Espacios de vectores complejos

2.1 2.2 2.3

$\mathbb{C}^n$ simboliza un espacio vectorial donde los vectores tienen n componentes

+

$$\begin{bmatrix} 6-4i \\ 7+3i \\ 4.2-8.1i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16+12.3i \\ -7i \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22-1.7i \\ 7-4i \\ 10.2-8.1i \end{bmatrix}$$

$$(V+W)[j] = V[j] + W[j]$$

Producto escalar

$$(3+2i)\begin{bmatrix} 6+3i \\ 0+0i \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+21i \\ 0+0i \\ 12+8i \end{bmatrix}$$

$$c(V+W) = c\cdot V + c\cdot W$$

$$(c_1+c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$$

Matrices

$$A^T[j,k] = A[k,j]$$

$$\bar{A}[j,k] = \overline{A[j,k]}$$

$$A^{\dagger}[j,k] = \overline{(A^T)}$$ adjunta ó daga

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A \quad ; \quad (A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$$

La multiplicación es la misma de ALLI:

$$(A * B)[j,k] = \sum_{h=0}^{n-1} (A[j,h] \times B[h,k])$$

Espacio vectorial: Conjunto de vectores

1 SQUARE = ____________

Combinación lineal

Dice q un vector puede ser expresado como la suma de n vectores multiplicados por n constantes

$$V = C_0 \cdot V_0 + C_1 \cdot V_1 + \dots + C_{n-1} \cdot V_{n-1}$$

Ej:

** Example 2.3.1

Un conjunto de vectores es linealmente independiente si existen constantes tales que:

$$0 = C_0 \cdot V_0 + C_1 \cdot V_1 + \dots + C_{n-1} \cdot V_{n-1}$$

La dimensión de un espacio de vectores complejos es el N° de elementos en la base del espacio de vectores

Ej:

** Example 2.3.5

1 SQUARE =

Función q' satisface: $\langle v, v \rangle \geq 0$

$\langle v, v \rangle = 0$ sii $v = 0$

$V \times V \to \mathbb{C}$

Producto Punto para vectores

$\mathbb{R}$

$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T * v_2$

$\mathbb{C}$

$\langle v_1, v_2 \cdot c_2 \rangle = \overline{c_2} * \langle v_1, v_2 \rangle$

$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^{\dagger} * v_2$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$

Producto Punto para Matrices

N° reales N° complejos

$\langle A, B \rangle = \text{Trace}(A^T * B) = \text{Trace}(A^{\dagger} * B)$

$$\text{Trace}(C) = \sum_{i=0}^{n-1} C[i,i]$$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f(j)}\, g(j) \qquad \text{Func}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad \text{Func}([a,b], \mathbb{C})$$

v_1

Ex 2.4.1

Dado $v_1 = [2,1,3]^T$, $v_2 = [6,2,4]^T$, $v_3 = [0,-1,2]^T$

Mostrar q' se cumple

$$\boxed{\begin{array}{ll} \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle & (1) \\ \& & \\ \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle & (2) \end{array}}$$

1 SQUARE =

en ①:

$$\left\langle [8,3,7]^T, [0,-1,2]^T \right\rangle = \left\langle \underset{a_0 \; a_1 \; a_2}{[2,1,3]^T}, [0,-1,2]^T \right\rangle + \left\langle [6,2,4]^T, [0,-1,2]^T \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} [0,-1,2]^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [0,-1,2]^T + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [0,-1,2]^T$$

$$0-3+14 = 0-1+6 + 0-2+8$$

$$11 = 5+6$$

$$\boxed{11=11}$$ se cumple ①

en ②:

$$\left\langle [2,1,3]^T, [6,1,6]^T \right\rangle = \left\langle [2,1,3]^T, [6,2,4]^T \right\rangle + \left\langle [2,1,3]^T, [0,-1,2]^T \right\rangle$$

$$12+1+18 = 12+2+12+0-1+6$$

$$31 = 26-1+6$$

$$\boxed{31=31}$$ cumple

1 SQUARE =

* Ex 2.4.2 como se hace?

