Ejercicios Taller 4: Distribuciones de Probabilidad usando SymPy en Python

Contreras Yepes Juan Diego 20211020069
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

***Abstract*—Este documento presenta la resolución de ocho ejercicios de estadística basados en distribuciones Poisson, Normal, Binomial y Exponencial, implementados con la biblioteca SymPy de Python, ajustados al formato IEEE para trabajos académicos.**

***Index Terms*—estadística, distribución de Poisson, distribución normal, distribución binomial, distribución exponencial, Python, SymPy, probabilidad, ejercicios resueltos.**

I. Ejercicio 1: Llegada de Clientes por Hora (Poisson)

El número de clientes que llegan por hora a una tienda sigue una distribución de Poisson con tasa promedio $\lambda = 5$. Se calcula la probabilidad de que lleguen exactamente 3 clientes en una hora, usando la fórmula:

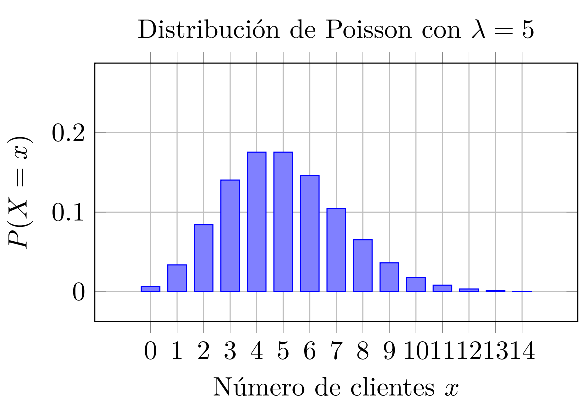
$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Sustituyendo los valores:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-5} \cdot 5^3}{3!} = \frac{0.0067 \cdot 125}{6} = 0.1396$$

```python
from sympy import symbols, exp, factorial, N
lmbda, x = 5, 3
P = (exp(-lmbda) * lmbda**x) / factorial(x)
print("P(X=3) =", N(P))
# Resultado: P(X=3) = 0.140373895597819
```

Listing 1. Cálculo de probabilidad Poisson para $X = 3$



II. Ejercicio 2: Número de Defectos en una Pieza (Poisson)

El número de defectos por pieza fabricada tiene una distribución de Poisson con media $\lambda = 2$. Se busca la probabilidad de que haya más de un defecto:

$$P(X > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\right)$$

Calculando:

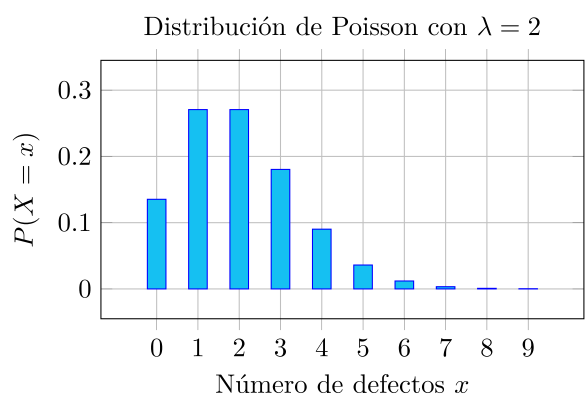
$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = 0.1353$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = 0.2707$$

$$P(X > 1) = 1 - (0.1353 + 0.2707) = 0.5940$$

```python
lmbda = 2
P0 = (exp(-lmbda) * lmbda**0) / factorial(0)
P1 = (exp(-lmbda) * lmbda**1) / factorial(1)
P_gt1 = 1 - (P0 + P1)
print("P(X>1) =", N(P_gt1))
# Resultado: P(X>1) = 0.593994150290162
```

Listing 2. Probabilidad de más de un defecto



III. Ejercicio 3: Calificaciones de Examen (Normal)

Las calificaciones siguen una distribución normal con media $\mu = 70$ y desviación estándar $\sigma = 8$. La probabilidad de que un estudiante tenga calificación entre 65 y 80 se calcula mediante:

$$P(65 < X < 80) = P\left(\frac{65 - \mu}{\sigma} < Z < \frac{80 - \mu}{\sigma}\right)$$

