realizar cálculos
- ▶ Puedan ser visualizados



Modelación 3d sólidos. Tomada de qcgroup.com

Modelación geométrica

Geometric modeling pipeline

Flujo de definición de representaciones de objetos

1. Geometrías de mundo real
2. Representación matemática
3. Representación discreta
4. Implementación concreta



Modelación 3d sólidos. Tomada de Computer Graphics and Geometric Modeling

Introducción

Modelación geométrica

Representaciones de objetos

Historia

Sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

Barridos (Sweeping)

B-Rep (Boundary Representation)

Contorno o límites

Mallas Poligonales

Curvas y superficies

Transformación de objetos

Transformaciones 2D

Coordenadas homogéneas

Composición de transformaciones

Transformaciones 3D

Formatos comunes

Bibliografía

Representaciones de objetos

Representaciones

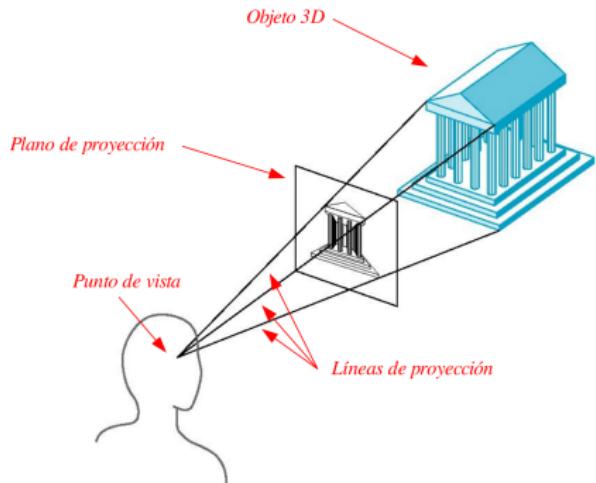
La mayoría de representaciones se pueden clasificar en:

- 1. Sólidos** Los objetos son definidos como un volumen
- 2. Contorno o límites** Modelos representan la superficie de los objetos

Representaciones iniciales

Planos de ingeniería

- ▶ Primeros intentos de representar objetos
- ▶ Proyecciones gráficas (Cónica o paralela)
- ▶ Protocolos usados en dibujo técnico

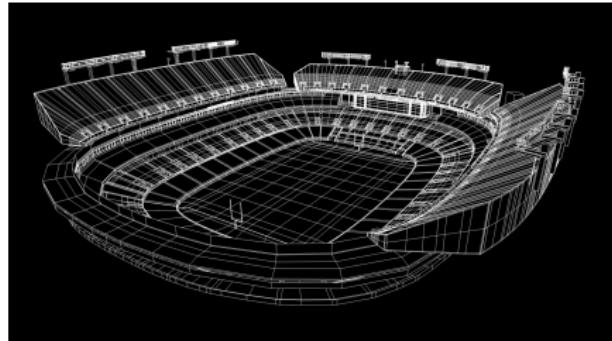


Elementos de la proyección gráfica en dibujo técnico

Representaciones iniciales

Representación de Wireframe

- ▶ Desarrollado en los 60s
- ▶ Representa el objeto con bordes y vértices
- ▶ Visualización de primeros programas de modelación
- ▶ Problema de ambigüedad
- ▶ Usados para representar escenas complejas o de alto desempeño

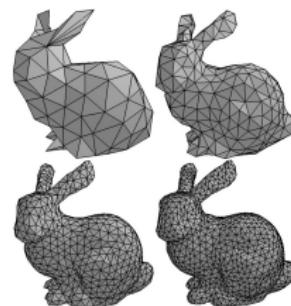


Representación en wireframe. Tomado de smoke-mirrorscg.blogspot.com

Representaciones iniciales

Representación de facetas

- ▶ Soluciona la ambigüedad del modelo de bordes
- ▶ Diferencia entre representación de facetas y *Faceted display*

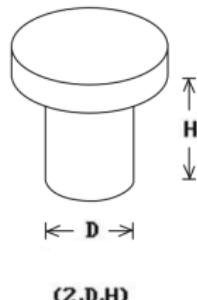
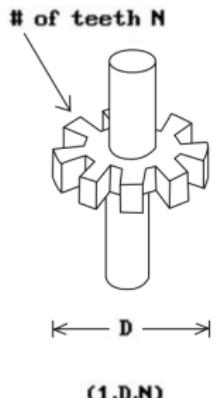


Representación en mallas. Tomado de thepremrishiapatel.wordpress.com

Representaciones iniciales

Representación por instancias primitivas

- ▶ Número finito de geometrías primitivas
- ▶ Parametrizadas con variables
- ▶ Compacto y sin ambigüedades
- ▶ Limitado a las primitivas disponibles



Representación en instancias primitivas. Tomado de Computer Graphics and Geometric Modeling

Representaciones en sólidos

Sólidos

- ▶ Presentados en los años 70s
- ▶ Descripción completa
- ▶ Sin ambigüedades
- ▶ Diferenciar exterior e interior de un volumen



Modelaciones sólidas. Tomado de 3dprint.com

Representaciones en sólidos

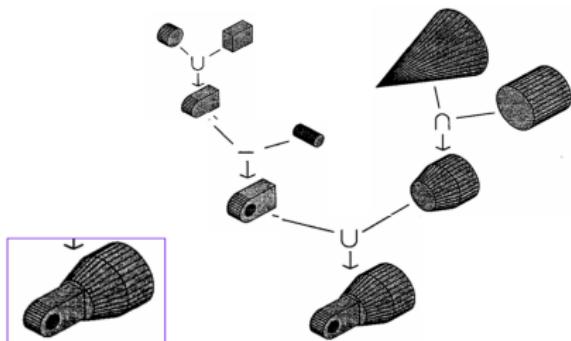
Representaciones comunes

- ▶ Constructive Solid Geometry (CSG)
- ▶ Sweeping
- ▶ Boundary Representation

Representaciones en sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

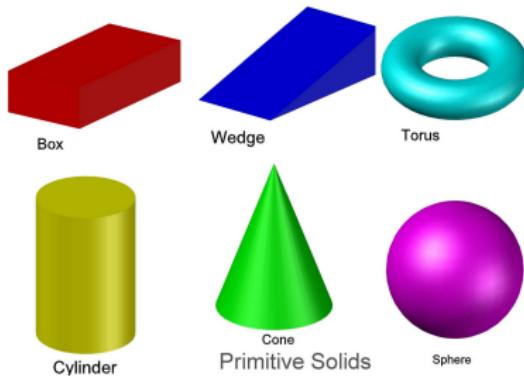
- ▶ Construir sólidos complejos
- ▶ Secuencias de operaciones booleanas
- ▶ Grupo inicial de primitivas (parametrizadas)
- ▶ Representados como árboles binarios
- ▶ Guarda el historial de operaciones



