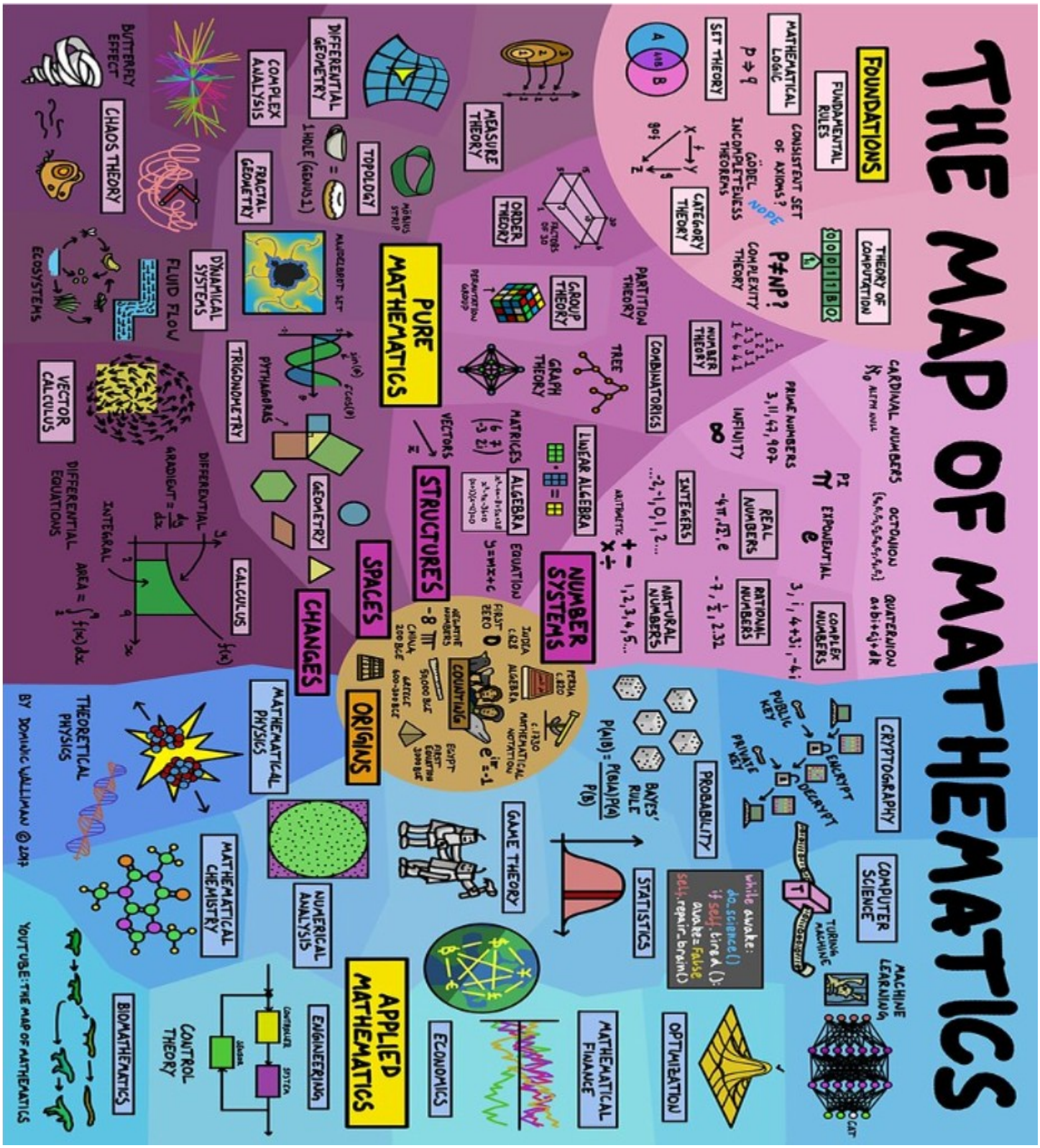
OPOSICIONES DE SECUNDARIA

TEMAS DE MATEMÁTICAS

Por: Juan Andrés Morales Cordovilla
Web: http://www.ugr.es/~jamc/



Índice

1 Otros temas **21**

1.1 Unidades Didácticas 21

1.2 T6. Números reales. Topología de la recta real. 21

1.2.1 Topología 22

1.3 T13. Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas. 23

1.3.1 Ideales y Dominio Euclideo 23

1.3.2 Anillo de polinomios sobre un cuerpo y fracciones algebraicas 24

1.4 T16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan. T18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. 19. Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz. 20. El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra. 25

1.4.1 (*) Geometría algebraica 26

1.5 T25. Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas. 27

1.6 T26. Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones. 28

1.7 27. Desarrollo de una función en serie de potencias. Teorema de Taylor. Aplicaciones al estudio local de funciones. 28

1.7.1 Análisis funcional 29

1.8 T29. El problema del cálculo del area. Integral definida. T30. Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. Aplicaciones de la integra al cálculo de magnitudes geométricas. 29

1.8.1 Análisis vectorial. Campos (conservativo) 30

1.8.2 Diferencial. Integral para medidas y anal. vect.. Ejemplos 32

1.9 T36. Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones. T37. La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas. T38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones. 33

1.9.1 Pentágono 33

1.9.2 Trigonometria 33

1.10 T41. Movimientos en el plano. Composición de movimientos. Aplicación al estudio de las teselaciones del plano. Frisos y mosaicos. 42. Homotecia y semejanza en el plano. 44. Semejanza y movimientos en el espacio. 33

1.11 T43. Proyecciones en el plano. Mapas. Planisferios terrestres: principales sistemas de representación. 35

1.11.1 Vision Artificial 35

1.12 T45. Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos. 36

1.13 T52. Producto escalar de vectores. Producto vectorial y producto mixto. Aplicaciones a la resolución de problemas físicos y geométricos. 37
1.14 56. Evolución histórica de la geometría. 38
1.15 (*) Otros temas 38
1.15.1 (*) Aprendizaje Automático 38
1.15.2 (*) Modelos Gráficos Probabilísticos (PGM) 39
1.15.3 (*) Procesamiento del lenguaje natural 40
1.15.4 (*) Teoría de la información y de la señal. Proceso estocástico. Serie temporal 40
1.15.5 (*) Estadística: Detección de errores. Datos perdidos. PCA. Compresión 42
1.15.6 (*) Biología 43
1.15.7 (*) Filosofía 43
1.15.8 (*) Economía/política 45

2 T2. Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas en árbol. 49
2.1 Introducción: puentes de Koenigsberg. Teoría de grafos: no dist. geom. pero conexiones 49
2.2 Definiciones: camino, ciclo, bipartido 49
2.3 Grafos eulerianos. Hierholzer (juego de la casa) 50
2.4 Grafos hamiltonianos (clausura). Juego del dodecaedro y problema del viajante (=progr. dinam. si retic.) 50
2.5 Grafos planos. Tma de Kuratowski y fórmula de Euler 50
2.6 Diagramas de árbol: Lema de Zorn 51
2.7 NP vs P, NP-Completo (problema del viajante) 52
2.8 Aplicaciones matemáticas: Digrafo (composición de correspondencias), Grafos de Cayley y Hasse, cadena de Markov, y Tma 4 colores 53
2.9 Aplicaciones físicas: leyes de Kirchhoff, SGD, red de flujo, camino crítico, jerarquía, 6 grados, mapa de contacto 53
2.10 Conclusión y bibliografía 54

3 T3. Técnicas de recuento. Combinatoria. 57
3.1 Introducción: palabras, compases, configurables (Al-Kindi, criptografía), viajante, 6 sabores combinados 57
3.2 Combinatoria: enumerar, existencia/optimizar y generar las config. de una tarea. Técnicas de Recuento (cardinalidad): suma, prod (dado), divis. excl.-incl. palomar (pelos, cumple), arbol, f. generad. 57
3.3 Clasificación de configuraciones 58
3.4 Configuraciones clásicas: bi/sobre/inyectiva. combinaciones (princ. incl.-excl.). Triángulo de Pascal (5 propiedades, conjunto potencia=Binomio de Newton) . 59
3.5 Otras configuraciones: permutaciones (pinos, entropía) y combinaciones con repetición (diofántica) y desarreglos 59
3.6 Ciclos y Grafos de Cayley: ciclos y A5 no abeliano 60
3.7 Aplicaciones matemáticas: Informática (P vs NP, viajante), prob. Laplace, función aritmética (divisor, primos, entropía). Simplex 61
3.8 Aplicaciones físicas: Entropía 62

4 T4. Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia. 63
4.1 Introducción: -*-=+, planetas alineados 63
4.2 Construcción de Z desde N 63
4.3 Operaciones + y *: con representante canónico, -*-=+ 64

4.4 Estructura: anillo y orden total mínimo. Ideal nZ 64
4.5 Divisibilidad: división y algoritmo euclideo (MCD) 64
4.6 Tma Fundamental de la Aritmética y Tma de Euclides 65
4.7 Divisibilidad estructura: retículo y dominio euclideo (ideal, grado) 65
4.8 Congruencias: aritmética modular y congruencia polinomial (en 2 sentidos) . . 65
4.9 Estructuras modulares: G. aditivo (Zn,+). G. multiplicativo (Zn,*) (Zp-1+ y Zp* ¡isomorfos!). A. ciclico (Zn,+,*). Cuerpo finito (Zp,+,*) (Tma de Fermat) . 66
4.10 Aplicaciones matemáticas: resto potencial, pequeño Tma de Fermat (primalidad) 67
4.11 Aplicaciones: criptografía, función unidireccional (problema de factorización de enteros), test de primalidad 67
4.12 Aplicaciones: mcm (fracciones, música, engranajes) y MCD, Dalton 68
4.13 Conclusión y bibliografía 69

5 T8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones. 71
5.1 Introducción: Malthus, Moore, ajedrez, par. Zenon 71
5.2 Definiciones: sucesión (vs serie), Turing-descriptiva, termino general (f. generadora) y forma recurrente 71
5.3 Topología: suc. Cauchy, monotonia y alg. de suc. 71
5.4 Progresión aritmética y geométrica (serie, par. Zenon) 72
5.5 Progr. de orden superior: método de las diferencias finitas (suma de cuadrados y cubos) y recurrencia lineal 73
5.6 Aplicación matemática: Fibonacci, Phi, Binet, función generadora 74
5.7 Aplicación matemática: fracción generatriz y suma de divisores (f. divisores) . 74
5.8 Aplicación real: filtro digital FIR e IIR (transformada Z), interés compuesto, aplicación logística 75

6 T9. Números complejos. Aplicaciones geométricas. 77
6.1 Introducción: duelos matemáticos y creer en ficciones 77
6.2 Construcción de C desde R: par ordenado (+,*,.) e isomorfas (binom., polar), entonces (-,:). Malinterpretación 78
6.3 Estructura: de cuerpo, espacio vectorial y álgebra 78
6.4 Números algebraicos. C extensión algebraica de R. Inclusiones 78
6.5 Clausura algebraica y tma fundamental del Álgebra 79
6.6 Fórmula de Euler: dos demostraciones 79
6.7 Aplicaciones geométricas: f(z) isomofismo al grupo de las semejanzas (giros con centro no 0). Epicicloides (Fourier). Cuaterniones 79
6.8 Apl. geom. y anal.: Función holomorfa=transformación conforme. Singularidad (polo). Extensión analítica. Monodromía (Log(z) vs log(z)). Pto de ramificación. Superficie de Riemann 80
6.9 Aplic. geom. y anal.: Plano proyectivo C (Apolonio, Poncelet). Mandelbrot. . . 81
6.10 Aplicaciones al análisis: integración con frac. simples y Laplace (ec. dif.) . . . 81
6.11 Aplicaciones aritméticas: fórmula binet, entéros cuadráticos (ec. Pell) 82
6.12 Aplicación: Hipótesis de Riemann 82
6.13 Aplicaciones reales: electrónica (Tma Thevenin), FIR (Bode) y teoría de control (estabilidad, lugar de las raices) 84
6.14 Aplicación: Física Cuántica 84

7 T14. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces. 87
7.1 Introducción: duelos, ec. 5º grado, algoritmo babilónico, duplicación del cubo (delfos) . . . 87
7.2 Símbolo igual (ident. vs. ec. alg.). Importancia de los ceros. Tipos de ecuaciones en 1 var. alg., racional (f. transferencia) y resolución. Simplificación algebraica. Tma de Richardson (indecible los ceros). . . . 87
7.3 Tmas de Polinomios: del factor (dominio euclideo), de la raíz conjugada (fundamental del álgebra) . . . 88
7.4 Extensión algebraica finita, grado numérico y número construible (Delfos) . . . 89
7.5 Teoría de Galois: ec. 5º y grupo de Galois soluble . . . 90
7.6 Análisis numérico. Tipos (regla de los signos de Descartes) y acotación (Tma de Bolzano) de raices . . . 92
7.7 Métodos: regula falsi, Newton, bisectriz, punto fijo (Cobweb) . . . 92
7.8 Aplicaciones: SGD (red diferenciable, regla de la cadena=retropropagación) . . . 93

8 T15. Ecuaciones diofánticas 95
8.1 Introducción: problema del ganado babilónico, Plinton3-22, Arithmetia. Definición . . . 95
8.2 Ec. diofántica lineal . . . 95
8.2.1 Lineal 2-incog. $Ax+By=C$. Tma de existencia (Bezout) y resolución (Alg. de Euclides, homogénea), restricción a N . . . 95
8.2.2 Lineal Multivariable $A_1x_1+A_2x_2+...+A_nx_n=C$. Existencia y resolución (tipo Bezout). Combinaciones con repetición . . . 96
8.2.3 Sist. de ec.: Tma chino del resto . . . 96
8.3 Ec. diofánticas no lineales . . . 97
8.3.1 Ternas pitagóricas $x^2+y^2=z^2$, Dem. (una par y otra impar) . . . 97
8.3.2 Ec. de Pell (solución=unidad de grupo) . . . 98
8.3.3 Ec. grado>1: diferencia de cuadrados (divisores) y polinómica en una variable (congruencia polinomial) . . . 98
8.4 Ec. diofánticas en la Mat. moderna . . . 99
8.4.1 X problema de Hilbert: conjunto diofántico = recursivamente enumerable 99
8.4.2 Último Tma de Fermat: Tma STW curva elíptica (cuerpo finito) = modular (Fourier) . . . 99
8.4.3 (*) Conjetura de Birch: curva elíptica (sobre Q) y función L . . . 100

9 T17. Programación lineal. Aplicaciones 101
9.1 Introducción: tipo de olivo a sembrar, mantecados y definición (optimización lineal) . . . 101
9.2 Notación espacio (E), conjunto (C), combinación y tma del segmento cvx . . . 101
9.3 Tma de equivalencias cvx (politopo=envolvente=región factible). (*) Tma de los vertices como base . . . 103
9.4 Principio de las esquinas y solución gráfica (NP) . . . 103
9.5 Variable holgura (solución factible básica (Rouche, variable básica, combinaciones). Método del simplex (pivote, casi P) . . . 104
9.6 Aplicaciones mat.: dual (análisis cvx, análogo, teoría de la representación), complejo simplicial (indecible), programación en enteros (dinámica, sólidos platónicos) . . . 105
9.7 Aplicaciones real: red de flujo (Fulkenson), 3 problemas de economia . . . 106

10 T24. Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos. 107

10.1 Introducción: ruido-tunelling, hiperresolución. Definición: aproximar (Normal) y predecir (muertes Covid) 107

10.2 Tipos de interpolación: multidimensional y regresión (superficialmente). Polinómica (Tma de aproximación de Weierstrass) 107

10.3 Funciones dadas en forma de tabla (N=n+1 muestras o n segmentos, grado del pol. de nodos). I. lineal, polin. (comb. lin: bases=xk y coef.=sist. ec. Vandermonde) y spline 108

10.4 I. polin. (¿espaciado cte, N crece?): Hermite (derivada, Tma Chino), Newton (dif. finitas, similar Taylor) y Lagrange (pol. nodos, Tma Chino), Diferencias divididas (recurrente) 109

10.5 Error de interpolación (Pol. Nodos, similar Taylor). Sobreajuste: crecer n no siempre reduce error (TAI) 110

10.6 Extrapolación (error fuera del intervalo) y aplicaciones (Monte Carlo, ... 110

10.7 I. multidimensionales: 1D análisis funcional (min. error, Taylor, Padé, Fourier, NMF), 2D Kriging (campo escalar), KNN, compressed sensing 111

10.8 Aplicaciones: error de integración. Monte Carlo 111

11 T31. Integración numérica. Métodos y aplicaciones 113

11.1 Introducción: función error, áreas. Método de exhaución (complejo simplicial). Definición (int. definida sin primitiva, error deseado) 113

11.2 Fundamentos: int. de Riemann (cuantiza dom. no imag.), interpolación (Newton, divididas y error). Error de integración (f. nodos) 113

11.3 Fórmula del rectángulo (n=0 segmentos)/trapecio (n=1, dif. divididas) y regla del trapecio (n, spline lineal): polinomio, integral y error 114

11.4 Fórmula (n=2, sist. ec. de parábola, i. Newton, 3/8 Newton-Cotes, error creido) y Regla de Simpson (I=(E+4I+2P)h/3) 114

11.5 Int. Monte Carlo (tipos de muestreo aleatorio, importance sampling): maldición de la dimensión, marginalización (datos perdidos) ec. dif.) 115

12 T32. Aplicación del estudio de funciones a la interpretación y resolución de problemas de la Economía, las Ciencias Sociales y la Naturaleza. 117

12.1 Introducción: mal suposición (modelo covid) o estudio, Leibniz (función, variable), Euler (f(x), continua-derivable) 117

12.2 Función (suavidad, tabla, algoritmo y gráfica (no siempre posible)). Objetivos del Análisis: estudio de funciones (ceros, ...) con herramientas (derivadas,..). Optimización (Fermat, PL, compromiso) 117

12.3 Análisis Dimensional. F. sencilla.: cte, prop. (rel. general, Ohm), lineal (oferta), abs (rectif. f. transf.)..., pol. (Kepler, filtro, potencial=6 grados), pot. . log. (Weber, entropía, 6 grados), exp. (Moore, radiact.), period. (Fourier) . . . 118

12.4 Física e Ingeniería: parábola de seguridad (leyes de Kepler), cálculo de variaciones (coordenadas generalizadas, determinismo, robótica), circuito RLC (fasor, laplace, PID), ec. del calor (Fourier, Schroedinger) 119

12.5 Química y Biología: velocidad de reacción (dA/dt=kA2), función logística (analógico, exp.-lin-log, NN, Malthusianismo) 120

12.6 Economía, Psicología y Sociología: oferta-demanda (equilibrio), Weber (máximo suave, dB, JND, ley mu, oscilación térmica, coeficiente de variación), epidemia (rumor, innovación, f. logística) 121

12.7 (*) Ecuaciones diferenciales 122

13 T46. Distintas coordenadas para describir el plano o el espacio. Ecuaciones de curvas y superficies 125

13.1 Introducción: posicionar en la tierra, robótica, mapa de contacto, micrófono. Geometría analítica 125

13.2 Equipolencia (libre). Esp afín y euclideo. Sistema de coordenadas (origen, base, eje o linea y punto de coordenadas). Cambio de base. Base ortonormal (cuadrantes). Transformaciones rígidas 125

13.3 Coordenadas: en plano (polares) y en espacio (cilíndricas y esféricas). Son CCO 126

13.4 Curvas en plano. Curvas Algebraica: cónicas, astroide, elípticas, folium, ampersan, ciertos epicicl. y lemniscatas. Epicicloides: cardiode (engranaje, Mandelbrot), braquistocrona (paramétricas). Espiral áurea (romanesco,nautilus). Tactriz (pseudoesfera). 127

13.5 Curvas en espacio: circunferencia, hélice (fórmulas Frenet-Serret) y hélice espiral 127

13.6 Superficies en espacio: plano, cono, cilindro y esfera. Cuádricas (revolución y reglada): elipsoide, paraboloide, hiperboloide 128

13.7 Coordenadas curvilineas ortogonales (linea coordenada), factor de escala (tensor métrico). Elementos diferenciales para integrales de medida, análisis vectorial y geometría riemanniana 128

13.8 Más aplicaciones: heurística de simetría. Robótica (epiciclos, cambios de base). Dipolo (r»d). Armónicos esféricos: Cuántica (orbitales), beamforming (cardiode). Coordenadas homogéneas. 129

14 T47. Generación de curvas como envolventes. 131

14.1 Introducción: parábola de seguridad, arcoiris y cardiode. Cáustica. AM y transformada de Hilbert (no). 131

14.2 Orden de contacto, circulo/plano osculador (circunferencia=0, derivadas 1º y 2º) y curvatura (acel. centrip., tensor, C2) 131

14.3 Envolvente de una familia de curvas: sistema f=0, f'=0 132

14.4 Cónicas como envolventes: circunferencia (no hay), elipse (sale del F y rebota en circunferencia), parábola (del (P,0) en ordenadas), hipérbola (triángulos con A=cte) 133

14.5 Evoluta (normales y osculador, astroide para elipse, Tma de los 4 vértices) e involuta (espiral de Arquímedes, desenrollado, engranajes de Euler) 133

14.6 Aplicaciones: superficie desarrollable (banda de Moebius, esfericón y Tma Egregium). Esfericon (triángulo Reuleaux). Precesión de Mercurio. Levas, Reuleaux y engranajes (suavidad) 134

15 T50. Introducción a las geometrías no euclideas. Geometría esférica. 135

15.1 Introducción: V postulado (consistencia). Jaiyyani1000. geometrías no euclídeas (según nº de paralelas) 135

15.2 Geometría esférica: circunferencia mayor (geodésica), menor (mediatriz) y ángulo (espacio tangente). Tma de Pitágoras esférico (R a Inf.). Tma de Girard (exceso esférico) 135

15.3 Geometría hiperbólica: 4 modelos (pseudoesfera, disco/semiplano de Klein/Poincare). Tma increible y de Pitágoras (senh). Tabla: rectas (nº/equidistancia de paralelas, cortes), trángulos (ángulos/semejanza), ángulos (opuestos congruentes) . . 136

15.4 Geometría riemanniana: tensor métrico (geodésica), casos de curvatura (C2) cte y +/- (= elíptica e hiperbólica). Relatividad general (proporción G y T) . . . 137

15.5 Geometría diferencial y de curvas. Fórmulas de Frenet-Serret (k,t)=(curvatura,torsión), hélice ((5,2) proteina, paso de tornillo) y circunferencia (5,0) 138

16 T54. Las cónicas como secciones planas de una superficie cónica. Estudio analítico. Presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica. 141

16.1 Introducción: jardinero, planetas, Apolonio de Perge 141

16.2 Definiciones: truncado de superficie cónica (casos). Otras: envolvente, locus, variedad algebraica (soluciones a 2 cuerpos) 141

16.3 No girada y centrada: figura (a=eje mayor horizontal), Pitágoras (c=|OF|), locus, ec. reducida y paramétrica. Excentricidad (e=F/a), latus (l) y directriz (d), relación polares (e,l) y locus (e,F,d) 142

16.4 No centrada: coef. de las 4 ec. polinómica (a=eje mayor vertical). Girada: matriz, cónica proyectiva. Invariantes (proyectivo |M|, discriminativo |M33| y lineal tr(M33)), diagonalización y discriminante (-4M33, tipo) 143

16.5 Espacio tangente de cónicas: Tg. dado un P: 1) vector tg paramétrico (grad. y esp. tg.), 2) haz de rectas discriminante=0, 3) Polar (P sobre cónica). Tg. dado v. director (determinante de ec.=0) 144

16.6 Lugares de referencia (centro, ejes, vértice) del gradiente=0 144

16.7 Aplicaciones en Plano Proyectivo (PP): Tma de Pascal (K33, PPR, ajuste a 5 ptos con método de las rectas). Problema de Apolonio (circunferencia tangente a 3, GPS y errores), Tma de Cierre Poncelet (rayo por elipse interna, PPC) . . . 145

16.8 Aplicaciones reales: Parábola de seguridad (Leyes de Kepler). Precesión de Mercurio. Arte (proyección, cuadricas torre Kobe). Leva y antena parabólica. . 145

17 T55. La Geometría fractal. Nociones básicas. 149

17.1 Introducción: romanesco y bosque, viajar en ciudad, costa (replantea medir e integrar). Definición: (autosimilitud afín, DHB>DTop, Clase C0). Función de Weierstrass (camino aleatorio) y Tamiz de Apolonio 149

17.2 Teoría de la medida: positiva, vacío e unión. Medida de Lebesgue (intervalo, no fractal) y Hausdorff (bola, delta y s, no Vitali): recubridor. 150

17.3 Dimensión fractal: intuición y DTop<DHB<DHom<DEucl. DHom: -log(N)/log(r). DHB=s del 0 al Inf. 151

17.4 Famosos: conjunto de Cantor (0.63, ¡mu(F)=0 pero incontable, compacto! base3, polvo y f.). Curva de Hilbert (2, cubre plano), triángulo de Sierpinski (1.58, area=0 perímetro=Inf., triang. Pascal, R90). Bretaña ([1,2] regresión lin.). Camino aleatorio ([1,2] Wiener) 152

17.5 Sistemas dinámicos. Conjunto de Mandelbrot: z=z2+c, varia c y en Julia z0 (|z|<2, DHB=2, conexo y compacto, cardiode, recursividad). Aplicación Logistica: x=rx(1-x) (Malthus r[0,4], Cobweb y bifurcación con DHB=0.53, Feigenbaum 4.7, Caos, 3 cuerpos) 153

17.6 Aplicaciones: si autosimilitud. Explicar (caos, seis grados, v. percolación). Optimizar (árbol, pulmón, rio, antena). Graficar (Pollock, videojuegos, comprensión). Clasificar (proteinas). 154

18 T57. Usos de la Estadística: Estadística descriptiva y Estadística inferencial. Métodos básicos y aplicaciones de cada una de ellas. 157

18.1 Introducción: Biometria (hijo alto), ciencia empírica (epist.), catador, CIS e INE, ... 157

18.2 Fundmentos: población, muestra, nivel de confianza. Modelo estadístico (generativo, Riemann, estocástico). 157

18.3 Estadística (sentencias con un nivel de confianza). 4 objetivos: obtención, describir, inferir, modelar. Obtención de datos: muestra representativa 158

18.4 Estadística (no) paramétrica: modelo (independencia), poder, características, media (mediana), t-Student (Wilcoxon) 158

18.5 Estadística descriptiva: estadístico descriptivos (central, dispersión, forma) y visualización de datos (Ascombe, histograma, cajas) 159

18.6 Estadística inferencial: frecuentista (estimación, intervalo de confianza, contraste de hipótesis, estimación complicada según f. perdida), bayesiana (actualización, MLE) y Solomonoff (TAI) 159

18.7 Entrenamiento o modelado: regresion (de mínimos cuadrados). Diseño experimental o aprendizaje automático 160

19 T58 Población y muestra. Condiciones de representatividad de una muestra. Tipos de muestreo. Tamaño de una muestra. 161

19.1 Introducción: ¿tamaño muestra? para (proporción de votantes (A,B) o de infectados o testear clasificador binario) 161

19.2 Población y Muestra. Cardinalidad. Gastos de muestro (control de calidad). Condiciones de representatividad: aleatorio, grande y rápido. Ej: Validación Cruzada, Test. Base de datos 161

19.3 Tipos de Muestreo (reposición): Aleat. (Monte Carlo): simple(=importante), sistemático (=Nyquist,rueda), estatificado (conocer ricos/pobres+simple, val. cruzada), conglomerado (partición dada). No Aleat.: conveniencia, nieve (exponencial, encuesta), cuotas (estrat.+conven.). 162

19.4 Teoría de la estimación: estadístico vs estimador (latino, tunnelling) vs parámetro (griego). Tipos: puntual, intervalos (tamaño) y bayesiana 163

19.5 Media, cuasivarianza y varianza muestral. Media y varianza de un estimador puntual (de media/(cuasi)var. muestral). Distribución muestral: de estimador. Transformando VA. Normal casi todo, T-Student desconoces sigma2, Chi2 var. (suma2) tipif., F-Snedecor var1/var2 164

19.6 Característica de buen estimador: Centrado (cuasi/var. muestral y autocorr.s si/no). Eficiente (min. var, Cota CR, autocorr.s). Tma de la consistencia (converge en prob., des. Tcheby, MediaSesg/RangoMe si/no). Robusto (atípico). Ce y no-Co: RM. no-Ce y Co: MS. no-Ce y Ef: autocorr sesg. 165

19.7 Tamaño de una muestra (n) e intervalo de confianza (e) de un estimador Tn equivalentes: Media y proporción muestral (votos): 1) P(T-e<Tn<T+e)=c. 2) Tipificar. 3) Tabla. 4) Despejar n o e. T-Student si desconoces var. 166

19.8 Conclusión. 167

20 T59. Técnicas de obtención y representación de datos. Tablas y gráficas estadísticas. Tendenciosidad y errores más comunes. 169

20.1 Introducción: base de datos y presentar resultados (paper o prensa). Etapas de una investigación estadística: definir objetivos (confianza, hipótesis nula), planificar y muestrear (aquí), analizar y presentación (aquí) 169

20.2 Base de datos (tono, acentos y PPI). Tipos de variables estadísticas. In/dependiente. Cualitativa nominativa (1HotVec)/ordinal, cuantitativa continua/discreta. Lógica, numérica y carácter. Rango y dimensión. 170

20.3 Técnicas de obtención de datos. Gastos de muestreo (control de calidad). Planificación: variables (abiertas), rango, cuanto, tamaño, diseño exp., contacto previo. Obtención: encuesta (social), personal (guiado), automático (web, Nyquist). Tipos de Muestro. Depurar e informe. 171
20.4 Visualización de datos (big data, cuarteto de Anscombe). Pautas de gráficas y tablas: orden de datos, ejes proporcionales o semilog, oŕigen, unidades, títulos, leyendas claros 171
20.5 1D. Tabla: Distribución de frecuencias (vs prob.): alturas (var. estad.), intervalo (cuantización mu), categoría, frecuencia absoluta y relativa acumulada. Gráficas: histograma/diagrama de barras (cuant./nomin. interpol.), pictograma (nomin. tendenc.), diagrama sectores y cajas. Estoc. (señal) 172
20.6 2D Tabla: de contingencia. Gráfica: diagrama de dispersión (Anscombe), de barras 3D. Biología: pirámide poblacional, dendograma. Estoc. (espectrograma) 172
20.7 Errores de representación: Involuntario: gráfica sin sus pautas. Tendencioso: área pictogramas, orientar 3D círculo, eje-y (origen y comprime crece menos, menospreciar vs recalcar), eje-x (intervalos de cuantización crece más) 173
20.8 Otros errores: Obtención: muestra no representativa, personal (encuesta autoinfluyente), automático (sensor saturado) depurar. Modelo (sobreajuste, endogeneidad) validación cruzada. Inferencia (sesgo, confianza baja) 173

21 T60. Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades. 177
21.1 Introdución: dispersión de notas, voz de mujer, oscilación térmica. Parámetro o estadístico descriptivo. Medida central (situar media), dispersión (igual media distinta varianza), forma (bimodal) y de dependencia (estad. vs estoc.) 177
21.2 5 propiedades de Yule de un parámetro: objetivo (fórmula), sencillo (formula elegante), interpretable (descriptivo), eficiente, robusto. También adimensional y transformable afín 178
21.3 Parámetros básicos: Media: conv. abs., Cauchy: cte, acotada, afín (media de suma)). Varianza (conv. si <Inf: positiva, pŕactica (E[x2]-mu2), transf. homot.2). Momento: conv. según r impar, rel. no/central (bin. Newton), param. (m0, med. m1, var. mu2, asimetría mu3, curtosis mu4) 178
21.4 Espacio Lp. Medidas como cálculo de variaciones en Lp (minimizar divergencia en Geom. Inform.): L0 razón de variación (1-fm/n, 3 bebidas, IVC simple)/moda (única para nominal, multimodal), L1 desv. abs. media/mediana (única ordinal, robusta, sal-pim. mediana geom.), L2: desv. tip. (interpretable, unidades, homot.) /media (baricentro), LInf: desv. max./rango medio (no eficiente ni robusto, simple, MVUE). 179
21.5 Otras: Central: M media cuadrática Q (<>0, rms, Parseval), armónica H (>0, proporc. y robusta), geom. G (idem, log), prom. intercuart. (media datos de q2,q3, robusta, diagr. cajas). Dispersión: coef. disper. cuartil (q3-q1/q3+q1, adim. robusto, f. impacto), coef. var. (adim. Weber), entrop. inform. (IVC complejo, código), apertura (xmax/xmin, no robust, EBC). Forma (respect. Normal): asimetr. (mu3/s3), curtosis (mu4/s4-3, leptoc.). Depend: covar./corr. cruzada. P1: H<G<M<G. P2: si simetr. M=mediana=moda 180
21.6 (*) Medidas de tendencia central 181
21.7 (*) Medidas de dispersión 182
21.8 (*) Características de forma 184
21.8.1 Otros 184

22 T61. Desigualdad de Tchebyschev. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos. 185

22.1 Introducción: 5-sigma, máquina de Galton. Común de: l. grandes num., tma dorado de bernoulli y tma consist (tcheby y convergencia en probabilidad) . . . 185

22.2 Variable Aleatoria: variable aleatoria y transformación 185

22.3 Desigualdad de Markov: X, a>0, rel. f. distrib. y media, dem. (con FDP o con variable indicatríz), salarios. Des. Tchebyschev: rel. i. de confianza, media y var., dem. (Markov con a=ks, g(y)=(x-mu)2, regla del pulgar y significación, stock. 186

22.4 Ley de los Grandes Números: débil (Xn converge en prob. a mu, no iid, Dem. Tcheby), fuerte (Xn conv. casi seguro a mu, iid). Tma del Límite Central (Zn conv. en distrib. a N(0,1), iid, Cauchy conv. a Cauchy, máquina de Galton) . . . 187

22.5 Proceso de Bernoulli (caso ley grandes num. débil): señal (0,1)s, B(Fn;n,mu=np,var=npq). Tma dorado de Bernoulli (caso TLC): Fn/n conv. prob. a p (proporción muestral), dem. con Tcheby. Tma Moivre-Laplace (caso de TLC): B(k;n,p) conv. distr. N(x=k,mu=np;var=nqp), Dem. Stirling. Tma Consistencia (dem. Tcheby) 188

22.6 Coeficiente de variación (adim., Weber). Variable normalizada (Zn, TLC). Aplicaciones: tamaño de muestra e intervalo de confianza 189

23 T62. Series estadísticas bidimensionales. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos. 191

23.1 Introducción: Forma de la tierra. Gauss predice Ceres (planetoide del cinturón Marte-Jupiter) sin Kepler. Modelo de Lenguaje (música) 191

23.2 Serie bidimensional: muestro de var. aleat. (X(t),Y(t)). Tipos: estad. (espacial, altura-edad), estoc. (temporal, voz ruido), ambas (voz), ninguna (2 monedas). Notación: xi,yj (nominativa) y nij,fij (frec. abs y rel.) 191

23.2.1 Representaciones: diagrama de dispersión (VA o n^o, Ascombe), tabla de contingencia (nominativos, votos según sexo, distr. conjunta, marginal, condic. y total), barras 3D. Estoc.: espectro/cocleogram. 192

23.3 Coeficiente de variación: [0,1], entendible, adim., invar. homot, no afín. Weber, ¡mu=0!. Variable tipificada: z=[-1,1],mu=0,s=1, comparar (entrenar, umbralizar) tablas, adim. no homot., Pearson, TLC, tam. muestra, i. conf.. Ej: bombilla (control calidad), n^o CI>130 193

23.4 Covarianza: depend. +/-, momentos bidim. (E[xrys] mu11=Sxy, mu10=mx), m. covar (Normal) y Pearson (Tipif). Correlación cruzada: autocorr. sesgada, tipific., estacionario (R(t1-t2)=R(t), Wiener-Khinchin), ergodico (caminos aleatorios) 193

23.5 Regresión a la media: altura hijos. R.: hipersuperf., pol. Vandermonde, aprendizaje autom (predecir, clasificar) o diseño experim.. R. Lin: plano, sist. sobredet. y forma cerrada MMSE (XtXw=XtY, m. covar.), otras normas Lp: desviación abs. Tma Gauss-Markov (BLUE) 194

23.6 Método de los Minimos Cuadrados: 2 rectas, Y=Xw (coord. homog., regr. lin. desarrollo a y b). Coef. Pearson ro=vxy/vxvy (desarrollo), si ro=0 puede otra depend. (Anscombe). Prueba R. ro=f(T-Student)=>EC 195

23.7 Malentendidos: correlación No Implica (NI) causalidad (calentamiento global), corr. NI corr. lineal (dependencia lineal) Anscombe (4 con igual mu, var y ro) . 195

23.8 Aplicaciones: linealizar ley (paradoja de la costa, cte gravedad y=0.5gt2), regresión logística, aprendizaje automático 196

24 T63. Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico. 199

24.1 Introducción: ¿significado de P(algo)=0.3 si a) realizar inf. veces, sucesos infinit., acepciones (creencia, f. rel.)? 199

24.2 Experimento: Determinista: predecibe Bajo las Mismas Condic. (BMC) (laplac. comput.). Aleatorio: conoces poblac. pero no predecible BMC, debate construct. (impregna la Ciencia). Pseudoaleat. (caos, gen. lin. congr.). Teor. Prob. (impregna la Ciencia): 1) def. prob. 2) uso y 3) fundam. estad. Teor. Prob.: 1) def. prob. 2) uso y 3) fundam. estad. 199

24.3 Suceso elemental (exp. aleat., suc=estado-entrop.). Espacio muestral (población). Evento (op. lógico). Sigma-Álgebra (conj. pot., event, clausura: vacio, completo, unión), seguro/imposibe, Borel. Álgebra de sucesos: conj. con ocurrir (in, subset) (N, O, Y incomp.) (dif. sim., Morgan, incl.-excl.) 200

24.4 Interpretaciones de prob.: Física/Bayes. Laplace (bayes): CF/CP, autorr. (princ. indif.), finita (par. Bertrand). Frecuentista: lim, impracticable, autorref. (varianza de la estimación en prob.), físicos creen en matem. Ley del Azar. Subjetiva (bayes): creencia, sist. formal (actual. fuzzy). 201

24.5 Probabilidad axiomática de Kolmogorov: engloba 3 anteriores. Espacio de Medida (Omega,Sigma,mu), esp. medible vs métrico (2 primeros vs topol.), 3 cardin. Espacio probabilístico: esp. med. con medida 1: positiva, certeza-1, unioń-suma. Prob.=Medida=Aplicación 203

24.6 Consecuencias de Kolmogorov: vacío, contraria, isotomía (A subset B, P(B-A)=P(B)-P(A)). Principio de Inclusión Exclusión (recuento): S1-S2+... dem. visual, desarreglos. Des. de Boole: caso S1=P(AuB)<P(A)+P(B)(dem. medida subadtiva visual). Des. Bonferroni: P(union total)<,> Suma truncada Si en k(impar,par). Casos k=n,1 son PIE y Boole 204

25 T64. Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes. 205

25.1 Introducción: P(par|>3). Prob. de Lechin. Vuelta bayesiana OK según Teor. Prob. 205

25.2 Definiciones: espacio probabilístico 205

25.3 Probabilidad condicionada: 2 defin: Laplace (area,arbol) vs axiomática (P(AyB)/P(B)). (Omega,SB,PB(A)) forma un espacio probabilístico (dem. sigma-alg., prob. y marginal total 205

25.4 Probabilidad compuesta o conjunta: regla de la cadena (se van términos), no confundirla con condic. en árbol. Unión: princ. incl.-excl. 206

25.5 Independencia: P(A/B)=P(A), colorario P(AyB)=P(A)P(B). Covar. vs indep: prob. estad y estoc. Incompatibilidad: colorario P(AoB)=P(A)+P(B). Indep. vs incomp: prod. vs suma. Ej: P(ParyImpar)=0.25 vs 0 (2 vs 1 tirada) 207

25.6 Probabilidad complementaria condicional: P(nA|B)=1-P(A|B) (de def+visual o de espacio condicional). Independencia de complementarios: si A,B indep nA,B indep pues P(nAyB)=P(nA)P(B) etc. 207

25.7 Prob. Total: sist. suc. incomp. compl., anal. funcional, dem. (A=U(HiyA)). Distribución Marginal: P(Ai)=sumj P(AiyHj) Marginal Total: sumi P(AiyB)=1. Tma Bayes [1730,Laplace1814]: posterior=apriori verosimilitud/total. 208

25.8 Inferencia bayesiana [Laplace1814]: metodo iterativo, mejora a más evidencias. Sentido común reducido a cálculo (Laplace). Epistemología. 208

25.9 Aplicaciones: Vuelta bayesiana (pelo largo, voz, lechín). Actualización bayes.: proporción bayesiana (con COVID) mejor que muestral, modelo binomial. Amanecer (proc. Bernoulli, condicional temporal). Pavo inductivista (falsac. y reproduc.). Paradoja del falso positivo 209

26 T65. Distribuciones de probabilidad de variables discreta. Características y tratamiento. Las distribuciones binomial y de Poisson. Aplicaciones. T66. Distribuciones de probabilidad de variable continua. Características y tratamiento. La distribución normal. Aplicaciones. 211

26.1 Introducción: distribución >1 (unif.), sin media (Cauchy) y sin ella (Cantor). Convergencia en distribución 211

26.2 Función medible (preimagen también). Sigma álgebra de Borel (unión de intervalos R). Variable Aleatoria (aplicación de espacio medible (sucesos) a Borel (n^o)), realización. var. estad. (cuantitativa, continua/discreta, ej. indicatríz, entropía) 212

26.3 Función de distribución acumulada: no-decreciente, continua dcha, P(interv), 0 y 1. Distribución de probabilidad (med. prob. de Borel), f>0, int f=1. (mod. est., hipersup., distr. frec. Caracterización de VA: continua/discreta si hay FDP (int-Lebesgue,derivada)/FMP. Notas: FDP>1, Cantor 213

26.4 Parámetros (media, varianza, momento, conv. abs. Cauchy). Función Generadora de Momentos (Laplace E[etX], no central mr=der-r(0)). Función característica (Fourier E[eitX], mr=der-r(0)/ir. Análisis funcional 214

26.5 Transformación de VA: Ley del estadístico inconsciente (Y=g(X), media y var de transf. afin en estimac.). Álgebra de VAs: suma: (convol.), media y var (covar), distr. estable (Normal, Cauchy), TLC. producto: independ. 214

26.6 Distribuciones famosas: demostrar media, varianza (de FGM) y completitud=1. Binomial: P(np, npq, Fisher n/pq, meso p=.5) U(monedas, entropía formas, prop. muestral/bayes. Covid, Tma Moivre). Poisson: P(l,l, lepto), U (n^o radioct en I, pg. ADN, a Binomial). Normal: P(mu,s,68 inflex-pulgar, estable, tipif. Z, f. error), U(biometr. (CI,altura-log), geogr. lluvia, Galton error (regr., calidad), ruido, TLC, Curtosis). 215

26.7 Otras distribuciones: Uniforme (n^o normal,>1,tanque,MATN), Chi2 (gamma, suma cuadr., var. muestral tipif), T-Student (media mu. con cuasiv. mu. desconces var.), F-Snedecor (cociente de var. tipif.) 218

27 T67. Inferencia estadística. Test de hipótesis. 219

27.1 Introducción: entrenem., contraste de hipótesis (si pocas muestras, precisión de Mercurio o prueba controlada), presución de inocencia 219

27.2 Definiciones de estadística inferencial: var. de estim. y eficiencia. Función de verosimilitud: L(Mod;Datos) no es prob. condic., para estimación Bayes, entrenar y contraste 219

27.3 Geometría de la Información: geom. dif. y anal. cvx por Información de Fisher (I=varianza de la log-verosimilitud, aditiva, ej. I(mu-Normal)). Cota Cramer-Rao: Var(T)>1/I (ej. media muestral) 220

27.4 Estimador frecuentista MVUE: si Var[T]=CR => MVUE (recíproco no). Si Normal, media y var. muestral, si Uniforme rango medi. Si Uniforme Tanque alemán: N=muestra mayor mas el hueco promedio. MSE=Var[T]+Bias[T]2, rel. con Gaus-Markov, Cota-CR y MVUE 221

27.5 Estimadores bayesianos (min. E[posterior], no MVUE, entrenar). MMSE: min MSE equiv. E[T|y] (Imputación, Peinado). MAP: max poster. Caso MLE: max Log-Binomial da p=k/n. AIC (TAI). Método de los Momentos (sist. ec. de momentos muestrales) 222

27.6 Hipótesis nula: simple, rechazable, con no (catadora de te, primalidad, vacuna). Contraste de hipótesis (=red. absurdo, si pocas muestras). Aceptar es en verosimilitud. Tipos (bilateral) 223

27.7 Clásicas: H0 a rechazar: media creida=muestral. Prueba Z (tiempo ocio): estadístico de contraste (tipif., T-Student), región de aceptación, decisión. Prueba Binomial (catador): valor-p (marginal de cola), rechazar H0 si < alfa 224

27.8 Otras pruebas. De dependencia/ajuste: Chi2 (nominal, tab. conting., col. mueve como total). Regr. (H0:r=0, r=T-Student). De diferencia de medias: Wilcoxon (H0: dif.=0, muestra relacional, 7000 muestras). T-Student: var. y tam. muestra diferente. ANOVA: (análisis de varianza, comparar medias >2 poblac.). Jarque Vera: curtosis y asimetria como Normal 225

27.9 Tabla: rechazo ok=conf., falsa alarma=errI, desaparecido=errII=beta, acierto=poderestad (no-param. tiene menos). Compromiso ErrI-II (inocencia, ROC y detec. señal). Lema de Neymam-Pearson (hip. simples, rechaza H0 si razón verosimilitud R=L(T0|X)/L(T1|X)<k, donde P(R<k|H0), test unif. de max pot. 226

27.10 Aplicaciones: Presunción de Inocencia (sistema judicial vs médico). Clasificación Binaria: exactitud, precisión, sensibilidad y especificidad. Cl. estúpido (Curva ROC y AUC) 227

28 T68. Aplicaciones de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades del estudio y toma de decisiones en problemas de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. Evolución histórica. 229

28.1 Introducción: Juegos de azar, biometría, INE 229

28.2 Historia de la Probabilidad 229

28.3 Historia de la Estadística 230

28.4 Juegos de azar (Teoría de juegos). Partida interrumpida (futuro), apuesta de Pascal (calentamiento global). Cadena de Markov (=camino aleatorio), prob. ganar=pr. geom.. Proceso de decisión de Markov y HMM. dilema del prisionero. 231

28.5 Entropía física=f. aritmética suma. Teoría de la información (código de Huffman). Aritmética: tma primos, test primalidad 232

28.6 Error de medida (=máquina Galton=Normal=TLC). Corrección: datos perdidos+modelo de lenguaje+Viterbi. Regresión (lin. ley.) 232

28.7 Estadística científica: regla del pulgar, presentación de resultados, factor de impacto (cuartil). Inductiva: actualización bayesiana. Contraste de hipótesis: detección de señales (errorI-II). 232

28.8 Investigación operativa. Teoría de la decisión estadística: función de pérdida (infer. frec. vs bayesiana). Regla de decisión (minimax, estimador de tono). Intervalo de confianza vs MMSE o MAP. Estimador de James-Stein (Tma Gauss-Markov). 233

28.9 Control de calidad (error común vs especial, bombilla coef. variación). Diseño experimental (var. explicativa y respuesta). Experimento factorial (ANOVA, Regr.): Y=producción de olivo, X=riego,abono,corte, niveles=+,-, 8 factores. Modelo: Y=f(X1,X2,X3) 235

28.10 Biometría (CI var. tipificada, medicina de precisión, genética de poblaciones, alineamiento de proteinas). Ciencias sociales (CIS, INE, prop. muestral, actuarial y bolsa ARMA, paternidad de obras de arte) 235

29 T11. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Estructuras algebraicas. 237

29.1 Introducción: común de Lógica, Probab. y Conj.=conj.; común de composic. func. y prod. m.=monoide (EA). Seguridad de Gauss (C) 237

29.2 Teoría de conjuntos (fund. mat., conj. bien def.). Pertenencia, sub/superconj. im/propio. Producto cartesiano (par ordenado, n-tupla, digraf., coord.). Cardinal. (inyectiva, conjunto potencia, in/contable). 237

29.3 Álgebra de conjuntos=Alg. Boole (Y,O,No): 1) diagrama de Venn=f. boole (minterms) 2) Simpl.=Karnaugh 3) F. indicatriz=f. boole. Dif., Morgan. Producto vacío. Incl.-excl. (Cardinal.) 238

29.4 Paradoja Russell (subconj. propio y teoría de tipos). Axioma de elección (no construct.). Hipótesis del continuo (Banach-Tarski, lema de Zorn).. Hipótesis del continuo 239

29.5 Retículo (asoc., conmut, idempot., absorción), álgebra de Boole (ret. distr. comple.) y teoría unificadora 239

29.6 Estructuras Algebraica (op. in/externa, clausura). Abeliano (conmut., prod. m.), Subconjunto por la izquierda (de op. no-conmut, ideal). Semigrupo (clausura+asociativa>monoi unitario) 241

29.7 Estructuras Algebraicas: jerarquías de inclusión. Grupo (asoc. simetr. neutr., (Z,+), (Zn,*) mod, GL(n), EV+). Anillo (+abel, *semig. +*distr., (M,+,*), (Zn) ciclic., (K[x]), pol.=dom. eucl., ent. alg.), Cuerpo (*inv. o 4 op. alg. (Q o C,+,*), c. finito, num. alg.). EV (K[x], Esp. Hilbert). Álgebra de Boole y sobre un Cuerpo ((C,+,.,*), prod. vect., cuatern.) 241

29.8 Relación N Aria (algor. unaria). R. binaria (subconj. del prod. cartesiano, g. bipartido). RB heterogenea: Correspondencia (jfun, prod. con escalar). Aplicación: (1 imagen, co/dominio). Función: n^{o}. Biyectiva (E1 x), inyect. (f(x1)=f(x2)), sobrey. (E1 o más x) 242

29.9 Teoría del orden (=RB homogenea): Preorden (refl. y transit., <=, preferencia). Poset (antisim. reticulo divisib. o bool.). Orden total (G. conexo, <, N conj. más peq., Z no acotado, Q denso, R conexo). Bien ordenado (min incluso para el total, N, pero Z o R no) 243

29.10 Relación binaria de equivalencia: refl. trans. simetr. Clase de equivalencia (representante/proyección canónica). Conjunto cociente. F. bien definida respecto RBE. Ej: rel. congr. (reloj), var. lin. (y Kernel, EC=planos paralelos, dimens) y subg. normal (RC= 2 clases laterales). 244

29.11 Homomorfismo: aplicación lineal entre EA del mismo tipo. Isomorf. expon. de grupos: (R,+) y (R+,.) (op./dom. distintas). Kernel y Tma fund. homom.. Clasificación (Venn): iso/mono/epimorf. y endo(dom.-imag. iguales)/automorf (iso). Ej: Apl. Lin. (base/l.i./s.g.) y (isom. grafos, autom.=compl. conj., mono/epi de tmas isomorf.). Teor. represent. (busca h.) 245

29.12 Algebra Abstracta vs Teoría de Conj. 246

30 T12. Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía. 247

30.1 Introducción: común suma fuerzas y polin., rotaciones y op. cuántico 247

30.2 Espacio Vectorial sobre un K (vector, inf-tupla, +,. correspondencias). 8 propiedades (4 grupo abel., 4 f-mod. (.pseudoasoc,.mod,+.distrib,.+distr). Ej: todo cuerpo como C, esp. Hilber (Fourier), pol. K[x], conj. fuerzas sobre un pto. SubEV: c.l., (var. lin. no) 247

30.3 Subespacio vectorial: c.l. (alfa in K); inters. y suma si, unión no; improp. 0 y total; kernel si, var. lin. no; ideal, subg. normal; poset. Independencia lineal: c.l.=0. Sistema generador S de SubEV V: v=c.l.(si); V pequeño; V=Span=clausura. Base: s.g. y l.i. ; canónica; unicidad y dim (lema Zorn). Coordenadas: unic. (red. abs.) 248

30.4 Variedad Lineal: 1) Var. difer. lin.: L:3x+5y=8 (hiperpl. es un caso). 2) Var. alg. lin.: sol. SCI Ax=b (L:x=xp+U, U=Ker(A)=subEV). 3) SubEV afín: L=a+U (generado, dim(L)=d(U)). 4) Clase de equiv. L=[a] (rel. subEV (de equiv): xRy si x-y in U). 249

30.5 Aplicación Lineal: homomorf. EVs. Matriz de transformación T ej: col-i=f(base-i). Estr. Alg.: (T,*)=grupo lineal general, (T,+)=EV. Ej: Geom: invar. origen y colinealidad (proyec., afin y semenjanza, c. homog.), Anal.: comp. f. lin., op. lin. (deriv. e int., cuańtica), Estad.: media. 250

30.6 Imagen: <f(bi)>. Kernel: subEV (dem.: cerrado c.l. y 0v). Tma rango-nulidad (d(ImT)=rg(T), dem.: V=um+wb=b-Ker+b-ext, Tb-ext s.g. y l.i.). Tma de EV isomorfos (dim). Espacio cociente (RelSubEV) y d(V/U)=dV-dU. Complemento ortogonal: V/U isom. CO(U) 250

30.7 Clasificación de las aplicaciones lineales: bi/in/sobreyect. y no-apl., iso/mono/epimorf., Tma rango: d(V)=d(W)/d(Im)=d(V),d(kerf)=0/d(Im)=d(W). Base/l.i. (dem. Ker(f)=0)/s.g.. Homomorf./incrustado/proyec. 251

30.8 Tmas de isomorfia (extendible con subobjetos). 1) Tma rango nulidad V/Kerf=Imf: dem1 (TRN+d(U/V)+Isomf EV dim), dem2 (descomposición canónica f: proyección c.+biyec+insec. c.; proyec. c=rel. Kerf en homomorf.), dem3 (tma fund. homomorf.). 2) Tma suma inters (N+H)/N=H/(NyH) form. Grassmann y suma directa. 3) Tma del cociente V/H=(V/N)/(H/N) 253

30.9 Aplicaciones: Teoría de la representación. Conjetura de Hodge 254

31 T69. La resolución de problemas en Matemáticas. Estrategias. Importancia histórica. 257

31.1 Introducción: ad hoc vs resolvedor de problemas (ciertas clases si) 257

31.2 Tipos de problemas: bien definido (3 condic Hadamard, existe, 1 sol. y estable. Problema inverso: proyeccion inv.. Ejercicio vs problema (analogía vs tiempo desconocido). Incognita-datos-ecuación (relacionar variables, resolver ec. dif.) vs demostrar (elegancia) 257

31.3 Método hipotético deductivo (complejidad infinita), NP (irreducibilidad Wolfram, fuerza bruta). Creatividad o pensamiento lateral: pr. aritm. gauss, unir 3x3 ptos. Matemáticas recreativas: Rubik (NP), ... 258

31.4 Estrategias generales: método de Polya45. Comprender: objetivo (propias palabras, dibujar, datos-incognita, no malinterpretar, continuar). Planificar: proyecto, ciega la inteligencia, creatividad Witten. Ejecutar: paciencia, ambiente, heurísticas. Aprender: aunque fracase. (*) Redactar e iterar (met. cientif.). Otras: TRIZ, Brainstorming, Mason88: abordaje, ataque y revisión 259

31.5 Técnicas de desbloqueo: estimularse (hablar), pensamiento positivo (Dantzing), dormir/andar, comenzar de 0, continua. 260

31.6 Heurísticas concretas: técnica de resol. (ejec.); otros (disciplina, algor., argumento). Ad hoc vs genérica. 1) Simplificar-particularizar (diagonales, sum n3=(sum n)2, induc., evidencia); generalizar (Tma Fund. Alg. en C, Grothendieck, Poncelet). 2) Condiciones: anclas, arbol posib., artim., ec. dif. 3) Dibujar/tablas: ley Moore, árbol probab. 4) Lenguaje: 0-indio, Leibniz r. cadena, cuaterniones. 5) Simetrías/patrones: coord. curvil. 6) Empezar final: met. iterativo, garrafas. 7) Analog.: ejerc/probl. dual, Fourier, dem. contrar. 8) Ensayo error: fuerza bruta, x2-x=10 260

31.7 Métodos de demostración: 1) Directa: x=m6=>x=m2, des. Markov, sum par=par. 2) Inducción: Log1 transitiva, Log2 axioma, =bien orden., suma pr. arit., tma fund. aritm., 3.1) Reducción al absurdo: sqrt(2), diag. Cantor, no constr. contraste hip. 3.2). Por contrarrecíproco: n2->n impar, n2->n par, Tma Fermat. 3.3) Incumplimiento de impl.: err. nder. ncont. conv. unif.. 3.4)Contrajemplo: primos impares (2), pavo. 4) Visual: Pitag. 5) ATP 262

31.8 Problemas para educar: reforzar, concretar y evaluar teoría (ejercicios), motivar (vida real), desarrollar creatividad (problemas) 263

31.9 Problemas históricos: Aritm.: tma Fermat. primos, ec. diof. Geometr.: V postulado, exhaucion, descartes, egregium, Erlangen, costa. Topología: Koenisberg, solidos platónicos. Álgebr.: Galois, num. constr., PL, alg. abstr. Análisis: Basilea, braquistocrona, difus. Fourier. Prob.: Ceres, partida interrumpida, amanecer, te. Lógica: hip. continuo, consist. de TAR. Listas: 23 Hilbert (hip. cont., TAR, ax. Física, hip. Riemann, alg. diof.). 21 Karp (NP-completos). 7 Mileneo: Birch (c. elipt=f.-L), P vs NP, Hodge (manifold homeomorf a var. alg.). Hip. Riemann. Navier-Stokes, Pincaré, Yang-Mills 263

32 T70. Lógica proposicional. Ejemplos y aplicaciones al razonamiento matemático. 267

32.1 Introducción: f. lóg. signos mult., ATP (igualdades), silogismo Socrates, deriv. vs contin. Lógica: formas validas de deduc y dem. (evitar crisis). Lógica-0 vs 1 y 2 267

32.2 Operador y f. lógica (aplicac. y, o, no, computación ubicua agua, N, R, C). 16 binarias (retículo teseracto, Venn). Alg. Boole (). Dif. simétrica (XOR), Morgan, princ. incl-excl. Bi/condicional. Mapa de Karnaugh (minterm del bicondic.). 267

32.3 Reglas de inferencia: aplicac. (premisas, conclusion), arg. log., tautol. Introducción de la conjunción (axiom.). Modus ponen y tollen (p->q,nq=>np, der. vs cont.). Ley transitiva (ax. induc., >=). Morgan (NAND y NOR completitud funcional) 269

32.4 Tautología: f. boole siempre V, perogrullada=corta, ej. MP. Argumentación lógica: premisas, conclusion y dem. de concl. ej.: LT (de dos variables) + MT + Morgan 269

32.5 Sist. formal. Ej Log0: Boole (8 ax), Wolfram (1 ax.), Lukasiewicz (3 esquema ax), Gentzen (0 ax.). Cond. vs Impl (metateoría) 270

32.6 Tipos de relación (sentencias): Implicación directa H=>T (der. vs cont, necesario y suficiente). Recíproca (equivalencia o c.n.s.: g. euler, isomorf. no impl.: m. ortog., c. abs., corr. vs causa. Contrarrecíproco: nT=>nH (=directa, n2 impar). Contraria: falacia, Err. NDer. NCont. 271

32.7 Objetos matemáticos: primitivos (elem. conj., nº, =, pto, suceso), definibles (ángulo, derivada, prob. condic.), complejos: axioma, FBF, Prop. Dem. Tmas tipos: corolario (seguido, long. cateto, Tma Ra. C Conj.), identidad o lema (ayuda a dem., id. notable, Bezout, Zorn), regla (útil, pulgar, bayes, cadena), principio/ley (frecuente, grandes n,) 272
32.8 Métodos de demostración 272
32.9 Malinterpretación: división, compleja, potencia, derivada, seno cuadrado. Falacia: Err. NDer. NCont.. Demostración invalida: lnx<0=> lnx/lnx<0/lnx => 1<0. Calculus Ratiocinator 272

33 T71. La controversia sobre los fundamentos de la Matemática. Las limitaciones internas de los sistemas formales. 275
33.1 Introducción: Calculus Ratiocinator, sist. formal ESO, lógica ecuacional, carta Ramanujan con ATP. Tma Fermat (modularidad). 275
33.2 Paradoja (deduc.-griega. opinión): Zenon, raiz(2) (Hipaso). Geom. no eucl. (Erlangen). Alg.: dem. inval.. Anal.: Banach (medida). Anal.: Dirichlet, Weierstrass, Costa (fractal e int. Lebesgue). Prob.: Bertrand (prob. ax.). Crisis: paradoja de Russell (mentiroso, Berry en fund.). Programa de Hilbert (geom. eucl., Erlangen, ignorabismus: 1) entschei (p10), 2) conist. (explosión, p2), 3) compre(n)sión ax. (física, p8). 275
33.3 Sistema formal (abstr. con regl. infer.): 1) Símbolos primitivos: variables (Log1 embebida, p:x+1=x+5-4), puntuación (,[]), op. log. (Y) cuantif. (exists). 2) Gramática: FBF (Log0, Log1). 3) Axioma vs postulado: FBF autoeved (ver ATP). 4) Sist. Deduc.: RI, Tmas. 5) Metateorría: Cond. vs Impl. Ej. Sist. Formal (ESO) 277
33.4 Lógica: formas validas de deduc y dem. (evitar crisis). Lógica-0 vs 1 y 2. Log-x (sist. formal sobre gramat.-x poder expresivo vs metateoria, predicar sobre predicado): L0 (Boole, Socrates), L1 (cuantif. ZFC, no Par. Russell), L2 (TAR, inducc.). 278
33.5 Objetos: Cadena de caracteres (Kleene). Fórmula bien formada (gramat.): sentencia (sin var. libres, x2=y), numeración de Goedel (Fermat). Proposición (V). Demostración (sec. prop./ax.+regla infer.). Teorema (Prop con Dem. L1 vs L2, interesante). Conj. recursivo (algor. decidir, primos, FBF), Rec. enum.: gen. vs discr., dem. y tmas (gen. lexicogr. y filtrar FBF (gramat.) +Dem. (Curry)), conj. diof. Consistente (no deducible Fi=V y Fi=F), completo (toda Pi dem.), decible (toda Fi dem.) 279
33.6 Tmas de Gödel (consistencia de la TAR II): T0) [1929] L1 completa y Tma=Prop=FBF. T1) [1931] L2 incompl si consist. (Tmas<Prop, Venn, complejidad. inf.), T2) TAR in consist. no es Tma (casi Gentzen). Dem T1 (nexist Pix dem. pw(w)). Dem T1 (algor. diof. no existe) 281
33.7 Entscheidungsproblem (de Log1, Hilbert1928). Church1936: cálculo lambda (no f. comput. recursiva de reescr. confluente, teor. unif.). Turing1936: no alg. que pare si otra para (Maq. univ.+diagon. Cantor). Colorarios: L1 y L2 indecibles (MT para = Prop. aritm.). Tab. resumen 282
33.8 Problemas indecibles (equiv. Goedel o parada, superables). Conj: hip. cont. (indep. ZFC). Aritm.: alg. diof., Goodstein (op. salto base, ind. transf.). Geom.: tesel. de Wang, V post. (indep.). Topol: compl. simpl. homeom. Alg.: m. mortal. Richardson (expr.), n. constr. Galois. Anal.: Richardson (0s e int.). Prob.: proc. dec. Markov. Log.: Bussy-Beaver, Omega 283

33.9 Formalismo [Hilbert]: obj. resultado de reescribir, Mat=invent=juego, consist. rel. pto=silla=n^o, (controv. limit. Goedel, no humanista) Platonismo: o. existen, Mat=descubre, ver=comprender en [Goedel], C [Penrose] (¿existe Pot. Irr. Rac.?, ¿que mundo es?). Tercero excluido: Pot. Irr. Rac. (dem. exist. r=i1(i2)) . 284
33.10 Constructivismo [Brouwer]: exist. si constr.(inf. pasos; V obj. S;S) (como num. c.). Intuicionismo: actividad mental (S;N) Finitismo: (N;N), algunos inf. pot. (controv. rechaza ind. transf., diag. Cantor o Tarski y ficciones (Hilbert guantes)). ATP y HoTT (check fund. 4 colores). Cuasiempirismo (evidenc.) . . 285
33.11 (*) Demostración Automática y Metabiolog. 286
33.12 (*) Fundamentaciones de las Matemática 288

34 Fórmulas en problemas 295
34.1 Tablas 295
34.1.1 Figuras 295
34.1.2 Trigonometría 295
34.1.3 Derivadas 295
34.1.4 Series 296
34.2 Aritmética 296
34.3 Geometría lineal 297
34.3.1 Vectores, puntos y productos 297
34.3.2 Ec. de rectas/planos y v. perpendicular 297
34.3.3 Distancias y ángulos en espacio 298
34.4 Geometría de figuras 298
34.4.1 Triángulo 298
34.4.2 Circunferencia 299
34.4.3 Poligones 299
34.5 Geometría de Cónicas 299
34.6 Geometría de transformaciones 299
34.6.1 Transformaciones en 2D 299
34.7 Álgebra Matrices 300
34.7.1 Matriz inversa y diagonalizable 300
34.7.2 Determinantes 301
34.7.3 Sist. de ec. 301
34.7.4 Aplicación, bases y variedades lineales 301
34.7.5 Progr. Lineal 302
34.8 Algebra Polinomios y complejos 302
34.8.1 Álgebra compleja 302
34.8.2 Geometría compleja 303
34.9 Análisis 303
34.9.1 Representación 303
34.9.2 Series 303
34.9.3 Continuidad, Límites y Sucesiones 304
34.9.4 Integración y derivación 305
34.9.5 Tmas del cálculo 305
34.9.6 Optimización, Desigualdades y Búsqueda de Raíces 306
34.10 Probabilidad 306

Chapter 1

Otros temas

1.1 Unidades Didácticas

- *U1Trigon U2GPlano U3LGeom U4Estrat U5NReal U6Suces U7Ecuac U8Compl U9Func U10Limit U11Deriv U12Estad*

1.2 T6. Números reales. Topología de la recta real.

- *Conj. Num.* (continuación, Fig. 7.7):
  - Num. Irr.: complemento de $\mathbb{Q}$ se parten en: a) Irr. Alg. (*C. Num. Alg.* como *Phi* o *i*) y b) *Trascend.* (e, π).
  - Num. *Trascend.* : n^o que no son sol. de ningún pol.. i.e. los que no son del *C. Num. Alg.*: $T \notin \mathbb{A}$. [Num. Liouville] $L = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + ...$ (primer trascendente artificial). e [Hermite]. π [Lindemann]. $ln(a), sin(a)...$ si $a \in \mathbb{A}$, Ω [Chaitin]... . Puede parecer aleatorio pero se puede obtener de *Serie* (suma infinita). Ej: π con *P. Basilea* o *Serie* Leibniz. Hay muchos que no se saben si lo son, Ej: combinaciones: $\pi^e, \pi + e....$ Son *Num. Comput.*.
  - *Num. Comput.* : n^o que puede ser *Turing* computado (algor. se detiene) con la precisión que deseemos. Incluye a los *Trascend.*, *C. Num. Alg.* y $\mathbb{Q}$. Ej: $2, \pi, e, ...$ Num. Incomp.: secuencia que no es output de ningún algoritmo con cualquier input = sec. incompresible. Ej: Ω. *Num. Aleatorio*
    - Prob. de No-*Num. Comput.*: en $[0,1]$ [Chaitin]: usando Teor. *Medida*. Turing demuestra que la cantidad de *Num. Comput.* $[0,1]$ es ∞ *Contable* (ordenando todos los programas posibles) podemos poner un intervalo $\frac{\varepsilon}{2}$ al rededor del 1° num computable, $\frac{\varepsilon}{4}$ del 2°, ..., el intervalo total vale $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + ... = \varepsilon$. Si hacemos $\varepsilon \to 0$ vemos que $P(Computable) = 0$ mientras que $P(Incomputable) = 1$. Vemos que ha Liouville le costó mucho encontrar trascendentes pero son los que más hay. *Filos. Digital*
  - *Num. Aleatorio* Real ($\supset$ No-*Num. Comput.*): (Sec. Algor. Aleat. si pones 0 delante): $\exists$ cte $c : H(\text{los primeros N bits de R}) > N - c$, num. más largo que el programa para generarlo. Tienen $P(aleatorio) = 1$ la prob. de escogerlo entre los $\mathbb{R}$ es 1. Ej: Ω *TAI*. Ej: Una Martingala $E[X_{n+1}|X_1, X_2, ..., X_n] = X_n$ [1]. Es imposible definir que n^o es aleatorio pues en cuanto lo dices deja de ser *Normal* y es especial (destaca entre la masa). Es algo que ves pero solo durante un instante. Ver *Teor. Prob.*, *Filos. Digital*

[1] La estrategia de la martingala consiste en volver a apostar por el total perdido al momento de incurrir en una pérdida en un juego de azar. Aparenta ser buena estrategia pero es mala. Esto explica los límites máximos en apuestas

- *Num. Normal* de Borel: si todos los bloques de num. aperecen con igual probabilidad *Distr. Uniforme*. Ej: Champernowne $0,123..101112..2021..$ ($\mathbb{N}$ como decimales), Ω porque si no lo fuera se podria comprimir. Muchos famosos $(\pi, e, \sqrt{2})$ no se sabe si lo son aunque hay *Eviden.*
- Num. Innombrable: Ni si quiera podemos adivinar su existencia. Impronunciable: $\sqrt{2}$ lo era para los Pitagóricos pues tenia ∞ decimales.

- *Filos. Digital* : Chaitin (al igual que Gisin *Incert. Fisic.*) decide no creer en los $\mathbb{R}$ y cree en un Universo Digital porque: $P(Algebraico) = P(\text{ Num. Comput. }) = P(Nombrable) = 0$ (la *Cardin.* de estos conj. es ∞ *Contable*) mientras que $P(Trascendente) = P(Incomputable) = P(\text{ Num. Aleatorio }) = P(Innombrable) = 1$ (es ∞ continuo). Ver *Construct.*, *Finit.*, *Creer en Ficciones*, *Raiz 2 Irrac.*.

1.2.1 Topología

- *Topol.* : estudio de las propiedades invariantes de un *Obj.* geométrico bajo deformaciones continuas (*Pr. Erlangen*). Ver *Conj. Hodge*
  - *Esp. Topol.* (X,T): X Conj. y T topolog. sobre X (conj. de subconj. que cumple: tener vacio, cerrado bajo unión e intersec.), i.e. un conj. ptos donde cada uno tiene vecinos (*Prop. Markov* o *Reticulo*). Es el objeto deformable de la *Topol.*. Ej: *Seno Topol.*, *Manifold*, *Esp. Eucl.*, *Var. Alg.*), Complejo *Simplic.* (*Probl. Indecib.*), *Sigma-Alg. Borel* sobre T, *Esp. Metrico*.
  - *Homeomorf.* : la deformación. F. continua y su inversa también que va entre dos Esp. Topol. Ej: donut=taza café. *Proyec.* estereogr. (*Tma Egregium*). Si es de curvas estiramos el plano del dominio, si es de objetos el espacio,...
  - *Seno Topol.* : $f(x) = sen(\frac{1}{x})$ Señal Chirp o FM. Es un *Esp. Topol. Conexo* pero no Conex. por Caminos

  Poincaré caracteriza las variedades de forma discreta con G. *Homotop.* (o fundamental) [2] y *G. Homolog.* (suces. o *Compl. Caden.* de G. Abelianos) [3]. *Diagr. Schlegel*.

- Nociones:
  - *Esp. Metrico* : conj. con una F. distancia, es un tipo de *Esp. Topol.*. No confundirlo con *Esp. Medible*. Ej: *Esp. Eucl.*
  - *Esp. Metrico Completo* (X,d): si toda *Suc. Cauchy* contenida en X converge a un elemento de X. Ej: *Esp. Eucl.* $\mathbb{R}^n$, *Esp. Banach*. Ej-negativos: $\mathbb{R} - \{0\}$ o $(0,1]$ (suc. $\to 0$). $\mathbb{Q}$ (hay suc. sobre Q que convergen a *Irr*). Ver *Suc. Cauchy*
  - *Compacto* :
    - *Esp. Metrico* Compacto: Si *Completo* y totalmente cerrado [Borel]. Si *Esp. Eucl.* E_n, entonces basta que sea unión de cerrados y acotados. Ej: $[0,1] \in \mathbb{R}$ pero no $\mathbb{R}$ que no es cerrado (cualquier cerrado) Ej-: $(0,1)$
    - Esp. Compacto: esp. que tiene propiedades similares a un conj. finito, en cuanto a que las sucesiones contenidas en un conjunto finito siempre contienen una subsucesión convergente. Ej: Relacionado con los *Recubr.*. Ver *Conj. Cantor*
    - Conj. Compacto: subconj. de un espacio topológico

[2] $f(x)$ y $g(x)$ lo son si pueden deformarse contin. la una en otra, ver *HoTT*

[3] asociados a un G. o Esp. Topol. Mide la falta de exactitud de la cadena, IDEA: usar *Aprend. Autom.* y *Entropia*

- Conj. *Denso* : $\exists y : x < y < z$. Ej: $\mathbb{Q}$ es un subconj. denso de $\mathbb{R}$ porque todo $x \in \mathbb{R}$ o es un $\mathbb{Q}$ o tiene un $\mathbb{Q}$ arbitrariamente cercano a x. Ej: *Tma Aprox. Weierstrass*
- Esp. *Separable* : si contiene un Subconj. *Denso Contable*. Ej: $\mathbb{R}$ por contener a $\mathbb{Q}$ que es Denso Contable. Ej: *Esp. Hilbert* es separable $\iff$ admite base ortonormal *Contable* $\Rightarrow$ el conj. de func. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas lo es pero no el conj. de func. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya integral es finita.
- Conj. *Conexo* (Connected Space): podemos movernos de unos puntos a otros sin salir del conj. Ej: $\mathbb{R}$ *Conj. Mandelbrot*. Ver *Seno Topol.*

- CONCLUSIÓN: no confundir *Esp. Metrico* (*Topol.* y *Suc. Cauchy*) con *Esp. Medible* (Teor. *Medida* y *Sigma-Algebra*)

1.3 T13. Polinomios. Operaciones. Fórmula de Newton. Divisibilidad de polinomios. Fracciones algebraicas.

1.3.1 Ideales y Dominio Euclideo

- *Ideal* : $(I,+,*)$ de un *Anillo* $(A,+,*)$. Siendo $a \in A$ e $i \in I \subset A$, si:

  1. I subgrupo aditivo de A: $i_1 + i_2 \in I$
  2. Multipl: $a * i \in I$ id. *Por la Izda* ($i * a \in I$ id por dcha). Se distingue izda y dcha si el Anillo no es conmutativo (como el * matrices)

  Equivale es el *SubObj.* de A (equivale a *SubG. Normal*) y permite crear *A. Cociente* (es una *Teor. Unif.* similar a *G. Cociente*). Permiten extender Tmas de $\mathbb{Z}$ como el *Tma Chino del Resto*. Si $f : R \to R'$ *Homomorf.* entre *Anillo* su *Kernel* es un *Ideal*

  Ej: *I. Mult. Ent.* $(n) = (n\mathbb{Z},+,*) = E\,j : \{...,-2n,-n,0,n,2n,...\}$ de *A. Ent.*, Ideal de Polinomios $(\mathbb{Z}[x],+,*)$ (suma, mult, divis, usual de polin.), *Ent. Gauss.*.

- (*) *Ideal Primo* : P de un anillo A si a) $\forall c = a_1 * a_2 : c \in P \Rightarrow a_1 \in P | a_2 \in P$. b) P no es anillo R entero. Esto generaliza el *Lema de Euclides* para primos. Ej: el ideal *Generad.* por $< 7 >= k7$ ($< 2,x >$ o $< y^2 - x^3 - x - 1 >$) es un Ideal Primo en el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ (los polinomios con coef. enteros $\mathbb{Z}[x]$ o con coef. $\mathbb{C}$ y dos variables $\mathbb{C}[x,y]$).

- *Dom. de Integridad*: Anillo (algunos autores añaden conm. unitario) sin divisores de 0. Ej: *Cuerpo*, $(\mathbb{Z},+,.)$ ($a.b \neq 0$ siempre),*Ent. Gauss.* y los pol. con coef. que son DI como $\mathbb{Z}[x]$. Ej-: *A. No Conm. Matr. Cuadr.* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1- & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a (b) divisor de 0 por la izda (dcha) Nil*Potente*. *Dom. I. Princ.*: en *Id. Bezout*

- *Dom. Fact. Unic.* [Kummer]: De igual forma que los Imaginarios extienden los reales dando los complejos, Kummer inventa los *Ideal* para extender el *A. Ent. Alg.* dando un conj. donde cada número se factoriza de forma única . Ej: $\mathbb{Z}$ por el *Tma Fund. de la Aritm.*. o polin. $\mathbb{Z}[x]$ o $\mathbb{K}[x]$. Ej-: en el *A. Ent. Cuadr.* $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ no se cumple un *Tma Fund. de la Aritm.* pues 6 se descompone de dos formas $2*3$ y $(1+\sqrt{-5})*(1-\sqrt{-5})$. Con I. la descomposición es única.

- *Dom. I. Princ.*: *Dom. de Integridad* en el que todo I. es Principal, i.e. es *Generad.* por un único elemento *Unid. Fund.*. $(i) = \{a * i : a \in A\}$ Ej: *A. Ent.* (todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales *I. Mult. Ent.*), *A. Polin. sobre K* en 1 var. $\mathbb{K}[x]$ pero no $\mathbb{Z}[x]$ [4]. *Ent. Gauss.*. Obviamente al ser subconj. de *Dom. Fact. Unic.* cumple el *Tma Fund. de la Aritm.*, *Id. Bezout* y *Tma Chino del Resto*. Permite *I. Lagrange*

[4] pues $< 2,x >$ es un ideal no generable por un único pol. Tampoco pol. en var. $\mathbb{K}[x,y]$ pues el ideal $< x,y >$ no es principal

- *Dom. Eucl.*: mediante *Ideal* podemos extender la *Div. Eucl.* a cualquier *Anillo* conmut. siempre que podamos definir un *Grad.* o norma de los elementos (compararlos) (*Gr. Ext.*, *Gr. Num.*). Esto implica la existencia de MCD de dos elementos (lo cual no es cierto en cualquier cualquier A.) $\Rightarrow$ *Alg. de Euclides*, *Id. Bezout* o *Tma Chino del Resto*. Ej: los clásicos de [Dedekin1871] $\mathbb{Z}$ (*Div. Eucl.*) y *A. Polin. sobre K*. Permite *I. Lagrange*

- CONCLUSIÓN: la Tabla de *Jerarq. EA* (*Poder Expr.*), el *Anillo* Conm. contiene a todos (*Cuerpo* caso *Anillo*). El *Tma Fund. de la Aritm.* vale en *Dom. Fact. Unic.* y en los que le siguen. El *Dom. I. Princ.* tiene *Generad.* y el *Dom. Eucl.* el *Grad.* que es **casi un *Cuerpo*** y cuyo ej es el *A. Polin. sobre K* donde podemos aplicar *Div. Eucl.*, MCD, etc.

Anillo Conm.	
Dom. de Integridad	Ej: *Cuerpo*, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[x]$ Ej-: Matrices
Dom. Fact. Unic.	*Tma Fund. de la Aritm.*
Dom. I. Princ.	*Unid. Fund.* (*Generad.*) y *Tma Chino del Resto* (Permite *I. Lagrange*)
Dom. Eucl.	Requiere *Grad.*. *Div. Eucl.*, MCD, *Id. Bezout* ¡sobre *A. Polin. sobre K*, casi un *Cuerpo*!
Cuerpo	Ej: $\mathbb{Q}$
Clausura Alg.	Ej: $\mathbb{C}$

- Topologia de Zariski: los conjuntos cerrados son aquellos que consisten de los ceros comunes a un conjunto de polinomios. (Ver *Var. Lin.* Afin). El espectro de un anillo es su conjunto de Ideales Primos

1.3.2 Anillo de polinomios sobre un cuerpo y fracciones algebraicas

- Estructuras:
  - *A. Polin. sobre K* : $(\mathbb{K}[x],+,*)$ *Anillo* sobre un *Cuerpo* normalmente $\mathbb{Q}[x]$ no necesariamente mónicos con las 3 primeras *Op. Alg.*. Ojo ¡$\mathbb{Z}[x]$ no mónicos, que da *Num. Alg.*, no lo es!. Al poder definir *Grad.* (t.q. $gr(P*Q) = gr(P)+gr(Q)$ [WikiDivEucl]) es un *Dom. Eucl.*, **casi un *Cuerpo*** con buenas propiedades: ¡permite aplicar *Alg. de Euclides* de *Ec. Diof.* (problema de Wulf), *Tma Factor* o *Tma Chino del Resto* (*I. Hermite*) o *Rel. de Congr.* (*Det. Corr. de Errores*)!
  - *Ej. de EVs*: $(\mathbb{K}[x],+,.)$ obviamente
  - Tmas de Polinomios: *Tma Factor*, *Tma Ra. C Conj.*, etc..

