

Independencia lineal y generación lineal

Jueves 12 de septiembre

Ejercicio 1. Decidir si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^4 son linealmente independientes. Cuando un conjunto no lo sea, mostrar una relación lineal no trivial entre sus elementos.

- (1) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2)\}$, (4) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 3, 1, 3), (0, 1, 2, 3)\}$,
 (2) $\{(1, 0, -1), (1, -2, 1), (2, -2, 0)\}$, (5) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 4), (0, 0, 0, 2)\}$,
 (3) $\{(1, 3, -3), (2, 3, -4), (1, -3, 1)\}$, (6) $\{(1, 1, 2, 4), (2, -1, -5, 2), (1, -1, -4, 0), (2, 1, 1, 6)\}$.

Ejercicio 2. Probar los siguientes:

- (a) Todo subconjunto de un conjunto LI es LI.
 (b) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
 (c) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
 (d) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.
 (e) Probar que un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LD si y sólo si alguno de los vectores está en el generado por los otros, esto es: existe i , $1 \leq i \leq n$ tal que $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

Ejercicio 3. Decidir si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de funciones $:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son LI:

- (a) $\{1, \sin, \cos\}$, (b) $\{1, \sin^2, \cos^2\}$.

Ejercicio 4. Sea V el \mathbb{Q} -espacio vectorial de sucesiones con valores racionales, o sea funciones $:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Encontrar un subconjunto infinito de V que sea LI.

Ejercicio 5. Dar 3 vectores en \mathbb{R}^3 que sean LD y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

Ejercicio 6. Sea \mathbb{k} un subcuerpo de \mathbb{C} . Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{k}^{\mathbb{k}}$ de funciones $:\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$. Sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* en $\mathbb{k}^{\mathbb{k}}$ (i.e., $f(x) = f(-x) \forall x$) y sea $\{g_1, \dots, g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* (i.e., $g(-x) = -g(x) \forall x$). Probar que $\{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m\}$ es LI.

Ejercicio 7. Sean \mathbb{k} un subcuerpo de \mathbb{C} y V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Sean α, β y γ vectores en V . Probar que si $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es LI, entonces también lo es $\{\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma\}$. Mostrar que esto no es cierto si en lugar del cuerpo \mathbb{k} consideramos \mathbb{Z}_2 .

★ **Ejercicio 8.** Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ tres vectores en \mathbb{Q}^4 ; en particular, cada uno de ellos es un vector en el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^4 . ¿Es cierto que el conjunto de vectores es LI como vectores en \mathbb{Q}^4 si y sólo si lo es como conjunto de vectores en \mathbb{R}^4 ?

★ **Ejercicio 9.** Supongamos que tenemos un conjunto LI $\{v_1, \dots, v_n\}$ en un espacio vectorial V . Sea $w \in V$. Probar que si $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ es LD, entonces $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Ejercicio 10. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$. Probar que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 + \lambda v_1 \rangle$.

Presentación de subespacios. Bases y dimensión

Martes 24 de septiembre

Ejercicio 11. Para cada ítem del **Ejercicio 1** denotamos por S_i al subconjunto indicado. Sea W_i el subespacio de \mathbb{R}^3 (casos $i = 1, 2, 3$) ó \mathbb{R}^4 (casos $i = 4, 5, 6$) generado por S_i .

- (a) Hallar la dimensión de W_i y dar una base del mismo.
- (b) Caracterizar W_i mediante ecuaciones.
- (c) Para $i = 1, 2, 3$ decidir cuáles de los vectores $(4, -5, 1), (5, 15, 5), (-5, 15, -5)$ están en W_i .
Para $i = 4, 5, 6$, hacer lo propio con los vectores $(1, 1, -4, 4), (1, 1, -4, -4), (1, 1, 4, 4), (1, 1, 1, 2)$.

Ejercicio 12. Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$,
- (b) $\{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : w = x + z, y = x - z, u = 2x - 3z\}$,
- (c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 + a_3 = a_1 + a_2\}$,
- (d) $\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p'(0) = 0\}$.