Árbol binario de CSG. Tomado de engr.uvic.ca

Representaciones en sólidos

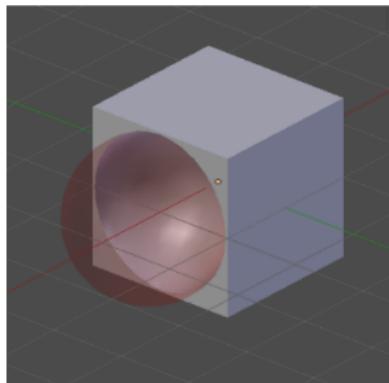
Primitivas



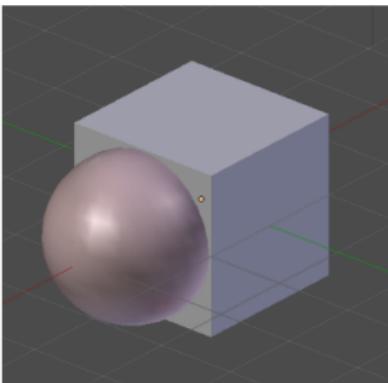
Ejemplo de sólidos simples (primitivas) usados en CSG. Normalmente son usadas funciones cuádricas. Tomado de ktownsend0.weebly.com

Representaciones en sólidos

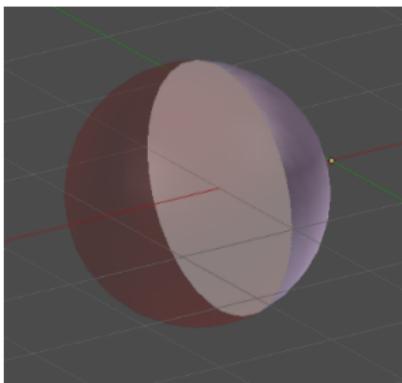
Operaciones booleanas



Diferencia



Unión

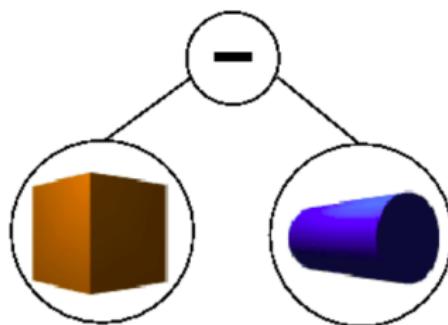


Intercepción

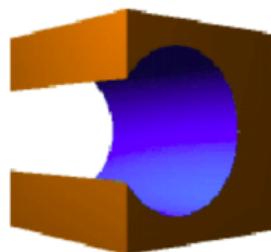
Ejemplo de operaciones booleanas en sólidos simples

Representaciones en sólidos

Ejemplo de CSG



CSG Tree

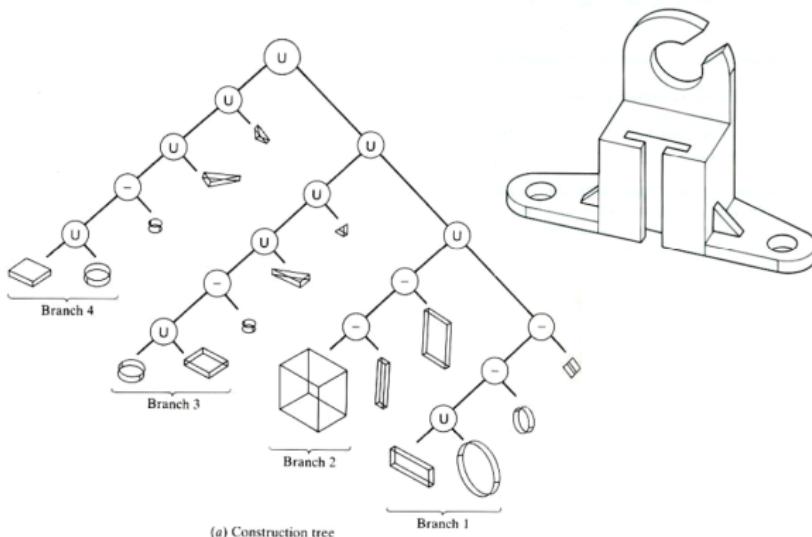


The Resulting Solid

Ejemplo de Constructive Solid Geometry. Tomado de cs.duke.edu

Representaciones en sólidos

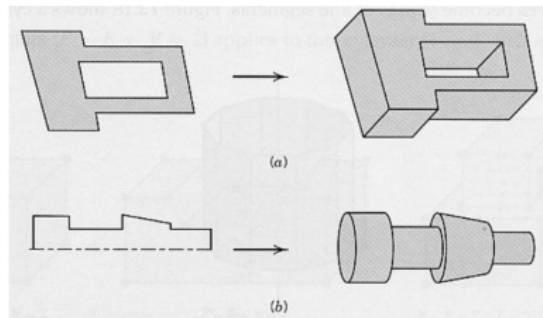
Ejemplo de CSG



Representación en sólidos

Barridos (Sweeping)

- ▶ Forma natural en la que objetos son manufacturados
- ▶ Recorrer un conjunto a través de otro
- ▶ Existen dos tipos:
 - ▶ Traslación
 - ▶ Rotacional



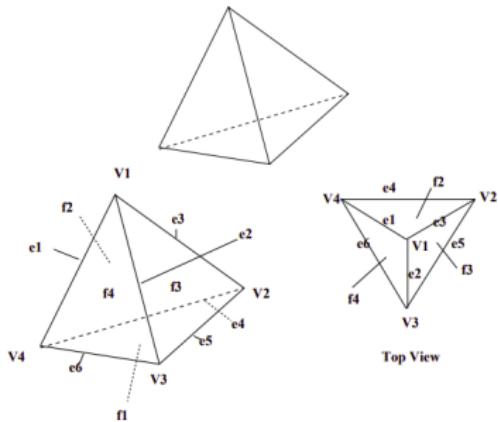
Barrido de translación (a) y rotación (b)