- *Frac. Alg.* : num y den son expresiones con *Op. Alg.*. Ej: $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-3}$. Si le quitamos los polos son *F. Holomorfa* en una parte del dominio
  - *C. Func. Rac.* $\subset$ *Frac. Alg.*: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P,Q son *A. Polin. sobre K*. Sobre $\mathbb{K}$ forman también un cuerpo que contiene a $\mathbb{K}$. Por *Desc. Frac. Simpl.* vemos *Taylor* vemos que es un subcuerpo de *Serie Pot.* Formal Ej: *F. Transf.*, *Ec. Alg.*
  - *Desc. Frac. Simpl.* : de *C. Func. Rac.* con $\mathbb{C}$ para *Primit.*, *Laplace* o *Transf. Z*

- Aplicaciones: *Det. Corr. de Errores* Cod. CRC

1.4 T16. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouche. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan. T18. Matrices. Álgebra de matrices. Aplicaciones al campo de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. 19. Determinantes. Propiedades. Aplicación al cálculo del rango de una matriz. 20. El lenguaje algebraico. Símbolos y números. Importancia de su desarrollo y problemas que resuelve. Evolución histórica del álgebra.

- *Diagon.* : de una M. cuadrada A_{nxn} posible $\iff$ podemos $A = PDP^{-1}$ ("A Palo Deko") $\iff$ a) $\sum_i MultiplAlgebr(\lambda_i) = n$ y b) $dim(v_{\lambda_i}) = n - rang(A - \lambda_i I)$. *Tma Espec.* : cualquier M. cuadrada y *Hermit.* sobre $\mathbb{R}$ es Ortog. Diagon. (i.e. $P^-1 = P^T$ *M. Ortog.*, i.e. los v P dan un *Base* ortonormal). Usada en *PCA*, *Cuantica*

  Ej: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$ (cónica rotada centrada en 0)

  1. $|A - \lambda I| = 0 \iff \lambda = \{6, 1\}$ eigenvalues del *Pol. Caract.*
  2. Resolver sist.:
     - $\lambda = 6; (A - \lambda I)\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}; v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v. propio normal) (*Var. Lin.*)
     - $\lambda = 2; .....; b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
  3. $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; D = P^{-1}AP; A = PDP^{-1}$

- Tipos de matrices y sol. a sist. ec.:

MATRIZ	METOD. SOL. DEL SIST. EC.
Cualquiera:	Reducción de Gauss o Descomp. LU: $A = LU$ (L, U triangular inferior y superior). *M. Inv. Por la Izda* (*Apl. Lin.*)
M. Cuadrada:	$\exists$ *M. Inv.* $\iff A^{-1}A = AA^{-1} = I$ *Por la Izda* y dcha $\iff \lvert A\rvert \neq 0 \iff Kern(A) = \{0\}$ (trivial) $\iff \{f.\} = l.i. \iff \{f.\} = Base \iff triang. - Gauss - perf.$ (no 0s al final). Algunas *Diagon.*. Ver *Det.*, *G. Lineal General*
Sist. Sobredet. : con más filas que columnas	*Regr. Lin. SVD*: $A = PDP^{-1}$ (o QR, Pseudoinv...) técnicas algebraico-estad. por *Error*, *Teor. Unif.*
Hermit. o autoadj.: coincide con su transp. (por supuesto cuadrada) (*Cuantica*, *Conica* (*Ec. Pol.*, *M. Covar.*, *Prod. Esc.*)	*Diagon. Tma Espec.* o Cholesky: $A = LL^T$ (L similar a descomp. LU).
Toeplitz : cada diagonal tiene el mismo valor (*ARMA*, *Corr. Cruzada Estacion.*)	Levison-Durbin (Circular caso, ver DFT *Fourier*)
Vandermonde : cada fila es una *Pr. Geom.* (*I. Polin.*)	*Det.* sencillo (aparece en FFT *Fourier*, *Regr.* pol.)

- *Det.* ver *Forma Multilin.*

1.4.1 (*) Geometría algebraica

- *Geom. Alg.* : estudio de las *Var. Alg.* o *Curva Alg.*. La antigua lo importante es tener un algor. que nos busque *Ceros* de *Ec. Alg.*. En la moderna lo importante es describir el conj. de *Ceros*, si forman un cubo, un toro..... ver *Tma Richardson*, *Topos*, *Esquema*, *Conj. Hodge*.

- *Var. Alg.*: *Locus* de los *Ceros* (sol. $\mathbb{C}$ o $\mathbb{K}$) de un sist. de *Ec. Pol.* (*Ec. Alg.* multivar., Ej: $\mathbb{Z}[x]$: *Ec. Diof.*). El *Esquema* (haz de Esq. Afines=Espec(*Anillo*) de Grothendieck es su generalización (para Conj. Weill). Ojo:

  - No es una *Aplicacion* (ni *Funcion*), más bien una *Correspondencia* pues la raíz tiene más de una solución y además puede ser sobre $\mathbb{C}$. Ej: *Conica*, *Cuadrica*
  - Ciertos *Manifold* $\mathbb{C}$ y pol. lo son, pero las VA en general tienen ptos *Singular.* mezclado con regiones *Suav.* y esto no puede ser en un *Manifold*.

  Ej sobre $\mathbb{C}$: *Curva Alg.* Ej sobre $\mathbb{R}$: *Var. Lin.*, *Conica*, *Cuadrica*. *Tma Bezout*. Ver *Filos. Groth.*. Ver *Simpl. Alg.*.

Var. Alg. (*Geom. Alg.* para *Ceros*)	*Ceros* de sist. *Ec. Pol.*	puede ser $\mathbb{K},\mathbb{R},\mathbb{C}$, con ptos sing. (*Esp. Tang.* no definible)
Manifold (variedad)	*Esp. Topol.* que localmente es *Esp. Eucl.*	$\mathbb{R},\mathbb{C}$, sin ptos sing.
Var. Dif. (*Geom. Dif.* para medir)	*Manifold* con F. Dif.	$\mathbb{R},\mathbb{C}$
Var. Riemann (*Geom. Riemann*)	*Var. Dif.* con *Tensor Metrico* en su *Esp. Tang.*	$\mathbb{R}$
Sup. Riemann (Anal. $\mathbb{C}$, *Monodrom.*)	*Manifold* $\mathbb{C}$ de dim. compl. 1	$\mathbb{C}$
Curva Alg. (*Geom. Alg.*)	*Var. Alg.* de dim. 1	$\mathbb{K},\mathbb{C},\mathbb{R}$ (Afin)
Curva Dif. (*Geom. Dif.*)	*Var. Dif.* 1D	normalmente $\mathbb{R}$

  - *Var. Dif. M*: es un *Manifold* Dif.. i.e. *Esp. Eucl.* localmente, donde podemos definir una F. *Diferenc.* $f : M \to \mathbb{R}$ y obtener *Campo Vect.*, *Anal. Vect.*, *Esp. Tang.* etc.. Suelen ser *Suav.* (agujero negro) y pueden ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. No tienen porqué tener una interpretación geom. natural ni estar inmersas en un espacio (Ej: *G. Lineal General* $GL(n,\mathbb{R})$).
  - *Var. Riemann*: *Var. Dif.* y $\mathbb{R}$ (no compleja) con *Tensor Metrico* en su *Esp. Tang.*, i.e. que localmente es euclidea y podemos medir. Generaliza la noción de *Esp. Eucl.*. Ej: Espacio-tiempo *Rel. General*, cualquier *Hipersuperf.* que sea $\mathbb{R}$ y dif. (ciertas *Distr. Prob.* (*Geom. Inform.*), *Var. Alg.* y *Manifold*). No confundirla con *Sup. Riemann* (que es $\mathbb{C}$, ver *Var. Alg.*). Ver *Transf. Conforme*
  - *Manifold*=Mannigfaltigkeit: *Esp. Topol.* de dim. n que localmente recuerda a un *Esp. Eucl.* de dim. n. Usado en *Geom. Dif.* y *Topol.* para enfatizar la forma Geom. Ej: *Var. Dif.*, *Var. Riemann*, *Hipersuperf.*. *Var. Alg.* $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ sin ptos *Singular.*.
  - Variety: *Var. Alg.*. Usado en *Geom. Alg.* para enfatizar el conj. de sol. Ej: *Var. Lin.*
  - *Hipersuperf.* : $x_n = f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$: Generaliza *Hiperplano*. *Manifold* o *Var. Alg.* de dim. $n-1$ incrustada (*Inclus. Canon.*) en *Esp. Eucl.* de dim. n. Ej: *Curva Alg.* (en 2D), *Cuadrica* (en 3D), *Distr. Prob.*, *Int. Lebesgue*. Ver Sup. *Param.*

- *Sup. Riemann*: *Helice* resultante de la unión de las distintas ramas u hojas. Es un *Manifold* $\mathbb{C}$ de dim. compl. 1. Se suele dibujar la parte real o imaginaria de $f(z)$, Ej: *Esf. Riemann* o $Im(Log(z))$ de Fig. 6.2 con PR $z=0$. No confundir con *Var. Riemann*.

- *Curva Alg.* : *Var. Alg.* de dim 1. (ver Curva *Param.*)
  - 1) CA *Afin*: *Ceros* $(\mathbb{K},\mathbb{R},\mathbb{C})$ de un pol. de 2 var. $P(x,y)=0$ Ej: curvas planas del T46 *Sist. Coord.*. 2) CA *Proyec.*: Ceros en el *Plano Proyec.* de un *Pol. Homog.* en 3 var. $Ph(x,y,z)=0$, Ej: Curva del *Tma Fermat*. Por Por Homogen. (*Pol. Homog.*) ambas son equivalentes, usado en *Geom. Proyectiva* para *Filos. Groth.*
  - CA Proyec. *Suav.*=*Sup. Riemann* compacta: pueden ser curva $\mathbb{C}$ y estar contenidas (*Inclus. Canon.*) en esp. de dim. n, pero al final equivale a Superf. (*Hipersuperf.*) de dim. $2n$.

- *Pol. Homog.* (o **Forma Alg.**): pol. donde todos sus términos tienen el mismo *Grad.* d, Ej: $x^5+2x^3y^2+9xy^4$.
  - Forma Lin.: PH. de *Grad.* 1, caso de *Forma Multilin.*.
  - *Forma Cuadr.* : PH de *Grad.* 2. Unaria ax^2, bin. $ax^2+bxy+cy^2$, tern. $ax^2+bxy+cy^2+dyz+ez^2+fxz$. Ej: Dist. de *Esp. Eucl.* $d=\sqrt{FC}$; Cuando sol. sobre $\mathbb{Z}$, rel. con *A. Ent. Cuadr.* y *Ec. Pell.*
  - **Homogeneización**: cualquier pol. puede ser convertido a un *Pol. Homog.*: $P(x_1,..,x_n)\to Ph(x_0,x_1,...,x_n)=x_0^dP(\frac{x_1}{x_0},...,\frac{x_n}{x_0})$, ej: $x_3^3+x_1x_2+7\to x_3^3+x_0x_1x_3+7x_0^3$. Y **Deshomogen.** haciendo $x_0=1$ $P(x_1,...,x_n)=Ph(1,x_1,...x_n)$. Ver *Curva Alg.* y *Coord. Homog.*

1.5 T25. Límites de funciones. Continuidad y discontinuidades. Teorema de Bolzano. Ramas infinitas.

RESUMEN: Anal. toda propiedad dentro de **intervalo** *Cont.* Unif., *Conv.* Unif., *Med. Lebesgue*, etc.

- *Cont.* Unif. o de Cauchy o del Delta (con x) y Epsilon (con $f(x)$): de $f(x)$ en intervalo $I=(a,b)$ si dado un $\varepsilon>0$ (lo pequeño que queramos), $\exists\delta$ t.q. $\forall x_0,x_1\in I$ se cumple que si $|x_1-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon$, i.e. si pequeños cambios dx da pequeños cambios $df(x)$ y el valor de $df(x)$ depende solo de dx no del pto x [5]

- *Conv.* Unif. (vs puntual) o del Epsilon y N: de $f(x)$ en intervalo $I=(a,b)$ si dado un $\varepsilon>0\exists N$ t.q. $f_N(x),f_{N+1}(x),...$ difieren de $f(x)$ menos que ε en todo I. Ver *Conv. Prob.*, *Conv. Abs.*, *Suc. Cauchy*, TProblemas
  - Si $f_n(x)\xrightarrow{unif.}f(x)$ (conv. uniform.) y f_n continua $\forall n\Rightarrow f(x)$ cont. Ej: $f_n(x)=x^n$ como $f(x)$ no cont $\Rightarrow f_n\overset{\cancel{unif.}}{\longrightarrow}f$ (no conv. unif., incumplimiento de *Impl.*, *Metod. Dem.*) Ej: *Tma Aprox. Weierstrass* o *Int. Riemann*. Colorarios:
  - Si idem $\Rightarrow\lim\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim f_n(x)dx$. Ej: en int. *Fourier* y *Int. Lebesgue*. $f_n(x)=\sum_{k=0}^n a_nb_k(x)$ a más terminos más cerca de f en $[a,b]$. Si conv. unif. $\Rightarrow$ para un ε deseado $\exists$ un $n:|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$. Si conv. puntual el "para un ε" depende del x.
  - Si podemos limitarla $|f_n(x)-f(x)|\le a_n$ y $a_n\to0\Rightarrow f_n\xrightarrow{unif.}f$. Colorario: Si $max f_n(x)\to0\Rightarrow f_n\xrightarrow{unif.}f$. Ej: $f_n(x)=\frac{sin(x)}{n}$, $|\frac{sin(x)}{n}-0|<\frac{1}{n}\to0\Rightarrow$ conv. unif. Ej: $f_n(x)=n^2xe^{-nx}$; $max=\frac{n}{e}\nrightarrow0\Rightarrow$ no conv. unif.

[5] i.e. f cont en $x_0\iff\forall\varepsilon>0,\exists\delta: si|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. "si al reducir Entorno-δ en x_0 $(E(x_0,\delta))$ se reduce $E(f(x_0),\varepsilon)$". Ej: $f(x)=x$ en $\forall x$, pero no $f(x)=1/x$ en $x>0$ (depende de x)

1.6 T26. Derivada de una función en un punto. Función derivada. Derivadas sucesivas. Aplicaciones.

- F. Cont. Dif. de *Clase C* ^{n} en intervalo $C^n[a,b]$: si derivadas parciales (respecto un parámetro) hasta n son continuas. Se puede aplicar a los *Manifold* de *Geom. Dif.* cuanto mayor sea su clase es más *Suav.* (ver *Leva*, *Prop. Markov*, *Var. Alg.*, *Conj. Hodge*). No confundir Suav. con *F. Holomorfa* (Anal.). Ver Pto *Singular. Esp. Lp*, *Error de Interp.*.

- *Deriv.* :

  – Deriv. F. Inv.: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$. Dem. regla cad. a $f[f^{-1}(x)] = x$

  Ver *Dif.*, *Dif. Finitas*

- *Diferenc.* (en 2D [Gaussianos] no confundir con Elem. *Dif.*): $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lo es en pto (a,b) si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-f_x(a,b)(x-a)-f_y(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$, donde f_x, f_y son las parciales (*Gradiente*), i.e. que f sea dif. equivale a decir que f tiene un único *Esp. Tang.* (plano) en pto (a,b).

  – Tma de Cond. Suf. de *Diferenc.*: si f cont. en pto (a,b) y f_x, f_y existen y son cont. en pto $(a,b) \Rightarrow f$ es dif. en (a,b).

  Ojo, que sea dif. en (a,b) *No Impl.* que se den las cond. (f cont. o f_x existe...), ¡¡hay func. dif. en 1 pto que no son continuas!! $f(x,y) = \begin{cases} 0 & si x=0, y=0 \\ (x^2+y^2)sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & otro \end{cases}$ sus parciales f_x, f_y no continuas en $(0,0)$ pero tiene derivada. Esto no ocurre en 1D ver *Err. NDer. NCont.* Ver *F. Holomorfa*. *Geom. Dif.*

1.7 27. Desarrollo de una función en serie de potencias. Teorema de Taylor. Aplicaciones al estudio local de funciones.

- *Serie* : suma de *Suces.* Inf. (*Turing* describible). Difícil la *Conv.* (TProblemas). Ej: obtención de n^o *Trascend.* como π:

  – Leibniz $\frac{\pi}{4} = \sum_{i=0}(-1)^i \frac{1}{2i+1}$.

  – *P. Basilea* , [Euler]: $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ es la *F. Zeta* para $s = 2$

  – Serie Armonica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. No *Conv.*:

  $$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + ... > 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) + (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8) + ... = \infty$$

  – Tma *Binom. Newton*: $(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k$, ¡Newton probó que r puede ser incluso un $\mathbb{C}$! (si $r \in \mathbb{N}$ el sumatorio clásico llega solo hasta n). [Veritasium] Esto permitió aproximar π más rápido que con *Metodo de Exhaucion*: $\int y = \int \sqrt{(1-x^2)} = \int \sum x^{r-k}$. Ver *Num. E*, *Dif. Suces...*

  Ver *F. Generad.*, *Serie Pot.*, *Par. Zenon*, *Suc. Cauchy*, *Serie Pot.* Formal, **Ojo Horus**

- *Serie Pot.* : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ donde en principio $z \in \mathbb{C}$. No se expresa con exponentes negativos, si se hace es de Laurent $1 + x^{-1} + x^{-2} + ...$ Ej:

- *Serie Pot.* Geom.: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *Conv.* si $|z| < 1$. $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{z_1})^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z_1}} = \frac{z_1}{(z_0+z_1)-z}$ si $|\frac{z-z_0}{z_1}| < 1 \iff |z-z_0| < |z_1|$ Ver *Pr. Geom.*, *Teor. Control*, *Transf. Z*, *Ext. Anal.*
- *Serie Pot.* de *Taylor* : caso particular de *I. Hermite*. La interpol. es un pol. basado en un muestreo de derivadas en 1 solo pto $\{f(a), f'(a), f''(a), ..\}$: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$ donde el resto de Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^n$. $R_n \to 0$ y $x_0 \in (x,a)o(a,x)$ (el que max el error). Regla del remplazo (ver TProblemas). Ver *Conj. de Birch*, *F. Holomorfa*.
- *Serie Pot.* Formal: polinomios de grado ∞ a los que no se exige *Conv.* $\mathbb{K}^{\infty}[x] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ donde $a_k \in \mathbb{K}$. También son un *Ej. de EVs*. El clásico ej. es $S(x) = 1 + x^2 + x^3 + ... + = \frac{1}{1-x}$ que converge para $|x| < 1$. Para el resto le asociamos un valor consistente con manipulaciones algebraicas (*Ext. Anal.*). Ej: *F. Zeta* $S(-1) = 1 + 2 + 3 + ... = -1/12$ (Suma Ramanujan) o Suma Cesaro $1 - 1 + 1.... = 0.5$ (media (de las medias)... de las parciales [DerivandoHipRieman]) *Creer en Ficciones*. Usado en renormalización de Teor. *Cuantica* Campos. Ver *F. Generad.*

- *F. Generad.* =*Transf. Z*: es una forma de codificar los a_n de una *Suces.* como los coef. del desarrollo en *Serie Pot.* Formal de una *Forma Cerrada* Anal. Ej: increible *Formula Binet* da *Fibonacci* o *F. Eichler*. Permitiendo pasar también a *Rel. Recurr.*. Ej: *Serie Dirichlet*, *Fourier* DFT. No confundir con *FGM*.

1.7.1 Análisis funcional

- *Anal. Funcional* : Descomponer una F. como *Comb. Lin.* de F. elementales (*Base*) $f(x) = \sum_i a_i b_i(x) = \sum_i < f(x), b_i(x) > b_i(x)$ donde a_i son las proyecciones obtenidas con el *Prod. Esc.*. Permite Análisis con herramientas del Álgebra *EV Teor. Unif.* (es *Obj. del Anal.*). Ej-análisis: *Fourier*, *Taylor*, *Diagon.* Ej-análisis: *Esp. Banach* y *Esp. Hilbert*: Esp. Funcional (en los que un punto es una sol. del *C. Variaciones*, Resol. de *Ec. Dif.*. Ej-prob.: *Tma Prob. Total*, *Momento*, *FGM* permite caracterizar lo continuo mediante lo discreto.

- *Esp. Banach* : 1) Espacio normado (*Esp. Lp*) y *Completo* (con la distancia inducida por su norma, ver *Esp. Metrico*) 2) Esp. donde toda *Suc. Cauchy* compleja con respecto a la métrica $d(x,y) = ||x-y||$ tiene un límite en el *EV*. Puede ser Infinito y sobre $\mathbb{C}$. Ej: *Esp. Lp* o *Esp. Hilbert* *Tma Aprox. Weierstrass*

- *Esp. Hilbert* : *Esp. Banach* cuya norma (*Esp. Lp*) $||x|| = \sqrt{< x,x >}$ (ángulo o proyección) está inducida por un *Prod. Esc.*. Es un *EV* complejo infinito con un p. e. interno que permite medir distancias y ángulos (generalización del *Esp. Eucl.*). Al permitirse dim. ∞ generaliza E_n permitiendo medir ángulos, proyecciones.... Ej: *Esp. Eucl.*, *Esp. Lp*, T. *Fourier* (señales) y F. Onda *Cuantica* en notación braket,

- *Tma Aprox. Weierstrass*

1.8 T29. El problema del cálculo del area. Integral definida. T30. Primitiva de una función. Cálculo de algunas primitivas. Aplicaciones de la integra al cálculo de magnitudes geométricas.

- *Int. Def.* : área de la curva (suma pos. y neg, *AUC*) y su paradigma es la *Int. Riemann* ($\int_a^b x^2 dx = [x^3/3]_a^b$)). *Primit.* Int. Indef. o antiderivada, $f(x) = \int x^2 dx = x^3/3 + C$ (es sol. a una *Ec. Dif.*:

$f'(x) = x^2$ da una familia de sol. con Cte Int. C). No todas tienen *Forma Cerrada* (*Int. Num.*, *Tma Richardson*, *Laplace*). Ver *Dif.*

- *Tma Fund. del Calc.* : conecta *Int. Def.*, derivada y límite. Si f continua en $[H_0(x), H_1(x)]$ y $F(x) = \int_{H_0(x)}^{H_1(x)} f(t)dt \Rightarrow F$ es derivable y cumple $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(H_1(x))H_1'(x) - f(H_0(x))H_0'(x)$. [6]

- *Int. Riemann* : forma de obtener la *Int. Def.*, se parte o *Cuantiz.* el dominio $\{x_i\}$. La integral es: $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq I = \int_a^b f \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ donde $m_i = inf f(x), M_i = sup f(x)$ son las imágenes menor y mayor de los intervalos de partición t_{i-1}, t_i (no confundir con *Int. Num.* que se toma el primero). Si la suma por defecto y exceso coinciden $n \to \infty \Rightarrow$ es Integrable Riemann $\int f$. *Int. Lebesgue* es mejor.

- Defectos de la Int. de Riemman:

  - Difícil extender a dimensiones mayores: ej: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en que parte de la superficie toca los límites de la caja.
  - Depende de la continuidad:
  - Necesita *Conv.* Unif. para poder intercambiar lim, $\int$ (meter el límite dentro de la integral) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$, sin embargo. Es una condición muy fuerte y con Lebesgue se puede debilitar. Hay muchas series que no Conv. Unif. (Ej??) pero tenemos el mismo resultado en ambos lados de la igualdad.

- *Int. Lebesgue* [1902]: (no confundir con su *Medida*) se *Cuantiz.* la *Imagen* $\{y_i\}$. El dominio puede ser todo lo raro y multidimensional que desees pero la imagen debe ser $\mathbb{R}$ como Riemman $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (*Hipersuperf.*). Necesita: 1) De la imagen Y: que f sea *F. Medible* (existan las preimagenes $x_i = f^{-1}(y_i)$). 2) Del dominio X: que sea un *Esp. Medida* Ω (tener una *Medida* para los intervalos (hipervolumenes que cambian según i) de la partición $\mu(X_i)$). La integral es: $I = \sum_i y_i \mu(X_i) \to \int f d\mu$

  Permite integrar una clase más amplia de funciones como:

  - Sucesiones de funciones como las de *Fourier*.
  - *F. Dirichlet* $1_{\mathbb{Q}}$: $\int_0^1 1_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ (no continua en ningún punto, ver *F. Weierstrass* y *F. Indic.*)

  $\exists$ la de Riemann pues exceso y defecto no coinciden sin importar la finura de partición. Útil en teoría de la medida, probabilidad...

1.8.1 Análisis vectorial. Campos (conservativo)

RESUMEN de *Anal. Vect.*: verlo como *Int. Riemann*, *Int. Num.*, *Metodo de Exhaucion*. Sumar (*Int. Def.*,) el conjunto de elementos *Dif.* (ver *Coord. Curvil.*) resultantes de evaluar la función f sobre dicho conj. Si $f = 1$ obtenemos *Medida* del conj.. Si $f =$ *Campo Esc.* (suma de esc. es un esc.) o *Campo Vect.* (suma de vec. es un vec.) obtenemos trabajo, flujo, divergencia,... Ej: $B = \int_S A \wedge dS$ 1) descomponer sup. en elem. *Dif.* dS. 2) *Prod. Vect.* de elem. dif. con A. 3) sumamos resultados (como suma de vec. es vec. da un vec.). (no rayarse si es divergencia, flujo o jacobiano).

- *Anal. Vect.* [Gibbs,Heaviside]: *Sist. Formal* de *Diferenc.* e Int. de *Campo Vect.* sobre $\mathbb{R}^3$. $\subset$ *Geom. Dif.* [Gibbs,Heaviside] del anal. de *Cuaternion. U2GPlano*).

[6] Dem: $F(x) = (\int f)(H_1(x) - (\int f)(H_0(x))$

- Int. de Lin.: 1) De *Campo Esc.* $\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))||\vec{r}'(t)||dt$ donde $\vec{r}(t)$ es la Curva *Param.* y $ds = ||d\vec{r}||$ el *Dif.* Long de *Coord. Curvil.*. Si $f = 1$ obtenemos la *Long. Arco*. 2) De *Campo Vect.* $\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$ donde usamos *Prod. Esc.* y da el **Trabajo**. Ver *Form. Int. Cauchy*
- Int. de Sup.: 1) De *Campo Esc.* similar a (2) pero con módulos. Si $f = 1$ da el área. 2) De *Campo Vect.* $\int\int_S F \cdot d\vec{S} = \int\int_T F(\vec{r}(s,t)) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})dsdt$, donde usamos el *Prod. Vect.* y da la divergencia o el flujo. Ver *Tma Stokes*.

- Defin.:
  - *Campo Esc.* : *Funcion* multivar. de un solo output: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ej: potencial eléctrico de *Dipolo* $f(x,y,z)$, *Hipersuperf.Kriging*. En general no tiene porqué definirse sobre un *Esp. Eucl.* y en Cartesianas. Por lo que es una F. definida sobre una región U de una *Var. Dif.* (trozo de esfera) $f : U(\vec{r}) \to \mathbb{R}$ (Fig. 13.1). Ver *Campo Conserv.*.
  - Obj. *Param.* o Vector Posic. o Func. Vect.:
    - Curva Param. o Trayectoria: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, en cartes. $r(t) = f_x(t)i + f_y(t)j + f_z(t)k$ en otras $r(t) = \sum_i f_{q_i}(t)q_i$ (no confundir con **Ec. Explicita** de 2D $y = f(x)$, suele ser raro tenerla). Ej: $\vec{r}(t) = t^2 i - 3tj + \sqrt{t^2 - 1}k$. Ej: *Cardiode* (las del (T*Sist. Coord.*) *Conica* (*Cartes. Param.*) etc. Ver *Esp. Tang.*, *Geom. Dif.* de Curvas, *Long. Arco*, *Geodesica*, *Circ. Oscul.*, *Aceler.*, *Curva Alg.*
    - Sup. Param o *Hipersuperf.*: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, en cartes. $r(s,t) = f_x(s,t)i + f_y(s,t)j + f_z(s,t)k$
  - *Campo Vect.* /tensor: es un vector/tensor de *Campo Esc.* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En general es una sección de *Fibr.* Tang. de la variedad sobre la que se definen los *Campo Esc.* (ver Agua tierra Fig. 15.1) Ej: Linea Fuerza de *Dipolo* $(f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$. *Mod. Estad.*. . Puede expresarse en *Coord. Curvil.* (ver Ej. de *Dif.*). Ver *Campo Conserv.*

- Op. Dif.: se pueden escribir con Factores de Escala de h.:
  - *Gradiente* (mapa de esc. a vec.): $Grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$ ver *SGD*, *Esp. Tang.*).
  - Diverg. (de vec. a esc.): $Div(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$ (*Prod. Esc.*)
  - Rotacional (de vec. a vec., curl): $Rot(F) = \nabla \wedge F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ F_x & F_y & F_k \end{pmatrix}$ (*Prod. Vect.*).
  - *Laplaciano* (de esc. a esc.): $Lapl(f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

- *Tma Stokes* : caso general de los siguientes:
  - Grad.: $\int_{C(a)}^{C(b)} Grad(f) \cdot d\vec{r} = f(b) - f(a)$ (int. de linea o camino=resta, trabajo en *Campo Conserv.*)
  - Div..: $\int_V Div(F)dV = \int_S F.dS$ (int. de div. del campo=flujo del campo sobre la sup. cerrada, 1º ec. Maxwell o Ley Gauss $Div(E) = \rho/\varepsilon_0 \iff \int_S EdS = q/\varepsilon_0$)
  - Rot. o Kelvin-Stokes: $\int_S Rot(F)dS = \int_C F \cdot r$ (rot.=camino).
  - Otros: Green, *Tma Fund. del Calc.*, *Form. Int. Cauchy* etc.. Ver *Campo Conserv.*

- *Campo Conserv.* : un *Campo Vect.* lo es, si se puede obtener del Grad. de un *Campo Esc.*: $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$. Dem. del *Tma Stokes* se derivan las tres def. de Campo Conservativo: 1) La dicha. 2) El trabajo solo depende de los ptos ini y fin. 3) El rotacional es 0. Ej-: magnetico

1.8.2 Diferencial. Integral para medidas y anal. vect.. Ejemplos

- *Dif.* (no confundir con *Diferenc.* o con *Dif. Finitas*): de $s(t)$ es $ds(t) = s'(t)dt$, i.e. cambio de la s cuando cambia poco su *Param.*. Ver Dif. *Coord. Curvil.*.
  - La posición de una párticula es: $s(t) = 2t^4 - t^3 + t^2$, *Estimac. Fermi* de cuanto recorre entre $t = 4$ y $t = 4.01$: $ds = s'(t)dt = (8t^3 - 3t^2 + 2t)dt$ luego $ds = 472 \cdot 0.01 = 4.72$ que se parece a los 4.74 obtenidos restando.
  - Otros: raiz de un nº con dif. *Long. Arco*, *Calc. Vol.*
- *Long. Arco* : $L = \int_C ds$ (pensar en *Int. Riemann*, ver *Fact. Esc.*)
  - El de *Geom. Riemann* (ver RESUMEN).
  - $L_{cartes} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ (usando *Long. Arco*) [7]
  - $L_{polar} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$ [8]
- Calc. Sup.:
  - $S_{polar} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2(\theta) d\theta$ area del sector "circular" centro origen [9]
  - $S_{param} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ Ej: en area de elipse paramétrica
- *Calc. Vol.* (sin Jacobiano) [10].
  - ¿*Estimac. Fermi* de cuanto necesitamos para un baño de grosor $h = 0.02$ cm a un cubo de $l = 10$ cm y a una bola de $r = 10$ cm? $\Delta V = (l+h)^3 - l^3 = 3l^2h + 3lh^2 + h^3$ despreciando aristas y vértices y quedándonos solo con las placas cuadradas $dV = 3l^2h = 6cm^3$. Idem para esfera. Ver *Compl. Simplic.*
  - Vol. *Paraboloide* hasta una altura h en cilíndricas: el dif. de vol. $dV = (rd\theta)dzdr$ (al girar θ barre un area que depende del r, coincide con factores de escala). Se cumple $z = r^2$, si integramos cilindros infinitesimales verticales, para un r dado $z \in [r^2, h]$, : $V = \int_\theta \int_r \int_z h_\theta h_r h_z d\theta dz dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_{max}} \int_{z=r^2}^{h} r d\theta dz dr$. Haciendo int. en orden conveniente (1º z): $= 2\pi \int_{r=0}^{r_{max}} r dr [h - r^2] = 2\pi \int_{r=0}^{r_{max}} [h\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^{r_{max}}$. Considerando $r_{max} = \sqrt{h}$. $= 2\pi(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4}) = \pi\frac{h^2}{2}$
- Int. de *Anal. Vect.*:
  - Momento Inercia I_{CM}: de un cilindro (R, L) rodando sobre plano inclinado (h): Elem. Corteza $dV = 2\pi RLdr \Rightarrow I_{CM} = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = 0.5\pi\rho LR^4 = 0.5MR^2$. [11]
  - Flujo complicado: Ej: int. de lin. en esfericas [physicsforums.com]: sea el campo $B = \frac{B_0 a}{r sin(\theta)}(sin(\theta)\hat{r} + cos(\theta)\hat{\theta} + \phi)$ y la curva *Param.* en Cartes. $\vec{r} = (acos(t), 2asin(t), \frac{at}{\pi})$ de $(a, 0, 0)$ a $(a, 0, 2a)$. Idem para el trabajo $W = \int_C F \cdot dr$ pero con *Prod. Esc.*.
  - *Vel. Luz* : con Ec. Maxwell (Fig. 13.1, *Retardo Difus. Innov.*)

---

[7] $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (dx\frac{dy}{dx})^2}$

[8] $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta}d\theta)^2 + (\frac{dy}{d\theta}d\theta)^2}$, como $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$ sale

[9] $S_{SectorDiferencial} = \frac{bh}{2} = \frac{(d\theta\rho(\theta))(\rho(\theta))}{2}$

[10] Jacobiano necesario para una integral de vol. del Análisis en *Coord. Curvil.* es $h_1h_2h_3$. Otras técnicas son: *Compl. Simplic.*, *Int. Num.*, *Int. Monte Carlo*.

[11] $E_p = E_c \iff Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}w^2$, como $w = v/R$ $v = \sqrt{frac2gh1 + I_{CM}/MR^2}$. v menor que si no rodara porque la E_p se reparte en trasl. y rotación.

1.9 T36. Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones. T37. La relación de semejanza en el plano. Consecuencias. Teorema de Thales. Razones trigonométricas. T38. Trigonometría plana. Resolución de triángulos. Aplicaciones.

1.9.1 Pentágono

- *Phi* $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o Razón Aurea:
  - $\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ el total es al mayor, lo que el mayor es al menor. (Fig. 1.1)
  - Es un elem. *A. Ent. Alg.*, sol. de $x^2 - x - 1 = 0$ (parecida a Ec. *Teor. Galois*). De hecho es un elemento del *A. Ent. Cuadr.* y es *Unid. Fund.* del *Grupo* $(\mathbb{Z}[\sqrt{5}], *)$ lo cual es muy útil porque siempre $(a+b\sqrt{5})^n = (c+d\sqrt{5})$. Ej: $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}$
  - Relacionado con *Fibonacci* mediante *Formula Binet*
- Pentágono: El lado del pentágono $l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2\sin 36^{\circ} = 1.175$. $\frac{d}{l} = \Phi$ Dem. viendo que triangulo ABC es isoceles y que los tres ángulos de vertice BC son iguales. (Fig. 1.1)
- *Espiral Aurea*

1.9.2 Trigonometria

- *Trigon.* : observar arcos y segmentos sobre circunf. goniométrica Ej: *Esp. Tang.*. Fig. 1.1

1.10 T41. Movimientos en el plano. Composición de movimientos. Aplicación al estudio de las teselaciones del plano. Frisos y mosaicos. 42. Homotecia y semejanza en el plano. 44. Semejanza y movimientos en el espacio.

- *SubG. Normal* : N de G si invariante por conjugación $\iff$ coinciden las clases laterales *Por la Izda* y dcha $\iff \forall n \in N \& g \in G$ el elemento $gng^{-1} \in N$, $\iff Ng = gN$ coinciden las clases dchas e izda de N en G. Equivale a *SubEV*.
  - *Rel. SubG. Normal* : $g_1 R g_2 \iff g_1 N = g_2 N$ (o $Ng_1 = Ng_2$ pq coinciden clases laterales).
  - Ej: Rot. y espec. del cuadrado: $G = \{i, g_1, g_2, g_3, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $N = \{i, g_1, g_2, g_3\}$. Con la tabla de grupo (ver Fig.) podemos ver que hay solo dos *Cl. Lateral* $[\vec{g}]$ y $[\vec{e}]$ (la izda y dcha coinciden):
    - $iN = \{g_1, g_2, g_3, i\} = Ni = [\vec{g}]$
    - $g_1 N = \{g_1, g_2, g_3, i\} = Ng_1 = [\vec{g}]$
    - ...
    - $e_4 N = \{e_1, e_2, e_3, e_4, i\} = Ne_4 = [\vec{e}]$

    El *G. Cociente* es $G/N = \{[\vec{g}], [\vec{e}]\}$ (similar a *A. Cociente*)

- Subgrupos de las *Apl. Lin.* (de matrices) (casi) ordenados por *Jerarq.* de inclusión:

Nombre	Tipo de *M. Transf.*	Signif. e invar. geom. cuando $E = \mathbb{R}^n$ *Esp. Eucl.*
Apl. Lin.	M rectang.	ver
G. Lineal General $GL(E)$	$\lvert M\rvert \neq 0$ (*M. Inv.* cuadradas)	conj. de todos los *Automorf.* (*Biyect.*, $\exists$ *M. Inv.*) con op. *Prod. M.*. Interpretable como *Var. Dif.* o G. Lie [12]
G. Lineal Especial : $SL(E) \subset GL(E)$	$\lvert M\rvert = 1$ (*Det.* 1)	transf. que mantienen area (ej: $\mathbb{R}^2$, Fig. 1.1 paralelogr.) o vol. ($\mathbb{R}^3$) dando al *Det.* la interpret. de cambio del vol. y orient ($<>0$ *Forma Multilin.*)
G. Esp. Ortog. $SO(n,E) \subset SL(E)$	$G \in$ *M. Ortog.* $\Rightarrow \lvert G\rvert = 1$	conj. de los giros, 1er subg. del *G. Semejanzas*. Ej: $SO(2,\mathbb{R})$ en *Transf. en Plano C*
G. Lineal Proyect. : $PGL(n,E) = GL(n)/ZGL(n)$ *G. Cociente*	$\lvert H\rvert \neq 0$ (inv.) y $dim(H) = (n+1,n+1)$ *Coord. Homog.*	conj. de todos las *Homograf.* (son *Isomorf.*). Ej: *G. Modular* usado en *Teor. Represent.* y *G. Galois*
G. *Proyec.* : P	$P^2 = P$ (*Apl. Lin.* Idem*Potente*)	[WikiProj(Math)] transf. que mantiene colinealidad (*Incidenc.*) . En sentido más amplio es una *Aplicacion* de un conj. (o estruct.) que da lo mismo al componerse consigo *Autorref.*. Ej: *Proyec. Canon.* Hay 2 tipos: – P. Paralela: ortogonal u oblicua, foco en Inf. No requiere *Coord. Homog.*: Ej: Proy. Vect. (*Prod. Esc.*) – P. Central: perspectiva, foco cerca. Requiere *Coord. Homog.*: Ej: Proy. Camara, *Reciproco* a *Vision 3D*. No confundir con *Homograf.* (*Geom. Proyectiva*)
G. *Transf. Afin* :	$(y = Ax + b)$ (matr. con *Coord. Homog.*)	transf. que mantiene colinealidad y proporc. de dist. [Wolfram] (paralelismo pero no dist., *Incidenc.*). No todas son *Apl. Lin.* (salvo *Coord. Homog.*)
G. Semejanzas :	$(y = rGx + t??) \subset$ G. *Transf. Afin*	compuesto por subg. G. Giros, G. Traslac. (caso particular de homotec.), G. Reflexion, G. *Homot.* (con centro C, casos Escalados o trasl.). *Isomorf.* a *Transf. en Plano C*
G. *Isometr.* o Eucl.:	$(y = rGx + t : r = \pm 1??)$	compuesto por subg. 3 primeros anteriores, mantienen distancias *Esp. Eucl.*
G. *Transf. Rigid.*	$(y = Gx + t)$, $G \in$ *G. Esp. Ortog.*	compuesto por subg. 2 (o 3) primeros anteriores. *Cambio Base*. Ver *Conica* invariantes

(*) *M. Ortog.* o de Giro G: $\iff G^{-1} = G^T \iff$ c o f ortonormales!! [Wiki]. G ortogonal $\Rightarrow \lvert G\rvert = \pm 1$. Ojo, *Det.*=1 *No Impl.* Ortog si no *G. Lineal Especial*. [13]. Conforman el G. Ortogonal $O(n,\mathbb{R})$. Ver *Transf. en Plano C*

- CONCLUSIÓN: ver *Pr. Erlangen*

[12] en $\mathbb{R}^{n^2}$, puesto que el det. es una ec. polin. sus element. satisfacen una

[13] $\pm 1 = \lvert I\rvert = \lvert GG^{-1}\rvert = \lvert GG^T\rvert = \lvert G\rvert\lvert G^T\rvert = \lvert G\rvert^2$

1.11 T43. Proyecciones en el plano. Mapas. Planisferios terrestres: principales sistemas de representación.

- *Geom. Proyectiva* : estudio de las distintas proyec.:
  - *Proyec.*
  - *Homograf.*
  - Cartograf. (*Tma Egregium*)

  Más generalmente es *Filos. Groth.* resolver problemas difíciles de *Geom. Alg.* que en Geom. *Afin* son complicados (ver *Curva Alg.*). Ej: descifrar códigos película Contact. Ej: *Coord. Homog.*, *Conica Projec.* (*Tma Pascal*, *Tma de Cierre Poncelet*) o *Tma Bezout*, *Diagr. Schlegel*, *Sup. Reglada*

- *Tma Bezout* (Fig. 1.1): dos curvas algebraicas (ej. dos *Curva Eliptica*) de gr. n y m se cortan en n*m puntos. Al considerar el infinito del *Plano Proyec. O* (*Geom. Proyectiva*) se demuestra fácil. Ej: *Ley Grupo Elipt.*

- Sistema Diedrico: (Tecnología ESO) *Proyec.* ortogonal sobre 3 planos Alzado, Perfil y Planta. Perspectivas: - Caballera: los 3 ejes forman 90,135,135, grados. Muestra el alzado del dibujo tal cual y se puede sacar de el, mantiene la proporción en relación a la altura y anchura pero no en la profundidad. - Isometrica: 120,120,120 mantiene la proporción en las tres. - Conica: todas las lineas paralelas convergen en 1,2 o 3 **Puntos de Fuga** según dimensiones estemos viendo.

  Las dos grandes revoluciones del SXX: **Cubismo** de Picasso: rompe con siglos de perspectiva renacentista al dibujar en cada cubo una vista distinta. **Abstracto** de Kandisky: rompe con dibujar objetos y plasmar otras características, es similar a los mosáicos árabes (placer de la simetría)

- Esp./*Plano Proyec.* : Los objetos de dimensión superior proyectados en el dicho espacio se representan con *Coord. Homog.*. Ej:
  - *Esf. Riemann* $= \{\mathbb{C} \cup \infty\}$ es el *Plano Proyec.* $\mathbb{C}$. Fig. 1.1. Equivale a *Proyec.* Estereográfica: $f : Esfera \to \mathbb{R}^2 o \mathbb{C}$. Pto en *Sist. Coord.* Esf a pto (x,y) en plano $z = 0$: $f(\phi,\theta) = x + iy = cot(0.5\theta)e^{i\phi}$. Es una *Transf. Conforme*.
  - *Proyec.* Mercator [1550]: es una *Transf. Conforme* cilíndrica que preserva formas y direcciones localmente (*Esp. Eucl.* local)

  Ver *Curva Alg.*, *Homograf.*, *Tma Pascal*, *P. Apolonio*, *Tma de Cierre Poncelet*, *Homeomorf.*.

- *Tma Egregium* de Gauss: en **Cartograf.**, dice que la *Curvatura* de una superficie (ver *Tensor Curvat.*) puede obtenerse midiendo ángulos y distancias internas sobre la misma superficie sin hacer referencia al espacio 3D euclideo externo. Un colorario es que una hoja de papel *Sup. Desarroll.* no puede doblarse para formar una porción de la esfera sin arrugarse (necesita estirarse *Homeomorf.*) y por esto no es posible la cartografía proporcional de la tierra.

1.11.1 Vision Artificial

- *Vision 3D* (Visión Artificial)=**Percepción**=*Probl. Inv.* de la *Proyec.*=No-*Aplicacion* (similar a *Mapa Contact.* Ej: 1) Geom. Epipolar: dadas dos fotos estereo, reconstruir el cuerpo 3D. 2) Homografia: dada 1 sola foto 2D torcida de losetas, ponerla de frente. 3) Homografía: dadas 2 fotos y puntos correspondientes (de una fachada), ponerlas de frente y crear foto panorámica (stitching). Son

Veamos el 3) [YoutubeHomogrCompVis] pues 1) y 2) con solo una foto se resuelven con restric. de *Incidenc.* . [14] :

- *Coord. Homog.* : dado el vector de *Coord.* homogen. ej.-3D $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ el valor real se obtiene dividiendo por último elemento $r' = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \\ 1 \end{pmatrix}$. Permite matricial problemas y pasarlos a *Ec. Homog.* [15].
- M. Cámara (estenopeica o pinhole) C vs P: la M. *Proyec.* 3D a 2D en *Coord. Homog.* es de dim. $3x4$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$, pero al situar el sist. ref. sobre el plano (Fig. 1.1) siempre $Z = 0$, la columna de C_z es redundante y se reduce a P de dim. $3x3$: $r = PR$.
- *Homograf.* o Transf. *Proyec.* o Proyectiviad o Proyec. Colineal: es una *Apl. Lin. Isomorf.* entre dos Esp. o *Plano Proyec.*. Mantiene la colinealidad (*Incidenc.*). Ver *G. Lineal Proyect.*, *Geom. Proyectiva*. Para la cámara 1 tenemos $r_1 = P_1 R_1$ y para la 2 $r_2 = P_2 R_2$. Podemos relacionar r_2 y r_1 sin intermediarios mediante la *Homograf.* H: $r_2 = P_2 P_1^{-1} r_1 \iff r_2 = H r_2$, quedando: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} h_{12} h_{13} \\ h_{21} h_{22} h_{23} \\ h_{31} h_{32} h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$
- Sist. Ec. Homog.: según *Coord. Homog.* las reales valen: $\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2/w_2 \\ y_2/w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 r_1 / h_3 r_1 \\ h_2 r_1 / h_3 r_1 \end{pmatrix}$, haciendo $w = 1$ y pasando todo a la izda queda: $\begin{pmatrix} x_2'(h_3 r_1) - h_1 r_1 \\ y_2'(h_3 r_1) - h_2 r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quedando el sist. *Ec. Homog.* de la Fig. 1.1: $Ah = 0$
- *SVD* : generaliza *Diagon.* para *Sist. Sobredet.*. Al haber realmente 8 gr. de libertad h_{ij} bastan 4 parejas de ptos pero como hay más filas (por RAMSAC) la usamos. Da un *MMSE* $|Ah| \approx 0$ (lo más cercano por a 0) t.q. $|h| = 1$. $[U, S, V] = svd(A) \Rightarrow h = V(:, 3)$. DLT es una extensión.

1.12 T45. Poliedros. Teorema de Euler. Sólidos platónicos y arquimedianos.

- *Solidos Platon.* : hay 5. En efecto:

  n: nº a_i rodean una cara, cumple $Cn = 2A$ (ya que cada a_i toca dos caras). c: nº a_i llegan a un v_i, cumple $2A = Vc$ (ya que cada a_i comparte dos v_i). Metiendo esas relaciones en F. Euler para que queda en función de A: $V - A + C = \frac{2A}{c} - A + \frac{2A}{n} = A(\frac{2}{c} - 1 + \frac{2}{n}) = 2$. Con las restricciones: a) El paréntesis debe ser positivo > 0 ($A > 0$). b) $n \geq 3 \& c \geq 3$ (caras=polígono regular). Sale un problema de *Progr. en Ent.* $\begin{cases} c = 3 \Rightarrow & n = 3,4,5 \\ c = 4 \Rightarrow & n = 3 \\ c = 5 \Rightarrow & n = 3 \end{cases}$

- *Diagr. Schlegel* : *Proyec.* de un politopo en $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^{d-1}$ partiendo de un pto externo de sus caras para estudiar sus propiedades *Topol.*. Ej: *J. Dodecaedro* (3D proyectado a 2D). *Teseracto*. Ej: Cualquier *Politopo Cvx* en 3D [Wiki]) da lugar a un *G. Plano*.

- Grafo *Dual*: poliedro (o grafo) cuyos vértices son las caras de otro poliedro. Ej: Tabla Poliedros (Cvx) y sus duales (no Cvx)

[14] propiedades que se mantienen en una *Homograf.* o *Proyec.* como: 1) **Colinealidad** (3 ptos siguen en una recta) y 2) Razón Armónica. Es similar al paralelismo mantenido en *Transf. Afin*. Capta el concepto de pto en recta, linea en plano, etc.. (*Indep. Afin*). Un pto $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ está en recta $\boldsymbol{r} = [a, b, c]$ (v. director, falta pto) si su p.e. es nulo $ax + by + cz = 0$. 2) Centro de la cámara: $\boldsymbol{c}$ es el *Kernel* P, es un invariante y cumple $P\boldsymbol{c} = 0$

[15] la composición de trasl. o de *Proyec.* no pueden ser expresada como producto de matrices en Coord. Cartes pero si en CH. También *Regr. Min. Cuadr.*

Politopo Cvx	Tetraedro (otro tetraedro), Cubo (octaedro), Octaedro (cubo), Dodecaedro (icosaedro), Icosaedro (dodecaedro).
No *Politopo Cvx*	*Peq. Dodec. Estrellado* (gran dodecaedro), Gran Dodecaedro (peq. dodec. estr.), Gran Dodec. Estrellado (gran icosaedro), Gran Icosaedro (gran dodec. estrell.)

- RESUMEN: polígono (2D), *Poliedr.* (3D), politópo (nD), pueden ser *Politopo Cvx* o no. Los más famosos son:
  - Tetraedro (triángulo 3D), *Simplic.* (nD)
  - Cubo y *Teseracto* (4D)
  - *J. Dodecaedro*: es el truncado (elimin. de las pirámides de las caras) del *Peq. Dodec. Estrellado* (no *Politopo Cvx*)
  - *Politopo Cvx* y Politopo
  - No *Politopo Cvx*: **Poliedro Toroidal** (un caso es el Poliedros de Császár), *Peq. Dodec. Estrellado*

1.13 T52. Producto escalar de vectores. Producto vectorial y producto mixto. Aplicaciones a la resolución de problemas físicos y geométricos.

- *Forma Multilin.* : *Aplicacion* $f : V_1xV_2x..xV_n \to W$ donde V_i vectores y W escalar (si vector se dice **Apl. Multilin.**), que es lineal en cada argumento $f(x_1,x_2,...,r(x_i+x_i'),..,x_n) = rf(x_1,x_2,...,x_i,..,x_n) + rf(x_1,x_2,...,x_i',..,x_n)$. Ver *Pol. Homog.*. Si $|M|(<) > 0$ (no) mantiene orientación (reflejo).

Definición	Obtención	Interpretación Geom.
Det. de una M. cuadrada: **Forma Multilin. Alternad.**: si x_i, x_j son l.d. $\Rightarrow f = 0$.	Con R. Sarrus o R. Leibniz: suma del prod. de todas las *Permut.*, con signo alternado, ver *G. Simetrico* y *G. Alternante*.	En 2D/3D da el área/volumen (ver $\|M\| = 1$ *G. Lineal Especial*). En Alg.: *M. Inv.* o SCD. Ver *Vandermonde*, *G. Lineal General*, *G. Lineal Especial*
Prod. Vect. : de 2 vect. de $\mathbb{R}^3$: **Apl. Bilin. Alternada** (toma dos vect. y da uno) anticonmut.	Con desarrollo de un *Det.*	Da otro perp.. su módulo es es área del paralelogramo. Ej: Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, *Alg. sobre Cuerpo*, Rotacional *Anal. Vect.*
Prod. Esc. o interno de 2 vect. $< x,y >$: **Forma Bilin.** 1) Lin. *Por la Izda*: $< ax+by,z >= a < x,y > +b < y,z >$, 2) *Hermit.*: $< x,y >= \overline{< y,x >}$. 3) Def. posit: $< x,x > \geq 0$	Con *Prod. M.*: $< x,y >= x^T My$ en *Esp. Eucl.* $M = I$	Da ***Proyec.* Vect.** Ortog. ($a_p = \boldsymbol{a}.\hat{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}.\frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|}$, Ej: *Par. Seguridad* (v_x, v_y).) . Ver *Tensor Metrico*, *Truco Kernel*
Prod. M. de M. rectang.: **Apl. Bilin.** (no conmutativa)	Con composición de sist. ec.: $\binom{y1}{y2} = \binom{ab}{cd}\binom{x1}{x2}$ y $\binom{z1}{z2} = \binom{ef}{gh}\binom{y1}{y2} \Rightarrow \binom{z1}{z1} = \binom{ef}{gh}\binom{ab}{cd}\binom{x1}{x2}$	Ej: *Alg. sobre Cuerpo*, *A. No Conm. Matr. Cuadr.*, Compos. *Digraf.*, *Regr. Lin.* (*M. Covar.*)

- *A. No Conm. Matr. Cuadr.* : $(M_{nxn}, +, x)$ con a suma y *Prod. M.*. Contiene elementos Nil*Potente*. Existen $M^m = 0$ (ver P. Matr. Mortal *Probl. Indecib.*. No es *Dom. de Integridad*

- *Alg. sobre Cuerpo* $(A, +, ., \wedge)$: *EV* al que se le añade un "producto" $\wedge$ (*Prod. Vect.* (Apl. Bilin.)). Según el prod. distinguimos no/asociat. y no/conmutativas. Ej clásicos:

Apl. Bilin. *Forma Multilin.*	*EV*	asociat./conmut.
C. EV Alg. Compl.	$\mathbb{R}^2$	S/S
Prod. Vect.	$\mathbb{R}^3$	N/N (anticonm.)
Cuaternion.	$\mathbb{R}^4$	S/N

Otros ej.:

  - Ej-asociativa: Mat. 1) M. cuadradas con *Prod. M.*. 2) Op. *Hermit.* de un *Esp. Hilbert* con Prod. la Composición de op.
  - Ej-no asociativa: 1) **Alg. Lie** 2) Alg. de los *Campo Vect.* sobre una *Var. Dif.*

1.14 56. Evolución histórica de la geometría.

- *Decib. Geom. Eucl.* (y *Geom. No Eucl.*): Hilbert mostró su *Consist.*. Tarski que la *Geom. Anal.* y por tanto la Eucl. [16] expresada en *Log-1* es *Decible* pero Incompleta (Ej: *C. Num. Constr.*). [17]. Estos resultados motivaron el Pr. Hilbert (*Crisis Matem.*)

- *Pr. Erlangen* [Klein]: Unificó la Geom. Sintética (*Geom. No Eucl.*, la de dibujos y postulados en palabras, *Sist. Formal*) con la *Geom. Anal.* (*Geom. Riemann*). Un tipo de Geom. es el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un *Grupo* concreto de transformaciones $\Rightarrow$ cualquier clasificación de los grupos de transformaciones es una clasificación de las geometrías. Los 4 tipos principales son G. *Isometr.* (Geom. Eucl.), G. *Transf. Afin*, G. *Proyec.* y G. *Topol.* (transf. continuas).

  Todas, incluso las *Geom. No Eucl.*, son casos especiales de *Geom. Proyectiva* siendo esta la reina (en verdad la *Topol.*). Creó hype en los grupos creyendo que podrían unificar toda la Matemática. Ver *Decib. Geom. Eucl.*.

1.15 (*) Otros temas

1.15.1 (*) Aprendizaje Automático

- Rec. Patrones (inicios): Dada una linea de 12 pixeles, ¿cuantas config. representan el patrón 1D 1010?. Lo mismo con el patrón 2D *A*. Idea: recuerda a contar las *P. Circular* de un muestreo a groso de la imagen. La naturaleza estadística de las mediciones lo hace inabarcable por combinatoria. Ej: *Rec. Voz*

- *Aprend. Autom.* (Machine Learning): una de las 3 ramas de la *Estad.* (incluida en *Estad. No Param.*). Se basa en dos etapas (equival. bajo *Infer. Estad.*): *Entren.* y *Test*:

[16] más precisamente la Teor. de Cuerpos Reales Cerrados (ver *C. Num. Alg.* que son *Clausura Alg.*, ver Tma Tarski–Seidenberg) [WikiTarskiAx]. Tarski solo usa como *Obj.* primitivo el pto=silla=n° real *Formalismo*

[17] (¡podemos demostrar/refutar cualquier proposición pero algunas no pueden ser creadas!). Esto no contradice el I *Tmas Goedel* porque los *Axiom.* de Tarski (ver Wiki) no llegan a tener el poder expresivo de *Log-1*

- *Entren.* (o aprendizaje): *Estimac.* de los *Param. Estad.* del *Mod. Estad.* a partir de las observaciones (Big Data). Es *Probl. Inv.* (similar a *Interpol.* y *Reciproco* a *Test*). Se suele basar en *Optim.* una *F. Verosimilitud* o *F. Perdida* mediante *SGD*. Evitamos *Sobreajuste* con *Valid.* cruzada. Ver *Maldicion Dim.*.

- *Test* (o *Infer. Estad.*): hacer una predicción una vez hemos *Entren.*. Ej: *Discr. vs Gener.*, *Clasif. Bin.* o *Dat. Perd.*. Ver *Control Calidad*. Es el *Probl. Inv.* del *Entren.*

  All Models Are Wrong but some are usefull [Box, *Control Calidad*]: [18]

- Tres paradigmas son:

  - No supervisado: clustering, *Red. Dim.*, *Autoencod.*, vector *Cuantiz.*
  - Supervisado: clasificación y *Regr.*
  - Aprendizaje por Refuerzo: Markov Decision Process (ext. de *Cadena Markov*), *Estoc.*, *Viterbi*. Puede ser *Creat.*

- Modelos más usados:

  - *Estad.*: *NN* (*U11Deriv*), *KNN* (clasif. usando los k-vecinos más cercanos del conj. *Entren.*, ver *Interpol.*) y *SPN* (*PGM*). Simples: *Regr. Lin.* o *GMM*
  - *Estoc.*: *CNN*, *LSTM* [19], *CRF*, *HMM*. Simples: *ARMA*, ...

- *SVM* (Máquina de Vector Soporte) [Vapnik]: para *Clasif. Bin.* Lineal, ajusta el mejor *Hiperplano* que separa dos conj. de datos. Se usa el *Truco Kernel* para hacer Clasif. No Lineal llevando a un Esp. Superior (*Inclus. Canon.*) los datos (*Var. Holg.* y *Kernel*) con *Prod. Esc.*, permite *Anal. Cvx*

- *GAN* : $min_{G\in NNGen} max_{D\in NNDiscr} V(G,D)$ 1) G intenta generar datos como los reales desde una entrada de ruido y 2) D intenta distinguir los datos generados de los reales. Es una *Optim. Minimax*. La clave es que en el paso *Entren.* de G, la D transfiere a G su "conocimiento" por retropropagación. La *Divergencia* o distancia entre la Distr. de datos real y de G se obtiene con *Muestr.* (no analíticamente). Ej: Loop Modelling donde por G entra imagen con cruz de ceros y sale imagen con cruz reconstruida similar a la original (es una Imput. de *Dat. Perd.*).

- *Deep Dream* : es el resultado de visualizar la imagen I de entrada que más activa la salida O un cierto filtro W (matriz normalmente de 5x5, puede tener profundidad 5x5x3) de una *CNN* (*Convol. NN*: $O(x,y) = W \cdot I(x,y)$ donde $\cdot$ es el prod. Hadamard o punto). La idea es buscar con *SGD* el I_D (partiendo de ruido) que produce todo 1s (máximiza) en O. [DotCSV]. Recuerda a *Fract.*. Ver *Visualiz. Datos*. Si I_D son rayas oblicuas, el filtro dará O altos si le entran este tipo de I

1.15.2 (*) Modelos Gráficos Probabilísticos (PGM)

- *PGM* (Prob. Graphical Model): grafo que expresa la estructura de la dependencia condicional entre VA. Usado en *Aprend. Autom.*. Unifica *Estad.* y *Estoc.*:

  - *Arbol de Prob.* (Tuberia de Prob.): Es un *Diagr. en Arbol* donde los padres e hijos son las *Prob. Condic.* entre sucesos (no VAs), los hijos son sucesos Incompatibles, y las prob. de las hojas del último nivel son Prob. Conj. (*Distr. Conjunta*) cuya suma es 1 y representan una *Distr. Prob.* multidim. de varias VAs discretas.

[18] aforismo filosófico (no solo para la ciencia). Se solventa evitando el *Sobreajuste* (máxima de la *TAI*). El Tma de No Hay Almuerzo Gratis dice que cuales quiera dos algoritmos (NN, SVM....) son equivalentes, promediados sobre todos los problemas reales del mundo

[19] es *Teor. Unif.* para Proc. *Estoc.* sin *Prop. Markov* pues es *Rel. Recurr.* y *Calc. Lambda*

- *GMM* o *SPN* : en una *NN* no es posible integrar o sumar hipercubos (*Distr. Marginal*). Son *Comb. Cvx* de *Distr. Prob.*. Sol. *Maldicion Dim.*: el *Entren.* no es más que encontrar una *Simpl. Alg. Karnaugh* de su Forma Canónica como suma de mintern, esto permite Infer. tratable. Tiene *Alcanzabilidad*. Las reglas de suma y producto recuerdan a *Anal. Dim.*
- *HMM* : *Cadena Markov* donde cada estado puede emitir observaciones según una *Distr. Prob.* Ej: *Rec. Voz* (de estados *GMM* o *SPN* + *Mod. Lenguaje*): *Viterbi* = *Progr. Dinam.* en (*Reticulo Prop. Markov*) encuentra la secuencia de estados más probable. Sirve para voz, escritura, de/codificar, Aprendiz. Refuerzo, proteinas (estruct. secundaria).
- *Red Bayesiana* [Judea Pearl]: Para *Infer. Bayes.* Grafo Acíclico Dirigido (ver Fig.). Debido a las restricciones de las independencias, si muchas variables se ahorra en la tabla de valores de la prob. conjunta $P(X_1,X_2,X_3) = \prod_k P(X_k|parents(X_k)) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1,X_2)$ donde $X_i = V,F$ (verdadero o falso). Se usa para inferir variables no observadas conocidas las otras. Ej1: prob. de lluvia si cesped mojado. proteinas, enfermedades... Pearl creó el Alg. de Propag. de Creencias.
- *MRF* : *Campo Aleatorio* que cumple la *Prop. Markov* : vecindad en *Prob. Condic.*=no-memoria (*Progr. Dinam. Reticulo*) *LSTM=Suav.=Esp. Topol.*: $P(X_i|X_j, i \neq j) = P(X_i|X_j, j \in Vecin.(i))$. Ej: *Modelo Ising* $H = J\sum_{i,j} s_i s_j + B$ (*Fisica Estad.*). [20]. El *CRF* o *MLN* son casos.

1.15.3 (*) Procesamiento del lenguaje natural

- *NLP* (Procesamiento del Lenguaje Natural): dos niveles que deben colaborar:
  - Lógico: *Gramat.*, *ATP* (solo en *Log-0* posible), Resolvedor de Prob. de Secundaria o de Olimpiadas matemáticas. Ej: Wolfram Alpha, *Calculus Ratiocinator*
  - Estadístico: *Mod. Lenguaje* y *Rec. Voz*. Word2Vec: *Red. Dim.* con input: palabras **One-Hot** vector (var. *Nomin.*, *Inclus. Canon.*), output: WordEmbedding (mantienen distancia semántica rey+mujer=reina). Ej: Traductor de Google, GPT-3.
- *Mod. Lenguaje* : *Gramat. Estoc.*. Es *Distr. Prob.* o *Cadena Markov* (de orden alto) de palabras. Ej: **Trigram.** $P(X_t|X_{t-1},X_{t-2},X_{t-3})$. Debido a las *Depend. Estad.* (a distintos niveles: letras, palabras,...) umbralizando es sparse.
  - Perplejidad: $P = 2^H(F)$, donde H es la *Entropia Inform.*. En *Base Datos* Brown de 10^6 palabras y muchas frases una trigram da $P = 247$, i.e. $H(palabra) = log_2 247 = 7.95$ bits. Este nº indica cuando podemos comprimir (*Codig. Huffman*), predecir (*HMM* 1/247 palabras siguientes) y corregir (*Det. Corr. de Errores*). Cuando menor sea P mejor haremos estas 3 tareas.
  - *Mod. Prod. Voz* [Fant]: fuente ruido/impulsos+*F. Transf.*. Codif. LPC: la muestra de voz actual depende linealmente de las anteriores (*Filtro IIR*) más un *Error* de diferencia. Esto permite comprimir (mandar solo el error y aplicarle *Ley Mu*).
  - Mod. Musical, Mod. Palabra,....

1.15.4 (*) Teoría de la información y de la señal. Proceso estocástico. Serie temporal

- *T. Inform.* :

[20] Tiene dos componentes: el acople (spin con vecino solo) y el campo magnetico B. Explica el ferromagnetismo. Al final del tiempo llega a un equilibrio no estático porque los espines siguen cambiando. Hay una Tª a partir de la cual desparece bruscamente la magnetización. En 1D no se predice transición de fase [Ising-triste]. En 2D si [Onsager-feliz]. En 3D se está buscando todavía la solución. En otro tipo de redes: bandadas de Estorninos (starling murmuration): el cambio en el vector orientación de cada pajaro afecta solo a los 7 más cercanos.

  - *Fuente Inform.* : *Mod. Estad.* discreto puesto en forma generativa y con una vel. de emisión bps o sps (Bits/Simbol. por Seg.).
  - *Entropia Inform.*: *Codig. Huffman* y *Mod. Lenguaje*
  - Capacidad Canal: $C = Wlog_2(1+S/N) = 2500log_2(1+1000) = 25000bps$ donde ancho de banda $W = 2500$Hz y donde la relación señal ruido es $S/N = 1000$ (no en dBs), supone Ruido gauss. Si ruido rosa $C = \int_0^W log_2(1+S(f)/N(f))df$
  - Otras: Dimensionar según probabilidad de uso una red.

- *T. Segnal* (Señal): estudio de las *Serie Temporal* (1D) o Proc. *Estoc.* (2D): *Princ. Incert. T. Inform.*, *Detec. Segnal.*, *Fourier* (análisis espectral), *Autocorr.*, Diseñar *Filtro FIR. Dat. Perd.*, *Tma Nyquist*, *Estacion.*, *Ergod.*, *Rec. Voz*, *Compr.*

- Proc. *Estoc.* : conj. de *Var. Aleatoria* X_t indexadas normalmente por el tiempo $t = \mathbb{N}/\mathbb{R}$ (proc. discreto/continuo, ver *Camino Aleat.*). t puede generalizarse a índice espacial i, j como ocurre en una imagen (ver *Campo Aleatorio*). La *Estad.* se encarga del espacio y la *Estoc.* del tiempo aunque son equivalentes en *PGM*. Es un *Sist. Dinam.* con aleatoriedad o *Mod. Estad.* temporal estudiado por la *T. Segnal*. Ej:

  - *ARMA* [Box-Jenkins, *Control Calidad*]: $x(t) = c + \varepsilon(n) + \sum_i^p a_i x(t-i) + \sum_j^p b_i \varepsilon(n-i)$ un *Filtro IIR* cuya entrada $\varepsilon(n)$ es un ruido blanco. *Estoc.*. MA Equivale a una *Regr. Lin.*, para *Rec. Voz* [21]
  - *Mod. Lenguaje* y *Mod. Prod. Voz*
  - *Proc. Bernoulli.*
  - *Camino Aleat.* o *Cadena Markov* Fig. 23.1
  - *LSTM.*
  - *Campo Aleatorio*

- *Campo Aleatorio* : $\{F_t : t \in T\}$ conj. de *Var. Aleatoria* F_t indexadas por elementos t de un *Esp. Topol.* T (o *Manifold*). Cada *Realiz.* da un *Campo Esc.* o *Hipersuperf.* (ver *Kriging*). Ej: altura del mar en la tierra $r(\theta, \phi) \sim$ *Normal* (es además *Estoc.* y *Prop. Markov*). Otros Ej::

  - Vértices de un Grafo que toman valores aleator.
  - *MRF* y *CRF*: cumplen *Prop. Markov*
  - Matrices Aleatorias: usadas en la *Hip. Riemann VIII* son un caso especial en el que no hay evolucion temporal (solo correlación espacial) Ej: La Distr. *Normal* Matricial: la variable es una matriz y no un vector como en el caso de la Normal multivariada.

- *Serie Temporal* : es la realización de un Proc. *Estoc.*. Puede ser multidim. (ver *PCA*) o unidimensional: lista de datos númericos $\{(x_t) : t = 1, 2, ...N\}$ dependientes (o no) en el tiempo. Ej:*ARMA*. No confundir *Depend. vs Correl.*. Ej: ¿como se distribuyen las notas de una obra?, *Mod. Epidem.*

  - Num. Indice: es una Serie Temporal. Se usa en Economia $I_{t,s} = \frac{x_{t,s}}{x_{ref}}$ donde x_{ref} valor de referencia de un producto, t tiempo, s espacio.

- Características:

[21] los coef. de *Autocorr.* de un fonema *Estacion.* siguen un *Mod. Estad.* AR $r(k) = a_1 r(k-1) + a_2 r(k-2)$, $\begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ .. \\ r(p) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & ... & r(p-1) \\ r(1) & r(0) & ... & r(p) \\ & ... & & \\ r(p-1) & r(p-2) & ... & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_p \end{pmatrix}$ M. tipo *Toeplitz* (no confundirla con *M. Autocorr.* que es *Hermit.*) salen los a_i y reconocemos.

- Proc. *Estacion.* en señal 1D discreta: si su distribución conj. no cambia con el tiempo. Una restricción más débil y práctica es P. E. en Sentido Amplio (WSS) si: a) *Media* indep. de n, $E[x(n)] = m(n) = cte \forall n$. b) *Autocorr.* depend. solo del retardo $R(n_1,n_2) = R(n_2-n_1) = r(\tau)$. [22] Necesario para poder aplicar *Tma Wiener-Khinchin* (*Fourier* con *Autocorr.* = temporal, similar a *Tma Parseval*).
- Proc. *Ergod.* en señal 1D: en un parámetro (media μ, *Autocorr.* $r(\tau)$) si coinciden el valor-longterm (de una sola *Realiz.* con muchas muestras $r(\tau) = \sum_t x_1(t)x_1(t+\tau)$) con el valor-esemble (de tomar una muestra de muchas Realiz. $r(\tau) = \sum_i x_i(0)x_i(0+\tau) = \sum_i x_i(1)x_i(1+\tau) = ...$). Si su valor no cambia según la forma de muestrearlo. Ej: la voz

Ej no ergódico (que suele ser más difícil de encontrar):

* Ciertos *Camino Aleat.*: Fig. 23.1.
* Proceso de Monedas: dos monedas, una justa A y otra de dos caras B. Elegimos moneda y luego la muestreamos $X[n]$. 1) La media-longterm puede ser $E[X] = E[A:1,0,0,1,0,...] = 0.5$ o $E[X] = E[B:1,1,1,1,..] = 1$. 2) La media-esemble de juntar muchas *Realiz.* de una muestra es $E[X] = P(A)*E[A]+P(B)*E[B] = 0.5*0.5+0.5*1 = 3/4$. No es ergódico porque no coinciden las dos medias.

1.15.5 (*) Estadística: Detección de errores. Datos perdidos. PCA. Compresión

- *Det. Corr. de Errores* : ver *Error*
  - Cod. CRC (Cyclic Redundancy Check): para detec. err.. Podemos aplicar *Rel. de Congr.* al *A. Polin. sobre K* por ser *Dom. Eucl.* basado en la división mod2 del $\mathbb{K}[x]$ donde $\mathbb{K}$=*C. Finito* (pol. con coef. 0 o 1 similar a *C. Num. Constr.*).
  - Cod. Hamming: cada palabra lleva añadidas unas redundantes que distan del resto una cantidad de cambios d. *P. Apolonio*
  - Cod. Convol.: para detec. y corr. *Viterbi*
  - *Mod. Lenguaje*: *Dat. Perd.* + *Viterbi*
- *Dat. Perd.* e Incertidumbre (Missing Data (MD) y Uncertainty):
  - *Distr. Marginal* Acotada: $P(\boldsymbol{x}|q) \approx \int P(x_r,x_u)dx_u =$ [*GMM* diag. de 1 sola gauss.] $= \prod_{i\in r} p_i(x_i|q)\prod_{i\in u}\hat{p}_i(x_i|q)$ donde $\hat{p}_i(x_i|q) = \int_{-\infty}^{y_i} p_i(x|q)dx$ [MiTesis]
  - Imputación: $\hat{x_{i\in u}} = \int_{-\infty}^{y_i} p_i(x|q)xdx$. Equivale a *MMSE* [Ma13AHearingInspired] Fbxest = binaryImputation(Fby, mask, GMMVozLimpia); [Morales13AGerman]. Hoy se hace con *GAN*.
  - Propag. de Incertidumbre: *Int. Monte Carlo* [Morales17], ver *Error*.

  Ej: para *Rec. Voz*. Ej: Estimates of Model Accuracy (EMA) tool: compara 150 PDBs enviados por diferentes grupos de una misma proteina y se obtiene el "QA estimates" fichero de accuracy para cada átomo. En *T. Juegos* es Inform. Imperf. Ver *T. Decis. Estad.*, *Det. Corr. de Errores*, *Proc. Decis. Markov*

22

* *Corr. Cruzada* no estacion.: $R_{X,Y}(n_1,n_2) = E[x(n-n_1)y(n-n_2)] = \begin{pmatrix} R(0,0) & R(0,1) & R(0,2) & .... \\ R(1,0) & R(1,1) & R(1,2) & .... \\ .... \end{pmatrix}$ M. cualquiera.
* *Corr. Cruzada* estac.: $R = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & .... \\ R(-1) & R(0) & R(1) & .... \\ ..... \end{pmatrix}$ M. *Toeplitz*.
* *Autocorr.* estac.: $R = \begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & .... \\ r(1) & r(0) & r(1) & .... \\ ..... \end{pmatrix}$ es *Hermit.* no confundirla con M. *ARMA* para *Rec. Voz* o *M. Autocorr.* que es para multivar.

- *PCA* [Pearson] = Transform. de Karhunen-Loève = *SVD* (Singular Value Decomposition) = *Red. Dim.* (*Compr.*) = *Anal. Fact.* (no confunfir con *Exp. Fact.*): Son técnicas algebraico-estadísticas (resol. de sist. ec.). Busca decorrelar los datos (*Diagon.* matriz de covarianza) o *Red. Dim.* de los datos (encontrar base óptima de representación con mínimas componentes *TAI*) como *Autoencod.* . o NMF

  Equivale a hacer *Regr.* de un *Elipsoide* cuyos ejes principales son los de la transformada (Fig. 23.1). Una desventaja respecto al Autoencoder es que PCA (Anal. Factorial...) supone linealidad (los datos son *Comb. Lin.* de una cierta *Base*).

  - Señal 3D de media nula con N muestras a transmitir de la que computamos su *M. Covar.* (ver)
  - *Diagon.* de *M. Covar.* Σ)=[P,λ]: t.q. $\Sigma p_i = \lambda_i p_i$
  - Transformar: $Y = XP$ t.q. Σ_Y es diagonal. Basta transmitir las primeras componentes más energética de Y (con mayor λ_i vienen ordenadas) y P.

  Ej: *Vision 3D*, Biología *Mapa Contact.* Ej: el conocimiento inicial en Física, Matemáticas e Inglés influye en pasar la carrera de Ingenieria. Ej: que features son las importantes. Se suele usar ANOVA y Yate. Ej: Clustering: primero *PCA* y luego KNN para *Cuantiz.* vectorial o Estimación EM

- *Compr.* (compresión): ver *Apl. Fract.*

  - JPEG: partimos en trozos de 8x8, aplicamos DCT2 (*Fourier*) y obtenemos nueva 8x8 donde los coef. suelen estar concentrados en margen superior izquierdo (ondas agudas menos importantes). Dividimos por amplitud máxima esperada (tabla de *Cuantiz.* estandar o estimada de la imagen para cada uno de los 64 coef.), redondeamos y nos quedamos con los 4x4 del margen (el resto son 0s, *Red. Dim.*, *PCA*).
  - MP3: aplicamos escala Mel al espectrograma y quitamos info que no oimos (*Max Suave*).

1.15.6 (*) Biología

- *Biometr.*

- *Genetica de Poblaciones* estudio de las diferencias dentro y entre poblaciones para comprender la adaptación, especialización (coevolución) y estructura de la población. Si padre tipo A p, madre tipo B q, prob de k hijos tipo A si tienen n. *Tam. Muestra*.

- *Medicina de Precision* : habito-enfermedad. Antiguamente más subjetiva (aspecto de las heridas o del individuo). Hoy *Aprend. Autom.* con con datos (glucosa+presión sangre+ADN) para decidir.

- *Alinea.* de Secuencias: cooevolución. matriz de mutación. PSSM (inserción, borrado), hidrofobicidad. *CRF*, *Mapa Contact.*, *GAN*

1.15.7 (*) Filosofía

- Induc. vs Deduc.: *Deduc.* [Griegos]="de muchos a 1 (complejo)". Inferir="de pocos a 1 (fácil)" (*Regla Infer.*). *Induc.* [Bacon1600]="de muchos a 1 pero (no seguro, probabilístico, *Infer. Bayes.*, *Estad. Cientif.*)". No confundir con *Dem. por Induc.*. Ver *Dem.*

- *Epistem.*

Ciencia	Epist. clásica (*Sentenc.* dadas)	Epist. moderna
Exacta (Matemáticas)	*Deduc.*-griega (*Prop.* segura)	desde Gödel (*Tmas Goedel*) *Cuasiempirismo*
Empírica (Física)	*Induc.*-inglesa de [Bacon1600] (*Eviden. Estad. Cientif.*) apoyada por *Actual. Bayes.*	desde Popper (*P. Amanecer-Pavo*) *Falsac. y Reprod.*

- *Falsac. y Reprod.* : [Popper] las teor. empíricas. no puede ser probadas (ni siquiera la *Actual. Bayes.* la refuerza como muestra el *P. Amanecer-Pavo*, *Eviden.* $\neq$ *Dem.*), lo seguro es que son refutables. Son los pilares del Racionalismo Crítico. Distinguir:
  - Verificacionismo: (contrario al falsacionismo) tenemos que mirar toda la *Poblac.* mundial de cisnes para afirmar "todos son blancos"
  - Falsacionismo: es más sencillo, basta encontrar un *Contraej.* o "Cisne Negro" (hecho improbable) para negar dicha afirmación.
- *Kripke* : los tipos clásicos de *Sentenc.* son:
  - A priori (lógica, analítica): solo implica la comprensión de los términos: Ej: "ningún soltero es casado". En lógica modal son necesarias. Algunas como "pienso luego existo" "Dios existe" son debatibles.
  - A posteriori (empírica, hecho): necesita de muchas observaciones, Ej: "no todos los cisnes son blancos". En lógica modal, se dice que una fórmula es contingente cuando es verdadera en al menos un mundo posible y falsa en otro.

