Taller 3.1: Distribuciones de Probabilidad Conjunta usando SymPy en Python

Contreras Yepes Juan Diego 20211020069
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

***Abstract*—Este documento presenta la resolución de tres ejercicios de probabilidad conjunta, implementados con la biblioteca SymPy de Python para el cálculo de funciones de densidad y probabilidad conjunta, ajustados al formato IEEE para trabajos académicos.**

***Index Terms*—probabilidad conjunta, distribución bivariada, Python, SymPy, variables aleatorias, integración múltiple.**

I. Ejercicio 1: Distribución de Cajas de Chocolate

Una fábrica de dulces distribuye cajas de chocolate, cuya función de densidad conjunta es dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & \text{si } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A. a) Verificar que $f(x,y)$ es una función de densidad conjunta

Paso 1: Verificar que la función no es negativa

Como x e y están entre 0 y 1, e igual que $2x+3y$, la suma siempre será mayor o igual que 0. Por lo tanto:

$$f(x,y) = \frac{2}{5}(2x+3y) \ge 0 \quad \text{en el dominio } 0 \le x, y \le 1$$

Paso 2: La integral doble debe ser igual a 1

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy = 1$$

Resolvemos la integral respecto a x:

$$\int_0^1 (2x+3y)\,dx = \left[x^2+3xy\right]_0^1 = 1+3y$$

$$\frac{2}{5}\int_0^1 (1+3y)\,dy = \frac{2}{5}\left[y+\frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = 1$$

Por lo tanto, sí es una función de densidad conjunta válida en el dominio $0 \le x, y \le 1$.

```python
from sympy import symbols, integrate, simplify
x, y = symbols('x y', real=True, positive=True)
f_xy = (2/5) * (2*x + 3*y)
# Verificar integral doble
integral = integrate(integrate(f_xy, (x, 0, 1)),
    (y, 0, 1))
print(f"Integral doble: {integral}")
# Resultado: 1.00000000000000
```

Listing 1. Verificación de función de densidad conjunta

B. b) Calcular $P(R)$ donde $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$

$$P(R) = \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$$

Resolvemos la integral de x:

$$\int_0^{1/2} (2x+3y)\,dx = \left[x^2+3xy\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}+\frac{3y}{2}$$

Resolvemos la integral de y:

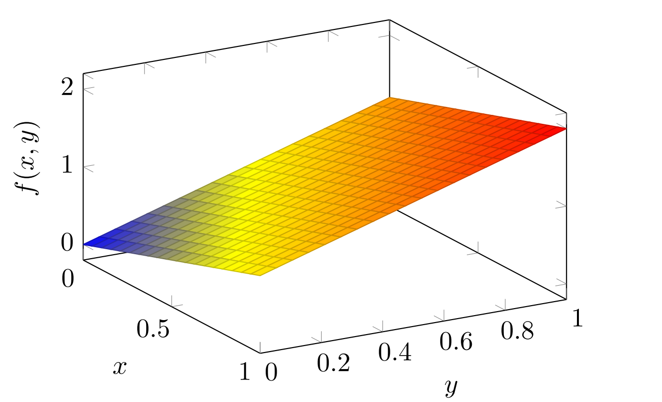
$$\frac{2}{5}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3y}{2}\right)dy = \frac{2}{5}\left[\frac{y}{4}+\frac{3y^2}{4}\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{16} = \frac{10}{80} = \frac{13}{160}$$

```python
# Calcular P(R) en la region especificada
P_R = integrate(integrate(f_xy, (x, 0, 1/2)), (y,
    0, 1/2))
print(f"P(R) = {P_R}")
print(f"P(R) = {float(P_R):.4f}")
# Resultado: P(R) = 13/160 = 0.0813
```

Listing 2. Cálculo de probabilidad en región R

Función de densidad conjunta $f(x,y) = \frac{2}{5}(2x+3y)$



II. Ejercicio 2: Función de Probabilidad Discreta

Dada la función de probabilidad $f(x,y) = \frac{xy}{36}$ para las variables aleatorias X e Y discretas, donde $x = 1,2,3$ y $y = 1,2,3$.

A. a) $P(X+Y=4)$

Los pares posibles son: $(1,3),(2,2),(3,1)$

$$P(X+Y=4) = f(1,3) + f(2,2) + f(3,1)$$
$$= \frac{1\cdot 3}{36} + \frac{2\cdot 2}{36} + \frac{3\cdot 1}{36} = \frac{3+4+3}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

B. b) $P(X>Y)$

Los pares posibles son: $(2,1),(3,1),(3,2)$

$$P(X>Y) = f(2,1) + f(3,1) + f(3,2)$$
$$= \frac{2\cdot 1}{36} + \frac{3\cdot 1}{36} + \frac{3\cdot 2}{36} = \frac{2+3+6}{36} = \frac{11}{36}$$

C. c) $P(X=2\cup Y\le 1)$

Los pares posibles son: $(2,1),(3,1)$

$$P(X=2\cup Y\le 1) = f(2,1) + f(3,1) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$$