Ejercicio 13. Los siguientes subconjuntos $S_i \subset \mathbb{R}^n$ son LI ($n = 3$ ó 4). Completarlos a una base de \mathbb{R}^n .

- (1) $S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$,
- (2) $S_2 = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$,
- (3) $S_3 = \{(1, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0), (1, 2, 2, 1)\}$,
- (4) $S_4 = \{(0, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1)\}$.

Jueves 26 de septiembre

Ejercicio 14. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subset V$ un subespacio. Probar que si $\dim W = \dim V$, entonces $W = V$.

Ejercicio 15. Sea \mathbb{k} un cuerpo. Dado $m \in \mathbb{N}_0$ denotamos por $\mathbb{k}_m[x]$ al subespacio de $\mathbb{k}[x]$ formado por los polinomios de grado $\leq m$, junto con el polinomio nulo.

- (a) Sean p_1, \dots, p_n polinomios no nulos en $\mathbb{k}[x]$ tales que sus grados son distintos dos a dos. Probar que $\{p_1, \dots, p_n\}$ es LI en $\mathbb{k}[x]$.
- (b) Probar que $\{1, 1+x, (1+x)^2\}$ es una base de $\mathbb{k}_2[x]$.
- (c) Probar que $\mathbb{k}_2[x]$ es generado por $\{1, 2+2x, 1-x+x^2, 2-x^2\}$. ¿Es ese conjunto una base?

Ejercicio 16. Supongamos que tenemos $q_0, q_1, \dots, q_m \in \mathbb{k}_m[x]$ tales que $q_j(1) = 0$ para todo j . Probar que $\{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ es LD.

Ejercicio 17. Calcular la dimensión de los siguientes espacios vectoriales exhibiendo una base.

- (a) \mathbb{C}^n como \mathbb{C} -espacio vectorial.
- (b) \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- (c) $\{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A = A^t\}$.
- (d) $\{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : A \text{ es triangular superior}\}$.
- (e) $\{A \in \mathbb{k}^{n \times n} : \text{tr } A = 0\}$.
- (f) $\{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : A = (\bar{A})^t\}$ como \mathbb{R} -EV.

Nota: si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se define $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (conjugar las entradas de A).

Suma (directa) de subespacios

Jueves 3 de octubre

Ejercicio 18. Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de \mathbb{R}^6 :

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 + x_5 + x_6 = 0\};$$

$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 0, 2, 1, 0, 0), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0) \rangle.$$

- (a) Dar una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$. Describirlo con ecuaciones.
- (b) Dar una presentación por ecuaciones de $W_1 + W_2$. Obtener una base y su dimensión.
- (c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1); (0, 0, 0, 1, 0, -1); (1, 1, 1, 0, 0, 0); (3, 0, 0, 1, 1, 3); (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

Ejercicio 19. Para cada uno de los conjuntos S_i definidos en el **Ejercicio 13**, sea W_i el subespacio de \mathbb{R}^n ($n = 3$ ó 4) generado por S_i . Hallar un complemento de W_i en \mathbb{R}^n .

Ejercicio 20. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión 42. Si V_1 y V_2 son subespacios con $\dim V_1 = 33$ y $\dim V_2 = 9$ tales que $V = V_1 + V_2$, entonces $V = V_1 \oplus V_2$.
- (b) Sea V un espacio vectorial de dimensión 42. Si V_1 y V_2 son subespacios con $\dim V_1 = 33$ y $\dim V_2 = 9$ tales que $V_1 \cap V_2 \neq 0$, entonces $V = V_1 \oplus V_2$.
- (c) Si V_1 y V_2 son subespacios de \mathbb{k}^8 con $\dim V_1 = \dim V_2 = 4$ entonces $\mathbb{k}^8 = V_1 \oplus V_2$.
- (d) Si V_1 y V_2 son subespacios de \mathbb{k}^8 con $\dim V_1 = \dim V_2 = 5$ entonces $V_1 \cap V_2 = 0$.