  Kripke: debate la posibilidad otros tipos de conocimiento:
  - contingente a priori: Ej: "El trozo madera de París en tiempo t_0 mide 1 m", "Neptuno es quien perturba la orbita de Urano", "El Hidrogeno tiene n^o atómico 1", proposiciones científicas casi-definitorias (es a priori porque si no, no es Neptuno o hidrógeno).
  - necesario a posteriori: Ej: "Agua es H2O", "Ciceron es Tully", identidades entre dos nombres que se refieren al mismo objeto.
- Wittgenstein: diferencia entre lo que se dice y se muestra
- *Wigner* 1960: "La irrazonable eficacia de la Matemática en las Ciencias Naturales". [Galileo,Tegamark] "Las Matem. Lenguaje en el que está escrito el Universo".

  Retroalimentación Prob. Física-Matem.:
  - Matem. luego aplicadas a Física: Ej: *Geom. Riemann* y *Esp. Hilbert*. Hardy se jactaba de trabajar en Matem. Puras y hoy se usa en *Criptogr.*.
  - Física desarrolla Matem.: Ej: Witten Supercuerdas y Newton *C. Variaciones*. (como el Tecno desarrolla el Brass de Meute)
- *Incert. Fisic.* : se debate si en la Naturaleza existe por *Princ. Incert.* o por *Error* de medida (*Epistem.*, *Exp. Aleatorio*). Implica no *Determ. Laplac.*. Ver *Num. Aleatorio*. La Física Intuicionista [Gisin2019] da Incertidumbre en Clásica haciendola más parecida a la *Cuantica*. En un mundo *Construct.* con complejidad finita (para hacer cálculos) solo podemos usar unos cuantos dígitos de π y una ley que dependa de π va a arrojar un resultado siempre incierto. Ver *Filos. Digital*

1.15.8 (*) Economía/política

- *T. Juegos* :
  - *Minimax* : *Regla Decision* cada jugador debe minimizar su *F. Perdida* Máxima. Equilibrio de Nash o del Miedo: momento en el que los 2 jugadores adoptan su estrategia *Optim.* considerando que conocen que el otro ha adoptado la mejor. Ver *GAN* y *Proc. Decis. Markov* (Juego *Estoc.*), *Matem. Recreativa*.
  - **Dilema Prisionero**: ver *U4Estrat* o Fig. 28.1, si ambos confiesan a la vez les caen 2 y 2 años (se gana cierto perdón respecto a los 3 años por no confesar).

A/B. Delata (D), Calla (C)	Pena individual A/B (Nash)	Pena global (Pareto)
D/D	2/2	4
D/C	0/3	3
C/D	3/0	3
C/C	1/1	2

    Si lo pensamos como una curva $A(D) = 2+0 = 2, A(C) = 3+1 = 4$ luego el mínimo (de Nash) para A es en $x = D$ (idem para B). El óptimo individual de Nash no coincide con el global de Pareto (*Tma Imposib. Arrow*) [23] ¿la mejor estrategia es que ambos confiesen si no hay nada de información? Es de Inform. Imperf. *Dat. Perd.*.
  - **Tragedia Comunes**: sea un bien común como el agua o el pasto, cada agricultor intenta obtener el máximo de esta hasta que sin quererlo y aun sabiendolo la agotan. Dos soluciones: 1) el estado es dueño (no incentiva mejoras) 2) se parte en trozos privados (gente se queda fuera). *Calent. Global T. Juegos*,
  - **Obsolescencia Programada**: [Veritasium] en Suiza 1924 se reúne el cartel de Phoebius (Philip, AEI,..) para normarla (hay documentos).
- *Oferta Demanda*
- Izda vs Dcha: suponiendo una administración perfecta (sin corrupción), la economía es la ciencia de la estimulación goedeliana ("ver límites", "de ir por delante" como la educación de un hijo, mimar vs regañar). La ayuda social debe servir para animar a trabajar a un pais, al ser de suma cero no hay truco:

Ayuda social	Ventaja	Inconveniente
Mucha (izda)	bienestar, estimula el gasto, proyectos de Bien Común (BC, con vistas al futuro)	vagancia y las empresas presentes o generaciones futuras pagan deuda
Poca (dcha)	Innovación, diligencia, menos deuda	malestar, muerte, menos gasto y proyectos privados sin vistas al futuro (no BC)

- *Dinam. Social* : vista a nivel microscópico (de una sola partícula) parece aleatorio pero a nivel macro sigue una ley *Ley Grandes Num.* Ej: *Ec. Difus.* u ósmosis a nivel microscópico no es ley (*Entropia*)

[23] El resultado de las interacciones individuales produce un resultado que no es óptimo -en el sentido de eficiencia de Pareto-; existe una situación tal que la utilidad de uno de los detenidos podría mejorar (incluso la de ambos) sin que esto implique un empeoramiento para el resto. En otras palabras, el resultado en el cual ambos detenidos no confiesan domina al resultado en el cual los dos eligen confesar.

  - *Retardo Difus. Innov.* : Ej. vacuna Covid da ventaja irrecuperable a los primeros. ¿es culpable el recien nacido consciente? es consecuencia de la *Vel. Luz.* Sol. *Jerarq.* no corrupta o arístas más rápidas. Ver *Red Flujo*
  - Derivadas o Consecuencias 1ª, 2ª,.. de Innov.: llega el coche autónomo, 1ª der. la gente se va a vivir a pueblos (pues el viaje lo pasan leyendo). 2ª der. bajan alquileres en centro 3ª der. *Diagr. en Arbol*
  - Retardo del Autoconocimiento Social [24]. Ver *Mod. Epidem.*

- Préstamo Generacional: son peligrosas las pseudociencias sociales, como los economistas que asesoran a gobiernos que pretenden resolver problemas económicos tomando préstamos que van a pesar sobre varias generaciones. [BungeElPais]. La filosofía actual se dedica a comentar filósofos antiguos, le falta Creat. Los postmodernos se vanaglorian de no entender la Ciencia, podrían preguntarse por el concepto mismo de problema. Critica la falta de claridad de Heidegger. El ser humano no es vago por naturaleza (le gusta trabaja pero no forzado, Dem. por experimentos). .

- Tecnocracia [Pais21Velthius Computac. *Cuantica*]: gobierno de especialistas (no de políticos). 1) Empresas: identificar proyectos que les beneficie esa tecnología. 2) Científicos: resolver cuestiones pendientes. 3) Gobiernos: valorar y apoyar proyectos. 4) Profesores: incluir dicha tecnología en planes de estudio.

- *Tma Imposib. Arrow* (Teor. Elec. Social): dada una Prefer. ($\lesssim$ o *Preorden* Total (Transitiva+Total)) 3 o más alternativas, no hay sistema de rankeo justo: que permita reflejar las preferencias de los individuos en una preferencia global de la comunidad de modo que al mismo tiempo se cumplan ciertos criterios "racionales": 1) No-Dictador. 2) **Efic. Pareto** [25]. 3) Independencia. Ej: La matriz de votaciones (donde todas las f y c suman 1+2+3) es:

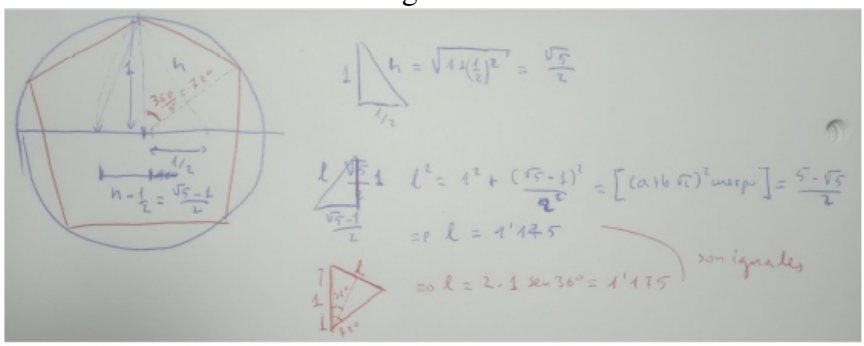
	Green	Petrol	Nuclear
A	1	2	3
B	2	3	1
C	3	1	2

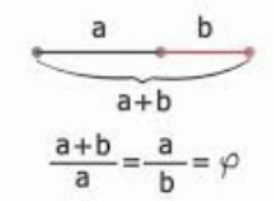
si comparamos preferencia por 2, resulta que Green > Petrol > Nuclear > Green. Porque Green (voted by A) > Nuclear (voted by B,C). (*) Los tipo de *Var. Estad.* están relacionadas.

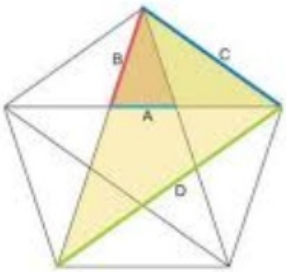
[24] Esto junto a la Dictadura del Like (te dan Likes amigos no verdaderos, incluso de cosas malas)

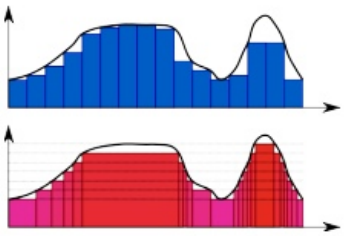
[25] Cambio Pareto, en la forma de asignar bienes entre varios individuos, si favorece a un individuo sin empeorar al resto. *Optim.* Pareto si no mejorable . Ver *Regla Decision*, Dilema Prisionero (*T. Juegos*

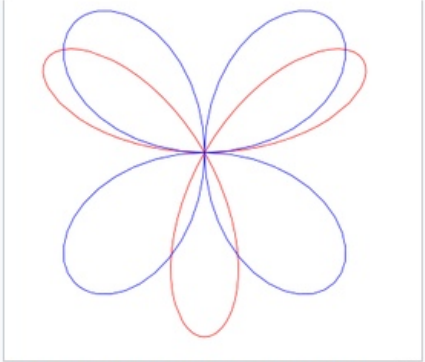
Figura 1.1: Otros temas



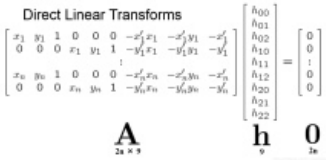








Número de puntos de intersección entre dos curvas algebraicas proyectivas, el quadrifolium (azul) de la ecuación $(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2z^2 = 0$ de grado 6, y el trifolium (en rojo) de ecuación $(x^2+y^2)^2 + (3x^2y - y^3)z = 0$ de grado 4. Hay 24 puntos de intersección, a saber: una intersección en (0,0,1) (en el centro de la figura) de multiplicidad 14, otras cuatro intersecciones visibles en la figura en puntos simples, pero también hay dos puntos de intersección triples en el infinito en coordenadas complejas, (1, *i*, 0) y (1, -*i*,0).



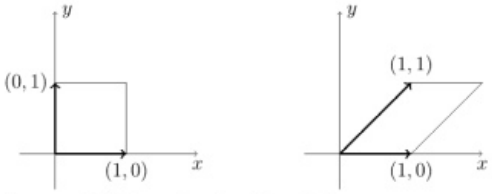
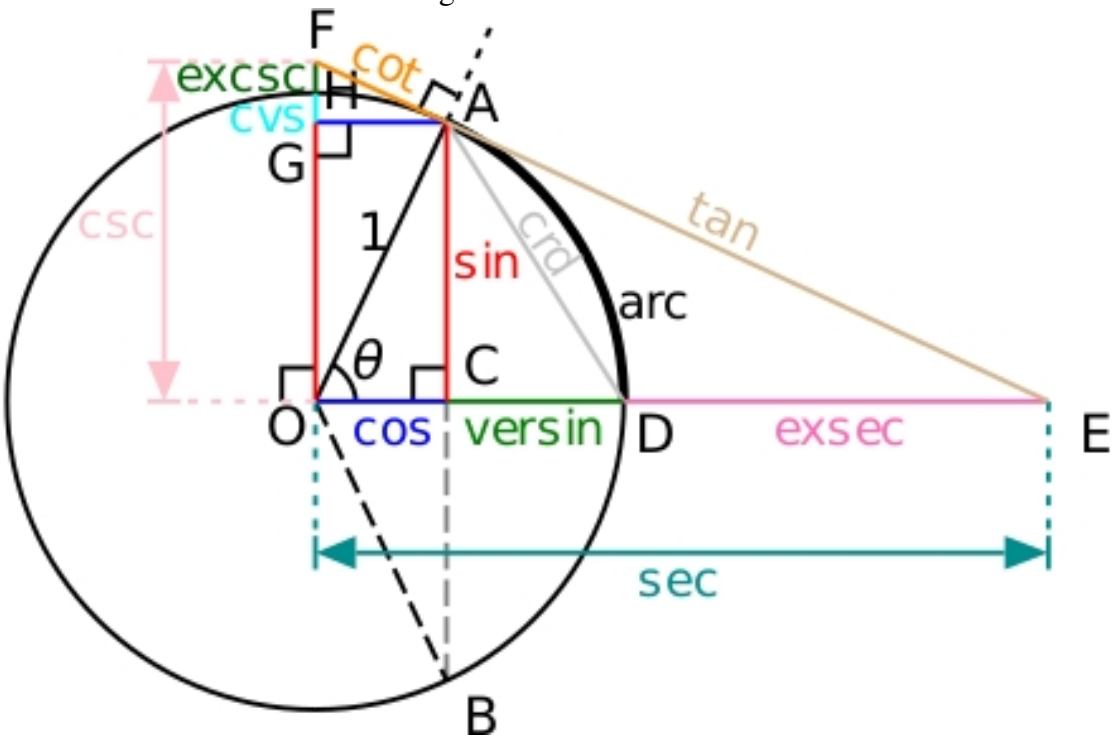


Figura 12.4. $SL_2(\mathbb{R})$ actuando en el cuadrado unitario

Figura 1.2: Otros temas



Chapter 2

T2. Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Diagramas en árbol.

2.1 Introducción: puentes de Koenigsberg. Teoría de grafos: no dist. geom. pero conexiones

- Ej-motivador *Puentes de Koenigsberg* : los habitantes de Kaliningrado se preguntaban si se podía hallar un camino que recorriera todos sus puentes de una sola vez y sin repetir.

  Euler al estudiar este problema inicia la **Teor. Grafos** (la cual no se ocupa de las distancias geométrica si no de las conexiones) y la *Topol.*

- Importancia-histórica: *Topol.*, *Leyes Kirchhoff*, *Tma 4 Colores*, *P. NP vs P*

2.2 Definiciones: camino, ciclo, bipartido

- Grafo G: *Par Ord.* $G = (V,A) : V \neq \emptyset \& A \subseteq \{(a,b) \in VxV\}$. Un elemento v_i es un vértices y uno de a_i (*Par Ord.*) arista o adyacencia. Ej: Fig. 2.1 Grafo tetraedro y rombo el $G = (\{1,2,3,4\}, 13, 23, 43, 53)$.

  Por ahora evitamos los *Digraf.*. Los G se pueden representar con Matrices Cuadradas (normalmente sparse). Un G no dirigido representa una *Rel. Binaria* homogenea simétrica.

- Otras definiciones:

  - *Isomorf. de G.* : $\exists$ una correspondencia Biyect. entre v_i que mantiene la adyacencia. Ej anterior del tetraedro y el rombo son isomorfos. (no se sabe si es *NP-Completo*).
  - Camino (o trayectoria): no cerrado. Euleriano: todas las a_i. Hamiltoniano: todas los v_i. Simple: no repite. Circuito (o ciclo): cerrado. $\Rightarrow$: a) *G. Hamilton.* (si circuito h.). b) *G. Euler.* (si circuito e.) y c) Camino euleriano (recorre todas las aristas pero no acaba en el mismo vértice). Ej: Sobre Abierto/Cerrado o Pokemon (imposible)
  - G. Conexo: si $\forall v_i \& v_j \exists$ un camino. *Alcanzabilidad* : sobre un *Digraf.* ciclico da un *Preorden*. Ej: en una *SPN* es el scope(nodo).
  - k-Clique: subgrafo completo o subconj. k de vértices totalmente conectados. Ej: un clique en Facebook es un grupo leal de amigos.

- *G. Bipartido* : podemos separar los V en dos subconj. t.q. no hay adyacencias entre ellos. Ej: el $K_{3,3}$ bibartido 6 completo (Fig 2.1: a) $K_{3,3}$. b) Cliques y no conexo). *Rel. Binaria*. Ver *Tma Pascal*, *Jerarq.*
- Grado de un Vétice $\rho(v_i)$: nº aristas en el v_i. *Seis Grados*

2.3 Grafos eulerianos. Hierholzer (juego de la casa)

- Caract. de *G. Euler.* (Tma de Euler): un G es euleriano (tiene un ciclo euleriano) $\Longleftrightarrow$ conexo y $\forall\rho(v_i)$ es par. Euler solo probó da Directa (Hierholzer la *Cond. Nec. y Suf.*). Dem.:

  - $\Rightarrow$) [Euler] Dado que pasamos por todas las A solo una vez, por cualquier V que entremos salimos por otro distinto, luego $\rho(v_i) = par$. Además, dado que $\exists$ un circuito $\Rightarrow$ es conexo.
  - $\Leftarrow$) [Hierholzer1873] Inducción más Tma auxiliar "si G conexo $\Rightarrow \exists$ un circuito". En efecto, nos ponemos en un v_1 y generamos y generamos un camino t.q. $v_{i-1} \neq v_i \neq v_{i+1}$. Si repetimos (posible porque conexo y siempre $\exists$ A de entrada y de salida distinta pues $\rho(v_i) \geq 2$) al final (dado que nº finito de V) volvemos v_1 de comienzo.

  Teniendo solo la Directa y dado que ocurre la Contrareciproca, Euler concluyó que el problema de los *Puentes de Koenigsberg* no tiene solución.

- Colorario [Hierholzer1873]: *G. Euler.* (¡no circ.! ver antes) $\Longleftrightarrow$ $\rho(v_i)$ par excepto el inicial y final (impares). Ej: J. Casa (Z desde abajo).

2.4 Grafos hamiltonianos (clausura). Juego del dodecaedro y problema del viajante (=progr. dinam. si retic.)

- Caract. de *G. Hamilton.* : $\nexists$ ninguna *Cond. Nec. y Suf.* general para este tipo de G. La mejor particular es la de Bondy-Chvatal: G H. $\Longleftrightarrow$ es su *Clausur.* (si tiene suficientes aristas) [1].

  Ej: *J. Dodecaedro* o Icosian: Fig. 2.1. Recordar 3 pentágonos, los 2 exteriores unidos con v_i, hacer interior, afuera y medio. Todos los *Solidos Platon.* proyectados con *Diagr. Schlegel* tienen un ciclo h. Ej: J. Casa tiene uno ciclo de Hamilton claro

  Es uno de los 21 P. de Karp *NP-Completo* relacionado con el *P. del Viajante* =*Progr. Dinam.* si *Reticulo*=*Viterbi* (el Alg. Dijkstra lo resuelve, en Internet paquete del nodo origen al destino, es *Alg. Voraz*, ver *Metodo Simplex*, *Red Flujo*)

2.5 Grafos planos. Tma de Kuratowski y fórmula de Euler

G. Plano : Son los que podemos dibujar en un papel sin cruces de aristas. Ej: Un mapa político. Ej: *Politopo Cvx* en *Diagr. Schlegel*.

[1] G. resultante con las mismos n v_i que G, pero que se añaden aristas entre dos vértices u, v si $gr(u) + gr(v) \geq n$

- Tma de Kuratowski: Si K_5 o $K_{3,3}$ son subgrafos de $G \Rightarrow G$ no es planar. Dem. para K_5:

> En las dos configuraciones posibles (que evitan que las otras a_i se crucen, Fig. 2.1) no es posible una arista (a,b) sin cruces pues por el Tma de la curva de Jordan [a] en una config. a int y b ext. y viceversa.
>
> [a] Toda curva cerrada divide al plano en dos regiones: la interior (acotada) y la exterior (no acotada)

- Fórmula de Euler: $V - A + C = 2$ (Vimos muchos Artistas Comprar, se cuenta el ∞). Dem por inducción inversa:

> Comencemos con cualquier grafo plano (ej. tetraedro). 1) Supongamos cierto para A. 2) Veamos que ocurre si eliminamos 1 $a_i \Rightarrow$ También una c_i menos $V-(A-1)+(C-1) \iff V-A+C=2$. 3) Repetimos hasta arbol en que $A = V-1$ y hay 1 C (el ∞) $\Rightarrow V-(V-1)+1=2$.

Está fórmula explica por qué hay 5 *Solidos Platon.* y Grafo/Poliedro *Dual*

2.6 Diagramas de árbol: Lema de Zorn

- *Diagr. en Arbol* : Hay tres def. equivalentes

  1. Cada a_i es un itsmo (si se elimina $\Rightarrow$ no conexo)
  2. G en que todos los v_i conectados pero con nº mínimo de a_i ($A = V-1$).
  3. G conexo sin circuitos.

- *Alg. Kruskal* : crea un Árbol Recubridor o de Expansión mínimo [2]. Mediante *Alg. Voraz*, crecemos el árbol (añadiendo nueva a_i pegada al árbol) evitando circuitos. Ej: compañia telefónica. Fig. 2.1

- *Lema Zorn* -Kuratowski: todo *Poset* en el que cada subconj. tiene cota superior (similar a *Reticulo*), contiene al menos un máximo (la raiz del árbol). Con esto es fácil probar que todo Grafo finito conexo tiene un Arbol Recubridor (Fig. 2.1) [3]. Para infinitos asumir que este existe equiv. a asumir el *Ax. Eleccion* y equivale al Tma *Bien Orden.*. Sirve para probar muchos resultados, como que cualquier *EA* tiene *Clausura Alg.* (*Cuerpo*), *Base* (*EV*)

- Aplicaciones: *Tec. Recuento* (Princ. Prod.), Desarrollo de *Cadena Markov* (*Juegos Azar*) *Arbol de Prob.*, *Camino Critic.*, *Jerarq.*, Árbol de Operaciones (ESO) , Árbol de derivada (regla cadena, *SGD*)

[2] subconjunto de aristas que, formando un árbol, incluyen todos los vértices y donde el valor de la suma de todas las aristas del árbol es el mínimo

[3] el conj. de todos los árboles están ordenados por inclusión

2.7 NP vs P, NP-Completo (problema del viajante)

- *P. NP vs P* : RESUMEN: *P. Milenio* [Cook] abierto. Fig. 2.1 en principio $P \neq NP$ y los P. *NP-Completo* (los más difíciles de NP, *P. del Viajante*, *P. Enum. Vert....*) son *NP-Hard*. Pero si alguien encuentra un alg. P para un P. *NP-Completo* entonces ¡$P = NP = NP - Completo$!. IDEA: usar un *Lenguaje Adecuado* tipo máquinas oráculo (como los $\mathbb{C}$ que no existen pero simplifican todo)

- P. *NP* ($\supset$ P, P subconj. de NP): en Teor. de la Complej. Comput. si el tiempo del algoritmo más rápido conocido para resolverlo (*TAI*) o la *F. Aritm.* crece de forma No Polinomial (p.e. exponencial) cuando la entrada del problema (su tamaño) crece linealmente. La solución de un NP se puede comprobar en P. Ej: ordenar conj. de n^{o}s., *Maldicion Dim.* (*Int. Monte Carlo*). Ver *Form. Stirling*

- *NP-Completo* : problemas más difíciles de NP, porque que no se conoce alg. P, y si para alguno se encontrara, entonces el resto lo son, haciendo $P = NP = NP - Complete$ (Fig. 2.1). Muy probablemente no formen parte de P. Ej: 21 Probl. de Karp (muchos de grafos):

  - NOTA: P. *Isomorf. de G.* y *P. Fact. Ent.* [4] Ojo, claramente es *NP* y pero posiblemente no sea *NP-Completo* porque no se ha encontrado Dem.
  - *P. del Viajante* y P. Circuito Hamiltoniano.
  - *Progr. en Ent.* y *P. Enum. Vert.*
  - *SAT* : Satisfacibilidad Boooleana (que valores de las variables hace una *F. Booleana* V). Fue el primero identificado como NP-completo [Cook71]. Ej: *ATP* en *Log-0* es decible. P. *Reciproco* a *Karnaugh* y similar a encontrar *Ceros*
  - *P. Suma de Subconj.*
  - P. de la clique (encontrar un subgrafo clique).

- P. *NP-Hard* : al menos tan difíciles como los de NP-Completo (no entiendo bien??). Ej: todos los NP-Completos son NP-Hard a menos que se pruebe P=NP (Fig. 2.1). Ej: *P. Suma de Subconj.*. Existen problemas NP-hard que no son NP-completos como el *P. Parada*.

- Aplicaciones: $P \neq NP$ que hay problemas inviables por *Fuerza Bruta* (creo que implica la *Irreduc. Wolfram*, *P. Suma de Subconj.*). Es la base de la *Matem. Recreativa* y en se aplica en: *Criptogr.* e Informática (si se que un alg. va a tardar un año puedo decidir si merece la pena ejecutarlo)

- Soluciones Suboptimas: con *Progr. Dinam.* [Bellman]: divide (en subtareas) y vencerás. Ej: *Viterbi* (discreto) o *C. Variaciones* o *Geodesica* (continuo). Gracias a *Prop. Markov* *Alg. Voraz* : tomar el óptimo local en las subtareas da global. Ej: *Alg. Kruskal*, Alg. Fulkerson (*Red Flujo*) y Alg. Dijkstra (*P. del Viajante*). Ej: Alineamiento de proteinas.

[4] ej. de *F. Unidirecc.* $f(p,q) : p * q = 697$: a) difícil resolver $f(p,q) = 697$; b) fácil resolver $f(17,41) = y(= 697)$. Útil en *Criptogr.*

2.8 Aplicaciones matemáticas: Digrafo (composición de correspondencias), Grafos de Cayley y Hasse, cadena de Markov, y Tma 4 colores

Digraf. $G = (V,A)$: si A es un conj. de *Par Ord.* (a_i flechas). G Coloreado: si los v_i y/o a_i van acompañados de un color. Ej:

- Composic. *Correspondencia* como *Prod. M.*: en la Fig. 2.1 vemos dos *Digraf. G. Bipartido* (*Rel. Binaria* de conexiones entre aeropuertos [Guzmanpg35]). La M. con un cero indica no hay conexión entre esos dos ptos.

- Otras Matemáticas: *Diagr. Schlegel* (*Topol.*), *G. Cayley*, *Diagr. Hasse* en *Reticulo*s, Teor. *Categ.* (*Diagr. Conmut.*, *Topos*)

- Estadística: *Cadena Markov* (matriz del grafo) y *PGM* (Cliques del *CRF*).

- *Tma 4 Colores* : [Hackel y Appel1974]. En 2005 se implementó en COQ. Es tan compleja que solo el la entiende (debemos creer en la *Consist.* de su Kernel, creer en un compilador). Se basa en la estrategia de Descarga. Primer ejemplo de *ATP*.

2.9 Aplicaciones físicas: leyes de Kirchhoff, SGD, red de flujo, camino crítico, jerarquía, 6 grados, mapa de contacto

- Electrónica: *Leyes Kirchhoff* 1847. Suma de Vs (malla) de Is (nodo) vale 0.

- Informática: *Gradiente* de una Red Dif. o F. Coste (*SGD*).

- *Red Flujo* : *Digraf.* con dos vértices especiales S (fuente) y T (sumidero). ¿Flujo max que puede enviar S a T? teniendo en cuenta las restricciones en capacidad de cada arista y *Leyes Kirchhoff* $\sum entrantes = \sum salientes$. Parecido al P. del Transporte de *PL* pero solo 1 T. Sol.: Alg. Fulkerson: *Alg. Voraz* más rápido que *Metodo Simplex* [WikiNetworkflow] Fig. 2.1. Ver *Invest. Operat.*, *P. del Viajante*, *Retardo Difus. Innov.*

- *Camino Critic.* : el tiempo más corto de terminación de un *Diagr. en Arbol Digraf.* como el de las tareas de un avión como el de la Fig. 2.1 es el camino más largo (*P. del Viajante*). Aplicable a cualquier proyecto (apolo XI en 10 años, albañilería, etc.). También *Invest. Operat.* en Sist. Operativos.

- *Jerarq.* o Estruct.: *Diagr. en Arbol* que soluciona el problema de *Retardo Difus. Innov.* pues implica menos arístas que *G. Bipartido* para comunicar tres niveles, i.e. infraestructura y mantenimiento más barato. Ej: delegado de padres, índice, *Base Datos*, Web (bipartida vs jerarquica (nodos altamente conectados)). *Jerarq. EA*, T. Orden (*Rel. Binaria* Homog.), *Teor. Tipos*, *Seis Grados*, *Conj. Num.*

- *Seis Grados* de Separación (="el mundo es un pañuelo"): se debe a que la mayoría de las redes (*Factor Impacto* (Page Rank), Web, Internet, Facebook,...) son:

  - **Libre Escala** ($P(\rho = k) = k^{-\gamma}$ donde $\gamma \in [2,3]$, i.e. la prob. de que un nodo tenga k conexiones es una *Ley Pot.*)
  - **Mundo Pequeño** ($L = \beta logN$, i.e la distancia media entre dos nodos L crece log con del n^o de nodos N).

  Ver *Red Fract.*, *Tma Amistad*, *Jerarq.*

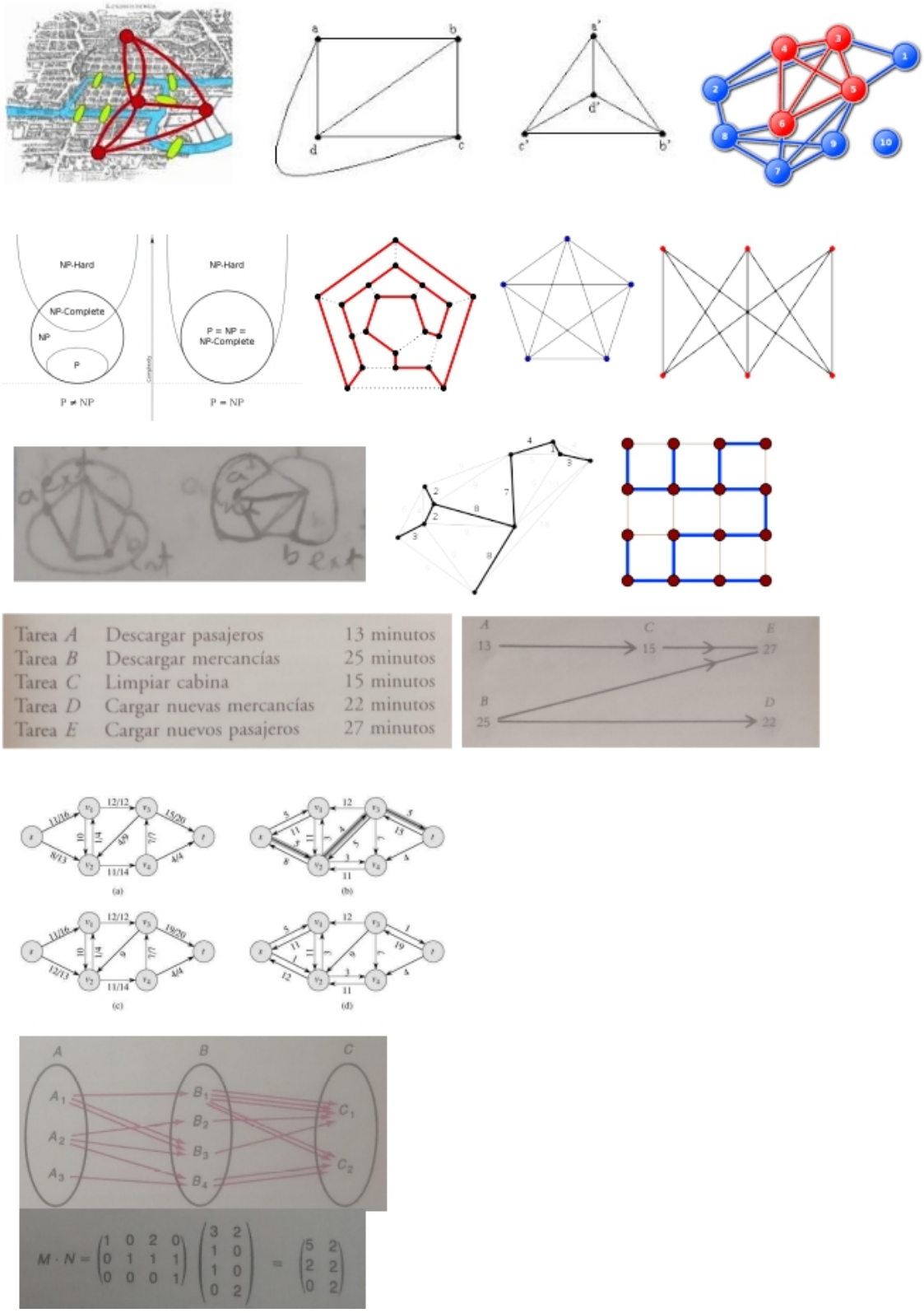
- *Mapa Contact.* (Contact Map, Mapa Distanc.): distancia entre C_α hallada con Coevolución (alineamientos de homologos). Paso 2D (DMap) a 3D (PDB) (*Probl. Inv.* similar a *Vision 3D*) con MDS (MultiDimensional Scaling) o ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) (técnicas alg.-estad. como *SVD* o *Sist. Sobredet.*)

- Química y Biologia: Cayley resuelve el problema de enumeración de los isomeros (identica composición pero diferente estructura) [ElPais]. Alineamiento de grafos PPI para predecir nuevas interacciones. El grafo de interacción no es conexo y se dan cliques.

2.10 Conclusión y bibliografía

ver Intro importancia

Figura 2.1: (a) G. Koenigsberg. (b) Dos G. isomorfos; Clique; NP vs P; Dodecaedro de Hamilton; K33 y K5; Alg. Kruskal (Invest. Operativa).



Chapter 3

T3. Técnicas de recuento. Combinatoria.

3.1 Introducción: palabras, compases, configurables (Al-Kindi, criptografía), viajante, 6 sabores combinados

- Ej-motivador: Ej: ¿cuantas palabras de 3 vocales puedo formar *Al-Kindi* (criptografía)? ¿cuantos compases rítmicos de 2/4 con silencias de hasta semicorcheas *U4Estrat*? Ej: ¿cuantas formas sobre un G. *P. del Viajante*? Ej: El indio [Sushruta600ac] se preguntaba ¿cuantas combinaciones podemos formar con 6 sabores? Pudo establecer que había $2^6 - 1 = 63$. La Alhambra es único monumento antiguo del mundo que contiene los 17 grupos cristalográficos posibles (formas de teselar un plano). ¿Como podemos estar seguros de estas afirmaciones?.

- Importancia-histórica: *Prob. Laplace*, *Entropia*, *P. NP vs P*.

3.2 Combinatoria: enumerar, existencia/optimizar y generar las config. de una tarea. Técnicas de Recuento (cardinalidad): suma, prod (dado), divis. excl.-incl. palomar (pelos, cumple), arbol, f. generad.

- *Combinat.* : rama de la Mat. Discreta que trata sobre las **Config.** (formas, arreglos o resultados) de hacer una tarea T. Objetivos:
  - enumeración (contar todas las config.): Aquí
  - existencia/optimización: Grafos e Informática *G. Euler.*.
  - construcción: Informática (algoritmos eficientes)

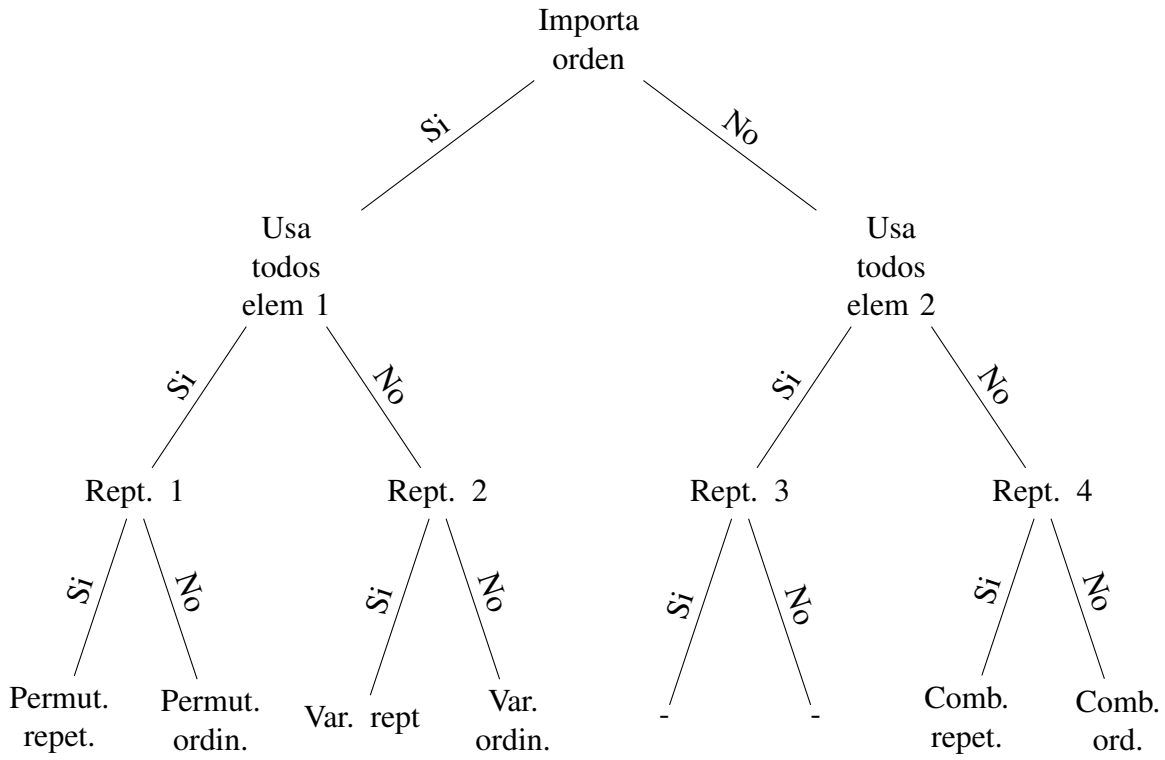
- *Tec. Recuento* : principios para averiguar la ***Cardin.*** **de una Tarea** T: $|T|$ tamaño del conjunto de todas las posibles config. (formas de realizarla, *F. Aritm.*):
  - Princ. Suma: si una tarea consiste de dos subtareas independientes $T_A \cup T_B$ se cumple $|T_A \cup T_B| = |T_A| + |T_B|$. Está relacionado con el paralelismo en la programación.
  - Princ. Prod. o Multiplicación [Wiki]: si una tarea se realiza en dos subtareas anidadas $T_A(T_B)$ se cumple $|T_A(T_B)| = |T_A|.|T_B|$. Es el *Prod. Cartesiano* de dos

conj. Esta relacionado con los "for" anidados en *Rel. Recurr.*. Ej: Cubo o dado: tiene 24 orientaciones: 6 (caras mirándote) x 4 (giros)

- Princ. Divis. o Reducción: si nuestra técnica de conteo enumera n config. que son equivalentes dividimos por n para contar las diferentes. Está relacionado con la ambigüedad de información *Entropia*.
- *Princ. Inclusion-Excl.*: IMPORTANTE
- *Princ. del Palomar* : si una tarea tiene una cardinalidad $|T| = N$ y poseemos un conjunto de configuraciones con cardinalidad $M > N \Rightarrow$ podemos asegurar que existen dos config. repetidas. No es *Construct.*, si no existenc. (*Tercero Excluido*). Ej: UDs, cumpleaños, pelos, misántropo, *Tma Amistad* [1].
- Otras: *Diagr. en Arbol*: mezcla los tres primeros anteriores. *F. Generad.* Pol. Torre (*Serie Pot.* a_k formas de disponer k torres sobre un tablero para que no se ataquen)

3.3 Clasificación de configuraciones

DeMorgan1800 menciona a Buckley en regla general para $\binom{n}{m}$. Pascal y Leibniz crean el árbol de las técnicas de recuento:



[1] Se usa para asegurar que: Ej: estudiando 10 UDs, con 3 bolas saldrá una estudiada. Ej: en un conjunto de 13 personas dos van a cumplir años el mismo mes. Ej: En una ciudad grande dos tienen la misma cantidad de pelos en su cabeza. Ej: (Misantrópico) si el 70% de los hombres son o feos, tontos o malos $\Rightarrow$ al menos un 10% son las tres cosas.

3.4 Configuraciones clásicas: bi/sobre/inyectiva. combinaciones (princ. incl.-excl.). Triángulo de Pascal (5 propiedades, conjunto potencia=Binomio de Newton)

Config. Clasicas:

- *Permut.* Ord.: de n elementos. $P_n = n!$. Ej1: Formas de ordenar $n = 4$ letras del conj. $Y_4 = \{a,b,c,d\}$. Ej2: barajamientos. *Teor. Galois*

  Una sola P_n es una aplicación *Biyect.* del conj. X_n (dominio) al conj. Y_n (imagen, o sobre si mismo) (ej $\{1,2,3,4\} \to \{d,b,a,c\}$). El *G. Simetrico* (S_n, o) tiene $n!$ elementos (todas las permutaciones de X_n) y la composición típica. Es no abeliano. El *Tma de Cayley* (caso del *Lema Yoneda*) dice que todo grupo finito es *Isomorf.* a un subgrupo de (S_n, o). La *Teor. Galois* estudia las permutaciones de las raíces de un polin. Explica *NP* por *Form. Stirling*. Ver *Det.*

- *Var. Rep.* : de n elementos de tamaño m. $VR_{n,m} = n^m$. Ej1: Palabras de $m = 3$ letras repetidas, elegidas entre $n = 4$ letras. Ej2: palabras de dos letras Ej3: *Al-Kindi*, *Exp. Fact.*

  Una $VR_{n,m}$ es una aplicación *Sobreyect.* del conj. X_m al Y_n. (ej. $\{1,2,3\} \to \{d,d,b\}$)

- **Var. Ord.**: de n elementos tomados de m en m. $V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$. Ej1: Palabras de $m = 3$ letras sin repetir, elegidas entre $n = 4$ letras. Ej2: banderas con 3 franjas y 5 colores.

  Una $V_{n,m}$ es una aplicación *Inyect.* del X_m al Y_n. (ej. $\{1,2,3\} \to \{b,d,a\}$).

- *Combin.* : de n elementos tomados de m en m. $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$. Ej1: *Suma Div.*, sabores de zumos. o *Princ. Inclusion-Excl.*

  Triang. Pascal (Tartaglia): (ver Fig.) cumple las siguientes propiedades: 1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ [2]. 2) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ (simetria del triang.) 3) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1}$ (forma en que se construye, fácil de dem.). 4) $\binom{n}{m} = \sum_{i=m-1}^{n-1} \binom{i}{m-1}$ (lineas oblicuas del triang, dem. aplicando (3)). 5) $sum_{i=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$ (Dem. con Binomio Newton $(1+1)^n$ o vector binario, *Conj. Potencia*). Curiosidad: sus filas $1 = 11^0, 11 = 11^1, 121 = 11^2, 1331 = 11^3, \ldots$

3.5 Otras configuraciones: permutaciones (pinos, entropía) y combinaciones con repetición (diofántica) y desarreglos

- *Perm. Repet.* : Ej1: Formas de plantar 3 pinos, 1 encinas y 1 robles. Algunas config son: $\{ppper\}, \{peprp\}$..... Si nos fijamos equivale a contar las permutaciones de 5 elementos y luego dividir aplicando el principio de reducción $PR_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!}$. Generalizando $PR_n^{n_1,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!..n_m!}$. Ver Sumas *Entropia*

- *Comb. con Repet.* : Ej1: Formas de repartir 5 caramelos a 3 niños $\{A|B|C\}$. Esto equivale enumerar las sol. de la *Ec. Diof.* Lin. Multivar. $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

  Algunas config. son: $\{o|oo|oo\}, \{|ooo|oo\}, \{||ooooo\}, \ldots$.. Si nos fijamos equivale a contar de cuantas formas podemos colocar 2 barras en 7 posiciones, i.e. podemos convertirlo

[2] Video de Derivando lo razona

en un problema de combinaciones sin repetición $C_{7,2} = \binom{7}{2}$. Para volver al problema original busquemos el 5 (y luego el 3) $= (P2) = \binom{7}{7-2} = \binom{3+5-1}{5} = (\binom{3}{5})$. Generalizando y pudiendo $n < m$ (al revés que en combinaciones): $CR_{n,m} = (\binom{n}{m}) = \binom{n+m-1}{n-1}$.

Estos nº cumplen propiedades parecidas a los combinatorios: $(\binom{n}{m}) = (\binom{n-1}{m}) + (\binom{n-1}{m-1})$.

- *Desarreglos* : Ej1: Formas de cartas-sobre todas desordenadas. Son permutaciones en las que ningún elemento está en su posición original. El nº de desarreglos es "subfactorial de n" $!n = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i/i!$ (recordar *Serie* de e^{-1}). Es consecuencia del *Princ. Inclusion-Excl.*

  Ej: Problemas de cartas-sobres: si el suceso A_i : "la carta i está OK", entonces $p(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - p(A_1 \cup \bar{\ldots} \cup A_n) = 1 - p(\bar{A_1} \cap \ldots \cap \bar{A_n}) = 1 - p(desarreglo) = 1 - \frac{!n}{n!}$

3.6 Ciclos y Grafos de Cayley: ciclos y A5 no abeliano

- *Ciclo* o Perm. Cíclica: una permutación en la que algunos elementos se mantienen fijos y el resto se mueven cíclicamente. Cualquier permutación puede expresarse como el producto de ciclos disjuntos.

  Ej: permutación descompuesta en dos ciclos de longitud 4: $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ escrita en forma de ciclos es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ o de ciclo abreviado $= (1,3,5,6)(2,4,7,8)$. Fig. 3.1 (dos grafos cuadrados con flechitas).

  Los casos concretos son:

  - *P. Circular* : *Ciclo* en el que ningún elemento se mantiene en la misma posición. Ej: P. Circular escrita de dos formas equivalentes: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Esto define una *Rel. P. Circular* de equivalencia.

    Num. de P. Circulares: con Ej: Formas de sentarse n personas en una mesa redonda. Dada la simetría, podemos fijar una persona y mover el resto de todas las formas posibles, luego $PC_n = (n-1)!$. Hay otras interpretaciones [3].

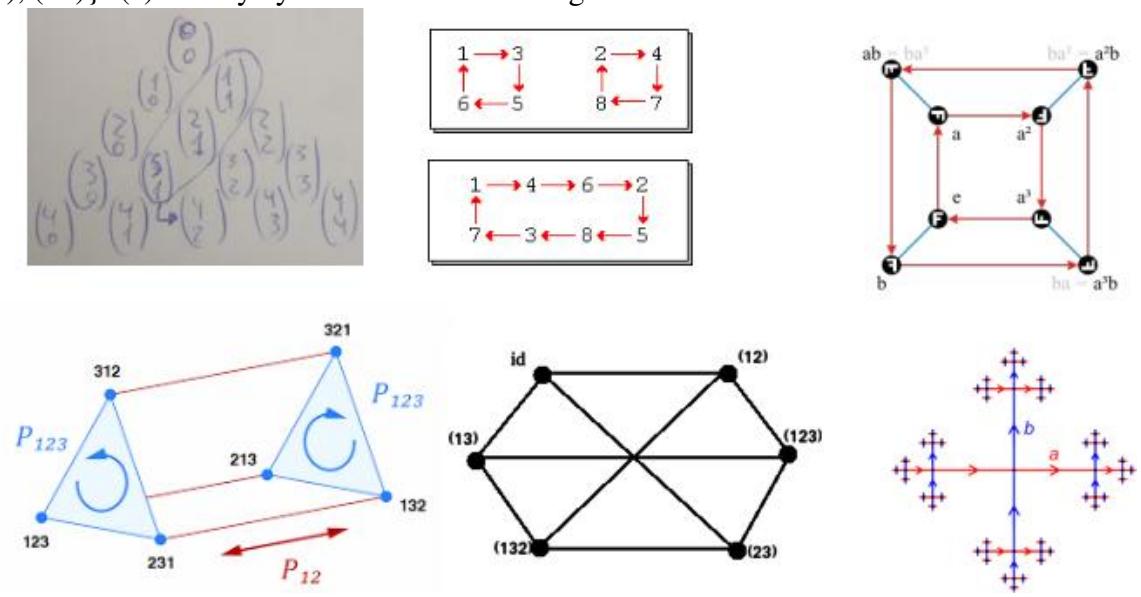
  - **Transp.**: *Ciclo* de long. 2 o 2-ciclo Ej. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Una permutación es par/impar si se puede escribir como el producto de un nº par/impar de transposiciones, por lo tanto cualquier transp. es impar. Si escribimos la permut. en ciclos disjuntos podemos sacar su orden. Ej: $\sigma = (1,6,3,4)(2,9)(5,8,7)$ tiene orden $3+1+2=6$ luego es par. El *G. Alternante* A_n es el un subgrupo de S_n formado por todas las p. pares. Es un *G. Lineal Proyect.*. *A_5 No Es Abeliano* pues si $a_1 = (123)$ y $a_2 = (12345) \Rightarrow a_1a_2 \neq a_2a_1$ [4] además es simple. Estos dos detalles explican la *Teor. Galois*. Ver *Det.*

- (*) *G. Cayley* (grafo): muestra la estructura de un *Grupo*. Ej: S_3 (Fig. 3.1) con dos permutaciones básicas o *Generad.* de G. $< S >$ (subconj. cuyos productos, incluidos sus invers., dan el grupo, Ej: $Z =< 1 >$ si el conj. es mínimo *TAI* equivale *Base* de EV): flecha roja (Transposición P12, cambiar 1 con 2) y flecha azul (Ciclo P123). Según los generadores elegidos se obtienen grafos diferentes no necesariamente isomorfos entre si.

[3] Si 4 personas algunas config.son: $\{a,b,c,d\},\{d,a,b,c\},\{a,b,d,c\},$. Si nos fijamos la primera y segunda son equivalentes, i.e. por cada permutación hay 4 equivalentes (*Clase Equiv.*). Generalizando $PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

[4] $(a_1a_2)(abcde) : bcdea- > dbcea$ vs $(a_2a_2)(abcde) : cbade- > ecdad$ [SubwikiA5].

Figura 3.1: (a) Triang. Pascal. (b) P. Circular y P. de dos Ciclos. (c) G. de Cayley del D_4 (g. dihedrico). (d) Dos G. de Cayley de S_3 no isomorfos generados con {(12), (123)} y con {(12), (23), (13)}. (e) G. Cayley del G. Libre con dos generadores.



3.7 Aplicaciones matemáticas: Informática (P vs NP, viajante), prob. Laplace, función aritmética (divisor, primos, entropía). Simplex

- Informática: *P. NP vs P* y Grafos. *P. del Viajante*, en una tarea encontrar la configur. mejor entre muchas posibilidades. *Aprend. Autom.* contar e identificar configuraciones. *Entropia Inform.* (Perplejidad)
- *Prob. Laplace*
- *F. Aritm.* $F(n)$: F. Contador del nº de formas de hacer una misma tarea o *Cardin.* una tarea. Ver *F. Indic.*. Ej:

F. Divisor	nº de de div. de un entero
Tma Num. Primos	nº de primos debajo
Cometa *Goldbach*	nº de formas de obtener un par con 2 primos
Binomial	nº de formas de obtener un nº con 0s y 1
Entropia	nº de microstados dan la misma config. energética
TAI	nº de programas que dan igual output
Otras	*Form. Stirling*

- *Tma Amistad* : En grupo de 6 personas hay 3 conocidas o 3 desconocidas entre ellas. Usar Grafos, *Princ. del Palomar* y Combinatoria. **Teor. de Ramsey** (ElPais2019): Estudia cuántos elementos ha de haber en un conjunto para que aparezca una determinada propiedad. Los *Obj.* de trabajo suelen ser Enormes (*NP*) y no *Construct.* salvo por *Fuerza Bruta* o *Princ. del Palomar*
- Otras: Combina. en *Metodo Simplex. Progr. en Ent.* (con combinatoria).

3.8 Aplicaciones físicas: Entropía

- *Fisica Estad.* : sus paradigmas son *Entropia*, *Modelo Ising* y Temperatura: E promedio por molecula = gkT/2 donde g (n^o grados libertad y k cte Boltzmann).
- *Entropia* (*Fisica Estad.*): paradigma de la junto a , Explica la E. Clásica (ver *L. Weber*). Los ejemplos se basan en *F. Aritm.* de obtener una misma suma=*Probl. Inv.*
  - VA *Binomial* (abcisa $[0,n]$) $X = n^o caras$ [Santaolalla]: tiramos 2-monedas el estado o *Suc. Elem.* más probable (entrópico) es 1 (1cara,1cruz) y no 2. 10000-monedas el más probable es 500 y no 1000. A más monedas, más se parece la distribución a una Delta de Dirac (*Curtosis*) y gana un solo estado.
  - VA *Binomial* (abcisa $[-n,-(n-2),...,-2,0,2,...,(n-2),n]$) $X = \sum_i miniimanes_i(\{-1,1\})$ [QuantFracture]: (microestado<estado<macroestado). 12 miniimanes que se pueden cancelar: El estado o *Suc. Elem.* 12u se obtiene de 1 sola forma o microestado (todos arriba), 10u de 12, 8u de 66,... 0u de 924u (mitad arriba, mitad abajo). El estado más entrópico (más microestados, ambiguo o probable) es 0u. El macroestado observado es la *Media* de estados $B = \frac{12*1+12*10+8*66+...+0*925}{1+10+66+..+925}$. Los sist. evolucionan hacia los macroestados más probables. [5].
  - Otras VA suma: podrían ser 5 partículas indistinguibles y 3 niveles energéticos (*Perm. Repet.*??). Ver *Alg. de VA*
  - Boltzman: si Ω es num. de microestados que dan el mismo estado (< macroestado) energético $E \Rightarrow$ Ec. de Boltzmann $S = k\log(\Omega(E,V,N))$.
  - Hay 3 entropías más: *Entropia Inform.* (Información), *Inform. Fisher* (Estadística), *TAI* (Computación). Ver *Dinam. Social*. Ver *Kernel*.
- Biología: Proteinas Circular Permutation.

[5] Lo increible es que al considerar bolas con volumen (no puntos), coloide, se puede dar la cristalización espontánea (proteinas) pues el cristal un estado más probable (ver video)

Chapter 4

T4. Números enteros. Divisibilidad. Números primos. Congruencia.

4.1 Introducción: -*-=+, planetas alineados

- Ej-motivador: ¿Porqué negativo por negativo es positivo?. ¿Cada cuando vuelven a linear la Tierra, la Luna y el Sol para producir un eclipse (arimética modular)?

- Los introduce Cardano en sus *Duelos Matem.*. *Creer en Ficciones*.

- ¡Los $\mathbb{Z}$ llegan más tarde que $\mathbb{Q}$ (los griegos aceptaban porciones)!. Diofanto y Brahmagupta admiten ec. con coeficientes negativos como pasos intermedios, pero las soluciones negativas no son consideradas (no tienen sentido para ellos). De hecho usan reglas extrañas como "negativo por negativo es positivo" que no se justifican hasta cerca de Euler. En Europa los signos $+,-$ para la adición (deudas, almacenes) aparecen en el [Widman1489-Rechenung] de hecho la $\mathbb{Z}$ viene del alemán Zählen. En 1600 aparece la noción geométrica de negativo (retroceso) y positivo (avance).

- Importancia-histórica: *Dom. Eucl.*, *Tma de Euclides*, *Tma Fund. de la Aritm.* y *Rel. de Congr.* (para *Ley de Reciproc. Cuadr.* y *Criptogr.*) y *C. Finito* (*Ext. de C.*)

4.2 Construcción de Z desde N

- *Rel. Def. de Ent.* : Sea la relación binaria: $(a,b)R(c,d)$ con $a+d=c+b$ (o también $a-b=c-d$ pero no posible negativos) con suma de los $\mathbb{N}$. Es una *Rel. Equiv.*: 1) Reflexiva. 2) Transitiva. 3) Simétrica: $xRy \iff yRx$, pues a podemos voltear una igualdad: $\forall (a,b)R(c,d) a+d=c+b \iff c+b=a+d \Rightarrow (c,b)R(a,b)$.

- Propiedades:

  - Un $\mathbb{Z}$ es una *Clase Equiv.*: $[(a,b)] = \{(c,d) : a+d=c+b\}$
  - Los $\mathbb{Z}$ son el conjunto de todas las clases de equiv. o *Conj. Cociente* $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}x\mathbb{N}}{R}$
  - *Repr. Canon.*: de una clase de equiv. al elemento (a,b) con 0. Los n^o positivos: $m \equiv [(m,0)] = \{(a,b) : a+0=m+b\}$. Los n^o negativos: $-m \equiv [(0,m)]$.

4.3 Operaciones + y *: con representante canónico, -*-=+

- Suma $+$: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. La $+$ es una F. *Bien Def.*. En efecto:

  Sea $(a,b)R(a',b')$ y $(c,d)R(c',d')$, i.e. sabemos que $a+b'=a'+b$ y $c+d'=c'+d$ (*), debemos probar que $(a,b)+(c,d)R(a',b')+(c',d')$. Esto equivale a $(a+c,b+d)R(a'+c',b'+d')$, sumando extremos según R $a+c+b'+d'=b+d+a'+c'$, considerando (*) en el primer miembro $a'+b+c'+d=b+d+a'+c'$ terminamos.

- $+$ se puede *Repr. Canon.*: a) $m+n$, b) $m+(-n)$, c) $(-m)+n$, d) $(-m)+(-n)$. Caso b): hallar diferencia d y signo del de mayor valor abs: $(m,0)+(0,n)=(m,n)$, buscando 0 entramos repr. canónico que es: $\begin{cases} d=(m-n,0) & \text{si m<n, pues (m,n)R(m-n,0). En efecto m+0=n+m-n} \\ -d=(0,n-m) & \text{si m<n} \end{cases}$

- Producto $(a,b).(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$ (centros,extremos). Veamos ahora porqué $-2.-3=6$. $(0,2).(0,3)=(6,0)=6$. Otra forma con p. distrib.: es claro que multiplicar una deuda da más deuda $-2.3=-6$ y que $-2.(3-3)=0$, distribuyendo $-2.3+(-2).(-3)=0$ luego $(-2).(-3)=6$.

4.4 Estructura: anillo y orden total mínimo. Ideal nZ

- *A. Ent.* $(\mathbb{Z},+,.)$: es conmutativo y *Unitario*. En efecto, $a.(b+c)=ab+ac$ pues:

  - $(\mathbb{Z},+)$ *G. Abel. Adit. Z* (clausura, asoc, neutro, opuesto, conmutativo).
  - $(\mathbb{Z},.)$ *SemiG. Unitario* conmutativo.
  - El *I. Mult. Ent.* $(n\mathbb{Z},+,*)$ es un *Ideal*

- *Orden Total* más pequeño no acotado $(\mathbb{Z},\leq)$. En efecto: Rel refl, tr, antis, compl $\Rightarrow$. Cambio de desigualdad en producto: si $a<b\Rightarrow a.(-c)>b.(-c)$.

4.5 Divisibilidad: división y algoritmo euclideo (MCD)

- *Div. Eucl.* $a:b$ ($a//b$, Python): algoritmo que sobre $\mathbb{N}$ permite ver cuantos bs caben en a. Consiste en restar b a a la mayor cantidad posible de veces q (cociente) sobrando $r\in[0,b)$ t.q. $a=qb+r$ "Dividendo=Cociente*Divisor+Resto". Sobre $\mathbb{Z}$ es igual pero q puede ser pos. o neg. y r debe ser pos. obligatoriamente. (importante para definir *Rel. de Congr.*). El Tma de la D. E. asegura que q y r son únicos. [1]. Da lugar a los *Dom. Eucl.*

- Divisor $b|a$: si $r=0\Rightarrow b$. Múltiplo de b son $\dot{b}$ o $m(b)$. Primo p: si solo tiene 4 divisores $\{\pm1,\pm p\}$.$MCD(a,b)=max\{D(a)\cap D(b)\}$ (menores comunes) y $mcm(a,b)=min\{m(a)\cap m(b)\}$ (no comunes y mayores comunes). $MCD(a,b).mcm(a,b)=a.b$ (entendible con *Diagr. Venn*)

- *Alg. de Euclides* : $d=MCD(a,b)=MCD(b,r)$. Para *Ec. Diof.* Lineal. Eu. lo dem. con segmentos. Dem:

[1] En *Computacion Real*, como lo obtiene Matlab: $r=a-b*floor(a/b)$

Teniendo en cuenta la proposición PI: $d|(r\&b)$ [a] . Supongamos $\exists d_2 = MCD(b,r) > d$, como $a = qb + r \Rightarrow d_2|a$, concluimos $d_2|(a\&b)$, lo que es imposible pues d es el máximo $\Rightarrow d_2 = d$

[a] PI si $d|a$, $d|b$ y como $a = qb + r \Rightarrow d|r$, concluimos que $d|(r\&b)$

4.6 Tma Fundamental de la Aritmética y Tma de Euclides

- *Tma Fund. de la Aritm.* o Tma de Factoriz. Única [Gauss1801-DisquisitonesArithmeticae] (colorario para probar su *Ley de Reciproc. Cuadr.*: $\exists$ descomposición en primos y es única (obviando las combinaciones de signos, Ej: $6 = 2.3 = -2.-3$). Demostración "con descenso ∞":

Supongamos dos descomposiciones con primos que pueden repetirse $a = p_1...p_r = q_1...q_s \Rightarrow p_1|a(= q_j(q_1....\cancel{q_j}...q_s)$, como $MCD(p_1,q_j) = 1$ (ambos primos) $\Rightarrow$ por Lema Eu $p_1|(q_1....\cancel{q_j}...q_s)$ [a]. Si repetimos al final $p_1|q_\alpha \Rightarrow \boxed{p_1 = q_\alpha}$. Eliminar p_1 y q_α de ec. Repetimos y al final $\boxed{p_1 = q_\beta}$... $\boxed{p_r = q_\gamma}$

[a] *Lema de Euclides* : $a|(b.c)\&MCD(a,b) = 1 \Rightarrow a|c$. En efecto, *Id. Bezout* $\exists m\&n : ma + nb = 1 \iff mac + nbc = c$. Como $a|(b.c) \Rightarrow mac + nka = a(mc + nk) = c \Rightarrow a|c$. Propiedad importante en *Ideal Primo*. Aplicable a cualquier *Dom. I. Princ.*)

Se usa en *P. Fact. Ent.*, *Num. Goedel*

- *Tma de Euclides* : hay ∞ primos. En efecto, supongamos p_k el último primo, sea $a = p_1p_2.....p_k + 1 \Rightarrow \nexists$ divisibles primos $\Rightarrow$ contradicción con T.F.A. anterior. Es un Ej. de *Red. al Absurdo*

4.7 Divisibilidad estructura: retículo y dominio euclideo (ideal, grado)

- *Reticulo de Divisibilidad* : el conjunto de divisores de un nº forma un *Reticulo* (caso de *Poset*). El supremo viene dado por el MCM y el ínfimo por el MCD.

- *Dom. Fact. Unic.* por *Tma Fund. de la Aritm.* y *Dom. Eucl.* por *Div. Eucl.* (generalizado a *A. Polin. sobre K* por tener *Grad.*)

4.8 Congruencias: aritmética modular y congruencia polinomial (en 2 sentidos)

- *Rel. de Congr.* =seno(*Fourier*)=*Forma Automorfica* (ver *Hip. Riemann VIII*): $a = b \pmod n$, "a congruente con b modulo n" o simplemente $a \equiv b$ (ojo al equivalente), si:

  - def1: mismo resto de *Div. Eucl.*

- def2: $n|(a-b)$ o $(a \dot{-} b) = n$

Ej: Horas del reloj. *F. Divisor* Ej: En def. exacta de *Ent. Cuadr.* (pié de pg. *D* pos. o neg.)

Define una *Rel. Equiv.* donde $[a]_n$ o simplemente $[a] = \{a+kn\}$ es la *Clase Equiv.* (o clase residual) del elemento a y $\{[0],[1],...[n-1]\}$ es el *Conj. Cociente* Z ModN $\mathbb{Z}_n$ (ver abajo).

- Aritm. Modular: Las op. $+$ (y .) son F. *Bien Def.*. En efecto:

> Sea $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$ (*) debemos probar que $a+b \equiv a'+b'$. De (*) podemos afirmar que $a' = a+k_1 n$ y $b' = b+k_2 n$ luego $a'+b' = a+b+n(k_1+k_2) \equiv a+b$.

- *Congr. Pol.* : en dos sentidos
  - Aritm. Modular es válida para las 3 primeras *Op. Alg.* i.e. para polinomios: teniendo en cuenta la descomposición de las potencias en productos, en general se cumple que para un polinomio de coef $\mathbb{Z}$ $P(x)$ si $a \equiv a' \Rightarrow P(a) \equiv P(a')$. Usado en *Ec. Diof.* Pol. en 1 var.
  - En otro sentido podemos generalizar la *Rel. de Congr.* al *A. Polin. sobre K* al ser un *Dom. Eucl.* y enunciar *Tma Chino del Resto*

4.9 Estructuras modulares: G. aditivo (Zn,+). G. multiplicativo (Zn,*) (Zp-1+ y Zp* ¡isomorfos!). A. ciclico (Zn,+,*). Cuerpo finito (Zp,+,*) (Tma de Fermat)

- **G. Abel. Adit. Z ModN** $(\mathbb{Z}_n,+)$. Horas del reloj, denotado también como $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^+$. Tiene n elementos. Es finito comparado con el *G. Abel. Adit. Z.*

- *G. Mult. Z ModN* $(\mathbb{Z}_n,*)$. Denotado también como $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Como mucho tendrá $n-1$ elementos porque al ser multiplicativo se quita el $[0]$. Si $n=p$ primo, tiene todos los posibles porque $\forall a \exists$ inverso $b : a*b \equiv 1$). Ej: $(\mathbb{Z}_5,*)$: $\begin{pmatrix} * & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & \boxed{1} & 3 \\ 3 & 3 & \boxed{1} & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & \boxed{1} \end{pmatrix}$.

  Si n no primo, solo los coprimos a n tienen inverso. Ej: $(\mathbb{Z}_{12},*)$: $\begin{pmatrix} * & 1 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & \boxed{1} & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 5 & \boxed{1} & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 & \boxed{1} & 5 \\ 11 & 11 & 7 & 5 & \boxed{1} \end{pmatrix}$.

  Aunque no obvio, $(\mathbb{Z}_{p-1},+)$, y $(\mathbb{Z}_p,*)$ tienen un *Isomorf. Grupos*

- *A. Ciclico* $(\mathbb{Z}_n,+,*)$: $a+b \pmod n$ y $a*b \pmod n$. También denotado como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cociente entre el A. $\mathbb{Z}$ con el *I. Mult. Ent.* $n\mathbb{Z}$) (para no confundirlo con Num. P-Adico). Es un A. Conm. Unit. Z ModN

- *C. Finito* (Campo de Galois): $GF(p) = (\mathbb{Z}_p,+,.)$ es un cuerpo pues $\forall a$ excepto $[0] \exists$ inverso. Siempre tienen orden (num. elem.) p primo o p^n (pues $GF(p^n)$ es una *Ext. de C.* válida). De hecho *Gr. Ext.* $[GF(p^n) : GF(p)] = n$. Uso: *Curva Eliptica* (*Tma Fermat*), *Det. Corr. de Errores*

4.10 Aplicaciones matemáticas: resto potencial, pequeño Tma de Fermat (primalidad)

- Resto Potencial: i de b (base): $r_i = b^i \pmod n$. Cumplen: a) si $r_j = 0 \Rightarrow r_{j+1} = .. = 0$, b) si $r_i = r_i \Rightarrow r_{j+1} = r_{i+1}; ...$ periódicamente. $[a]_n = [a_0 b^0 + a_1 b^1 + .. + a_d b^d]_n \equiv a_0 r_0 + a_1 r_1 + .. + a_d r_d$. En base $b = 10$; sea $dcba = d10^3 + c10^2 + b10^1 + a10^0$. Div2: $[10^0]_2 \equiv 1, [10^1]_0 \equiv 0$...sigue 0, si $a.1 = \dot{2}$. Div3: $[10^0]_3 \equiv 1, [10^1]_3 \equiv 1$...sigue 1, si $a + b + c + d = \dot{3}$. Div4: $[10^0]_4 \equiv 1, [10^1]_4 \equiv 2, [10^1]_4 \equiv 0$...sigue 0, si $a + 2b = \dot{4}$. Div5: $[10^0]_5 \equiv 1, [10^1]_5 \equiv 0$...sigue 0, si $a = \dot{5}$. Div9: como Div3 si $a + b + c + d = \dot{9}$

- *Peq. Tma Fermat* : si p primo $\Rightarrow \forall a > 0$ y coprimo con p (normalmente pensamos en $a > p$ salvo en *Test Primalidad* con $a < p$), $a^{p-1} = 1 \pmod p$ o $a^p = a \pmod p$. Dem:

  > Fácil teniendo el Tma de periodicidad: "para cualquier *G. Mult. Z ModN* con N elementos, $\forall a \in \mathbb{Z} a^N \equiv 1$ (prueba fácil considerando la finitud del SubG. creado)". En nuestro caso tenemos: $N = p - 1$ elementos $\{1, 2, ..., p-1\}$, la op. multipl. y la identidad 1, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \iff a^p \equiv a$

  .

- *Generador Lineal Congruencial* (LCG): secuencia *Pseudoaleat.*. Es lineal-*Rel. Recurr.* y modular: $x_{i+1} = ax_i + c \pmod m$, donde $(m, a, c, x_0) = (modulo, multipl, incremento, semilla) = (9, 2, 0, 1)$ tiene un ciclo de 5 n^{o}s mientras que $(9, 2, 0, 3)$ uno de 2. En la práctica $m = 2^{32}$ y la semilla se toma del archivo Linux /dev/urandom que recoge ruido EM de ambiente.

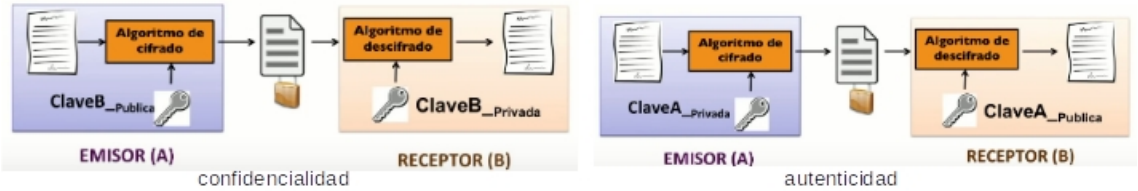
4.11 Aplicaciones: criptografía, función unidireccional (problema de factorización de enteros), test de primalidad

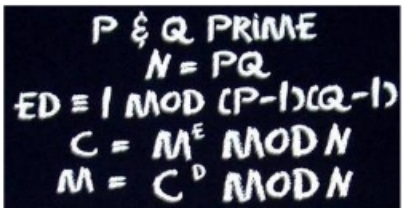
- *Criptogr.* (RESUMEN): RSA es un tipo de Cript. Asim. (ver). Bueno porque para encontrar D (necesario para el desencriptado, última ec. Fig. 4.1) necesitamos conocer $(P-1)(Q-1)$ y esto es casi imposible aunque N, E, C sean públicos (PU). Ej: *F. Unidirecc.* es *P. Fact. Ent.* de N. Mediante el *Test Primalidad* Fermat buscamos *Eviden.* P, Q grandes. Con *Tma Chino del Resto* se reduce complejidad en las op. modulares. La Encriptación de *Curva Eliptica* es una mejora. Ver *Al-Kindi* (*Combinat. Hist. Estad.*), *Wigner* [Hardy Mat. Aplic.]

- *F. Unidirecc.* : difícil de resolver, fácil de verificar. Como "encontrar aguja en pajar", password contra 10^{100}. Su existencia es una conjetura dependiente de *P. NP vs P*. Similar a *Irreduc. Wolfram* y *Probl. Inv.*

  - *P. Fact. Ent.*: ojo, no es *NP-Completo*
  - Log. Discr. $f(x) : 3^x \pmod 1 7 = 12$: a) difícil resolver $f(x) = 12$; b) fácil resolver $f(29) = y (= 12)$.
  - F. Hash: idea paper Paco igual mal ejemplo si P=NP
  - *Curva Eliptica*: más moderna y eficiente que RSA
  - *Progr. en Ent.*: ciertas variantes

Figura 4.1: Criptografía asimétrica





P,Q: PR
N: PU
D: PR, E: PU
Encript.: C: PU
(mensaje codificado)
Desencr: M: PR
(mensaje original)

- *Test Primalidad* de Fermat: si n es primo $\Rightarrow$ cumple $a^n = a \pmod n$ ((*) *Peq. Tma Fermat*), i.e. es necesario que $\forall a$ (base) $\in [1,n]$ ocurra $a^{n-1} = 1 \pmod n$ (quitamos coprimo pues ahora $a < n$). Si vamos probando todos (o casi todos) las bases a menores que n y se cumple la ec. modular $\Rightarrow$ hay *Eviden.* (alta prob.) para afirmar que n es primo. Ojo debido a que el *Reciproco* de (*) no es cierto hay n^o Psuedoprimos que cumplen la ec. mod. para ciertas bases. El más pequeño para base 2 es $n = 341 = 11.311$, pues cumple $2^{341-1} = 1 \pmod 3 41$. Todavía peor, los n^{o}s Carmichael son Pseudoprimos que la cumplen para cualquier base. El más pequeño es $n = 561 = 3.11.17$ pues $\forall a, a^n = a \pmod n$.

  Estos fallos son similares a los de los *Primo Mersenne* $M_n = 2^n - 1$ (el primo más grande conocido es $\approx M_{82\cdot 10^6}$). La *Hip. Nula* que pretendemos rechazar es "p es compuesto". Usado en *Criptogr.*.

- Cript. Asim.: Tenemos Emisor (E), Receptor (R), clave Pública (PU, la que cifra el mensaje) y privada (PR, la que lo descifra). Principio: puedo cifrar algo con la PU y descifrarlo con la PR y viceversa. El descrifrado se hace mediante una *F. Unidirecc.* (FU). Hay dos casos de uso Fig. 4.1, según se dote al mensaje de:

  - Confidencialidad: (clásico).
  - Autenticidad: (aunque no de confidencialidad, firma digital) ya que se sabe que sólo pudo haber sido R quien empleó su PR (salvo que un tercero la haya obtenido).

  Cript. Sim..: las claves son las mismas en el E y el R y deben ser acordadas de antemano.

- Otras: *Det. Corr. de Errores*

4.12 Aplicaciones: mcm (fracciones, música, engranajes) y MCD, Dalton

- mcm: Suma de Fracc. y divisores de polinomios. (Mercurio,Venus,Tierra), Engranajes, arbol de levas cada cuando se sincronizan. La fundamental y la 5^a se sincronizan cada menos periodos que las disonantes. Compás 2/4 y 3/4

- MCD: simplificar fracciones y *Ec. Diof.*. Geométricamente, el máximo común divisor de a y b es el número de puntos de coordenadas enteras que hay en el segmento que une los puntos (0,0) y (a,b), excluyendo el (0,0).
- Ley Proporciones Múltiples de Dalton (Química): las proporciones de los nuevos productos son enteras respecto a los reactivos, evidenciando la naturaleza atómica. Ej: dados 100g de C, se combinan 266g de O (para dar CO) o 133 de O (CO_2) proporción 266:133=2:1. Ej: dado 1g de C, se combinan 0.252g de H (C_2H_6) o 0.224g de H (para C_3H_8), proporción 252:224=9:8

4.13 Conclusión y bibliografía

Como Intro

Chapter 5

T8. Sucesiones. Término general y forma recurrente. Progresiones aritméticas y geométricas. Aplicaciones.

5.1 Introducción: Malthus, Moore, ajedrez, par. Zenon

- Ej-motivador: Ej1: El *Malthusianismo* dice la población crece exp. (*Pr. Geom.*) mientras que los recursos arit. (*Pr. Aritm.*) entonces siempre habrá pobres (o por eso debe haber guerras). Ej2: Esto se desmonta añadiendo la *Ley Moore* (de los rendimientos acelerados) que con la tecnología los recursos crecen exponencialmente. Ej3: Regalo en trigo de príncipe Indio al inventor de ajedrez (1200dC, p.geom). Ej4: *Par. Zenon*

- Pitagoras-escuela nº triangulares (suma en p. arit.). Fibonacci y nº aureo. El nº e toma el nombre de Euler el grande las sucesiones y *Serie* de la notación que usamos hoy.

- Importancia-histórica: *Dif. Suces.*, *Formula Binet*, *Filtro IIR*

5.2 Definiciones: sucesión (vs serie), Turing-descriptiva, termino general (f. generadora) y forma recurrente

- *Suces.* : *Aplicacion* de $\mathbb{N}$ (dominio) en otro conjunto (*Codominio*: nº, funciones o figuras...) $f : \mathbb{N} \to \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}\}$. Ej: Suc. de Funciones *Conv.* Unif.. No confundir con *Serie*.

- Formas de describirla: 1) *Turing* descriptiva (Ej: dígitos de π o $1, 4, 9, 16, 25, ..$); 2) Term. General o Forma Analítica (*Forma Cerrada*, ver *F. Generad.* de *Fibonacci*!): $a_n = n^2$; 3)*Rel. Recurr.*, aquí *Rec. Lineal* $a_n = 0.5a_{n-1}$ (*Funcion* 3 def.)

5.3 Topología: suc. Cauchy, monotonia y alg. de suc.

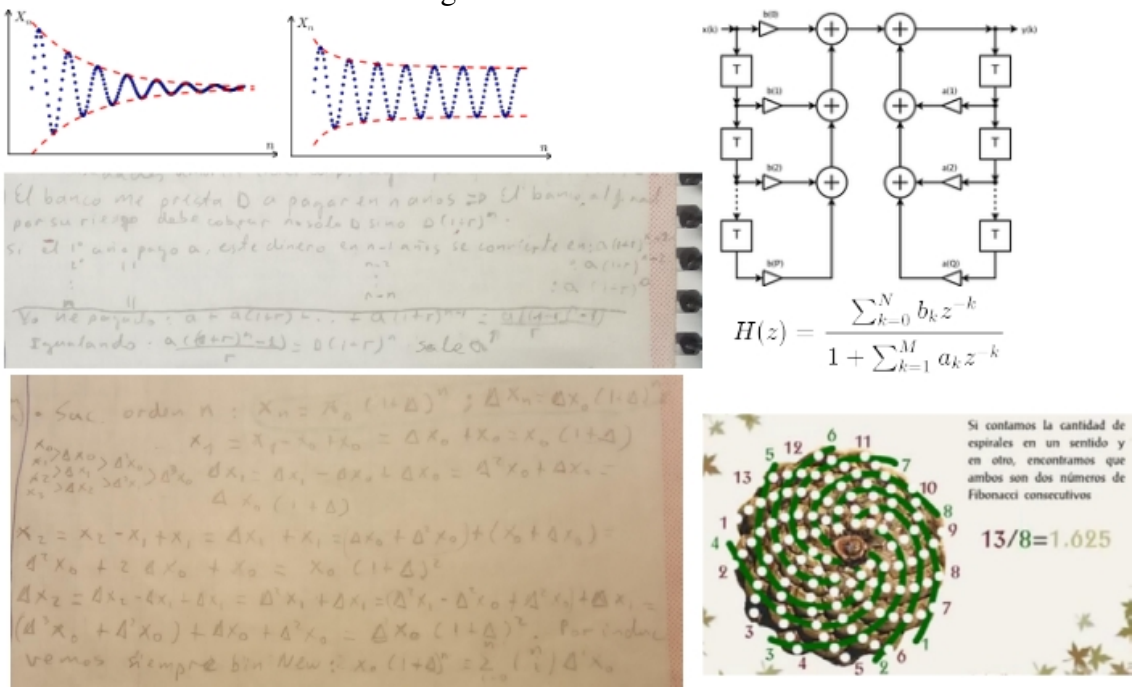
- *Suc. Cauchy* (*Topol.*) o del Epsilon y N: si $\forall \varepsilon \exists N : \forall m, n > N : |a_m - a_n| < \varepsilon$, tomada una distancia lo pequeña que quieras, existirá un término que los que le siguen mantienen esa distancia. No toda suc en que distancia de consecutivos disminuye es Cauchy (ej: $\sqrt{n}, \log n$;). Útil porque en un *Esp. Metrico Completo* como *Esp. Banach* toda suc.

Cauchy es convergente y suele ser más fácil dem "de Cauchy" que encontrar el límite de convergencia. En Fig. 5.1 izda si el espacio es completo existirá el límite de la suc. Sirve para mostrar la Converg. de una *Serie* si sus sumas parciales (s_n) son de Cauchy (con la diferencia $|s_m - s_n|$). Ver *Conv.* Unif.

