Álgebra (II) 2024 Práctico 5

UNC FAMAF

Transformaciones lineales. Núcleo e imagen

Martes 8 de octubre

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales.

(a) $T(x, y) = (1 + x, y)$

(b) $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$

(c) $T(x, y) = xy$

(d) $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$

(e) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_n, -x_n)$

(f) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$

(g) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

(h) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1.x_2, \dots, x_1.x_2.\dots.x_n)$.

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ decidir si son $\mathbb{R}$-lineales o $\mathbb{C}$-lineales.

(a) $T(z) = iz$, (b) $R(z) = \overline{z}$, (c) $S(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$.

Jueves 10 de octubre

Ejercicio 3. Para cada una de las siguientes transformaciónes lineales, caracterizar mediante ecuaciones el núcleo y la imagen de T, dar una base de cada uno de estos subespacios. Verificar que en todos los casos la dimensión del núcleo más la de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida. Decidir además cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo o la imagen:

$$(-1, 1, 1), \qquad (1, 2, -1,), \qquad (3, 1, 1), \qquad (1, 1, 2), \qquad (1, 1, -3).$$

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ dada por $T_1(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3y - 5z, 2x - y + z, 4x + 3y - z)$.

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por: $T_2(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z)$.

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $T_3(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - 4y - 2z, -3x + 6y + 3z)$.

(d) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $T_4(x, y, z) = (3x - 2y - z, 7x - 5y - 3z, -x - z)$.

(e) $T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $T_5(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + y + 4z, 5x - y + 8z)$.

Ejercicio 4. Dada $g \in C^1[0, 1]$, sea $T_g : C^1[0, 1] \mapsto C[0, 1]$ la función dada por $T_g(f) = (fg)'$.

(a) Probar que T_g es lineal y hallar el núcleo de T_g.

(b) Describir explícitamente el núcleo de T_g en los casos $g(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y hallar su dimensión.

Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar el núcleo y la imagen de T, dar sus dimensión y una base de cada uno de ellos. Verificar en todos los casos que la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida.

(a) $T : P_2 \to C[0, 1]$, $T(ax^2 + bx + c) = (b - a)e^x + (c - a)e^{2x} + (b - c)e^{3x}$.

(b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to P_5$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^5 + (c + d)x^4 + (a + b)x^3 + (c + d)x^2 + (2b + 3c)x + 7a - 8b$.

(c) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y - 2z + w & 7x - 6y + 2z - w \\ -2x + 6y - 4z + 2w & -11x + 13y - 6z + 3w \end{pmatrix}$.

(d) $T : P_4 \longrightarrow P_4$, $T(p(x)) = p'(x)$.

(e) $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \mathrm{tr}(A)$.

(f) $T : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{pmatrix}$.

(g) $T : P_3 \longrightarrow P_4$, $T(p(x)) = (x+1)p(x)$.

Ejercicio 6. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformación lineal tal que

$$T(1,0,0) = (1,0,i), \qquad T(0,1,0) = (0,1,1), \qquad T(0,0,1) = (i,1,0).$$

Decidir si T es un isomorfismo.

Martes 15 de octubre

Ejercicio 7. En cada caso decidir si si es posible dar una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que satisfaga las condiciones exigidas. Si existe, estudiar la unicidad; si no existe explicar por qué.

(a) $T(0,1) = (1,2,0,0)$, $T(1,0) = (1,1,0,0)$.

(b) $T(1,1,1) = (0,1,3)$, $T(1,2,1) = (1,1,3)$, $T(2,1,1) = (3,1,0)$.

(c) $T(1,1,1) = (3,2)$, $T(1,0,1) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (1,0)$

(d) $T(0,1,1) = (1,2,0,0)$, $T(1,0,0) = (1,1,0,0)$.

Ejercicio 8. En cada caso definir, cuando sea posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible explicar por qué no es posible.

(a) $\dim \operatorname{Im} T = 2$ y $\dim \operatorname{Nu} T = 2$.

(b) $(1,1,0) \in \operatorname{Im} T$ y $(0,1,1) \in \operatorname{Nu} T$.

(c) $(1,1,0) \in \operatorname{Im} T$, $(0,1,1), (1,2,1) \in \operatorname{Nu} T$.

(d) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nu} T$.

(e) $\operatorname{Nu} T \subseteq \operatorname{Im} T$.

Ejercicio 9.

(a) Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que su imagen sea al subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(1,2,2)$. Hallar $T(x,y,z)$.

(b) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,1,1) = (1,0)$ y $T(1,1,1,1) = (0,1)$ y hallar $T(x,y,z,w)$.

(c) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{Nu}(T) = \{(x,y,z) : z = 2x = y\}$ e $\operatorname{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b = a - c, b - d = a + c \right\}$. Hallar $T(x,y,z)$.

(d) Probar que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{Nu}(T) = \{(x,y,z) : z = 2x = y\}$ e $\operatorname{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b - d = a + c \right\}$.

Ejercicio 10. Sea V un espacio vectorial y sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

(a) Probar que $\operatorname{Nu}(T) \subseteq \operatorname{Nu}(T^2)$.

(b) Probar que $\operatorname{Nu}(T) = \operatorname{Nu}(T^2)$ si y sólo si $\operatorname{Nu}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

(a) Probar que si n es impar entonces $\operatorname{Nu} T \neq \operatorname{Im} T$.

(b) Sea n par. Dar un ejemplo de una transformación lineal $T : V \to V$ tal que $\operatorname{Nu} T = \operatorname{Im} T$.