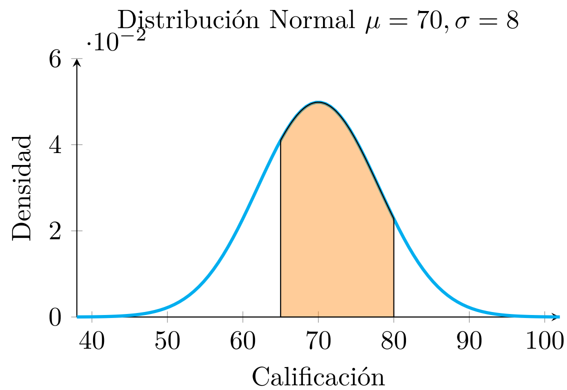
Calculando los valores Z:

$$z_1 = \frac{65 - 70}{8} = -0.625, \quad z_2 = \frac{80 - 70}{8} = 1.25$$

$$P(65 < X < 80) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.625) = 0.8944 - 0.2660 = 0.6284$$

```python
from sympy.stats import Normal, P
X = Normal('X', 70, 8)
prob = P((X > 65) & (X < 80))
print(prob.evalf())
# Resultado: 0.628376137847208
```

Listing 3. Probabilidad en intervalo con distribución normal



IV. Ejercicio 4: Tiempo de Producción (Normal)

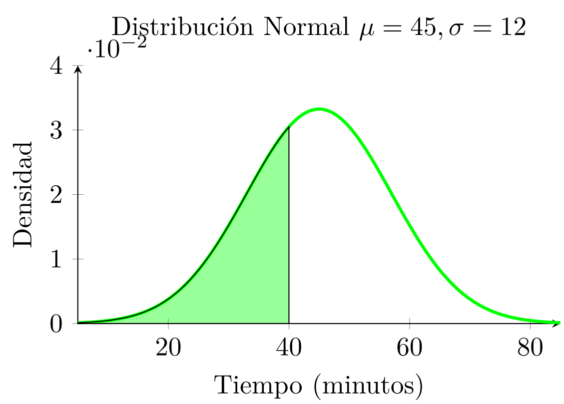
El tiempo de producción sigue una distribución normal con media $\mu = 45$ minutos y desviación estándar $\sigma = 12$ minutos. Se halla la probabilidad de que el tiempo sea menor a 40 minutos:

$$P(X < 40) = P\left(Z < \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{40-45}{12}\right) = P(Z < -0.417)$$

$$P(X < 40) = \Phi(-0.417) = 0.3383$$

```
Y = Normal('Y', 45, 12)
prob2 = P(Y < 40)
print(prob2.evalf())
# Resultado: 0.338281115465997
```

Listing 4. Probabilidad de tiempo menor a 40 minutos



V. Ejercicio 5: Control de Calidad (Binomial)

En una línea de producción, el 10% de los productos son defectuosos. Si se seleccionan 15 productos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosos?

La distribución binomial tiene la fórmula:

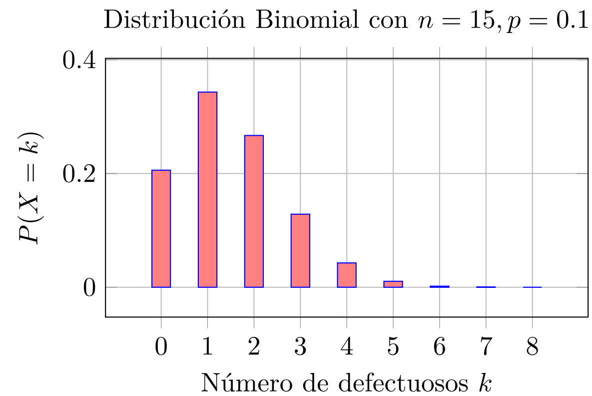
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Con $n = 15$, $k = 2$, $p = 0.1$:

$$P(X = 2) = \binom{15}{2}(0.1)^2(0.9)^{13} = 105 \cdot 0.01 \cdot 0.2542 = 0.2669$$

```
from sympy.stats import Binomial, P
X = Binomial('X', 15, 0.1)
prob = P(X.eq(2))
print(prob.evalf())
# Resultado: 0.266865988267500
```

Listing 5. Probabilidad binomial para 2 defectuosos



VI. Ejercicio 6: Examen de Selección Múltiple (Binomial)

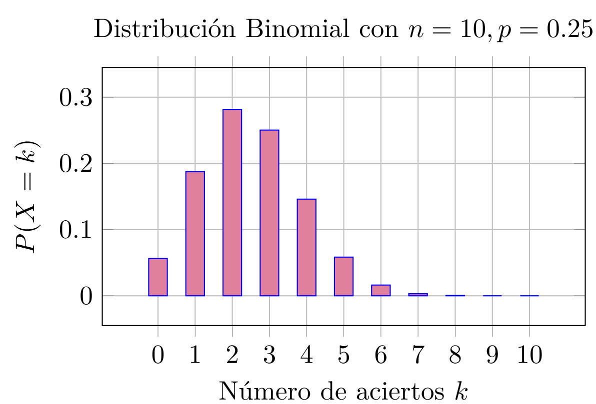
Un examen tiene 10 preguntas de selección múltiple con 4 opciones cada una. Si un estudiante responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte al menos 6 preguntas?