- Monotonia (estudio del de/crec): 1) Monótona creciente: $\forall n, a_{n+1} \geq a_n$ (estrict si $>$); 2) Acotada: $a_n \leq L$; 3) Converge a L si $|a_n - L| < \varepsilon \iff$ es de Cauchy. En Fig. 5.1 dcha (seno discreto) vemos suc. acotada pero no de/creciente ni convergente.

- Álgebra: 1) Si $\exists \lim a_n = a \& \lim b_n = b \implies \lim a_n + b_n = a + b$. 2) $\infty + \infty = \infty$, $l/0 = \infty$ (Bahskara II), indeterminaciones

Figura 5.1: Sucesiones



5.4 Progresión aritmética y geométrica (serie, par. Zenon)

- *Pr. Aritm.* : $a_n = a_{n-1} + d$, $a_n = a_0 + nd$ y su Suma [Gauss *Creat.*] $S_n = \frac{(a_0 + a_{n-1})n}{2}$ (*Dem. por Induc.*)

- *Pr. Geom.* : $a_n = ra_{n-1}$, $a_n = r^n a_0$ y su Suma $S_n = \frac{a_0(r^n - 1)}{r-1}$ ($S_\infty = a_0 \frac{1}{1-r}$). El producto $P_n = \sqrt{(a_0 a_n)^2}$ pues si multiplicamos $P_n = a_0 r^0 . a_0 r^1 .... a_0 r^{n-1}$ con su "al revés" tenemos $P_n^2 = (a_0 r^{n-1})^n = (a_0 . a_0 r^{n-1})^n = (a_0 . a_n)^n$. Ver *Serie Pot.* Geom., *Par. Zenon*, *Suma Div.*, *Espiral Aurea*, *Vandermonde*, *Juegos Azar* (*Cadena Markov*)

  Ambas (aritm y geom) cumplen relaciones interesantes. Si $m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$ pues el lado izdo $a_0 + md + a_0 + nd = 2a_0 + (m+n)d$ es igual al dcho $a_0 + pd + a_0 + qd = 2a_0 + (p+q)d$

5.5 Progr. de orden superior: método de las diferencias finitas (suma de cuadrados y cubos) y recurrencia lineal

- *Dif. Suces.* : $x_n = x_0(1+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n(=0 \text{ si n>p})} \binom{n}{k}\Delta^k x_0$ (op. diferencial, *Binom. Newton*). Dicho método permite pasar de *Suces.* Descrip. de nº a *Forma Cerrada* Anal. suponiendo que es tipo polinómica (*Ec. Alg.* Ej: $x_n = n^2+2n-1$). Ej: *Pr. Aritm.*, Ej: Suc. de cuadrados o cubos: $x_n = n^2$, $x_n = n^3$ Ej: Equivale a *I. Newton* pero no a *Filtro FIR* [1]

  - Dem. Fig. 5.1.
  - Debido a que la *Deriv.* del orden del *Grad.* del pol. se anula). No confundir con Mét. *Dif. Finitas* (*Ec. Dif.*) o con *Dif. Divididas* (*Interpol.*)

  Considerando que $\binom{n+1}{m+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m}$ entonces $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\Delta^k x_0$.

  Ej: Suma de los n primeros cuadrados y cubos $S_{n^2} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_{n^3} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Curiosamente $S_{n^3} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+..+n)^2 = (S_n)^2$. Se pueden obtener más rápido usando 1) expansión de binomio superior $(k-1)^{p+1}$ y 2) serie telescópica $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1}) = a_n-a_1$ [BrilliantSumSquare]. 3) suma de potencia anterior $S_{n^{p-1}}$. Obtención de S_{n^2}:

  - 1) $(k-1)^3 = k^3-3k^2+3k-1 \iff k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1 \iff \sum_{k=1}^{n} k^3-(k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2-3k+1$
  - 2) y 3) $n^3 = 3S_{n^2} - 3\frac{n(n+1)}{2}+n$. Despejando S_{n^2} sale

- *Rec. Lineal* : $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+..+c_ta_{n-t}$. El siguiente método permite pasar de *Rel. Recurr.* a *Forma Cerrada* Anal (que va a ser expon.). Es similar a *Ec. Dif.* Lineal. Ej: De *Fibonacci* a *Formula Binet*. Ej: De *Filtro IIR* a Resp. Impul. Otra técnica es con *Transf. Z* inv. (si inicio $0,0,1,0,0$..

  - 1) Su *Pol. Caract.* es $P(x) = x^t - c_1x^{t-1} - \ldots - c_t$ con t raíces $r_1, r_2, .., r_t \in \mathbb{C}$.
  - 2) Podemos $a_n = \lambda_1 r_1^n + .. + \lambda_t r_t^n$ donde los λ_i salen de las condiciones iniciales.
  - 3)Ojo, si p.e. multiplicidad $r_1 = 3$; $a_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 n r_1^n + \lambda_3 n^2 r_1^n .. + \lambda_t r_t^n$.
    I.e. las raíces crean un *Base* de dimensión t^2: $\{\{r_1^n\},\{nr_1^n\},\{n^2r_1^n\},..,\{r_t^n\}\} = \{(1,r_1,r_1^2,\ldots),\ldots\ldots,(1,r_t,r_t^2,\ldots)\}$;
  - 4) Sucesión producto: si (r_1,r_2), (s_1,s_2) son las raices de a_n y b_n, el pol caract. de la suc. prod. $a_n * b_n$ es: $P(x) = (x-r_1s_1)(x-r_1s_2)(x-r_2s_1)(x-r_2s_2)$.

[1] $y_n = b_0(n-0)+b_1(n-1)+b_2(n-2) = (b_0+b_1+b_2)n-(0b_1+1b_1+2b_2) = an+b$ FIR con entrada rampa vs $y_n = b_0n^0+b_1n^1+b_2n^2$ Pol.

[2] Si fijas los coeficientes c_1, c_2 el conjunto de todas las orbitas infinitas viene identificada por el vector inicio (a_0,a_1). Estos vectores inicio con la suma (y escalar) son un *Ej. de EVs.* Ej. sea $a_n = 2a_{n-1}-a_{n-2}$, las orbitas A (2,-1,-4,-7,..) y B (-1,3,7,11,..); entonces A+B se obtiene también tomando como inicio (1,2)=(2,-1)+(-1,3)

5.6 Aplicación matemática: Fibonacci, Phi, Binet, función generadora

- *Fibonacci* : *U6Suces*. $F_n/F_{n+1} \to$ *Phi* por esta relación aparecen por doquier ocultos como en la *Espiral Aurea*. Pero también explícitamente como en: 1) Fig. 5.1, nº espirales (normalmente *Espiral Aurea*) contadas en un sentido y en el otro son F_n y F_{n+1}. El nº de hojas de una flor suele ser algún F_n (no nº entre medias), etc. [3]. También en *Alg. Diof. X*.
  - *Formula Binet* 1843: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^n - \hat{\Phi}^n] = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$. Sale de aplicar *Rec. Lineal*. La *F. Generad.* de F_n es inversa de Φ: $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + ...$ Parecido a *F. Eichler*.
- (*) *Num. E* Converg. Form. de e: Monotonía de $(1+\frac{1}{n})^n \to e$:
  - Creciente: por *Binom. Newton* equivale $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} =$ [4] $= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{(n-1)}{n})$. Si $n\uparrow$, se añaden más sumandos.
  - Acotada: a) Reemplazar los paréntesis $(1-\frac{1}{n}), (1-\frac{2}{n}), ...$ por 1. b) Limitar factoriales por serie del 2: $\frac{1}{3!} = \frac{1}{3.2} < \frac{1}{2.2}; \frac{1}{4!} = \frac{1}{4.3.2} < \frac{1}{2.2.2} \Rightarrow e < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+... = 1+2<3$

5.7 Aplicación matemática: fracción generatriz y suma de divisores (f. divisores)

- Fracción generatriz (*Pr. Geom.*): $0.00\overline{496} = 496(\frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^8} + ...) = 496(\frac{1/10^5}{1-1/10^3})$ (*F. Generad.*) Ver TProblem.
- *Suma Div.* $SD(N)$: si $N = p_1^{a_1}...p_n^{a_n} = \prod_p \Rightarrow SD = \prod_p(\sum_j p^j)$ (Num. Div.: sumar exponentes de los p). Por *Tma Fund. de la Aritm.*, es una Suma de *Pr. Geom.* y un *Prod. Euler* (¡producto indexado por primos!, ver *F. Zeta*). Ej 1ºESO: SD(42)=los productos de dos *Combin.*, los de tres,.. Usada en *Ec. Diof.* Dif. Cuadr. Ver TProblem.

  F. Divisor : *F. Aritm.* nº de divisores de un entero. Ramanujan mostró que cumple ciertas *Rel. de Congr.*. Relacionada con F. Modular (*Forma Automorfica*) y *F. Zeta*. Ver *Tma Num. Primos*. Rel. con F. Euler Φ (nº de coprimos con n)
  - Div.: $(1+p_1+p_1^2...+p_1^{a_1})()(1+p_n+p_n^2...+p_n^{a_n})$
  - Nº Total (*F. Divisor*): $r = (a_1+1)()(a_n+1)$
  - Suma (*Pr. Geom.*): $S = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}...\frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$
  - Prod: $P = \sqrt{N^r}$
- Otras: *Serie* (*P. Basilea*), *Rel. Recurr.* (*Conj. Mandelbrot*, *Generador Lineal Congruencial*)

[3] El nº de hijos en cada capa de un árbol sigue F_n. El nº de tallos que completan un ciclo de la hélice suele ser es un F_n.

[4] Considerando el reparto del n^k Ej: $\frac{1}{3!}\frac{n!}{(n-3)}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{3!}\frac{(n)}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n} = \frac{1}{3!}(1)(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$

5.8 Aplicación real: filtro digital FIR e IIR (transformada Z), interés compuesto, aplicación logística

- Filtro Digital: con *Rec. Lineal*
  - *Filtro FIR* : $y_n = \sum_{i=0}^{P} b_i x_{n-i}$, i.e. la salida es la entrada *Convol.* con $b_i = h_i$ (respuesta a *F. Impulso* (delta-Dirac/Kronecker, *F. Indic.*). [5]
  - *Filtro IIR* (Infinite Impulse Response): $y_n = \sum_{i=0}^{P} b_i x_{n-i} - \sum_{j=1}^{Q} a_j y_{n-j}$ comprender su nombre (ver Fig. 5.1). Ej: *ARMA*, *Mod. Prod. Voz*

  La ventaja del IIR respecto a los FIR es que con menos orden se consigue lo mismo (i.e. menos carga computacional), pero pueden ser más inestables . Se pueden diseñar (*Probl. Inv.*) con Padé (directa) o bilineal (a partir de prototípo analógico).

  Transf. Z =*F. Generad.*: da la *F. Transf.* $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_i b_i z^{-i}}{\sum_j a_j z^{-j}}$ (*C. Func. Rac.*) y $z = e^{jw}$ ver *Laplace* da Bode o *Fourier*. La inversa (tiempo) sale de *Desc. Frac. Simpl.*, otra técnica es con *Rec. Lineal* (inicio $0,0,1,0,0$... Estable si polos (*Singular.*) en disco unidad $|z| < 1$ (ver *Serie Pot.* Geom., *Teor. Control* lazo cerrado, *Laplace*).

- Economia:
  - Interés compuesto: ingresamos a y se congela. Año 0) a; 1) $a + rs = a(1+r)$; 2) $a(1+r) + r[a(1+r)] = (1+r)a(1+r) = a(1+r)^2$; 3) $a(1+r)^3$...; n) $a(1+r)^n$
  - Anualidades amortización con interés compuesto: debo pagar por año $a = \frac{D(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}$. Fig. 5.1

- Biología: *Apl. Logist.*.

- Otras: Doblar papel 54 veces=dist al Sol.

[5] el Tma Convol. dice que $f(n) * g(n) = F(w)G(w)$ y por eso es un filtro en *Fourier*. Ver *Autocorr.*, *Alg. de VA*, *Tma Parseval*, *CNN*

Chapter 6

T9. Números complejos. Aplicaciones geométricas.

6.1 Introducción: duelos matemáticos y creer en ficciones

- Ej-motivador: ¿como es posible filtrar una señal en agudos, medios o graves de forma eficaz? ¿Como se relaciona el grado de un polinomio con la cantidad de ceros que posee?

- *Duelos Matem.* [YoutubeDerivando]: En el Renacimiento se daban 30 problemas uno al otro y tenian 50 dias para mostrar públicamente quien había resuelto más. En 1535 en Bolonia ocurrió el más famoso entre Tartaglia (pobre pero con talento) y Fiore (ladrón sin talento)

  [1]

- *Creer en Ficciones* [Harari] (*Lenguaje Adecuado*): con motivo de estos *Duelos Matem.*, Cardano fue el primero en usar con soltura los negativos (imagina los algoritmos tan complicados que tenian que usar sus predecesores) y con sus métodos para ec. de 3 y 4 gr abrió la puerta al uso de los $\mathbb{C}$ (habian permanecido en la sombra y el casi también los pasa de puntillas, no los estudia sistemáticamente). **La idea es que aunque solo estemos interesados en sol. positivas, todo se simplifica si se manipulan negativos y complejos en los alg. de resolución. Para mi, Número=Algoritmo, *Cuaternion.*.** En una *EA*, un par de n^{o} es un algoritmo enmascarado que recibe una entrada y da una salida. Otras ficciones son *Serie Pot.* Formal., dinero, patria o coronavirus. Ver *Platon.*, *Obj.*, *Construct.*, *Finit.*, *Filos. Groth.*, *Filos. Digital* (Chaitin y $\mathbb{R}$), *Calent. Global*, *Apuesta Pascal*.

- Descartes acuña el término n^{o} imaginario. Euler los establece $i = \sqrt{-1}$. Gauss fama, nombre $\mathbb{C}$ (seguridad de *EA U8Compl*). Hamilton *Cuaternion.*. Cauchy al principio niega $\mathbb{C}$.

- Importancia-histórica: *Tma Fund. del Alg. Ley de Reciproc. Cuadr.*, *Transf. en Plano C*

[1] Se solian poner ec. gr. 3 porque nadie conocía su fórmula en el Renacimiento. Fiore conocia la incompleta $ax^3 + cx + d = 0$ (se la robó a su gran maestro del Ferro que quería haber publicado con su nombre antes de morir) pero Tartaglia dias antes descubrió las de Fiore y algunas más así que ganó. Pero aparece Cardano (triunfador, amante de las apuestas, polivante, inventor del la Unión Cardan) y su ayudante Ferrari y convencen a Tartaglia para que les enseñe sus secretos sin publicarlo. Finalmente este los amplia y publican un libro donde resuelven la ec. de 3 y la 4 (Ferrari) completa. Tartaglia se enoja pero aparece nombrado en el libro

6.2 Construcción de C desde R: par ordenado (+,*,.) e isomorfas (binom., polar), entonces (-,:). Malinterpretación

- Constr. de C desde R: Sea el conj. $z = (a,b)$ de *Par Ord.* $\mathbb{R}x\mathbb{R}$. Llamamos parte real e imaginaria a a y b. Y sean las op: 1) Suma +: $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$. 2) Prod. externo .: $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$. 3) Prod. interno *: $(ac-bd, ad+bc)$.

- Represent. *Isomorf.* a la de Par Ordenado:

  - Binómica: $a+bi$ donde $i = (0,1) = \sqrt{-1}$ Unidad Imaginaria o nº especial que cumple $i^2 = (0,1)*(0,1) = (-1,0) = -1$. Esto permite operar con suma y producto habitual de $\mathbb{R}$.
  - Forma Polar (en plano Argand, Fig. 6.2): $z = r_\theta$ (módulo $r = \sqrt{z\bar{z}}$ y argumento $\theta = arctg(a/b)$), con idem.
  - Matriz: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con idem.

  A partir de estas representaciones se derivan más fácilmente la Resta y la División $(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$ (por conjugado $\bar{z} = a-bi$).

- *Malinterpret.* de Euler: IMPORTANTE

  Plano Argand y Formula de Euler

6.3 Estructura: de cuerpo, espacio vectorial y álgebra

- *C. EV Alg. Compl.* $(\mathbb{C},+,*)$ *Cuerpo*:

  - +.*Anillo*-conmut-unit: a) +G-abel: $z_1+z_2 \in \mathbb{C}$ claro, b) .*SemiG.*: $(z_1*(z_2)*z_3)$ claro. c) +.Distribut: $z_1(z_2+z_3)$ claro.
  - Neutro: $0 \neq 1_{2\pi k}$
  - .Invertible: claro con representación en "forma polar".

- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es *Ej. de EVs* (con $\mathbb{R}^2$ como *Esp. Eucl.*) y $(\mathbb{C},+,\cdot,*)$ *Alg. sobre Cuerpo* asoc. y conmut. Ver *Transf. en Plano C*

6.4 Números algebraicos. C extensión algebraica de R. Inclusiones

- *Ext. Alg.*: defin.

- (*) *A. Ent. Alg.* (o Ent. Alg.) $(\mathbb{EA},+,.)$: Raices (Ra. *Ceros*) del $\mathbb{Z}[x]$ mónicas, i.e. el conj. de nº $\mathbb{C}$ que son sol. de pol. mónicos con coef. sobre $\mathbb{Z}$. Es cerrado bajo las 3 primeras *Op. Alg.* $(+,-,*,/,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}...)$ (potenciación con $*$) por lo que forman un *Anillo*, pero no un *Cuerpo* (no con $/$). Ver *Op. Log.*. Ej. *Phi*, SubA.: *A. Ent. Cuadr. Frac. Alg.* Es *Contable* y cumple la siguiente relación de inclusión $\mathbb{EA} \subset \mathbb{C}$ (subanillo de *C*, *Conj. Num.*).

- *C. Num. Alg.* (C. Numerico, *Num. Alg.*) $(\mathbb{NA},+,.)$: Ra. de $\mathbb{Q}[x]$ (*A. Polin. sobre* K=$\mathbb{Q}$ mónicos) o Ra de $\mathbb{Z}[x]$ no mónicas. Es cerrado bajo las 4 primeras *Op. Alg.*, no confundirlo con los anteriores. **Otra def. ver *Rel. Ext. Alg. Finita*** Ej: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ (*Gr. Ext.*), *C Ext. Alg. de R* (alante), *C. Ciclotomico*. Ver *Teor. Galois* (hay $\mathbb{NA}$ que no tienen *Forma Cerrada*).

- Son *Contable* y cumplen las siguientes rel. de inclusión (*Conj. Num.*):
  - Ent. Alg.: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{EA}\subset\mathbb{NA}\subset\mathbb{C}$ (todos menos 1 subcuerpos). Incluye al *C. Num. Constr.* y *C. Cuadr.*. Su complemento son los *Trascend.*. Ojo hay Num. Alg. como el 1.167.. de la *Teor. Galois* que no son expresables con *Op. Alg.*.
  - *C. Cuadr.* : $\mathbb{Q}(ra_2)$ donde ra_2 es raiz de pol. de *Grad.* 2 irreducible, i.e. *C. Num. Alg.* de *Gr. Ext.* 2 sobre $\mathbb{Q}$. Rel. con *Ley de Reciproc. Cuadr.* y *Forma Cuadr.* binaria.

- *C Ext. Alg. de R* : $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$ cuyo *Gr. Ext.* de cuerpo $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$ pues $\mathbb{C}=\{a+bi:a,b\in\mathbb{R}\}$.

6.5 Clausura algebraica y tma fundamental del Álgebra

- *Clausura Alg.* $CA(K)=L$: es la *Clausur.* del conj. K (*Cuerpo*) bajo la op. raices de pol. $K[x]$, i.e. es su *Ext. Alg.* cerrada, i.e. L incluye todas las ra. de $K[x]$. Por el *Lema Zorn* todo cuerpo tiene una. Ej: $CA(\mathbb{Q})=\mathbb{NA}$ y $CA(\mathbb{R})=\mathbb{C}$. Obviamente la CA de una CA es ella misma, es un Conj. Alg. Cerrado. Ej: $CA(\mathbb{NA})=\mathbb{NA}$ y $CA(\mathbb{C})=\mathbb{C}$. La CA es única para cada K. Relacionado con origen del *Progr. Langland*.

- *Tma Fund. del Alg.* : Dado que $CA(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ podemos enunciar $\forall\mathbb{C}[x]\exists$ (al menos una) raíz. Es un ej. de *Filos. Groth.*: [Argand y Gauss] fueron los primeros en formularlo no solo para $\mathbb{R}[x]$, si no para $\mathbb{C}[x]$. Corolario: $P(x)=a_n\prod_i(x-r_i)^{m_i}$ (multiplicidad n_i). Rel. Cardano-Vieta (ver TProblemas). Ej: *I. Polin.* garantiza unicidad

6.6 Fórmula de Euler: dos demostraciones

- *F. Euler* : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Es un bello resultado. Dos Dem. (por series o por *Ec. Dif.*, Fig. 6.2).

6.7 Aplicaciones geométricas: f(z) isomofismo al grupo de las semejanzas (giros con centro no 0). Epicicloides (Fourier). Cuaterniones

- *Transf. en Plano C* : como hemos mencionado, **si pensamos** a $\mathbb{C}$ como *Esp. Eucl.* $\mathbb{R}^2$, vemos *C. EV Alg. Compl.*. Siendo $f(z)=az$ las *Apl. Lin.*. De hecho el conj. de las F. tipo *Transf. Afin* $f(z)=az+b:a,b\in\mathbb{C}$ forman un G. *Isomorf.* al *G. Semejanzas* directas de $\mathbb{R}^2$ (podemos hacer transf. 2D sin matrices). Dem. considerando $f(z)=re^{i\theta}r_ze^{i\theta_z}+b$ y tabla siguiente:

Función f	$\mathbb{C}$ con f como op. forma un G. *Isomorf.* a
$f(z)=z+b : b\in\mathbb{C}$ traslada z un vector b	G. Trasl. $b\sim T(\vec{b})=\binom{Re(b)}{Im(b)}$
$f(z)=e^{i\theta}z$ gira z un ángulo θ	G. Giros con centro 0 *G. Esp. Ortog.* $e^{i\theta}\sim G(0,\theta)=\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{pmatrix}$
$f(z)=rz : r\in\mathbb{R}$ escala z	G. de *Homot.* con centro 0: $r\sim H(0,r)=r$

Ej: Giro de centro c y ángulo α sobre z: $G(c,\alpha)z=(z-c)e^{i\alpha}+c$. Ej: Multiplicar i = girar 90 Si $f(z)=a\bar{z}+b$ tenemos el *G. Semejanzas* inversas

- *Epicicl.* : *Locus* del último pto de la composición de mov. circ. de distinto radio a_i y v. angular $k_i=\frac{2\pi}{T_i}$. ¡$\mathbb{C}$ mucho mejor que *Cambio Base*!. Ej: de dos movi.: $z(t)=z_0+z_1=a_0e^{ik_0t}+a_1e^{ik_1t}$. (*Cardiode* y *Braquistocrona*,*L. Kepler* y *Robot.*).
  - *Fourier* = (seno)*Rel. de Congr.=Hip. Riemann VIII=Forma Automorfica* (TF/DFT/FFT): *Epicicl.* general $z(t)=\sum_{n=0}^{N}a_ne^{ik_nt}$ es la DFT inversa. La DFT da una *Vandermonde* y la FFT una *Toeplitz* circular
  - Usos de Fourier: *Anal. Funcional* (*Fasor.*, *Ec. Difus.*, *Diagon.*), Filtrar (*Rec. Voz*, *Circ. RLC*), acelerar la convolución, multiplicación matrices, op. sobre *C. Finito.*. *Func. Caract.* (Prob.). Ver *Tma Wiener-Khinchin*, *Convol.*, *F. Generad.* en *Serie*, *Compr.*
- *Cuaternion.* [Hamilton1850]: $a+bi+cj+dk$ cumplen tab. prod. $i*1=1, i*j=-1,\ldots$ Son una *Alg. sobre Cuerpo* **si los pensamos** en $\mathbb{R}^4$. Los C. *Dual*es: permiten hacer en 3D las *Transf. Rigid.* sin matrices al igual que los $\mathbb{C}$. El paradigma de *Creer en Ficciones*. Ej: videojuegos. Originó el *Anal. Vect.*

6.8 Apl. geom. y anal.: Función holomorfa=transformación conforme. Singularidad (polo). Extensión analítica. Monodromía (Log(z) vs log(z)). Pto de ramificación. Superficie de Riemann

- *F. Holomorfa* =*Transf. Conforme* :
  - *F. Holomorfa*: $f(z)$ en $z_0\in\mathbb{C}$ si expresable como *Serie Pot.* $f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)$ y *Conv.* en entorno de z_0. **F. Anal.** $f(x)$ similar pero $x_0\in\mathbb{R}$, FA $\Rightarrow$ tiene *Taylor* y es ∞ deriv.. Ojo, el *Reciproco* no es V, hay F. *Suav.* no Anal. como e^{-1/x^2}. En $\mathbb{C}$ (pero no en $\mathbb{R}$) se cumple: si deriv. en $z_0\Rightarrow$ Holomorf. en x_0 (expresable como *Serie Pot.*) i.e. ¡si *Diferenc.* una vez lo es siempre!. Ej: $e^z, sin(z)$, $log(z)$ (una hoja), *C. Func. Rac.* sin polos ($\frac{1}{z} : z\neq 0$) o *F. Zeta*. Ver *Conj. Julia*, *Diferenc.*, *Ext. Anal.*
  - *Transf. Conforme*: transf. que preserva ángulos de rectas pero no distancias. En la Fig. 6.2 podemos ver como todas los ángulos rectos siguen siendolo tras la transf. *F. Zeta*. Toda *F. Holomorfa* es *Transf. Conforme* en el dominio de transf.. La *Proyec.* de Mercator y la estereograf. (*Esf. Riemann*) lo son.
  - *Singular.* :

  * Pto $\mathbb{C}$: de un Domin. donde no es *F. Holomorfa* (polo si cero del denom.). Ej: *Transf. Z*, *Monodrom.*, *Form. Int. Cauchy*,
  * Pto $\mathbb{R}$: donde la 1ª derivada de la F. no es continua. Ej: $|x|$, y *F. Weierstrass* ¡en todos!. *F. Cantor*. Ej: *Suav.* (ver Orden de Pto Sing. *Conica*). Ver *Manifold*.

- Prolong., Contin., *Ext. Anal.* : de una *F. Holomorfa* $f(z)$ es otra $g(z)$ Holomorfa que da los mismos valores que f en la región de solapamiento pero que *Conv.* en regiones donde f no. Aunque existen muchas Ext. de $f(z)$ solo existe una EA que sea *Transf. Conforme* (mantenga ángulos). Técnica habitual de EA [SpigelVarC147]: supongamos desconocemos *Forma Cerrada* de $f(z)$ pero tenemos *Taylor* $f_a(z) = \sum_n a_n(z-a)^n$ que *Conv.* en región $|z-a| < C_a$, tomamos $b \in C_a$ y calculamos derivadas del Taylor anterior y obtenemos uno nuevo: $f_b = \sum_n b_n(z-b)^n$ que *Conv.* en región $|z-b| < C_b$, etc.. Ver Tma *Monodrom.* para cuando tomamos otro camino. $a, b', c', ..$ Ej1 [SpiegelVarCpg160]: la *Serie Pot.* Geom. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{1-z/2}$ si $|z| < 2$ puede ser EA por $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} = \frac{1/(2-i)}{1-(z-i)/(2-i)}$ si $|z| < \sqrt{5}$ ya que ambas dan la misma *Forma Cerrada* $\frac{1}{2-z}$, ver Fig. 6.2. Ej2: EA de *F. Zeta*

- *Monodrom.* : estudio de cuanto cambia una cuando circunda un **Pto Ramif.** (PR) (como *Form. Int. Cauchy*). Las $f(z) \in \mathbb{C}$ no son *Funcion* u *Aplicacion* ya que son multivaluadas. Ej: $Log(z)$ [2]. Ej: Expon. o raiz: $i^i = e^{-\pi/2-2\pi k}$. La región donde la $f(z)$ es univaluada se llama rama y está limitada por un PR (suele ser una *Singular.* o un 0) y una recta.

  - *Sup. Riemann*: IMPORTANTE
  - Tma Monodromia: sean dos caminos distintos de *Ext. Anal.* que empiezan y terminan igual $a, b, c, ..n$ y $a, b', c', .., n$. Si entre ellos no hay ningún PR entonces ambas ext. serán identicas, i.e. no hay porqué preocuparse por el tipo de camino tomado. Las *Sup. Riemann* ayudan a entenderlo (ver Fig. 6.2 donde no se cumple por haber un PR)

6.9 Aplic. geom. y anal.: Plano proyectivo C (Apolonio, Poncelet). Mandelbrot.

- *Plano Proyec.* C o *Esf. Riemann*: *P. Apolonio*, *Tma de Cierre Poncelet*.

- *Conj. Mandelbrot*

6.10 Aplicaciones al análisis: integración con frac. simples y Laplace (ec. dif.)

- *Ec. Dif.* y *Primit.*: *Desc. Frac. Simpl.* o *Laplace*

[2] Logaritmo de un número $z = re^{i\theta}$ no es solo otro numero, hay ∞ soluciones. Considerando que $z = re^{i(\theta+2\pi k)} \Rightarrow Log(z) = \log r + i(\theta + 2\pi k)$. Se suele usar la mayúscula $Log(z)$ para todas las soluciones y la minúscula $log(z)$ para la sol base.

- *Form. Int. Cauchy* : $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$, donde C camino cerrado simple antihorario sobre z_0 (*Singular.* como *Monodrom.*). Es un tipo de Int. Lin. de *Anal. Vect.*. Es consecuencia del Tma Int. de Cauchy $\oint_C f(z)dz = 0$ y este del *Anal. Vect.* (Tma Stokes). Ej: sea la circunf unidad $C = \{|z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0,2\pi]\} \Rightarrow \oint_C \frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i \cos 0$. $f(z)$ es *F. Holomorfa*.

6.11 Aplicaciones aritméticas: fórmula binet, entéros cuadráticos (ec. Pell)

- *Formula Binet*

- *A. Ent. Cuadr.* y *Ent. Cuadr.* : elem. *A. Ent. Alg.* de *Gr. Num.*=2. i.e. el conj. de sol. $\mathbb{C}$ de $P(x) = x^2 + Bx + C = 0$ con $B, C \in \mathbb{Z}$. Tienen casi la forma $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ [3]. Ej: *Ent. Gauss.*. Ej: $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ (*Ext. Alg.*, real no complejo) de *Ec. Pell*. Permiten operar como en $\mathbb{C}$ donde la Norma es el prod. con conjugado: $||z|| = ||(x+y\sqrt{n})|| = (x+y\sqrt{n})(x-y\sqrt{n})$. Rel. con *Forma Cuadr.* sobre $\mathbb{Z}$. No confundir con *C. Cuadr.* o *Cuadrica*

- (*) *Ley de Reciproc. Cuadr.* (Tma Áureo): $\begin{cases} x^2 \equiv p \pmod q \\ y^2 \equiv q \pmod p \end{cases}$, si p o $q \in 4k+1$ entonces una de las ec. tiene sol. $\iff$ la otra no tiene. Gauss sigue una *Filos. Groth.* afirmando que esto no es más que un colorario de la Ley Bicuadrática sobre los *Ent. Gauss.* $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi : a,b \in \mathbb{Z}\}$ (*Dom. de Integridad*), i.e. un tipo de tma de reciprocidad sobre *C. Ciclotomico* $\mathbb{Q}(e^{ik2\pi/n})$ (*Ext. Alg.* raiz n-sima de la unidad, ver *Eviden.*). Esta prueba sirvió como patrón para la Teoría Cuerpos de Clases y por ende para el *Progr. Langland*. Rel. con *C. Cuadr.* [4]

6.12 Aplicación: Hipótesis de Riemann

- *F. Zeta* de Riemann: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-s}}$ donde el sumatorio está en forma de *Serie Dirichlet* (con $a_n = 1$, ver *F. Generad.*) y el productorio en *Prod. Euler*. Así *Conv.* para semiplano-dcho $s > 1$ por lo que para valores menores usamos la fórmula *Ext. Anal.* (ver Suma Ramanujan *Serie Pot.*). El caso $s = 1$ es el único pto no *Conv.*. El caso $s = 2$ es *P. Basilea*. Es un tipo de *Funcion-L*. En la Fig. 6.2 podemos ver como al crecer en la linea $\sigma = 0.5$ de *F. Zeta* la curva resultante de la transf. cruza a veces el 0. Dichas curvas son las de la *Transf. Conforme*.

- *Hip. Riemann VIII* (*Probl. Hilbert*): los *Ceros* de la *F. Zeta* están en la parte *Ext. Anal.*. Los triviales están en $s = -2n$ y los otros en la linea crítica ($Re(s) = 1/2$), más específico que lo demostrado por Riemann de que están en la banda $s = [0,1]$ [Numberphile-TheKey, Derivando]. Born y Landau 1914 mejoran trabajo Hardy mostrando que están muy pegados a linea crítica $0.5 + \varepsilon$ Importancia (ver *Tma Num. Primos*).

[3] exactamente son $\mathbb{Z}(w) = \{a + bw, a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $w = \begin{cases} \sqrt{D} & \text{si } D = 2,3 \pmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{si } D = 1 \pmod 4 (i.e. D = 4k+1) \end{cases}$. D es libre de cuadrados y puede ser neg. o pos

[4] LRC implica que el comportamiento de descomposición de un primo p en un *C. Cuadr.* depende únicamente de $p \pmod D$, donde D es el discriminante del cuerpo.

La posible prueba de Alain Connes se basa en la Conj. Hilbert-Polya (o Montgomery-Dyson) sobre la T. de Matrices Aleatorias (*Campo Aleatorio*) usadas en la *Cuantica*. Dyson conjetura que si encontramos un sist. *Cuantica* cuyos niveles energéticos son los ceros, entonces la demostramos. De hecho se ha observado que la distribución de lineas espectrales de los átomos pesados es similar a los ceros.

- $\zeta(s=\sigma+iw)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}[cos(wln(n))-isin(wln(n))]$
- $s=Re(\zeta(\sigma+i2\pi f))\approx\sum_{n=1}^{2f} n^{-\sigma}cos(2\pi f\int_1^n \frac{dx}{x})$ (*Seno Topol.*, Chirp, *Tma Nyquist*).
- $s=\sum_{n=1}^{2f} n^{-\sigma}cos(2\pi fln(n))=\sum_{n=1}^{2f} n^{-\sigma}cos(2\pi fln(2)log_2(n))$ vale 0 si y solo si $\sigma=0.5$
- Podemos pensarlo como suma de las muestras kn de una chirp o de las muestras $lg_2(n)$ de un coseno (la 2º está en w, 3ª en $2w$, ..). El *Tma Richardson* dice que expr. con $sin(x)$ es un *Probl. Indecib.* saber si vale 0 [WikiCteProblem]. El problema es que solo puedo saber valor de $sin(log(w))$ ejecutándolo (no hay patrón de positivos y negativos *Irreduc. Wolfram*).
- *Rel. de Congr.*=seno(*Fourier*)=*Forma Automorfica*: suma de vectores normalizados (dentro de la circunferencia unidad $[0,2\pi]$) que se compensan (al añadirle factor n^{σ}). Para valores grandes de $w=2000$ la representación rellena todo el círculo y se compensan claramente. Esto es porque la *F. Aritm.* **Congruencia Irracional** 2pi del log $f(n)=ln(n) \pmod 2\pi$ sube y baja suave pero $f(n)=wln(n) \pmod 2\pi$ se vuelve loca (*Generador Lineal Congruencial*).
- IDEAS: aplicar *Teor. Unif.* como *Regr. Lin.* para suma min.. Aplicar *Progr. Dinam.* con *Prop. Markov* para suma mínima en vez de *C. Variaciones*

- *Tma Num. Primos* : F. Contador Num. Primos (*F. Aritm.*) es una escalera. Gauss encontró que $\pi(x)\sim\frac{x}{ln(x)}$, mejorada como $\pi(x)\approx li(x)=\int_0^x\frac{dy}{lny}$ (ver *F. Divisor*).

  - $log(\zeta(s))=s\int_0^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}$: $\pi(x)$ conecta con log(*F. Zeta*) en forma *Prod. Euler* con truco $p(n)=\pi(n)-\pi(n-1)$ (*F. Indic.* vale 1 si $n=$ primo) [YoutubeZFunPrime CountingFunction].
  - $\psi(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}-0.5log(1-x^{-2})+cte$: F. Tcheby (escalera similar a $\pi(x)$ pero incrementos con $log(x)$, creo aparece en dem. anterior): se va aproximando a la escalera a medida que añadimos más ceros ρ de *F. Zeta* (más armónicos, ver Fig. 6.2). También $\pi(x)=f(\mu(x),li(x))$ [Derivando] da conexión directa con F. Moebius, li(x) y ceros *F. Zeta*

  Propiedad *Dual*: los ceros de la *F. Zeta* son los armónicos (*Fourier*) de la distrib. de los primos (*Teor. Unif.* con Prob.). *Eviden.* num. sugerían que $li(x)>\pi(x)$ hasta que Littlewood mostró que la dif. cambia de signo (alrededor de 10^{316} es un *Contraej.* o patrón que falla! [Baez18]

- *Funcion-L* : es cualquier F. meromorfa con una *Hip. Riemann VIII* (sus ceros están en una linea de simetría). Existen dos tipos básicos (aunque se conjetura que sean equivalentes):

  - F.-L Global o F.-L de Hasse-Weil: asociada a una *Var. Alg.*. Se conoce como 'F.-L global' porque se pueden expresar como *Prod. Euler* locales. Ver *Conj. de Birch*

- F.-L Automórfica: asociada a una *Forma Automorfica*.
- (*) Otras: F.-L Tau de Ramanujan: Fig. 6.2. F.-L de Dirichlet: tipo *Serie Dirichlet* $L(s,X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(n)}{n^s}$ en la que el signo de los sumandos cambia de forma modular.

El *Progr. Langland*, las usa para relacionar las Formas Modulares (su expansión tipo *F. Eichler*) con los Motivos. La Fig. 6.2 es del proyecto `https://www.lmfdb.org/universe` que espera que alguien demuestre porqué todas cumplen posiblemente una *Hip. Riemann VIII*.

6.13 Aplicaciones reales: electrónica (Tma Thevenin), FIR (Bode) y teoría de control (estabilidad, lugar de las raices)

- *Tma Thevenin* (*U8Compl*): cualquier circ. lin. equivale a una fuente+impedancia. Enunciado en principio para modo DC con R se puede generalizar a modo AC (entrada/salida armónica) con Impedancias (son $\mathbb{C}$ asociados a R,L,C según la frec.) gracias al Formalismo Fasorial de *Ec. Dif.*. Ojo, *Laplace* es para modo Transitorio *Circ. RLC*. *Dual* (cambiar I por V, impedancias por admitancias). Bode: Respuesta en Frec. *Rec. Lineal*, *Filtro IIR*. *Teor. Control* Principio superposición si varias fuentes de entrada.
- *Teor. Control*: Tma Routh-Hurwitz y Lugar de las Raices

6.14 Aplicación: Física Cuántica

- *Cuantica* : ¡los obsevables (medidas de la Naturaleza) son siempre cuánticos y probabilísticos (*Exp. Aleatorio*) (y para colmo $\mathbb{C}$)! CONCLUSIÓN: $\mathbb{C}$ aparece en que Ψ es un vector $\mathbb{C}$ (PI), pero al tomar módulo para prob. se hace $\mathbb{R}$ (PV).

Ej: partícula en una Caja Fig. 6.2: considerando que el potencial $V = 0$ en $x \in [0,L]$ e ∞ fuera de la caja, según PII tenemos el siguiente Op. Hamiltoniano para la Energía $-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x)$. La sol. general es $\psi(x) = Asin(kx) + Bcos(kx)$ con $A,B \in \mathbb{C}$ y $k^2 = \frac{2mE}{h^2}$. Considerando las cond. de contorno $\psi(0), \psi(L) = 0$, las sol. particulares o autof. y autov. son: $\psi_n(x) = \sqrt{2}Lsin(\frac{nx\pi}{L})$ y $E_n = \frac{h^2\pi^2}{2mL^2}n^2$

Los 6 postulados son:

- PI Completitud: debido al *Completo* del *Esp. Hilbert* (debe ser $\mathbb{C}$ y *Separable*), escogidas unas bases $u_i(x)$ (autof. de un operador), cualquier F. Onda (representa completamente el estado del sist.) se puede expresar como un vector: $\Psi(x) = \sum c_i u_i(x) = \sum < u_i(x)|\Psi(x) > u_i(x) \iff |\Psi >= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_\infty \end{pmatrix}$ esto es un ket de Dirac, el bra se obtiene transp. y conjug. $< \Psi| = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_\infty^*)$. donde el prod. escalar $< u_i(x)|\Psi(x) >= \int u_i(x)^* \Psi(x) dx$.
- PII Op. *Hermit.*: Op. Lin. (*Ec. Dif.*) o *Apl. Lin.* que coincide con su adjunto $\Rightarrow$ sus autov. son $\mathbb{R}$ (ver *Tma Espec.* de *Diagon.*). A todo observable le corresponde uno A que actua sobre cualquier F. de Onda $A\Psi(x)$. Es *Diagon.* (tiene espectro a_i) $\Rightarrow$ si actua sobre sus autof. (bases) es un simple escalado: $Au_i(x) = a_i u_i(x)$.

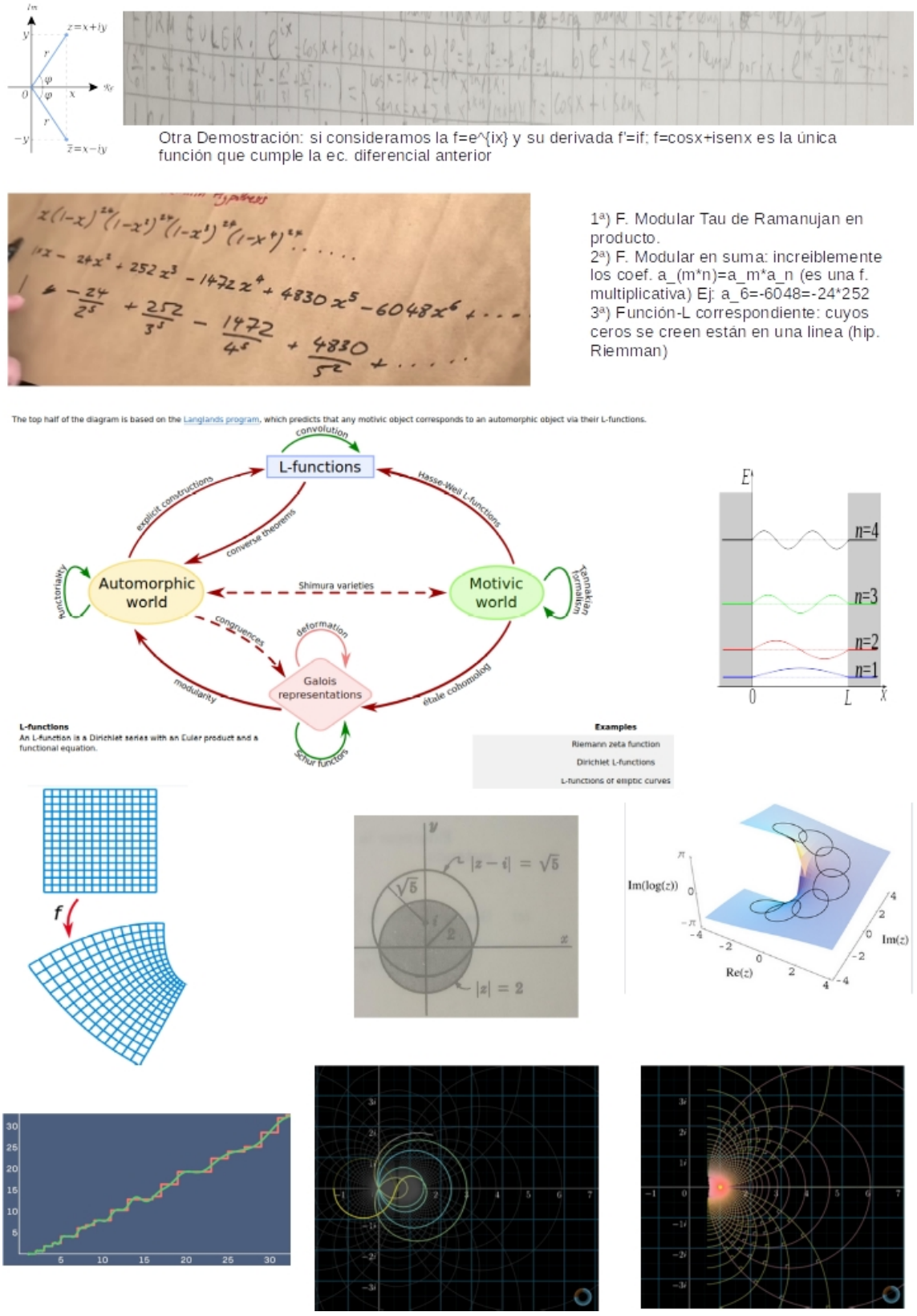
	Clásico	Cuántico
Posición (x)	x	x
Momento (p)	$m\frac{\partial x}{\partial t}$	$-ih\frac{\partial}{\partial x}$
Energía (H)	$\frac{p^2}{2m}+V(x)$	$\frac{-h^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}+V(x)$

- PIII Evol. temporal: de F. Onda se rige por Ec. Schrödinger (equivale a 2ª Ley de Newton) mientras no se observe: $ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=H\Psi(x,t)$. Parecido al *Ec. Difus.* (en 2D en montículo que se va difuminando conforme avanza el tiempo). Si el potencial es indep. del tiempo equivale a la búsqueda de los autov. del Hamilt. $H\Psi(x)=E\Psi(x)$ [WikiOpHermit].
- PIV Cuántica: una medición siempre dará uno de los autov. a_i ($\mathbb{R}$) y autof. $u_i(x)$ ($\mathbb{C}$) del op. correspodiente.
- PV Probab.: de medir cada autov. es el cuadrado del módulo de la proyección de la F. Onda sobra cada autof. $Prob(a_i)=|<u_i|\Psi>|^2$. La F. Ondea es casi una FDP (*Distr. Prob.*) donde la prob. de encontrar a la particula en un espacio (a,b) en tiempo t es: $P_{a<x<b}(t)=\int_a^b\Psi(x,t)\Psi(x,t)^*$. Permite obtener Esperanzas (*Media*) de observables como en F. Estad. (*Entropia*).
- PVI Colapso (controvertido): la F. de Onda justo después de observar un a_i pasa a valer $u_i(x)$. Colorario: *Princ. Incert.* [5]

• *Tabla Period.* : debido a que los electrónes van rellenando los órbitales (funciones de onda tipo s, p, d y f con *Armon. Esf.*), según quede su última capa, esa es su posición en la tabla y sus propiedades químicas.

[5] dos op. conmutan ($[A,B]=AB-BA=0$) $\iff$ tienen un conj. de autof. común. Vemos claramente que x y p no conmutan por lo tanto al medir una posición y colapsar el sist en la autof. $u(x)$ esta es solo es expresable como comb. lin. de autof. de momentos $u(x)=\sum_j b_j v_j(x)$ y la medida del momento será probabilística. En *T. Segnal*: $\sigma_t\sigma_f>1/4\pi$, no se puede localizar con alta precisión simultaneamente una señal en el tiempo y en frecuencia (*Fourier*) $\iff$ si una ventana es grande bueno para f pero malo para t

Figura 6.1:


Otra Demostración: si consideramos la f=e^{ix} y su derivada f'=if; f=cosx+isenx es la única función que cumple la ec. diferencial anterior
1ª) F. Modular Tau de Ramanujan en producto.
2ª) F. Modular en suma: increiblemente los coef. a_(m*n)=a_m*a_n (es una f. multiplicativa) Ej: a_6=-6048=-24*252
3ª) Función-L correspondiente: cuyos ceros se creen están en una linea (hip. Riemman)
The top half of the diagram is based on the Langlands program, which predicts that any motivic object corresponds to an automorphic object via their L-functions.
L-functions
Automorphic world
Motivic world
Galois representations
convolution
explicit constructions
converse theorems
Hasse-Weil L-functions
functoriality
Shimura varieties
congruences
deformation
modularity
étale cohomology
Schur functors
L-functions
An L-function is a Dirichlet series with an Euler product and a functional equation.
Examples
Riemann zeta function
Dirichlet L-functions
L-functions of elliptic curves
n=4
n=3
n=2
n=1
f
Im(log(z))
Re(z)
Im(z)

Chapter 7

T14. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones. Aproximación numérica de raíces.

7.1 Introducción: duelos, ec. 5º grado, algoritmo babilónico, duplicación del cubo (delfos)

- Ej-motivador: Ej1: *Duelos Matem.*. Ej1: ¿como resolvemos cualquier ec. 5º grado como la de *Teor. Galois* o $cos(x) = 3$ si no hay *Forma Cerrada*? (con recursividad como *Alg. Babil.* (para la raiz cuadrada) o *Metodo de Exhaucion*)

- *Dupl. Cubo* : doblar el cubo (petición contra plaga al oráculo de Delfos [principalmente dedicado a Apolo en ciudad de Delos]). $x^3 = 2a^3$. Trisección el ángulo. Cuadratura del circulo. Diagonal del cuadrado. **Omar Khayyan (cuadratura del círculo y fórmula de ec. 3º grado)**. Bhaskara: poemas a su hija??. Alkhwarizmi ec. 1º, 2º y 3º grado (Trisección) y Cordoba. Cardano y Vieta.

- Importancia-histórica: *C. Num. Constr.*, *Teor. Galois*, *Met. Pto Fijo*, *Anal. Num.*

7.2 Símbolo igual (ident. vs. ec. alg.). Importancia de los ceros. Tipos de ecuaciones en 1 var. alg., racional (f. transferencia) y resolución. Simplificación algebraica. Tma de Richardson (indecible los ceros).

- Símbolo *Igual* : se usa en varios sentidos:
  - Como *Ident.*: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ válido $\forall x$.
  - Como *Ec. Alg.*: $x^3 + x^2 = 12x$ válido para un solo x (*Ceros*). Leída como *Ident.* es falsa.
  - *Isomorf.*, *Equiv.*, *Rel. Equiv.*, Triang. Congr. (*Geom. Hiperb.*) . Ver *Log. Ec.*, *HoTT*, *Malinterpret.*.

- *Ceros* de una F. (o Raices de un Pol.): su importancia es que encontrarlos equivale a resolver cualquier ec. (ej: *Curva Alg.*) pues siempre podemos expresarla como f (x) = 0 y por tanto a resolver problemas de la vida real (ver *Ejerc. vs Probl.*). Ej: *Optim.* es 0resolver f (x) = 0. Es el *Reciproco* de *Interpol.* (*Probl. Inv.*) y similar al *SAT*. Ver *Tma Richardson*, *Hip. Riemann VIII*.

- Tipos de Ec.: las soluciones de las ec. dependen de los conjuntos. Dejando a un lado las Funcionales (*Ec. Dif.*, *Primit...*), Matriciales (sist. ec.), *Ec. Diof.* y **multivariables**. Por orden de inclusión y técnica de resolución (*U7Ecuac*) distinguimos:
  - *Ec. Alg.* : de la forma $P(x) = 0$ donde $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ *A. Polin. sobre K* normalmente $\mathbb{Q}$ y **univar.**. No confundir con *Ec. Pol.* (multivar. *Var. Alg.*) o *Ident.* Alg. (ver *Igual*). La antigua *Geom. Alg.* busca *Ceros* (con *Metodo Iterativo* por *Teor. Galois*). Rel. con *Ec. Dif.* mediante *Laplace*. Importancia por aprox. *Taylor* con pol. Ej: ec. de 2º grado $ax^2+bx+c=0$ o ec. $\mathbb{C}[x]$: $\frac{e}{\pi^{i\Phi}}x-1=0$ o sol. a *Dif. Finitas*.
  - Ec. *C. Func. Rac.*: $P(x)/Q(x) = 0$.
  - Ec. Irr. o Radical: $f(\sqrt[n]{x}) = 0$, $\sqrt[3]{x-2} = 5$. Igual que antes y multiplicando por conjugado.
  - Ec. Trascend.: $f(\sin(x), \exp(x), \log(x)...) = 0$. Se suelen resolver redefiniendo una subexpresión como $x = ln(x+1)$ para obtener un polin. (*Ec. Alg.*). Ver *Tma Richardson*

Polin. $3x^4+6x^3-15x^2-18x=0$ y *C. Func. Rac.* $\frac{3x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} - \frac{4}{3}$	*Tma Factor*, Ruffini, bicuadr., etc. id. notables, denom. común, comprobar sol. falsa
Radic. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0$ (*Conica Esp. Tang.*) y Abs. $\lvert x-3\rvert = \lvert x-2\rvert+5$	pasar y elevar (2 veces), no repetir casos, comprobar
Log. $\ln x+\ln 4 = 2\ln(x+1)$ Expon. $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$	propiedad log. cambio var. igual base
Trigon. $sin(x)-tag(x)=x^3$	única f. trigon. Id. trigon.

En la *U7Ecuac* se detellan distintas técnicas de resolución para igualdades y desigualdades:

- *Simpl. Alg.* =*Reescr.*: ir creando *Ident.* alg. Ver *Karnaugh Alg. Conj.*. Pasos verificables con *Anal. Dim.*. Creo *Indecib.* por *Tma Richardson* ¿que Forma Canónica?.

- *Tma Richardson* 1968: saber si una *Funcion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (complicada con composiciones de e^x, $log(x)$, $sin(x)$..) tiene *Ceros* ($f(x)=0$, Ec. Trascend.) es *Probl. Indecib.*. Equivale a saber si una *Ident.* $f(x)=g(x)$ es V. Esto creo hace que obtener la *Primit.* o *Simpl. Alg.* (*Reescr.*) sea un arte y afecta a *Hip. Riemann VIII*. Su equivalente $\mathbb{Z}$ es *Tma Matiyasevich*

7.3 Tmas de Polinomios: del factor (dominio euclideo), de la raíz conjugada (fundamental del álgebra)

- *Tma Factor* [Wiki]: α raíz de $P(x) \iff (x-\alpha)|P(x)$. Consecuencia del Tma del Resto [1] o de que es un *Dom. Eucl.* (al tener *Grad. A. Polin. sobre K* lo forman). En efecto:

[1] El resto de $P(x)/(x-a)$ vale $P(a)$. Obvio si: $P(x) = (x-a)c(x)+r(x)$

como $P(x) = (x-\alpha)C(x) + R$. $P(\alpha) = 0 = (\alpha-\alpha)C(\alpha) + R \Rightarrow R = 0$

- *Tma Ra. C Conj.* [Wiki] (TProblem): Sea $\mathbb{R}[x]$ (pol. sobre $\mathbb{C}$), si tiene una ra. r compleja $\Rightarrow \bar{r}$ también ra.. Consecuencia del *Tma Fund. del Alg.*. En efecto:

  $P(r) = \sum_k a_k r^k = 0 \Rightarrow P(\bar{r}) = \bar{P(r)} = 0$. Colorario: si el grado es impar $\Rightarrow$ al menos una ra. real.

  Ver *Regla Sg. Descartes*

- (*) Tma Ra. Racional [Wiki]: si $\frac{p}{q}$ irreducible y ra. de $P(x) \Rightarrow p|a_0$ y $q|a_n$. En efecto:

  $$a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \iff \begin{cases} a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}) \Rightarrow \text{ como p/q } & \Rightarrow q|a_n \\ a_0 q^n = -p(a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}) \Rightarrow \text{ irreduc } & \Rightarrow p|a_0 \end{cases}$$

- (*) *Tma Ra. Deriv.* : si α ra multiplicidad m de $P(x) \Rightarrow$ ra mult $m-1$ de $P'(x)$. En efecto:

  $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x) \Rightarrow P'(x) = (x-\alpha)^{m-1}[nQ(x) + (x-\alpha)Q'(x)]$ si $x = \alpha$ es 0 pues $Q(\alpha) \neq 0$

7.4 Extensión algebraica finita, grado numérico y número construible (Delfos)

- *Ext. de C.* $L : K$ (L sobre K): $(K, +, .)$ es un sub*Cuerpo* de $(L, +, .)$ o L es un es un conj. mayor que K en el que las 4 primeras *Op. Alg.* (derivadas del + y . de K) siguen funcionando (dan clausura). Ej: *Clausura Alg.* (EC cerrada) Ej: *C Ext. Alg. de R*. Ej: *Ext. de C. como EV*

  - *Gr. Ext.* $[L : K] = dim_K(L)$: si usamos la interpretación de *Ext. de C. como EV* (L es un espacio vectorial sobre K) el *Grad.* es la dimensión de la *Base*. Ej: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ pues $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Ej: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ pues $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$. Ej: *C Ext. Alg. de R* gr. 2 y *C. Finito* gr. n. Ej: *C. Finito*
  - *Ext. Alg.* $L : K$: si cada elemento de L es raiz de algún $K[x]$ (polin. con coef. en K) o $\forall l \in L \exists \mathbb{K}[l] = 0$. *Rel. Ext. Alg. Finita* : una Ext. Alg. finita de $\mathbb{Q}$ = un *C. Num. Alg.*. En efecto:

    Toda ext. trascendente (no algebraica) es de gr. inf. $\Rightarrow$ Si ext. de gr. finito es alg. (aunque algunas ext. de gr. inf. son alg.).

    Ej: $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ entonces cualquier $l = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ es raiz de algún $\mathbb{Q}[x]$. Ej: *A. Ent. Cuadr.* Ej: $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es el menor Cuerpo (o conj.) que contiene a $\sqrt{2}$ y $\mathbb{Q}$ (podemos aplicar las 4 *Op. Alg.* que siempre estaremos en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$)

CONCLUSIÓN: *Rel. Ext. Alg. Finita* conecta las *Ext. Alg.* L (conj. engrandecidos de K) con las raices de pol. $\mathbb{K}[x]$ (*C. Num. Alg.*). y *Gr. Ext.* es la dim. de la *Base*

- *C. Num. Constr.* $(\mathbb{NC},+,.)$: nº *Construct.* con regla y compás (aunque superable con Transp. Ángulos, *Probl. Indecib.*). Es un cuerpo pues es cerrado bajo las 4 primeras *Op. Alg.* pero también bajo las 5 primeras. En *Conj. Num.* (Fig. 7.7, inclusión, *Jerarq.*, *Diagr. Venn*, *Num. Comput.*) se ve que son un subconj. del *C. Num. Alg.*: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{NC} \subset \mathbb{NA} \subset \mathbb{C}$. Algunos hechos son: $\gamma \in \mathbb{NC}$:

  1. $\iff$ expresable con las 5 primeras *Op. Alg.* sobre 0s y 1s (similar a *Det. Corr. de Errores*).
  2. $\iff$ está en el top de una *Torre C.* Finita de *Ext. Alg.* cuadráticas ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3 ... \subset \mathbb{K}_n : [\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2$).
  3. $\Rightarrow \gamma \in \mathbb{NA}$ (*Num. Alg.*) y con *Gr. Num.* ≤ 2 [2] Ej: *Dupl. Cubo*

Num. famosos $\notin \mathbb{NC}$	Motivo
Dupl. Cubo	$\sqrt[3]{2}$ *Gr. Num.*=3
Trisectar angulo	$\cos 20^o$ *Gr. Num.*=3
Cuadrar circulo	π y $\sqrt{\pi}$ no algebraico sobre $\mathbb{Q}$ ([Lindemann] el de *Trascend.*)
Heptagono [Gauss y Wantzel]	$e^{i2\pi/7}$ 7 no primo Fermat ni $k2^n$

7.5 Teoría de Galois: ec. 5º y grupo de Galois soluble

RESUMEN: *Teor. Galois* y Abel: Hay tres formas de entender porqué no existe Ec. de 5 Grado o superior: 1) ¡hay *Num. Alg.* como 1.1673... que no tienen *Forma Cerrada*! 2) Tma de Galois: ra. de $f(x)$ soluble $\iff$ en final de *Torre C.* $\iff$ *G. Galois* soluble. (ver "no entiendo") 3) Forma moderna con *Automorf.*.

- *Forma Cerrada* de 1.1673...: partiendo $\mathbb{Z}$ (coef. de un pol. no mónico) o $\mathbb{Q}$ (mónico) y con expr. radicales (que emplean las 5 primeras *Op. Alg.* $(+,-,*,/,\sqrt{})$ incluyendo raices n-simas) se obtienen *Num. Alg.* $\mathbb{NA}$. Sin embargo $\exists \mathbb{NA}$ que no pueden escribirse de esta forma y todos tienen *Gr. Num.* ≥ 5.

  > Ej: la ra. 1.1673... de $x^5 - x - 1 = 0$ (parecida a ec. *Phi*) es *Num. Alg.* pero no expresable con radicales [WikiAlgNumbers]. Es solo *Construct.* con *Anal. Num.*. Recuerda a No *Num. Comput.*. Ver *Int. Num.*, *Suces.*, *Mediana Geom.*, *Teor. Unif.*, *F. Generad.*.

- **Tma de Galois**: Un polinomio $f(x)$ sobre F es resoluble por radicales $\iff$ (1) todas sus ra. están al final de una *Torre C.* $\iff$ (2) su *G. Galois* sobre $\mathbb{K}$ es soluble. [3]

  > – *Torre C.* : secuencia de *Ext. de C.* $F = K_0 \subset K_1 \subset ...K_n = K$. Cualquier *Num. Alg.* o Expr. Alg. se puede obtener como *Rel. Recurr.* de *Ext. Alg.*. Ej. $a = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ de Fig. 7.7, a no existe en $Q(\sqrt{2})$ pero se obtiene aplicando *Op. Alg.* sobre dichos elementos. $b = \sqrt{2}$ no existe en $\mathbb{Q}$ pero se obtiene de este. Ej: $X_i = 1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3+\sqrt{2}}$ de Fig. 7.7

[2] *Gr. Num.* de un nº es *Grad.* mínimo (*TAI*) del pol. en el que este es raiz. Ej: Los $\mathbb{Q} = p/q$ son de gr=1 pues $qx - p = 0$.

[3] Conecta 1) Polinomios 2) *Ext. de C.* y 3) Grupos. Los G. permiten solucionar problemas difíciles de los C.

- (1) Una ra. X_i de un pol. sobre F se puede expresarse por radicales si está en el final K de una *Torre C.* (si hay combinación de los coef. F que de K) [a]. Por lo general las ra. tienen fórmulas complicadas *Rel. Recurr. Op. Alg.* de sus coef.
- Pol. Simetr.: $P(X_1,X_2,..,X_n)$ si al *Permut.* alguna var. permanece igual Ej: $P(X_1,X_2) = 4X_1X_2$ o $P(X_1,X_2) = X_1^3 + X_2^3 - 7$. Ej-: $X_1 - X_2$. Se pueden obtener como combinaciones (suma, prod. + cte) de **Pol. Sim. Elem. (PSE)**, Ej: para $n = 3$ son: $e_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $e_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$, $e_3 = X_1X_2X_3$.
- *G. Galois* de un pol.: Es el formado por todas las *Permut.* (*G. Simetrico*) de sus ra. que satisfacen todas las *Ec. Alg.* que las involucran. Ej: las 4 ra. de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x + 2$ son $X_i = 1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3+\sqrt{2}}$ y de las 24 permut. solo 8 satisfacen todas las Ec. Alg. tipo $X_1X_3 + X_2X_4 = 0$, luego el $Gal(f)$ es el de la Fig. 7.7.

  NOTA: Creo que basta probar solo los PSE para delimitar las permut. del grupo [b].
- Serie de Composición: de un $G = G_n \to G_{n-1} ... \to G_1 \to G_0 = e$ donde los G_i son *SubG. Normal* y cada Factor (*G. Cociente*) G_{i+1}/G_i es simple. Ej: de los *G. Simetrico* $S_2 \xrightarrow{2} e$, $S_3 \xrightarrow{2} C_3 \xrightarrow{3} e$, $S_4 \xrightarrow{2} A_4 \xrightarrow{3} V_4 \xrightarrow{2} C_2 \xrightarrow{2} e$, $S_5 \xrightarrow{2} A_5 \xrightarrow{60} e$, $S_6 \xrightarrow{2} A_6 \xrightarrow{360} e$,...
- *G. Galois* de una *Ext. Alg.*: 1) En la Ext. Alg. $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (1º de la *Torre C.*) las ra. cumplen la ec. $X_1 - X_2 - X_3 + X_4 - 4\sqrt{2} = 0$, pero de las 8 permut. solo las permut. $S_1 = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ satisfacen dicha ec., siendo 4 elementos el Gr. Galois de f sobre la *Ext. Alg.* K_1: $Gal_1 = Gal(f/K_1) = S_1$. 2) En $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{2}})$ (2º) cumplen $X_1 - X_3 - 2\sqrt{3+\sqrt{2}} = 0$ siendo 2 $Gal_2 = Gal(f/K_2) = \{s_0, s_2\}$. 3) En $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{2}}, \sqrt{3-\sqrt{2}})$ (3º) cumplen $X_2 - (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3-\sqrt{2}})$ siendo 1 $Gal_3 = Gal(f/K_3) = \{s_0\}$. En la Fig. 7.7 podemos ver los cuadrados cada vez menores de dichos subgr. K_i.
- G Resoluble: si todos los Factores de la Serie de G son abelianos $\iff$ (para G. finitos) el orden de cada subg. de la Serie es primo. S_4 lo es pues como vemos en las flechas el orden de sus subg. siempre es primo [c] sin embargo, S_5 no pues 60 no es primo [d]. S_6, S_7.. tampoco lo son.
- (2) Según $Gal(f/K_i)$, en esencia [WikiGaloisTheor], cada *Ext. Alg.* K_{i+1}/K_i corresponde a un Factor G_{i+1}/G_i según $Gal(f/K)$. Pero no entiendo **¿porqué Factores abelianos (resoluble) implica *Torre C.* y por tanto ra. algebraica?**

[a] Ej: $x^2 - 2x - 1$ cuyas ra. son $ra = \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$ están en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ como muestra Fig. 7.7

[b] dado que los PSE forman todas las ec. complemente simétricas (en las que todas las $n!$ permut. del *G. Simetrico* valen). Ej.: coge unas cuantas ec. alg. que cumplan dos ra. ($A.B = 1, A + B - 4 = 0$) y pruebas todas las permutas que se cumplan ($(A,B,C,D) \to (A,C,B,D)$ no pues aunque o $A.C = 1$, $A + C - 4 \neq 0$). Luego coges otras ec. alg. $A + B + C - 2 = 0$ y repites....

[c] A_4 *G. Alternante* orden 4 donde $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

[d] de hecho es fácil de verlo pues A_5 *No Es Abeliano* y tampoco A_5/e

- *Automorf.* [WikiGGalois]: en la forma moderna uno empieza con una *Ext. Alg.* L/K y examinamos el Grupo de todos los Automorf. de Cuerpo de L que fijan K.
- *Progr. Langland* : El Grupo Absoluto de Galois de un cuerpo K $GAG(K)$ es el *G. Galois* de su *Clausura Alg.*. Se desconoce $GAG(\mathbb{Q})$ y este programa se inicia en parte con este problema. Otro origen es *Ley de Reciproc. Cuadr.*. Ver *Funcion-L Teor. Represent.*

7.6 Análisis numérico. Tipos (regla de los signos de Descartes) y acotación (Tma de Bolzano) de raices

- *Anal. Num.* : por las limitaciones del Algebra *Teor. Galois*. Para *Obj. del Anal.*. Los 3 temas: Aprox. Ra. (*Met. Newton*), *Interpol.* e *Int. Num.*. *Metodo Iterativo* : su corazón y parte de una sol. inicial que va mejorando basándose en la sol. anterior. También conocido como método numérico/computacional. Ej: *Metodo Simplex*, *EM*, *Actual. Bayes.*, y los de aquí. Implica *Rel. Recurr. Met. Hip.-Deduct.*, luego es *Teor. Unif.*. Ver Finit. *Construct.*, *Dif. Finitas*

- Tipos y nº de ra. por *Regla Sg. Descartes* : si coef. Re y ordenados $\Rightarrow$ nº de raices Re+ = nº cambios de signo o es menor por una diferencia par (debido a que las ra. $\mathbb{C}$ van en parejas según *Tma Ra. C Conj.*). El nº de Ra- de *Ra. F. Neg.* : Ra- de $P(x)$ es equiv a ra+ de $P(-x)$. Finalmente podemos saber nº de ra. +, - y $\mathbb{C}$.

- Acotac. por *Tma Bolzano* : Si f cont en cerrado $[a,b]$ y $sg(f(a)) \neq sg(f(b))$ (no exige deriv), $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$ Colorario: si f monot. de/crec. $\Rightarrow \exists_1$ ra. en (a,b).

- (*) Acotac. por Regla Newton: $M \in \mathbb{N}$ es cota superior de las ra. positivas del polin. $P(x)$ si todas las derivadas en M son positivas ($P(M) > 0, P'(M) > 0, ..., P^{(n}(M) > 0$) (Dem. *Taylor*). m cota inferior sale de la superior de *Ra. F. Neg.* $P(y = -x)$ (*Dual*). Finalmente todas las raices estarán en $[m,M]$

7.7 Métodos: regula falsi, Newton, bisectriz, punto fijo (Cobweb)

- Met. Regula Falsi (Fig. 7.7): 1) Intersección de la cuerda en (a,b): $c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$. 2) Repetir en intervalo que cambie signo (a,c) o (c,a) según *Tma Bolzano*. *) Convergencia lineal [4], lenta pero garantizada, como "aproximación por bisectriz" $c = (a+b)/2$

- *Met. Newton* -Raphson (Fig. 7.7): es un *SGD* 1) Intersección de la recta pendiente en a (no en b): $c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. 2) Repetir en c. *) Convergencia cuadrática, garantizada si inicio cerca de raíz.

- Met. Bisecc.: dividir intervalo por la mitad y ver donde está con *Tma Bolzano*

- *Met. Pto Fijo* : (Fig. 7.7): CONCLUSIÓN: si ¿$f(x) = 0$? la rescribimos como $x = g(x)$ y aplicamos *Diagr. Cobweb*. Ej: $f(x) = x^2 - 5x + 3 = 0$

  - Acotar: dibujando parábola, hay dos, están por $x = 1$ y por $x = 4$
  - Reescribir $f(x) = 0 \to x = g(x)$: $x = \sqrt{5x-3}$ (podría haber despejado de otra forma $x = \frac{x^2+3}{5}$??)
  - Acotamos Pto Fijo: para evitar *Caos*. Intervalo t.q. $|g'(x)| = |\frac{5}{2\sqrt{5x-3}}| < 1 \iff x \in (a,b) = (1.4, \infty) \Rightarrow$ buscamos la ra. del $x = 4$. La del $x = 1$ no podemos con este método

[4] q-convergencia: si error decrece como $\frac{|x_{k+1}-L|}{|x_k-L|^q} \approx cte$, con $L = ra$ raíz

- Iteramos: $x_{n+1} = g(x_n)$: $x_0 = 2.5; x_1 = g(2.5) = 3.08; x_2 = g(3.08) = 3.5; .....; x_\infty = ra = 4.302$.

Siempre que los $x_n \in (a,b)$ ($|g'(x_n)| < 1$) tenemos garantizada la convergencia. El Newton-Raphson es un caso particular: considerando $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_0; x_1 = g(x_0); ...x_{\text{inf}} = ra = g(ra) = ra - \frac{f(ra)}{f'(ra)}$, converge a la raíz pues $f(ra) = 0$.

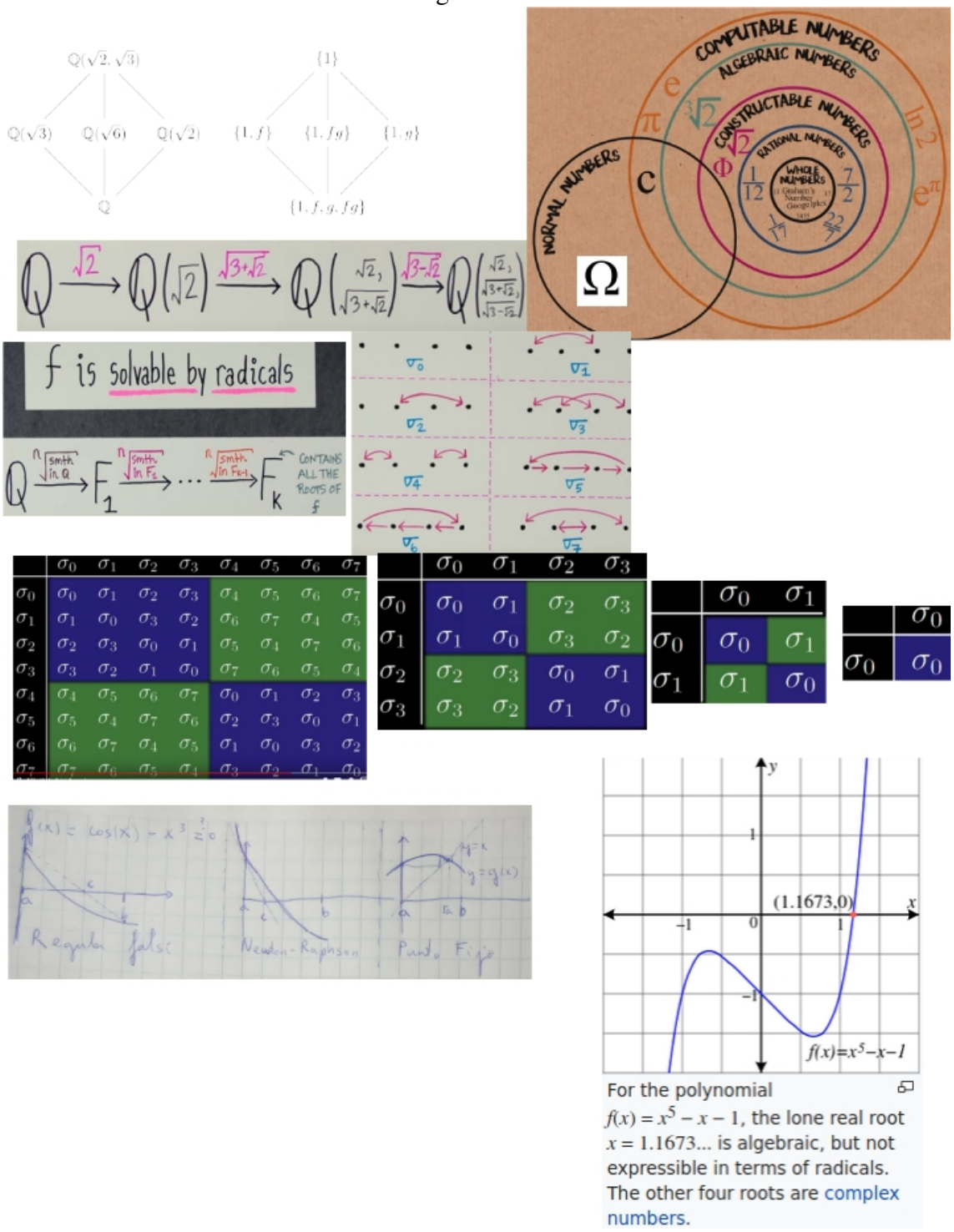
Ext. Alg. correspondencia entre Cuerpos y Grupos. Métodos iterativos para aproximar raices [15]

7.8 Aplicaciones: SGD (red diferenciable, regla de la cadena=retropropagación)

- *SGD* (Descenso en *Gradiente* Estocásticco): $Q(W) = \sum_i \hat{f}(dato_i, W) - f(dato_i)|$. $W_n = W_{n-1} - \nabla Q(W_n)$. Es un *Met. Newton* para *Optim.* los parámetros de la *F. Perdida* Multidim. con la condición de poder expresarse en forma de Red Diferenciable *U11Deriv*. Dicha condición hace que siempre sea posible computar el Grad. marcando los límites del *Aprend. Autom.* según LeCunn. $\nabla Q(W_n)$ con regla de la Cadena=Retropropagación. Si Q cerca del mínimo local $\nabla Q(W_n) \approx= 0$. [5]. IDEA: la naturaleza hace digital con analógico como *Max Suave*. Ver *Entren.*

[5] En espacios multidimensionales hay muchos huecos para descender y se suele llegar a opt. casiglobal. IDEA *Hip. Riemann VIII*: Escribirla como circuito aritmético y aplicar SGD. Demostrar que $Z(s = f(\sigma; \omega))$ converge iterativamente a 0 para ciertos ω y solo cuando $\sigma = 0.5$.

Figura 7.1:


COMPUTABLE NUMBERS
ALGEBRAIC NUMBERS
CONSTRUCTABLE NUMBERS
RATIONAL NUMBERS
WHOLE NUMBERS
NORMAL NUMBERS
C
Ω
f is solvable by radicals
CONTAINS ALL THE ROOTS OF f
Regula falsi
Newton-Raphson
Punto Fijo
(1.1673,0)
f(x)=x^5−x−1
For the polynomial f(x) = x^5 − x − 1, the lone real root x = 1.1673... is algebraic, but not expressible in terms of radicals. The other four roots are complex numbers.

Chapter 8

T15. Ecuaciones diofánticas

8.1 Introducción: problema del ganado babilónico, Plinton3-22, Arithmetia. Definición

- Ej-motivador1: Ej1: ¿que triáng. equiláteros enteros hay $3^2+4^2=5^2$? . Ej2: Probl. del Ganado Babilónico: si sabemos que el precio por vaca y buey son 15 y 20 monedas, y he pagado 100 monedas ¿cuantos animales he comprado?. Se debate sobre si los Babilónicos conocian las ternas Pitagóricas por la tablilla Plinton 3-22. Sin embargo es Diofanto en "Arithmetia" quien muestra ∞ soluciones.

- *Ec. Diof.* : *Ec. Pol.* sobre $\mathbb{Z}$ ($P(x,y,z...)=0$ con coef. y sol. sobre el *A. Ent.*) Las sol. forman una Red sobre una Hipersuperf. Alg. (cónica, cuádrica..caso especial de *Var. Alg.*). i.e. son Ptos Alg. Aunque existen las llamadas ec. diof. exponenciales ($2^y-7=x^2$) aquí serán polinomiales.

- Importancia-histórica: *Tma Chino del Resto*, *Ternas Pitag.*, *Ec. Pell Alg. Diof. X*, *Tma Fermat Conj. de Birch*

8.2 Ec. diofántica lineal

8.2.1 Lineal 2-incog. $Ax+By=C$. Tma de existencia (Bezout) y resolución (Alg. de Euclides, homogénea), restricción a N

- *Id. Bezout* : Si $mcd(A,B)=D \Rightarrow \exists x\&y \in \mathbb{Z} : Ax+By=D$. I.e. si a,b coprimos $\exists x,y$: $ax+by=1$. Válido también para *Dom. I. Princ.*.

- Tma de existencia de sol: $Ax+By=C$ (*) tiene sol. $\mathbb{Z} \iff MCD(A,B)=D|C$. Dem:

  - $\Rightarrow$) Sea (x_0,y_0) sol, $aDx_0+bDy_0=D(ax_0+by_0)=C \Rightarrow D|C$.
  - $\Leftarrow$) Dividiendo por D reducimos a $ax+by=c$, como $mcd(a,b)=1$ y por Id. de Bezout $\exists(x_0,y_0) : ax_0+by_0=1 \iff aD(cx_0)+bD(cy_0)=cD \Rightarrow (cx_0,cy_0)$ es sol. de (*)

- Resolución habitual: 1) Encontrar una sol. particular (x_0,y_0): normalmente reducir con *Alg. de Euclides* + cambio variable o Igualando a 1 (Id. Bezout) y multiplicando (ver

Dem. anterior y Lineal Multivariable). Ver TProblem 2) Sol. general: part.+ *Ec. Homog.* $\begin{cases} x = x_0 + kB/D \\ y = y_0 - kA/D \end{cases}$ [1]

- Restricción a $\mathbb{N}$: puede hacer finita la cantidad de sol. En lo que sigue no lo consideraremos ya que según [YoutubeDiofantoContraMaquinas8.45] cualquier ec. diof. sobre $\mathbb{Z}$ tiene sol. sobre $\mathbb{N}$ y viceversa. Aparecen en *Progr. en Ent.* o el porqué *Solidos Platon.*

8.2.2 Lineal Multivariable $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = C$. Existencia y resolución (tipo Bezout). Combinaciones con repetición

- Ec. Diof. Lin. Multivar.: Existencia de soluciones: $\exists$ sol. $\iff MCD(A_1, A_2, ..., A_n) = D|C$. Nº de sol. si $A_i = 1$ con *Comb. con Repet.*

- Búsqueda de sol.: Ej: $2x + 4y - 2z + 3u = 4$.

