1	2	3a	3b	Suma	4	5	6a	6b	7a	7b	Suma	Total

Calificación

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Año de regularidad (en caso de ser regular):

Álgebra / Álgebra II / Álgebra Lineal - Final

16 de diciembre de 2024

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Denotemos por S al conjunto de soluciones del sistema no homogéneo:
$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}.$$
Probar que si $S \neq \emptyset$ los elementos de S se pueden escribir como una solución fija más un vector que es solución del sistema homogéneo asociado.

2. (12 pts) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y sean V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\dim V = \dim(\mathrm{Nu} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 4. Toda transformación lineal $f : V \to V$ con polinomio característico $p_f(t) = (t-1)(t^2+1)t$ es diagonalizable.

   (b) (3 pts) En $\mathbb{R}^2$ consideremos la siguiente función $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$\Phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + y_1y_2.$$
   La función Φ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (20 pts) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que 1 y 3 sean autovalores de A y 3 tenga multiplicidad 2. Para tales a y b encontrar bases de los autoespacios asociados y decidir si A es diagonalizable.

5. (15 pts) Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión 4, $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f)$ si y sólo si $f^2 = 0$ y f tiene rango dos.

6. Sean $x, h \in \mathbb{R}$.

   (a) (5 pts) Probar que $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 \\ x^3 & hx^2 & hx & h \end{pmatrix} = (x+h)^3$.

   (b) (15 pts) Probar que para todo $n \geq 3$ se tiene que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & \ddots & \vdots \\ x^2 & hx & h & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ x^n & hx^{n-1} & \cdots & hx & h \end{pmatrix} = (x+h)^n.$$

7. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

   (a) (10 pts) Sean $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1} \in V$ tales que $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ para todo par $i \neq j$. Probar que cualquier subconjunto de n de estos vectores forma una base de V.

   Ayuda: A menos de reordenar, basta probar que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ es una base. Tomar una combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, separarla en dos, según el coeficiente sea mayor que 0 o no: obtenemos un vector que se escribe como combinación lineal de algunos de ellos con coeficientes positivos, y de los restantes con coeficientes negativos.

   (b) (5 pts) Sean $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ tales que $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ para todo par $i \neq j$. Probar que $m \leq n + 1$.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS

Solución del Ejercicio 7

Para el (a), a menos de reordenar, basta probar que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ es una base. Y para ello, dado que V es de dimensión n, basta probar que este conjunto es linealmente independiente. Sean $a_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. A menos de reordenar los v_i's, podemos asumir que $a_1, \cdots, a_k \geq 0$ y que $a_{k+1}, \cdots, a_n < 0$, para k entre 1 y m (siendo k la cantidad de escalares $a_i \geq 0$). Sea $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i$, de modo que $w = \sum_{i=k+1}^n -a_i v_i$. Entonces

$$(w, w) = \left(\sum_{i=1}^k a_i v_i, \sum_{j=k+1}^n -a_j v_j \right) = -\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n a_i a_j (v_i, v_j).$$

Ahora, $a_i a_j (v_i, v_j) \geq 0$, pues $a_i \geq 0$ y $a_j, (v_i, v_j) \leq 0$, de donde $(w, w) \leq 0$. Pero por propiedades de producto interno, $(w, w) \geq 0$, por lo tanto $(w, w) = 0$, lo cual implica que $w = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
0 = (w, v_{n+1}) &= \left(\sum_{i=1}^k a_i v_i, v_{n+1} \right) = \sum_{i=1}^k a_i (v_i, v_{n+1}) && \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0, \\
0 = (w, v_{n+1}) &= \left(\sum_{j=k+1}^n a_j v_j, v_{n+1} \right) = \sum_{j=k+1}^k a_j (v_j, v_{n+1}) && \Longrightarrow a_{k+1} = \cdots = a_n = 0,
\end{aligned}$$

ya que $(v_i, v_{n+1}), (v_j, v_{n+1}) < 0$ para todo i, j como antes.

Para el (b), el mismo argumento de antes mostraría que $v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}$ es linealmente independiente, tomando una combinación lineal que sume 0, partiendo en dos, etc. De este modo, $m - 1 \leq \dim V = n$, de donde $m \leq n + 1$.