

Álgebra de Boole

OdC 2025

Álgebra booleana

El álgebra booleana es una estructura algebraica definida por un conjunto de elementos: '0' y '1', junto con dos operadores binarios: + y *. El álgebra booleana no tiene inversos aditivos ni multiplicativos; por tanto, no hay operaciones de resta ni de división. Pero si tiene el operador complemento.

Tablas de verdad:



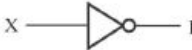
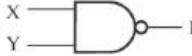

x	y	$x \cdot y$	x	y	$x + y$	x	x'
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas son circuitos electrónicos que operan con una o más señales de entrada para producir una señal de salida. En los sistemas digitales, en circuitos operados por voltaje responden a dos niveles de voltaje distintos que representan una variable binaria cuyo valor es '1' lógico o '0' lógico.

Name	Distinctive-Shape Graphics Symbol	Algebraic Equation	Truth Table
AND		$F = XY$	<u>X</u> <u>Y</u> <u>F</u>
			0 0 0
			0 1 0
			1 0 0
			1 1 1
OR		$F = X + Y$	<u>X</u> <u>Y</u> <u>F</u>
			0 0 0
			0 1 1
			1 0 1
			1 1 1
NOT (inverter)		$F = \overline{X}$	<u>X</u> <u>F</u>
			0 1
			1 0
NAND		$F = \overline{X \cdot Y}$	<u>X</u> <u>Y</u> <u>F</u>
			0 0 1
			0 1 1
			1 0 1
			1 1 0
NOR		$F = \overline{X + Y}$	<u>X</u> <u>Y</u> <u>F</u>
			0 0 1
			0 1 0
			1 0 0
			1 1 0

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

a) $x.y + x.y'$ (p4)

$= x.(y + y')$ (p5)

$= x.1$ (p2)

$= x$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

$$b) (x + y).(x + y') \text{ (p4)}$$

$$= x + (y.y') \text{ (p5)}$$

$$= x + 0 \text{ (p2)}$$

$$= x$$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 1

Simplificar las siguientes funciones booleanas a un número mínimo de literales.

$$e) (A + B)' \cdot (A' + B')' \text{ (t5 en 2 términos)}$$

$$= A' \cdot B' \cdot A'' \cdot B'' \text{ (T3)}$$

$$= A' \cdot B' \cdot A \cdot B \text{ (P3 Y T4)}$$

$$= (A' \cdot A) \cdot (B' \cdot B) \text{ (P5 en 2 términos)}$$

$$= 0 \cdot 0 \text{ (t2)}$$

$$= 0$$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

Reducir a un número mínimo de literales las siguientes funciones booleanas:

$$b) B'.D + A'.B.C' + A.C.D + A'.B.C$$

- a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.
- b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.
- c. Graficar las expresiones encontradas en el punto anterior.

Ejercicio 2 - función b)

$$B'D + A'BC' + ACD + A'BC$$

(p3)

$$= B'D + A'BC' + A'BC + ACD$$

(t4)

$$= B'D + A'B(C'+C) + ACD$$

(p5, p2)

$$= B'D + A'B + ACD$$

(t6 2 términos)

$$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACD$$

(p2, p5)

$$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACD(B + B')$$

(p4)

$$= B'D + B'DA'C + A'B + A'BCD + ACDB + ACDB'$$

(p3, t4)

$$= B'D + A'B + (A'BCD + ACDB) + (ACDB' + B'DA'C)$$

(p3)

$$= B'D + A'B + (A'BCD + ABCD) + (AB'CD + A'B'CD)$$

(p4)

$$= B'D + A'B + BCD(A' + A) + B'CD(A' + A)$$

(p5, p2, t4)

$$= B'D + A'B + (BCD + B'CD)$$

(p4)

$$= B'D + A'B + CD(B + B')$$

(p5, p2)

$$= \mathbf{B'D + A'B + CD}$$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

Llevando la expresión a su forma canónica:

$$B'D + A'BC' + ACD + A'BC$$

(p2, p5)

$$= B'D(A+A') + A'BC'(D+D') + A'BC(D+D') + ACD(B+B')$$

(p4, p2, p5)

$$= B'DA(C+C') + B'DA'(C+C') + A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD' + ACDB + ACDB'$$

(p4,p3)

$$= AB'CD + AB'C'D + A'B'CD + A'B'C'D + A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD' + ABCD + AB'CD$$

(t1)

$$= AB'CD + AB'C'D + A'B'CD + A'B'C'D + A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD' + ABCD + AB'CD$$

(t4)

$$= (A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD') + (AB'CD + A'B'CD + ABCD) + (AB'C'D + A'B'C'D + AB'CD)$$

(t1)

$$= (A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD') + (AB'CD + A'B'CD + ABCD) + (AB'C'D + A'B'C'D + AB'CD) + A'B'CD + A'BCD$$