  - Agruparla en 2 var. con coef. coprimos (*): s: $2x + 3y = 4 - (4y - 2z) \equiv s$.
  - Sol part. de la ec. *Id. Bezout* con 1: a ojo $2x + 3u = 1$ es $(x1_0, u1_0) = (-1, 1)$
  - Sol. part. de la ec. con s: $(x_0, u_0) = (sx1_0, su1_0) = (s(-1), s(1))$.
  - Sol general: $x = x_0 + kB/D = -4 + 4y - 2z + k3$, $u = u_0 - kA/D = 4 - 4y + 2z - 2k$, $y = k_2$, $z = k_3$ donde $(k, k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^3$.

(*) Si $\nexists$ dos coef. coprimos reducimos a $D'x_1' + A_3x_3 + ... + A_nx_n = C$ con $D' = MDC(A_1, A_2)$ hasta obtener dos coef. coprimos. Esta nueva ec. con $n-1$ var. vuelve a ser soluble [2]. Una vez reducida resolvemos como la de 2-incog mediante variable s agrupadora

CONCLUSIÓN: definir var. para dejarla lineal en 2 incog. coprimas (tipo *Id. Bezout* con 1) y dar marcha atrás.

8.2.3 Sist. de ec.: Tma chino del resto

- *Tma Chino del Resto* : Enunciado por Sun-tzu en 250dc. Aunque el problema consiste en encontrar la x, se puede ver como un SCI con 1 incog. más que ec.:

  $\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ x \equiv r_3 \pmod{m_3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = r_1 + m_1y \\ x = r_2 + m_2z \\ x = r_3 + m_3v \end{cases}$ (1) donde los m_i son coprimos entre si.

  Si llamamos a $y_i = \prod_{j \neq i} m_j$, los pares (m_i, y_i) son coprimos también. Y por *Id. Bezout* podemos:

  $\begin{cases} \lambda_1 y1 + \mu_1 m1 = 1 \\ \lambda_2 y2 + \mu_2 m2 = 1 \\ \lambda_3 y3 + \mu_3 m3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y1} \equiv 1 \pmod{m_1} \\ \dot{y2} \equiv 1 \pmod{m_2} \\ \dot{y3} \equiv 1 \pmod{m_3} \end{cases} \quad \begin{cases} r_1\dot{y1} \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ r_2\dot{y2} \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ r_3\dot{y3} \equiv r_3 \pmod{m_3} \end{cases}$ (2)

  La forma de resolver (1) es encontrando los $\dot{y}_i$ que cumplan el 2º sist. (2).

  Entonces una sol. particular de (1) es $x_p = r_1\dot{y}_1 + r_2\dot{y}_2 + r_3\dot{y}_3$ porque para cada ec. i se anulan todos estos sumandos excepto el i (pues un factor de $y_{j \neq i}$ es m_i). Definiendo el "modulo producto" $M = m_1m_2m_3$, la solución general es $x = \{x_p + kM\} = [x_p]_M$, i.e. una clase residual de la *Rel. de Congr.*. La canónica $[x_p]_M$ es el resto de dividir $x_p = \dot{y}_1\dot{y}_2\dot{y}_3$ por M

[1] pues $A(x_0 + kB/D) + B(y_0 - kA/D) = Ax_0 + By_0 + AkB/D - BkA/D = C$

[2] Pues el MCD de varios, mismo que el obtenido agrupando, i.e. $D = MCD(D', A_3, .., A_n)$

Ej: $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{15} \\ x \equiv 2 \pmod{13} \\ x \equiv 2 \pmod{8} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 + 15y \\ x = 2 + 13z \\ x = 2 + 8v \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y1} = 1\dot{3}.8 = 1\dot{0}4 = 1040 & (1040/15 : cocient = 69, resto = 5) \\ \dot{y2} = 1\dot{2}0 = 600 & (600/13 : c = 46, r = 2) \\ \dot{y3} = 1\dot{9}5 = 1170 & (1170/8 : c = 146, r = 2) \end{cases}$

Como $M = 15.13.8 = 1560$, $x_p = 1040 + 600 + 1170 = 2810$ o en forma canónica $x_p = 1250$ (resto de $2810/1560$), sol. $x = \{1250 + k1560\} = [1250]_{1560}$

CONCLUSIÓN: obtener los y_i multiplicando los módulos contrarios $y_1 = 13.8 = 104$, buscar los múltiplos que cumplan 2º de (2) o, si soy capaz a ojo, directamente que cumplan 3ª de (2) $\dot{y1} = 1\dot{3}.8 = 1\dot{0}4 = 1040, (1040/15 : cocient = 69, resto = 5)$ y sacar sol. part. sumando $x_p = 1040 + 600 + 1170 = 2810$. Finalmente pornera bonita en forma canónica.

Se puede extender a cualquier *Dom. I. Princ.* mediante una *Rel. de Congr.*. La extensión a *Dom. Eucl.* como los polinomios es directa *I. Hermite*, *I. Lagrange*. Se usa en el prime-factor-FFT, *Criptogr.*.

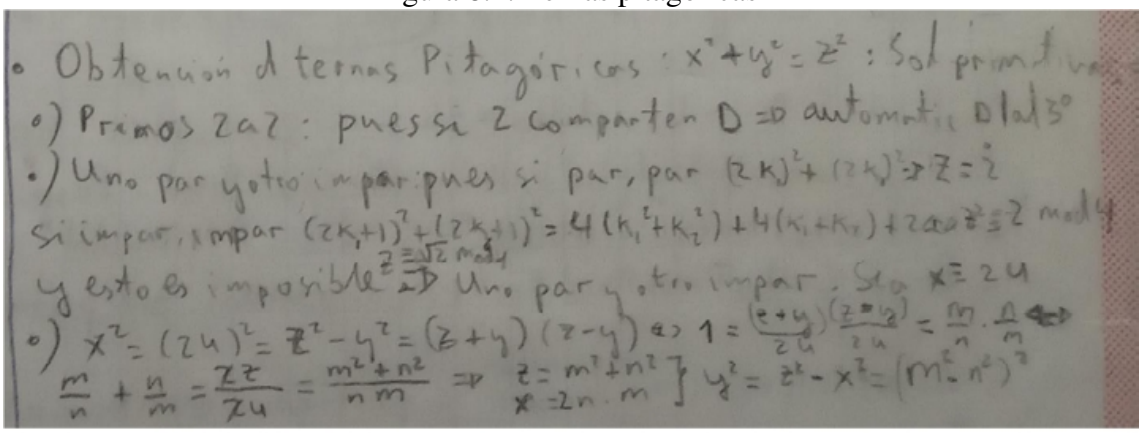
- *Ley de Reciproc. Cuadr.* de Gauss es otro sist. ec. modular. diofántico no lineal

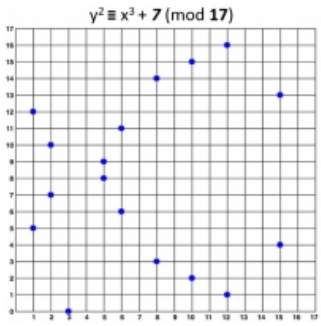
8.3 Ec. diofánticas no lineales

8.3.1 Ternas pitagóricas $x^2 + y^2 = z^2$, Dem. (una par y otra impar)

- *Ternas Pitag.* : Se obtienen como $z = m^2 + n^2$, $x = 2nm$, $y^2 = z^2 - x^2 = (m^2 - n^2)^2$. Fig. 8.1

Figura 8.1: Ternas pitagóricas





8.3.2 Ec. de Pell (solución=unidad de grupo)

- *Ec. Pell* $x^2 - ny^2 = 1$: Estudiada por Brahmagupta y Bhaskara II. Mal atribuida por Euler a Pell cuando fue Brouncker1660. Si $n \neq k^2$ (no cuadrado perfecto, ver *Conj. Diof.*) tiene ∞ soluciones. Demostración de Teor. Alg. de Numeros [WikiEnglish]:

  - $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{x + y\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ (*Ext. Alg.*) es un *A. Ent. Cuadr.* real (no complejo) y tiene como norma la parte izda de la Ec. de Pell, pues $||(x,y)|| = (x - y\sqrt{n})(x + y\sqrt{n})$.
  - Las sol. de la Ec. Pell forman un Grupo con el prod. $\Rightarrow (x_i, y_i)$ sol. de *Ec. Pell* $\Longleftrightarrow$ es una Unidad de Grupo ε (al multiplicarla con su inversa da 1 $(x_i - y_i\sqrt{n})(x_i + y_i\sqrt{n}) = 1$ que es la Ec. Pell)
  - El Tma de las Unidades (de Grupo) de Dirichlet afirma que todas las ε de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ pueden ser *Generad.* como potencias de la menor (la más cercana a 0 *TAI*) *Unid. Fund.* $\varepsilon = (\varepsilon_0)^k$ (Ej: *Phi*)
  - Por lo tanto, si poseemos una *Unid. Fund.* (x_0, y_0) (buscada con Fracciones Continuas) el resto de sol. son $(x_0 + y_0\sqrt{n})^k$ y hay ∞

  CONCLUSIÓN: (x_i, y_i) es sol. si es Unidad del Grupo de sol. (al multiplicarla por su inverso da 1, $(x_i - y_i\sqrt{n})(x_i + y_i\sqrt{n}) = 1$). El Tma de las Unidades (de Grupo) de Dirichlet dice que debe existe una Unidad mínima de la que se derivan el resto de sol. como $(x_0 + y_0\sqrt{n})^k$.

Tiene muchas aplicaciones. Ej: *Conj. Diof.*. Ej: los polinomios Chebyshev pueden ser definidos como las soluciones de una ec. de Pell. Muchas ec. cuadráticas pueden reducirse a ella redefiniendo su determinante.

8.3.3 Ec. grado>1: diferencia de cuadrados (divisores) y polinómica en una variable (congruencia polinomial)

- Ec. Diferencia Cuadr. $x^2 - y^2 = a$: (probl. Babilónico??). Resolución: del sist. $\begin{cases} b \equiv (x+y) = D_i \\ c \equiv (x-y) = a/D_i \end{cases}$ probando entre los divisores de a D_i (*Suma Div.*). Nota: si a tiene factor 2^1 no existe sol. pues $b\&c$ siempre misma paridad (suma de enteros) $\Rightarrow p.p = 2^4$ o $i.i = i$.
- Ec. Pol. en 1 var.: $P(x) - by = 0$: $y = \frac{P(x)}{b}$, basta probar $x = \{0, 1 \ldots, b-1\} : b|P(x)$ por *Congr. Pol.* $(x_0 \equiv 0 \pmod b \iff P(x_0) \equiv 0 \pmod b)$. También son sol. $x = x_0 + kb$. Un caso más general es $P(x) + xy = 0$: Ej: $x^2 + yx - x - 2 - 11y = 0$ cambio variable + divisibles termino indep.. (TProblemas)

  * Despejar lin: $y = \frac{-x^2+x+2}{x-11}$
  * Cambiar denom. $z = x - 11$: $y = \frac{-z^2-21z-108}{z}$
  * Los z posibles div. al termin. indep. $z = \{\pm 1, \pm 3, \ldots \pm 68\}$
  * Usar restricciones (ej. num>0) y sacar z, x, y válidos

8.4 Ec. diofánticas en la Mat. moderna

8.4.1 X problema de Hilbert: conjunto diofántico = recursivamente enumerable

- *Conj. Diof.* [YoutubeDiofContraMaquinas]: conj. de los valores de los parámetros que permiten que una Ec. Diof. cualquiera tenga solución. Ej: la *Ec. Pell* tiene sol. cuando n no es un cuadrado perfecto luego $n = \{0,2,3,5,6,7,8,10,..\}$ lo es. Puede haber más de un parámetro y hay técnicas para colapsarlos en uno solo.

- *Alg. Diof. X* (*Probl. Hilbert*): Conj. Diofantico $\begin{cases} \Leftarrow & \text{difícil [Tma Matiyasevich o MRDP 1970]} \\ \Rightarrow & \text{fácil} \end{cases}$ Conj. *Rec. Enum.*. El caso fácil probado con alg. generador de coef. por *Fuerza Bruta*. Unificó Lógica y Aritm. *Teor. Unif.* y se puede usar como otra prueba de los *Tmas Goedel*. Su equivalente $\mathbb{R}$ es *Tma Richardson*

  - Hip. Martin David 1949: Conj. Diof. syss es Conj. RE (usa la codificación *Tmas Goedel*)
  - Hip. Julia Robinson 1950: hay conj. que crecen expon. que son CD. Ej: posiblemente los tres de JR: exponencial $\{a,b,c\} : a^b = c$, factorial $\{a,b\} : a = b!$ y primos $\{a\} : a \in \P$.
  - Hip. David y Putman 1959: Dem. que todo conj. RE es CD y si se prueba la Hip. JR entonces la otra implicación es V. La gente se puso a buscar un CD que crezca exponencialmente (probar la Hip. JR)
  - Tma Matiyasevich 1970: encuentra un conj. que cumple la Hip. JR (es CD y crece expon): $\{a,b\} : a > 0, b = F_{2a}$, (sec. *Fibonacci*)

  Se desconoce si sobre otros anillos como $\mathbb{Q}$ o *C. Num. Alg.* hay algoritmo [WikiXProbl-Hilb] (el difícil mundo algebraico).

8.4.2 Último Tma de Fermat: Tma STW curva elíptica (cuerpo finito) = modular (Fourier)

- *Tma Fermat* (RESUMEN): es una *Dem. por Contrarr.* y *Red. al Absurdo*. Frey asegura: "Si Fermat Falso $\Rightarrow \exists$ c. loca (*Curva Eliptica* no modular)" (i.e "si $\nexists$ c. loca $\Rightarrow$ Fermat Verdad"). *Tma STW* probó que "$\nexists$ c. loca $\Rightarrow$ Fermat V" [3]. *Dem.* de 1000 pg (ver modularidad de Matem., *ATP*)

- *Tma STW* (Shimura-Taniyama-Weil) o de Modularidad: todas las *Curva Eliptica* son Modulares (*Forma Automorfica*). I.e. Para cada curva elíptica E sobre un *C. Finito* $\exists$ una Forma Modular F (de peso 2) t.q. los a_p de E (deficit del nº de soluciones de E) son iguales a los b_n de F (coef. de *Fourier* de F) [Wiles95][4].

[3] Si Conj Fermat no cierta, hay una curva de Frey eliptica loca-increible que no es modular contradiciendo STW (el cual dice que toda curva eliptica es modular) $\Rightarrow$ probemos STW (que toda curva eliptica es modular). Fermat margen al generalizar P8 de Diofanto. Wiles no recibe la medalla por poco (por pequeño error).

[4] Habia que contar que el nº de Es es igual al de Fs y eso conteo era muy difícil. Reemplazó las E por su Representaciòn de Galois $Gal(E)$ para simplificar el problema y usó la Teoría de Iwasawa. El error fue en la Kolyvagin–Flach.

- *Curva Eliptica* $y^2 = x^3 - x$, tipo de *Curva Alg.*. Sus coef. y sol. pueden ser sobre cualquier $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Z}$ (Ec. Diof.), $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ **F. Eliptica** periódica 2D como *Forma Automorfica*) pero aquí nos centramos *C. Finito* (el más interesante). Ej: $y^2 + y = x^3 - x^2 \pmod 5$ (*). Una sol. es $x = 1, y = 4$ El nº de soluciones de la eq. (*) es 4 si mod5, 6 si mod7,... crece aproximadamente como p. Este déficit (del nº de sol. de la eq.) es la serie a_p y puede ser + o - (es su DNA). Su *Ley Grupo Elipt.* sirve para dem. el UTF. Da una *F. Unidirecc.* que mejora *Criptogr.* RSA

- *Forma Automorfica* =seno(*Fourier*)=*Rel. de Congr.*=*Hip. Riemann VIII*: generalización de Poincaré de F. Period. en *Esp. Eucl.* (como trigon. o F. *Curva Eliptica*) a *Grupo Topol.*. Un caso especial es la **Forma Modular** que es periódica $f(z) = f(z+1)$ y definida sobre plano superior de $\mathbb{C}$ e invariante ante el *G. Modular* $SL_2(\mathbb{Z}) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : ad - bc = 1$ [5]. Ej. *F. Eichler* 1954: $f(q) = q\prod_{k=1}(1-q^k)^2(1-q^{11k})^2 = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 \ldots$, es una *F. Generad.*. Increíblemente, resulta que sus coeficientes coinciden con los déficit de la *Curva Eliptica* (*) $a_2 = b_2 = -2$, $a_3 = b_3 = -1$, $a_5 = b_5 = 1$..... Se relacionan con las *Funcion-L* y *Teor. Represent.*.

- Tma de Fermat (LARGO): suponga que $\exists$ una solución a, b, c para algún primo n de la ec. Fermat $a^n + b^n = c^n$. Entonces podemos construir la siguiente ec. cúbica o Curva Elíptica o curva loca o curva de Frey $y^2 = x(x-a^n)(x+b^n) = x^3 + (b^n - a^n)x^2 - (a^n b^n)x$ que Frey conjeturó no satisface STW (conj. epsilon o de Serre). Ribet probó en los 80s que esta ec. no puede satisfacer STW. Entonces era solo necesario probar la Conjetura STW (es una dem. por *Red. al Absurdo*). Triunfo del *Progr. Langland*

8.4.3 (*) Conjetura de Birch: curva elíptica (sobre Q) y función L

- *Ley Grupo Elipt.* : $G(E(\mathbb{K})$ dado que una recta tiene gr. 1, por el *Tma Bezout*, esta cortará a una *Curva Eliptica* siempre en 1*3=3 puntos P, Q, y R (en *Geom. Proyectiva* uno de esos puntos puede ser el infinito O). Estos 4 puntos cumplen ser un Gr. Aditivo con O como neutro: $P + Q + R = O$ (ver [WikiCurvaElipt]). Cuando los coef. son $\mathbb{Q}$ este Grupo tiene rango finito (es finitamente *Generad.*) ¡i.e. partiendo de unos cuantos puntos de la curva podemos obtener el resto mediante sumas!. Con coef. $\mathbb{C}$ no es así.

- *Conj. de Birch* y Swinnerton-Dyer [ElPaisObjetoFascinaMatem]: *P. Milenio* [Wiles]. Sea una *Curva Eliptica* sobre un *C. Num. Alg.*, concretamente los racionales $E(\mathbb{Q})$ y su *Funcion-L* Hasse-Weil asociada $L(E,s)$ que es un *Var. Alg.* abeliana. Por el *Alg. Diof. X* no hay sol. general, pero se conjetura que el rango de la *Ley Grupo Elipt.* abeliano de los puntos de $E(\mathbb{Q})$ es:

  - Finito si $L(E, s = 1) \neq 0$ con orden igual al del primer no-cero en el Des. *Taylor*. Podemos generar todos los puntos $\mathbb{Q}$ soluciones a E.
  - Infinito si $L(E, s = 1) = 0$. Caso contrario.

  Se ha obtenido por pruebas computacionales (*Cuasiempirismo*).

  CONCLUSIÓN: la *Cardin.* de las sol. de *Curva Eliptica E* sobre Q la indica la *Funcion-L* asociada en 1 $L(E, s = 1)$

[5] $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$, tiene periodicidad Lattice $f(q) = f(q+N)$ o de *Disco Poincare* y es un subg. del *G. Lineal General*

Chapter 9

T17. Programación lineal. Aplicaciones

9.1 Introducción: tipo de olivo a sembrar, mantecados y definición (optimización lineal)

- Ej-motivador1: Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A (picual) y B (hojiblanca). Datos respectivos:

L anuales aceite producido/olivo:	0.833 y 0.5
N^{o} max de olivos (por razones legislativas o de vivero):	4800 y 6000
Coste Euros/olivo:	0.833 y 0.375
Euros max para inversión:	4500
L anuales agua consumido/olivo:	6.6 y 5
L anuales agua disponible:	44000

  Si queremos maximizar la producción de aceite, ¿cuantos de cada tipo debemos sembrar?

- Ej-motivador2: *P. Mantecados* (de producción): hay 400 mantecados y 1200 papeletas, $lote1_{1225pts} = 1m + 5p, lote2_{1250} = 2m + 2p$. $\begin{cases} z = \text{argmax}_{x,y}\, 1225x + 1250y : \\ x + 2y \leq 400 \\ 5x + 2y \leq 1200 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

- *PL* : es un caso especial de *Optim.* matemática con función objetivo (op. *F. Perdida*) y restricciones lineales: $\begin{cases} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^* = \text{argmax}_{\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ s.t.} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$

  Gauss y Fourier (sist. de inecuaciones). Kantorovich39 (soviet nobel economia por PL). Dantzig46 (USA simplex, Air Forces.), Von Neumann (dualidad, t. juegos)

- Importancia-histórica: *Politopo Cvx*, *Metodo Simplex*, *Progr. en Ent.*, *Dual*, *Invest. Operat.*

9.2 Notación espacio (E), conjunto (C), combinación y tma del segmento cvx

Notación: en lo que sigue notaremos puntos del EV $\mathbb{R}^n$ como x_i (sin flecha de vector) y distinguiremos espacio E (conj. *Incontable*) vs conj. $C = \{x_i\}$ (conj. *Contable*) de ptos. Señalaremos las defin. Geométricas (Geom.) del resto Algebraicas.

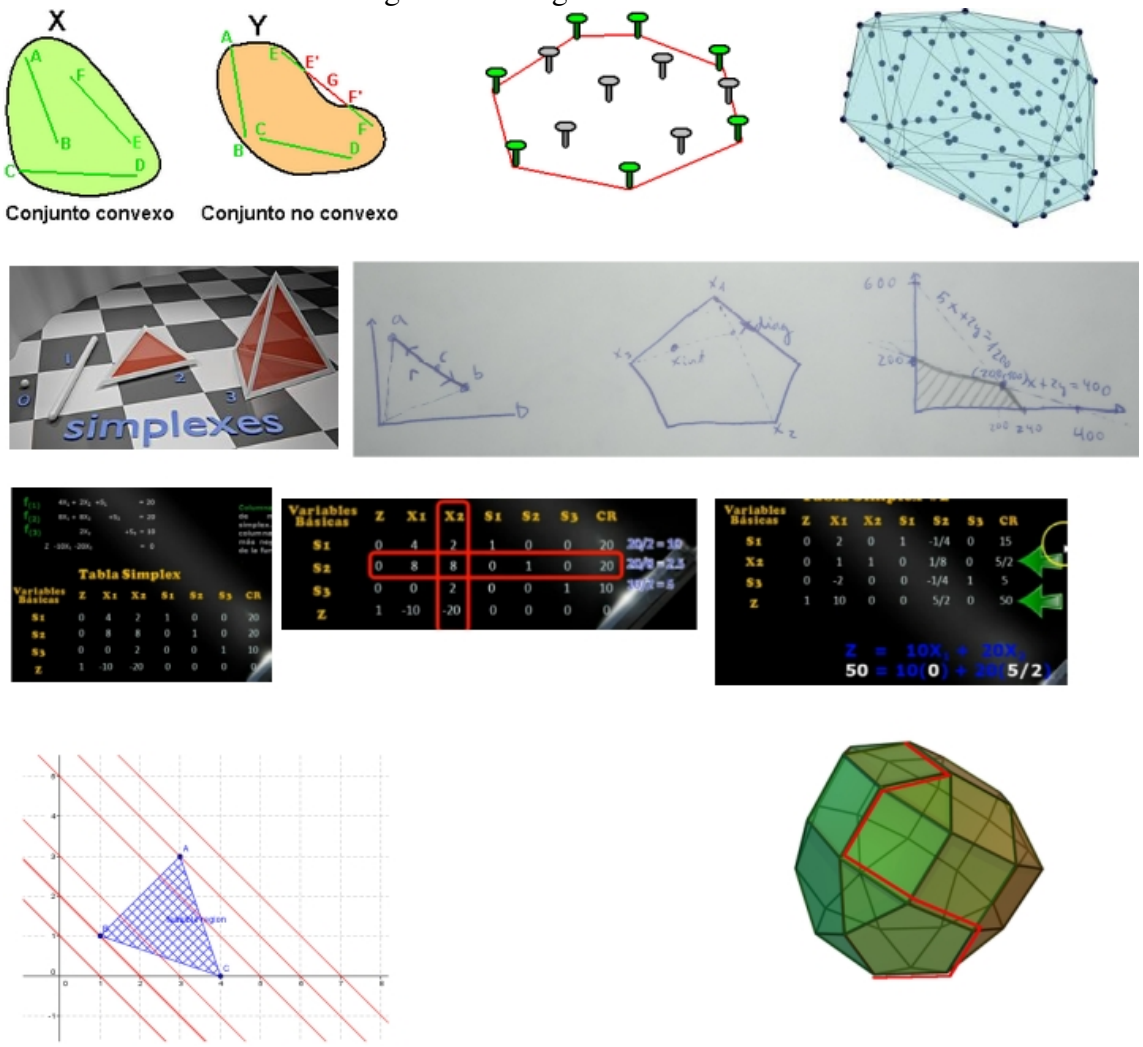
- Esp. Cvx E (EV) (Geom.): si para cualquiera dos ptos de E, la recta que los une está en E (posee *Clausur.* cvx). Ej: circulo irregular, Fig. 9.1.

- *Comb. Cvx* de un conj. de ptos X: $Cvx_{\boldsymbol{\alpha}}(X) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : x_i \in X, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. *Comb. Lin.* donde los pesos suman 1. Ej. nodo-suma en *GMM*.

- Tma Segmento Cvx (Fig. 9.1): el segmento obtenido como *Comb. Cvx* entre dos puntos es un Esp. Cvx con *Clausur.*. i.e. dados a y b y su recta, $r \Rightarrow \forall c = Cvx(a,b) = \alpha a + (1-\alpha)b \Rightarrow c \in r$ y además $\in [a,b]$. En efecto en 2D:

  - Teniendo que $c = \alpha(a_x, a_y) + (1-\alpha)(b_1, b_2)$ y ec. vect. de recta $r = \lambda(a_x - b_y, a_2 - b_2) + (b_x, b_y)$, desarrollamos $c = \alpha(a_x - b_x, a_y - b_y) + (b_x, b_y)$ y vemos que si $\lambda = \alpha \Rightarrow c \in r$.
  - Viendo que $\forall c$ $\boldsymbol{ca} = (\alpha - 1)(a_x - b_x, a_y - b_y)$ y $\boldsymbol{cb} = \alpha(a_x - b_x, a_y - b_y)$ siempre tienen sentido opuesto, pues si $\alpha > 0 \Rightarrow (1-\alpha) < 0$

Figura 9.1: Programación Lineal



9.3 Tma de equivalencias cvx (politopo=envolvente=región factible). (*) Tma de los vertices como base

- Tma Equiv. Cvx: *Politopo Cvx=Env. Cvx=Reg. Fact.*

  - Politopo (Geom.): generalización de un polígono (2D) o *Poliedr.* (3D) a cualquier dimensión. *Politopo Cvx* $P \in \mathbb{R}^n$ si los ángulos de sus hiperplanos son <180º (*Tensor Curvat.* +). Ej-: *Teseracto*, *Solidos Platon.* . Ej-: *Peq. Dodec. Estrellado*, *Politopo-E8* ?? Se Dem. que es también *Env. Cvx* de un conj. finito de ptos.
  - *Env. Cvx* de un conj. de puntos $C = \{x_i\}$ es su *Clausur.* cvx: $ECvx(C) = \{Cvx_{\boldsymbol{\alpha}_j}(C)\}$. Es el Esp. Cvx más pequeño que contiene a C. El espacio E resultante de todas las *Comb. Cvx* de los ptos de C. El espacio contenido por la "bolsa elástica que engloba a todos los ptos", Fig. 9.1. Ej: *Oloide*. Ver Sist. *Generad.*
  - *Reg. Fact.* : $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. El espacio de posibles soluciones de un problema PL. i.e. la región delimitado por los hiperplanos de las restricciones (conj. soporte, como SVMs)

- Vértice, pto extremo o esquina x_{vert} de un P:

  - Pto donde intersectan varias aristas (Geom., *Diagr. Schlegel*).
  - Pto expresable solo como *Comb. Cvx* de el mismo (por Tma Equiv. Cvx cualquier pto podemos expresarlo como *Comb. Cvx* de otros), i.e. $x_{vert} = Cvx(\{x_1, x_2\}) \Rightarrow x_{vert} = x_1 = x_2$.
  - *SFB*

  P. Enum. Vert. : encontrar y enumerar los vértices de un *Politopo Cvx* dado en forma 1) de *Reg. Fact.* o de 2) *Env. Cvx* es un problema *Combinat. NP-Hard* pues 1) requiere resolver todas las *Combin.* de sist. de ec. (ver *Var. Holg.*) o 2) requiere buscar el conj. mínimo de ptos *Indep. Afin* (solo algunos puntos de C de $ECvx(C)$ conformarán las esquinas). Ver Complej. del *Metodo Simplex*

- (*) Tma Vert. Base [Krein–Milman]: las esquinas son la *Base* de la *Reg. Fact.* (la definen de forma única y mínima), i.e. $\forall x \in P, x = Cvx(\{x_{vert_i}\})$. En efecto:

  En 2D Fig. 9.1:

  - Un punto diagonal x_{diag} (o en segmento de ptos vértice x_i) es comb. cvx. de vért. por Tma Segmento Cvx.
  - Un punto interior x_{int} siempre puede ser expresado expresado como: $x_{int} = \alpha x_{diag} + \beta x_3 = \alpha(\alpha' x_1 + \beta' x_2) + \beta x_3 \Rightarrow \alpha\alpha' + \alpha\beta' + \beta = 1$

9.4 Principio de las esquinas y solución gráfica (NP)

- Princ. Esquinas: la sol. opt. en *PL* ocurre en las esquinas de la *Reg. Fact.*. Si hay más de un vértice opt., toda la faceta (cara n-dim., Comb. Cvx de vértices) lo es. Dem:

- En 2D *P. Mantecados*: Fig. 9.1, para cada valor z de la F. Obj. $z = ax + by$ obtenemos una recta diferente (pero todas paralelas). Es claro que entre las posibles rectas que cortan a la *Reg. Fact.* la óptima toca en una esquina (o en una faceta). Esto es la Sol. Gráfica (Geom.) con lineas de nivel.
- En nD: complicado, pero ocurre porque tanto z como Reg. Fact. son lineales (en otros casos como $z = x^2$ no es así [a]

[a] https://www.researchgate.net/post/Why-are-optimal-solutions-found-at-boundary-points-Can-the-solution-be-within-the-feasible-region

- Solución Gráfica: por Princ. Esquinas basta evaluar en los extremos, pero es NP por *P. Enum. Vert.*. Ej: *P. Mantecados* $f(0,200) = 29400, f(240,0) = 25000, f(200,100) = z = 37000$ IDEA: Conj. de *Goldbach*: con PL

9.5 Variable holgura (solución factible básica (Rouche, variable básica, combinaciones). Método del simplex (pivote, casi P)

- *Var. Holg.* (slack): var. $\boldsymbol{y} \geq 0$ (VH, por convención positivas) que se añade a una restricción en forma de desigualdad ($A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ *Reg. Fact.*) para convertirla en "Forma de Igualdad" (sist. ec. $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$). Es un Ej. de *Filos. Groth.* al sumergir el problema de *Optim.* en un espacio de mayor dim. (*Inclus. Canon.*). También usadas en Mult. Lagrange [WikiDeutsch] y *Truco Kernel SVM*
  - *SFB* (Sol. Fact. Básica): sol. del sist. ec.*Var. Holg.* con m ec. y n incog. donde debe haber m Variables Básicas (VB) distintas de cero (o $n-m$ VNB igual a zero) y que se corresponde con un vértice de la *Reg. Fact.*. En efecto:

    En *P. Mantecados*, la *Reg. Fact.* con *Var. Holg.* queda un sist. ec.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1200 \end{pmatrix}$ y las sol. (x_1, x_2, x_3, x_4) forman una *SubEV Afin*. Por el Princ. Esquinas las sol. deben ser vértices (o facetas) y esto ocurre si la sol. tiene $n-m = 4-2 = 2$ ceros o VNBs [a]. Luego por *Combin.* hay $\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6$ *SFB* y resuelve el *P. Enum. Vert.*, aunque de forma *NP*

    [a] creo que por Rouche-Frobenius, para que la sol. sea un pto

- *Metodo Simplex* [Dantzig] [1]. *Metodo Iterativo*: que va viajando (*P. del Viajante*) de una *SFB* según un *Simplic.* [2] hasta encontrar la *Optim.*. Ej:

  Fig. 9.1 [Youtube: Método SIMPLEX Facil y Divertido con Memes - Investigación Operativa]

  - 0. Tabla inicial: la *SFB* inicial es la que toma como VB a las *Var. Holg.*

[1] resolvió un problema estadístico al confundirlo con deberes de su profesor *Lema Neyman* (Ej: de *Pensam. Pos.* usado en el Indomable Will Hunting)

[2] se va variando el sist. ec. de *Var. Holg.* y se van explorando las *SFB* de alrededor (que forman un *Simplic.* o más bien un cono). En cada iteración el vértice es más óptimo que el anterior.

$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, z) = (0, 0, 20, 20, 10, 0)$

- 1. Buscar Pivote P: su columna (c.) es la que corresponde al min en fila beneficio z y su fila (f.) la del min. en columna cantidad CR dividida. $P = 8$.
- 2. Actualizar tabla: combinando linealmente las filas [a]
- 3. Repetir 1 y 2: hasta que la f. z no tenga elem. negativos.
- 4. Sol. final: a las VB (c. izda) le corresponden los val. de la c. CR $(s_1, x_2, s_2, z) = (15, 5/2, 5, 50)$, las que no aparezcan tienen valor 0.

CONCLUSIÓN: en todos las iteraciones se cumple la ec. inicial de $z = 10x_1 + 20x_2$ (al final $z = 10 * 0 + 20 * 5/2 = 50$), y que las *SFB* siempre tienen $m - n = 5 - 3 = 2$ ceros o VNB (aunque van cambiando las VB, c. izda).

[a] a) sustituir VB (c. izda) por la que ha salido pivote $s_2 \to x_2$. b) actualizar f. pivote dividendo por P: $FP_{nue} = FP_{ant}/P = (0, 8, 8, 0, 1, 0, 20)/8 = (0, 1, 1, 0, 1/8, 5/2)$. c) actualizar resto de f. restándole la f. pivote nueva multiplicada por el elemento pivote de la fila a actualizar: $F_{nue} = F_{ant} - P_F * FP_{nueva} = (0, 4, 2, 1, 0, 0, 20) - 2 * (0, 1, 1, 0, 1/8, 5/2) = (0, 2, 0, 1, -1/4, 0, 15)$

Por *P. Enum. Vert.* es una cuestión abierta si existen variantes del Simplex que sean P [3].

9.6 Aplicaciones mat.: dual (análisis cvx, análogo, teoría de la representación), complejo simplicial (indecible), programación en enteros (dinámica, sólidos platónicos)

- *Dual* [Neumman]: transf. obj. matem. en otros para simplificar la sol. de probl. (*Analog.*, *Teor. Unif.*). En PL si me piden maximizar puedo reconvertirlo en maximizar y luego dar la vuelta. El correspondiente Probl. de la intro es:

$$\begin{cases} z_2 = \boldsymbol{y}^* = \text{argmin}_{\boldsymbol{y}} f_2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \text{ s.t.} \\ A^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

  El problema dual del dual es el mismo, y las sol. opt. del 1º y 2º , $\boldsymbol{x}^*$ e $\boldsymbol{y}^*$, cumplen: $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*$ Ej.: *Teor. Represent.*, *Ra. F. Neg.*, Grafo/*Poliedr. Leyes de Morgan*, *Reticulo*, *Hip. Riemann VIII*, *Cuaternion.*, *Tma Thevenin*.

  - *Anal. Cvx* : *Optim.* usando conceptos como *Dual*. *Var. Holg.* (Multipl. Lagrange, *SVM*) *Direc. Llegada* Beamf. de Hannes, *Invest. Operat.* (millones de variables). *Geom. Inform.* (*Medida Central*)

- Símplex o *Simplic.* e:
  - Generalización de triángulo. Ej: tetraedro, Fig. 9.1.
  - En un espacio n-dim o mayor, es la *Env. Cvx* de n+1 vértices *Indep. Afin* (en posición general o no co*Incidenc.*) [4]

[3] pues tal y como lo propuso [Dantzig] es ¡EXP-time en algunos casos! y para cualquier variante se encuentra un caso que lo hace *NP*. [FranciscoSantosLeal10] la distancia entre vértices de Politopo Cvx es $NumCaras - Dimension$ (contra ejemplo a conjetura Hirsh). No afecta al Simplex pues todavia puede ser P

[4] $ECvx(\{x_1, ...x_{n+1}\}$ Env. Cvx de ptos en posición general o donde nunca coinciden más de $m + 1$ ptos en m-plano. Ver *Simplic.*, *Afin*, *Comb. Lin.*

Compl. Simplic. : al igual que cualquier polígono lo descomponemos en triángulos, cualquier *Politopo Cvx* puede descomponerse en *Simplic.* (y estos en *Simplic.* de menor dim.). Usado para *Calc. Vol.* de Politopos Cvx (*Metodo de Exhaucion*). Un *Probl. Indecib.* en *Topol.* es determinar si dos *Compl. Simplic.* (resultantes de pegar Simplic.) son *Homeomorf.*

- *Progr. en Ent.* (Lineal): PL donde las variables deben ser enteras. Si resolvemos sobre $\mathbb{R}$ y probamos enteros al rededor del opt. puede dar opt. local. Luego se hace por combinatoria con *Alg. Voraz* y *Progr. Dinam.*. O de Opt. Heurística: Alg. de Recocido Simulado, Colonia de Hormigas, ... Es uno de los 21 problemas *NP-Completo* y *F. Unidirecc.* Ej:

  1. P. Knapsack (p. de la mochila): maximizar el valor si mochila limitada en peso y tenemos diferentes lingotes en peso y valor. Casos especiales son: *P. Suma de Subconj.* : encontrar los subconjuntos de suma 0 sobre los elementos $X = \{-3,-2,1,2,3,5\}$. *Fuerza Bruta* con *Conj. Potencia* Ej. de *NP-Hard* y *NP-Completo* P. de Monedas: min nº de monedas a pagar
  2. *Solidos Platon.*: explica por que 5

9.7 Aplicaciones real: red de flujo (Fulkenson), 3 problemas de economia

- *Red Flujo* con *PL* lento [WikiPL] (parecido al del transporte ver)
- Los 3 tipos de problemas económicos de *PL*:

  1. Producción: *P. Mantecados*
  2. Nº Alimentos: para minimizar costes con restricciones $VA \geq 10$...
  3. Transporte: nº de productos por fábrica para min coste transporte a distribuidor Ej: *Red Flujo*

Chapter 10

T24. Funciones dadas en forma de tabla. Interpolación polinómica. Interpolación y extrapolación de datos.

RESUMEN: aprenderse las 3 ideas usadas en *Int. Num.*: *I. Newton Dif. Divididas* y *Error de Interp.*

10.1 Introducción: ruido-tunelling, hiperresolución. Definición: aproximar (Normal) y predecir (muertes Covid)

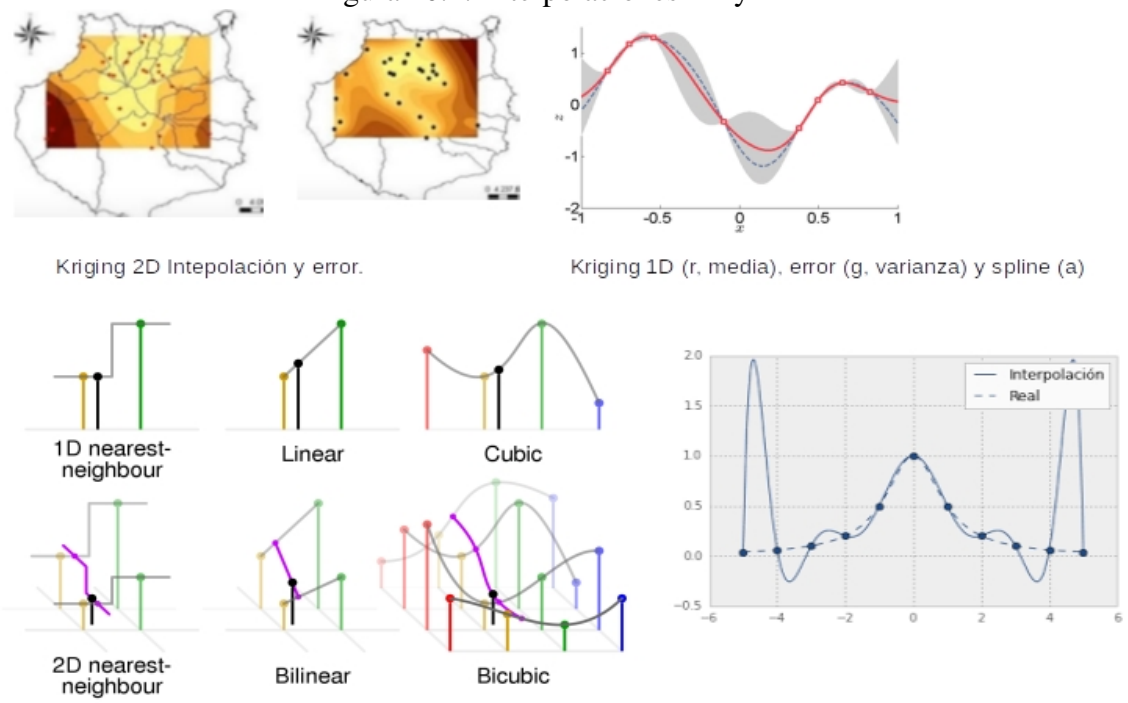
- Ej-motivador: Ej1: ruido-tunnelling. Ej2: ¿como podemos aumentar la resolución de una imagen o intepolar frames en un video?. as?
- Importancia-histórica: *Anal. Num.*, *I. Newton*, *Kriging*, *Error de Interp.*, *Error de Integr.* (aplicac. a integración)
- *Interpol.* : es uno de los 3 temas del *Anal. Num.* para evaluar F. i.e. inferir (*Deduc.*) nuevos valores a partir de puntos conocidos). Es *Probl. Inv.* del Alg. (*Reciproco* de *Ceros* y similar a *Entren.* o *Regr.* Pol.). Dos Usos: 1) **Aproximación** cuando queremos aproximar una función compleja por una más simple a partir de un conj. puntos de la compleja. Ej: *F. Error* y FDA de *Normal* (que requieren integr. numérica) *Histograma*. I. de trayect. brazo *Robot.* 2) **Teorización/predicción** (Método Científico) cuando queremos encontrar una función desconocida que explique un *Muestr.* de un experimento. Ej: *Tma Num. Primos*, vida real suponiendo *F. Logistica* en *Mod. Epidem.* y *Muestr.* por semanas ¿cuantos contagios hubo y habrá entre unas muestras tomadas

10.2 Tipos de interpolación: multidimensional y regresión (superficialmente). Polinómica (Tma de aproximación de Weierstrass)

- En este tema no profundizamos en los siguientes tipos de interpol.:
  - F. Multidimensional: *Kriging*

– *Regr.*: Solo un valor de F por variable (no *Exp. Aleatorio*). La complejidad del modelo es el nº de muestras luego aquí no vale la Máxima de la *TAI*

Figura 10.1: Interpolaciones 2D y 1D



- *Tma Aprox. Weierstrass* : dentro del *Anal. Funcional* cualquier F. continua puede aproximarse tanto como se desea mediante un polinomio de grado n. $p_n(x) \xrightarrow{unif.} f(x)$ *Conv.* Unif.. I.e. los polinomios de coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$ son *Denso* en el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo cerrado. A su vez $\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{unif.} \mathbb{R}[x]$ y solo hay un num. contable de $\mathbb{Q}[x]$. Por esto nos centraremos en *I. Polin.*

10.3 Funciones dadas en forma de tabla (N=n+1 muestras o n segmentos, grado del pol. de nodos). I. lineal, polin. (comb. lin: bases=xk y coef.=sist. ec. Vandermonde) y spline

- *F. en Forma Tabla* : cuando podemos ordenar los puntos de la función a interpolar (variable in/dependiente) podemos crear una tabla. En caso contrario hablamos de **Base de Datos**. Las abscisas pueden estar igualmente espaciadas o no y hay *Cuantiz.* como *Int. Lebesgue* que parten la ordenada. En lo que sigue supondremos una tabla de $N = n+1$ muestras o n segmentos ordenadas según la abscisa $\{(x_0,y_0)...(x_n,y_n)\}$. Definimos el Pol. Nodos $\Pi_n(x) = \Pi_{k=0}^{n}(x-x_k) = (x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n) =$ pol. de *Grad.* $N = n+1$

- I. Lineal (N=2 muestras): $y(x) = a(x-x_0)+y_0$, donde $a = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Fig. 10.1

- *I. Polin.* : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *Comb. Lin.* con *Base* x^k (como *Taylor*) y coef. de sist. ec.. Según el *Tma Fund. del Alg.*, dadas $n+1$ muestras $\exists_1 P(x)$. Otra forma:

Dado el sist. ec. creado $\exists$ sol. pues *Det.* M. principal es un det. de *Vandermonde* distinto de cero (ver TProblemas). $|\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \dots\dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}| = \prod_{1<i<j<n}(x_i - x_j) \neq 0$.

. Ver *Regr.*

- I. *Spline* : por trozos de polinomios (como lineal), pero coinciden derivadas (como polinómica). Fig. 10.1. Ver *Regla Trapecio* (lineal) y *Regla Simpson*

10.4 I. polin. (¿espaciado cte, N crece?): Hermite (derivada, Tma Chino), Newton (dif. finitas, similar Taylor) y Lagrange (pol. nodos, Tma Chino), Diferencias divididas (recurrente)

RESUMEN: salvo Hermite (que sale de sist. ec.) el resto se pueden expresar como *Comb. Lin.* con las *Base*=Pol. Nodos y con coef. ver paréntesis de la Sec.

- *I. Hermite* : $P(x) =$ sol. del sist. ec. creado por $(x_i, y(x_i), y'(x_i))$. Tiene el doble que *I. Polin.*. Inconv: Sist. ec. engorroso si $n \uparrow$ y se añanden más derivadas. *Taylor* es un caso particular. Uno clásico es el Spline Cubico de Hermite (polinomio de grado 3). Por ser $P(x)$ *Dom. Eucl.* equivale a encontrar $P(x)$ en un *Tma Chino del Resto* [1]

- *I. Newton* : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k y_0 \frac{\Pi_k(x)}{d^k k!}$ donde d es el espaciado constante. Recuerda a *Taylor*. Se obtiene de expresar y_n en func. de $\Delta^k y_0$ *Dif. Finitas*. En efecto:

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{n!}{n!}\Delta^n y_0 = [\text{teniendo que } n-k = \frac{x_n - x_k}{d} \text{ y } x_n = x] = y_0 + \frac{x-x_0}{d}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!d^2}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!d^n}\Delta^n y_0 = P_n(x).$$ Comprobar $P_n(x_k) = y_k$ (se anula). Ej: $\triangleright$. Inconv: igual espaciados.

- *I. Lagrange* : *Comb. Lin.* de pol. base. $P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$ donde $l_j = \Pi_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x-x_i}{x_j - x_i} = \frac{\Pi_n(x)}{\Pi_n(x_j)} \frac{(x_i - x_j)}{(x - x_j)}$ son polimios de grado n y son tipo Nodos (se anula en todos x_i salvo en x_j que vale 1 (delta de Kronecker)). En efecto:

$$l_j = a\prod_{i=0, i\neq j}^{n}(x - x_i); a = \frac{1}{\prod_{i'}(x_j - x_i)}; l_j = \prod_{i'}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Inconv: $n \to n+1 \Rightarrow$ rehacer todo.

Equivale encontrar $P(x)$ en el siguiente *Tma Chino del Resto*: $\begin{cases} P(x) = y_1 \pmod{x - x_1} \\ P(x) = y_2 \pmod{x - x_2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ P(x) = y_n \pmod{x - x_n} \end{cases}$ El Tma asegura que $\exists_1 P(x)$ con *Grad.* $\leq n$ que satisface este sist. ec.

1 : $\begin{cases} P(x) = P_1(x) \pmod{(x - x_1)^{r_1}} \\ P(x) = P_2(x) \pmod{(x - x_2)^{r_2}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ P(x) = P_n(x) \pmod{(x - x_n)^{r_n}} \end{cases}$ donde $P_i(x) = \sum_{j=0}^{r_i - 1} \frac{y_i^{(j}}{j!}(x - x_i)^j$ es polinomio de Taylor de orden $r_i - 1$ en x_i de $P(x)$. El Tma asegura que $\exists_1 P(x)$ con grado $\leq \sum_i r_i$ que satisface este sist. ec.

- Interp. con *Dif. Divididas* : $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0,...x_i]\Pi_{i-1}(x)$, donde $f[x_0,...x_i]$ "Dif. dividida orden-k" obtenida como *Rel. Recurr.* reducción triangular: $\begin{pmatrix} f[x_0] \\ .. \\ f[x_k] \end{pmatrix} \triangleright f[x_0,..x_k]$. Usado en máquina de diferencias de Babbage, da un Pol. de Newton (*Comb. Lin.* de Pol. Nodos). En efecto:

> $P_k(x) - P_{k-1}(x)$ debe ser: 1) grado k, 2) anularse en x_i porque $P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) \Rightarrow$ $P_k(x) - P_{k-1}(x) = A_k(x-x_0)...(x-x_{k-1})$. La cte $A_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})} = f[x_0,x_1,..x_k]$. Cumple $f[x_0,...x_k] = \frac{f[x_0,...x_{k-1}]-f[x_1,...x_k]}{x_0-x_k}$; .

10.5 Error de interpolación (Pol. Nodos, similar Taylor). Sobreajuste: crecer n no siempre reduce error (TAI)

- Tma del *Error de Interp.* polinomial [PdfJesusQuesada]: $Err(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\Pi_n(x)$, donde $f \in C^{(n+1)}[x_0,x_n]$ (*Clase* C^{n+1} en intervalo $I = [x_0,x_n]$).

  En efecto:

> Sea $F(u) = Err(u) - Err(x)\frac{\Pi_n(u)}{\Pi_n(x)}$ la F. Nodos (similar a Pol. Nodos) la cual es fácil de comprobar que tiene $n+2$ ceros o nodos en el intervalo I [a]. $F^{(1)}$ debe tener $n+1$ ceros en I, pues entre cada par de ceros de F hay solo 1 cero por el Tma de Rolle. De igual forma $F^{(2)}$ tiene n ceros y por inducción $F^{(n+1)}$ debe tener 1 cero. Sea c tal cero, y derivando $n+1$ veces F se obtiene que $F^{(n+1)}(c) = f^{n+1}(c) - Err(x)\frac{(n+1)!}{\Pi_n(x)} = 0$ (el factorial viene de las derivaciones de $\Pi_n(x)$ que es un Pol. de gr. $n+1$ según *F. en Forma Tabla*). Despejando sale el error.
>
> [a] $n+1$ ceros en los ptos de interpol. $F(u = x_k) = 0$ (pues cualquier I. Pol. cumplen que $f(x_k) = P(x_k)$) y otro justo en x $F(u = x) = 0$ (suponiendo $x \neq x_k$)

  Ej: *Error de Integr.*

- *Sobreajuste* : Este Tma no nos limita el error, es más puede ser negativo. De hecho es 0 en los $x = x_k$ y en resto proporcional a la distancia entre las muestras elevado a n. Se suele tomar como cota $|Err(x)| < \frac{M}{(n+1)!}|\Pi_n(x)|$ donde $M = max_{t\in I}|f^{n+1)}(t)|$. Parece que aumentando n el error disminuye por el factorial, pero por esta proporcionalidad también puede crecer, Fig. 10.1. Se solventa con la máxima de la *TAI* (Teoría Algorítmica de la Información)=Long. Descr. Min.= la Navaja de Ockham=*Simpl. Alg.*, explicar lo máximo con la mínima complejidad (Filosofia Leibniz). Ej: *F. Aritm.*, *Infer. Solomonoff Compl. Inf. Matem.*, *Aprend. Autom.*, *AIC*, *Axiom.* Wolfram.

10.6 Extrapolación (error fuera del intervalo) y aplicaciones (Monte Carlo,

- Extrapolación: más riesgo de *Error de Interp.* fuera del intervalo de interpolación $[x_0,x_n]$. Sobre todo en caso de *Sobreajuste*.

10.7 I. multidimensionales: 1D análisis funcional (min. error, Taylor, Padé, Fourier, NMF), 2D Kriging (campo escalar), KNN, compressed sensing

- El *Anal. Funcional* permite aproximar una función a partir de sus muestras pero donde el criterio de aproximación ya no es pasar exactamente por las muestras si no minimizar algún error. Ej:
  - *Taylor* caso de *I. Hermite*.
  - Descomposición: *Fourier* Trigonométricas, Wavelet, Non-negative Matrix Factorization
  - Resampleado up/down: la f. interpoladora mantiene el mismo espectro que el proporcionado por las muestras. Ej: I. Shannon $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc(\frac{t-nT}{T})$ con $sinc(x) = \frac{sin(x)}{x} = F[rectangulo]$
  - Padé: Aproximar *C. Func. Rac.* $A(x)/B(x)$
- *Kriging* o *Regr.* en Proc. Gauss. Fig. 10.1: estimac. de una sola realización de un *Campo Aleatorio* (solo 1 muestra por pto) mientras que *Regr.* es para varias realizaciones. Interpola un *Campo Esc.* (1D, 2D...) linealmente (la actual es una *Comb. Lin.* de las muestras cercanas). Supone que los datos están correlacionados espacialmente. A más lejos la muestra menos peso en la actual. La interpolación es la media y el error la varianza de una *Normal*. Ej: mapa geográfico de precipitaciones. La técnica devuelve también el mapa de fiabilidad (de error). Creo es lo de Rafael Molina bajo la *Infer. Bayes.*. Es el BLUE *Tma Gauss-Markov*
- *KNN* (Interpol. por el K-Vecino Más Cercano): Fig. 10.1
- Compressed Sensing: Tao probó que dando información sobre la esparsicidad (escases) de la señal, esta puede reconstruirse con menos muestras que las exigidas por Tma de Nyquist. Requiere resolver un sist. ec. bajodeterminado (*SVD*)

10.8 Aplicaciones: error de integración. Monte Carlo

- *Int. Num.* (*Error de Integr.*) e *Int. Monte Carlo*

Chapter 11

T31. Integración numérica. Métodos y aplicaciones

11.1 Introducción: función error, áreas. Método de exhaución (complejo simplicial). Definición (int. definida sin primitiva, error deseado)

- Ej-motivador: Ej1: ¿que valor tiene la *F. de Distr. Normal* en $x = 2$, no int. por *F. Error* : $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$? Ej2: ¿*Calc. Vol.* o área?. Ej3: *Dat. Perd.*

- *Metodo de Exhaucion* [Arquímedes]: *Metodo Iterativo* con medida externa e interna de Arquímedes calcula el área de un círculo y de π mediante polígono (que son triángulos, *Compl. Simplic. Calc. Vol.*). Es el equivalente griego del Cálculo Integral *Int. Riemann*. En [Ossendrijver2016] afirma que los Babilónicos (ver *Alg. Babil.*) conocian la *Regla Trapecio* para integrar la velocidad de Jupiter. Aproximaba π lentamente hasta que llegó *Binom. Newton*.

  Int. Num. : uno de los 3 temas del *Anal. Num.* para obtener *Int. Def.* cuando se desconoce o no tien *Primit.*, haciendo error tan pequeño como queramos. Dos formas: espaciado fijo o estadístico. Su paradigma es la *Int. Riemann* que es la esencia del Cálculo: diferencial (partir la regla) e integrar (juntar las reglas) (ej: *Long. Arco*, *Calc. Vol.*). No funciona en *Par. Costa*

- Importancia-histórica: *Anal. Num.*, *Int. Monte Carlo*, *Regla Trapecio*

11.2 Fundamentos: int. de Riemann (cuantiza dom. no imag.), interpolación (Newton, divididas y error). Error de integración (f. nodos)

- *Int. Riemann*

- *I. Newton*. Interp. *Dif. Divididas*. *Error de Interp.*.

- *Error de Integr.* : Las int. num. que veremos se basan en aplicar *Anal. Funcional* y más concretamente *I. Polin.* por lo que $f(x) = P(x) + Err(x)$ en intervalo $[a,b]$, entonces $I =$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x) + R(f)$ donde $R(f) = \int_a^b Err(x)dx$. Considerando *Error de Interp.*, $R(f) = \frac{f^{n+1)}(\lambda)}{(n+1)!}\int_a^b \Pi_n(x)$, int. de Pol. Nodos (*F. en Forma Tabla*) y puede ser negativo.

11.3 Fórmula del rectángulo (n=0 segmentos)/trapecio (n=1, dif. divididas) y regla del trapecio (n, spline lineal): polinomio, integral y error

- Fórmula del Rectángulo (1 pto, $n = 0$, Pol. Nodos en *F. en Forma Tabla*): por la izquierda. Consideramos solo el pto $(x_0, y_0) = (a, f(a))$ para el intervalo $[a,b]$, Fig. 11.1. Entonces:
  - $P(x) = f(a)$
  - $I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = f(a)(b-a)$
  - $R(f) = \frac{f'(\lambda)}{1!}\int_a^b (x-a)dx = \frac{f'(\lambda)}{2}\frac{(a+b)^2}{2}$. Si f es F. cte su error es 0, ya que su derivada es nula.

  Por la derecha con $P(x) = f(b)$ y por la mitad con $P(x) = f(\frac{a+b}{2})$. Son I. Riemann sin supremos.

- Fórmula del Trapecio (2 ptos, $n = 1$): Por I. Lin. o *Dif. Divididas* de orden 1 [1]
  - $P(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(b)$
  - $I \approx \int_a^b P(x)dx = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$
  - $R(f) = \frac{f''(\lambda)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b) = \frac{-f''(\lambda)}{12}(b-a)^3$. Si f es F. lineal su error es 0. [2]

- *Regla Trapecio* ($n+1$ ptos) [Babilónicos]: Si partimos $[a,b]$ en n segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ con $i = 1,2,..n$, donde cada uno mide $h = \frac{b-a}{n}$, mediante $n+1$ ptos $\{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$ según *F. en Forma Tabla*
  - $P_i(x) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}(x - x_{i-1}) + y_i$ (*Spline* lineal)
  - $I \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_i(x)dx = \frac{1}{2}[y_a + y_1]h + \frac{1}{2}[y_1 + y_2]h + .. + \frac{1}{2}[y_{n-1} + y_b]h = h[\frac{y_a + y_b}{2} + y_1 + .. + y_{n-1}]$
  - $R(f) = \sum_{i=1}^n R_i(f) = \frac{-h^3}{12}nf''(\lambda) = \frac{-(b-a)^3}{12n^2}f''(\lambda)$. Si n crece el error disminuye cuadráticamente.

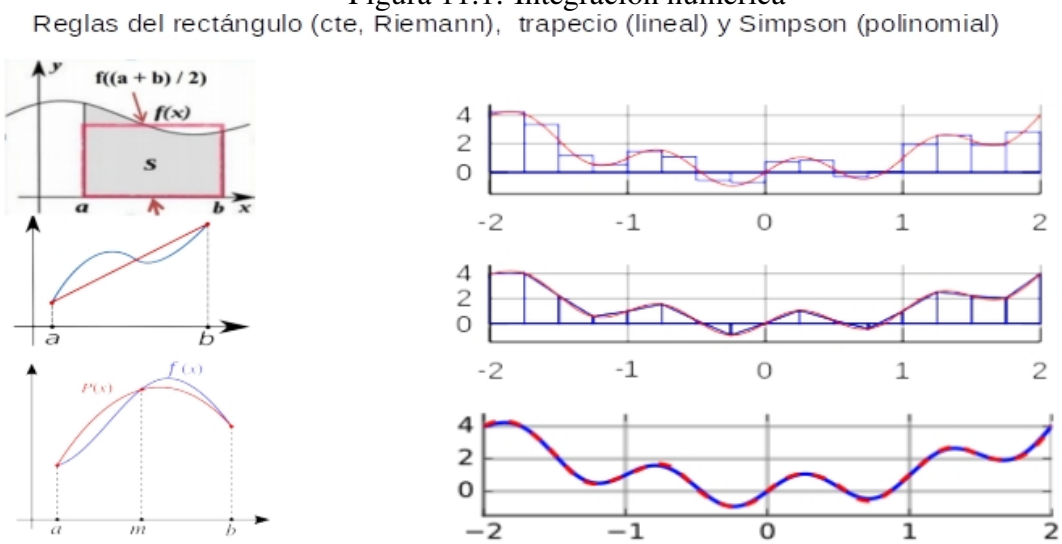
11.4 Fórmula (n=2, sist. ec. de parábola, i. Newton, 3/8 Newton-Cotes, error creido) y Regla de Simpson (I=(E+4I+2P)h/3)

- Fórmula de Simpson (3 ptos, $n = 2$): Por I. Cuadrática. Sean los ptos $\{(x_0 = a, y_0), (x_1, y_1), (x_2 = b, y_2)\} = \{(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)\}$ [Wiki]. Resolviendo el sist. de 3 ec. del ajuste de la parábola obtenemos:

[1] $P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$. Tomando $x_0 = a, x_1 = b; f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

[2] $\int_a^b (x-a)(x-b) = [Wolfram] = -(b-a)^3/6$ es menos porque el error puede ser por defecto

Figura 11.1: Integración numérica



- $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ donde $a_0 = y_1$, $a_1 =$ no necesario para I, $a_2 = \frac{y_2+y_0-2y_1}{2h^2}$. Esto mismo sale con *I. Newton* de 2º gr. [3]
- $I \approx \int_{-h}^{h} P(x)dx = \int_{-h}^{h}(a_2x^2 + a_1x + a_0)dx = a_2\frac{2h^3}{3} + a_0 2h = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, donde la a_1x se anula por ser impar. Debido al factor esta se conoce como Regla Simpson $\frac{1}{3}$. Si se hace interp. cúbica se obtiene la Regla Simpson $\frac{3}{8}$. Así vamos obteniendo las Reglas Newton-Cotes.
- $R(f) = -\frac{f^{(iv}h^5}{90}$ (me lo creo) [4]. Si f pol. gr. ≤ 3 el error es 0, **¡gran ventaja respecto a trapezoidal!**

- *Regla Simpson* ($n+1$ ptos): si partimos $[a,b]$ en n (par) segmentos como antes.
  - $P_i(x) = a_{2_i}x^2 + a_{1_i}x + a_{0_i}$ que ocupa dos segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$. (*Spline* pol.)
  - $I \approx \sum_{i=1}^{n/2} P_{2i}(x) = \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + .. + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P)$ donde $E = y_0 + y_n; I = y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}; P = y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}$ y donde hay que ir saltando de dos en dos polinomios para evitar solapamientos.
  - $R(f) = \sum_{i=1}^{n/2} R_{2i}(f) = \frac{n}{2}(-\frac{f^{(iv}h^5}{90}) = -\frac{f^{(iv}(\lambda)(b-a)h^4}{180}$ $(h = \frac{(b-a)}{n})$

11.5 Int. Monte Carlo (tipos de muestreo aleatorio, importance sampling): maldición de la dimensión, marginalización (datos perdidos) ec. dif.)

- *Int. Monte Carlo* : para int. múltiple. La *Regla Trapecio* es determinista mientras que Monte Carlo no (cambia el resultado según el sampleo *Exp. Aleatorio*). Los tipos son como los *Mu. Aleat.*: uniforme, estratificado, importante o secuencial (Markoviano o Filtro de Partículas/Kalman). Ej: para hallar area del circulo inscrito en cuadrado.

[3] donde $P_N w(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}(y_1 - y_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)$, considerando $(x_0, x_1, x_2) = (-h, 0, h)$ y desarrollando que los coef. coinciden, $P(x) = P_N w(x)$

[4] Debería ser $R(f) = \frac{f^{(3)}(\lambda)}{3!}\int_{-h}^{h} h(x+h)(x)(x-h) = 0$ o $= \frac{h^4}{2}$ tomando abs. La explicación se basa en integral error de Taylor de orden 4 [IntegrNumerCienciasAmbientales]

- *Mu. Import.* Importance Sampling (IS): si queremos integrar $I = \int f(x)dx$ podemos extraer muestras de otra distribución $x_i \sim p(x)$ y aproximarla con un sumatorio $I \approx \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$. Es equivalente al *MATN* (uniforme) ($I \approx \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} f(x_i)$) porque si una muestra aparece el doble que la otra pesa la mitad que la otra. La idea es elegir $p(x)$ para que decrezca la varianza $Var_{n\to\infty}[I]$ se cumpla el *Tma Consist.* Ej: [Emmanuel/Luz] simplificar producto: queremos estimar $I = p(y|s) = \int p(x|s)p(x|y)dx$ donde $p(x|y)$ es la incertidumbre. Considerando IS podemos $I \approx \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} p(x_i|s)$ donde se ha simplificado el denominador y donde $x_i \sim p(x|y)$ que la suponemos *Normal*.

- *Maldicion Dim.* (curse): vamos disminuyendo el grid hasta que el valor de integral se estabiliza, pero el nº de evaluaciones crece exponencialmente con la dimensión para asegurar eval. correcta. Es *NP*.

- Aplicaciones:
  - Cálculo de la *Distr. Marginal* en *Mod. Estad.* no analíticos como *NN* (en *SPN* no). Ver *Dat. Perd.*
  - Aplic. Real: Filtros de Kalman seguir objetos. Muestr. en energía mínima de conformación de proteína (Recocido Simulado, annealing)
  - Resol. de *Ec. Dif.*: cuando no tienen *Forma Cerrada*

Chapter 12

T32. Aplicación del estudio de funciones a la interpretación y resolución de problemas de la Economía, las Ciencias Sociales y la Naturaleza.

12.1 Introducción: mal suposición (modelo covid) o estudio, Leibniz (función, variable), Euler (f(x), continua-derivable)

- Ej-motivador: ¿como estamos seguros que hemos "aplanado la curva" del coronavirus y ahora estamos bajando?. La respuesta es que si asumimos que los contagios siguen un *Mod. Epidem.*, entonces el "estudio de la función" nos indica que ahora viene el descenso. Si nos equivocamos, el problema no está en el estudio matemático si no en la suposición.

- Leibniz (función, variable, parámetro y constante). Euler $f(x)$ relación continua/derivable. Bolzano. Cauchy.

- Importancia-histórica: *Funcion*, Problemas históricos y e Interdisciplinares

12.2 Función (suavidad, tabla, algoritmo y gráfica (no siempre posible)). Objetivos del Análisis: estudio de funciones (ceros, ...) con herramientas (derivadas,..). Optimización (Fermat, PL, compromiso)

- *Funcion* : *Aplicacion* entre conj. de números. Puede ser multivariable. La entrada/salida significa variable in/dependiente (dominio/imagen). Decimos que hay *Suav.* en el cambio si continua y derivable. Hay 3 formas de describirla:

  - *F. en Forma Tabla*
  - Ec. o algorítmo (*Calc. Lambda*)

  - *Grafica* (ver TProblemas): sacar conclusiones de un vistazo pero no todas las F. se pueden dibujar y por eso el Análisis

  Ej: Mediante One-Hot Vector de *Aprend. Autom.* podemos convertir palabras a números.
  Ej: Entre magitudes (medibles) físicas.

- *Obj. del Anal.* : sacar conclusiones (*Ceros*, monotonia (de/crecimiento) y extremos (max/min *Optim.*) de una F. dada en una de las tres formas anteriores usando las herramientas de Lim, Deriv/Integr, *Anal. Funcional* (desarrollos) y *Anal. Num.*. El estudio puede ser: local (Taylor) o global (extremos). Idea: el Análisis de algoritmos es similar [1]

- *Optim.* : uno de los principales *Obj. del Anal.*

  1. Clásico: *Tma Fermat Max* (el clásico): $f'(x) = 0$ pero no siempre es posible en multidimensional. Ver *SGD*, *Pto Silla*
  2. Alg.: *PL*: Hannes, *Var. Holg.* (Mult. Lagrange), *Invest. Operat.*
  3. Anál.: *C. Variaciones* (Ec. Euler-Lagrange)
  4. Estad. *Regr. Min. Cuadr.*, *SVD*, *Estim. Bayes.*, *Apl. Fract.*

  Compromiso (solución de C. o trade-off): Ej: *Oferta Demanda*, *Circ. RLC* (PID, sobredisparo vs tiempo de respuesta), *Mu. Represent.*, *Planif.*, *Poder Expr.*

12.3 Análisis Dimensional. F. sencilla.: cte, prop. (rel. general, Ohm), lineal (oferta), abs (rectif. f. transf.)..., pol. (Kepler, filtro, potencial=6 grados), pot. . log. (Weber, entropía, 6 grados), exp. (Moore, radiact.), period. (Fourier)

- *Anal. Dim.* encontrar ec. de relación de varias magnitudes (en *Estimac. Fermi*) Ej: ¿vel. v de un objeto al llegar al suelo desde h? pueden estar relacionadas además g y la masa m, encajando vemos $m/s = \sqrt{m*m/s^2} \iff v = \sqrt{hg}$. Vemos que es autocorrectora, la masa no influye, pero falta la cte $v = \sqrt{2hg}$ [2]

- Polinómicas

  1. Constante: bombilla $I(t) = k$
  2. Prop. Directa: 2ª Ley Newton $F = ma$. *Rel. General* (ver). Ley de la Palanca: $M = Fd$. Polipasto $d = x(2n)$. Ley de Ohm $V = IR$.
  3. Lineal: mov. uniforme $x = vt + x_0$. *Oferta Demanda*
  4. Cuadrática: caida libre $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$,
  5. Valor Abs: F. rectificadora $y = |sen(x)|$ o *Tma Thevenin* y *F. Transf.*
  6. Inversa proporcional: Polipasto $F = R/(2n)$, Ley de Boyle $P = \frac{k}{V}$ donde $k = nRT$. *Veloc. Reacc.*. Inv. cuadr.: Ley de gravitación $F = G\frac{mM}{r^2}$.

[1] ceros: que I dan O importantes...

[2] basado en 2 principios (similar a *SPN*): a) suma de magnitudes con igual dim., b) proporcionalidad potencial para equilibrar ecuación. Nos indica si sobran magnitudes en la ec. Equivale a Chequeo de Tipos (*Correspond. Curry-Howard*) o verificar *Simpl. Alg.*. Ver *Regr. Min. Cuadr.*

7. Func. polinómicas o racionales: 3ª *L. Kepler*: $T^2 \propto a^2$. Péndulo $T_{perido} = 2\pi\sqrt{l/g}$. Filtro electrónico (ver). *Ley Pot.* : *Seis Grados* (Libre Escala) (!no confundir con exponencial¡)

- Exponenciales:
  - Logarítmica: *L. Weber*. *Entropia* $S = dQ/T$ (a más Tª menos se nota el aumento de desorden de introducir calor). *Prob.-Log* (*Media* Geom.). Linealización en *Regr.*. *Seis Grados* (Mundo Pequeño)
  - Exponencial: *Ley Moore* (transistor). Ley de desintegración *Radiact.* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ donde N es el nº de átomos radiactivos (susceptibles de emitir) que quedan en instante t (al principio hay muchos N_0), ver *Poisson* [3] . Func. logística (ver). *Estimac. Fermi*
- Periódicas: *Fourier* (RLC, Voz)

12.4 Física e Ingeniería: parábola de seguridad (leyes de Kepler), cálculo de variaciones (coordenadas generalizadas, determinismo, robótica), circuito RLC (fasor, laplace, PID), ec. del calor (Fourier, Schroedinger)

- *Par. Seguridad* : de un tiro parabólico con ángulo θ y *Proyec.* de velocidad $(v_{x0}, v_{y0}) = v(cos(\theta), sen(\theta))$

  - Ec. paramétrica: $\begin{cases} x = v_{x0}t \\ \frac{\partial y}{\partial t} = v_{y0} - gt \iff y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ *Ec. Dif.*
  - Ec. explicita: como $t = x/v_{x0} \Rightarrow y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{g}{2v_{x0}^2}x^2$, *Tma Fermat Max* $\frac{\partial y}{\partial x} = 0 = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} - \frac{g}{v_{x0}^2}x$
  - Sol.: $\begin{cases} x_{max} = \frac{v_{y0}v_{x0}}{g} = \frac{v^2 sen(\theta)cos(\theta)}{g} \\ y_{max} = \frac{v^2 sen^2(\theta)}{2g} \end{cases}$ y define una P. seguridad (*Envolvente*)

  L. Kepler (*U3LGeom*): considerando tierra puntual (fuerza hacia centro, no hacia eje-x) y bastante veloc. puede describir una elipse *Conica*, como se mueven los planetas. La 3ª: $T^2 \propto a^2$ (periodo y radio mayor). Ver *Epicicl.*

- *C. Variaciones* : buscar F. *Optim.* sobre un Espacio Funcional (ver *Anal. Funcional*). Similar a *Progr. Dinam.* (*Viterbi*) y *Geodesica*. Ej. Ec. Euler-Lagrange Fig. 12.1: se llama lagrangiano $L[q(t), \dot{q}(t)] = T - V$ donde T, V son las energías cinéticas y potenciales y $q(t), \dot{q}(t)$ las *Coord. General.* y Coord. velocidades (*Coord. Curvil.*) de un sistema en el t que forman el Esp. Config. Ampliado (ECA) [4]. Estas dos coord. originó el *Determ. Laplac.* (*Exp. Aleatorio*, *Pred. Ceres*). Se usan en brazo *Robot.* La **Accion** es $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ y ocurre que la forma en que se mueve el objeto (dada por $q(t)$) es la que hace

[3] derivando obtenemos la actividad radioactiva o partículas emitiendose en un instante dado: $A(t) = \frac{dN(t)}{dt} = A_0 e^{-\lambda t}$

[4] El ECA tiene dimensión 2N, es una *Var. Dif.* y se construye mediante un fibrado tangente. El espacio de fases es: posiciones (q_i y momentos conjugados $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ de un conj. partículas y también tiene dimensión par

la acción mínima, resolver la siguiente *Ec. Dif.*: $\text{argmin}_{q(t)} S \iff \frac{\partial}{\partial t}(\frac{dL}{dq(t)}) = \frac{dL}{dq(t)}$. S es un Op. Funcional (función integral cuya entrada/salida son funciones,*Op. Lin.*). Ej: *Braquistocrona Catenaria Medida Central*

- *Circ. RLC* serie Fig. 12.1: el análisis de la respuesta en modo Transitoria (no confundir con modos DC y AC *Tma Thevenin*) da *F. Transf.* de un sist. de 2º orden [5] del que se puede obtener el sobredisparo.

  - Controlador *PID* : se coloca antes de la planta para hacer la *F. Transf.* en lazo cerrado (*Teor. Control*) más estable, Fig. 12.1 [6]. Permite reducir el sobredisparo, pero a costa de aumentar el tiempo de repuesta (*Compromiso*). Ej: para controlar la velocidad de un coche, la Tª, o dirección de movimiento en función del ángulo para que no caiga una barra.
  - *Teor. Control* : una *F. Transf.* en lazo cerrado $T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ (Fig. 12.1) es estable (de suma finita) si su respuesta al impulso cae a 0 con el tiempo $\iff$ los polos (y ceros??) estén en circunf. unidad/semiplano C izdo para digital/analógico (*Serie Pot.* Geom.). El Tma Routh-Hurwitz nos dice en que semiplano $\mathbb{C}$ están los polos y el Lugar de las Raices el *Locus* de los polos al variar ganancia k de $G(s)H(s) = k\frac{(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)\ldots(s+p_p)}$ (normalmente de un *PID*). Sustituyendo en F. Transf. $s = e^{jw}$ se obtiene Bode. Para *Filtro FIR* o *Rel. Recurr.* (Sist. Dinam.). IDEA para suma de *Hip. Riemann VIII*.

  CONCLUSIÓN: la transf. de *Laplace* (modo tansitorio) y *Fasor.* (modo AC) nos permiten obtener la *F. Transf.* (con significado $s =$ laplac. o fasor.) y pasar el Análisis de la complicada *Ec. Dif.* a una sencilla *Ec. Alg.* (*Teor. Unif.*)

- (*) *Ec. Difus.* (del Calor [*Fourier*]): *Ec. Dif.* en der. parciales (de la Tª u y difusividad térmica α) $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\nabla^2 u$, sol. 1D $u(x,t) = DFT$ (ver *Retardo Difus. Innov.* y similar a Ec. de Schrödinger de la *Cuantica* con su *Laplaciano*). Ojo, no confundirla con la Ec. de D'Alembert (de una onda u desplanzandose con velocidad v) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\nabla^2 u$, sol. 1D $u(x,t) = A\cos 2\pi(ft - kx)$ (Fig. 12.1).

12.5 Química y Biología: velocidad de reacción (dA/dt=kA2), función logística (analógico, exp.-lin-log, NN, Malthusianismo)

- *Veloc. Reacc.* : de una sustancia depende de su concentración y otras (catalizadores) *Ec. Dif.*: $\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n[B]^m$

  Ej: $-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2 \Rightarrow \int_{[A]_0}^{[A]} -\frac{d[A]}{dt} = \int_0^t dt \iff \frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$. (hipérbola equilátera??)

- *F. Logistica* [Verhulst1938] Fig. 12.1: clásica $f(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$ es solución de la *Ec. Dif.* de Bernoulli $\frac{d}{dt}f(t) = f(t)(1-f(t))$ (analógica de *Apl. Logist.*) de las pocas diferenciales

[5] Teniendo en cuenta las ec. de Kirchov de malla sale una *Ec. Dif.* resoluble y analizable en frec. con *Laplace*
[6] da la señal a aplicar sobre el sistema en función del error (Proporcional al, Pasado del, y Futuro del error)

no lineales con solución. $f(t)$ crece expon, lin. y log. Usada en NN (*Aprend. Autom.*, *Regr. Logistica*), *Mod. Epidem.* y Verhulst *Malthusianismo*:.

- Verhulst se inspiró en el *Malthusianismo* $\frac{dP}{dt} = rP(1-\frac{P}{P_{max}}) \iff P(t) = \frac{P_{max}}{1+ke^{-rt}}$. Donde r: ratio max de crecimiento, $P_{max} = K = \lim_{t\to\infty} P(t)$: población max que el ambiente puede soportar. Viendo 1ª ec, si $P\downarrow$ crece como r, si $P\uparrow$ mueren y no crece:
- Según la selección r/k [OWilson1970] hay dos tipos de especies: 1) Las $r\uparrow$ (insectos): alta descendencia, mueren muchos, predomina en entornos cambiantes. Son "oportunistas". 2) Las $k = P_{max}$ (hombres, elefantes): lo contrario, viven entorno a P_{max}, mueren pocos, son fuertes competidores. Son "equilibristas"

12.6 Economía, Psicología y Sociología: oferta-demanda (equilibrio), Weber (máximo suave, dB, JND, ley mu, oscilación térmica, coeficiente de variación), epidemia (rumor, innovación, f. logística)

- Ley de *Oferta Demanda U2GPlano*: la variable independiente, el precio, en este caso ¡se pone en eje vertical!. Supone que la O y la D son variables independientes entre si (aunque no es siempre cierto) y que estas solo dependen del Precio (P)

  Existe un *Compromiso*

  - Si precio $P\uparrow\Rightarrow$ cantidad demandada del producto $Q_d\downarrow$.
  - Si precio $P\uparrow\Rightarrow$ aparecen más vendedores y oferta del producto $Q_o\uparrow$.

  Equilibrio en corte de curvas.