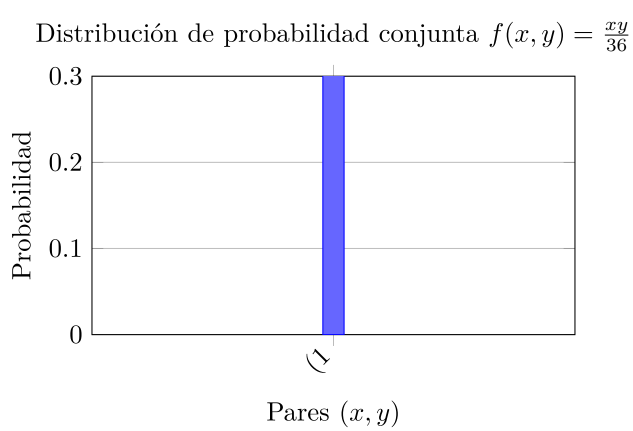
D. d) $P(X=2\cup Y=1)$

Los pares posibles son: $(1,1),(2,1)$

$$P(X=2\cup Y=1) = f(1,1) + f(2,1) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

```python
from sympy import symbols, Rational
# Definir funcion de probabilidad discreta
def f(x, y):
    return Rational(x * y, 36)

# a) P(X+Y=4)
P_a = f(1,3) + f(2,2) + f(3,1)
print(f"a) P(X+Y=4) = {P_a} = {float(P_a):.4f}")

# b) P(X>Y)
P_b = f(2,1) + f(3,1) + f(3,2)
print(f"b) P(X>Y) = {P_b} = {float(P_b):.4f}")

# c) P(X=2 U Y<=1)
P_c = f(2,1) + f(3,1)
print(f"c) P(X=2 U Y<=1) = {P_c} =
    {float(P_c):.4f}")

# d) P(X=2 U Y=1)
P_d = f(1,1) + f(2,1)
print(f"d) P(X=2 U Y=1) = {P_d} =
    {float(P_d):.4f}")
```

Listing 3. Cálculo de probabilidades discretas



III. Ejercicio 3: Selección de Estudiantes

Se seleccionaron al azar 2 estudiantes de un salón que contiene 3 estudiantes de sistemas, 2 de electrónica y 3 de industrial. Sea X el número de estudiantes de sistemas y Y el número de estudiantes de electrónica.

A. 1. Función de probabilidad conjunta

a) Total de formas de escoger 2 estudiantes:

$$N = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

b) Casos posibles:

- $(0,0)$: ambos industriales
- $(1,0)$: 1 sistemas, 1 industrial
- $(0,1)$: 1 electrónica, 1 industrial
- $(0,2)$: ambos electrónica
- $(1,1)$: 1 sistemas, 1 electrónica
- $(2,0)$: ambos sistemas

c) Probabilidad conjunta para cada par:

La función de probabilidad conjunta es:

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{28} \quad \text{para } x+y\le 2$$

Calculando cada probabilidad:

$$f(0,0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{28} = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{28} = \frac{3}{28}$$
$$f(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{28} = \frac{3\cdot 1\cdot 3}{28} = \frac{9}{28}$$
$$f(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{28} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{28} = \frac{6}{28}$$
$$f(0,2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{28} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{28} = \frac{1}{28}$$
$$f(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{28} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{28} = \frac{6}{28}$$
$$f(2,0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{28} = \frac{3\cdot 1\cdot 1}{28} = \frac{3}{28}$$

B. 2. Calcular $P(X+Y=1)$

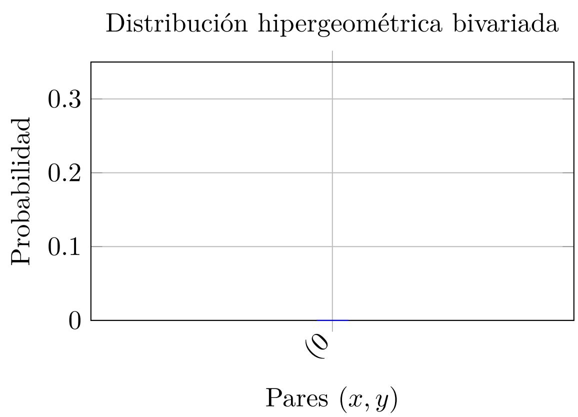
Los pares posibles son: $(0,1),(1,0)$

$$P(X+Y=1) = f(0,1) + f(1,0) = \frac{6}{28} + \frac{9}{28} = \frac{15}{28}$$

```python
from sympy import binomial, Rational

# Total de formas de escoger 2 estudiantes de 8
N = binomial(8, 2)
print(f"Total de combinaciones: {N}")

# Funcion de probabilidad conjunta
def f_hipergeom(x, y):
    if x + y > 2 or x > 3 or y > 2:
        return 0
    industrial = 2 - x - y
    if industrial < 0 or industrial > 3:
        return 0
    return
     Rational(binomial(3,x)*binomial(2,y)*binomial(3,industrial
     N)
```

```python

# Calcular todas las probabilidades
print("\nTabla de probabilidades:")
for x in range(4):
    for y in range(3):
        prob = f_hipergeom(x, y)
        if prob > 0:
            print(f"f({x},{y}) = {prob} =
    {float(prob):.4f}")

# Calcular P(X+Y=1)
P_sum1 = f_hipergeom(0,1) + f_hipergeom(1,0)
print(f"\nP(X+Y=1) = {P_sum1} =
    {float(P_sum1):.4f}")
```

Listing 4. Cálculo de probabilidad hipergeométrica



IV. Conclusión

Los tres ejercicios demuestran diferentes aplicaciones de probabilidad conjunta:

- **Ejercicio 1**: Distribución continua bivariada con integración múltiple. $P(R) = 13/160 = 0.0813$
- **Ejercicio 2**: Distribución discreta con cálculo de probabilidades condicionales y marginales
- **Ejercicio 3**: Distribución hipergeométrica bivariada para muestreo sin reemplazo. $P(X + Y = 1) = 15/28 = 0.5357$

Estos resultados demuestran la versatilidad de SymPy para resolver problemas complejos de probabilidad conjunta en Python.