(p3, t4)

$$= (A'BC'D + A'BC'D' + A'BCD + A'BCD') + (AB'CD + A'B'CD + ABCD + A'BCD) + (AB'C'D + A'B'C'D + AB'CD + A'B'CD)$$

(p4)

$$= A'B(C'D + C'D' + CD + CD') + CD(AB' + A'B' + AB + A'B) + B'D(AC' + A'C' + AC + A'C)$$

Resolviendo para uno de los paréntesis: $(C'D + C'D' + CD + CD') = C'(D + D') + C(D + D') = C' + C = 1$

$$= A'B(1) + CD(1) + B'D(1)$$

(p2)

$$= A'B + CD + B'D$$

Postulados y teoremas del álgebra booleana				
Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

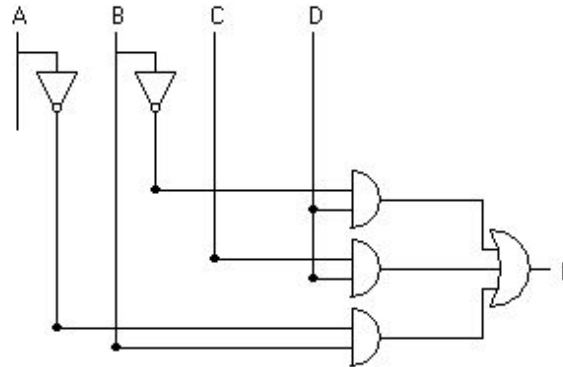
- a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.

b) $F = A'B + CD + B'D$

Ejercicio 2 - función b)

- a. Graficar las expresiones encontradas en “b” y “d” mediante cualquier tipo de compuertas del número de entradas necesarias.

b) $F = A'B + CD + B'D$



Ejercicio 2 - función b)

- b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.

$$b) F = A'B + CD + B'D$$

$$F = F'' = (A'B + CD + B'D)'' = ((A'.B)' . (C.D)' . (B'.D)')'$$

$$\text{NAND} = (x.y)'$$

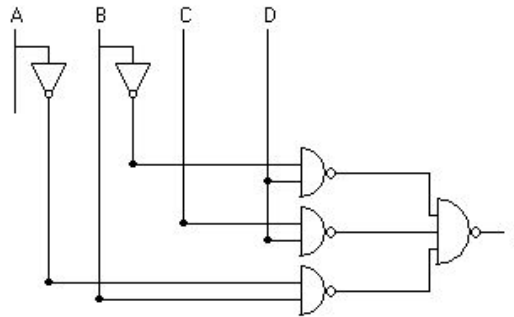
Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 2 - función b)

- b. Encontrar expresiones equivalentes a las funciones “b” y “d”, pero utilizando sólo compuertas NAND del número de entradas necesarias.
- c. Graficar las expresiones encontradas en el punto anterior.

b) $F = A'B + CD + B'D = ((A'B)' * (CD)' * (B'D)')'$

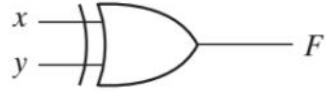


Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “ \wedge ” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

- a. Hacer una tabla de verdad de la función OR-exclusiva.

OR exclusivo
(XOR)



x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “ \wedge ” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

- b. Encontrar la expresión equivalente a la función OR-exclusiva utilizando sólo suma de productos y graficar con compuertas.

$$F = x'y + xy'$$

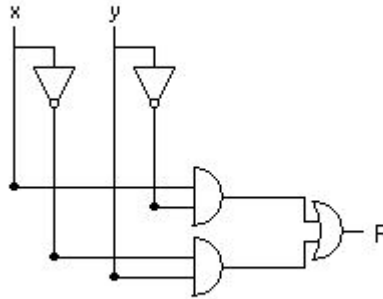
x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

La función OR-exclusiva, denotada por “ \wedge ” tiene dos entradas y una salida. Si **a** y **b** son las entradas y **c** es la salida, entonces **c** es ‘1’ sólo cuando exactamente una de las entradas vale ‘1’. En el resto de los casos es ‘0’.

- b. Encontrar la expresión equivalente a la función OR-exclusiva utilizando sólo suma de productos y graficar con compuertas.

$$F = x'y + xy'$$

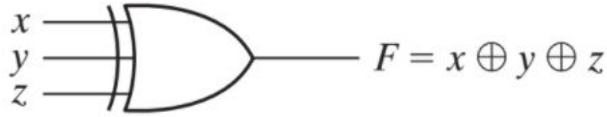


x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3

- c. Implementar una OR-exclusiva de 3 entradas usando OR-exclusivas de 2 entradas.

Tabla de verdad de una OR-exclusiva de 3 entradas:

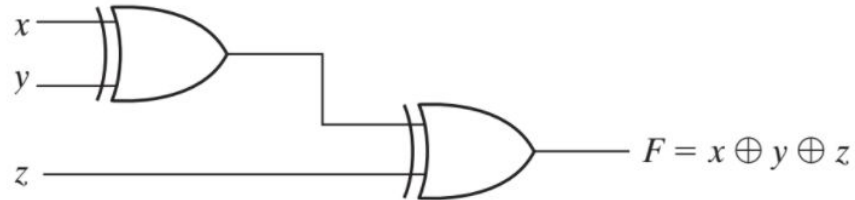
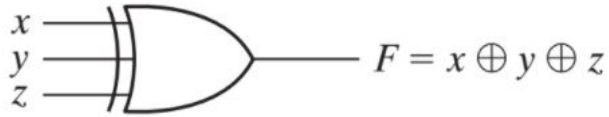


x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 3

- c. Implementar una OR-exclusiva de 3 entradas usando OR-exclusivas de 2 entradas.