Nota: los números 42 y 33 no son demasiado especiales para este tipo de problemas, pero si para otros: https://www.youtube.com/watch?v=ASoz_NuIvP0

Ejercicio 21. Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial V . Expresar $U + U$ en términos de U .

Ejercicio 22. Sean V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión n y $U \subset V$ un subespacio de dimensión $n - 1$.

- (a) Probar que si $v \notin U$ entonces $V = U \oplus \langle v \rangle$.
- (b) Probar que si W es un subespacio de V no contenido en U , entonces $V = U + W$.

Ejercicio 23. Sea \mathbb{k} un subcuerpo de \mathbb{C} . Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{k}^{\mathbb{k}}$. Sean $\mathbb{k}_p^{\mathbb{k}}$ y $\mathbb{k}_i^{\mathbb{k}}$ los subespacios de funciones pares y funciones impares, respectivamente (Ver **Ejercicio 6**). Probar que $\mathbb{k}^{\mathbb{k}} = \mathbb{k}_p^{\mathbb{k}} \oplus \mathbb{k}_i^{\mathbb{k}}$.

Ejercicio 24. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean V_1, \dots, V_m subespacios de V . Probar que si $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, entonces $\dim V = \dim V_1 + \dots + \dim V_m$.

Ejercicio 25. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Probar los siguientes:

- (a) Para cada j con $1 \leq j \leq n$ existe un subespacio de V de dimensión j .
- (b) Existen subespacios V_1, \dots, V_n de dimensión 1 tales que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$.

Para ejercitar la resistencia a la frustración

★ **Ejercicio 26.** Probar que \mathbb{R} mirado como \mathbb{Q} -espacio vectorial tiene dimensión infinita.

Sugerencia 1: Usar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{Q}[x]$ (por ejemplo, $\alpha = \pi$).

Sugerencia 2: Usar que \mathbb{R} es "más infinito" que \mathbb{Q}^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

★ **Ejercicio 27.** Supongamos que \mathbb{F} y \mathbb{K} son cuerpos tales que \mathbb{F} es subcuerpo de \mathbb{K} . Entonces \mathbb{K} puede ser mirado como un \mathbb{F} -EV. **Supongamos** que \mathbb{K} tiene dimensión finita mirado como \mathbb{F} -EV.

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial (también se lo puede ver como un \mathbb{F} -EV). Probar que V tiene dimensión finita mirado como \mathbb{K} -EV si y solo si V tiene dimensión finita mirado como \mathbb{F} -EV. Mostrar que en tal caso vale

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \cdot \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Nota: Esto generaliza lo calculado en **Ejercicio 17 (a), (b)**.

Definición

Sea \mathbb{k} un cuerpo. Recordar que dados $n \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{k}$, denotamos $n x := x + \cdots + x$ (n -veces) $\in \mathbb{k}$.

Se define la *característica* de \mathbb{k} , denotada por $\text{car } \mathbb{k}$, de la siguiente forma:

- si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 = 0$, entonces $\text{car } \mathbb{k} := \min \{n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 = 0\}$;
- si no existe tal $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{car } \mathbb{k} := 0$.

★ Ejercicio 28. Cardinalidad de cuerpos finitos

Sea \mathbb{k} un cuerpo *finito*. El objetivo de este ejercicio es probar que \mathbb{k} tiene p^n elementos para algún primo p .

- (a) Probar que $\text{car } \mathbb{k}$ es un número primo, lo denotaremos por p .
- (b) Probar que \mathbb{k} es un \mathbb{Z}_p -espacio vectorial con la suma de \mathbb{k} y el producto por escalares dado por

$$\cdot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}, \quad \bar{j} \cdot x := j \cdot x.$$

(Es necesario probar que esa función está bien definida, es decir: si $\bar{j} = \bar{h}$ entonces $j \cdot x = h \cdot x$.)

- (c) Probar que \mathbb{k} tiene dimensión finita como \mathbb{Z}_p -espacio vectorial. La denotaremos por n .
- (d) Notar que hay un isomorfismo $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow \mathbb{k}$ de \mathbb{Z}_p -espacios vectoriales. Deducir el cardinal de \mathbb{k} .