Ex 2.4.3

Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Probar lo de 2.4.1

en (1):

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0-1) & (0-3) \\ (-2+0) & (-1+0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1-3 \\ 2+1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \cancel{4}+1 & 2+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}$$ se cumple

en (2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}$$ se cumple

1 SQUARE =

2.1.1

$$\begin{bmatrix} 5+13i \\ 6+2i \\ 0.53-6i \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7-8i \\ 4i \\ 2 \\ 9.4+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13+5i \\ 6+6i \\ 2.53-6i \\ 21.4+3i \end{bmatrix}$$

2.1.2 probar formalmente:

$(V+W)+X = V+(W+X)$ donde $V_i, X_i, W_i \in I$

$$\begin{bmatrix} V_0+W_0 \\ V_1+W_1 \\ \vdots \\ V_n \; W_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_0+X_0 \\ W_1+X_1 \\ \vdots \\ W_n+X_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0+W_0+X_0 \\ V_1+W_1+X_1 \\ \vdots \\ V_n+W_n+X_n \end{bmatrix} =$$

$(3+2i)(6+3i)$

$18+12i+9i-6 = 12+21i$

$V+0=V$ -

2.1.3 $(8-2i) \cdot \begin{bmatrix} 16+2.3i \\ -7i \\ 6 \\ 5-4i \end{bmatrix}$ igual al normal

2.2.1 Dado $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ e $V = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Verificar q'

$r_1 \cdot (r_2 \cdot V) = (r_1 \times r_2) \cdot V$

1 SQUARE =

Para un espacio de producto punto:

$|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$ > longitud ó norm

Ex 2.4.5 distancia de $[4+3i, 6-4i, 12-7i, 13i]^T = A$

$|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{A^{+} * A} = \sqrt{(4-3i)(4+3i) + (6-4i)(6+4i) + (12-7i)(12+7i) + 169i^2}$

$C \times \bar{C} = |C|^2$

$= \boxed{\sqrt{16+9+36+16+144+49-169}}$

Ex 2.4.6

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ norm $|A| = ?$ $\quad |A| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$

$|A| = \sqrt{\mathrm{trace}(A^T, A)} = \sqrt{\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{trace}}} = \sqrt{\underbrace{\begin{bmatrix} 9+4 & 15+10 \\ 15+10 & 25+25 \end{bmatrix}}_{\text{trace}}}$

$= \sqrt{\mathrm{trace}\left(\begin{bmatrix} 13 & 25 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}\right)} \boxed{= \sqrt{83}}$

REHACE 2.4.5 sabiendo q' $\langle V, V \rangle = V^{+} \times V$ si $V \in \mathbb{C}$

1 SQUARE =

distacia en espacio complejo de vectores de producto punto

$$d(V_1, V_2) = |V_1 - V_2| = \sqrt{\langle V_1 - V_2, V_1 - V_2 \rangle}$$

Ex 2.4.7 $V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $d(V_1, V_2) = ?$

$$d(V_1, V_2) = \sqrt{[1, -1, 3] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+1+9} \boxed{= \sqrt{11}}$$

2 vectores en un espacio producto punto son ortogonales si $\langle V_1, V_2 \rangle = 0$

Base ortogonal.

Base de un espacio del producto punto

$$\langle V, V' \rangle = |V| |V'| \cos\theta$$

Ex 2.4.8

$V = [3, -1, 0]^T$ $V' = [2, -2, 1]^T$ calcular el angulo entre estos vectores

$$\cos\theta = \frac{\langle V, V' \rangle}{|V||V'|} = \frac{6+2+0}{\sqrt{\langle V, V \rangle} \sqrt{\langle V', V' \rangle}} = \frac{8}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+1}} = \frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{5}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{5}}\right) = \boxed{\theta = \arccos(1{,}13)}$$

$\Downarrow$

no está definido

Un espacio complejo de pod punto es completo si para cada V_n existe un $\bar{V} \in V$ |

$$\lim_{n \to \infty} |V_n - \bar{V}| = 0$$

Hilbert Space: Espacio complejo de pod punto completo

Para una matriz A in $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Si hay un c en $\mathbb{C}$ y un vector $\neq 0$ en $\mathbb{C}^n$ tales q'

$$AV = c \cdot V$$

c es eigenvalue
V es eigenvector

Varios eigenvectores determinan un eigenEspacio

Base ortogonal si pod • entre sus vectores es cero

1 SQUARE =