Práctico 7

Determinante.

Jueves 31 de octubre

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular $\det(A^2BC^TB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^T)$.

Ejercicio 3. Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. Probar por inducción que si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son elementos de K, entonces

$$\det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Ejercicio 5. Determinar para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6. Probar que si $k_1, \ldots, k_n$ son elementos de $\Bbbk$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1+k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & 1+k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & 1+k_n \end{pmatrix} = 1 + k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Ejercicio 7. Una matriz A compleja $n \times n$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.

1. Probar que si n es impar y A es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.
2. Para cada n par encontrar una matriz A antisimétrica $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Ejercicio 8. Dados escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, definimos la matríz de *Vandermonde*:

$$\mathtt{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Probar (por inducción) que $\det(\mathtt{V}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Luego

(a) Dado $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ consideramos la sucesión $\exp(\lambda) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\exp(\lambda)_n = \lambda^{n-1}$. Probar que el subconjunto $\mathtt{S}_1 = \{\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2), \dots, \exp(\lambda_n)\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es LI si y sólo si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para todo $j \neq i$. Notar que esto prueba que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ hay un subconjunto LI que tiene la misma cantidad de elementos que $\mathbb{R}$. En concreto: $\{\exp(\lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ consideramos el subconjunto $\mathtt{S}_2 = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$. Probar que $\mathtt{S}_2$ es LI si y sólo si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para todo $j \neq i$.

★ **Ejercicio 9.** El **Ejercicio 8 (a)** muestra que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es monstruoso. En este ejercicio mostramos que es mas monstruoso aún. Consideramos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el siguiente subespacio:

$$\mathbb{R}^{\oplus\infty} = \{a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq N\}.$$

(a) Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos $\mathtt{e^k} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por ${\mathtt{e^k}}_n = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k, \\ 0, & \text{si } n \neq k. \end{cases}$

Probar que $\{\mathtt{e^k} \colon k \in \mathbb{N}\}$ es una base (podría decirse canónica) de $\mathbb{R}^{\oplus\infty}$.

(b) Sea $\mathtt{M}$ el subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ generado por el subconjunto linealmente independiente $\mathtt{S}_1$ del **Ejercicio 8 (a)**. Probar que $\mathtt{M} \cap \mathbb{R}^{\oplus\infty} = 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contiene una suma directa de subespacios $\mathtt{M} \oplus \mathbb{R}^{\oplus\infty}$, donde el primero tiene una base con $|\mathbb{R}|$-elementos y el segundo una base con $|\mathbb{N}|$-elementos.