Con $n = 10$, $p = 0.25$:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} (0.25)^k (0.75)^{10-k}$$

```
from sympy import summation
from sympy.stats import Binomial, P
X = Binomial('X', 10, 0.25)
prob = P(X >= 6)
print(prob.evalf())
# Resultado: 0.0197257995605469
```

Listing 6. Probabilidad de al menos 6 aciertos



VII. Ejercicio 7: Tiempo de Espera en Servicio (Exponencial)

El tiempo de espera en un servicio al cliente sigue una distribución exponencial con media de 5 minutos

($\lambda = 1/5 = 0.2$). ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere menos de 3 minutos?

La función de distribución exponencial es:

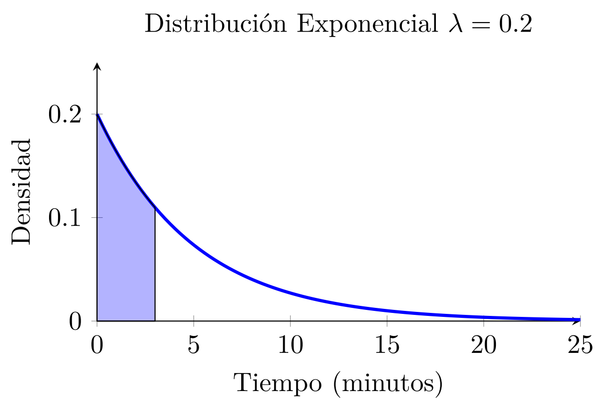
$$P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Con $\lambda = 0.2$ y $x = 3$:

$$P(X < 3) = 1 - e^{-0.2\cdot 3} = 1 - e^{-0.6} = 1 - 0.5488 = 0.4512$$

```python
from sympy.stats import Exponential, P
X = Exponential('X', 0.2)
prob = P(X < 3)
print(prob.evalf())
# Resultado: 0.451188363905974
```

Listing 7. Probabilidad exponencial de espera menor a 3 minutos



VIII. Ejercicio 8: Vida Útil de Componente Electrónico (Exponencial)

La vida útil de un componente electrónico sigue una distribución exponencial con media de 1000 horas ($\lambda = 1/1000 = 0.001$). ¿Cuál es la probabilidad de que el componente dure más de 1500 horas?

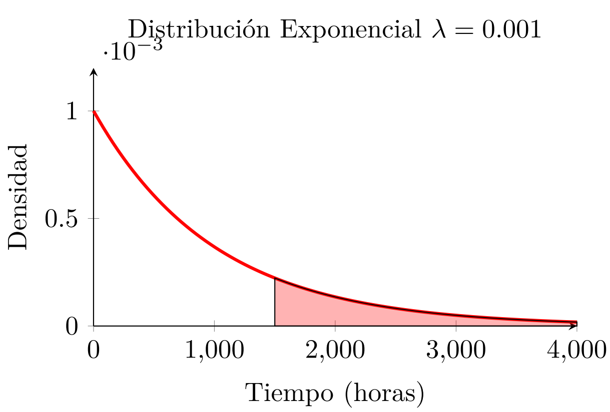
$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

Con $\lambda = 0.001$ y $x = 1500$:

$$P(X > 1500) = e^{-0.001\cdot 1500} = e^{-1.5} = 0.2231$$

```python
Y = Exponential('Y', 0.001)
prob2 = P(Y > 1500)
print(prob2.evalf())
# Resultado: 0.223130160148430
```

Listing 8. Probabilidad de duración mayor a 1500 horas



IX. Conclusión

Los ocho ejercicios presentados demuestran la versatilidad de SymPy para resolver problemas de estadística con diferentes distribuciones de probabilidad. Los resultados obtenidos son:

- **Poisson**: P(X=3, λ=5) = 14.04%, P(X>1, λ=2) = 59.40%
- **Normal**: P(65<X<80, μ=70, σ=8) = 62.84%, P(X<40, μ=45, σ=12) = 33.83%
- **Binomial**: P(X=2, n=15, p=0.1) = 26.69%, P(X≥6, n=10, p=0.25) = 1.97%
- **Exponencial**: P(X<3, λ=0.2) = 45.12%, P(X>1500, λ=0.001) = 22.31%

Estos resultados confirman la precisión de SymPy como herramienta educativa y de cálculo para probabilidades en ingeniería y ciencias.