

Repaso: números complejos

Recordar que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su módulo es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su conjugado es $\bar{z} = a - ib$.

Ejercicio 1. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \bar{\bar{z}} &= z, & (b) \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & (c) \quad \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & (d) \quad |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\
 (e) \quad z \bar{z} &= |z|^2, & (f) \quad z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ si } z \neq 0, & (g) \quad |\bar{z}| &= |z|.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, hallar su módulo y su conjugado.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & (-1 + i)(3 - 2i), & (b) \quad & i^{131} - i^9 + 1, & (c) \quad & 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}, \\
 (d) \quad & \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}, & (e) \quad & \frac{4+2i}{6} - \frac{4+2i}{6i}, & (f) \quad & \frac{3i}{1-2i} - \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}.
 \end{aligned}$$

Cuerpos

Martes 13 de agosto

Ejercicio 3. Sea $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ un cuerpo. Probar los siguientes:

- (a) para todo $a \in \mathbb{k}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$ (donde $0 \in \mathbb{k}$ denota el neutro de la suma).
- (b) si a y b son elementos de \mathbb{k} tales que $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejercicio 4. Sea n un número natural, $n \neq 1$. Denotamos por \mathbb{Z}/n al conjunto de clases de números enteros módulo n . Utilizando los resultados de aritmética modular vistos en Álgebra I/Matemática discreta, sabemos que existen operaciones

$$+ : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n, \quad \cdot : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Probar que $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

Ejercicio 5. Sean $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ un cuerpo y a, b y c elementos de \mathbb{k} . Probar los siguientes:

- (a) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.
- (b) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
- (c) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$ (*propiedad cancelativa*).
- (d) Si $a \neq 0$ entonces para todo $y \in \mathbb{k}$ existe un único $x \in \mathbb{k}$ tal que $a \cdot x = y$.
- (e) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $a^n := a \cdots a$ n -veces).

★ **Ejercicio 6.** Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (a) Sean $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ un cuerpo y $a \in \mathbb{k}$. Si existe un natural n tal que $na = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $na := a + \cdots + a$ n -veces). Comparar esto con el **Ejercicio 5 (e)**.
Sugerencia: probar que si $a \neq 0$ entonces $na = 0 \iff n1 = 0$.
- (b) Sean $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ un cuerpo. Si existen $a \in \mathbb{k}$ no nulo y un natural n tales que $na = 0$, entonces $nx = 0$ para todo $x \in \mathbb{k}$.

Espacios vectoriales y sus subespacios

Jueves 15 de agosto

Ejercicio 7. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{k} . Sean $a, a_1, a_2 \in \mathbb{k}$ y $v, v_1, v_2 \in V$. Probar los siguientes:

- (a) Si $a \cdot v = 0$ entonces $a = 0$ ó $v = 0$.
 (b) Si $a \neq 0$ y $a \cdot v_1 = a \cdot v_2$, entonces $v_1 = v_2$.
 (c) Si $v \neq 0$ y $a_1 \cdot v = a_2 \cdot v$, entonces $a_1 = a_2$.

Ejercicio 8. Sean $(\mathbb{k}, +, \cdot)$ un cuerpo y n un número natural. Consideramos el conjunto

$$\mathbb{k}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{k}\}.$$

Usando las operaciones de \mathbb{k} , definimos:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n &\longrightarrow \mathbb{k}^n & (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \cdot : \mathbb{k} \times \mathbb{k}^n &\longrightarrow \mathbb{k}^n & a \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n). \end{aligned}$$

Verificar que $(\mathbb{k}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 9. Sea $(V, +, \cdot)$ un \mathbb{k} -espacio vectorial. Demostrar los siguientes:

- (a) Sea -1 el opuesto aditivo de 1 en \mathbb{k} . Para todo $v \in V$, vale que $-v$ (el opuesto aditivo de v en V) es igual a $(-1) \cdot v$.
 (b) Dados $v_1, v_2 \in V$, se cumple $-(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$.
 (c) Si $a \in \mathbb{k}$ y $v \in V$, entonces $-(a \cdot v) = (-a) \cdot v = a \cdot (-v)$.
 (d) Si $v \neq 0$ y $a_1 \cdot v = a_2 \cdot v$, entonces $a_1 = a_2$.

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre \mathbb{R} con las operaciones abajo definidas.

