MÉTODOS DE SIMULACIÓN EN FÍSICA. TAREA 1: RUNGE-KUTTA

El envío se debe hacer en un solo correo electrónico, que contenga todo lo que se pide en los dos puntos de la tarea.

1. MODELO SIR

Uno de los modelos más sencillos para la evolución de una epidemia es el modelo SIR, propuesto en 1927 por W. O. Kermack & A. G. McKendrick que se utiliza para simular enfermedades en las que una persona infectada, una vez recuperada (o muerta) no se puede volver a infectar.

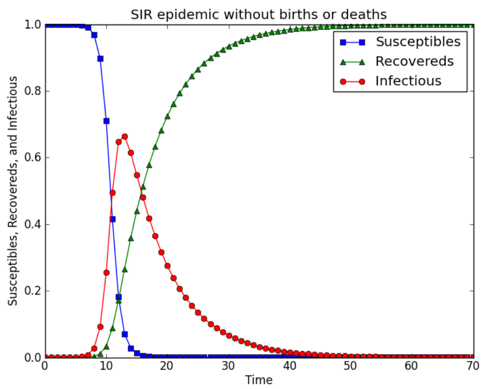
Considere una población con un número constante de personas donde cada una puede estar *susceptible*, *infectada* o *retirada*. Sean *s, i, r* las fracciones de la población que están susceptibles, infectadas o retiradas, respectivamente ($s+i+r=1$). Asumamos que, a cada momento, la cantidad de susceptibles que se infecta por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad e susceptibles multiplicada por la cantidad de infectados, βsi, donde β es una constante que nos dice qué tan contagiosa es la enfermedad. Por el contrario, la cantidad de infectados que dejan de serlo por unidad de tiempo es solamente proporcional al número de infectados, γi, donde $1/\gamma$ da el tiempo característico de recuperación. Las ecuaciones diferenciales acopladas que rigen el comportamiento son, por lo tanto:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

, de las cuales sólo las dos primeras son independientes.



a) Implemente la simulación del modelo utilizando Runge-Kutta para las dos primeras ecuaciones acopladas, y grafique la evolución temporal de las tres cantidades $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$ para $s(0) = 0.999$, $i(0) = 0.001$, $\beta = 0.24$, $\gamma = 0.08$.

b) Explique por qué para que haya epidemia (es decir, para que los infectados crezcan) se necesita que $\beta s(0) > \gamma$.

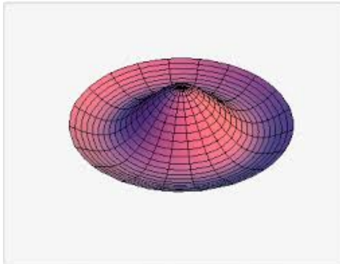
c) Usualmente no todos los susceptibles se infectan, sino que tienden a un valor s_∞ cuando $t \to \infty$. Haga un programa que grafique s_∞ en función de $R_0 = \beta/\gamma$.

El envío debe contener:

- El programa .cpp que resuelve el punto a), junto con la gráfica de evolución de las tres cantidades en formato .pdf
- La explicación del punto b) en el texto del envío.
- El programa .cpp que resuelve el punto c), junto con la gráfica de s_∞ en función de R_0 en formato .pdf

1. LOS MODOS DE VIBRACION DE UN TAMBOR

Considere la membrana circular de un tambor de radio $a = 1$, e imagine que estamos interesados en los modos normales $R(r)$ que no dependen de la coordenada angular θ, como la que se muestra en la figura. En este caso, la función $R(r)$ cumple la ecuación diferencial



$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R(r) = 0 \quad ,$$

que resulta ser una ecuación de Bessel con parámetro $\alpha = 0$, con condiciones de frontera $\frac{dR}{dr}_{r=0} = 0$ y $R(a) = 0$.

a) Construya un programa que resuelva esta ecuación diferencial por Runge-Kutta de 4º orden para $\lambda = 1$, $R(0) = 1$ y $\frac{dR}{dr}_{r=0} = 0$, y grafique $R(r)$ en el intervalo $r \in [0.01\,, 10.0]$.

b) Defina la función $f(\lambda) = R(r = 1; \lambda)$ (donde hemos hecho explícito el hecho de que $R(r)$ también es función del parámetro λ), grafíquela para $\lambda \in [0.01\,, 15.0]$ e identifique aproximadamente dónde están los ceros de la función en ese intervalo (es decir, los valores aproximados de λ para los cuales $f(\lambda) = 0$)

c) Utilizando el método de hallar ceros por bisección, precise los valores de λ para los cuales se logra que $R(r = a) = 0$ (con $a = 1$), es decir para los que se cumplen las condiciones de frontera del tambor, y grafique las funciones $R(r)$ correspondientes en el intervalo $r \in [0.01\,, 1.0]$. Estos son los modos normales que deseábamos encontrar.

El envío se debe hacer en un solo correo electrónico, que contenga:

- El programa .cpp que resuelve el punto a), junto con la gráfica de $R(r)$ en formato .pdf
- El programa .cpp que resuelve el punto b), junto con la gráfica de $f(\lambda)$ en formato .pdf
- El programa .cpp que resuelve el punto c), junto con la gráfica de los modos normales en formato .pdf y los valores de λ para cada uno de ellos.