- *L. Weber* y Fechner = ¡*Coef. Var.*!:

  Sea P la magnitud de un estimulo (sonido, Tª, peso-mano). El cambio en percepción de P no solo depende del cambio en estímulo dS si no también del estímulo actual S, *Ec. Dif.*: $dP = kdS/S \iff P = klnS + c \iff 0 = klnS_0 + c \iff P = kln(S/S_0)$ donde S_0 es min. estímulo percibido. Esto equivale al *Max Suave* y explica intensidad en dB, Efecto de Enmascaramiento de CASA, JND en *Tono* o *Cuantiz.* Ej: *Ley Mu* para compresión de voz u **Oscil. Termic.** (relativa, no abs)

- *Mod. Epidem.* Rumor o Novedad artística (*Retardo Difus. Innov.*, *Ec. Difus.*): sobre población finita lo hace como *F. Logistica*, primero rápido y cuando muchos conecen lento. La inmunidad de grupo o rebaño para el Covid19 es 60%:

  El R_0, nº de reproducción básica, dice a cuantas personas infecta una sola persona: Sarampion=15, Covid19=3.3, Gripe=1.3. Un virus se vuelve endémico cuando el producto de R_0 con el porcentaje actual de susceptibles $S = 1-R$ (1 menos los recobrados que suponemos ya son inmunes) es menor o igual que 1 (no crece exponen-

cialmente en cada iteración): $R_0(1-p) \leq 1 \iff p_c = 1 - 1/R_0 = 1 - 1/3.3 = 0.60$

Otros son:

- Mod. SIR: tres *Ec. Dif.*s respecto al tiempo: S(t) individuos supcestibles, I(t) infectados, R(t) recobrados [ElPaisMatemCoronavirus][DerivandoMatematicasEpidemias]. La inmunidad de grupo debe ser alta para que los vacunados protejan a los que por edad, salud no pueden vacunarse. El confinamiento funciona porque disminuye la probabilidad de contagio.
- Mod. *Serie Temporal*: [CremadesConfidencial] basándose en esto predecía el 30 de Abril que para el 8 de Mayo habrá 50 muertes diarias. Dice que en el covid no sirve el SIR eso del "contagio exponencial" (cuantos mas contagios haya mas contagiarán a los demás), ya que los confinados y asintomáticos distorsionan el modelo. Mezcla modelo robusto (a grandes rangos, telescopio) con modelo concreto (detalles, microscopio). Su modelo "no es exponencial" si no que se parece más a una Normal.
- Mod. *Interpol.*: para predecir.

12.7 (*) Ecuaciones diferenciales

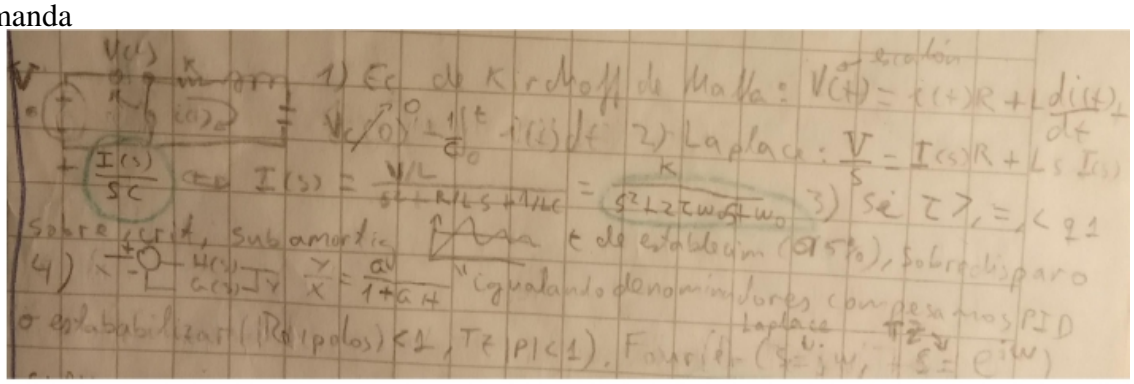
- *Ec. Dif.* Lineal Coef. Cte [Wiki]: $y(x)^{(n} + c_1 y(x)^{(n-1} + ... + c_n y(x) = b(x)$ o en forma de *Op. Lin.* (*Hermit.*, *Apl. Lin.*) $L[y(x)] = b(x)$ t.q. si y_1, y_2 sol. $\Rightarrow L[k_1 y_1 + k_2 y_2] = k_1 L[y_1] + k_2 L[y_2]$ es sol. i.e. las sol. son *Ej. de EVs* Sol. gen.=sol. part.+sol. *Ec. Homog.* i.e. $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.
  - $y_h(x)$: *Pol. Caract.* (*Diagon.*, *Rec. Lineal*) $P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = \prod_{k=1}^{n}(s - \lambda_k) = 0$, cuyas ra. λ_k sin son $\mathbb{R}$ y diferentes $\Rightarrow y_h(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}$, si son $\mathbb{C}$ y repetidas es similar a *Rec. Lineal*.
  - $y_p(x)$: Método de las Conjeturas Razonables, si p.e. $b(x) = x \Rightarrow y_p(x) = Ax + B$, si $b(x) = cos(2x) \Rightarrow y_p(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$ donde A, B salen de resolver $L[y_p(x)] = b(x)$.
  - $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} + y_p(x)$ donde los C_k se obtienen de las n **Condic. Iniciales** o Contorno (Probl. *Bien Def.*)
- *Ec. Dif.* Lin. Coef. Cte en ambos miembros [Olmedo]: $L_A[I(t)] = L_B[O(t)]$ donde $I/O(t)$ son el Input/Output temporal de un Sist. Lin. y que descomponemos con *Fourier*, luego basta analizar el caso $I(t) = I_0 cos(wt + \alpha)$ y $O(t) = O_0 cos(wt + \delta)$
  - Formalismo *Fasor.* : si definimos los fasores $I_f(t) = I_0(cos(wt + \alpha) + jsen(wt + \alpha) = I_0 e^{j\alpha} e^{jwt} = Ie^{jwt}$ y $O_f(t) = Oe^{jwt}$, volvemos al origen tomando parte real (*Filos. Groth. Creer en Ficciones*)
  - Derivada de exp fácil: $L_A[Ie^{jwt}] = L_B[Oe^{jwt}] \iff I(a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{jwt} + ... + a_0) = O(b_m \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{jwt} + ... + b_0) \iff Ie^{jwt}(a_n (jw)^n + ... + a_0) = Oe^{jwt}(b_m (jw)^m + ... + b_0) \iff I(a_n s^n + .. + a_0) = O(b_m s^m + ... + b_0) \iff O = \frac{b_m s^m + ... + b_0}{a_n s^n + ... + a_0} I = FT(s) I$ (*F. Transf.*)
  - Sol.: I, $FT(s)$ y por lo tanto O son nº $\mathbb{C}$ (para w, a_n, b_m fijos) la salida buscada es $O(t) = Re(Oe^{jwt}) = O_0 cos(wt + \delta)$

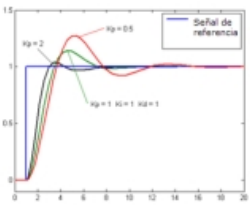
- *Laplace* : $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ convierte Ec. Dif. en *Ec. Alg.* $\mathbb{C}$ (*Teor. Unif.* Anal.+Alg.). Además permite analizar en frecuencia *Fourier* la *F. Transf.* $s = e^{jw}$. Similar a *FGM* (Prob.)

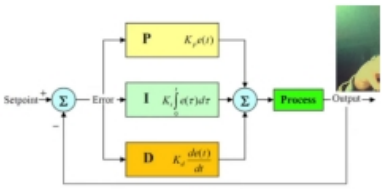
- Ej: *F. Euler*, *Par. Seguridad*, *L. Weber*, *Ec. Difus.*, *C. Variaciones*, *Veloc. Reacc.*, *F. Logistica*, *Primit.*, *Anal. Funcional*, *Anal. Vect.*, *Int. Monte Carlo*

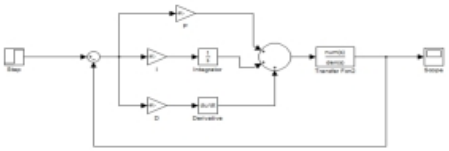
- *Dif. Finitas* : para resolverlas con *Anal. Num.*. Ver *Dif.*, *Dif. Suces.*, *Dif. Divididas*

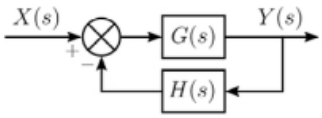
Figura 12.1: Braquistocrona. Parábola de seguridad. Circuito RLC. F. logística. Oferta y demanda

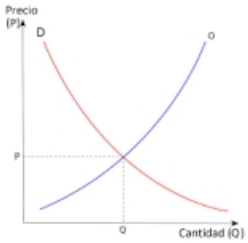


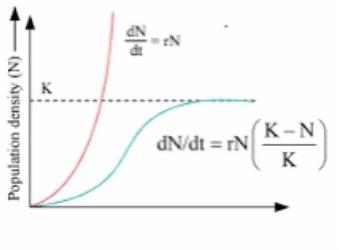


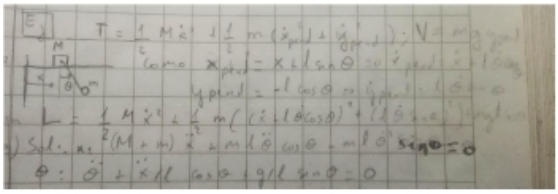


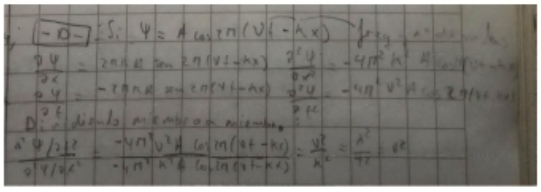


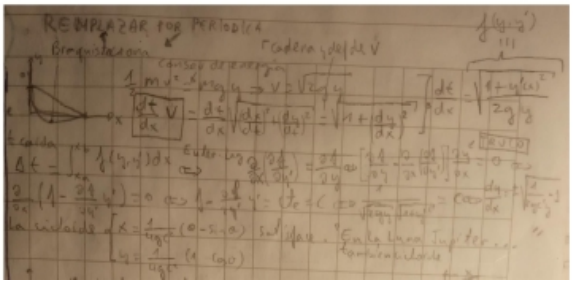












Chapter 13

T46. Distintas coordenadas para describir el plano o el espacio. Ecuaciones de curvas y superficies

13.1 Introducción: posicionar en la tierra, robótica, mapa de contacto, micrófono. Geometría analítica

- Ej-motivador: ¿que ventajas ofrecen las coordenadas esféricas respecto a las cartesianas a la hora de comparar posiciones en la tierra? ¿como saber las coordenadas de la mano de un brazo *Robot.* en el lugar deseado desde sus ángulos internos? ¿como pasar del *Mapa Contact.* 2D a PDB 3D? ¿como describir la respuesta en frecuencia 3D de un micrófono? (*Cardiode*)

- *Geom. Anal.* : la gran idea de Descartes fué usar *Sist. Coord.* para posicionar unívocamente al mundo. Junto con las dos *Coord. General.* dio lugar al *Determ. Laplac.* (formular problemas geométricos de forma numérica).

- Descartes, Euler (afín), Lagrange (CC Generales), Klein (*Pr. Erlangen* euclidea, afín y proyectiva), Levi-Civita.

- Importancia-histórica: (*U2GPlano*), *Coord. Curvil.*, *Coord. General.*, *Anal. Vect.*

13.2 Equipolencia (libre). Esp afín y euclideo. Sistema de coordenadas (origen, base, eje o linea y punto de coordenadas). Cambio de base. Base ortonormal (cuadrantes). Transformaciones rígidas

- *Rel. Equipol.* [Bellavitis1800]: es una *Rel. Equiv.* entre los vect. de un *EV*. Hay tres tipos: libres (paralelos,v,a,momento), deslizantes (misma recta, Fuerzas, v. angular), ligados(mismo pto, *Campo Vect.*)

- Esp. *Afin* : es la terna (E,V,Φ) donde E conj. de ptos $A = (A_x,A_y,A_z)$, V conj. de vect. libres de un *EV* (*Rel. Equipol.*) $\vec{v} = (v_x,\vec{v_y},v_z)$ y Φ la *Aplicacion* 2ptos-1vector:

Φ: $ExE \to V$ llamando a A y B los puntos $(A_x,A_y,A_z),(B_x,B_y,B_z) \mapsto (B_x-A_x,B_y-A_y,B_z-A_z)$
Origen y Extremo del vector $\vec{AB}$ que equivale a la *Transf. Afin* $B = A+\vec{AB}$ (y creo que a *Rel. SubEV*). Ej: *Esp. Eucl.* según *Pr. Erlangen*. [1] Ver *Transf. Afin*, *Indep. Afin*, *SubEV Afin*, *Fract.*

- Plano/ *Esp. Eucl.* $\mathbb{E}^n$: Esp. *Afin* de dim. finita sobre $\mathbb{R}$ y con *Prod. Esc.* (que induce una Normal, podemos medir distancias con *Forma Cuadr.*). Tiene otras muchas def. equivalentes que cumplen los axiomas de Eucl. *V Postulado* (*Pr. Erlangen*, sint. vs anal.) como: 1) *Esp. Hilbert* de dim. finita con PE ordinario [2]

- *Sist. Coord.* (Matem.) de Refer. (Física) Cartesiano (SR): es la *Tupla* $(O,B=\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\})$ donde O el punto Origen, B el conj. de vect. de la *Base*. Las recta $OX=\{O+\lambda\hat{x}\}$ es el Eje Abcisa y similarmente Eje Ordenadas OY y Eje Altura OZ (son sus *Lin. Coord.*). Las *Coord.* de un punto $P(x,y,z)$ son por def. el la tupla de coef. de expresarlo en dicho SR: $\vec{OP} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$.

- *Cambio Base* (SR a SR'): por simplicidad en 2D Fig. 13.1: $\binom{x}{y} = \binom{x_{O'}}{y_{O'}} + \begin{pmatrix} x_{\hat{x}'} & x_{\hat{y}'} \\ y_{\hat{x}'} & y_{\hat{y}'} \end{pmatrix}\binom{x'}{y'}$ donde p.e. $\binom{x_{O'}}{y_{O'}}$ son las coordenadas x, y del pto O' en SR (no en SR'). Ver *Epicicl.*. Sin desplazamiento da *Automorf.*.

  SR Ortonormal: si la Norma $||\hat{x}|| = ||\hat{y}|| = ||\hat{z}|| = 1$ y el Prod. Escalar (PE) $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = 1$. Podemos hablar de ejes $\perp$, 1º, 2º ...cuadrante, igual dist. de origen.

  Transf. Rigid.: *Apl. Lin.* de Giros=*M. Ortog.* y Trasl. Usado en *Robot.*

13.3 Coordenadas: en plano (polares) y en espacio (cilíndricas y esféricas). Son CCO

- Coord. Polares (plano): $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = artg(y/x)$ (anticlock). Ej: Polares en $\mathbb{C}$.

- Coord. Cilíndricas (espacio) Fig. 13.1: útil en superf. de revolución y cilíndricas.

- Coord. Esféricas (espacio): útil en superf. con centro de simetría. Ver *Esf. Riemann*

  Usar paso *Cartes. Param.*, Todas son *Coord. Curvil.* Ortog. (CCO).

[1] NOTA1: un Plano Afín es Geom. *Incidenc.*, carece de axiomas de congruencias [puedo decir si 2 vect son ∥ (si sus coord proporcionales, *Rel. Equiv.*) pero no medir distancias o ángulos (pues no posee *Prod. Esc.*), no es un *Esp. Hilbert*.] NOTA2: un Plano Afín Finito forma una k-red, [códigos geométricos q-arios con recubrimientos].

[2] 2) *Esp. Metrico* con norma de PE. 3) *Var. Riemann* o *Esp. Topol.* con la métrica euclídea $|\vec{v}| = \sqrt{\sum_i v_i^2}$.

13.4 Curvas en plano. Curvas Algebraica: cónicas, astroide, elípticas, folium, ampersan, ciertos epicicl. y lemniscatas. Epicicloides: cardiode (engranaje, Mandelbrot), braquistocrona (paramétricas). Espiral áurea (romanesco,nautilus). Tactriz (pseudoesfera).

Simetría: hablar sobre ella, par (como $y = x^2$) o impar (como $y = x^3$). Muchas son par e impar a la vez como *Conica*s o Lemniscatas centradas.

- *Curva Alg. Afin*:
  - *Conica*: $r = \frac{l}{1-ecos(\theta)}$
  - *Astroide*
  - *Curva Eliptica*
  - **Folium Descartes** (pulpo, ver TProblemas). **Curva Ampersand** $(x^2 - y^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(x^2 + y^2 - 2x)^2$ (ec. cuártica).
  - Ciertos *Epicicl.* (cuando $r_1/r_2 \in \mathbb{Q}$) y Ciertas Lemniscatas.
- *Epicicl.* (E) y F. Radial (R, si $f(x,y) = g(r)$ como *Conica*):
  - (E) *Braquistocrona* o Cicloide (reflectante bici) Fig. 13.1: ec. parametricas: al no resbalar $OO' = r\theta \Rightarrow \binom{x}{y} = \binom{r\theta}{r} + \binom{r\sin\theta}{r\cos\theta}$. Su ec. cartesiana es complicada $y = f(x, arcos(x))$. Sol. de *C. Variaciones*
  - (E y R) *Cardiode* Fig. 13.1: $r = a(1 + cos(\theta)$ tipo engranaje $\mathbb{Z}$ (es radial). Aparece en *Caustica* (*Envolvente*), *Conj. Mandelbrot*.
  - (R) Lemniscata: Fig. 13.1: $r = \sqrt{asen(2\theta)}$ tipo de **Óvalo** (curva dos veces diferenciable).
- *Espiral Aurea* (Fig. 13.1): es un caso de Esp. Log. $r = ae^{b\theta}$ con $b = Phi$. La de *Fibonacci* (que se construye pegando cuadrados de lados $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, ..$) es una aproximación. Aparece en *Apl. Fract.* romanesco, nautilus y galaxias. Se diferencian de la *Espiral Arquimedes* en que sus brazos crecen en *Pr. Geom.*
- Otras:
  - Tactriz: *Pseudoesfera*
  - *Catenaria* : $y = acosh\frac{x}{a}$, parece una parábola pero no lo es (coseno hiperbólico). Sol. de *C. Variaciones*

13.5 Curvas en espacio: circunferencia, hélice (fórmulas Frenet-Serret) y hélice espiral

- Clásicas Fig. 13.1: *Helice* $\begin{cases} x = rcos\alpha \\ y = rsen\alpha \\ z = k\alpha \end{cases}$, Hélice-Espiral $\begin{cases} x = \alpha rcos\alpha \\ y = \alpha rsen\alpha \\ z = k\alpha^2 \end{cases}$. *Form. Frenet-Serret*

13.6 Superficies en espacio: plano, cono, cilindro y esfera. Cuádricas (revolución y reglada): elipsoide, paraboloide, hiperboloide

- Clásicas Fig. 13.1: plano, cono (o *Sup. Conica*), cilindro y esfera
- *Cuadrica* : generalización de *Conica* (*Conica Projec.*). Es una *Hipersuperf.* def. por una *Ec. Pol.* cuadrática (*Var. Alg.*), en 3D es: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$ (10 términos). Definibles como *Locus*. No confundir con *Ent. Cuadr.*. Nos centramos en C. de Revolución (analizables en cartesianas con cortes de planos) y con *Sup. Reglada* (algunas lo son). Ej:
  - *Elipsoide* de Rev. (Fig. 13.1): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ a) los cortes $z=k$ (paralelos a $z=0$) dan curvas elipses y 2) los cortes $y=k$ dan circunf. *Locus* de ptos con dist. cte a dos focos. Ver *PCA*
  - *Paraboloide* (Fig. 13.1): $z=x^2+y^2$ a) $y=0\Rightarrow z=x^2$ (parábola) y b) cortes $z=k$ son circunf. Ver *Calc. Vol.*. El P. Hiperbólico $z=x^2-y^2$ (no confundirlo con *Hiperboloide*) es la silla de montar *Pto Silla*. Otra es la *Antena Parab.*
  - *Hiperboloide* de Rev. (torre Kobe, Fig. 16.1): Ec. de *Sup. Reglada* o $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

13.7 Coordenadas curvilineas ortogonales (linea coordenada), factor de escala (tensor métrico). Elementos diferenciales para integrales de medida, análisis vectorial y geometría riemanniana

- *Coord. Curvil.* (CC) [WikiAtlas]: una carta o atlas (Fig. 13.1) sobre una *Var. Riemann.* $\vec{r}=(x,y,z)=(f_x(q_1,q_2,q_3),f_y(q_1,q_2,q_3),f_z(q_1,q_2,q_3))$. Ej: *Coord. General.*, *Dipolo*
- *Coord. Curvil.* Ortog. ($CCO\subset CC$): (q_1,q_2,q_3). En cada pto podemos encontrar una vecindad localmente euclídea (*Var. Riemann*) i.e. en cada pto sus *Lin. Coord.* (=eje coord.) se cortan $\perp$. Lineas coordenadas se dejan todas fijas menos una que se mueve: $\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ (tg a la linea). Ej: cartes, cilindr, esfer..
- *Fact. Esc.* h_i: proporción entre la variación de una coordenada dq_i y la distancia euclidea recorrida ds_i (*Dif.* Linea) a lo largo de dicha linea coordenada: $ds_i=h_idq_i$. Son las normalizaciones aplicadas las tg $\vec{e}_i$ para obtener una base ortonormal en cada pto: $\hat{e}_i=\frac{\vec{e}_i}{||\vec{e}_i||}=\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}}{h_i}$. Ej: En cilíndricas $\vec{r}=\rho\cos\theta\hat{x}+\rho\sin\theta\hat{y}+z\hat{z}$; $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta\hat{x}+\rho\cos\theta\hat{y}+0\hat{z}\Rightarrow h_\theta=\rho$.

	h1	h2	h3
Cartesianas	1	1	1
Cilindricas	1	ρ	1
Esféricas	1	r	$r\sin\theta$

Los h_i cacterizan al *Tensor Metrico* $g_{i,j}$ y en CCO es diagonal $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$

- Elementos *Dif.* para CCO en 3D:
  - Dif. de Linea (es vec.): $d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$. La notación para el *Dif.* de longitud $ds = ||d\vec{r}||$ se suele usa para *Long. Arco* y *Anal. Vect.* (no confundirla con superf.).
  - Dif. de Superficie (es vec.): $d\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ donde $d\vec{S}_k = dr_i dr_j \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = h_i h_j dq_i dq_j \hat{e}_k$ (e_k se mantiene cte)
  - Dif. de Volumen (es esc.): $d\vec{V} = dr_1 dr_2 dr_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

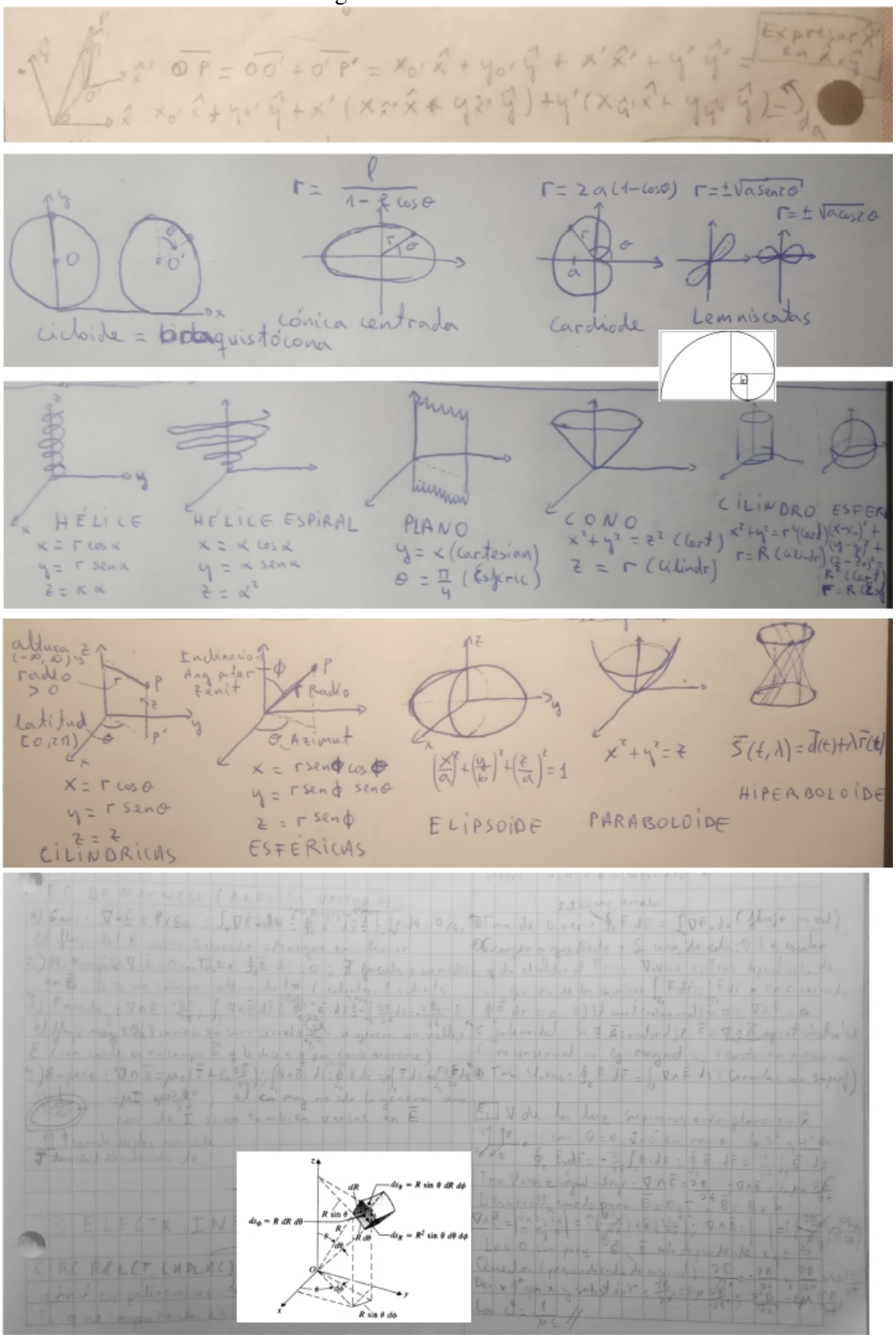
Permiten hacer *Int. Def.* de linea, superficie y volumen para *Anal. Vect.* (*Campo Esc.* o *Campo Vect.* expresados en CCO) y *Geom. Riemann* (*Long. Arco*) (ver RESUMENES):

13.8 Más aplicaciones: heurística de simetría. Robótica (epiciclos, cambios de base). Dipolo (r»d). Armónicos esféricos: Cuántica (orbitales), beamforming (cardiode). Coordenadas homogéneas.

Heurist.: usar el tipo de coordenadas según simetrías del problema.

- *Robot.* : *Coord. General.*, Comp. de Mov. (*Epicicl.*) y *Transf. Rigid.* (Giros con *M. Ortog.*, Ángulos Euler.), *Cambio Base*, *Vision 3D*, *PID*, *Interpol.* de trayect.
- *Dipolo* ($r >> d$)
- *Armon. Esf.* : 1) sol. de *Ec. Dif.* expresada en Coord. Esf. (orbitáles de *Tabla Period.*). 2) *Direc. Llegada* (Direction Of Arrival, DOA, *Anal. Cvx*, *Probl. Inv.*) o Beamforming de Hannes o Respuesta en frecuencia de un altavoz o micrófono: para una frecuencia dada dibuja un *Cardiode* 3D
- *Coord. Homog.*: para *Proyec.* y *Transf. Afin* matricialmente.

Figura 13.1: Coordenadas



Chapter 14

T47. Generación de curvas como envolventes.

14.1 Introducción: parábola de seguridad, arcoiris y cardiode. Cáustica. AM y transformada de Hilbert (no).

- Ej-motivador: ¿que tienen en común la *Par. Seguridad* (Fig. 14.1), el arcoiris y el *Cardiode*? (sol. *Envolvente*). No confundir AM o Transf. Hilbert
- *Caustica* : envolvente de una familia de rayos. El *Cardiode* aparece cuando el foco rayos está sobre la circunferencia. Fig. 14.1. Ej: arcoiris. superficie del agua.

  Tiene otros significados [1]
- Leibniz circ. osculador. Fermat cáusticas (quemante)=envolvente de rayos de luz reflejados-*Form. Frenet-Serret* curvatura de linea.
- Importancia-histórica: *Curvatura Envolvente Espiral Arquimedes Hilorama*

14.2 Orden de contacto, circulo/plano osculador (circunferencia=0, derivadas 1º y 2º) y curvatura (acel. centrip., tensor, C2)

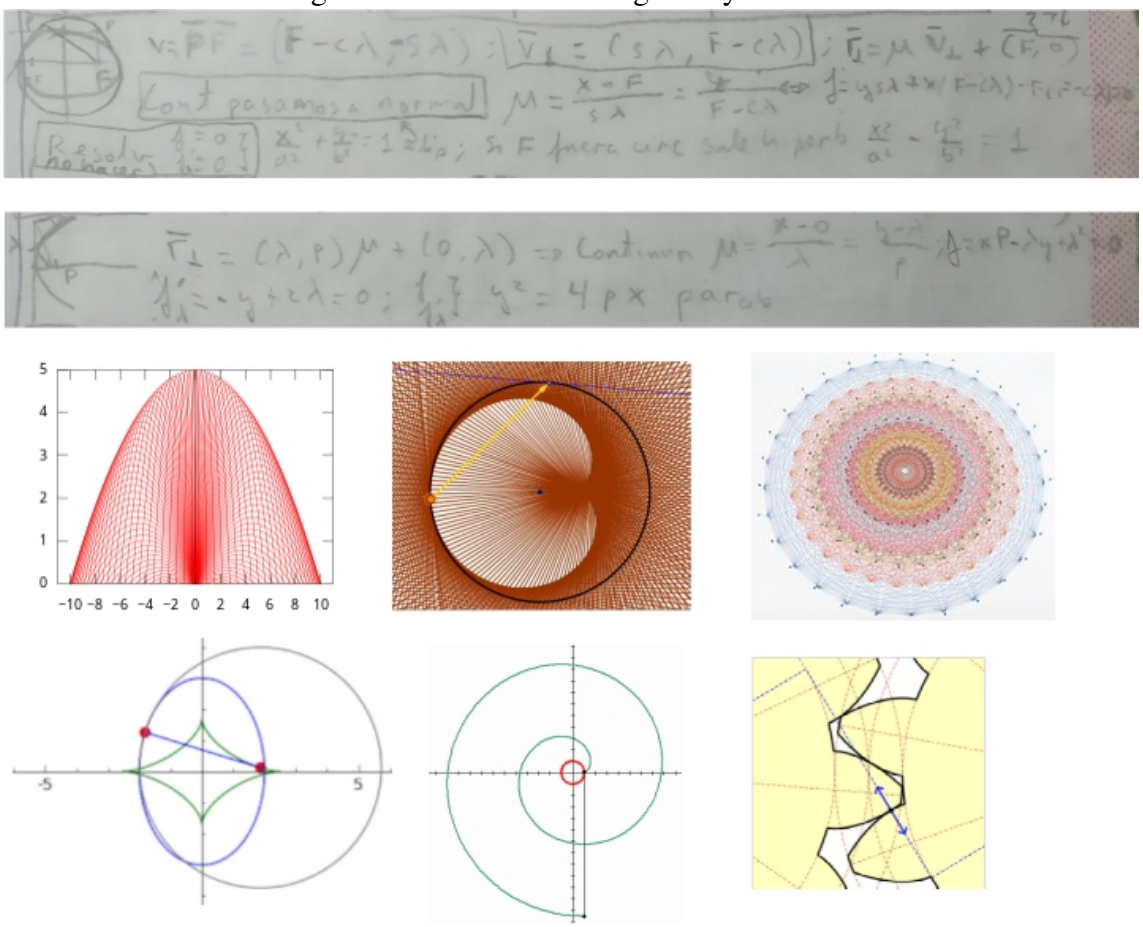
- Contacto de Orden k: en un punto entre dos funciones si coinciden todas sus k-derivadas. En el entorno difieren el Error de *Taylor*: $e(x) = |f^{(k+1}(x) - g^{(k+1}(x)| \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$
- *Circ. Oscul.* (que besa): en *Geom. Dif.* de Curvas *Clase* $C2$ permite definir *Plano Oscul.* y *Geodesica*:

  Sea una curva explicita $y(x)$ (Curva *Param.*) de *Clase* $C2$ y el pto de la curva y de cto $(x_0, y_0 = y(x_0)) \Rightarrow$ la circunf. es $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$

  1. Condición de cto: $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 a - 2y_0 b + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

[1] como a) sustancia que quema y b) persona con ironía malintencionada.

Figura 14.1: Parábola de seguriad y cáustica



2. Cond. 1ª derivada $\frac{\partial}{\partial x_0}$: $2x_0 + 2y_0'y_0 - 2a - 2by_0' = 0$
3. Cond. 2ª derivada $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$: $2 + 2y_0''y_0 + 2(y_0')^2 - 2by_0'' = 0$

Del (3.) $b = y_0 + \frac{1+(y_0')^2}{y_0''}$. Del (2.) $a = x_0 - y_0'\frac{1+(y_0')^2}{y_0'}$. Del (1.) $R^2 = (\frac{-y_0'(1+(y_0')^2)}{y_0''})^2 + (\frac{1+(y_0')^2}{y_0''})^2 = \frac{(1+(y_0')^2)((y_0')^2+1)}{(y_0'')^2} = \frac{(1+(y_0')^2)^3}{(y_0'')^2}$

- *Curvatura* : en y_0 es $k = \frac{1}{R}$ (R del circ. osculador). Para definir *Aceler.* Centrípeta, *Form. Frenet-Serret*, *Tensor Curvat.* de *Rel. General*..., en *Geom. Dif.* necesitamos *Clase* $C2$.

14.3 Envolvente de una familia de curvas: sistema f=0, f'=0

- *Envolvente* de una familia de curvas (haz): curva cuyos puntos son tangentes con un punto de las curvas de la familia. Podemos extenderlo a *Var. Dif.* mayores (envolvente de superficies, etc..). Es necesario (pero no suficiente, *Impl.*, ver abajo ej. de círcunf.) que las curvas sean *Suav.* C^1 para tener envolvente.
- Para familia definida paramétricamente se obtiene resolviendo el sistema: $\begin{cases} f(x,y,\lambda)=0 \\ f'(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$ donde $f'_\lambda(x,y,\lambda) = \frac{\partial f(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}$. Veamos porqué la derivada debe valer 0:

El pto de intersec. (x,y) de dos curvas (dadas por los parámetros $\lambda + d\lambda$ y λ) se obtiene resolviendo el sist. ec. $\begin{cases} f(x,y,\lambda+d\lambda) = f(x,y,\lambda) \\ f(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$ o equivalentemente $\begin{cases} \frac{f(x,y,\lambda)-f(x,y,\lambda+\lambda)}{d\lambda} \\ f(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$. Si consideramos que un pto de la envolvente es la intersec. de dos curvas f infinit. cercanas (dem. visual, me lo creo por la linea dif. tangente), la resol. del sist. anterior nos da los ptos de la envolvente al tomar límites. Finalmente considerando la def. de derivada obtenemos el sist. $\begin{cases} f(x,y,\lambda) = 0 \\ f'(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$

14.4 Cónicas como envolventes: circunferencia (no hay), elipse (sale del F y rebota en circunferencia), parábola (del (P,0) en ordenadas), hipérbola (triángulos con A=cte)

Conica como envolvente: usaremos paso de Ec. *Cartes. Param.*

- $\nexists$: de envolvente de un haz de circunferencias (la *Suav.* no es condición suficiente como hemos mencionado antes):

$\begin{cases} f(x,y,\lambda) : x^2+y^2-\lambda^2 = 0 \\ f'(x,y,\lambda) : 2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists$ solución.

- Circunferencia: como envolvente de haz de rectas que distan una cte al origen:

$\begin{cases} f : x\cos\lambda + y\sin\lambda - 1 = 0 \\ f' : -x\sin\lambda + y\cos\lambda = 0 \end{cases}$ Multiplicando arriba/abajo por sin/cos. $\begin{cases} xs\lambda c\lambda + ys^2\lambda - s\lambda = 0 \\ -xs\lambda c\lambda + yc^2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow y = s\lambda; x = y\frac{c\lambda}{s\lambda} = c\lambda \Rightarrow x^2+y^2 = 1$

- Elipse o Hipérbola (Fig. 14.1): como envolvente de haz de rectas que salen del foco y rebotan en circunf, i.e. $\perp \vec{FP}$. Considerando circunf en paramétricas $(P_x, P_y) = (\cos\lambda, \sin\lambda)$
- Parábola (Fig. 14.1): como envolvente de haz de rectas que salen de pto abcisa $(P,0)$ y rebotan en eje ordenadas, i.e. $\perp \vec{P\lambda}$. Considerando $v = \vec{P\lambda} = (P,0)-(0,\lambda) = (P,-\lambda) \Rightarrow v_\lambda = (\lambda, P)$
- Hipérbola: como envolvente de haz de rectas cuyos triángulos del 1er cuadrante tienen area cte:

$A = \frac{bh}{2} = cte \Rightarrow y = \frac{A}{2x}$ hipérbola equilátera

14.5 Evoluta (normales y osculador, astroide para elipse, Tma de los 4 vértices) e involuta (espiral de Arquímedes, desenrollado, engranajes de Euler)

- **Evoluta**: *Envolvente* de normales a una curva $y(x)$ o *Locus* del centro del *Circ. Oscul.*

La $r_\perp$ en (x_0,y_0) : $y-y_0=\frac{-1}{y_0'}(x-x_0)$ $\begin{cases} f: y_0'y-y_0'y_0+x-x_0=0 \\ f_{x_0}': yy_0''-(y_0'y_0+y_0')-1=0 \end{cases}$ $y=\frac{1+()}{y_0''}=y_0+\frac{1+(y_0')^2}{y_0''}$ $x=x_0+y_0'\frac{1+(y_0')^2}{y_0''}$ ¡sol. del circulo osculador!

Astroide $\begin{cases} x=k_1\cos^3\alpha \\ y=k_2\sin^3\alpha \end{cases}$ (*Curva Alg.*) es la evoluta de la elipse (Fig. 14.1). Tma 4 Vértices: dada una curva cerrada *Suav.* (como la elipse), entonces la func. *Curvatura* (la evoluta, como el astroide) tiene al menos cuatro extremos.

- Involuta o evolvente: curva cuyas normales (su envolvente) dan la original. La evoluta de la involuta es la curva original. Si no se especifica, se sobreentiende que es la involuta de la circunf. la cual es la *Espiral Arquimedes* (en polares $r=a+b\theta$, distinta de *Espiral Aurea*) desplazada a derecha (la original empieza en origen) o la curva generada por la mano al **desenrollar un hilo**. Esta involuta es la que se emplea en los lados de los dientes de los "**engranajes rectos**" o de Euler. En el punto de contacto entre dos dientes, la tangente al perfil es común a ambos dientes. (Fig. 14.1) optimizando la transmisión.

14.6 Aplicaciones: superficie desarrollable (banda de Moebius, esfericón y Tma Egregium). Esfericon (triángulo Reuleaux). Precesión de Mercurio. Levas, Reuleaux y engranajes (suavidad)

- *Sup. Reglada* : parecido a *Hilorama* (arte con hilos tensados) [2] Se genera al desplazarse una recta λr (generatriz=*Generad.*) sobre una o varias curvas d (directriz). Su ec. param.: $\vec{S}(t,\lambda)=\vec{d}(t)+\lambda\vec{r}(t)$. [3]. La propiedad de Sup. Reglada se mantiene bajo *Proyec.* luego es *Geom. Proyectiva*. Ej: ciertas *Cuadrica* (*Hiperboloide*), *Sup. Conica* y *Sup. Desarroll.* (*Banda Moebius*)
  - *Sup. Desarroll.* $\subset$ *Sup. Reglada*: *Envolvente* de una familia de planos parametrizados por un solo parámetro $\iff$ a *Var. Dif.* con *Tensor Curvat.* (de Gauss) =0 i.e. Sup. que puede ser planizada. Ej: Cono, Cilindro, *Banda Moebius* , Esfericon/*Oloide* [4]. Ej-: Esfera por *Tma Egregium* y *Hiperboloide*.
  - Podemos generalizar a familia de *Var. Dif.* [5]
- Las formas *Suav.* de *Geom. Dif.*: Ej: *Leva* (deben ser *Clase C*3) y engranajes (*Espiral Arquimedes*) Ej: Triang. Reuleaux [6]
- *Precesion Mercurio*.

[2]Ej: *Politopo-E8* : en dim. 8, es convexo y está asociado al grupo E8. Aparece en "Una teoría del todo excepcionalmente simple" Fig. 14.1. Para computación gráfica.

[3]Ej: directriz: elipse $x^2+\frac{y^2}{4}=1$; generatriz: $\vec{r}=(-1,2,1)$ ¿ec. implicita?: 1) elipse param. $(x,y,z)=(\cos t,2\sin t,0)\Rightarrow\vec{S}=(\lambda\cos t-\lambda,2\sin t+2\lambda,\lambda)$. 2) Paso ec. *Cartes.* *Param.* truco $s^2+c^2=1$: $\cos t=\frac{x+\lambda}{\lambda};\sin t=\frac{y-2\lambda}{2};z=\lambda\Rightarrow(x+z)^2+(\frac{y-2z}{2})^2=1$

[4]*Env. Cvx* de 2 anillos enlazados y rueda *Suav.* como el Triang. Reuleaux (ver)

[5]con dim-c (familia de esferas): existe una única envolvente (plano) si la dimensión de los parámetros es c (c=2, plano sobre pelotas)

[6]Ej: la pua. Partiendo de triang. equilatero, pinchar compas de vertice a vertice. Todos sus diámetros tienen la misma longitud. A parte del circulo este no se cuela por una alcantarilla. Se puede hacer un Motor o una bici

Chapter 15

T50. Introducción a las geometrías no euclideas. Geometría esférica.

15.1 Introducción: V postulado (consistencia). Jaiyyani1000. geometrías no euclídeas (según nº de paralelas)

- Ej-motivador: *V Postulado* de Euclides (*Esp. Eucl.*): en los Elementos (5 postulados y 5 nociones) dice "por un punto solo 1 ∥ a 1 recta". Se supuso falso para derivarlo de los otros 4 y se vio que era *Consist.* no daba contradicción.

- **Jayyani 1000, Al-Ándalus (primer tratado sobre geom)**. esférica. Kant (las intuye). Gauss (no se atreve). Lobachesky (hiperbólica) un poco antes que Bolya (pobretico). Riemann (elíptica y general en tesis con Gauss). Einstein (relatividad).

- Importancia-histórica: *Geom. No Eucl.*, *Geom. Riemann*, *Rel. General*, *Form. Frenet-Serret*.

- *Geom. No Eucl.* : *Sist. Formal* (*Decib. Geom. Eucl.*) geométrico que modifica alguno de los 5 postulados de Euclides. Ateniéndonos al *V Postulado* y de forma sintética (*Pr. Erlangen*), si el nº de paralelas a otra por un punto es $= 0$ o > 2 tenemos la *Geom. Esf.* o *Geom. Hiperb.*. Son casos especiales de *Geom. Riemann* (*Tensor Curvat.*). Generó *Crisis Matem.*

15.2 Geometría esférica: circunferencia mayor (geodésica), menor (mediatriz) y ángulo (espacio tangente). Tma de Pitágoras esférico (R a Inf.). Tma de Girard (exceso esférico)

- *Geom. Esf.* [Jayyani1000]: la esfera-3D (su principal modelo) es considerada un espacio en sí mismo: a) Recta (*Geodesica*): circunf. mayor (plano pasa por centro O). b) Circunf.: circunf. menor (plano no pasa por 0). Ej: mediatriz usando dos circunf. de igual radio (como en euclideas) (Fig. 15.1). c) Ángulo de 2 circunf./recta (circunf. menor/mayor) en P: el formado por $\vec{t_1}$ y $\vec{t_2} \in$. Ver Plano/ *Esp. Tang.* (Fig. 15.1)

- Tma de Pitágoras esférico [WikiPythogoreamTheorem]: $\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cdot\cos\frac{c}{R}$, ojo: hay producto ($\cdot$, no suma) y a,b,c son lados. Si $R\to\infty$ da el clásico, en efecto:

> Definiendo $A = a/R \to 0$ y usando el infinitésimo $cos(A) \approx 1-\frac{A^2}{2}$ (ver TProblemas): $1-\frac{A^2}{2} = (1-\frac{B^2}{2})(1-\frac{C^2}{2}) \iff -2A^2 = -2(B^2+C^2)+B^2C^2 \iff -2(a/R)^2 = -2((b/R)^2+(c/R)^2)+(b/R)^2(c/R)^2 \iff -2a^2 = -2(b^2+c^2)+\frac{(bc)^2}{R^2}$. Si $R\to\infty \Rightarrow a^2 = b^2+c^2$

- Tma Girard $A_T = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$: el área de un triag. esférico solo depende de sus ángulos internos (no de sus lados). No existen triangulos semejantes (igual forma, dist. medida) pues si lados crecen ángulos cambian (ver Tab.). Fig. 15.1.

  - Colorario: exceso esférico: $\sum AngTriang \in [\pi, 3\pi]$

15.3 Geometría hiperbólica: 4 modelos (pseudoesfera, disco/semipl de Klein/Poincare). Tma increible y de Pitágoras (senh). Tabla: rectas (nº/equidistancia de paralelas, cortes), trángulos (ángulos/semejanza), ángulos (opuestos congruentes)

- *Geom. Hiperb.* Hay 4 modelos (Fig. 15.1): a) *Pseudoesfera* : Tractriz de revolución (perro con fricción cte, Tma Pitag.+*Ec. Dif.* $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \Rightarrow y = f(ln(x)) = f(arcsech(x))$, hiperbólico). Cada *Pto Silla* (derivadas ortogonales pero no *Optim.* local/global porque en una dirección es min y en otra max. Ej: *Paraboloide* Hiperbólico o silla de montar). b) Disco Klein-Bertrand. c) *Disco Poincare* . d) Semiplano Poincaré.

- *Tma Increible* : la perp. a un rect. puede ser || a otra || a esa rect.

- Tma de Pitágoras hiperbólico: como el esférico pero con $\sinh(a^2)$.

- Tabla comparativa resumen:

	Euclidea	Hiperbólica	Elíptica
Nº de || a otra por un pto o *V Postulado* (¿|| equidist.?)	1 (si)	2 o ∞ (no, ver *Tma Increible*)	0 (no hay paralelas)
Nº de ptos de intersec de 2 rect.	1	1	2 (notorio)
$\sum$ ang triang, Triang semej.	180, si	<180, no (por $\nexists$ cuadril. pues si 3x90 el 4º <90)	>180, no (por Tma Girard, ver)
¿Ang. opuestos congruentes?	si	si	si

15.4 Geometría riemanniana: tensor métrico (geodésica), casos de curvatura (C2) cte y +/- (= elíptica e hiperbólica). Relatividad general (proporción G y T)

RESUMEN de *Geom. Riemann*: La *Long. Arco* de una curva *Param.* sobre una *Var. Riemann* depende del *Tensor Metrico* g: $L = \int_C ds = \int_C \sqrt{g_{i,j} x_i'(t) x_j'(t)} dt$ y la *Geodesica* entre dos puntos sale con *C. Variaciones*. El *Tensor Curvat.* R para la Geom. Eucl./ Elíptica (*Geom. Esf.*, $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$)/*Geom. Hiperb.* (*Disco Poincare*: $ds^2 = 4\frac{(dr)^2}{1-r^2} = \frac{4(dx^2+dy^2)}{1-(x^2+y^2)}$) es cte y 0/+/-, luego las *Geom. No Eucl.* son casos de la *Geom. Riemann*. La *Rel. General* dice que G y T (Tensor Masa) son proporcionales.

- *Geom. Riemann* $\subset$ *Geom. Dif.*: estudio de las *Var. Riemann* la analítica del *Pr. Erlangen*

- *Tensor Metrico* : $g_{i,j} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots & g_{1n} \\ \cdots & & \\ g_{n1} & g_{n2} \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$. Como F. $g(u,v)$ input: dos vect. del *Esp. Tang.* y output: un $\mathbb{R}$. Generaliza la noción de *Prod. Esc.* permitiendo medir localmente distancias (*Long. Arco*), ángulos y volúmenes. Varía según el pto de la *Var. Riemann* (ver *Tensor Curvat.*) Ej: en *Coord. Curvil.* Ortog. es diagonal. En *Geom. Esf.* $g_{i,j} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$. *Inform. Fisher* y *Cota CR*

- *Tensor Curvat.* : $R_{i,j}$, generalización n-dim. de las 2 *Curvaturas* Principales de Gauss k_1, k_2 para superf. 2D (*Tma Egregium*). Puede obtenerse de las derivadas 1er y 2º del *Tensor Metrico* por ello la *Suav.* y *Clase C*2. Riemman en sus tesis probó que las *Geom. No Eucl.* son casos particulares de la *Geom. Riemann*: **La *Geom. Esf.* (*Politopo Cvx*) $\subset$ Geom. Elipt. y *Geom. Hiperb.* tienen TC cte + y -**. Ver *Rel. General*.

- *Long. Arco*: fórmula mas general que la del *Anal. Vect.*: $L = \int_C ds = \int_C \sqrt{g_{i,j} x_i'(t) x_j'(t)} dt$ donde suponemos la Curva *Param.* por t y donde estoy usando la Notación Indexada (Convenio de Suma de Einstein) en el *Dif.* Long. $ds^2 = \sum_{i,j} g_{i,j} dx_i dx_j = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + \ldots + g_{33}dz^2$. Ej:

  - *Geom. Esf.* $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.
  - *Disco Poincare*: $ds^2 = 4\frac{(dr)^2}{1-r^2} = \frac{4(dx^2+dy^2)}{1-(x^2+y^2)}$ (bordes del disco la métrica es ∞)

- *Geodesica* : camino mínimo o "recta" con menor curvatura posible entre dos puntos (Fig. 15.1). Similar a *Progr. Dinam.*. Usando la fórmula de la *Long. Arco* (basada en *Tensor Metrico*, la Curva *Param.* $x_i(t)$ es un extremal sobre la Longitud (sale de resolver una *Ec. Dif.* de *C. Variaciones*) El *Plano Oscul.* de la geodésica es perpendicular en cualquier punto al plano *Esp. Tang.* la superficie. (IDEA: en *HoTT* las demostraciones son caminos mínimos).

- *Rel. General* [Einstein]: $G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$ *Tensor Metrico* (G) (o *Tensor Curvat.* (R)) es directamente proporcional Tensor Energía-Impulso (masa) (T) *Precesion Mercurio* Fig. 15.1 [Wheeler]: "El espacio le dice a la materia cómo debe moverse, y la materia le dice al espacio cómo debe curvarse". Ej. de *Filos. Groth.* al trabajar Espacio-Tiempo en un solo vector (como *Coord. Homog.*)

15.5 Geometría diferencial y de curvas. Fórmulas de Frenet-Serret (k,t)=(curvatura,torsión), hélice ((5,2) proteina, paso de tornillo) y circunferencia (5,0)

- *Geom. Dif.* : estudio de las *Var. Dif.* (no confundir con *Var. Alg.*, *Manifold*, *Hipersuperf.*). Básicamente intenta obtener *Fibr.* (*Esp. Tang.*, Normal) y *Curvatura* en cada pto. Para hacer *Anal. Vect.* (int. de lin., sup. y vol.) y *Geom. Riemann* (geodes. o long. arco cuando ds es como disco Poincaré).

- *Fibr.* :
  - *Fibr.* Vect. (Vect. Bundle): a cada pto de un *Esp. Topol.* (*Manifold* o *Var. Alg.*) le unimos un *EV* cumpliendo que su pegado forman otro Esp. Topol. Ej1: Fibr. Tang. conj. de *Esp. Tang.* cuya sección equivale a *Campo Vect.* (ej: Fig. 15.1 de dirección del agua en la tierra). Ej2: Fibr. Normal de una curva

- Plano/*Esp. Tang.* : *EV* asociado a cada pto P de una *Var. Dif.*, se obtiene con el *Gradiente*. Ver Fig. 15.1. Ej: Tg a *Conica*. Ver *Campo Vect.*, *Envolvente* (*Plano Oscul.*), *Geodesica*, (*Cuadrica*), *Fibr.* Tang.
  - Der. de Curva *Param.*: $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = \lim_{dt\to 0} \frac{\vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t)}{dt}$ (Fig. 15.1). Ej: sea mov. circular uniforme $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (rcos(wt), rsen(wt)) \Rightarrow$ su vel. $|\vec{v}| = \sqrt{(-rwsen(wt))^2 + (rwcos(wt))^2} = rw$ y el vec. *Aceler.* Normal o Centrípeta $\vec{a}(t) = -w^r\vec{r}(t)$ [1] Ej.: sea la vel. de un objeto $\vec{v}(t) = t^2 i + (3t-6)j - 2k$, entonces el vector aceleración es $v'(t) = 2ti + 3j$.
  - Tang. a *Conica* que pasa por 1 pto: Ej: 1) Ec. *Cartes. Param.*: $(x(\alpha), y(\alpha)) = (3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. 2) Vector director tangente (*Gradiente*) $\vec{v_{tg}} = (\frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}) = (-3\sin\alpha, 2\cos\alpha)$. [2] Hay más formas, incluso con determin. de ec. 2º grad. (ver Tang. a *Conica*).

- *Geom. Dif.* de Curvas: análisis de curvas *Suav.* en *Var. Riemann* (comúnmente el *Esp. Eucl.*). Ej: Curva *Param.*, Proteina, *Geodesica*, *Long. Arco*,... No confundir con *Curva Alg.* que pueden ser $\mathbb{C}$

- Triedro Frenet-Serret (Fig. 15.1): 3 vectores ortogonales en un cada pto de la curva: T tangente Plano *Esp. Tang.*, N normal *Plano Oscul.* [3] y $B = N \wedge B$ binormal en dirección eje de revolución.

- *Form. Frenet-Serret* : $\begin{cases} dB/ds = -\tau N & \text{vect perpend a } B \text{ es } N \\ dT/ds = \kappa N & \text{torsión cambio en dirección movimiento} \\ dN/ds = -\kappa T + \tau B & \text{torsión cambio respecto a plano movim} \end{cases}$, donde τ torsión (cambio respecto al plano de movim) y κ *Curvatura* (cambio en dirección movimiento) de Curva *Param.*., *Aceler.* y *Curvatura*. Ej:

[1] si además w cambia aparece la *Aceler.* tangencial, ambas son las componentes intrínsecas de la acel. r es la *Curvatura* y puede variar

[2]

1. Recta continua (*Esp. Tang.*): $\frac{x-3\cos\alpha}{-3\sin\alpha} = \frac{y-2\sin\alpha}{2\cos\alpha}$
2. Sacar α de obligar a pasar por $P(3,4)$: $\frac{3-3\cos\alpha}{-3\sin\alpha} = \frac{4-2\sin\alpha}{2\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = 4/5, \cos\alpha = 3/5$ (repasar este resultado)
3. Obtener ec. $y = \frac{1/2}{(}x-3)+4$ (este es correcto pg. 235)
4. Otras: tang. en circunf. *Trigon.*

[3] plano que contiene al *Circ. Oscul.* de una curva (o *Var. Dif.*) y que es *Generad.* por T y N. (ver *Esp. Tang.* en *Geodesica*)

- *Helice* : $\kappa = 0.5, \tau = 2.5$ (alfa de proteinas, paso de un tornillo, *Sup. Riemann*). Fig. 15.1.
- Circunferencia: $\kappa = 1/R, \tau = 0$.

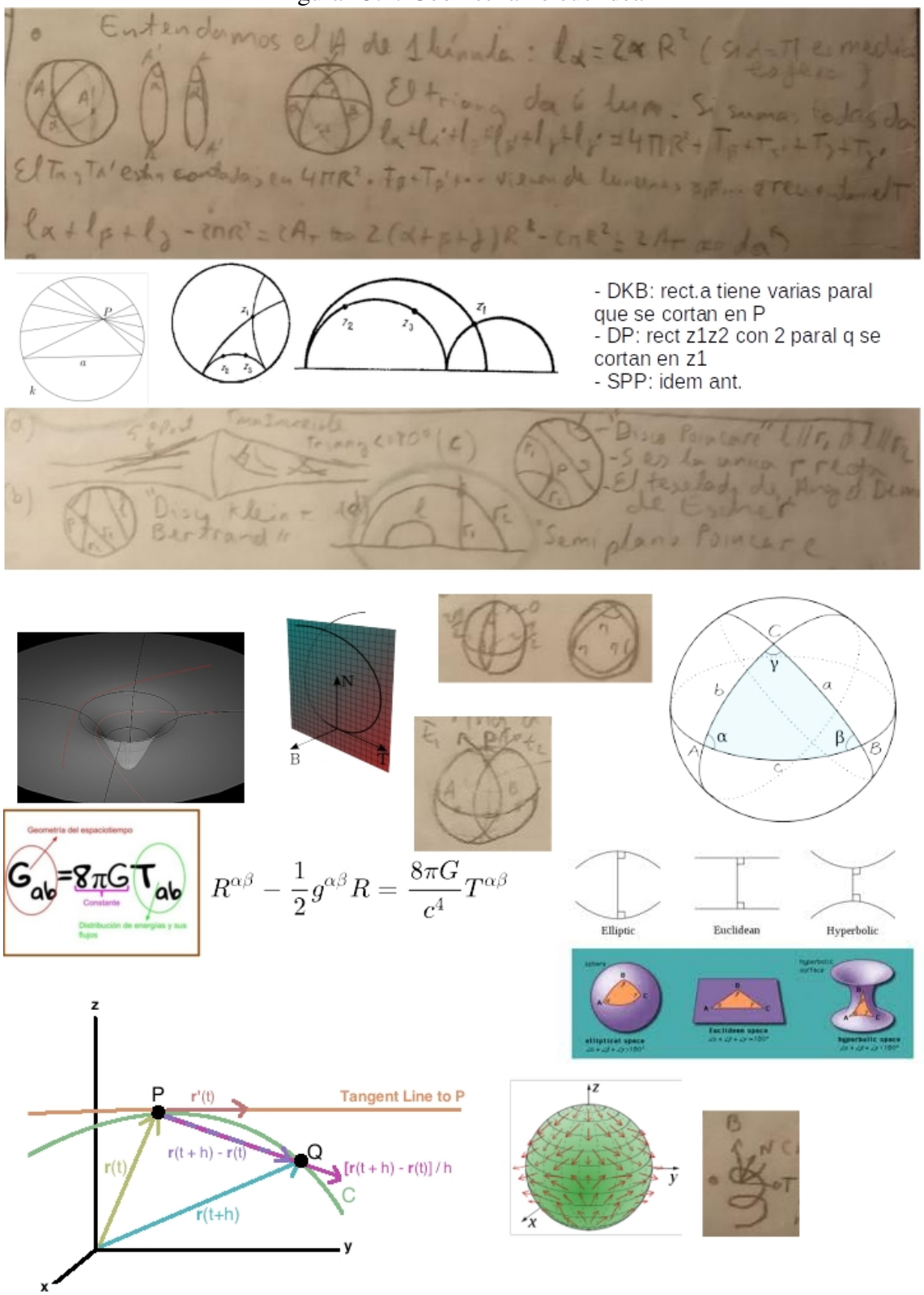
Conclusión: Curvas con κ, τ cte simiar *Geom. No Eucl.* [4]

- (*) Efecto Coriolis: [5]

[4] bastan las propiedades locales euclideas para describir cualquier curva diferencial (parecido a *Geom. No Eucl.* donde las *Curvatura*s son constantes). Al hacer zoom la curva se acerca a la recta, no en *Par. Costa*

[5] si además de geometría esférica añadimos rotación. Pelota lanzada entre dos personas en un tiovivo. Si un viento/misil va de norte a sur parece girarse para los terrestres. Esto hace que todas las borrascas/anticiclones del hemisferio norte/sur giren en mismo sentido.

Figura 15.1: Geometría no euclidea



Chapter 16

T54. Las cónicas como secciones planas de una superficie cónica. Estudio analítico. Presencia en la Naturaleza, el Arte y la Técnica.

16.1 Introducción: jardinero, planetas, Apolonio de Perge

- Ej-motivador: ¿Que curva da la método del jardinero y que relación guarda con un cono? ¿Que ec. describe órbita hacen los planetas? *L. Kepler*.
- Apolonio de Perge *P. Apolonio*, 200aC pone nombre a las 4.
- Importancia-histórica: *L. Kepler* y *Locus U2GPlano*, *Cuadrica*, *Tma Pascal*

16.2 Definiciones: truncado de superficie cónica (casos). Otras: envolvente, locus, variedad algebraica (soluciones a 2 cuerpos)

- *Conica* (def. de Apolonio *P. Apolonio*): curva(s) resultante de la intersección de una *Sup. Conica* de ángulo a (dos conos pegados en vértice V o recta que gira sobre circunf. *Sup. Reglada* extaña??) con un plano de inclinación b (Fig. 16.1):
  - Plano no pasa por V: $b <=> a$ (hipérbola, parábola, elipse). Si $b = 90^o, 180^o$ (circunf.,triángular)
  - Plano pasa por V: $b <=> a$ (2 rectas que pasan por V, 1 recta (la generatriz del cono), 1 pto).
- *Conica* : def. equivalentes a la anterior:
  - *Envolvente*:
  - *Locus* o Lugar Geométrico (LG): directriz y excentricidad (ver abajo). Ver *Epicicl.*, *Var. Alg.*, *Conica*, *Cuadrica*, *Teor. Control*

- *Geom. Alg.*: *Curva Alg.* o *Ec. Pol.* cuadrática de dos variables. Ojo no es una *Aplicacion*. Ver *Conica Projec.*
- Problema de los 2 cuerpos: sol. de Ley de Gravitación universal (universo computa Wolfram)

16.3 No girada y centrada: figura (a=eje mayor horizontal), Pitágoras (c=|OF|), locus, ec. reducida y paramétrica. Excentricidad (e=F/a), latus (l) y directriz (d), relación polares (e,l) y locus (e,F,d)

- Ec. cuando cónica centrada (salvo para circunf.), en posic. horizontal (eje mayor a horiz.) y no girada (pues no tienen términos cruzados xy) son:

	Circunferencia	Elipse	Parábola	Hipérbola
Fig. 16.1	r,C	F,a,b	F,d	F,a,b
Tma Pitágoras $\forall c = \|OF\|$ [1]		$a^2 = b^2 + F^2$!!![2]		$F^2 = a^2 + b^2$
Como *Locus*	$d(P,C) = r$	$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ [3]	$d(P,F) = d(P,d)$	$\|d(P,F_1) - d(P,F_2)\| = 2a$
Ec. reducida	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ (no centr.)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [4]	$y^2 = 2px = 4Fx$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Ec. Curva *Param.* (Paso Ec. *Cartes. Param.*) [5]	$\binom{x}{y} = \begin{cases} x_0 + r\cos(\alpha) \\ y_0 + r\sin(\alpha) \end{cases}$ (no centr., α no es de coord. polares) [6]	$= \begin{cases} a\cos(\alpha) \\ b\sin(\alpha) \end{cases}$		$= \begin{cases} a\sec(\alpha) \\ b\tan(\alpha) \end{cases}$

- Relación e, l y d (ver Tabla):
  - Excentricidad e: a más pequeño más circunf. Siempre es $e = \dfrac{F}{a}$ y teniendo en cuenta los Tma de Pitagoras tenemos respectivamente 0, $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, 1 y $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$.
  - Latus l : altura desde el F. Sale de sustituir en la ec. y usar el tma de pitágoras: P.e. en elipse $\frac{F^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1 \iff l = \frac{b^2}{a}$. Para el resto vale r, $2F$ y $\frac{b^2}{a}$.

[1] Para todas c es la distancia del 0 F, en hipérbola llevar con compás. Recordando el triángulo podemos sacar todo e, l..

[2] Si $a<b$ (eje mayor es b) los F están en eje-y

[3] Técnica del Jardinero en cuerda en Fs o de las Linea Fuerza de *Dipolo* ver Fig. 16.1 (*Campo Esc.*): no da cónicas pues circunferencias desplazadas y con cuantos cuadráticos. $r >> d$

[4] $\sqrt{(x-F)^2+y^2} + \sqrt{(x+F)^2+y^2} = 2a \iff (\sqrt{(x-F)^2+y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+F)^2+y^2})^2 \iff Fx + a^2 = a\sqrt{(x+F)^2+y^2} \iff (Fx+a^2)^2 = (a\sqrt{(x+F)^2+y^2})^2 \iff (a^2-F^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$

[5] 1) Despejamos α o id. trigon. $\sin(\alpha)$ de la parametrica $(x,y) = (f(\alpha), g(\alpha))$. 2) Igualamos lo despejado $\sin(\alpha) = f^{-1}(x) = g^{-1}(y)$ y sacamos la ec. normal cartesiana $h(x,y) = 0$. El paso de param. a cartes. es similar pero usando alguna Id. Trig. $c^2 + s^2 = 1$ Ej: *Sup. Reglada*, Cónica como *Envolvente*, etc..

[6] ver Fig., es el de proyección sobre circunf. inscrita (exterior A) y circunscrita (interior B) de elipse

- Directriz d: ver Tabla *Locus*, parábola (no veo la similitud con *Sup. Reglada*)

Polares: F en $(0,0)$ sol. Al variar la Excentricidad Orbital e (velocidad angular del astro) salen cónicas	$r = \dfrac{l}{1 - e\cos\theta}$
Directriz: recta $\perp$ al eje-mayor (ver Fig. 16.1 Parábola). *Locus* de ptos t.q. la dist a F / dist a directriz es una cte llamada excentricidad.	$e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,d)}$

16.4 No centrada: coef. de las 4 ec. polinómica (a=eje mayor vertical). Girada: matriz, cónica proyectiva. Invariantes (proyectivo |M|, discriminativo |M33| y lineal tr(M33)), diagonalización y discriminante (-4M33, tipo)

- *Ec. Pol.* (no centrada, no girada) *Var. Alg.*: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (no girada pues no aparece xy). Sale de restar $C(x_0, y_0)$ y desarrollar. Ej: elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \iff$ ....
  - Circunf: $A = B$. Ej: $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$
  - Elipse: $A \neq B$. Ej: $5x^2 + 4y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$
  - Parábola: $A = 0 | B = 0$. Ej: $y = 3x^2 + 2x + 1$
  - Hipérbola: $sg(A) \neq sg(B)$. (equilatera $A = -B$) Ej: $5x^2 - 4y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$

  NOTA: Forma Perpendicular: F en eje-y, basta cambiar x por y (o poner eje mayor a con la y). Elipse $\frac{y^2}{a} + \frac{x^2}{b} = 1$. Parábola $y = kx^2$. Hiperbola $\frac{y^2}{a} - \frac{x^2}{b} = 1$. Hiperbola Equilatera (asintotas ejes-cartesianos) $y = \frac{k}{x}$

- *Ec. Pol.* (no centrada, girada): LG de los ptos que cumplen la ec. cuadrática general: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ o $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (notación [WikiConics], *Hermit.* y *Coord. Homog.*) [7].

- *Conica Projec.* [Steiner??]: si el 1 los reemplazamos por z obtenemos la ec. *Coord. Homog.*. Esto permite trabajar en *Geom. Proyectiva* y *Cuadrica* y facilita la comprensión de porqué todas las cónicas comparten propiedades como el *Tma Pascal* o *Tma de Cierre Poncelet*

- Los 3 invariantes: (teniendo en cuenta la matriz simétrica M) bajo giro y/o traslación son:
  1. Proyectivo: $|M| = \begin{cases} = 0 \text{ degenerada (2 rect paral, coincidentes, pto)} \\ \neq 0 \text{ normal} \end{cases}$
  2. Discriminativo: $|M_{33}| = AC - \frac{B^2}{4} (= \frac{\Delta}{-4})$
  3. Lineal: $tr(M_{33}) = A + C$ (traza del anterior).

[7] P.e. la elipse centrada y no girada es: $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Como la M de la ec. reducida es *Diagon.* $\begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & C' & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{pmatrix}$ entonces del sistema: $\begin{cases} |M| = A'C'F' \\ |M_{33}| = A'C' \\ tr(M_{33}) = A' + C \end{cases}$ sale A', C' y F' [8].

A parte de $|M|$, según el signo del discriminante (y parecido a excentricidad): $\Delta = B^2 - 4AC = -4|M_{33}| = \begin{cases} <0 & \text{elipse o circunf.} \\ =0 & \text{parábola} \\ >0 & \text{hiperbola} \end{cases}$

16.5 Espacio tangente de cónicas: Tg. dado un P: 1) vector tg paramétrico (grad. y esp. tg.), 2) haz de rectas discriminante=0, 3) Polar (P sobre cónica). Tg. dado v. director (determinante de ec.=0)

Hay 4 formas de hallar las 2 rectas tang. que pasa por un pto $P(3,4)$ externo (o sobre la cónica): Ej: elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$:

- V. tg. paramétrico: IMPORTANTE (ver *Esp. Tang.*)
- Haz-rectas+Discrim.=0: siempre se simplifican muchos términos.
  1. Parametrizar recta como haz: $y = m(x-3)+4$.
  2. Resolver por sustitución sistema: $\begin{cases} y = m(x-3)+4 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ quedando: $(4+9m^2)x^2 + (-54m^2 + 72m)x + (81m^2 - 216m + 108) = 0$
  3. Forzar que $\exists_1$ solución (el sist. ec. anterior no puede tener dos sol. pues seria recta secante y no tg) $\Rightarrow$ discriminante $b^2 - 4ac = (-54m^2 + 72m)^2 - 4(4+9m^2)(81m^2 - 216m + 108) = 0$.
  4. Tras irse muchos términos sale siempre ec. cuadrática (los 4 se van) $m = \frac{1}{2}$ y la recta $y = \frac{1}{2}(x-3)+4$
  5. La otra recta sale viendo que las abcisas de P vertice coinciden.
- Polar: si el punto $P(P_x, P_y)$ está en la cónica, la recta tg es la "polar": $(P_x, P_y, 1)M\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (multipl. engorrosa si no hay 0s).
- NOTA: Dada la recta param: $y = 4x + k$ buscar k para que sea tg. a cónica. Obligar a que el sist. ec. de 2º grado tenga 1 sola sol. haciendo determinante $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ *U3LGeom*.

16.6 Lugares de referencia (centro, ejes, vértice) del gradiente=0

- Lugares de Ref.: de giradas y no centradas: Salen de resolver sist. (ec. normal + ec. *Gradiente*) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ (recuerda a *Envolvente*).

[8] Otra forma es *Diagon.* val y vect propios de $|M_{33} - \lambda I| = 0$ la ec. reducida es $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + |M|/|M_{33}| = 0$

- Centro C: de las dos parciales últimas del sist. anterior Ej: el C de la hipérbola o curva pez.
- Ejes principales: que pasan por C de los autovectores de $A_{3,3}$.
- Vértice V: de igualar su pendiente $m = \frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ a autovector anterior del eje mayor o menor.
- Orden de pto *Singular.* (a,b): [9]

16.7 Aplicaciones en Plano Proyectivo (PP): Tma de Pascal (K33, PPR, ajuste a 5 ptos con método de las rectas). Problema de Apolonio (circunferencia tangente a 3, GPS y errores), Tma de Cierre Poncelet (rayo por elipse interna, PPC)

- *Tma Pascal* (Fig. 16.1): dada una cónica cualquiera (ej. elipse) y 6 puntos sobre ella, si creamos su *G. Bipartido* $K_{3,3}$ los puntos de corte forman una recta. Mediante *Plano Proyec.* $\mathbb{R}$, convertimos la cónica en un circulo la prueba es fácil. Es una generalización del Tma Pappus cuando la cónica se degeneraliza a dos rectas.
  - Ajuste a 5 ptos A,B,C,D,E: sist. ec. engorroso (ver Forma Tierra, *Regr.*), mejor Met. Rectas [Braikenridge-Maclaurin1750]: converso del *Tma Pascal*: 1) Dejar 1 pto fuera (el E). 2) Ec. Curva *Param.* de cónica con prod. de las 4 rectas en forma normal que también vale 0: $r_{AB}.r_{CD} + \lambda(r_{AC}.r_{BD}) = 0 \iff (x-2y-2)(x-2y+1) + \lambda(x+y-2)(x+y+1) = 0$. 3) Sacar λ con E.
- *P. Apolonio* : dadas tres circunferencia (incluyendo casos extremos, pto y recta) hallar otra tangente a ellas. Un forma de resolverlo es con hipérbolas y existen 8 soluciones otra con *Plano Proyec.* $\mathbb{C}$ *Esf. Riemann*. Tiene aplicaciones en P. Persecución *U3LGeom*, fractales (su *Tamiz Apolonio*), trilateración del GPS, empaquetamientos (*Det. Corr. de Errores*) y teoría de números
- *Tma de Cierre Poncelet* Fig. 16.1: tenemos una elipse dentro de otra. Todo rayo que parta de la ext. y vaya tangente a la int. acabará volviendo al punto de partida dejando dentro de un polígono de n-lados a la int. Demostrarlo sin *Plano Proyec.* $\mathbb{C}$ P^2 (*Esf. Riemann*) es complicado, ej. de *Filos. Groth.*

16.8 Aplicaciones reales: Parábola de seguridad (Leyes de Kepler). Precesión de Mercurio. Arte (proyección, cuadricas torre Kobe). Leva y antena parabólica.

- IMPORTANTE: *Par. Seguridad* y *L. Kepler*

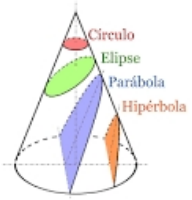
[9] 1) Reemplazar haz $y_{tg} = m(x-a)$ en $f(x,y) = 0 \Rightarrow (x-a)^2[m-x] = 0$. 2) a ra. doble $\Rightarrow$ orden 2 y $\exists$ dos semirectas tg que pasan por $(a,0)$ y $m = \pm\sqrt{a}$.

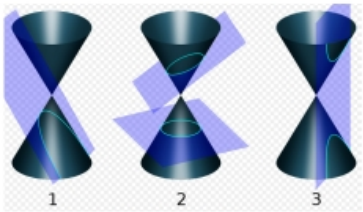
- *Precesion Mercurio* [Leverrier1850 *Pred. Ceres*]: prueba de la *Rel. General* (se propuso cambiar el r^2 por $r^{2.00001}$ o Leverrier la existencia de otro planeta (Vulcano)). Es muy pequeña, supongo requiere *Contraste Hipot.* y *Regla del Pulgar*. Un péndulo-lata pintura con agujero, gira en forma de elipse (planetas) que se van agotando, su *Envolvente* es una elipse central

- Arte: *Geom. Proyectiva* elipse "La escuela de Atenas de Rafael" proyección 2D de circunferencia. *Cuadrica* arquitectura: *Paraboloide* Hiperb. (*Pto Silla*), *Hiperboloide* (torre Kobe)

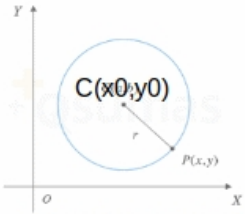
- Ingeniería: *Leva* (motor y cierre bici). Foco y *Antena Parab.* (*Paraboloide* sonido o luz, lámpara elíptica del dentista). Aerodinámica.

Figura 16.1: Conicas

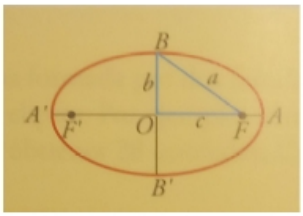




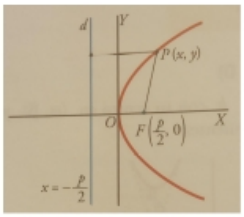
un plano con un cono: parábola (1), elipse y circunferencia (2) e hipérbola (3)



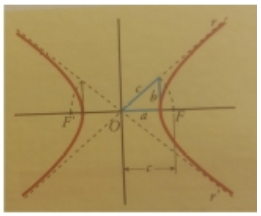
Circunf. no centrada



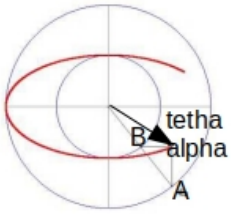
Elipse horizontal

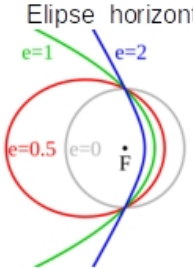


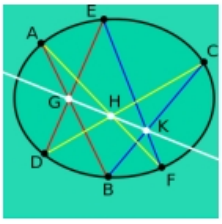
Parábola horiz.

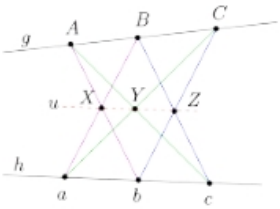


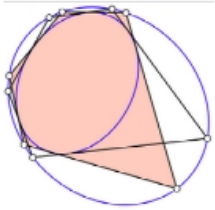
Hiperbola horiz.









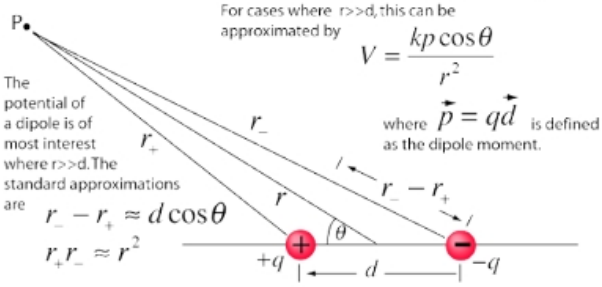


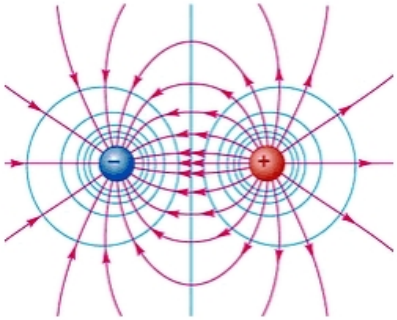
$$V = kq\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right] = kq\left[\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right]$$

For cases where r>>d, this can be approximated by

$$V = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

where $\vec{p} = q\vec{d}$ is defined as the dipole moment.





Chapter 17

T55. La Geometría fractal. Nociones básicas.

17.1 Introducción: romanesco y bosque, viajar en ciudad, costa (replantea medir e integrar). Definición: (autosimilitud afín, DHB>DTop, Clase C0). Función de Weierstrass (camino aleatorio) y Tamiz de Apolonio

- Ej-motivador:
  - ¿qué es un romanesco? ¿como crear un bosque en una película de dibujos?
  - *Viaj. Ciudad* : ¿qué es mejor, para recorrer dos puntos en una ciudad, moverse en la diagonal fractal (donde el promedio de la manzana es 30m) o tomar dos calles principales perpendiculares? sol. se tarda igual si en los giros de las manzanas no se pierde tiempo [1]
  - *Par. Costa* (Lewis)
- *Fract.* : $\nexists$ definición rigurosa. 1) [Wiki] Obj. geométrico cuya estructura básica fragmentada o irregular se repite (*Rel. Recurr.*, autosimilitud) a diferentes escalas (*Transf. Afin*, al hacer zoom tienen siempre detalles, está fracturada). 2) Conj. cuya $D_{HB} > D_{Top}$ [Mandelbrot82]. 3) Curva fractal: curva *Clase* $C0$ ¡en todo punto!:
  - *F. Weierstrass* 1872 profesor de secundaria: $f(x) = \sum_n^\infty a^n \cos(b^n \pi x) = \sum_n^\infty \frac{\sin(2^n x)}{\sqrt{2^n}}$. Curva autosimilar (al hacer zoom da la misma) y de *Clase* C^0 en todo pto (continua pero no diferenciable en todo el dominio). Antes de esta se conocian curvas continuas no diferenciables en ciertos puntos ¡pero no en todos!. *Crisis Matem.*. Otra es el *Camino Aleat.* D_{HB} casi 2 [Shen2018]. Ver *F. Dirichlet* (no continua)
  - *Tamiz Apolonio* (Fig. 17.1): de los primeros fractales conocidos (*P. Apolonio*)
  - Otras: Curva Nieva Koch, Curva Peano rellena el espacio (no encerrable en región arbitrariamente pequeña)
- Importancia-histórica: *Par. Costa*, replantea concepto de *Medida* y de *Dim. Fractal*. *F. Cantor*, *Conj. Mandelbrot* (*Caos* en *Apl. Logist.* y *Irreduc. Wolfram* (sist. simples).

[1] Es igual moverse en eje x y luego en y que hacerlo por trozos perp.: $x+y = \sum_i dx_i dy$. Para un coche es mejor el camino 2 calles principales

17.2 Teoría de la medida: positiva, vacío e unión. Medida de Lebesgue (intervalo, no fractal) y Hausdorff (bola, delta y s, no Vitali): recubridor.

- Teor. *Medida* μ: sobre una *Sigma-Algebra* si:

  1. Positiva: $\mu(E_i) \in [0,\infty)$
  2. Vacío: $\mu(0) = 0$
  3. Unión-suma: $\mu(\cup_i E_i) = \sum_i \mu(E_i)$.

  Es una función o forma sistemática de asignar reales positivos a subconj. de un conj. (Fig. The Map of Mathematics). Hay dos tipos: Interna (supremo del área de los recubrimientos/solapados/enlosados contenidos dentro) o Externa (ínfimo de recubrimientos por fuera). Da origen a *Esp. Medida*, no confundirlo con *Esp. Metrico* (de *Topol.*).