Tipos de barrido. Tomado de vr.me.ncku.edu.tw

Representación en sólidos

Boundary Representation – B-rep

- ▶ La superficie es representado de forma explicita
- ▶ Interior de forma implicita
- ▶ La superficie sólida es descrita por:
 - ▶ Geométrica: superficies, curvas, puntos
 - ▶ Topológicas: caras bordes, vértices

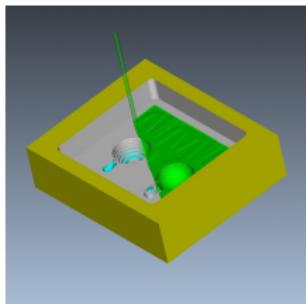


Modelo B-rep de un tetraedro. Tomado de Computational Geometry, Lecture 1. por Nicholas M. Patrikalakis

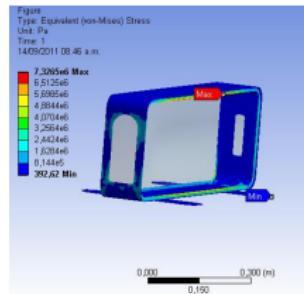
Representación en sólidos

Resumen

Descripción completa, sin ambigüedades. Generalmente son usados en las simulaciones de ingeniería



Diseño y análisis de manufactura de moldes

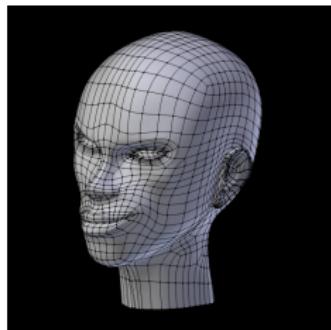


Análisis de esfuerzos, fluidos y materiales

Representaciones de contorno o límites

Contornos o límites

Usado con fines visuales debido a que la apariencia depende del exterior de un objeto en la mayor parte.



Modelo realizado en Blender 3D



Render Old Guy por Kamil Makowski

Representaciones de contorno o límites

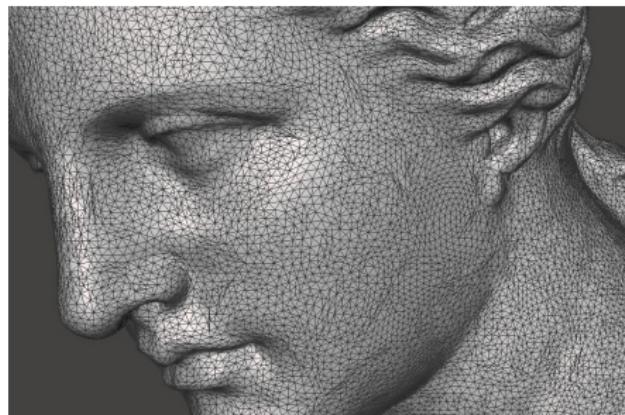
Representaciones comunes

- ▶ Mallas poligonales
- ▶ Curvas
- ▶ Superficies

Representaciones de contorno o límites

Mallas Poligonales

- ▶ Es la representación por defecto (en especial triangulares)
- ▶ Representar geometrías complejas
- ▶ Ofrece mayor flexibilidad (formas libres)

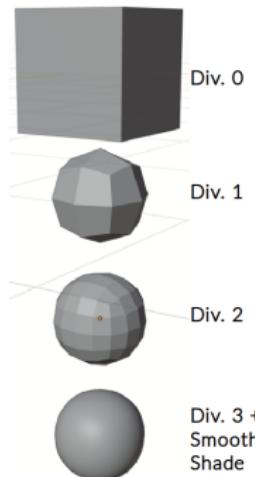


Modelo en Malla triangular. Tomado de formlabs.com

Mallas Poligonales

Subdivisión de superficies

- ▶ Método para representar una superficie suave
- ▶ Malla más fina
- ▶ Operación recursiva
- ▶ Altera la geometría



Subdivisión de superficie. Método Catmull-Clark

Representaciones de contorno o límites

Mallas Poligonales

- ▶ Compactas y sencillas
- ▶ Algoritmos geométricos eficientes y sin límites
- ▶ Eficientes para renderizar
- ▶ Asociar texturas

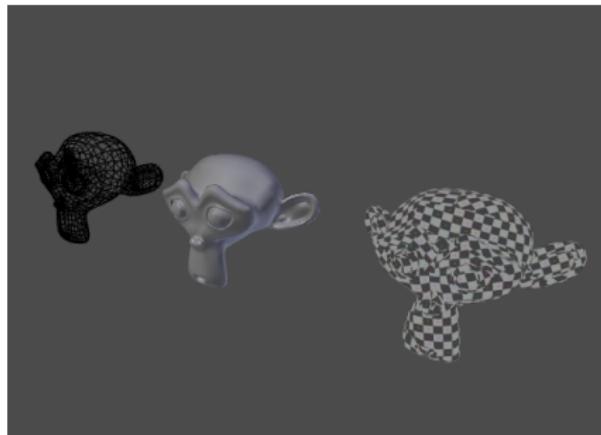


Render de modelo en malla poligonal. Tomado de artstation.com por Nicolas Collings

Representaciones de contorno o límites

Mallas Poligonales

- ▶ No hay que hacer conversiones en el "pipeline"
- ▶ Mayoría de operaciones son manejadas por la tarjeta de vídeo
- ▶ Una vez creada puede ser visualizada como:
 - ▶ Wireframe
 - ▶ Sólido
 - ▶ Texturizado

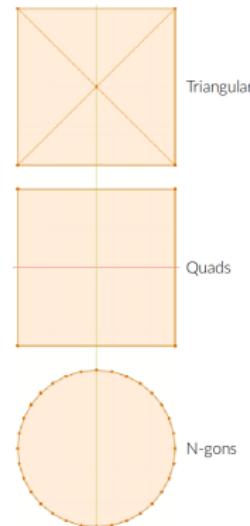


*Modos de visualización por defecto de las mallas.
Realizado en Blender*

Mallas Poligonales

¿Qué son?

