2. Prediciendo calificaciones de películas. Supongamos que ahora estamos interesados en predecir una calificación numérica para reseñas de películas. Vamos a usar un predictor no-lineal que toma una reseña de película x y regresa $\sigma(\boldsymbol{w} \cdot \phi(x))$, donde $\sigma(z) = (1 + e^{-z})^{-1}$ es la función logística que aplasta un nu ḿero real al rango (0,1). Para este problema, supón que la calificación de película y es una variable con valor real en el rango $[0, 1]$.

a. Si quisiéramos usar la pérdida cuadrática (squared loss), ¿Cuál ser ía la expresión para $Loss(x, y, w)$ para un solo punto (x, y).

$$Loss(x, y, w) = \left(\sigma\left(w \cdot \phi(x)\right) - y\right)^2$$

b. Considerando $\mathrm{Loss}(x, y, w)$ de la anterior parte, calcula el gradiente de la pérdida con respecto a w,$\nabla_w Loss(x, y, w)$. Escribe tu respuesta en términos del valor predecido $\mathrm{p} = \sigma(\mathrm{w} \cdot \phi(\mathrm{x}))$.

$$\nabla_w Loss(x, y, w) = 2\left(\sigma\left(w \cdot \phi(x)\right) - y\right) \cdot \frac{d\sigma\left(w \cdot \phi(x)\right)}{dw}$$

Haciendo un cambio de variable. $z = w \cdot \phi(x)$

$$\frac{d\sigma(z)}{dz} = \sigma(z)(1 - \sigma(z))$$

$$\nabla_w Loss(x, y. w) = 2\left(\sigma\left(w \cdot \phi(x)\right) - y\right) \cdot \sigma\left(w \cdot \phi(x)\right)\left(1 - \sigma\left(w \cdot \phi(x)\right)\right) \cdot \frac{d\left(w \cdot \phi(x)\right)}{dw}$$

$$\nabla_w Loss(x, y. w) = 2\left(\sigma\left(w \cdot \phi(x)\right) - y\right) \cdot \sigma\left(w \cdot \phi(x)\right)\left(1 - \sigma\left(w \cdot \phi(x)\right)\right) \cdot \phi(x)$$

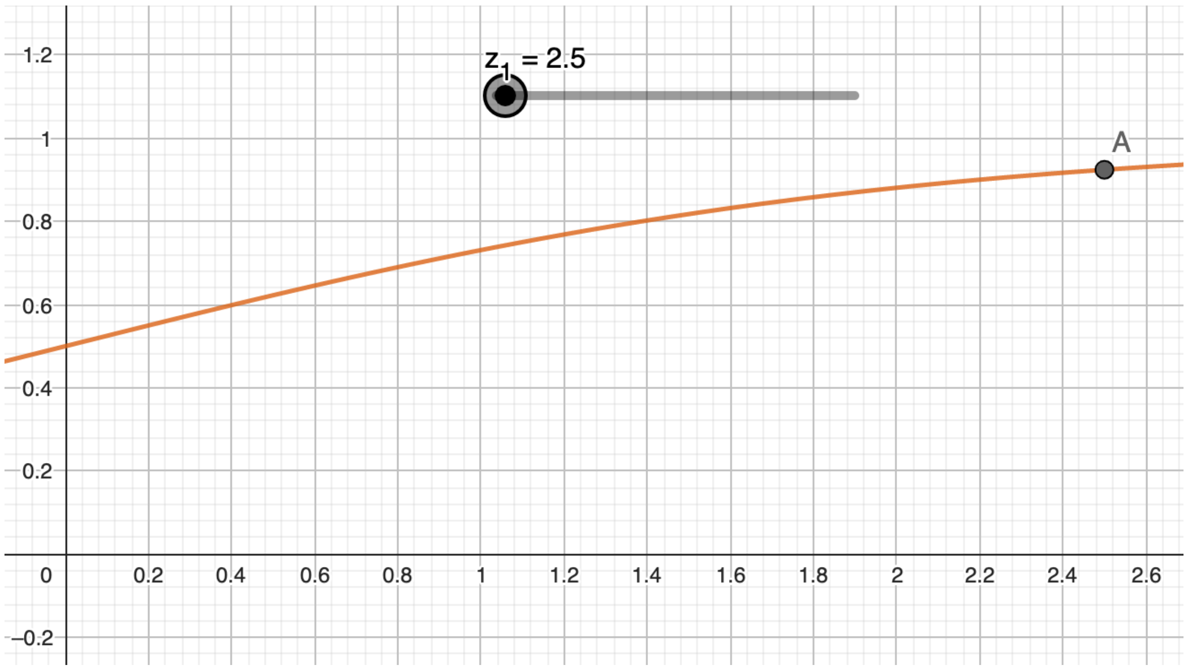
Cambiamos por p:

$$\nabla_w Loss(x, y. w) = 2(p - y)p(1 - p) \cdot \phi(x)$$

c. Si hay un dato (x,y) con algúna $\phi(x)$ arbitraria y $y = 1$. Especifica las condiciones para w para hacer la magnitud del gradiente de la pérdida con respecto a w arbitrariamente pequeño (es decir, minimizar la magnitud del gradiente). ¿Es posible que la magnitud del gradiente con respecto a w sea exactamente cero? Puedes hacer la magnitud de w arbitrariamente grande pero no infinita.

Si observamos en nuestra función lógistica y sustituyendo por conveniencia $z = w \cdot \phi(x)$:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$



Al darle naturales grandes nos acercamos mas al 1, por lo que podemos verificar que $w \cdot \phi(x)$ sea positivo y grande, esto para que el gradiente de la pérdida sea pequeño.

$$\lim_{z \to \infty} \left(\nabla_w Loss(x, y. w) = 2(\sigma(z) - y) \cdot \sigma(z)\big(1 - \sigma(z)\big) \cdot \phi(x) \right)$$

Pero esto entra en conflicto con la inicial condición del problema. Asi que no es posible que la magnitud del gradiente con respecto a w sea exactamente cero, ya que para hacerlo, necesitamos que $\sigma(w \cdot \phi(x))$ sea exactamente igual a y.