  - *Med. Lebesgue* 1901 $\mu(E)$: de curva 1D E es la longitud total del conj. de mini-intervalos (*Cont.*) $l(I_k) = e_k - e_{k-1}$ que cubren a E lo más ajustadamente posible y sin solaparse: $\mu(E) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$.

    Sea la "longitud" l de un intervalo abierto (o cerrado) $I = (a,b)$ $l(I) = b - a$, y sea $E \subset \mathbb{R}$ el conj. a medir recubierto algorítmicamente (de alguna forma) por una unión contable de intervalos t.q. $E \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k$, entonces su medida es el ínfimo de todos los posibles recubrimientos (máxima de la *TAI*). En $\mathbb{R}^n$ se usa el volumen de las hipercajas del *Prod. Cartesiano* en lugar de $l(I)$. Es externa y la forma clásica de medir. Mejora a la de Borel y no confundir con *Int. Lebesgue*. Puede medir *Viaj. Ciudad Conj. Cantor* pero falla en ciertos fractales/conj. No-*Med. Lebesgue*. Ver Prob. *Num. Comput.*

  - *Med. Hausdorff*: mejora de esta y es ext. mide fractales pero falla en *Conj. Vitali* o *Par. Banach-Tarski*

    1. $|U_i|$ diametro de las n-dim esferas que cubren F (n-dim más pequeña donde $\exists$ F).
    2. δ recubrim de F si: a) $F \subset \cup_i U_i^{\delta}$ b) $0 < |U_i^{\delta}| \leq \delta$.
    3. Med. Hausdorff: de un δ recubrim. externa s-dim $H_{\delta}^s(F) = inf\{\sum_i^{\infty} |U_i^{\delta}|^s\}$ es una long, area o vol (suma de diametro de esferas colocadas sin solape).
    4. *Med. Hausdorff* externa s-dim: $H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H_{\delta}^s(F)$

- RESUMEN: ambas medidas tienen sus recubridores y medidas elementales (intervalos y bolas n-dim). Ambos recubrimientos son las uniones de dichos elementos (H. son tipo delta, dim. max. de las bolas). Ambas medidas son externas (ínfimo de la suma pero H. eleva a s haciendola doblemente paramétrica). L. no mide bien ciertos fractales pero H. no mide bien *Conj. Vitali*.

	Med. Lebesgue	*Med. Hausdorff*
Recubr. y Med. Elem.	interv. n-dim y long. $l(I_i) = b_i - a_i$	bola n-dim. y diametr.: $\|U_i\|$
Recubr. , ambas uniones de elem. (ver *Compacto*)	$R(F) = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$	$R^{\delta}(F) = \cup_{k=1}^{\infty} U_k^{\delta} : \|U_k^{\delta}\| < \delta$
Med., ambas sumas de elem. y externas (ínf. suma)	$\mu(F) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : F \subseteq R(F)\}$	$H_{\delta}^{s}(F) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \|U_i^{\delta}\|^s : F \subseteq R^{\delta}(F)\}$. Depende de los param. elegidos. Se suele tomar $\delta \to 0$ y $s =$ donde el sumatorio cambia de valer ∞ a 0 (ver D_{HB}).

- (*) *Par. Banach-Tarski* 1924 (Log. Geom.): "un guisante puede trocearse y reemsamblarse para formar el Sol". Las piezas solo se mueven. Otro, el *Conj. Vitali* 1905 que resulta de partir en clase de equivalencia $\mathbb{R}$ con la *Rel. Equiv.* $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Son consecuencia del *Ax. Eleccion* y de que algunas piezas son no *Med. Lebesgue* (no tienen definadas la noción de volumen).

17.3 Dimensión fractal: intuición y DTop<DHB<DHom<DEucl. DHom: -log(N)/log(r). DHB=s del 0 al Inf.

Dim. Fractal : de forma intuitiva si $D_{Hom} = 0.63$ (*Conj. Cantor*) es algo que está entre el punto y la linea. Mide la cantidad de huecos/relleno (*Apl. Fract.* percolación/pulmón). Hay varias y cumplen la desigualdad: $D_{Top} \leq D_{HB} \leq D_{MB}(D_{Hom}) \leq D_{Eucl}$ de contención

- Dim. Homotecia (cubo de Fig. 17.1): $D_{Hom} = -\frac{logN}{logr}$ donde $N > 1$ nº de copias creadas del paso (no prima) al (prima, *Metodo Iterativo*) y $r < 0$ medida 1D de los lados de la nueva figura [2]

  - Dim. Minkowski-Bouligan: D_{Hom} tomando límites. $D_{MB} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{logN(\varepsilon)}{logr(\varepsilon)}$. con $r(\varepsilon) = 1/\varepsilon$.

- Dim. Hausdorff-Besicovitch (Fig. 17.1): $D_{HB}(F) := sup\{s : H^s(F) = \infty\} := inf\{s : H^s(F) = 0\}$ donde $H^s(F)$ es la *Med. Hausdorff* i.e. la dim. s es a lo que tienen que estar elevados los términos (recubrimientos o reglitas) de una serie (integral) para que dé entre 0 e ∞.

[2] $= \frac{d(P'Q')}{d(PQ)}$ razón de homotecia, PQ y $P'Q'$ en misma recta.

17.4 Famosos: conjunto de Cantor (0.63, ¡mu(F)=0 pero incontable, compacto! base3, polvo y f.). Curva de Hilbert (2, cubre plano), triángulo de Sierpinski (1.58, area=0 perímetro=Inf. triang. Pascal, R90). Bretaña ([1,2] regresión lin.). Camino aleatorio ([1,2] Wiener)

- *Conj. Cantor* 1883 (Fig. 17.1): a) *Medida* Lebesgue unidim.$\mu(F) = 0$ a pesar de ser *Incontable* (ver abajo). b) *Compacto*, pues unión de cerrados+acotados. c) Autosemejante de $N = 2$ copias y homotecia $r = 1/3 \Rightarrow D_{Hom} = -\frac{log2}{log1/3} = 0.63$. (como Diagr. Bif. de *Apl. Logist.*)

  - En base 3, todos los puntos del conj. final estan en $a = 0.a_1a_2... = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + ...$ con $a_i = \{0,2\}$ (no 1).
  - Si suponemos *Contable* los podemos ordenar, pero sea $b = 0.b_1b_2...$ con $\begin{cases} b_i = 0 & \text{si } a_i = 2 \\ b_i = 2 & \text{si } a_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$ por *Diag. Cantor* es no Contable.
  - $\mu(E_0) = 1; \mu(E_1) = 2/3; \mu(E_2) = 2^2/9 = 4/9.... \lim_{n\to\infty} = \mu(E_n) = (2/3)^n = 0$

  Polvo de Cantor: versión multidimensional. *F. Cantor* : o escalera del diablo (Fig. 17.1) $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene los peldaños ($f' = 0$) en el complemento del Conj. de Cantor. Es el clásico ej. de f. continua pero no Abs. Continua (*Suav.* definible con δ y ε) y da la *Distr. Cantor*.

- Curva de Hilbert 1891 (Fig. 17.1): a) Mejora de Peano, curva rellena 2D o 3D. Dividir en 4x4 y Torre con orientación del ladrillo. b) $N = 4$ y $r = 1/2 \Rightarrow D_{Hom} = -\frac{log4}{log1/2} = 2$.

- *Triang. Sierpinski* 1915 (Fig. 17.1): a) Area=0 y Perimetro (de minitriangulos)=∞. b) $N = 3$ y $r = 1/2 \Rightarrow D_{Hom} = -\frac{log3}{log1/2} = 1.58$. Generado por R90 (*Irreduc. Wolfram*). Al pintar pares de *Triang. Pascal*.

- Bretaña: Manderbrot "How Long Is The Coast of Britain?" 1967 (Fig. 17.1). a) F. en natural hasta grado de magnificación. b) Dim por *Regr. Min. Cuadr. Lin. Ley*:

  $(1/r)^D = N \iff (G_0/G)^D = (L/G) \iff L = G_0^D G^{1-D} \iff logL = logk + (1-D)logG$. Si $G \uparrow L \downarrow$ (costa de long ∞)

  Par. Costa : Lewis Fry Richardson 1930 queria mostrar que cuanto menor era la frontera entre dos paises menos probabilidad de entrar en guerra tenian. Se encontró que dependiendo de la regla salia una frontera más larga. Esto rompió siglos de cálculo diferencial e *Int. Riemann* pues tendría que salir igual como en *Viaj. Ciudad* [3]. Ver *Fract.* Bretaña

- *Camino Aleat.* : proc. *Estoc.* de t discreto en el que el salto siguiente (1D, 2D..) suele venir dado por una *Normal*. Si t continuo hay *Incontable* saltos entre dos tiempos y tenemos un Proc. Wiener = Movim. Browniano. Esto da un *Fract.* similar *F. Weierstrass*

[3] replantea que es *Medida* como el *Metodo de Exhaucion Long. Arco* (reglas cada vez más pequeñas para medir curvas) en los que el límite de convergencia era claro. En la costa puede ser infinito porque al hacer zoom no se acerca a una linea recta.

continuo (no discreto) en el que cualquier zoom (con lupa) que hagamos sobre la curva da una estructura similar. Su *Dim. Fractal* D_{HB} debe estar cerca del 2. Ver Fig. 23.1. Es una *Cadena Markov* donde los estados significa espacio.

17.5 Sistemas dinámicos. Conjunto de Mandelbrot: z=z2+c, varia c y en Julia z0 (|z|<2, DHB=2, conexo y compacto, cardiode, recursividad). Aplicación Logistica: x=rx(1-x) (Malthus r[0,4], Cobweb y bifurcación con DHB=0.53, Feigenbaum 4.7, Caos, 3 cuerpos)

- *Rel. Recurr.* : $x_{k+1} = f(x_k)$ donde f. no tiene porque ser *F. Holomorfa* o *Rec. Lineal* y requiere inicio. Son estudiables con *Teor. Control*. Se relaciona con *Metodo Iterativo* o *Calc. Lambda* (es *Teor. Unif.*). Ver *Generador Lineal Congruencial*.
  - *Sist. Dinam.* (físicos) o Proc. *Estoc.* (estad.): sist. cuyo estados forman un *Manifold* y evolucionan en el tiempo. Suelen expresarse con una *Rel. Recurr.* y así los entenderemos.
- *Conj. Mandelbrot* 1980 (Fig. 17.1, "un mundo nuevo"): M pintado en negro; $z_0 = 0; z_{n+1} = z_n^2 + c$. Ej: $c = -1 \in M$ pues la órbita es $0, -1, 0, -1, ..$ que si es acotada y se pinta de negro. $c = 1 \notin M$ es $0, 1, 2, 5, 26, ...$ no converge y se pinta según tiempo de escape (cuando $|z_n| > 2 \Rightarrow$ orbita escapa al ∞)
  - a) Borde $D_{Top} = 1 \& D_{HB} = 2$. b) Es *Conexo* ¡pequeños filamentos no visibles conectan los H! y *Compacto*.
  - Componentes hiperbólicas H: bultos más pequeños con forma de M que aparecen al rededor del principal *Cardiode* y con órbita periódica. Conjetura de la Densidad de Hiperbolicidad (CDH): M está formado solo por H, quizás el problema más importante de la Dinámica Compleja
  - Dentro de la teoría de *Computacion Real* (ej. máquina BSS) [4] podemos probar que "su complemento $\bar{M}$ es *Rec. Enum.*" (si $|z_n| > 2 \Rightarrow$ órbita ∞). Sin embargo el conj. en si M no es computable (no sabemos si *Rec. Enum.*) ¡lo negro es solo un dibujo aproximado!.
- *Conj. Julia* (Fig. 17.1): dinámica sobre *F. Holomorfa*. Ej: $z_{n+1} = \frac{P(z_n)}{Q(z_n)} + c$ y dibujar según z_0 (no c). Si $c = BordesConjManderb$ los $J(z) = z^2 + c$ son interesantes (fractales y conexos); aburridos conexos ej. $J(z) = z^2$ es un círculo; y explosivos (no conexos como conj. Cantor) si $c = 4$ fuera.
- *Apl. Logist.* [RMay1970] (logistic map) (Fig. 17.1): discreto de *F. Logistica*, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ donde x_{n+1} ratio de población $[0, 1]$, r crecimiento $[0, 4]$, $(1 - x_n)$ muertes si $x_n \uparrow$ (*Malthusianismo*). Es una *Rel. Recurr.* (no lineal, Sist. Dinámico, estudiable con *Teor. Control*)

[4] Si la Computación con Reales fuera posible podríamos resolver problemas-NP en tiempo polinomial. El principio holográfico y el límite de Berkenstein la prohíben

- *Diagr. Cobweb* (telaraña) o de Verhulst: Fig. 17.1 es el *Met. Pto Fijo*. Tiene *Caos* (ver)
- Diagr. de Bifurcación (Fig. 17.1): independiente de x_0, si $r < 3$ población se estabiliza en x_∞, si $r = [3, 3.54]$ oscila en 3 o 4 valores. Si $r > 3.54$ obj. de *Dim. Fractal* $D_{HB} = 0.53$ (como *Conj. Cantor*)
- Cte de Feigenbaum $\delta = 4.669..$: num. al que se van aproximando las relaciones entre la longitud de los dos intervalos sucesivos de las bifurcaciones. No se sabe si es irracional. Aparece en todas las Iteraciones (o Apl.) Cuadráticas. Esto doma un poco más el *Caos*.
- Teor. del *Caos* : pequeños cambios en el inicio de *Rel. Recurr.* (como *Diagr. Cobweb*) producen resultados inesperados ($r > 3.6$ Fig. 17.1) *Apl. Fract.*. Ej: **Probl. 3 Cuerpos** Relacionada con *Irreduc. Wolfram* [5]. *Met. Pto Fijo*.

17.6 Aplicaciones: si autosimilitud. Explicar (caos, seis grados, v. percolación). Optimizar (árbol, pulmón, rio, antena). Graficar (Pollock, videojuegos, comprensión). Clasificar (proteinas).

Apl. Fract. : Los obj. que presenten autosimilitud se prestan al uso de herramientas fractales.

- Explicar fenómenos físicos:
  - *Caos*
  - *Red Fract.* : muchas redes como la de los *Seis Grados* (Mundo Pequeño y Libre Escala) son autosimilares. Podemos calcular su *Dim. Fractal* dibujándola en el plano y contando bolas dentro de otras.
  - Percolación (velocidad por la que se cuela el líquido=*Dim. Fractal*) y cosmología (universo isotópico??).
- *Optim.*: de algunos criterios mediante Fractales [WhyFractalNature]
  - Árbol/pulmón/rio: maximizar el *Recubr.* del volumen con un longitud finita dada. Rios $l/d = 3.14 = \pi$. *Par. Costa* max. dispersión de la energía de olas.
  - Antenas Fractal: pequeñas pero capaces de trabajar en un espectro amplio de frecuencia i.e. *Optim.* maximizan la longitud de onda de recepción para un volumen dado.
- Graficar: la *Rel. Recurr.* es la forma de decir más con menos si lo mezclamos con aleatoriedad (*TAI*)
  - Videojuegos: generación de bosques, romanesco (*Espiral Aurea*), pulmones, nieve.
  - Arte y música: Dibujos de Pollock, Pixal, minimalismo

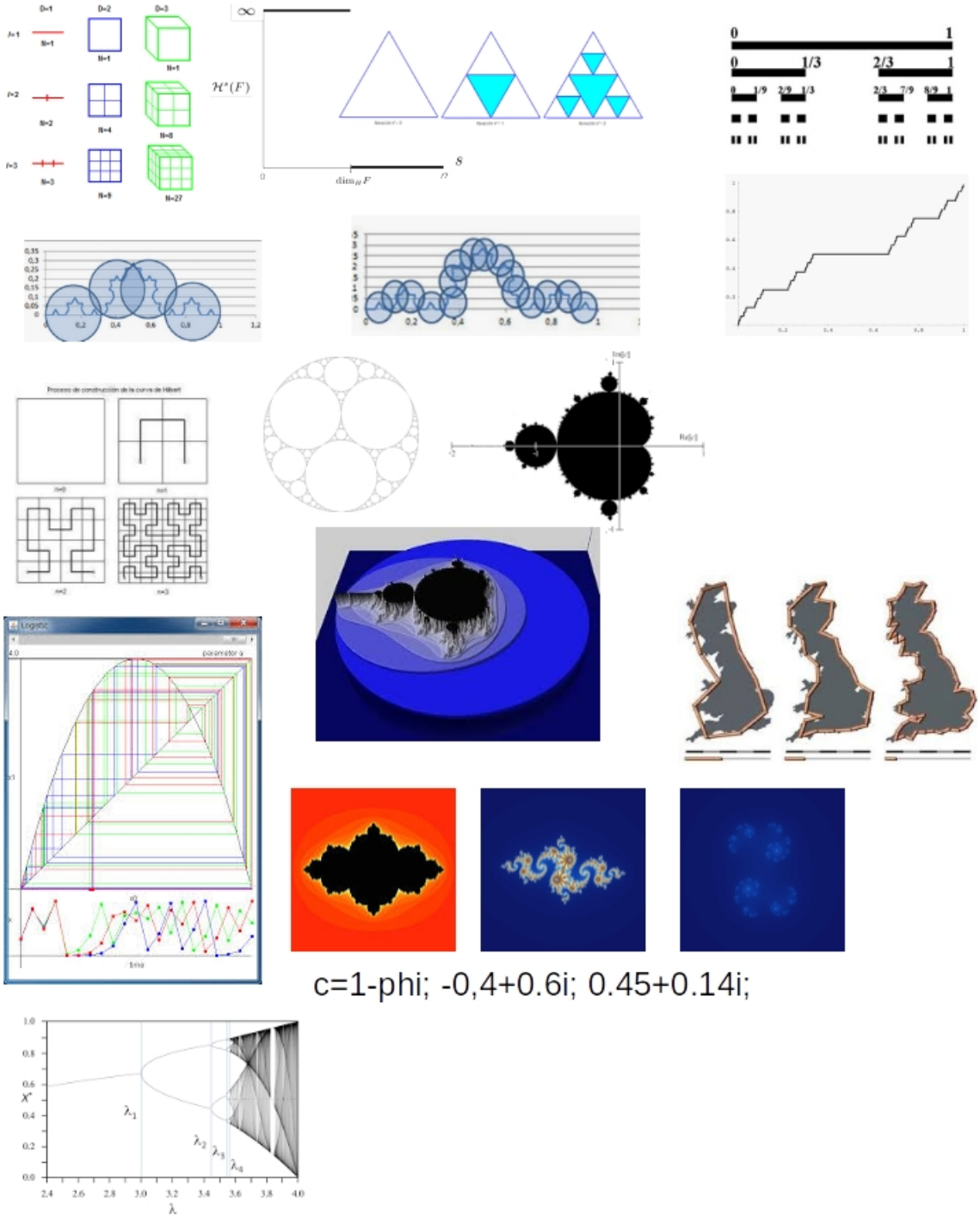
[5] Sist. simples dan comportamientos complejos debido a la *Indecib.*. La única forma de predecirlos es correrlos. Ej: Regla 90 si es inicializada con un solo 1 da un *Triang. Sierpinski*. La regla 110 es Maq. Universal (*Turing Complet.*). Ver *F. Unidirecc.*, *Pseudoaleat.*, *P. NP vs P*

  - Compresión: con sist. iterativo de funciones, o tma del collage. Se buscan repeticiones cercanas con autocorrelación+semejanza. Es lento y da la misma eficiencia que JPEG asi que no se usa mucho.

- Clasif.: de Obj. por su *Dim. Fractal* como un feature más en *Aprend. Autom.*

  - Proteínas y moléculas: presentan autosimilitud, p.e. en el área de accesibilidad al medio de las globulares [WikiFractNewtorl]. Esto afecta a su coevolución.

Figura 17.1: a) r y D en D_{Hom} b) D_{HB}. a) Cantor b) Hilbert c) Sierpinski d) Costa británica. a) Conj. Manderbrot y Relación con atractor Feigenbaum b) Conj. de Julia c) Diagrama de bifurcación d) Codeweb



Chapter 18

T57. Usos de la Estadística: Estadística descriptiva y Estadística inferencial. Métodos básicos y aplicaciones de cada una de ellas.

18.1 Introducción: Biometria (hijo alto), ciencia empírica (epist.), catador, CIS e INE,

- Ej-motivador: Ej1: *Biometr.* ¿hijo alto?. Ej: *CIS* e *INE* Ej1: *Estad. Cientif.* (la empírica es estad. *Epistem.*) Ej: Ej2: *Catadora Te*, *Tanque Aleman*....
- *Hist. Estad.*:
- Importancia-histórica: *Mod. Estad.*, *Estad. No Param.*, *Estad. Infer.*, *Estad. Descr.*

18.2 Fundmentos: población, muestra, nivel de confianza. Modelo estadístico (generativo, Riemann, estocástico).

- *Poblac.* y *Muestr.*
- Nivel de *Confianza* (y de Significación): $1-\alpha = 0.95$ (y $\alpha = 0.05$). Fig. 18.1 En *Estad. Infer.*, prob. de que al tomar una *Muestr.*, el *Estimador* (ej. $\bar{x}$) se encuentre dentro de un *I. Confianza*. (Valor Significativo: si tiene poca probabilidad de ocurrir). A más *Tam. Muestra* más confianza. Ver: *Regla del Pulgar*, *Valor-p*
- *Mod. Estad.* (o Mod. Prob. = *PGM*): *Tupla* (S,P): donde S es el conj. de posibles observaciones o *Realiz.* (*Poblac.* o *Esp. Muestral*) y P el conj. de *Distr. Prob.* (cada una definida con sus *Param. Estad.* θ). Es una *Funcion* multidim. o Maq. *Turing* con input *Var. Estad.* y outputs sus Prob.. Si tiene un solo output es una *Distr. Prob.* o *Distr. Conjunta* y en *Geom. Inform.* es una *Var. Riemann*. Puede funcionar en ambos sentidos *Discr. vs Gener.* :
  - Discr.: estimar la prob. de un dato de entrada. Ej: *Test*

- Gener.: generar conj. de datos de entrada según la Distrib. Ej: *Fuente Inform.* (ver *Generad.*).

IDEA: esto conecta *Rec. Enum.* con *Estad. Infer.* (*Teor. Unif.*) [1]. Conocerlo/*Entren.* es el *Obj. de la Estad.*. Ej: los de *Aprend. Autom.*: *Estad.* (*Regr. Lin.* $y = aX + b$, *GMM*) y *Estoc.* (*ARMA*, *HMM*).

18.3 Estadística (sentencias con un nivel de confianza). 4 objetivos: obtención, describir, inferir, modelar. Obtención de datos: muestra representativa

- *Estad.* : 1) conj. de métodos matemáticos para cumplir el *Obj. de la Estad.* : conocer el *Mod. Estad.* que describa completamente a una *Poblac.* (*Caract.*, *Rango* y *Distr. Conjunta*) desde una *Muestr.*. Fundamentada en la *Teor. Prob.* y base de la C. empírica *Epistem.* 2) Sin embargo no siempre es posible ni necesario conocerla al completo y bastan alguna de sus partes para verificar una *Sentenc.* sobre la *Poblac.* con un Nivel de *Confianza* deseado. 3) Estudia el espacio más que el tiempo (*Estoc.*, aunque son equiv.). 4) Según Wiki sus objetivos son: colección, organización, análisis, interpretación y presentación. Para mi son 4:

  - *Obten. Datos*: tipos de *Var. Expl.* y *Rango*. Evitar *Error de Muestr.* (*Mu. Represent.* y *Tam. Muestra*) *Endogeneidad* (*Red. Dim.*)
  - *Estad. Descr.*
  - *Estad. Infer.*
  - *Entren.*, modelado o estructurado : *Regr.*

18.4 Estadística (no) paramétrica: modelo (independencia), poder, características, media (mediana), t-Student (Wilcoxon)

- *Estad.* según se conozca el *Mod. Estad.*.

[1] el problema *Turing*-Comput. de decidir si un pto pertenece a un conj. *Rec. Enum.* ($P \in C$) equivale al probl. *Estad. Infer.* de decidir si un parámetro pertenece a un *Mod. Estad.* con una *Confianza* ($P(O \in Mod) > \alpha$

Ventaja	Estad. Param.	*Estad. No Param.*
No necesita conocer el *Mod. Estad.*	(suele asumirse *Normal*)	X (es más versatilidad, aplicable a más situaciones, pero asume *Indep.* de los datos)
Tiene más *Poder Estad.*	X (conclusiones más fiables)	(pero más sencilla de computar)
Más tipos de *Caract.* y no requiere *Tipific.*	(cuantitat.)	X (*Nomin.* y *Ordin.*)
Medida Central/Contraste Hipot./Mod. Estad.	*Media/Prueba T-Student/Normal*	*Mediana (Estad. de Orden)/Prueba Wilcoxon (Prueba Chi2)/Histograma* [2]

18.5 Estadística descriptiva: estadístico descriptivos (central, dispersión, forma) y visualización de datos (Ascombe, histograma, cajas)

- *Estad. Descr.* : según Fig. 18.1 describe la *Muestr.* (sin *Sentenc.* sobre la *Poblac.*, por lo que suele usar *Estad. No Param.*. Es el uso y análisis de los *Estadistico Descr.*. Sus principales objetivos son:
  - *Visualiz. Datos*: *Cuarteto Anscombe*, *Histograma* y *Diagr. Caja*
  - *Estadistico Descr.* o *Param. Estad.*: *Medida Central*, *Medida Dispersion* o *Medida Forma*

18.6 Estadística inferencial: frecuentista (estimación, intervalo de confianza, contraste de hipótesis, estimación complicada según f. perdida), bayesiana (actualización, MLE) y Solomonoff (TAI)

Estad. Infer. : según Fig. 18.1 establecer o inferir (*Induc.*) *Prop.* sobre la *Poblac.* a partir de una *Muestr.* con un Nivel de *Confianza* (i.e. *Sentenc. Fuzzy*). El proceso *Logic.* se denomina *Infer. Estad.* .

Es una de las 3 ramas de la *Estad.* y sus paradigmas principales son:

- *Infer. Frec.* : *Estimac.* (*I. Confianza*) y *Contraste Hipot.* (*Compromiso ErrI-II*) y *MVUE*. Usa más la *Prob. Frec.* que *Prob. Subjetiva*. Se centra más en obtener la *Prop. Mu.*. Es más complicada que *Estim. Bayes.* (ver *F. Perdida*).
- *Infer. Bayes.*: *Actual. Bayes.*, *Estim. Bayes.* (*MMSE*, *MAP*), usa más la *Prob. Subjetiva*. Sencilla.
- *Infer. Solomonoff* : máxima *TAI* + *Infer. Bayes. AIC Teor. Unif.*

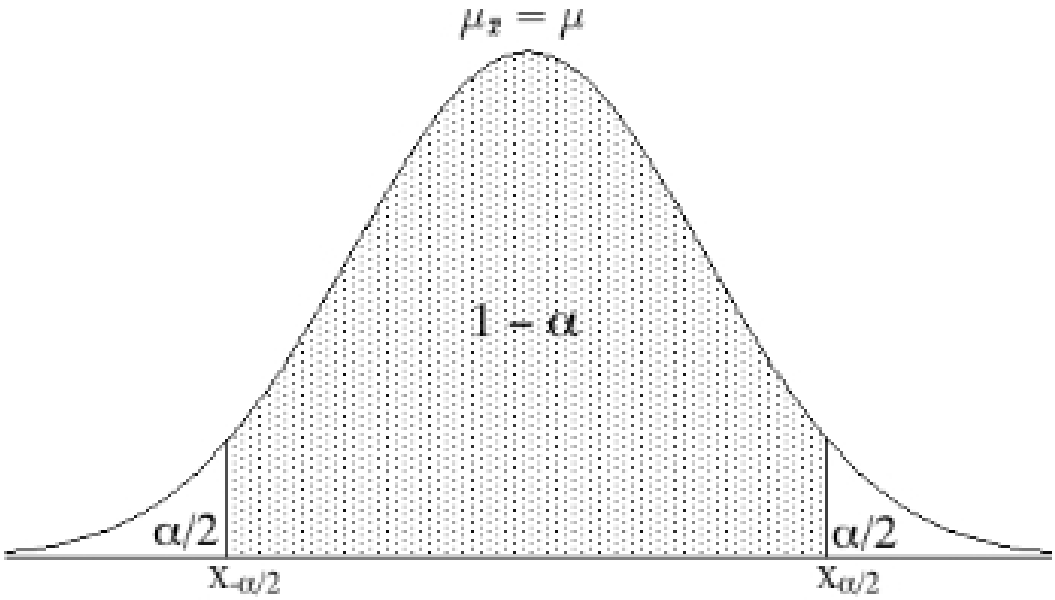
Aunque el *Entren.* o *Regr.* forma parte, lo consideramos en la siguiente Sec.

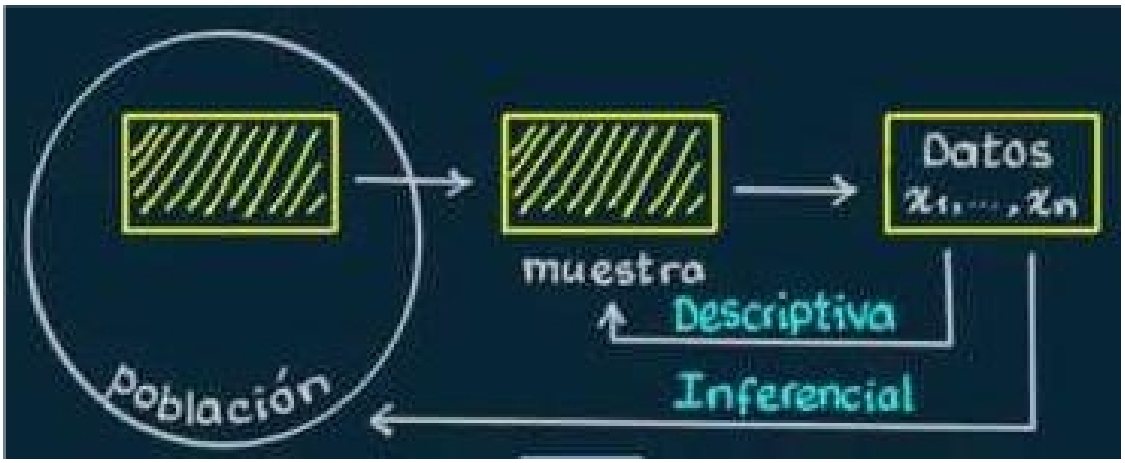
[2] para clasificar sin *Entren.* modelo usar *KNN*, *SVM*, *Met. Momentos* (NMF, *Spline*, NMF, Wavelets)

18.7 Entrenamiento o modelado: regresion (de mínimos cuadrados). Diseño experimental o aprendizaje automático

- Estructurado, Modelado y *Entren.* ($\subset$ *Estad. Infer.*): para *Dis. Exp.* o *Aprend. Autom.*. Ej: *Regr.* y *Regr. Min. Cuadr.*

Figura 18.1: Uso de la Estadística





Chapter 19

T58 Población y muestra. Condiciones de representatividad de una muestra. Tipos de muestreo. Tamaño de una muestra.

19.1 Introducción: ¿tamaño muestra? para (proporción de votantes (A,B) o de infectados o testear clasificador binario)

- Ej-motivador:
  - ¿*Tam. Muestra* de *Encuest.* del *CIS* para obtener la *Prop. Mu.* de votar entre partidos A y B catalanes? Obviamente lo ideal es a toda España pero por gastos es imposible, encontrar un *Compromiso*.
  - *Prop. Mu.* y *Prop. Bayes.*: En el primer estudio de seroprevalencia (cantidad de inmunes en un momento dado, no a lo largo del tiempo) del Covid por el ISCIII, se han tomado 70000 personas en España, ¿es correcto para acertar con alta probabilidad?
  - Cuantos datos para *Test* un *Clasif. Bin.* de *Aprend. Autom.*.
  - Otros: Ej3: Cuantos individuos de una especie para estimar su genoma.
- Cardano: de forma empírica afirma "La precisión de las estadísticas empíricas mejora con el num. de intentos".
- Importancia-histórica: *Mu. Aleat. Tam. Muestra Distr. Muestral Estimac.*

19.2 Población y Muestra. Cardinalidad. Gastos de muestro (control de calidad). Condiciones de representatividad: aleatorio, grande y rápido. Ej: Validación Cruzada, Test. Base de datos

- *Poblac.* : 1) Conj. de individuos (datos) que comparten *Caract.* comunes. 2) Conj. total de datos (*Esp. Muestral*) que puede generar un *Mod. Estad.*, puede ser finito o

Incontable. Conocer todos los *Param. Estad.* del modelo equivale a conocer la poblac. (ver *Estimador*). Recuerda a *Clausur.*. Ej: imagenes, señales, ...

- *Muestr.* : subconj. de una *Poblac.*. Proc. de *Muestr.*: $\subset$ *Obten. Datos*: es la aplicación del *Ax. Eleccion* aunque el *Esp. Muestral* tenga *Cardin.* infinita continua. Justificación: aunque lo ideal es muestrear toda la población conlleva *Gastos Muestr.* (*Control Calidad*), requiere un*Compromiso*. Se obtiene una Tabla *Distr. Frec.* o *Tab. Conting.* o *Base Datos*

- *Mu. Represent.* o in*Sesgad.*: si tiene las mismas *Caract.* que la población (creo que si su *Distr. Frec. Conv. Distr.* a la *Distr. Prob.* de pobl.). Para ello se deben cumplir las 3 condiciones de muestreo:

  - Aleatorio: *Mu. Aleat.* independiente del *Mod. Estad.*
  - Grande: *Tam. Muestra* adecuado.
  - Rápido: *Tma Nyquist* : $F_s = 2B$ (*T. Inform.*). Para Proc. *Estoc.*. ej: ruido, señal astronómica. Ver *Ergod.*

  Diversidad adecuada en *Base Datos*. Esto permitirá hacer *Infer. Estad.* con una *Confianza* deseada.

- *Valid.* Cruzada (Fig. 19.1): a partir el conj. de *Entren.* (no de *Test*) para medir la bondad del ajuste. Equivale a *Mu. Aleat.* Estrat.

19.3 Tipos de Muestreo (reposición): Aleat. (Monte Carlo): simple(=importante), sistemático (=Nyquist,rueda), estatificado (conocer ricos/pobres+simple, val. cruzada), conglomerado (partición dada). No Aleat.: conveniencia, nieve (exponencial, encuesta), cuotas (estrat.+conven.).

- *Tipo Muestr. Estad.* (no *Estoc.*): Todos pueden ser con/sin **Reposic.**.

- *Mu. Aleat.* (o probabilístico): los tipos son como los de *Int. Monte Carlo*:

  - *MATN* (simple o uniforme): Muestra Aleatoria de Tamaño N X_n: todas las muestras igual prob. de elección. Equivale al *Mu. Import.* o a usar una a *Distr. Uniforme*.
  - Sistem.: lista desordenada, primero al azar y resto periódico (=*Tma Nyquist*). V: rápido. I: muestra *Sesgad.* si lista oculta un periodo (similar a *Endogeneidad*). Ej: rueda en película).
  - Estratif.: nosotros partimos la población en grupos homogéneos (ricos/pobres, hombres/mujeres) y tomamos unos cuantos de cada grupo (*MATN*), o mejor, un porcentaje respecto del total. V: puede dar buenas estimas abaratando costes y la I: necesitas conocimiento previo de la *Poblac.*, conocer si cada individuo es rico, mujer,... Ej: *Valid.* cruzadad. Ej: si en la población sabemos que hay un 10% de ricos y un 90% de pobres, tomamos una MATN con esos porcentajes también en cada grupo.

  - Conglomerados: cuando de forma natural la población viene partida en conglomerados similares (cada uno se distribuye como la población), y tomamos uno o dos. V: división ya dada. I: que los conglomerados no sean realmente homogéneos. Ej: los conglomerados son colegios y tomamos un par de ellos.

- *Mu. No Aleat.* (Fig. 19.1): se eligen elementos que según un experto son representativos de la población.
  - Mu. de conveniencia: el investigador escoge una muestra "razonadamente" representativa de la población. Ej: test a grupo de alumnos extrapolado a la población. Ej: Monedas romanas (no confundirlo con búsqueda por *Ensayo Error*)
  - Mu. bola de nieve: unas muestras proponen otras muestras. Si es de forma exponencial, una propone a varias (Fig. 19.1). Ej: Ej: *Encuest.* personal poblaciones marginales, minoritarias pero en contacto entre si (porcentaje de personas en sectas)
  - Mu. por cuotas: es como el Estratificado pero dentro de cada estrato el investigador elige Mu. Convenienza (no *MATN*). Ej: una cuota (o estrato) es "mujer de entre 30-40 años" y elegimos las primeras con las que nos topemos (no hay lista).

19.4 Teoría de la estimación: estadístico vs estimador (latino, tunnelling) vs parámetro (griego). Tipos: puntual, intervalos (tamaño) y bayesiana

- Definiciones:
  - *Estadistico* : cualquier cantidad *Turing*-Comput. a partir de una *Muestr.* con propósito *Estad.* (y que sigue una *Distr. Muestral*). Ej: *Estadistico Descr.*, *Estimador*, EC del *Contraste Hipot.*.
  - *Estimador* : $T_n = \hat{\theta} = f(X_n) \approx \theta$ es un *Estadistico* usado para estimar un *Param. Estad.* a partir de una *Muestr.*. Es un caso de *Regla Decision*.
    * Notación: estimador con letra latina $\bar{x}, s^2, r, m_n$ y parámetro con griega $\mu, \sigma^2, \rho, \mu_n$ (media, varianza, coef. *Regr.* o corrrelación, momento)). Un parámetro es a una población lo que un estadístico lo es a una muestra. Puede haber varios estimadores para un mismo parámetro y se usa el que cumpla las propiedades nos convenga. Ver notación *Realiz.*
    * Debe diferenciarse: el parámetro (o el estimado, estimand, σ^2), el estimador (o función, s^2), la estima (el valor $s^2 = 7$) y la estimación (o el estimation, el proceso) [Wiki]. Mas diferencias ver *Distr. Muestral*.

    (Es una func. *Med. Lebesgue*??)

- Teor. *Estimac.* : se encarga de la construcción y comparación de *Estimador*es. Podemos clasificarla en:
  - Estim. Puntual (aquí)
  - Estim. de Intervalo o del Tamaño (aquí)
  - *Estim. Bayes.* (aquí no, más para *Entren.*)

19.5 Media, cuasivarianza y varianza muestral. Media y varianza de un estimador puntual (de media/(cuasi)var. muestral). Distribución muestral: de estimador. Transformando VA. Normal casi todo, T-Student desconoces sigma2, Chi2 var. (suma2) tipif., F-Snedecor var1/var2

- Los dos ej. de estimadores más importantes son:

  - *Media Mu.* o aritmética o promedio: $\bar{x} = M[x_i] = \frac{1}{n}\sum_i x_i$. OJO: $M[] \neq E[]$ $n \to \infty$ (muestra $\neq$ población). Es *MVUE*. Ver *TLC*, *Ley Grandes Num.*, *Prueba Z*

  - *Var. Mu.* y *Cuasivar. Mu.* : $\bar{s}^2 = M[(x_i - \bar{x})^2] = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = M[x_i^2] - \bar{x}^2$. (*Sesgad.* pero *MVUE*) y $\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$ (In*Sesgad.*). Ver *Chi2*.

- *Med. Estim.* $= E[T_n]$ y *Var. Estim.* $= E[(T_n - E[T_n])^2]$ (no confundir con *MSE*): *Media* y *Varianza* de un *Estimador* puntual (ver *Sesgad.*, *Efic.*, *Inform. Fisher*). Ej: de los básicos (*Autorref.*):

  - *Med. Estim.* y *Var. Estim.* de la *Media Mu.* (conocido σ^2): $E[\bar{x}] = \mu$ y $Var[\bar{x}] = \sigma^2/n$ (Fig. 19.1).
  - *Med. Estim.* de *Var. Mu.* y *Cuasivar. Mu.* (conocido σ^2): $E[\bar{s}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ y σ^2: $E[\bar{S}^2] = \sigma^2$ (Fig. 19.1)
  - *Var. Estim.* de *Var. Mu.* (conocido μ) [Wiki *Cota CR*]: sea $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{n}$. Su Var. es: $Var(T_n) = E[(T_n - \sigma^2)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{n} - \sigma^2)^2] = ... = \frac{2}{n}(\sigma^2)^2$. Sin embargo para otro estimador menos *Efic.* tenemos $Var(T_n') = E[(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{n+2} - \sigma^2)^2] = .. = \frac{2n}{(n+2)^2}(\sigma^2)^2$.

  Obtención: de considerar que las muestras x_i siguen la distr. de la poblac. y de las *Transf. de VA* que hace el estimador. Intentar expresar en función μ, σ^2

- *Distr. Muestral* : *Distr. Prob.* que sigue un *Estimador* puntual, i.e. un Estimador es una *Var. Aleatoria* observable (no oculta que es más bien un parámetro) cuya distr. depende del *Tam. Muestra n* y param. de la *Poblac.* (normalmente μ, σ^2).

- Tabla resumen:

ESTIMADOR	PARÁMETRO DE DISTR. MUESTRAL
Media Mu. (de VA cualquiera) Media mu. (idem) *Cuasivar. Mu.* (idem) Var. mu. (idem)	$E[\bar{x}] = \mu$ $Var[\bar{x}] = \sigma^2/n$, por *TLC* $E[\bar{S}^2] = \sigma^2$ In*Sesgad.* $E[\bar{s}^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$, *Sesgad.*
Prop. Mu. (idem)	$n\bar{x} \sim B(n,p)$ (*Binomial*, *Tma Dorado Bernoulli* o *Tma Moivre-Laplace* si n grande)
Media Mu. (de VA cualquiera) Sum y dif. de medias mu. (de VAs *Normal*)	$\bar{x} \sim N(\mu;\sigma^2/n)$ (*Normal* según lo anterior) $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$
Media mu. (*Tipific.*) Media (idem pero con var. mu.) Dif. de medias (idem) *Coef. Pearson*	$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (*TLC* y Test-z para una muestra) $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (*T-Student*, Test-t) $\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{s_{X_1-X_2}} \sim t_{f(n_1,n_2)}$ $r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{n-2}$ (*Prueba Regr.*)
Var. Mu. (*Tipific.*) Razón de var. mu. (idem pero de VA var. *Chi2*)	$\frac{n-1}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2_{n-1}$ (*Chi2*, suma cuadrados, Ej: Fig. 19.1) $\frac{s_x^2/\sigma_x^2}{s_y^2/\sigma_y^2} \sim F_{n-1,m-1}$ (*F-Snedecor*)

CONCLUSIÓN: *Normal* para casi todo y *T-Student* si desconoces varianza. *Chi2* para varianza tipificada y *F-Snedecor* para cociente varianzas.

19.6 Característica de buen estimador: Centrado (cuasi/var. muestral y autocorr.s si/no). Eficiente (min. var, Cota CR, autocorr.s). Tma de la consistencia (converge en prob., des. Tcheby, MediaSesg/RangoMe si/no). Robusto (atípico). Ce y no-Co: RM. no-Ce y Co: MS. no-Ce y Ef: autocorr sesg.

- In*Sesgad.* (unbiased): si *Med. Estim.* $E[T_n] = \theta$. El sesgo es el error: $err_n = Bias = E[T_n] - \theta$. Equivale alta *Exact.* (Fig. 19.1). Ver Rel. con *MSE*. Ej: *Var. Mu.* sesgada vs *Cuasivar. Mu.* centrada. *Autocorr.* sesgada/insesgada.

- *Efic.* : el mejor posible respecto a una *F. Perdida* normalmente la *Var. Estim.* [1]. Baja *Var. Estim.* equivale a alta *Precis.* (Fig. 19.1). T es mas E. que T' si $Var(T) < Var(T')$). Ver Rel. con *MSE* (si In*Sesgad.* $\Rightarrow$ *Tma Gauss-Markov*, *MVUE* y *Cota CR*) Ej: *Autocorr. Sesgad.* más E. que insesgada (ver). Ej: la *Media* usa todas pero el *Rango* Medio solo usa dos extremos.

- *Consist. Estad.* : $plim T_n = \theta$ a medida que $n \uparrow$ *Conv. Prob.* a θ. Equivale a: $\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$ i.e. a más muestras más probable es que dé con el valor real del param.

[1] También nº de muestras necesarias *TAI*. Ej: T' más Efic. que T si necesita menos muestras para estimar el param, las aprovecha mejor (mi Tesis)

Ej: *Media Sesgad.* $\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}$ si (pues si $n \to \infty$ tiende al μ) pero el *Rango* medio no. Ej: ambas *Autocorr.* son C. (ver)

Tma Consist. : si T_n (asintóticamente) In*Sesgad.* y $Var(T_n) \to 0 \Rightarrow T_n$ *Consist. Estad.*. En efecto:

Usando *Des. Tcheby* $p(|X-\mu| < k) > 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \iff lim_n p(|T-\theta| < \varepsilon) > lim_n 1 - \frac{Var(T)}{\varepsilon^2} = 1$

.

- *Robusto* : pequeñas fluctuaciones muestrales no deben variar enormemente su valor. No afectado por *Val. Atipico* (Outlier). Ej: *Rango* Medio no lo es. El test de Tukey (de diferencia entre *Cuartil*) es el más usado. Ej: horno en Tª de una casa (fuera de la población).

- (*) *Ergod.*: relacionado pero para *Estoc.*

- CONCLUSIÓN: In*Sesgad.* = *Exact.* y *Efic.*=*Precis.* y *Consist. Estad.*=mejora con más muestras. Un estimador puede ser In*Sesgad.* y no *Consist. Estad.* como el *Rango* Medio. O puede ser *Sesgad.* pero Consistente como la *Media Sesgad.* $\tilde{\mu}$ (o *Autocorr.* sesgada). O puede ser *Sesgad.* pero *Efic.* como la *Autocorr.* sesgada.

Media Mu.	In*Sesgad.* y Consist. (cumple *Tma Consist.*)	Cumple las propiedades de la *Media*. I: *Val. Atipico* la influye mucho. Es el *TLC*.
Cuasivar. Mu.	In*Sesgad.* (*Var. Mu.* no) y Consist. (??)	I: *Val. Atipico*la influye muchísimo. Si distr. *Normal* alcanza *Cota CR* (ver Ej.)

19.7 Tamaño de una muestra (n) e intervalo de confianza (e) de un estimador Tn equivalentes: Media y proporción muestral (votos): 1) P(T-e<Tn<T+e)=c. 2) Tipificar. 3) Tabla. 4) Despejar n o e. T-Student si desconoces var.

- El problema del tamaño y del intervalo de cualquier *Estimador* θ son equivalentes en *Infer. Frec.*:

  - *Tam. Muestra* (*Infer. Frec.*): dado un e (error), ¿tamaño n? para que la estima (muestral) $\hat{\theta}_n$ y el valor real (poblacional) θ difieran e (error) con confianza $c = 1-\alpha = 0.92$. Por *Gastos Muestr. Control Calidad*

  - *I. Confianza* (*Infer. Frec.*): dado un tamaño muestra n, ¿intervalo $I = \theta \pm e$? que garantice que la estima $\hat{\theta}_n \in I$ con una confianza c. Ver *Des. Tcheby*, *Contraste Hipot.* (RA)

El procedimiento para cualquier Estimador siempre es el mismo. Lo vamos a ejemplificar para la *Media Mu.* ($\bar{x}_n$) y la *Prop. Mu.* ($\hat{p}$ de *Binomial*, Prop. Votantes (A,B) (Intro) y *Prop. Bayes.* (Infectados)) que según *Distr. Muestral* ambas siguen una *Normal* $N(\bar{x}_n;\sigma^2/n)$ y $N(\hat{p};pq/n)$ respectivamente.

1. Expresar intervalo I con error e: $P(\theta - e < \hat{\theta}_n < \theta + e) = c$.
2. *Tipific.*: $P(-\frac{e}{\sigma_{\hat{\theta}_n}} < \frac{(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma_{\hat{\theta}_n}} < \frac{e}{\sigma_{\hat{\theta}_n}}) = P(-z_a < z < z_a) = c$.
3. Buscar en tablas: pasamos a *F. de Distr.* acumulada. Ej: para la Normal y por la simetría $z_a = z_{\alpha/2}$, $P(-z_a < z < z_a) = 0.92 \iff P(z < z_a) = c = 0.96 \iff z_a = 1.75$.
4. Despejar incógnita (e o n) a partir de las desviaciones del estimador: $e = z_a \sigma_{\hat{\theta}_n}$. Ej: para la media muestral $e = z_a \sigma/\sqrt{n}$ y para la proporción $e = z_a pq/\sqrt{n}$. De aquí podemos despejar $n > (z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{e})^2$.
5. NOTA: según *Distr. Muestral*, si desconocemos desviación poblacional σ todo es lo mismo salvo que usamos la desviación muestral y la *T-Student*: $\sigma \to s$ y $z_a \to t_{a,n-1}$. Ej: $e = t_{a,n-1} s/\sqrt{n}$ y $n > (t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s_n}{e})^2$.

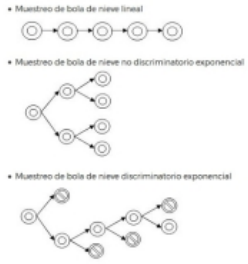
Ej: Tam. del Conj. Test en *Base Datos*

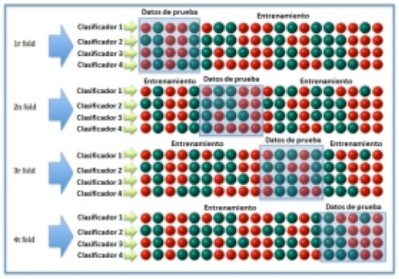
El WAcc o cualquier evaluación binaria, es una binomial (acierto/error) que para $n \uparrow$ el *Tma Moivre-Laplace* permite aprox. como $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$. De esto sacamos el tamaño de palabras adecuado.

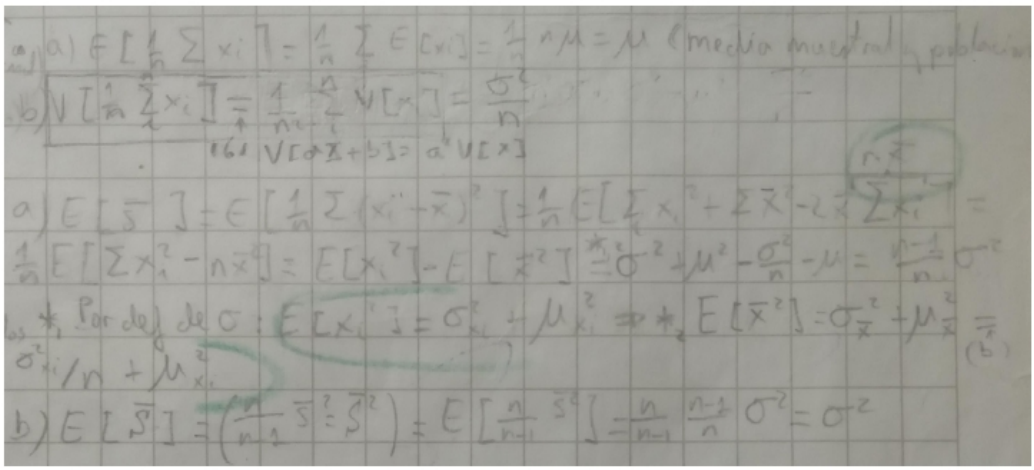
19.8 Conclusión.

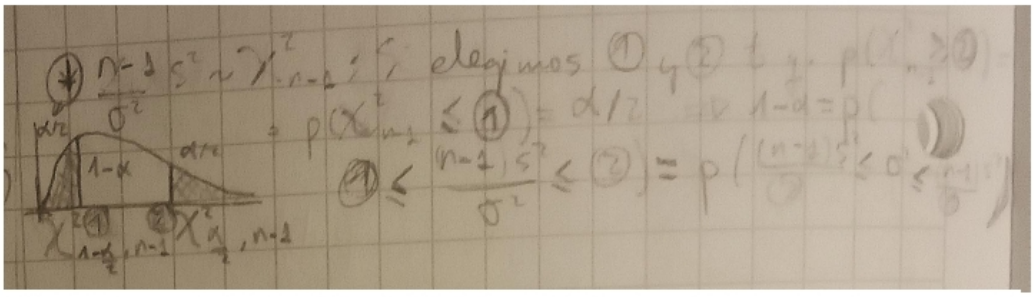
- CONCLUSIÓN matemática: *Tam. Muestra* adecuado de un *Estimador* para inferir valor puntual o intervalo con una *Confianza*.
- (*) Otros: Estimar EC para *Contraste Hipot.*. Algor. Evolutivos: muestrean el espacio en busca del óptimo (biobot). *Int. Monte Carlo*. Medicina (sanos/enfer), Facebook (perfilado psicológico),

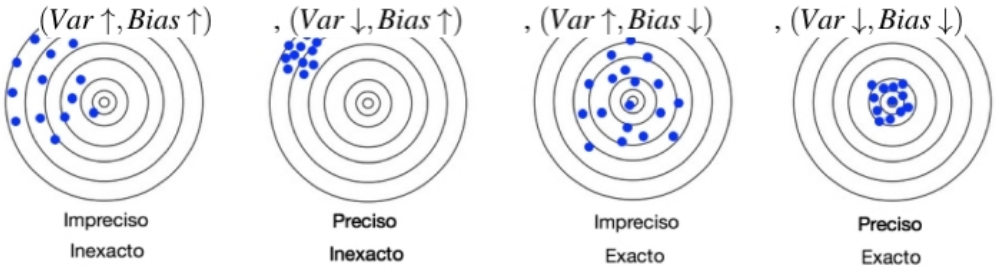
Figura 19.1: Muestr.











Chapter 20

T59. Técnicas de obtención y representación de datos. Tablas y gráficas estadísticas. Tendenciosidad y errores más comunes.

20.1 Introducción: base de datos y presentar resultados (paper o prensa). Etapas de una investigación estadística: definir objetivos (confianza, hipótesis nula), planificar y muestrear (aquí), analizar y presentación (aquí)

- Ej-motivador: Ej1: ¿como obtener una buena *Base Datos*?. Ej2: *Present. Resultados* (gráficas y tablas) en *Estad. Cientif.* un paper o en prensa necesitan sin mentir o malentender. Forma parte de la *Estad. Descr.*.

- Etapas de Invest. Estad.:

  - Definir objetivos: definir *Hip. Nula* y Nivel de *Confianza* deseado. Muy importante para poder concluir con contundencia.

  - *Planif.* y *Obten. Datos*: aquí

  - Analizar: *Estad. Infer.*

  - Presentac: aquí (*Estad. Descr.*)

- Importancia-Histórica: *Obten. Datos Histograma Error de Muestr. Endogeneidad*, *Tendenc.*

20.2 Base de datos (tono, acentos y PPI). Tipos de variables estadísticas. In/dependiente. Cualitativa nominativa (1HotVec)/ordinal, cuantitativa continua/discreta. Lógica, numérica y carácter. Rango y dimensión.

- *Base Datos* o Corpus o Conj. Datos: [1]: datos crudos (conj. *Var. Estad.*) resultado de un *Muestr.* y su función no es la representación informativa (*Estad. Descr.*). Ej de *Aprend. Autom.*:

  - Voz: tono o *Tono* promedio hombre/mujer, ruidos
  - Lingüistica [GRASS Corpus]: variedad de acentos. *Mod. Lenguaje*
  - Proteica: PPI
  - Imagenes:

  Debe ser *Mu. Represent.* (diversidad adecuada). Para crearla debemos cuidar la *Obten. Datos*. Permiten hacer ciencia experimental desde el sillón. Ver *Correspondencia*

- *Var. Estad.* : del *Muestr.* de una población. No confundirla con *Var. Aleatoria* (ver). Según relación en *Mod. Estad.* $Y = f(X)$:

Independientes X	*Caract.* (feature *Aprend. Autom.*)	*Var. Expl.* /causa (*Dis. Exp.*)	Exogena (*Endogeneidad*)
Dependientes Y	Etiqueta *Nomin.* (categor.)	*Var. Resp.* /efecto	endógena

  Según tipo:

  - Cualitativa *Nomin.* (Etiqueta, *Categ.*): sin orden (estado civil: soltero, casado, divorciado). Aunque se puede codificar con **One-Hot Vector** (*NLP*). Su *Medida Dispersion* con *IVC*. Ej: *Tab. Conting.*, *Base Datos*. *Ej. 3 Bebidas*
  - Cualitativa *Ordin.*: con orden (calificación: suspenso, aprobado, sobresaliente) pero no podemos medir exactamente diferencias (sobresaliente-aprobado=?). Permite cuantificar los datos en categorías. Ver *Orden Total*
  - Cuantitativa o *Var. Aleatoria*: Discreta/Continua: .

  Según tipo: Lógica, Numérica, Carácter. Ver *Medida Central* Según dimensión y *Rango*: in/finitas.

[1] distinguimos tres tipos: 1) Corpus: conj. de textos o voces, más de la lingüística. Ej: MNIST de dígitos a mano. 2) Conj. Datos (dataset): corpus de datos estructurado no necesariamente computacional. Ej: biblioteca, AURORA. 3) Base Datos (database): conj. datos *Jerarq.* computacionalmente al que se puede acceder con SQL o similar. Ej: Videoteca de TIC, Índice (*Diagr. en Arbol*)

20.3 Técnicas de obtención de datos. Gastos de muestreo (control de calidad). Planificación: variables (abiertas), rango, cuanto, tamaño, diseño exp., contacto previo. Obtención: encuesta (social), personal (guiado), automático (web, Nyquist). Tipos de Muestro. Depurar e informe.

- *Gastos Muestr.* : *Error de Muestr.* energía de transporte, deterioro, almacenamiento, privacidad, *Encuest.* voluntarias no se hacen por lo que hay que decidir un *Tam. Muestra* y un *Tipo Muestr.*. *Control Calidad* de mecanismos. *Prob. Frec.*

- *Planif.* la *Obten. Datos*:

  El *Dis. Exp.* puede ayudar a definir las *Var. Estad.*. Debe ser *Mu. Represent.*

  - Tipos de *Var. Estad.*, *Rango* y *Cuantiz.*: contacto previo importante. Caract. abiertas si barato para futuras investigaciones.
  - *Tam. Muestra*: según *Confianza*.
  - Depurar *Base Datos* por *Error de Muestr.*.
  - Memoria final: todo claro sin ambigüedad

- *Obten. Datos* : físicos y sociales como *Encuest.* (Ej: *Prop. Mu.* voto, Ind. Felicidad, *CIS INE*). Dos formas (*Tipo Muestr.*):

	Ej.	Ventajas
Personal	*Mu. No Aleat.* entrevistador	Experto puede guiarla y obtener datos interesantes
Automata	Cuestionario Web (Sist. Dialog.), *Mu. Aleat.*, *Tma Nyquist*)	Barata y objetiva (el entrevistador no la influye ni intimida)

20.4 Visualización de datos (big data, cuarteto de Anscombe). Pautas de gráficas y tablas: orden de datos, ejes proporcionales o semilog, oŕigen, unidades, títulos, leyendas claros

- *Visualiz. Datos* : rama de la *Estad. Descr.* cuyo objetivo es dar una visión de conjunto para poder sacar conclusiones. Las gráficas pueden informar mejor que las tablas como muestra el *Cuarteto Anscombe*. Es una ciencia y un arte. Ver *Deep Dream*

- Pautas para buena visualización :

  - Datos siguen un orden sencillo: en el caso de las tablas
  - Ejes proporcionales o comprimidos (log-log, semilog) y origen claro (para evitar *Tendenc.*)
  - Legibilidad: Título, leyendas (si varias gráficas), números, unidades.. claros

20.5 1D. Tabla: Distribución de frecuencias (vs prob.): alturas (var. estad.), intervalo (cuantización mu), categoría, frecuencia absoluta y relativa acumulada. Gráficas: histograma/diagrama de barras (cuant./nomin. interpol.), pictograma (nomin. tendenc.), diagrama sectores y cajas. Estoc. (señal)

- *Distr. Frec.* (tabla): resultado de un *Muestr.* de una *Var. Estad.* (o modalidad??) X 1D como la altura:

I_i	x_i (Altura cm)	n_i	N_i	f_i	F_i
$[150,155[$	152.5	3	3	0.12	0.12
$[155,160[$	157.5	7	10	0.28	0.40
$[160,165[$	162.5	6	16	0.24	0.64
$[165,170[$	167.5	4	20	0.16	0.80
$[175,175[$	172.5	5	25	0.2	1.00

  - Interval. *Cuantiz.* I_i: normalmente *Incomp.*. Puede ser unif. (5cm) o no como *Ley Mu* basada en f_i y *Rango*. Ver *Int. Lebesgue*, *Compr.*
  - Etiqueta *Nomin.* (categoria, modo, marca de clase) x_i: promedio o *Interpol.* de I_i
  - *Frec. Abs.* y *Frec. Rel.* (acumulada, *F. de Distr.*): $n_i(N_i)$ y $f_i(F_i)$.

  Debe *Conv. Distr.* a *Distr. Prob.* (ver *Mu. Represent.*. De aquí *Estadistico Descr.* (*Media Mu.*, *Var. Mu....*)

- *Distr. Frec.* gráfica (Fig. 20.1):
  - *Histograma* /Diagr. Barras: para Var. Cuant./*Nomin.*. Poligono de Frec: si *Interpol.* (unir barras)
  - Pictograma: solo se debe considerar la altura no el area para evitar *Tendenc.*
  - Diagr. Sectores (pie chart) o gráfico circular: para VA *Nomin.* (debe mantener proporcionalidad)
  - *Diagr. Caja*:
  - Otros: Func. a trozos: para limitar intervalos con círculos abiertos o cerrados
- *Repres. Estoc.*: señal

20.6 2D Tabla: de contingencia. Gráfica: diagrama de dispersión (Anscombe), de barras 3D. Biología: pirámide poblacional, dendograma. Estoc. (espectrograma)

- *Tab. Conting.*

- *Diagr. Disp.*
- *Barras 3D*
- Visualización de Datos Biológicos: rama de la bioinformática muy amplia:
  - Pirámide de Población: ver Fig. $(Edad, Sexo)$ es un *Histograma* horizontal.
  - Dendograma: diagrama en árbol donde las subclases son obtenidas mediante clustering. Ej: Árboles filogenéticos.
  - Otros no estadísticos [2]
- *Repres. Estoc.*: espectrogr.

20.7 Errores de representación: Involuntario: gráfica sin sus pautas. Tendencioso: área pictogramas, orientar 3D círculo, eje-y (origen y comprime crece menos, menospreciar vs recalcar), eje-x (intervalos de cuantización crece más)

- Error de representación involuntario: (no cumplir las pautas de buena gráfica anterior).
- Error de representación intencionado: *Tendenc.* realce de gráficas para que, aun siendo V lo mostrado, se mal interprete. Ver Fig. 20.1:
  - Considerar el área y no la altura en pictogramas.
  - Orientar en 3D: circulo de sectores azul parece mas superficie. Ej: "Apple: hemos vendido mucho"
  - Eje-y: Ocultar/recortar origen eje-y. Disminuir escala, dcha parece crece menos. Ej: a un medio le puede convenir resaltar el incremento (de ventas o paro) y a otro menospreciarlo, "España tiene muchas muertes violentas"
  - Eje-x: elegir a conveniencia los intervalos de *Cuantiz.*. Los intervalos de clase van creciendo, >200k se agrupan.

  Ver *Regr. a la Media*

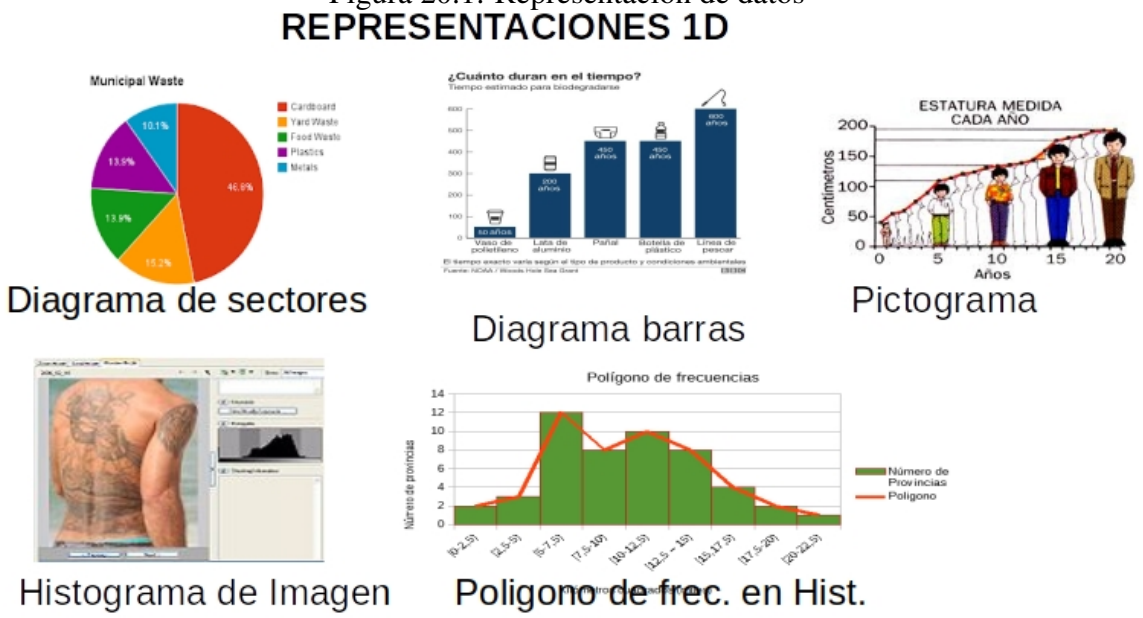
20.8 Otros errores: Obtención: muestra no representativa, personal (encuesta autoinfluyente), automático (sensor saturado) depurar. Modelo (sobreajuste, endogeneidad) validación cruzada. Inferencia (sesgo, confianza baja)

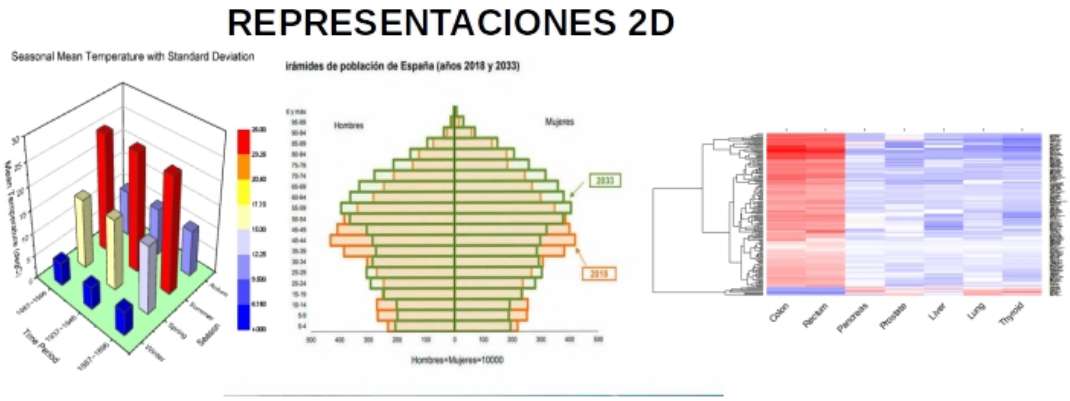
- Los 3 errores mas comunes (intencionados o no) de no-representación:

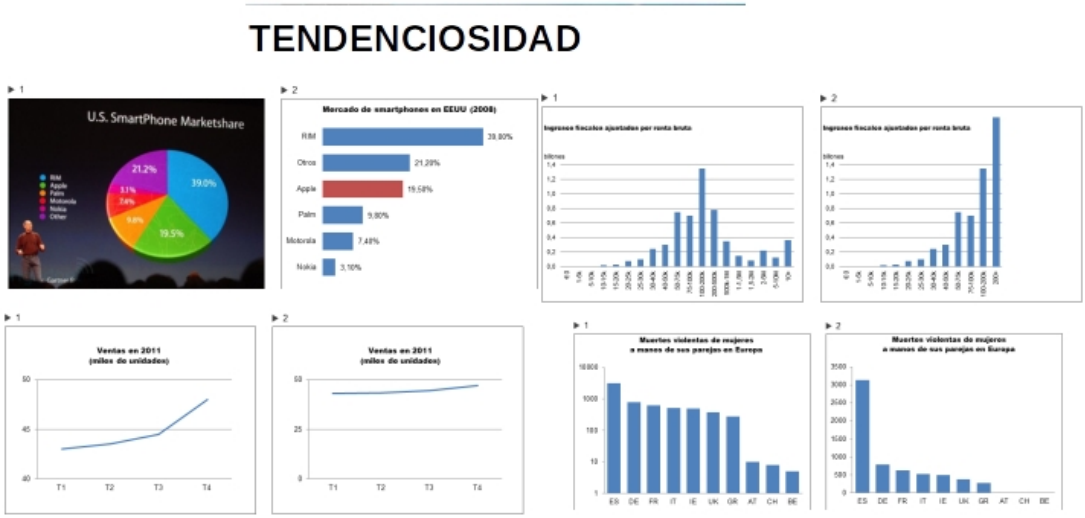
[2] Moleculas (como proteinas), Microscopia (colores subcelulares), Resonancia Magnética

- *Error de Muestr.* y *Obten. Datos* : a) *Mu. Represent.* no cumplido. b) Error. Personal: en las *Encuest.* (preguntas ambiguas, largas, que se autoinfluyen..). c) Error. Automat: en los sensores, la *Cuantiz.* (intervalos adecuado, saturación y no *Tma Nyquist*). Por todo ello hay que depurar las *Base Datos*.
- Error en el *Mod. Estad.*:
  * *Sobreajuste*: *Valid.* cruzada
  * *Endogeneidad* : Problema del *Entren.* (similar al *Sobreajuste*) cuando hay *Depend. Estad.* entre las *Var. Expl.* y el error. No permite ver la estructura o las causas del fenómeno a estudiar (normalmente económico). Ej: el *Mod. Estad.* de *Regr. Lin.* incompleto $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \varepsilon$ (Y depende realmente de tres variable), pero ignoramos que X_3 está en error $\varepsilon = b_3X_3 + \mu$. Entonces el error ε va estar correlacionado con X_3 y el modelo será In*Sesgad.* e ineficiente. Usado en Economía. Similar a posible error en *Mu. Aleat.* sistemático. Creo se solventa con *Dis. Exp.*, *Red. Dim.* (*PCA*). Rel. creo con *Correl. Causal.*
- Error en *Infer. Estad.*: *Estimador Sesgad.*, nivel de *Confianza* inadecuado.

Figura 20.1: Representación de datos







Chapter 21

T60. Parámetros estadísticos. Cálculo, significado y propiedades.

21.1 Introdución: dispersión de notas, voz de mujer, oscilación térmica. Parámetro o estadístico descriptivo. Medida central (situar media), dispersión (igual media distinta varianza), forma (bimodal) y de dependencia (estad. vs estoc.)

- Ej-motivador: Ej1: ¿Qué significa que la distribución de notas en obra musical *Serie Temporal* tenga una alta variabilidad, o que un hombre tenga voz de mujer?. Ej2: ¿qué es la Oscil. Termic. (relativa *L. Weber*)?

- Importancia-histórica: *Prop. Yule*, *Esp. Lp*, *Momento*, *Cuartil*, *Estad. de Orden*, *IVC*

- *Param. Estad.* : variable que define una *Distr. Prob.* o *Mod. Estad.*. Conocerlos equivale a conocer la Maq. *Turing*. Ej: μ, σ en *Normal*, λ en *Poisson* y n, p en *Binomial*. No tiene porqué tener significado como el *Estadistico Descr.*. Ej-. los w_i de una NN no son relacionables con su μ.

- Param. o *Estadistico Descr.* o Resumidor: *Estadistico* que resume información o *Estimador* de un *Param. Estad.* entendible, i.e. *Estadistico* de la *Estad. Descr.* que resume información sobre la distribución. En función de la descripción distinguimos:

  - *Medida Central* : sitúan a la distribución
  - *Medida Dispersion* : dos distribuciones pueden tener igual media pero diferente variabilidad
  - *Medida Forma* : dos distribuciones pueden tener igual varianza pero una ser bimodal y la otra no.
  - *Medida Depend.* : *Estad.* o *Estoc.*

  Estos suelen ser espaciales (*Covarianza*) vs a los *Estoc.* que son temporales (*Corr. Cruzada*).

21.2 5 propiedades de Yule de un parámetro: objetivo (fórmula), sencillo (formula elegante), interpretable (descriptivo), eficiente, robusto. También adimensional y transformable afín

- Las *Prop. Yule* de un buen parámetro son:

  1. Objetivo: basado en fórmula matemática (no en opinión).
  2. Sencillo-algebraico: Ej: si tiene valor absoluto no deseable pues es func. a trozos. Máxima de la *TAI*
  3. Interpretable: *Estadistico Descr.*. Ej: los de una NN no lo son pero la mediana si (deja la mitad de los datos a un lado).
  4. *Efic.*:
  5. *Robusto*:

  También conviene que sea *Medida Adim.* y *Transf. Afin*

21.3 Parámetros básicos: Media: conv. abs., Cauchy: cte, acotada, afín (media de suma)). Varianza (conv. si <Inf: positiva, práctica (E[x2]-mu2), transf. homot.2). Momento: conv. según r impar, rel. no/central (bin. Newton), param. (m0, med. m1, var. mu2, asimetría mu3, curtosis mu4)

Parámetros básicos para *FDP* continua $f(x)$ (FMP discreta p_i es similar):

- *Media* (más para VA discreta), Valor Esperado (más para continua) o Esperanza (más como operador) $E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.
  - Requerimiento de *Conv. Abs.* : [1] para que tenga media. Esto es porque hay distintas formas de integrar y cambio en la forma de integrar una función (o sumar una *Serie*) puede cambiar el resultado de *Conv.*. Ej:
    * *Distr. Cauchy* : no cumple *Conv. Abs.* y su $E[x], Var[x] = \infty$ [2] pero si tiene *Moda*. Es una *Distr. Estable*. Ver *TLC Ley Grandes Num.*
  - Cumple: a) Cte: $E[c] = c$. b) Acotada: si $a < X < b \Rightarrow a < E[X] < b$. c) *Transf. Afin* (*Apl. Lin.*): $E[aX + b] = aE[X] + b$ (media de la suma es la suma de las medias). (Dem. fáciles). Otras: ver propiedades de la *Media Mu.*
- *Varianza* $Var[X] = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$:

[1] $E[|x|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty \Rightarrow E[x] < \infty$ (*Reciproco* no V)
[2] *FDP* $f(x) = \frac{g}{\pi((x-x_0)^2+g^2)}$ forma similar a *Normal*

- Requerimiento de Converg.: ahora basta que su definición no de ∞ (*Conv. Abs.* redundante).
- Cumple: a) Positiva: $Var[X] \geq 0$. b) En-práctica: $V[X] = E[X^2] - \mu^2$. c) No-*Transf. Afin*: $V[aX+b] = a^2V[X]$ Transf.*Homot.* cuadrado (no le afecta el bias, pero *Desviac. Tip.* si *Apl. Lin.*). Dem.: la Var. de una señal no varia si le sumas un *Sesgad.*). Otras: ver propiedades de la *Cuasivar. Mu.* y *Cota CR*.

- *Momento* de orden $r \in \mathbb{N}$: no central $m_r = E[x^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$ y central $\mu_r = E[(x-\mu)^r]$
  - Requerimiento de *Conv. Abs.*: idem (depende del r si par o impar).
  - Cumple: a) Param. como Momentos (ver). b) Rel. central y no por binomio Newton: $\mu_r = \sum_i fi(x_i - \bar{x})^r = \binom{r}{0}m_r - \binom{r}{1}m_{r-1}m_1 + \binom{r}{2}m_{r-2}m_1^2 + \ldots + (-1)^r m_1^r$, donde $m_r = \sum_i f_i x_i^r$. c) Muy usado: *FGM*, Momento-L (*Estad. de Orden*)
  - Param. como Momento: $m_0 = 1$; *Media* $\mu_x = m_1$; *Varianza* $\sigma_x^2 = \mu_2$; *Asimetria* μ_3; *Curtosis* μ_4. *Momento Bidim.* para *Covarianza*. *Anal. Funcional* si todos los momentos coinciden las distribuciones son iguales (uso de lo discreto para caracterizar lo continuo)

21.4 Espacio Lp. Medidas como cálculo de variaciones en Lp (minimizar divergencia en Geom. Inform.): L0 razón de variación (1-fm/n, 3 bebidas, IVC simple)/moda (única para nominal, multimodal), L1 desv. abs. media/mediana (única ordinal, robusta, sal-pim. mediana geom.), L2: desv. tip. (interpretable, unidades, homot.) /media (baricentro), LInf: desv. max./rango medio (no eficiente ni robusto, simple, MVUE).

- *Esp. Lp* : *EV* Normado como: a) $|f|_p = (\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$, (esp. de todas las f. cont. $f : [a,b] \to \mathbb{K}$). b) $|\boldsymbol{x}|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$ (esp. dim. finita). Es un tipo de *Esp. Banach*. Si $p \to \infty \Rightarrow$ a) $|f|_p = sup(f(x))$ y b) $|\boldsymbol{x}|_p = max(\boldsymbol{x})$, i.e. la Norma es un *Max Suave* como Log-Max de CASA o LogSumExp de NN (*Aprend. Autom.*). Ver *L. Weber*, *Clase C*, *Geom. Inform.*, *Tma Parseval*. Las Normas son el *Error* de *Regr.*.

- Ciertas *Medida Dispersion* y *Medida Central* (MC) pueden ser caracterizadas como un problema de *C. Variaciones* en forma *Esp. Lp*. Sea *Muestr.* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *Medida Central* $\boldsymbol{c} = (c, c, \ldots, c)$ (todas coord. iguales) y *Medida Dispersion* la Norma o F. Perdida $\Rightarrow \text{argmin}_{\boldsymbol{c}} f_p(\boldsymbol{c}) := |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}|_p = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i - c|^p)^{1/p} \iff Sol : \boldsymbol{c} = Medida\ Central$. Idea generalizada en minimizar una *Divergencia*

- Lleva a interesantes interpretaciones Geom.:
  - Si una *Muestr.* $\boldsymbol{x}$ es un pto de un esp. multidim., la *Medida Dispersion* define un *Manifold* que debe tener un pto con con todas las coord. iguales la i.e. *Medida Central*.

- Si la Muestr. $\boldsymbol{X}$ es multidim. la *Mediana* es la *Mediana Geom.* (pto que minimiza la suma de dist. a otros. ej: fábrica central, $\nexists$ *Forma Cerrada*) y la *Media* el *Baricentro* (centro de masas)
- Otras: en *Geom. Inform.* MC es la minimización de una *Divergencia*. (Es como el *Estimador MLE* o *MAP*)??

L^p: *Medida Dispersion*: *Medida Central*	Propiedades de la dispersión	Propiedades de la central
L^0: *Razon Variacion*: *Moda*	1) $v = 1 - \frac{f_m}{n}$ el *IVC* más simple (para *Nomin.*. *Ej. 3 Bebidas*)	1) La única MC para *Nomin.*. 2) Hay distrib. multimod.
L^1: *Desviac.* Abs. Media: *Mediana*	1) L^1 en multidim. es la suma de dist. eucl. *Mediana Geom.*	1) La única (junto a la moda) para *Ordin.* (*Estad. de Orden*). 2) No sensible *Robusto* (filtro sal y pimienta). 3) *Mediana Geom.* para multidim
L^2: *Desviac. Tip.*: *Media*	1) No le afecta *Sesgad.*. 2) Interpretable (unidades de *Media*). 3) Transf. Homot. pero no *Transf. Afin*	1) Lineal. 2) Acotada. 3) *Baricentro* para multidim.
L^∞: *Desviac.* Max.: *Rango* Medio	1) Se puede obtener también como *Desviac.* Abs. Media con respecto al max de las muestras $D_{max(X)}$	1) No es *Efic.* (pero el mejor *MVUE* para *Distr. Uniforme*) ni *Robusto*. 2) Simple *Estad. de Rango*

- Para los extremos L^0 y L^∞ se usan límites (*Max Suave*). Para $p \to 0$ hay dos posibles valor abs $|x_i - c|^0 = \begin{cases} 0 & x_i = c \\ 1 & x_i \neq c \end{cases}$ por lo que la norma-0 cuenta la cantidad coordenadas desiguales. Para $p \to \infty$ el valor abs mayor domina y la norma se convierte en la máxima diferencia. La convexidad (*PL*) se cumple solo en norma-2 por lo que la media es única.