- ▶ Conjunto de **vértices, bordes y caras**
- ▶ Definen la forma de un poliedro
- ▶ Caras pueden consistir en:
 - ▶ Triángulos
 - ▶ Cuadriláteros (quads)
 - ▶ Polígonos (n -gons)



Tipos de caras poligonales en Blender

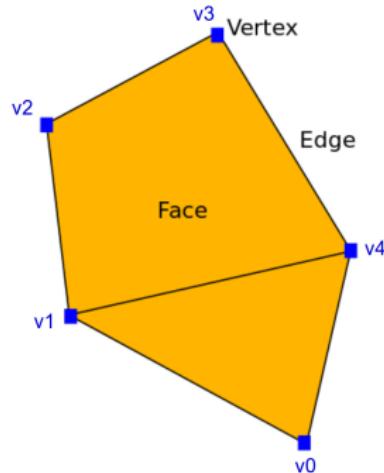
Mallas Poligonales

Estructura de los datos

Vértices Puntos en el espacio (x,y,z)

Bordes Línea que conecta dos vértices

Cara Conectando vértices en sentido horario o anti-horario



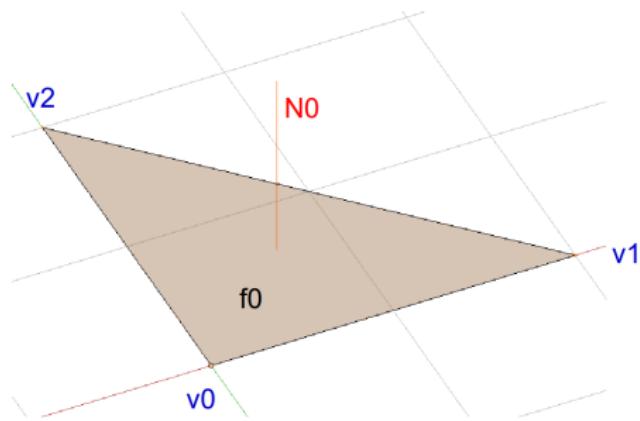
Componentes de una malla. Editado de Wikipedia

Mallas Poligonales

Definir una malla

Se utilizan 3 listas separadas:

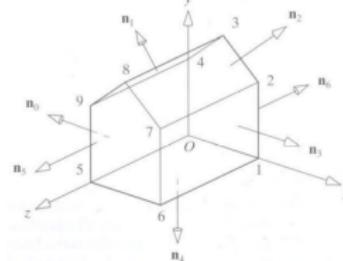
1. Vértices
2. Caras
3. Normales



Componentes para definir una malla poligonal

Mallas Poligonales

vertex	x	y	z
0	0	0	0
1	1	0	0
2	1	1	0
3	0.5	1.5	0
4	0	1	0
5	0	0	1
6	1	0	1
7	1	1	1
8	0.5	1.5	1
9	0	1	1



normal	n_x	n_y	n_z
0	-1	0	0
1	-0.477	0.8944	0
2	0.447	0.8944	0
3	1	0	0
4	0	-1	0
5	0	0	1
6	0	0	-1

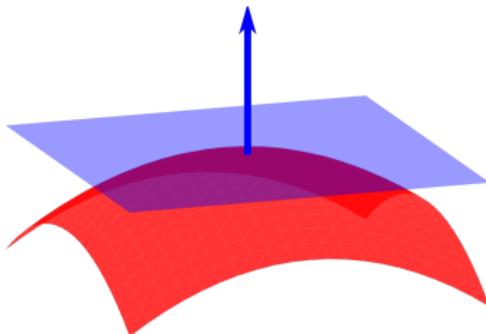
face	vertices	associated normal
0 (left)	0,5,9,4	0,0,0,0
1 (roof left)	3,4,9,8	1,1,1,1
2 (roof right)	2,3,8,7	2,2,2,2
3 (right)	1,2,7,6	3,3,3,3
4 (bottom)	0,1,6,5	4,4,4,4
5 (front)	5,6,7,8,9	5,5,5,5,5
6 (back)	0,4,3,2,1	6,6,6,6,6

Listas para la definición de malla. Tomado de *Computer Graphics Using OpenGL* por F S. Hill Jr

Mallas Poligonales

Normales

1. Vector *perpendicular al plano tangente de la superficie
2. Define la orientación de las caras
3. Utilizado en el proceso de renderizado

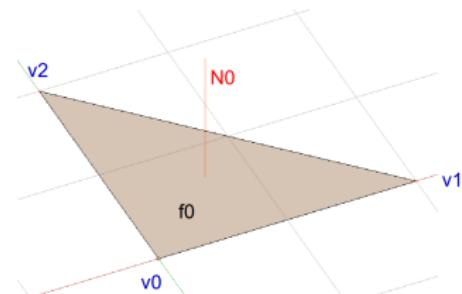


Vector normal a una superficie. Tomado de Wikipedia

Mallas Poligonales

Cálculo de las normales

1. Producto cruz (Normalizado)
 $m = (v_1 - v_0) \times (v_2 - v_0)$
2. Falla cuándo los vectores son paralelos



Vector normal a una superficie

Mallas Poligonales

Cálculo de las normales

1. Método Martin Newell
2. Promedio de los vértices (no son totalmente planos)
3. No falla en vectores paralelos

$$m_x = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - y_{next(i)})(z_i + z_{next(i)})$$
$$m_y = \sum_{i=0}^{N-1} (z_i - z_{next(i)})(x_i + x_{next(i)})$$
$$m_z = \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - x_{next(i)})(y_i + y_{next(i)})$$

Aproximación de Newell a la normal de un polígono

Introducción

Modelación geométrica

Representaciones de objetos

Historia

Sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

Barridos (Sweeping)

B-Rep (Boundary Representation)

Contorno o límites

Mallas Poligonales

Curvas y superficies

Transformación de objetos

Transformaciones 2D

Coordenadas homogéneas

Composición de transformaciones

Transformaciones 3D

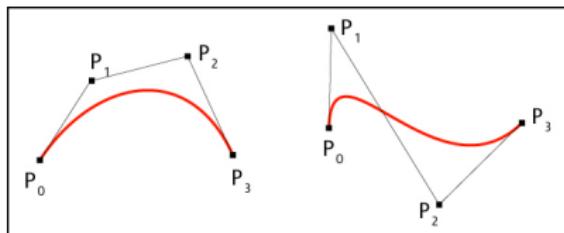
Formatos comunes

Bibliografía

Representaciones de contorno o límites

Curvas Paramétricas

- ▶ Definir curvas complejas a través de unos puntos de control
- ▶ Son usadas para:
 - ▶ Definir objetos
 - ▶ Trayectorias
 - ▶ Definir superficies



Curvas paramétricas. Tomado de techblog.badoo.com

Curvas Paramétricas

Demo

Ejemplo de interacción con curvas en:

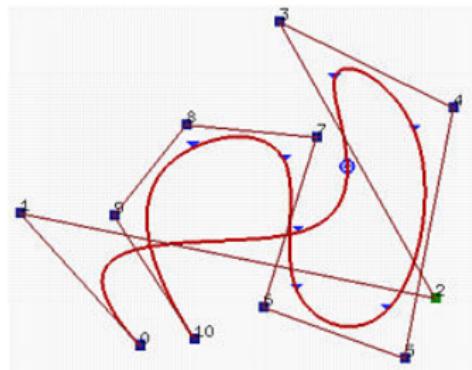
<http://math.hws.edu/eck/cs424/notes2013/canvas/bezier.html>

- ▶ Pasa por el primer y último punto de control
- ▶ Es influenciada por los puntos intermedios

Curvas Paramétricas

Splines

- ▶ Función de valores reales definida por partes
- ▶ Polinomios por partes están conectados
- ▶ Nivel de continuidad puede variar
- ▶ Algunos tipos
 - ▶ B-splines
 - ▶ NURBS
 - ▶ **Curvas Bézier**



Curva spline. Tomada de cs.mtu.edu

Curvas Paramétricas

Curvas Bézier

- ▶ Inventadas por el ingeniero francés Pierre Bézier en Renault
- ▶ Son simples de implementar
- ▶ Usadas para modelar curvas suaves
- ▶ Intuitivas de modificar
- ▶ Gráficos vectoriales (Escalar indefinidamente)
- ▶ Usadas en GUI trayectorias de tiempo

Curvas Bézier

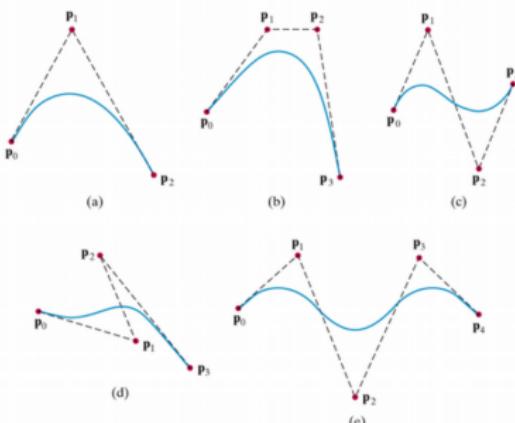
Propiedades

Continuidad de orden-0

Curva $n + 1$ comienza donde termina la curva n

Continuidad de orden-1

Derivadas de las curvas punto inicial $n + 1$ y punto final n son iguales

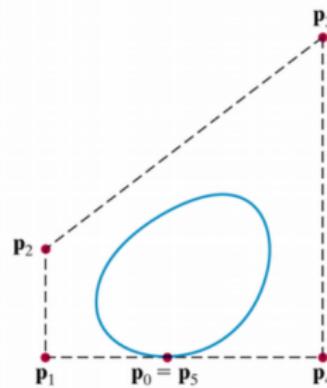


Curvas Bézier 2D generadas con tres, cuatro y cinco puntos de control. Tomado de Computer Graphics with OpenGL. 3rd Edition. Chapt. 8

Curvas Bézier

Propiedades

- ▶ Curva está circunscrita en su *Convex Hull*



Curvas Bézier cerrada especificando el punto final e inicial en la misma posición. Tomado de Computer Graphics with OpenGL. 3rd Edition. Chapt. 8

Curvas Bézier

Bézier Lineal

- ▶ Interpolación lineal
- ▶ Dados los puntos P_0 y P_1

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

Progresión lineal de P_0 a P_1 . Tomado de Wikipedia

Curvas Bézier

Bézier cuadrática

- ▶ Interpolación lineal entre las interpolaciones P_0, P_1 y P_1, P_2
- ▶ Trayectoria marcada por $B(t)$ dados los puntos P_0, P_1 y P_2

Progresión cuadrática de P_0 a P_2 . Tomado de Wikipedia

Curvas Bézier

Bézier cuadrática expresión matemática

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)[(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1] + t[(1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

Interpolación lineal entre las interpolaciones entre P_0 , P_1 y P_1 , P_2

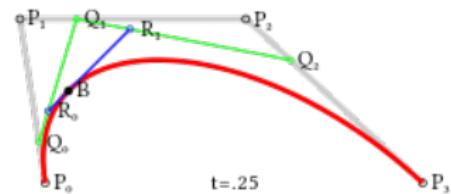
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_1 + (1 - t)^2(\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) + t^2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3)$$

Organizando la ecuación

Curvas Bézier

Bézier cúbica

- ▶ Se repite el proceso agregando interpolación Q_1 entre P_2 , P_3
- ▶ Curva se define por la trayectoria B definida por la interpolación Q_1 , Q_2
- ▶ Normalmente usada por partes unidas (*Path*)



Progresión cúbica de curva Bézier. Tomado de Wikipedia

Curvas Bézier

Bézier cúbica expresión matemática

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}(t) + t\mathbf{B}_{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3}(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Puede ser definida como la combinación de dos curvas cuadráticas

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

Ecuación de la curva Bezier Cúbica

Bézier cúbica

Progresión cúbica de P_0 a P_3 . Tomado de Wikipedia

Curvas Bézier

Definición formal

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3 , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6)$$

Ecuación curva Bezier cúbica. Para $n - 1$ puntos de control puede ser expresada como:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_k BEZ_{k,n}(t) , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7)$$

Donde BEZ son los polinomios bases de Bernstein

Curvas Bézier

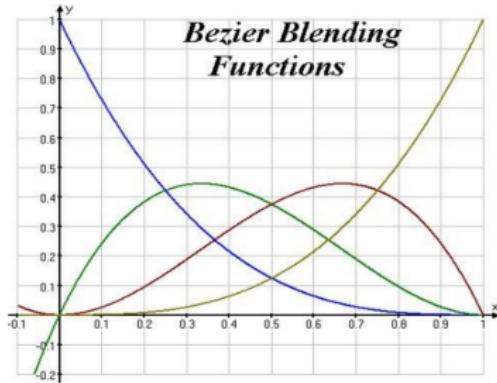
Polinomios de Bernstei

$$BEZ_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$BEZ_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$BEZ_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$BEZ_{3,3}(t) = t^3$$