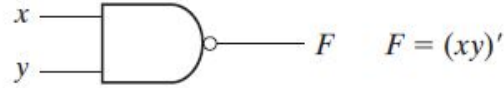
Tabla de verdad de una OR-exclusiva de 3 entradas:



x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 4

NAND



x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mostrar que la función NAND (Not AND) es universal en el sentido de que las funciones NOT, AND, OR y NOR se pueden expresar como productos negados. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, AND, OR y NOR con compuertas NAND.

NOT: $F = x'$ (T1)

$$= (x.x)'$$

AND: $F = x.y$ (T3)

$$= (x.y)'' = ((x.y)')'$$

OR: $F = x+y$ (T3)

$$= (x+y)'' \text{ (T5)} = (x'.y')'$$

NOR: $F = (x+y)'$ (T3)

$$= (x+y)''' \text{ (T5)} = ((x'.y')')'$$

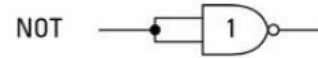
Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

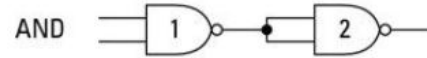
Ejercicio 4

Mostrar que la función NAND (Not AND) es universal en el sentido de que las funciones NOT, AND, OR y NOR se pueden expresar como productos negados. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, AND, OR y NOR con compuertas NAND.

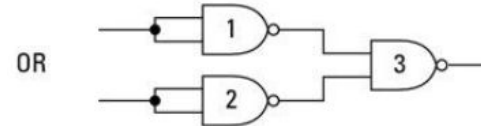
NOT: $F = x' = (x.x)'$



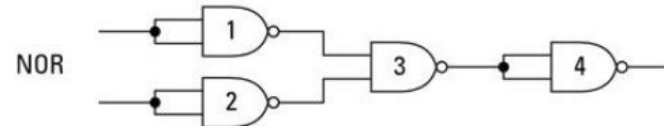
AND: $F = x.y = ((x.y)')'$



OR: $F = x+y = (x'.y')'$

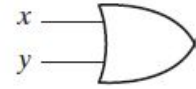


NOR: $F = (x+y)' = ((x'.y')')'$



Ejercicio 5

NOR



$$F = (x + y)'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Mostrar que la función NOR (Not OR) es universal en el sentido de que las funciones NOT, OR, AND y NAND se pueden expresar como sumas negadas. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, OR, AND y NAND con compuertas NOR.

NOT: $F = x'$ (T1)

$$= (x + x)'$$

OR: $F = x + y$ (t3)

$$= ((x + y)')'$$

AND: $F = x \cdot y$ (t3)

$$= (x \cdot y)'' \text{ (t5)} = (x' + y')'$$

NAND: $F = (x \cdot y)'$ (t3)

$$= (x \cdot y)''' \text{ (t5)} = (x' + y')''$$

Postulados y teoremas del álgebra booleana

Postulado 2	a)	$x + 0 = x$	b)	$x \cdot 1 = x$
Postulado 5	a)	$x + x' = 1$	b)	$x \cdot x' = 0$
Teorema 1	a)	$x + x = x$	b)	$x \cdot x = x$
Teorema 2	a)	$x + 1 = 1$	b)	$x \cdot 0 = 0$
Teorema 3, involución		$(x')' = x$		
Postulado 3, conmutatividad	a)	$x + y = y + x$	b)	$xy = yx$
Teorema 4, asociatividad	a)	$x + (y + z) = (x + y) + z$	b)	$x(yz) = (xy)z$
Postulado 4, distributividad	a)	$x(y + z) = xy + xz$	b)	$x + yz = (x + y)(x + z)$
Teorema 5, DeMorgan	a)	$(x + y)' = x'y'$	b)	$(xy)' = x' + y'$
Teorema 6, absorción	a)	$x + xy = x$	b)	$x(x + y) = x$

Ejercicio 5

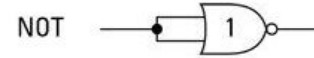
NOR



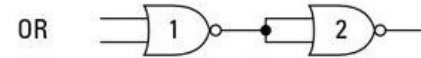
x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Mostrar que la función NOR (Not OR) es universal en el sentido de que las funciones NOT, OR, AND y NAND se pueden expresar como sumas negadas. Graficar las implementaciones de las compuertas NOT, OR, AND y NAND con compuertas NOR.

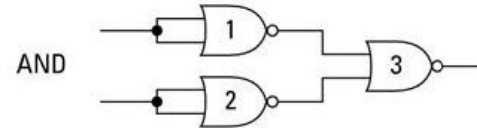
NOT: $F = x' = (x+x)'$



OR: $F = x+y = ((x+y)')'$



AND: $F = x.y = (x'+y')'$



NAND: $F = (x.y)' = ((x'+y'))'$

