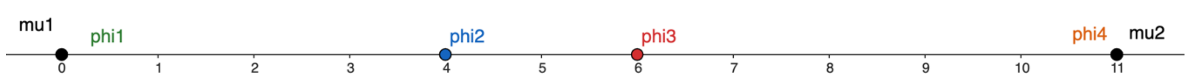
5. Agrupación con K-medias. Supongamos que tenemos un extractor de características ϕ que produce vectores de características bidimensionales, y que tenemos un conjunto de datos de juguete $D_{train} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ con,

$$\phi(x_1) = [0,0]$$
$$\phi(x_2) = [4,0]$$
$$\phi(x_3) = [6,0]$$
$$\phi(x_4) = [11,0]$$

a. Corre 2-medias sobre este conjunto de datos hasta la convergencia. Muestra tu trabajo. ¿Cuáles fueron las asignaciones finales de agrupamiento z y los centros de agrupamiento μ? Corre este algoritmo dos veces con los siguientes centros centros iniciales:

1. $\mu_1 = \phi(x_1) = [0,0]$ y $\mu_2 = \phi(x_4) = [11,0]$

Colocamos los datos en una recta para imaginarnos mejor el problema.



Ahora si conocemos esta información podemos calcular la distancia entre cada punto ϕ y el centroide de cada grupo, tomando el minimo para diferenciar entre grupos.

$z(\phi(x_1)) = \min\{([0,0] - [0,0])^2, ([0,0] - [11,0])^2\} = \min(0{,}121) = 0$ K: 1
$z(\phi(x_2)) = \min\{([4,0] - [0,0])^2, ([4,0] - [11,0])^2\} = \min(16{,}49) = 16$ K: 1
$z(\phi(x_3)) = \min\{([6,0] - [0,0])^2, ([6,0] - [11,0])^2\} = \min(36{,}25) = 25$ K: 2
$z(\phi(x_4)) = \min\{([11,0] - [0,0])^2, ([11,0] - [11,0])^2\} = \min(121{,}0) = 0$ K: 2

$$\mu_1 = \frac{1}{2}([0,0] + [4,0]) = [2,0] \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}([6,0] + [11,0]) = [8.5,0]$$

Colocamos los nuevos datos en la recta.

Calculamos para la segunda iteración:

$z\big(\phi(x_1)\big) = \min\{([0,0]-[2,0])^2, ([0,0]-[8.5,0])^2\} = \min(4{,}72.25) = 4$ K: 1
$z\big(\phi(x_2)\big) = \min\{([4,0]-[2,0])^2, ([4,0]-[8.5,0])^2\} = \min(4{,}20.25) = 5$ K: 1
$z\big(\phi(x_3)\big) = \min\{([6,0]-[2,0])^2, ([6,0]-[8.5,0])^2\} = \min(16{,}6.25) = 6.25$ K: 2
$z\big(\phi(x_4)\big) = \min\{([11,0]-[2,0])^2, ([11,0]-[8.5,0])^2\} = \min(81{,}6.25) = 6.25$ K: 2

$$\mu_1 = \frac{1}{2}([0,0]+[4,0]) = [2,0] \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}([6,0]+[11,0]) = [8.5,0]$$

Dado que nuestros centroides no cambiaron, significa que nuestro modelo ha convergido.

Por lo tanto:

$$z\big(\phi(x_1)\big) = z\big(\phi(x_2)\big) = 1$$
$$z\big(\phi(x_3)\big) = z\big(\phi(x_4)\big) = 2$$

2. $\mu_1 = \phi(x_1) = [0,0]$ y $\mu_2 = \phi(x_4) = [4,0]$

$z\big(\phi(x_1)\big) = \min\{([0,0]-[0,0])^2, ([0,0]-[4,0])^2\} = \min(0{,}16) = 0$ K: 1
$z\big(\phi(x_2)\big) = \min\{([4,0]-[0,0])^2, ([4,0]-[4,0])^2\} = \min(16{,}0) = 0$ K: 2
$z\big(\phi(x_3)\big) = \min\{([6,0]-[0,0])^2, ([6,0]-[4,0])^2\} = \min(36{,}4) = 4$ K: 2
$z\big(\phi(x_4)\big) = \min\{([11,0]-[0,0])^2, ([11,0]-[4,0])^2\} = \min(121{,}49) = 49$ K: 2

$$\mu_1 = 1([0,0]) = [0,0] \qquad \mu_2 = \frac{1}{3}([4,0]+[6,0]+[11,0]) = [7,0]$$

$z\big(\phi(x_1)\big) = \min\{([0,0]-[0,0])^2, ([0,0]-[7,0])^2\} = \min(0{,}49) = 0$ K: 1
$z\big(\phi(x_2)\big) = \min\{([4,0]-[0,0])^2, ([4,0]-[7,0])^2\} = \min(16{,}9) = 9$ K: 2
$z\big(\phi(x_3)\big) = \min\{([6,0]-[0,0])^2, ([6,0]-[7,0])^2\} = \min(36{,}1) = 1$ K: 2
$z\big(\phi(x_4)\big) = \min\{([11,0]-[0,0])^2, ([11,0]-[7,0])^2\} = \min(121{,}9) = 9$ K: 2

$$\mu_1 = 1([0,0]) = [0,0] \qquad \mu_2 = \frac{1}{3}([4,0]+[6,0]+[11,0]) = [7,0]$$

Por lo tanto:

$$z\big(\phi(x_1)\big) = 1$$
$$z\big(\phi(x_2)\big) = z\big(\phi(x_3)\big) = z\big(\phi(x_4)\big) = 2$$