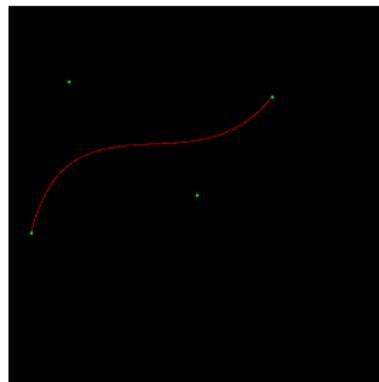


Funciones bases (polinomios de Bernstei) en el rango de
Tomado de cs.virginia

Ejercicio Curvas Bézier

Ejercicio

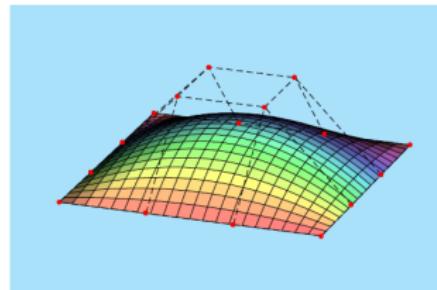
Crear una función que dibuje una curva Bezier que tenga como parámetros 4 puntos de control.



Superficies

Superficies Bézier

- ▶ Extender el concepto de las curvas
- ▶ Controlado por:
 - ▶ Barrido por $U, V \in [0, 1]$
 - ▶ Puntos de control (4x4)

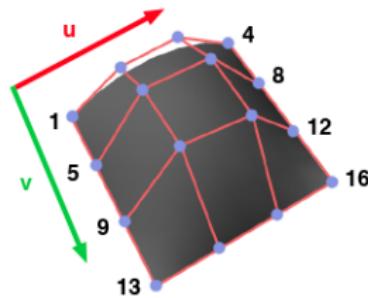


Superficie Formada por curvas Bezier. Tomada de pstricks.blogspot.com

Superficies

Superficies Bézier

- ▶ Interpretar como si los puntos intermedios *halaran* el plano



Superficie Bézier. Tomada de scratchapixel.com

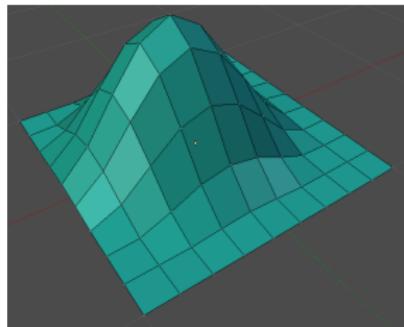
Definición

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{p}_{i,j}$$

Superficies

Discretización de superficies

- ▶ Renderizado de forma directa: lento e inestable
- ▶ Convertirla en malla poligonal
- ▶ Estrategia usada por mayoría de programas

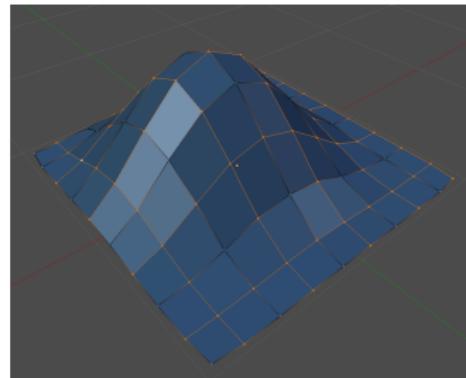


Malla de superficie

Discretización de superficies

Procedimiento

1. Definir número de cortes
2. Evaluar en cada dimensión u, v
3. Cada punto corresponde a un vértice
4. Mallar



Superficies

Discretización de superficies

- ▶ Proceso es llamado **teselación** (Tessellation)
- ▶ Convertir los objetos en estructuras aptas para el renderizado
- ▶ Permite controla la resolución
- ▶ Controla dependiendo de la distancia a la cámara

Introducción

Modelación geométrica

Representaciones de objetos

Historia

Sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

Barridos (Sweeping)

B-Rep (Boundary Representation)

Contorno o límites

Mallas Poligonales

Curvas y superficies

Transformación de objetos

Transformaciones 2D

Coordenadas homogéneas

Composición de transformaciones

Transformaciones 3D

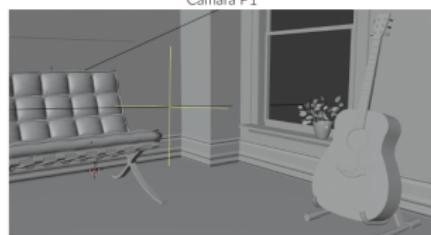
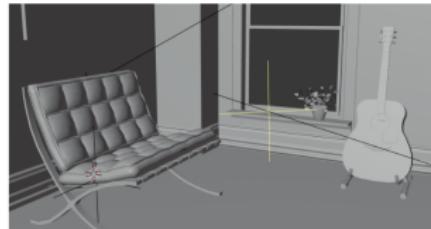
Formatos comunes

Bibliografía

Transformación de objetos

Transformaciones

- ▶ En muchas partes del *pipeline* es necesario transformar los objetos
 - ▶ Punto de vista del observador
 - ▶ Modificación de los objetos

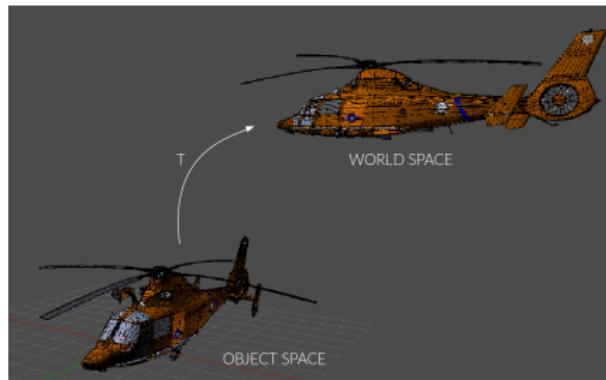


Variación de posición, tamaño y rotación con cambio en el punto de vista

Transformación de objetos

Transformaciones

- ▶ Objetos son definidos en **Object space**
- ▶ Sistema coordenado local
- ▶ Posicionar los objetos donde van a ser renderizados
- ▶ Transformarlos al **World space**



Transformación de sistema coordenado local a global

Transformación de objetos

Transformaciones

- ▶ Posición de los objetos: posición sus vértices
- ▶ Aplicar la transformación a todos sus vértices
- ▶ Transformaciones:
 - ▶ Translación
 - ▶ Rotación
 - ▶ Escala