- (a) \mathbb{R}^n , con $v_1 \oplus v_2 = v_1 - v_2$, y el producto usual.
- (b) \mathbb{R}^n con la suma usual y $a \odot v = -av$.
- (c) \mathbb{R}^2 , con la suma usual y $a \odot (x, y) = (ax, y)$.
- (d) \mathbb{R}^2 con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $a \odot (x, y) = (ax, 0)$.
- (e) El conjunto de polinomios con coeficientes reales, con el producto por reales usual, y con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).

Ejercicio 11. Probar que \mathbb{R} es un \mathbb{Q} -espacio vectorial.

Nota: Lo importante en este ejercicio es identificar las operaciones de suma y producto.

Ejercicio 12. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto

$$V^X = \{ \text{funciones} : X \longrightarrow V \}.$$

Usando las operaciones de V , definimos:

$$\begin{aligned} \oplus : V^X \times V^X &\longrightarrow V^X, & (f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x), & \text{para todo } x \in X. \\ \odot : \mathbb{k} \times V^X &\longrightarrow V^X, & (a \odot f)(x) &= a \cdot f(x), & \text{para todo } x \in X. \end{aligned}$$

Verificar que (V^X, \oplus, \odot) es un \mathbb{k} -espacio vectorial.

Martes 20 de agosto

Ejercicio 13. Sea $n \geq 3$. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^n son subespacios vectoriales.

- (a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$.
- (b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 0\}$.
- (c) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$.
- (d) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 = 1\}$.
- (e) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \pi^{-21}x_1 + \sqrt{17}x_2 + 41x_3 = 0\}$.
- (f) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{ existen } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 14. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V sobre un cuerpo \mathbb{k} . Probar que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V , entonces $W_1 \subset W_2$ ó $W_2 \subset W_1$.

Ejercicio 15. A continuación enumeramos una familia de conjuntos. Cada uno de ellos es un subconjunto de algún \mathbb{R} -espacio vectorial conocido. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

- (a) $C^1(0, 1) = \{ \text{funciones derivables} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \}$.
- (b) $C[0, 1] = \{ \text{funciones continuas} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \}$.
- (c) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 1\}$.
- (d) $\{f \in C[0, 1] : f(1) \neq 1\}$.
- (e) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = f(0)\}$.
- (f) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f = 0\}$. **Nota:** esto no forma parte de los contenidos de la materia.

Ahora pasamos a un cuerpo arbitrario \mathbb{k} . Fijamos también un número natural n .

- (g) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n : x_1 = x_n\}$.
- (h) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n : \text{existe } j > 1 \text{ tal que } x_1 = x_j\}$. **Atención:** La respuesta depende de n .
- (i) El conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{k} de grado par, junto con el polinomio nulo.
- (j) El conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{k} de grado n , junto con el polinomio nulo.
- (k) El conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{k} de grado $\leq n$, junto con el polinomio nulo.

Ejercicio 16. Demostrar que los únicos subespacios de \mathbb{R} como \mathbb{R} -espacio vectorial son $\{0\}$ y \mathbb{R} . Probar que esto no es cierto si se mira \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espacio vectorial.

★ **Ejercicio 17. Cociente por un subespacio.**

Sean $(V, +, \cdot)$ un \mathbb{k} -espacio vectorial y $W \subseteq V$ un subespacio. Definimos una relación \sim en V por

$$v \sim w \iff v - w \in W, \quad v, w \in V.$$

- (a) Probar que \sim es una relación de equivalencia en V .

Denotamos por $V/W = \{[v] : v \in V\}$ al conjunto de clase de equivalencias de V bajo \sim .

Usando las operaciones de V , definimos

$$\begin{aligned} \oplus : V/W \times V/W &\longrightarrow V/W, & [v] \oplus [w] &= [v + w]; \\ \odot : \mathbb{k} \times V/W &\longrightarrow V/W, & a \odot [v] &= [a \cdot v]. \end{aligned}$$

Para definir estas operaciones estamos usando representantes en V de los elementos de V/W .

- (b) Probar que \oplus y \odot están bien definidas como funciones. Es decir que si $[v] = [v']$ y $[w] = [w']$ entonces $[v + w] = [v' + w']$ y $[a \cdot v] = [a \cdot v']$.
- (c) Verificar que $(V/W, \oplus, \odot)$ es un \mathbb{k} -espacio vectorial.

Este espacio se llama *espacio cociente* de V por W .