Traslación

Trasladar el punto P a P' :

$$P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$$

Movimiento paralelo a los ejes

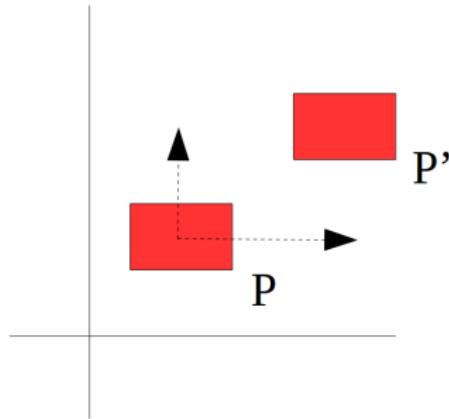
$$x' = x + d_x ; y' = y + d_y$$

Definidos como vectores

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$P' = P + T$$



Escala desde el origen

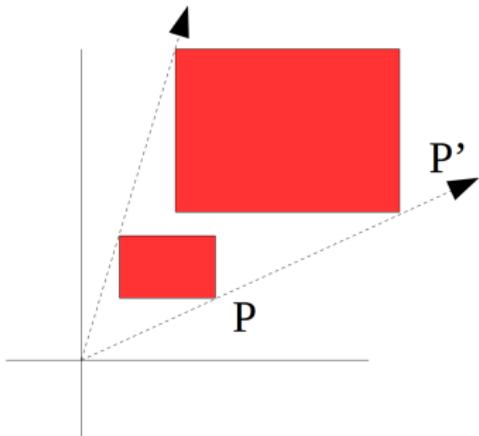
Definido el punto $P(x, y)$

Escalarlo por los factores s_x y s_y

$$x' = s_x x, \quad y' = s_y y$$

Como operación matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Rotaciones desde el origen

Un punto $P(x, y)$ es rotado un ángulo θ

Posiciones actual de P

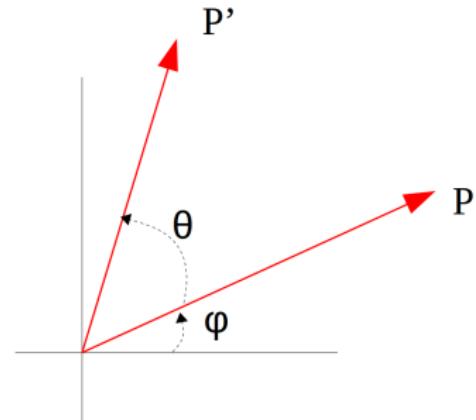
$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

Posiciones final:

$$x' = r \cos (\theta + \phi)$$

$$y' = r \sin (\theta + \phi)$$



Rotaciones desde el origen

Identidad de ángulos dobles

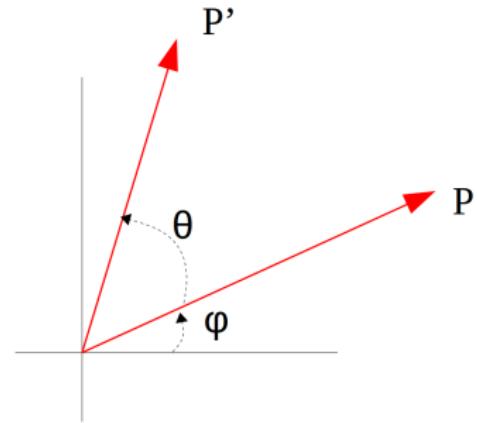
$$y' = r \cos(\phi) \sin(\theta) + r \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$$

Substituyendo x y y

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

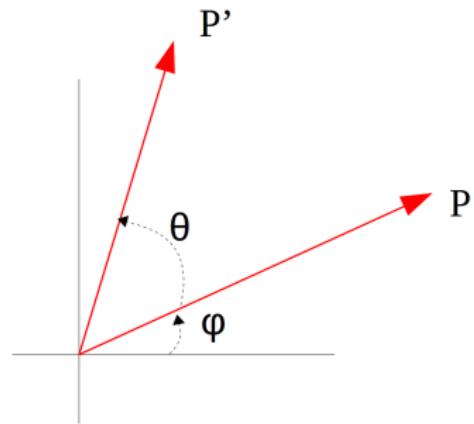
$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$



Rotaciones desde el origen

Forma de operación matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Resumen

Transformaciones

Traslación $P' = T + P$

Escala $P' = SP$

Rotación $P' = RP$

Composición

- ▶ Concatenar las transformaciones
- ▶ Traslación expresada como una adición hace complicado
- ▶ **Coordenadas homogéneas**

Coordenadas Homogéneas

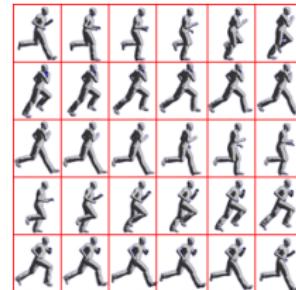
Características

- ▶ Adicionamos una coordenada extra (x, y, \mathbf{W})
- ▶ Para obtener cartesianas $(x/w, y/w, 1)$ si $w \neq 0$
- ▶ Representan el mismo punto si son múltiplos
 $(2, 7, 3)$ y $(4, 14, 6)$

Coordenadas Homogéneas

Traslación

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

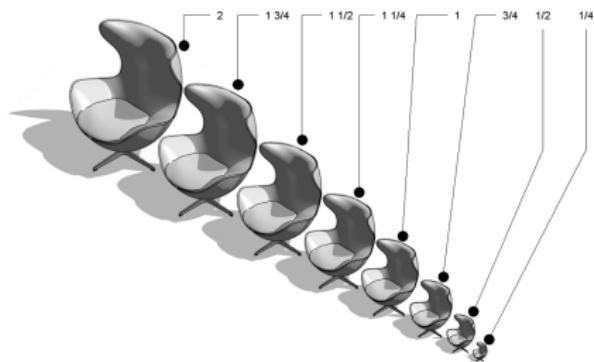


Tomado de ellebest.wordpress.com

Coordenadas Homogéneas

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Tomado de revitswat.wordpress.com

Coordenadas Homogéneas

Rotación

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

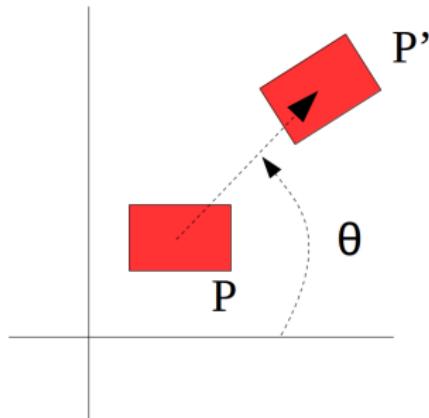


Tomado de Inception

Composición de transformaciones

Composición

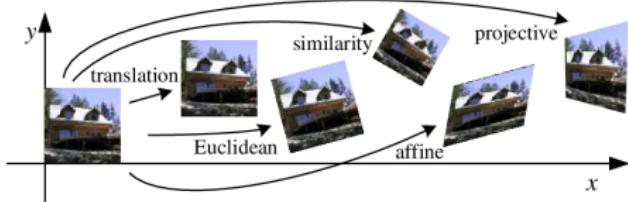
- ▶ Aplicar múltiples transformaciones a un punto
- ▶ Ejemplo:
$$\mathbf{P}' = R(\theta)T(d_x, d_y)\mathbf{P}$$
- ▶ Pre-multiplicar matrices de transformación
- ▶ Van de derecha a izquierda



Composición de transformaciones

Tipos de transformaciones

- ▶ **Transformaciones afines** Preservan paralelismos
- ▶ **Transformaciones rígidas** Preservan longitudes y ángulos



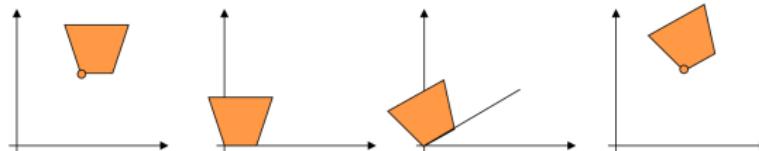
Tipos de transformaciones. Tomado de Towards Data Science

Composición de transformaciones

Ejemplos

Rotar con respecto a un punto

$$\mathbf{P}' = T(x_1, y_1)R(\theta)T(-x_1, -y_1)\mathbf{P}$$



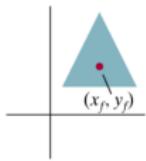
Rotación con respecto a punto arbitrario. Computer Graphics, Helmuth Trefftz. Eafit

Composición de transformaciones

Ejemplos

Escalar objeto en su lugar

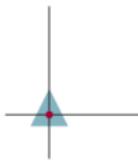
$$\mathbf{P}' = T(x_1, y_1)S(S_x, S_y)T(-x_1, -y_1)\mathbf{P}$$



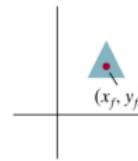
(a)
Original Position
of Object and
Fixed Point



(b)
Translate Object
so that Fixed Point
(x_f, y_f) is at Origin



(c)
Scale Object
with Respect
to Origin



(d)
Translate Object
so that the Fixed
Point is Returned
to Position (x_f, y_f)

Escalar en su centro de masa. Computer Graphics, Helmuth Trefftz. Eafit

Transformaciones 3D

Transformaciones 3D

- Mismo concepto que 2D
- Escala y rotación son realizadas desde el origen

Traslación

$$T(d_x, d_y, s_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones 3D

Rotación

- ▶ Rotación sistema de mano derecha
- ▶ Para rotar con respecto a un eje:
 - ▶ Transladar a origen
 - ▶ Alinear eje de rotación
 - ▶ Deshacer transformaciones

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Introducción

Modelación geométrica

Representaciones de objetos

Historia

Sólidos

Constructive Solid Geometry (CSG)

Barridos (Sweeping)

B-Rep (Boundary Representation)

Contorno o límites

Mallas Poligonales

Curvas y superficies

Transformación de objetos

Transformaciones 2D

Coordenadas homogéneas

Composición de transformaciones

Transformaciones 3D

Formatos comunes

Bibliografía

Formatos comunes

STL(Abr stereolithography)

```
solid name
facet normal ni nj nk
    outer loop
        vertex v1x v1y v1z
        vertex v2x v2y v2z
        vertex v3x v3y v3z
    endloop
endfacet
facet normal ni nj nk
    outer loop
        vertex v1x v1y v1z
        vertex v2x v2y v2z
        vertex v3x v3y v3z
    endloop
endfacet
```

Formatos comunes

OBJ

- ▶ Representa vértices, *UV texture*, normales y texturas
- ▶ Soporta Superficies con diferentes niveles
- ▶ Propiedades de los materiales son exportados en .MLT

Formatos comunes

OBJ

```
# Blender v2.78 (sub 0) OBJ File: ''
# www.blender.org
mtllib untitled.mtl
o Cube_Cube.001
v -1.000000 -1.000000 1.000000
v -1.000000 1.000000 1.000000
v -1.000000 -1.000000 -1.000000
vn -1.0000 0.0000 0.0000
vn 0.0000 0.0000 -1.0000
vn 1.0000 0.0000 0.0000
usemtl None
s off
f 1//1 2//1 4//1 3//1
f 3//2 4//2 8//2 7//2
f 7//3 8//3 6//3 5//3
```

Formatos comunes

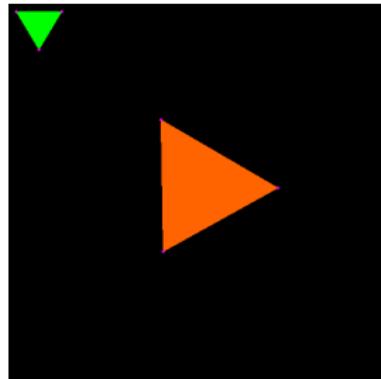
Collada

- ▶ Estándar de intercambio abierto
- ▶ Desarrollado por Khronos Group
- ▶ Esquema basado en XML (Versión 1.5)
- ▶ Codifica:
 - ▶ Geometría
 - ▶ *Shaders*
 - ▶ Efectos
 - ▶ Física
 - ▶ Animación...
- ▶ Más info: <https://www.khronos.org/collada/>

Ejercicio

Transformaciones 2D

- ▶ Definir las funciones de traslación escala y rotación
- ▶ Archivo *transformations.py*



Bibliografía

Referencias

- ▶ Computer Graphics and Geometric Modeling by Max K. Agoston
- ▶ Computational Geometry, Lecture 1. por Nicholas M. Patrikalakis
- ▶ Computer Graphics Using OpenGL por F S. Hill Jr
- ▶ Transformations and Projections in Computer Graphics By David Salomon