21.5 Otras: Central: M media cuadrática Q (<>0, rms, Parseval), armónica H (>0, proporc. y robusta), geom. G (idem, log), prom. intercuart. (media datos de q2,q3, robusta, diagr. cajas). Dispersión: coef. disper. cuartil (q3-q1/q3+q1, adim. robusto, f. impacto), coef. var. (adim. Weber), entrop. inform. (IVC complejo, código), apertura (xmax/xmin, no robust, EBC). Forma (respect. Normal): asimetr. (mu3/s3), curtosis (mu4/s4-3, leptoc.). Depend: covar./corr. cruzada. P1: H<G<M<G. P2: si simetr. M=mediana=moda

	Medidas	Propiedades
Medida Central	*Media* Cuadrática $Q = x_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N}}$	1) Datos positivos y negativos. 2) Intens. y *Tma Parseval*
	Media Armónica $H = \frac{N}{\sum_i 1/x_i}$	1) Solo para datos pos.. 2) Es proporcional ($H(ax) = aH(x)$) y robusta.
	Media Geométrica $G = \sqrt[n]{\prod_i x_i}$	1) Solo para pos. 2) Es proporcional y robusta. 3) Usar *Prob.-Log*.
	Promedio Inter*Cuartil* (media con los datos de Q_2, Q_3)	1) *Robusto* (*Diagr. Caja*)
Medida Dispersion Medida Adim.	Coef. de Dispersión *Cuartil* ($R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_1 + Q_3}$)	1) Como el Rango Inter*Cuartil* ($R_I = Q_3 - Q_1$) pero Adim. 2) *Robusto*. 3) *Factor Impacto*
	Coef. Var. ($CV_x = \frac{\sigma_x}{\lvert\mu_x\rvert}$)	1) Como *Desviac.* pero *Medida Adim.* 2) *L. Weber*
	Entropia Inform. $H(F) = \sum p_i \log_2(1/p_i)$	1) *IVC* más complejos. 2) Código óptimo
	Coef. de apertura $CA = \frac{x_{max}}{x_{min}}$	1) No *Robusto*. 2) Para comparar salarios de empresas EBC.
Medida Forma	*Asimetria* Fisher ($\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$)	1) Se usa, junto a Curtosis, para contrastar si datos siguen una Normal *Prueba Jarque-Vera*
	Curtosis Pearson ($\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$)	1) Se le resta 3 por la *Normal* (lepto/meso/platic.). Ver *Binomial*
Medida Depend.	*Covarianza/Corr. Cruzada*	*Estad.* (*PCA*) /*Estoc.*

- Las dos propiedades principales de las MC: a) Orden: $H < G < \bar{x} < Q$ (para Dem. triáng. TProblem.) b) Si *Distr. Prob.* simétrica: $\bar{x} = Me = Mo$

21.6 (*) Medidas de tendencia central

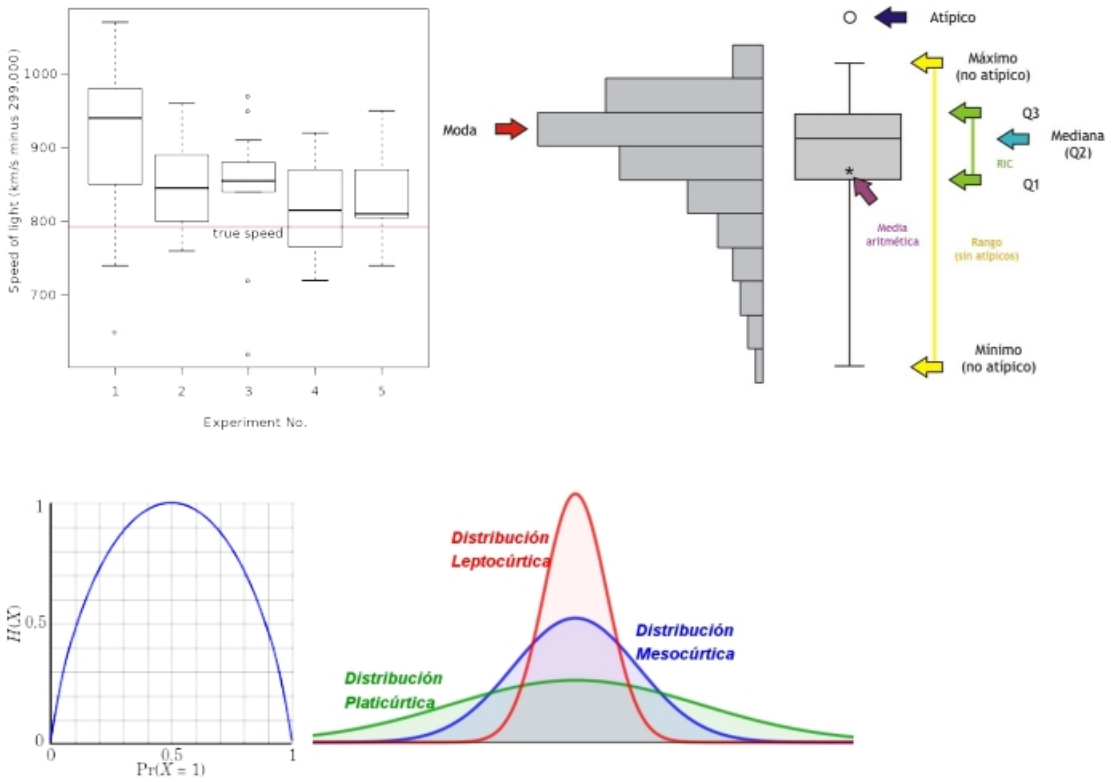
- Otras *Medias*:
  - Media Geom.: $G = \sqrt[n]{\prod_i x_i}$. P: Usar *Prob.-Log* con valores grandes para mejorar precisión computacional $G = exp(\frac{1}{n}\sum_i n_i log x_i)$. Cambio escala $G(ax) = aG(x)$ y reciproco $\frac{1}{G(x)} = G(\frac{1}{x})$. Acotada. Media total=Media partes. V: Valores extremos influyen poco I: No calculable si - o valores cercanos al 0.
  - Media Armónica: $H = \frac{N}{\sum_i 1/x_i}$ P: Cambio escala $H(ax) = aH(x)$. Media total = media partes. V: Es lineal. Los extremos influyen poco. I: Los 0s afectan. Depende de las marcas de clase y puede dar manipulaciones??

- *RMS* o Media Cuadrática o Valor Cuadrático Medio o Valor Eficaz: $Q = x_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N}}$. Es la raiz del *MSE* cuando bias=0. P: Util para promediar valores tipo areas. Ej: Intensidad (en Electr.): $V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)dt} = [seno] = V_{max}/\sqrt{2}$. Si $V_{ef} = 230V \Rightarrow V_{max} = 325V$. *Tma Parseval* : Pot.-tiempo=Pot.-*Fourier* $\int f(t)g^*(t)dt = \int G(w)F^*(w)dw$. Es la Norma *Esp. Lp*2. Ver *Tma Wiener-Khinchin*, *Convol.*)
- *Mediana* : Me valor que divide la distribución al 50%. Se calcula con la función acumulativa, si es estimada de *Muestr.* es un *Estad. de Orden*. Se puede interpolar si cae en mitad. P: Depende solo del orden y no de los datos en si. Ej: $Me[\{1,2,3,3,4,5,6\}] = Me[\{1,2,3,3,4,5,6000\}]$. La Me total $\neq$ Me partes. Es lineal $Me(ax+b) = aMe(x)+b$ V: No sensible a outliers Ej: para ruido sal y pimienta. Mejor que $\bar{x}$ si distribución muy asimétrica. I: No se puede usar para comparar variables medidas en distinta escala
- *Moda* : Mo valor con más frecuencia. P: Hay distrib. multimodales. Si en mitad interpolar.

21.7 (*) Medidas de dispersión

- *Desviac.* : Hay varios tipos:
  - *Desviac. Tip.* o amplitud: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (*Varianza*): a) Interpretación sencilla, se expresa en las mismas unidades que los datos y la media. b) $\sigma(ax+b) = a\sigma(x)$ transf. *Homot.* o *Apl. Lin.* pero no *Transf. Afin*. Es el *MSE Esp. Lp*2 de la *Media* (ver abajo). Ver *Desviac.*. Ver *Coef. Var.*
  - *Desviac.* Abs. Media: respecto de una *Medida Central* $MC(X)$ (media, moda,..): $D_{MC} = \frac{1}{n}\sum_i |x_i - MC|$. Es la Norma *Esp. Lp*1. (ver *Regr. Lin.*) P: de la Media y la Mediana se cumple $D_{\bar{x}} > D_{Me}$.
  - *Desviac.* Max.: $DMax_{MC} = max(\{|x_i - MC|\})$.
- Cuantiles: dividen en partes iguales la distribución. Situan el valor de una parte de la distribución:
  - Percentiles: parten a distrib. en 100 partes iguales: $P_1, P_2 ..., P_9 9$. Ej: Los niños deben crecer en un percentil constante, si un niño empieza en P_{75} (tiene 75 niños más bajos que el y 25 más altos) y a los dos años está en el P_{50} es que no se ha alimentado bien.
  - *Cuartil* es: dividen la distrib. en 4 partes iguales Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. $Q_2 = Mediana$. Ej: Test Tukey (*Val. Atipico*). Ej: Calidad científica: cada revista tiene un Journal Rank o *Factor Impacto X* (*Estad. Cientif.* las que tienen más citas están en las primeras posiciones, *Seis Grados*). El número de revistas en una categoria es Y. El Journal Impact Factor Quantile $Z = X/Y$. Si $0 < Z < 0.25$ es un Q_1. Ej: en el Covid19 ha sido baja la calidad [ElPais]. El Alg. PageRank de Google asigna a una página más valor si otras la referencian mucho. Todos se basan en análisis de Redes.
  - *Diagr. Caja* (y Bigote): una caja es un Rango Intercuartil. Los bigotes delimitan los *Val. Atipico* leves inferior y superior: $f_{inf} = Q_1 - 1.5R_I$ y $f_{sup} = Q_3 + 1.5R_I$ (bigotes). *Val. Atipico* graves: circulitos fuera (Fig. 21.1)

Figura 21.1: Parámetros



- *Rango* : $R = x_{max} - x_{min}$.
  - *Estad. de Orden* : dada una muestra $x_1 = 6, x_2 = 9, x_3 = 3, x_4 = 8$ su EO (se denotan con paréntesis) y son $x_{(1)} = 3, x_{(2)} = 6, x_{(3)} = 8, x_{(4)} = 9$ y sus *Estad. de Rango* son los índices entre paréntesis que respecto a la muestra de partida son $(2),(4),(1),(3)$. También se puede hacer sobre *Var. Estad. Ordin.*. Forma parte de la *Estad. No Param.*. Ej: *Mediana* Mu., *Momento*-L donde en vez de muestras se ponderan *Estad. de Orden*.
  - Rango Medio: es una *Medida Central* y es la mitad del rango $M_R = R/2$. I: Muy sensible a fluctuaciones. Es In*Sesgad.* y no *Consist. Estad.*: $E[M_R] \to \mu$ pero no converge si $n \uparrow$.
  - Rango Inter*Cuartil*: $R_I = Q_3 - Q_1$ (Caja, con $Q_2 = Mediana$ en mitad) (donde están 50% de los datos). V: robusto a los *Val. Atipico*. Promedio Inter*Cuartil*: es una *Medida Central*: solo se utilizan los datos del 2º y 3º cuartil (el 25+25% de los datos inferiores+superiores se descartan). basada en el promedio truncado del rango intercuartílico. Coef. de Dispersión *Cuartil*: $R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_1 + Q_3}$ es una *Medida Adim.*

- Índice de Variación Cualitativa (*IVC*): *Medida Dispersion* sobre *Var. Estad. Nomin.*. P: a) varian entre [0,1]. b) su valor no depende del nº de muestras o categorías. c) se parecen a la *Entropia Inform.* en que su valor es min. cuando todos los casos pertenecen a una sola categoría y max. si distr. *Distr. Uniforme*.
  - *Razon Variacion* : $v = 1 - \frac{f_m}{n}$ donde f_m es la frecuencia de la moda y n el nº de casos totales. Si la moda contiene a casi todos los casos, f_m es grande, v pequeño y hay poca dispersión. *Ej. 3 Bebidas* en un grupo de 100 personas a 60 les gusta cerveza, 25 vino y 15 zumo $v = 1 - 60/100 = 0.4$ (*Nomin.*)

- *Entropia Inform.* (*T. Inform.*): incertidumbre, información o ambigüedad *Media* de una *Fuente Inform.* F. $H(F) = \sum p_i \log_2(1/p_i) = \sum p_i N_i = E[Info] = \bar{N}$ donde $p_i = f_i/n$ es la prob. que salga una palabra i. Equivale al nº promedio de bits del código mínimo (tamaño palabra según probabilidad [Shannon]): Ej: *Codig. Huffman* , Morse.... La Fig. 21.1 muestra la entropía de un *Ensayo Bernoulli* (es máx. con $p = 0.5$, mayor incertidumbre sobre el resultado (*Inform. Fisher* de *Binomial*). Ver *Divergencia*, Perplejidad (*Mod. Lenguaje*), *Entropia*, *TAI*

- Otras *Medida Dispersion* y *Medida Adim.*: Recorrido relativo: $R_R = (x_{max} - x_{min})/\bar{x}$

21.8 (*) Características de forma

21.8.1 Otros

- *Asimetria* : indica como de simétrica es la Distr. Prob. No se puede usar el primer *Momento*-Estandar pues es 0: $\mu_1 = \sum_i f_i(x_i - \bar{x}) = 0$. Por lo que se usa la Asimetria Fisher siguiente *Momento*-impar y normalizado (*Medida Adim.*): $\gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \begin{cases} = 0 & \text{simetrica} \\ > 0 & \text{asim. dcha} \\ < 0 & \text{asim. izda} \end{cases}$, donde $\mu_3 = \sum_i f_i(x_i - \bar{x})^3$.

- *Curtosis* : indica si están muy concentradas las muestras alrededor de la media. Dos Distr. pueden tener igual $\bar{x}, \sigma$ pero diferente curtosis. La Curtosis Pearson es el *Momento*-4 Estandar (*Medida Adim.*): $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ clásicamente indica lo apuntada que está nuestra distr. con respecto a la distr. *Normal* para la cual $\beta_2 = 3$. Por esto se suele considerar: $\beta_2 - 3 = \begin{cases} = 0 & \text{mesocurtica=}\textit{Normal, Binomial}\text{ p=.5} \\ > 0 & \text{leptocurtica, mas apuntada=}\textit{Poisson, T-Student} \\ < 0 & \text{platicurtica=}\textit{Distr. Uniforme}\text{ (no }\textit{Val. Atipico}\text{)} \end{cases}$ (ver Fig. 21.1). Sin embargo, recientemente muestran que la curtosis no tiene nada que ver lo picuda de una distrib. e indica más bien la prob. de *Val. Atipico*

  Ej: Ruido blanco pasado por filtro leptocurtico, a mayor curtosis mas se oye el *Tono* puro. Se obtener de *Momento* Ej: Ver *Prueba Jarque-Vera*

- Otras:
  - Distr. simetrica: si $\exists$ el mismo num de valores a izda y dcha.
  - Coef. de asim. de Pearson: para distrib. campaniformes (unimodales y moderadamente asim.) el coef. $G_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \begin{cases} = 0 & \text{media y moda coinciden} \\ > 0 & \text{media está a dcha de moda} \\ < 0 & \text{a izda} \end{cases}$
  - Coef. de asim. de Bowley: $d = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)} = \begin{cases} = 0 & \text{simetr.} \\ +, - & \text{según Me a dcha o izda de la Mo} \end{cases}$

Chapter 22

T61. Desigualdad de Tchebyschev. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos.

22.1 Introducción: 5-sigma, máquina de Galton. Común de: l. grandes num., tma dorado de bernoulli y tma consist (tcheby y convergencia en probabilidad)

- Ej-motivador: Ej1: ¿que significa 5-sigma para aceptar un descubrimiento de partícula? *Regla del Pulgar*. Ej2: ¿porqué una *Maquina Galton* da una *Normal*? Ej3: ¿que tienen en común *Ley Grandes Num.*, *Tma Dorado Bernoulli*, *Tma Consist.*? (dem. *Des. Tcheby* y *Conv. Prob.*)

- Importancia-histórica: *Des. Markov*, *Des. Tcheby*, *Ley Grandes Num.* (da *Tma Dorado Bernoulli* y *Ley del Azar*) *TLC* (da *Maquina Galton*, *Tma Moivre-Laplace* y *Distr. Muestral* de la *Media Mu.*)

22.2 Variable Aleatoria: variable aleatoria y transformación

Var. Aleatoria, *Transf. de VA*, *Alg. de VA*

22.3 Desigualdad de Markov: X, a>0, rel. f. distrib. y media, dem. (con FDP o con variable indicatríz), salarios. Des. Tchebyschev: rel. i. de confianza, media y var., dem. (Markov con a=ks, g(y)=(x-mu)2, regla del pulgar y significación, stock.

- *Des. Markov* : $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$, donde $X > 0, a > 0$ *Var. Aleatoria* y cte positivas (algunos la escriben con abs). Relaciona contraria de *F. de Distr.* acumulada con *Media* [1]. En Teor. *Medida* se enuncia sustituyendo *Esp. Prob.* (Ω, S, P) por *Esp. Medida* (Ω, Σ, μ). Propiedad: $P(|X| \geq a) \leq \frac{E[g(|X|)]}{g(a)}$ si además g monótona creciente. Ver *Transf. de VA*. Ej: *Momento* $P(x \geq a) \leq \frac{E[|x|^k]}{a^k}$. Dem.:

  Considerando $f(x)$ una *FDP* (*Metod. Dem.* Directa): $p(x \geq a) = \int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty \frac{x}{a} f(x)dx \leq \frac{1}{a}\int_a^\infty x f(x)dx \leq \int_0^\infty x f(x)dx = E[x]$. Ej: Fig. 22.1 para *FMP*

  - $P(X \geq 8) = \sum_{x=8}^{12} P(x) \iff 8P(X \geq 8) = \sum_{x=8}^{12} 8P(x) \leq \sum_{x=8}^{12} xP(x) \leq \sum_{x=2}^{12} xP(x) = E[x] \iff P(X \geq 8) \leq \frac{E[x]}{8}$

  Considerando *Var. Indic.*: $I_A = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } A \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \forall$ suc. A. $\Rightarrow$ es claro que $aI_{X \geq a} \leq X$ (si ocurre $X \geq a \Rightarrow a \cdot 1 \leq X$). Considerando que $E[aI_{X \geq a}] = a[1p(x \geq a) + 0p(x < a)] = ap(x \geq a)$ y como $E[]$ es monotona creciente llegamos a $p(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

  Ej: A lo sumo solo un $1/5$ de la población puede ganar salario mayor que 5 veces salario medio $p(X \geq 5\mu) \leq 1/5$

- *Des. Tcheby* : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \iff P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$. Da la prob. de un *I. Confianza* al rededor de la *Media* en función de la *Varianza*. Dem.:

  Considerando la *Des. Markov* con $a = k\sigma; Y = (X - \mu); g(Y) = Y^2$ podemos $p(|X - \mu| > k\sigma) < \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = 1/k^2$

  Para dem.: *Ley Grandes Num.*, *Tma Dorado Bernoulli*, *Tma Consist.* mediante *Conv. Prob.*

  Ej: *Regla del Pulgar* o de los 3-sigma (*Estad. Cientif.*): Por la *Des. Tcheby*, sea cual sea la distribución, podemos garantizar que el 88.8% ($1 - 1/3^2$ *Confianza*) de las observaciones se encontrarán en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$ (si *Normal* entonces 99.7%).

[1] da una cota superior para la probab. de que una F.+ de una VA sea mayor que una cte+, Fig. 22.1

α Signif. (*Confianza*)	n-sigmas (*Normal*)	uso
0.32 (0.68)	1	puntos de inflexión
0.05 (0.95)	2	convencional (Biología, Social)
0.003 (0.997)	3	evidencia de partícula
0.0000003 ()	5	descubrimiento de partícula

Ver *Contraste Hipot.* y *Precesion Mercurio*.

En Física de Partículas se considera descubrimiento a partir de 5-sigma 96.0% (99.99994%) Ej: Boson de Higgs [a] Los papers deben tener un buen tratamiento estadístico de sus resultados [b]

[a] En 2012 LHC anunció el descubrimiento de un bosón en la región de masas alrededor de 125–126 GeV, con un valor estadístico al nivel de 5 sigma. Esto implica un alto *Tam. Muestra*, repetir muchas veces el experimento si la varianza es grande (y la repetición suele ser costosa)

[b] Un 50% de las publicaciones en revistas de prestigio Médicas lo hacen mal. Ej: en el Covid19, The Lancet publicó un artículo malo que decia "la hidroxiclorquina (usada en malaria y artritis) no ayuda". Debemos ser rigurosos: demostrar cuando un resultado es significativo (Prueba Wilcoxon). Evitar afirmaciones "según nuestra experiencia", "los datos parecen mostrar que", "el test informal muestra".

Ej: Si demanda semanal $\mu = 500$ con $\sigma = 20$ ¿unidades en stock para abastecer con prob. 0.9?. $1 - 1/k^2 \geq 0.9 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow p(420 \leq X \leq 580) \geq 0.9 \Rightarrow 580$ unidades

22.4 Ley de los Grandes Números: débil (Xn converge en prob. a mu, no iid, Dem. Tcheby), fuerte (Xn conv. casi seguro a mu, iid). Tma del Límite Central (Zn conv. en distrib. a N(0,1), iid, Cauchy conv. a Cauchy, máquina de Galton)

	Forma de VAs $X_1, X_2, \ldots$	Comportamiento de *Media Mu.* $\bar{X}_n = \frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{n}$	Tipo convergencia
Ley Grandes Num. (1) Débil [Bernoulli para VA binomial, Rusos mas general]	*Indep.* con diferente distribuc. (no i.i.d.) con igual μ y σ	$lim_{n\to\infty} P(\lvert\bar{X}_n - \mu\rvert < \varepsilon) = 1$	$\bar{X}_n$ (de VAs, *Media Mu.*) *Conv. Prob.* a μ. Dem. con *Des. Tcheby* (2). Ver *Conv.*
Fuerte [Laplace, Gauss, Rusos]	i.i.d. con igual μ (y *Conv. Abs.* $E[\lvert X_i\rvert] < \infty$) (no *Distr. Cauchy*) pero diferente σ	$P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$	$\bar{X}_n$ *Conv. casi Seg.* μ. Implica a la débil.
Tma del Limite Central *TLC* [Moivre el 1º y Lyapunov basándose en Rusos, Polya nombra así]	i.i.d. con igual μ y $0 < \sigma < \infty$ (no *Distr. Cauchy* [2])	$Distr[\bar{X}_n] \to N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$ o *Tipific.* $Distr[\bar{Z}_n] \to N(0,1)$ [3]	$\bar{X}_n$ *Conv. Distr.* (conv. en distr.) a *Normal*. Dem. con *Func. Caract.*. Es la *Distr. Muestral* de la *Media Mu.* o el *Tma Moivre-Laplace* implementado en *Maquina Galton=Error=Normal*.

- (1) *Ley Grandes Num.*: prescriben las condiciones de convergencia y del comportamiento del $\bar{X}_n$ de una sucesión de variables aleatorias conforme aumenta su número de ensayos. Ver *Dinam. Social*, *Entropia*

- (2) La *Des. Tcheby* podemos reescribirla como $p(\lvert x-\mu\rvert < k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$, reemplazando $p(\lvert\bar{X}_n - \mu\rvert < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) > 1 - \frac{1}{k^2}$ donde si $\varepsilon = k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow p(\lvert\bar{X}_n - \mu\rvert < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$. Tomando $\lim_{n\to\infty} p(\lvert\bar{X}_n - \mu\rvert < \varepsilon) = 1$ (*Conv. Prob.*)

22.5 Proceso de Bernoulli (caso ley grandes num. débil): señal (0,1)s, B(Fn;n,mu=np,var=npq). Tma dorado de Bernoulli (caso TLC): Fn/n conv. prob. a p (proporción muestral), dem. con Tcheby. Tma Moivre-Laplace (caso de TLC): B(k;n,p) conv. distr. N(x=k,mu=np;var=nqp), Dem. Stirling. Tma Consistencia (dem. Tcheby)

- *Proc. Bernoulli* $I(n)$: señal *Estoc.* de long. n de éxitos A y no éxitos $\bar{A}$ con "prob. del éxito" $P(A) = p$ [4]

[2] si las VA son de *Distr. Cauchy* conv. a otra de Distr. Cauchy pues es *Distr. Estable*

[3] $\bar{Z}_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma/n}$

[4] formalmente es una repetición de n *Ensayo Bernoulli Indep.* donde cada ensayo es un *Exp. Aleatorio* donde vemos si ocurre un suceso A (éxito) frente al resto, ver *Entropia Inform.*. Ver *MLE*

- *Var. Indic.* =*F. Indic.*=*F. Booleana*: $I(i)_A = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } A \text{ en exper. i} \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$, i.e. conversión de *Proc. Bernoulli* a*Var. Aleatoria*.

La prob. de obtener F_n éxitos (*Frec. Abs.*) sobre $I(n)$ sigue una *Binomial* $B(F_n;n,np)$ con $E[F_n] = np$ y $Var(F_n) = npq$, donde $q = 1-p$. Dem:

Sabemos $E[I(i)_A] = \sum_i p_i x_i = 1p + 0q = p$ y $Var[I(i)_A] = E[(I(i)_A - p)^2] = p(1-p)^2 + q(0-p)^2 = qp$. $E[F_n] = E[I(1)_A] + \ldots + E[I(n)_A] = np$ y $Var[F_n] = Var[I(1)_A] + \ldots + Var[I(n)_A] = npq$

Ej: Problema del Amanecer (*Infer. Bayes.*)

	Caso de ... para *Proc. Bernoulli*	Tma	
Tma Dorado Bernoulli [Jacob, 1713, 20 años en dem.]	*Ley Grandes Num.* débil (Markov, Tcheby)	$\lim_{n\to\infty} P(\lvert\frac{F_n}{n} - p\rvert > \varepsilon) = 0$ *Conv. Prob.*	Es la *Ley del Azar* (*Prob. Frec.*): precisa la aprox. de la *Frec. Rel.* o *Prop. Mu.* F_n/n de un suceso A a su $P(A)$. Prueba con *Des. Tcheby* (1)
Tma Moivre-Laplace [Moivre 1738 (sin usar término Ensayo de Bernoulli) estudia el n^o de veces que aparece cara en 3600 lanzamientos]	*TLC*	$B(k;n,p) \to N(X = k;\mu = np;\sigma^2 = npq)$ *Conv. Distr.*	Aproxima la *Binomial* a la *Normal*. Prueba con *Form. Stirling* (Fig. 22.1, *F. Aritm.*). Implementado en *Maquina Galton*, Ver *Prop. Mu.*.

- (1)

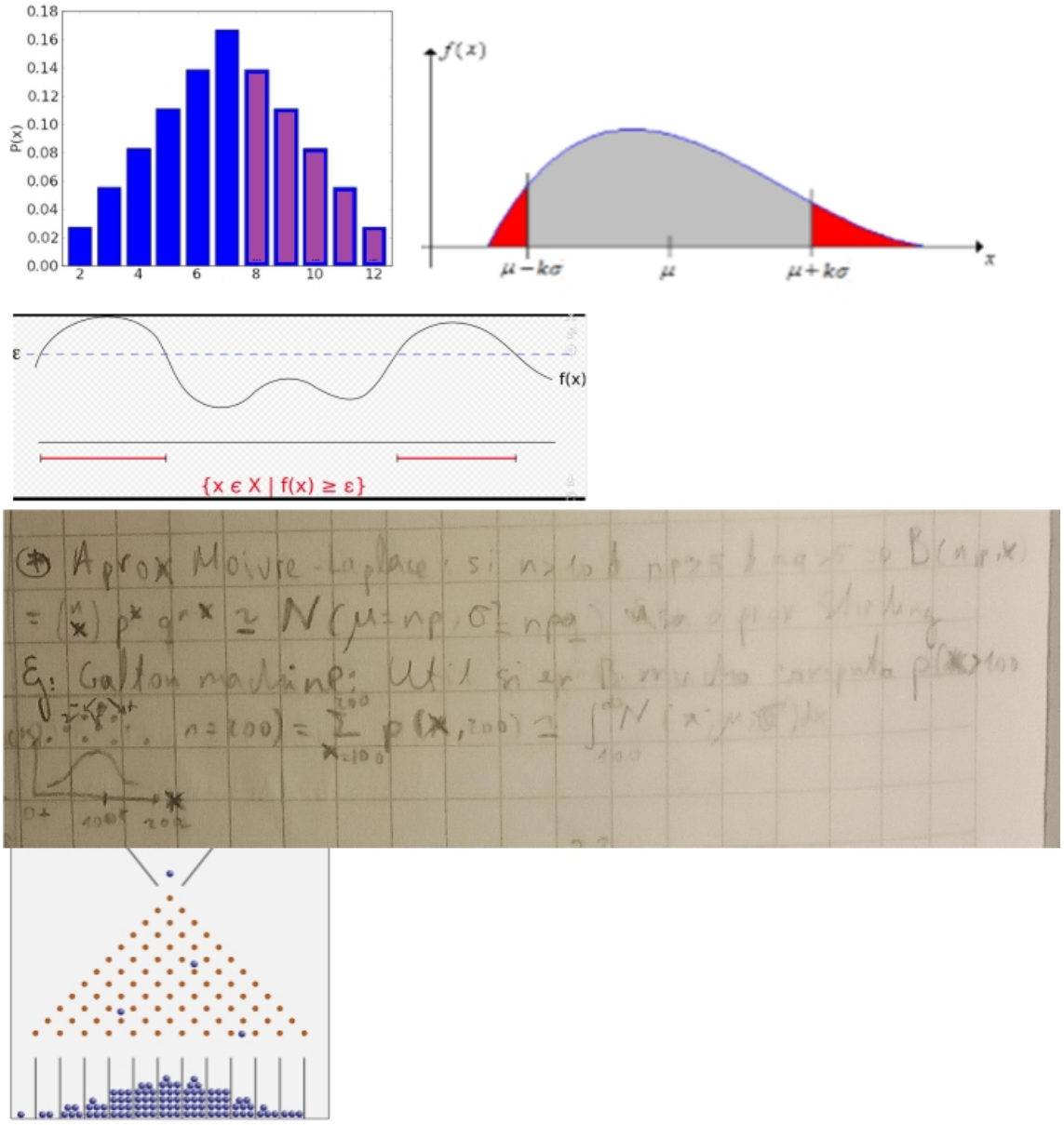
Dem. de Tcheby: Sea VA $\frac{F}{n}$ $P(\lvert\frac{F}{n} - p\rvert \geq k) \leq \frac{pq}{nk^2} < \frac{1}{4nk^2}$ ya que $pq < 1/4$.

- Otras: *Tma Consist.* (dem. con Tcheby)

22.6 Coeficiente de variación (adim., Weber). Variable normalizada (Zn, TLC). Aplicaciones: tamaño de muestra e intervalo de confianza

- *Coef. Var.*: *Medida Adim. L. Weber*
- *Tipific.*: Z_n *TLC*, *Tam. Muestra* y *I. Confianza*

Figura 22.1: Pdf con μ y k de Desig. Markov y Tcheby



Chapter 23

T62. Series estadísticas bidimensionales. Coeficiente de variación. Variable normalizada. Aplicación al análisis, interpretación y comparación de datos estadísticos.

23.1 Introducción: Forma de la tierra. Gauss predice Ceres (planetoide del cinturón Marte-Jupiter) sin Kepler. Modelo de Lenguaje (música)

- Ej-motivador: Ej1: Forma Tierra Legendre (ver *Regr.*). Ej1: *Pred. Ceres* : un italiano sigue 40 dias Ceres (planetoide del cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter) pero luego se pierde y nadie lo encuentra. Gauss con *Regr. Min. Cuadr.* predice su aparición un año después (sin resolver las ec. complicadas de *L. Kepler*). Otros triunfos del *Determ. Laplac.* son Neptuno y Planeta-9. Son *Probl. Inv.* [1]

  Ej2: ¿que son las *Depend. Estad.* de un *Mod. Lenguaje* o musical?

- Importancia-histórica: *Covarianza* vs *Corr. Cruzada*, *Regr. Min. Cuadr.*, *Correl. Causal.*, *Aprend. Autom.*

23.2 Serie bidimensional: muestro de var. aleat. (X(t),Y(t)). Tipos: estad. (espacial, altura-edad), estoc. (temporal, voz ruido), ambas (voz), ninguna (2 monedas). Notación: xi,yj (nominativa) y nij,fij (frec. abs y rel.)

- Serie Bidim.: *Muestr.* de dos *Var. Estad.* (*Nomin.*) o *Var. Aleatoria* (cuant.), o generac. de *Mod. Estad.*: $\binom{X(t)}{Y(t)} = \binom{x(1)}{y(1)}, \binom{x(2)}{y(2)}, \ldots \binom{x(t)}{y(t)}, \ldots \binom{x(N)}{y(N)}$.

[1] el seguimiento de Urano mostraba una órbita extraña, Leverrier predijo en una carta que era por otro planeta (Neptuno), el observatorio ¡descubrió Neptuno en una noche! en cuanto llegó la carta. El Planeta-9 supone perturba cinturón de Kuiper

- Tipos:
  - Serie Espacial (*Estad.*): si hay relación entre las variables X,Y. Ej: $X : Edad, Y : Altura$
  - *Serie Temporal* (*Estoc.*): si hay *Depend. Estad.* temporal entre las muestras. Ej: $X : Voz, Y : Ruido$.
  - Serie Esp.-Temp.: *Mod. Prod. Voz*
  - Serie ni Temp. ni Esp.: lanzamos dos monedas dos veces. $(X_1 = NumCaras1, X_2 = NumCaras2)$ con $Xi = \{0,1,2\}$ (nº de caras) $Xi \sim B(2, \frac{1}{2})$.
- Notación: usaremos la t para numerar datos del muestreo. En caso de X,Y *Nomin.* o discretas usaremos x_i, y_j para enumerar los posibles valores que pueden tomar y $n_{i,j}$ y $f_{i,j}$ para sus *Frec. Abs.* y relativa respectivamente.

23.2.1 Representaciones: diagrama de dispersión (VA o nº, Ascombe), tabla de contingencia (nominativos, votos según sexo, distr. conjunta, marginal, condic. y total), barras 3D. Estoc.: espectro/cocleogram.

- *Diagr. Disp.* : gráfico con las muestras $(X(t), Y(t))$ de dos *Var. Estad.* cuant. o *Var. Aleatoria*. Ej: *Cuarteto Anscombe* Fig. 23.1, Ej: scatter plot en papers Proteinas con linea $y = x$ para mostrar mejor clasificador.
- *Tab. Conting.* o Doble Entrada: tabla con los valores $n_{i,j}$ de *Var. Estad.* normalmente *Nomin.* o *Ordin.*. Ej: muestreo del *CIS* del nº de votos a candidatos A,B y C según sexo (*Prueba Chi2 Depend. Estad.*):

Sexo \ Candidato	A	B	C	Total
hombre	23=*Frec. Abs.* Obsers. (12.7=33$\frac{37}{96}$ *Frec. Abs.* Esperada)	4 (6.9)	10 (17.3)	37
mujer	10 (20.3)	14 (11.1)	35 (27.7)	59
Total	33	18	45	96

  - *Distr. Conjunta* $p(x_i, y_j) = \frac{n_{i,j}}{N}$, *Distr. Marginal* $p(x_i) = \sum_j p(x_i, x_j)$, *Prob. Condic.* $p(x_i|y_i) = \frac{p(x_i,y_i)}{p(y_i)}$ y *Marginal Total* $\sum_i p(x_i|y_j) = 1$ (hacerlo sobre la tabla).
  - *Barras 3D* (3D bar chart): Paralelipedos Fig. 20.1, (no confundir con estereograma que necesita visión divergente)
- *Repres. Estoc.* 2D: espectrograma, cocleograma (salida gammatone) ver Fig. 23.1 de Proceso no *Ergod.*.

23.3 Coeficiente de variación: [0,1], entendible, adim., invar. homot, no afín. Weber, ¡mu=0!. Variable tipificada: z=[-1,1],mu=0,s=1, comparar (entrenar, umbralizar) tablas, adim. no homot., Pearson, TLC, tam. muestra, i. conf.. Ej: bombilla (control calidad), nº CI>130

- *Coef. Var.* o Desv. Estánd. Relativa=¡*L. Weber*!: de una *Var. Aleatoria x*) $CV_x = \frac{\sigma_x}{|\mu_x|} \approx [0,1]$ donde σ_x es la *Desviac. Tip.* Ventajas: Refleja mejor que σ_x la variabilidad de los datos. Es como el error abs y rel. Es una *Medida Adim.* (no tiene unidades permitiendo comparar entre diferentes variables. No *Transf. Afin* ($CV_{ax+b} \neq CV_x$) pero es invar. *Homot.* $CV_{ax} = CV_x$. Inconvenientes: No fiable si $\mu_x \approx 0$.

- Var. *Tipific.* o Normalizada o Estandarizada: $z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \Rightarrow E[z] = 0; \sigma_z^2 = 1$ *Normal*(0,1). [2] Ventajas: limita a [-1,1], $E[z] = 0, Var[z] = 1$ comparar mejor datos (*Entren.*, umbralizar)). *Medida Adim.*. No *Homot.* (ni *Transf. Afin*).Ej: *Coef. Pearson*, *Corr. Cruzada* tipificada, *Tam. Muestra* y *I. Confianza*. *TLC*, *Prueba Z*

  - Ej *Control Calidad*: ¿bombilla con menos dispers. en duración? $C1 = \frac{280horas}{1500horas} = 0.186$ vs $C2 = \frac{310horas}{1900horas} = 0.163$ aunque $\sigma_2 > \sigma_1, C_1 > C_2$.
  - Ej *Biometr.* % alumnos $CI > 130$. Si $\mu = 100, \sigma = 20$. $P(x > 130) = P(\frac{x-100}{20}, \frac{130-100}{20}) \iff P(z > 3/2) = [$ tablas N(0,1) $] = 0.07$.

23.4 Covarianza: depend. +/-, momentos bidim. (E[xrys] mu11=Sxy, mu10=mx), m. covar (Normal) y Pearson (Tipif). Correlación cruzada: autocorr. sesgada, tipific., estacionario (R(t1-t2)=R(t), Wiener-Khinchin), ergodico (caminos aleatorios)

- *Covarianza* (*Param. Estad.* espacial): $\sigma_{x,y} = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = E[xy] - \mu_x\mu_y$. Si normalmente ocurre que $(x_t - \mu_x) > 0$ cuando $(y_t - \mu_y) > 0 \Rightarrow \sigma_{x,y} > 0$ y se dice existe *Depend. Estad.* (correl.) positiva entre X e Y. Ver *Regr. Min. Cuadr.*

  - *Momento Bidim. Sesgad.*: medida espacial: $m_{r,s} = E[x^r y^s]$. Ej: caso discreto: $m_{r,s} = \sum_{i,j} x_i^r y_j^s p(x_i, y_j)$. Momento Bidim. Centrad.: $\mu_{r,s} = E[(x-\mu_x)^r (y-\mu_y)^s]$. Al igual que con los unidim. podemos Param. como *Momento* Ej: $\sigma_{x,y} = \mu_{1,1}, \mu_x = m_{1,0}, \mu_y = m_{0,1}$.
  - *Covar. vs Indep.* si X e Y son VA *Indep.* $\Rightarrow E[xy] = 0$ y por lo tanto su $\sigma_{x,y} = 0$. El *Reciproco* no es cierto ($\sigma_{x,y} = 0$ *No Impl.* Indep.), ej: X *Distr. Uniforme* e $Y = X^2$. Ver suma *Alg. de VA*
  - *Coef. Pearson* su versión *Tipific.*.

[2] $z \sim N(0,1)$: para buscar en tablas: $P[a < X < b] = P[\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}] = P[\alpha < z < \beta]$

- *M. Covar.* : *Covarianza* para señal multivar. 3D de N muestras $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & & \\ x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$. $\Sigma_X = E[(X-\mu)(X-\mu)^T] = \frac{XX^T}{N} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_y^2 & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$. Es *Hermit.*. Usada en *PCA* y aparece en *Normal* multivar. Ver *Regr. Lin.*, *Prod. M.*

- *Corr. Cruzada* (Param. *Estoc.*): *Autocorr.* $R_X(t_1,t_2) = E[x(t-t_1)x(t-t_2)]$.
  - *Estacion.*: $R(t_1,t_2) = R(t_2-t_1) = R(\tau)$. *Tma Wiener-Khinchin*. Similar a con *Convol.*. Ver *Ergod.*
  - *Tipific.*: $\rho_{X,Y}(\tau) = \frac{R_{X,Y}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}$ similar al *Coef. Pearson*.
  - *Sesgad.* (triángulo o biased) es más *Efic.* que la insesgada [3]. Ambas son *Consist. Estad.* (mejoran al crecer nº de nuestras)
  - *M. Autocorr.* : similar a *M. Covar.* para multivar. pero $R_X = E[XX^T]$. Es *Hermit.* no confudir con las M. *Toeplitz* para señal 1D de *ARMA* para *Rec. Voz* y proc. *Estacion.*

23.5 Regresión a la media: altura hijos. R.: hipersuperf., pol. Vandermonde, aprendizaje autom (predecir, clasificar) o diseño experim.. R. Lin: plano, sist. sobredet. y forma cerrada MMSE (XtXw=XtY, m. covar.), otras normas Lp: desviación abs. Tma Gauss-Markov (BLUE)

- *Regr. a la Media* , término por [Galton], es la *Tendenc.* de una medición extrema a presentarse más cercana a la media en una segunda medición. Ej-Galton: La estatura de padres e hijos, si p altos, h altos pero no mucho, si p bajos, h bajos pero no mucho.

- Análisis de *Regr.* o Modelado: *Entren.* un *Mod. Estad. Optim.* un *Error*. Es un tipo de *Interpol.* de una *Hipersuperf.* o *Var. Alg.*. Ej: Regr. *I. Polin.* para ajuste de *Conica* (*Tma Pascal*) en Problema de Forma de la Tierra de Legendre y Laplace:

  $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 x_1 x_1^2 \ldots x_1^p \\ 1 x_2 x_2^2 \ldots x_2^p \\ \ldots \\ 1 x_N x_N^2 \ldots x_N^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ .. \\ w_p \end{pmatrix}$$

  Sol. como *Regr. Lin.* pero con M. *Vandermonde* [4].

  Tiene 2 usos:

  - *Aprend. Autom.* o predicción: *Clasif. Bin.*, *Dat. Perd.*, Predicción o *Interpol.*...
  - *Dis. Exp.*: comprobar causas y efecto.

  Evitar el *Sobreajuste* y la *Endogeneidad*. Ej: *Regr. Logistica*, *PCA* (*Elipsoide*), *Aprend. Autom.*

[3] el problema de la insesgada es que a τ altos tiene pocas muestras y la *Var. Estim.* no tiende a 0, $Var[R(\tau)] \not\to 0$
[4] Se diferencia del *Kriging* en que hay más de un valor posible del *Campo Aleatorio*

- *Regr. Lin.* : el *Mod. Estad.* es un *Hiperplano* $y(i) = b_0 + a_1x_1(i) + a_2x_2(i) + ... + a_nx_n(i) + \varepsilon$. Usando el truco de la *Coord. Homog.* que incluye a b como parámetro luego queda el *Sist. Sobredet.* $y = Xw$: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ \dots & & \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

  Su sol. la *Optim.* de un *Error* o Norma *Esp. Lp* $min_w||Xw - y|| = 0$. Con *SGD* podemos resolverlo sobre cualquiera (*Desviac.* Abs. L_1, *RMS*, etc.). La que tiene *Forma Cerrada* es cuando usamos L_2 o *MSE* (la de *Regr. Min. Cuadr.*):

  $$\boxed{\iff \frac{\partial||y-Xw||^2}{\partial w} = 0 \iff -2X^T(y-Xw) = 0 \iff X^TXw = X^Ty \iff (M_1)w = (M_2)y \iff w = (M_1)^{-1}(M_2)y. \; M_1 \text{ es la } M.\ Covar.\ (Teor.\ Unif., Prod.\ M.)}$$

  Ej: *ARMA Rec. Voz.*

- *Tma Gauss-Markov* : la *Regr. Lin.* con Norma *Esp. Lp*2 o *MSE* es el BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) más *Efic.*, i.e. de entre todos las *Regr. Lin.* In*Sesgad.*s, la *Regr. Min. Cuadr.* es la de menor *Var. Estim.*. Ver *MSE*, *Kriging* y *Estim. James-Stein*.

23.6 Método de los Minimos Cuadrados: 2 rectas, Y=Xw (coord. homog., regr. lin. desarrollo a y b). Coef. Pearson ro=vxy/vxvy (desarrollo), si ro=0 puede otra depend. (Anscombe). Prueba R. ro=f(T-Student)=>EC

- *Regr. Min. Cuadr.* [Legendre,Gauss]: *Regr. Lin.* con *Error MSE*. Existen dos rectas de regresión $y = f(x), x = g(y)$ pero nos centramos en la 1ª. El *Sist. Sobredet.* $y = Xw$ ahora es $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (truco de *Coord. Homog.*). cuya sol. sale de $(M_1)w = (M_2)y$ ver *Regr. Lin.* y Fig. 23.1. $a = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$ (se parece a *Coef. Pearson*, depende de *Covarianza* y cumple *Anal. Dim.*

- *Coef. Pearson* de *Correl. Lin.* (no confundir con *Depend. Estad.*): $\rho = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x\sigma_y}$: es la *Covarianza Tipific.* (se parece a pendiente a de *Regr. Min. Cuadr.* y cumple *Anal. Dim.*). Indica el grado de "apretura" de la nube de puntos. Se obtiene expresando el *MSE* como covarianza de x e y: Fig. 23.1. $\rho \in [-1,1]$ consecuencia de la Des. Cauchy-Schwarz. Indica el tipo de correlación lineal X,Y. Si $\rho = 0$ no implica variables independientes, solo indeped. lineal (puede haber cuadrática). Ver *Cuarteto Anscombe Depend. vs Correl.*

- *Prueba Regr.* y *Prueba Chi2* (para *Nomin.*).

23.7 Malentendidos: correlación No Implica (NI) causalidad (calentamiento global), corr. NI corr. lineal (dependencia lineal) Anscombe (4 con igual mu, var y ro)

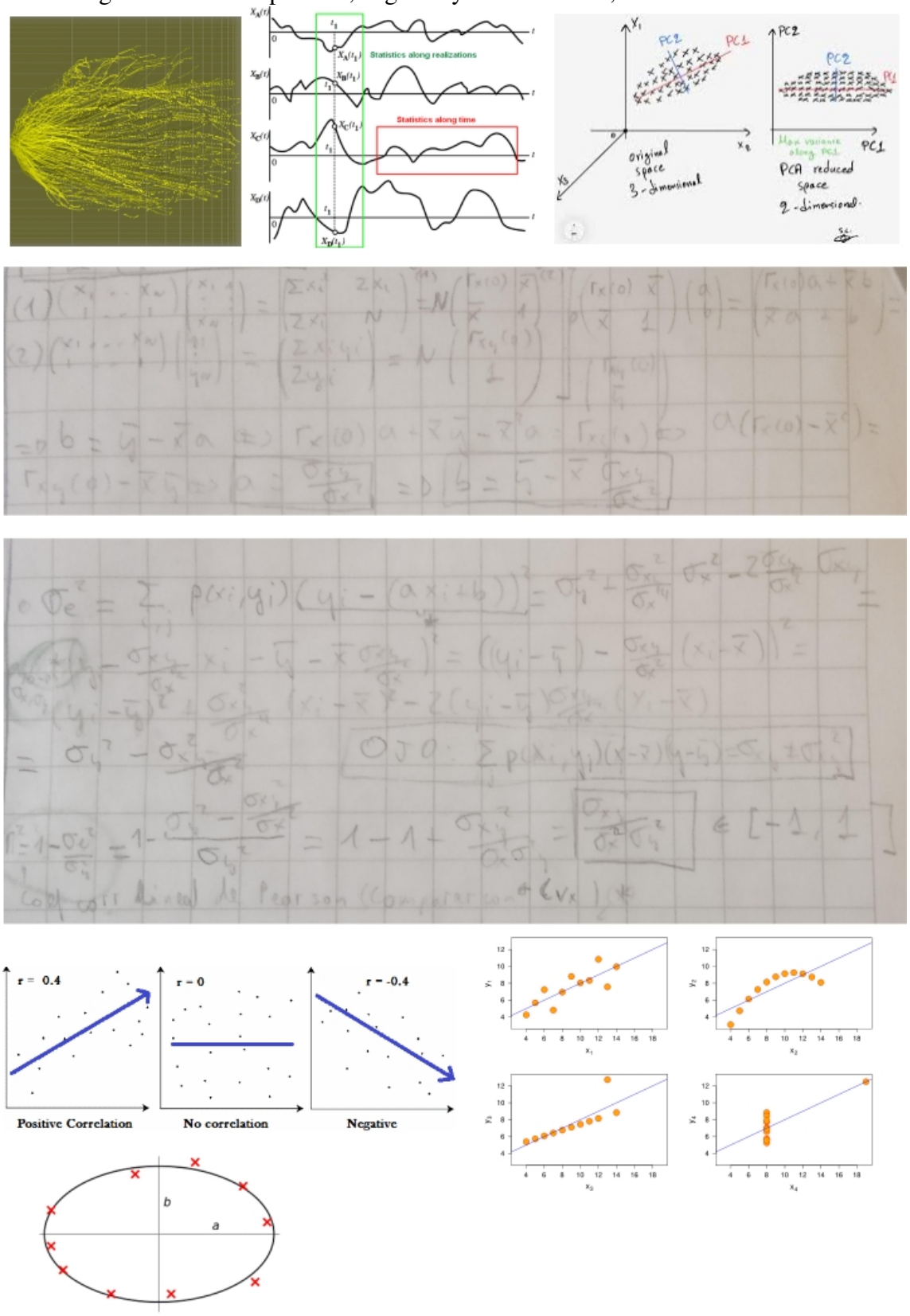
- *Correl. Causal.* : Correlación *No Impl.* Causalidad. *Calent. Global* (actual) vs Cambio Climático (historia de la Tierra): por CO2, ver *Creer en Ficciones*, *Apuesta Pascal*. La gente con animales vive más años. Fumar mata. Ver *Dis. Exp.*.

- *Depend. vs Correl.* : Correl. *No Impl. Correl. Lin.*. Muchas veces se usa Correl. como sinonimo de *Correl. Lin.* y esto no siempre es cierto. El *Cuarteto Anscombe* (Fig. 23.1, 4 *Diagr. Disp.* con igual $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x^2, \sigma_y^2$, ρ y recta de regresión) lo muestra. Por eso aquí usamos la palabra *Depend. Estad.* para hablar de cualquier tipo de Correl. entre las *Var. Estad.* (puede ser *Estad.* o *Estoc.* (*Mod. Lenguaje*)). Ver *Prueba Chi2*, *Prueba Regr.*

23.8 Aplicaciones: linealizar ley (paradoja de la costa, cte gravedad y=0.5gt2), regresión logística, aprendizaje automático

- *Rec. Voz* con *ARMA* u obtención de *Filtro FIR*.
- *Lin. Ley* : *Par. Costa*, Cte Gravedad (*Par. Seguridad*) $y = \frac{1}{2}gt^2 \iff lny = 2lnt + ln\frac{1}{2}g$ o Péndulo.*Dis. Exp.*. Ver *Error*
- *Regr. Logistica* [Cox60]: $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $y(\mathbf{x} = x_1, ..., x_n) = \frac{1}{1+exp(-\sum_i^n \beta_i x_i)}$. Se entrenan los β_i por ML para que en los casos+ $y \to 1$ y viceversa. Ej: x=(peso,altura), y=(hombre|mujer). *Regr. Lin.* con *F. Logistica*
- *Aprend. Autom.*

Figura 23.1: Corr. positiva, negativa y decorrelación; Cuarteto Anscombe



Chapter 24

T63. Frecuencia y probabilidad. Leyes del azar. Espacio probabilístico.

24.1 Introducción: ¿significado de P(algo)=0.3 si a) realizar inf. veces, sucesos infinit., acepciones (creencia, f. rel.)?

- Ej-motivador: Ej1: ¿que significa que "algo tiene probabilidad de ocurrir 1/3"? la probabilidad de un *Event.* es difícil definir por:
  - nunca podemos realizarlo infinitas veces
  - hay sucesos infinitesimales (densidad de prob.)
  - tiene varias acepciones validas (creencia, frecuencia relativa...).
- *Hist. Prob.*
- Importancia-histórica: *Sigma-Algebra*, *Prob. Frec.*, *Esp. Prob.*, *Princ. Inclusion-Excl.*, Desig. de Bonferroni (ver)

24.2 Experimento: Determinista: predecibe Bajo las Mismas Condic. (BMC) (laplac. comput.). Aleatorio: conoces poblac. pero no predecible BMC, debate construct. (impregna la Ciencia). Pseudoaleat. (caos, gen. lin. congr.). Teor. Prob. (impregna la Ciencia): 1) def. prob. 2) uso y 3) fundam. estad. Teor. Prob.: 1) def. prob. 2) uso y 3) fundam. estad.

- Tipos de Experimentos o Medidas (*Muestr.*) Empíricas:
  - Exp. Determinista: produce el misma resultado **Bajo las Mismas Condiciones Controlables** (BMC). Ej-continuo: Posición orbital de la tierra en un momento del año *Determ. Laplac.*. Ej-algor: *Turing*-Comput. *Regla Trapecio*, salida (secuencia) de un algoritmo con una entrada (semilla).

  - *Exp. Aleatorio* : si previamente conoces los posibles resultados *Poblac.* o *Esp. Muestral* pero no puedes predecirlos BMC. El *Error* o incertidumbre nos guste o no impregna la Ciencia Empírica (se debate su origen *Incert. Fisic.*) y la Matemática (*Num. Aleatorio Fuente Inform.*).
  - Exp. *Pseudoaleat.* : parecen aleatorios pero son generados por un algoritmo determinista. Ej: *Irreduc. Wolfram*, Sist. *Caos* (*Apl. Logist.*), *Generador Lineal Congruencial*. *Int. Monte Carlo*,

- *Teor. Prob.* : necesaria por *Incert. Fisic.* y *Exp. Aleatorio* pero ¿como podemos hablar de *Ley del Azar* si el azar es lo opuesto [Russell]?. Esta se encarga de:
  - *Interpr. Prob.* prefiriendo la *Prob. Axiom.*
  - analogías y uso correcto: *Tma Bayes*
  - Fundamenta la *Estad.*.

24.3 Suceso elemental (exp. aleat., suc=estado-entrop.). Espacio muestral (población). Evento (op. lógico). Sigma-Álgebra (conj. pot., event, clausura: vacio, completo, unión), seguro/imposibe, Borel. Álgebra de sucesos: conj. con ocurrir (in, subset) (N, O, Y incomp.) (dif. sim., Morgan, incl.-excl.)

- Definiciones de Esp. Muestral:
  - *Suc. Elem.* o *Realiz.*/observación/outcome/resultado ω: uno de los posibles resultados de realizar una sola vez un *Exp. Aleatorio*. Se diferencia del *Event.* en que es indescomponible en otros más simples. No tiene porque ser un num., puede ser una *Sentenc.* como "bola roja" (ver *Var. Aleatoria*, *Realiz.*) o un estado de *Entropia* $S_i =$"suma de energías=i"
  - *Esp. Muestral* Ω: Conj. de todos los *Suc. Elem.* de un *Exp. Aleatorio* (*Poblac.*). Puede tener las tres *Cardin.*es (finita, contable e incontable), ver Fig. 24.1.
  - *Event.* o Suc. Compuesto o Suc. E_i: cualquier elemento resultante de aplicar *Op. Log.* (OR, AND y NOT) a los elem. del *Esp. Muestral* (*Suc. Elem.*). Es cualquier elemento de un *Sigma-Algebra*

- *Sigma-Algebra* Σ: sobre un conj. Ω (en nuestro caso el *Esp. Muestral*): $\Sigma \subseteq Pot(\Omega)$ un subconj. (de cualquier *Cardin.*) del *Conj. Potencia* de Ω *Clausur.* bajo todas las *Op. Log.* (O, Y y NO), ver Fig. 24.1
  - Ej: *Sigma-Alg. Borel*. Los "Im*Propio*" Ω y $\emptyset$ siempre están en Σ y se llaman *Event.* seguros e imposible, como *SubEV*. Ej: $Pot(\Omega)$ es la mayor Sigma-Algebra posible de Ω y $\{0,\Omega\}$ la menor. No es una *EA* (si la unión es cerrada solo para uniones finitas es solo Álgebra??). Base de la Teor. *Medida*.

Sea $\Sigma = \{E_1, E_2 ...\}$ (familia de *Event.*) es *Sigma-Algebra* $\Longleftrightarrow$

1. Vacío: $\emptyset \in \Sigma$.
2. Complemento: $\bar{E}_i \in \Sigma$.
3. Unión: $\cup_i E_i \in \Sigma$ cerrada para uniones contable (infinitas incluido)

- *Alg. Suces.* o de *Event.=Alg. Conj.=Alg. Boole*: ver *F. Booleana* ("pertenencia" por "ocurrir")
  - Rel. de Pertenencia o *F. Indic.*: $A \in B$ (el suc. A es una parte del B) e Inclusión $A \subset B$ (si siempre que ocurre A ocurre B).
  - 3 *Op. Log.* básicos: Complementario $\bar{A}$ (el que ocurre cuando no ocurre A), Suc. Unión $A \cup B$ (es otro suc. que ocurre siempre que ocurra A, B o ambos), Intersección $A \cap B$, Destacar Suc. *Incomp.*
  - 3 *F. Booleana* conj.: *Dif. Simetrica*, *Leyes de Morgan*, *Princ. Inclusion-Excl.* (sobre un subconj. de sucesos)

24.4 Interpretaciones de prob.: Física/Bayes. Laplace (bayes): CF/CP, autorr. (princ. indif.), finita (par. Bertrand). Frecuentista: lim, impracticable, autorref. (varianza de la estimación en prob.), físicos creen en matem. Ley del Azar. Subjetiva (bayes): creencia, sist. formal (actual. fuzzy).

- RESUMEN: *Interpr. Prob.* (*Teor. Prob.* [WikiProb.Interpretations]): dos grandes grupos:
  - Física u objetiva: límite de observar un fenómeno. Incluye *Prob. Frec.* y Propensión [Popper]
  - Bayes. o *Eviden.*: *Sentenc.* basada en una creencia (no necesariamente de observar algo físico) que se aplica en *Infer. Bayes.*. Incluye: *Prob. Laplace* y *Prob. Subjetiva*

Prob. Laplace o Clásica [Laplace1812] $\subset$ Bayes.	$P(A) = \frac{CasosFav}{CasosPos}$ (*Juegos Azar*)	I: a) Finita (solo *Combinat.*, **ambigüedad** si $CasosPos \to \infty$). b) *Autorref.* por *Princ. Indif.* (**creencia** en equiprob. de casos). *Par. Bertrand* da *Crisis Prob.* (*).
Prob. Frec. [VonMises1920] $\subset$ Física	$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$	a) Impracticable *Gastos Muestr.* (físicos creen en matemáticos). *Ley del Azar* o *Tma Dorado Bernoulli* b) *Autorref.*: incluso asumiendo *Tam. Muestra* finito, el error *Var. Estim.* es Prob.
Prob. Subjetiva [Ramsey1920] $\subset$ Bayes.	Creencia $\subset$ Prob. *Infer. Bayes.*	Subj. no es sinónimo de irracional, *Sist. Formal*: $\subset$ *Actual. Bayes.* o *Fuzzy*
Prob. Axiom.	ver	

- (*) *Crisis Prob.*: *Crisis Matem.* en SXIX por el aumento de rigor y paradojas:
  - *Par. Bertrand* [1900]: sea un triángulo equilatero inscrito en circunf. ¿Prob. de que una cuerda cuaquiera sea > que lado del triang.?: La finitud y *Princ. Indif.* en *Prob. Laplace* da prob. ambigua (3 resultados según el método elegido para elegir la cuerda, *Ax. Eleccion*). Sol. las 3 sol. corresponden a distintos métodos de elec. ($\Rightarrow$ definirlo bien) *Prob. Frec.*
  - *F. de Distr.* Mixta: inferencia difícil (ver *SPN*)
- (*) DETALLE: [1]

[1]

- Prob. de Laplace Clásica [Laplace1812 Théorie analytique des probabilités]: $P(A) = \frac{CasosFav}{CasosPosibles}$ donde suponemos un exp. aleatorio con nº finito de sucesos igualmente factibles (=probables) y excluyentes *CasosPosibles* y donde conocemos los *CasosFav* del suc. A. Es la 1ª def. formal. Usada más en *Infer. Frec.*. P: las típicas de *Medida de Prob.* (Positiva1, Union-suma, Complementario). Se necesita la Combinatoria. I: a) *Autorref.* pues supone todos los casos igualmente factibles (=probables) no es consistente. Esto dio la *Crisis Prob.* b) Nº finito de sucesos. c) ¿que pasa si suc. no igualmente factibles?
- Prob. Empirica o Limite-Frecuentista [VonMises1920]: $P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ donde la *Frec. Abs.* de un evento A es $n_A = \#A$ y la *Frec. Rel.* (o *Prop. Mu.*) $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$. Se basa en la *Ley Grandes Num.* *Ley del Azar* : "cuando repetimos un experimento aleatorio, la $f(A)$ tiende a aproximarse a un valor fijo que definimos como probabilidad del suceso A", *Distr. Frec.* $\to$ *Distr. Prob.* (*Conv. Distr.*) es el *Tma Dorado Bernoulli* (caso de *Ley Grandes Num.*). Es un hecho empírico que siempre ocurre, pero no es demostrable. [Lippmann] "Todos creen en la ley normal de errores (cualquier distrib. se aprox. a Normal), los físicos porque creen que es una ley matem. y los matem. porque creen que es comprobada por los físicos". V: subsana I de la anterior. I: a) Imposible en la práctica $n \to \infty$ Ej: tornillo roto *Gastos Muestr.*. Hay experimentos no ensayables y se basan en la intuición (prob. el pueblo vote a Emilio). b) ¿que n adecuado para limitar la $P(A)$?.
- *Prob. Subjetiva* [*Aprend. Autom.* y *Fuzzy*]: $P(A) = CreenciaOcurraA$. Se parte de una o varios valores de creencia y luego se infiere siguiendo un *Sist. Formal*. Durante muchos años despreciada por los frecuentistas hasta uso en *Infer. Bayes.* para *Aprend. Autom.*. La *Infer. Bayes.* arregla el problema de necesitar ∞ comprobaciones y se basa en actualizar creencia que mejora. ([YoutubeSantolallaProbUnivSimulado]). [Greeland] señala que subjetiva no es sinonimo de irracional y objetiva de observable (ya que requiere ∞ pruebas y no es posible). Si se usa derivación adecuada (como regla de Bayes) es totalmente consistente.

  V: Asigna prob. a sucesos no ensayables. Ej: Médico es probable que sobreviva, Lógica Fuzzy, *T. Decis.*

24.5 Probabilidad axiomática de Kolmogorov: engloba 3 anteriores. Espacio de Medida (Omega,Sigma,mu), esp. medible vs métrico (2 primeros vs topol.), 3 cardin. Espacio probabilístico: esp. med. con medida 1: positiva, certeza-1, unioń-suma. Prob.=Medida=Aplicación

- *Prob. Axiom.* [Kolmogorov]: engloba las tres anteriores. Ej. de *Sist. Formal*. Es una mezcla de Teor. *Medida* (unir segmentos=sucesos), *Op. Log.* (*Alg. Suces.*) y *Var. Aleatoria* (asociar valor real a cada suceso, *Teor. Unif.*).

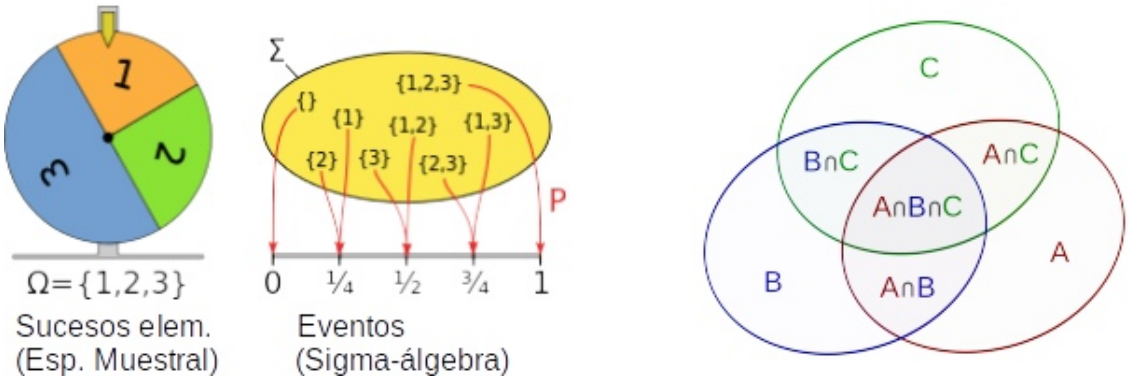
  - *Esp. Medida* (Ω,Σ,μ): conj. Ω al que se le asocia un *Sigma-Algebra* y una *Medida*. No confundirlo con *Esp. Medible* que es solo los dos primeros elementos (Ω,Σ) y que permiten definir las *F. Medible*, (como *Esp. Borel*) ¡ni con *Esp. Metrico* (de *Topol.*)!. Ω y Σ pueden tener las tres *Cardin.*es (finito, contable e *Incontable*).

  - *Esp. Prob.* : Es un *Esp. Medida* tal que la *Medida* del espacio completo es 1. Es la terna (Ω,S,P) donde Ω conj. de *Suc. Elem.*, $S=\{A_1,A_2,..\}$ conj. *Event.* y P *Medida de Prob.* sobre el *Esp. Medida* (Ω,S) (algorit. que asigna prob. a cada *Event.* y por supuesto a cada *Suc. Elem.*, ver *Distr. Prob.*) que cumple:

    1. Positiva: $P\in[0,1]$
    2. Certeza-1 $P(\Omega)=1$
    3. Unión-suma: $P(\cup_i E_i)=\sum_i P(E_i)$ ($\{E_i\}$ deben ser *Incomp.*)

    Conclusión: *Prob. Axiom.* = *Medida*=*Aplicacion* o *Funcion*.

Figura 24.1: Espacio probabilístico



Estad.. I: Cada uno asigna lo que cree.

24.6 Consecuencias de Kolmogorov: vacío, contraria, isotomía (A subset B, P(B-A)=P(B)-P(A)). Principio de Inclusión Exclusión (recuento): S1-S2+... dem. visual, desarreglos. Des. de Boole: caso S1=P(AuB)<P(A)+P(B)(dem. medida subadtiva visual). Des. Bonferroni: P(union total)<,> Suma truncada Si en k(impar,par). Casos k=n,1 son PIE y Boole

- Básicas: a) Vacio: $p(\emptyset) = 0$. b) *Prob. Compl.*: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Prop. de Isotomía: si $A \subset B \Rightarrow$ a) $P(B-A) = P(B) - P(A)$ y b) $P(B) \geq P(A)$
- *Princ. Inclusion-Excl.* o Prob. de la Unión: forma de contar la *Cardin.* de la unión de varios conj. $\{A_i\}$. Es una *Tec. Recuento* basada en *Tercero Excluido* e *Incomp.*.

  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (en conj. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, dem. visual, ver Fig.)
  - $P(A \cup B \cup C) = P_A + P_{B \cup C} - P_{A \cap (B \cup C)} = P_A + (P_B + P_C - P_{B \cap C}) - (P_{A \cap B} + P_{A \cap C} - P_{(A \cap B) \cap (A \cap C)}) = P_A + P_B + P_C - (P_{A \cap B} + P_{A \cap C} + P_{B \cap C}) + P_{A \cap B \cap C}$ (dem. también visual, ver Fig. 24.1)
  - $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_{n-1} \leq n} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \binom{n}{1} P(A_i) - \binom{n}{2} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^n S_n$ (dem. por inducción)

  Suma sobre todas las *Combin.* y se parece Pol. Simetr. Elem. de *Teor. Galois*. Se usa en *Desarreglos* (cartes-sobres)

- Desig. de Boole: $P(\cup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$.

  En teoria de la medida la demostración es inmediata ya toda medida es σ-subaditiva $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

- Desig. de Bonferroni: considerando los S_i definidos en *Princ. Inclusion-Excl.*, son:

  - Para cualquier $k = impar\& \leq n$: $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} S_i$
  - Para cualquier $k = par\& \leq n$: $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} S_i$

  Casos especiales son: Desig. de Boole para $k = 1$ y Princ. Inclusion-Excl. para $k = n$.

Chapter 25

T64. Probabilidad compuesta. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Teorema de Bayes.

25.1 Introducción: P(par|>3). Prob. de Lechin. Vuelta bayesiana OK según Teor. Prob.

- Ej-motivador: Ej: Dado $P(par| \geq 3) = \frac{n_{par \cap \geq 3}/N}{n_{\geq 3}/N} = \frac{P(par \cap \geq 3)}{P(\geq 3)}$ Ej: ¿*Prob. Lechin*, es correcta la *Vuelta Bayes.* según *Teor. Prob.*?
- Benuilli (usa prob. condic.), Moivre (la define con rigor), Bayes (su regla), Laplace (la refina), Kolmogorov
- Importancia-histórica: *Prob. Condic.* forma un *Esp. Prob.*, *Indep.*, *Tma Bayes*, *Infer. Bayes.*

25.2 Definiciones: espacio probabilístico

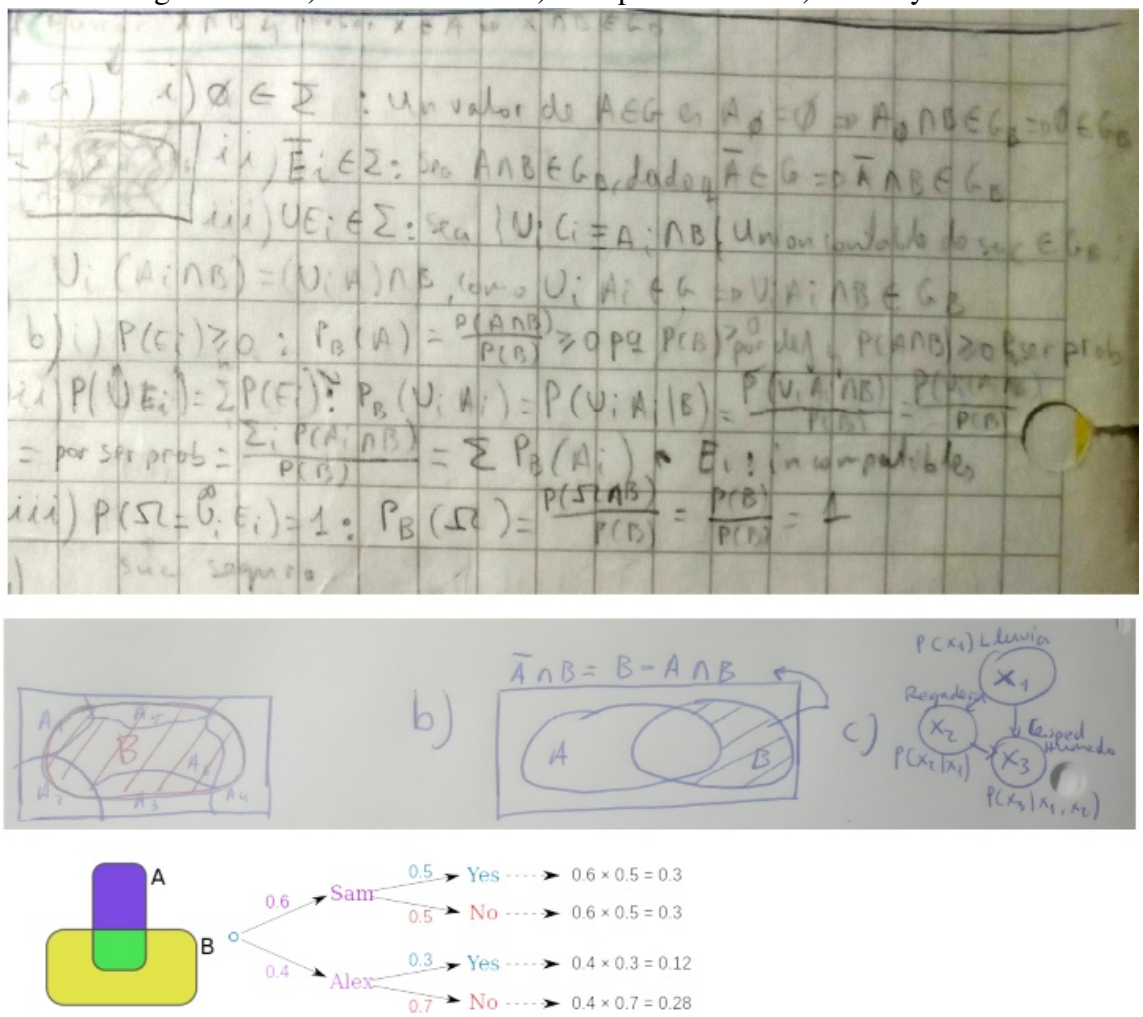
Esp. Prob.

25.3 Probabilidad condicionada: 2 defin: Laplace (area,arbol) vs axiomática (P(AyB)/P(B)). (Omega,SB,PB(A)) forma un espacio probabilístico (dem. sigma-alg., prob. y marginal total

- *Prob. Condic.* $P(A|B) = P(A/B) = P_B(A)$: prob. de que ocurra un evento A sabiendo que también ocurrió/ocurre/ocurrirá otro B (no tiene porqué haber relación causal).
  - *Prob. Laplace*: Tomando los casos en los que B se cumple, es la parte (area) en los que también se cumple A ver Fig. 25.1. Ver *Arbol de Prob.* y *Tab. Conting.*

– *Prob. Axiom.*: Dado un *Esp. Prob.* y dos eventos A y B t.q. $P(B) > 0$ entonces: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Figura 25.1: a) Condicionada. b) Complementario. c) Red bayesiana



- *Esp. Condic.* : *Prob. Condic.* forma un *Esp. Prob.*: y por eso se usa la notación $P_B(A)$ y se da la *Marginal Total* o la *Prob. Compl.*. En efecto:

> En Fig. 25.1 vemos: (a) que $S_B = \{A_i \cap B\}$ es un *Sigma-Algebra* y (b) que $P_B(A)$ es una *Medida de Prob.*, por lo tanto (Ω, S_B, P_B) es otro *Esp. Prob.*.

25.4 Probabilidad compuesta o conjunta: regla de la cadena (se van términos), no confundirla con condic. en árbol. Unión: princ. incl.-excl.

- Prob. Compuesta o *Distr. Conjunta* $P(A \cap B)$: *Distr. Prob.* o *Mod. Estad.* de la intersección de dos eventos (que ocurran a la vez, *Obj. de la Estad.*).

  – Regla de la Cadena Probab.: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Generalizando $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$. En efecto:

De la def. de Prob. Condic. $P(A_1)\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}\frac{P(A_3\cap(A_2\cap A_1))}{P(A_1\cap A_2)}\ldots\ldots\frac{P(A_n\cap(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1}))}{P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1})}=$ $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_n)$, pues se van muchos términos

Ej: prob. obtener 3 ases (suc. no *Incomp.*) No confundirla con *Prob. Condic.* en *Arbol de Prob.*.

- Prob. Unión: *Princ. Inclusion-Excl.*. Ver *Tab. Conting.*

25.5 Independencia: P(A/B)=P(A), colorario P(AyB)=P(A)P(B). Covar. vs indep: prob. estad y estoc. Incompatibilidad: colorario P(AoB)=P(A)+P(B). Indep. vs incomp: prod. vs suma. Ej: P(ParyImpar)=0.25 vs 0 (2 vs 1 tirada)

- *Indep.* prob.: suceso A independiente de B si el que ocurra uno no influye en el otro: $P(A|B)=P(A)$. Ej: color pelo, ojos y sexo.
  - Colorario: $P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$. Generalizando $P(\cap_i A_i)=\prod_i P(A_i)$
  - *Covar. vs Indep.*: No confundir *Indep.* prob. con I. *Estad.=Covarianza* e I. *Estoc.=Corr. Cruzada*
- Sucesos *Incomp.* (o Disjuntos o Mutuamente Excluyentes): A y B si $A\cap B=\emptyset$.
  - Colorario: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. *Princ. Inclusion-Excl.*
  - *Indep. vs Incomp.* : *Incomp. No Impl. Indep.*: no confundir *Indep.* (para producto $P(A\cap B)=P(A)P(B)$) con *Incomp.* (para suma $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$). Ej-dado: sea A,B par,impar

A,B *Indep.* (tiramos 2 veces):	$P(A\cap B)=0.5*0.5=0.25$
A,B *Incomp.* (tiramos 1 vez) :	$P(A\cap B)=P(\emptyset)=0$ y $P(A\cup B)=1$

25.6 Probabilidad complementaria condicional: P(nA|B)=1-P(A|B) (de def+visual o de espacio condicional). Independencia de complementarios: si A,B indep nA,B indep pues P(nAyB)=P(nA)P(B) etc.

- *Prob. Compl.* condicional : $P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=(*)=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$. (*) Fig. 25.1 . Más fácil: por ser *Esp. Condic.*. Ver *Dif. Simetrica*. Usar si más fácil que directa (prob. destruir puente o tema oposic, TProbl)
- *Indep.* de compl.: a) A,B indep. $\Longleftrightarrow$ b) $\bar{A},B$ indep. c) $A,\bar{B}$ indep. d)$\bar{A},\bar{B}$ indep. En efecto, caso b):

b) $P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A}|B)P(B) = (*) = (1-P(A|B))P(B) = (indep) = (1-P(A))P(B) = P(\bar{A})P(B)$ (*) *Prob. Compl.* Condic.:

25.7 Prob. Total: sist. suc. incomp. compl., anal. funcional, dem. (A=U(HiyA)). Distribución Marginal: P(Ai)=sumj P(AiyHj) Marginal Total: sumi P(AiyB)=1. Tma Bayes [1730,Laplace1814]: posterior=apriori verosimilitud/total.

- *Tma Prob. Total* : Sea $\{H_i\}$ un Sist. de Sucesos *Incomp.* Completo (exhaustivo $\cup_i H_i = \Omega$), entonces $P(A) = \sum_i P(A\cap H_i) = \sum_i P(H_i)P(A|H_i)$ (ver Fig. 25.1). Es *Comb. Lin.*, *Anal. Funcional* En efecto,

$$P(A) = P((H_1\cap A)\cup\ldots\cup(H_n\cap A)) = [Ax.Suma-union] = \sum_i P(H_i\cap A) = [def] = \sum_i P(H_i)P(A|H_i)$$

- *Distr. Marginal* : 1) Discreta: $P(A_i) = \sum_j P(A_i\cap H_j)$ distrib. de un subconj. de VA ($\{A_i\}$) de un conj. de VA (H_j) ($\{A_i\}\subset\{H_j\}$), consecuencia directa del *Tma Prob. Total* . 2) Continua-2D: $P(x) = \int P(x,y)dy$ distrib. sobre una var. cuando desconocemos totalmente el valor de la otra. *Marginal Total* $\sum_i P(A_i|B) = 1$. Ver *Valor-p*, *Dat. Perd.*, *Int. Monte Carlo*, *SPN*. *Tab. Conting.*

- *Tma Bayes* [1730]: $P(H_i|A) = \frac{P(H_i\cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_j P(H_j)P(A|H_j)}$, donde Posterior o *Prob. Condic.* $P(H_i|A)$, Model H_i, *F. Verosimilitud*/Likelihood $P(A|H_i)$ (puede no ser *Prob. Condic.*), A-priori $P(H_i)$. Es el Tma Pitagoras de la *Teor. Prob.*. Redescubierta por [Laplace1814]. Ver *Infer. Bayes.*

25.8 Inferencia bayesiana [Laplace1814]: metodo iterativo, mejora a más evidencias. Sentido común reducido a cálculo (Laplace). Epistemología.

- *Infer. Bayes.* : tipo de *Estad. Infer.* basada en *Metodo Iterativo* en el que las observaciones o *Eviden.* van haciendo *Actual. Bayes.*. El inicio suele ser una *Prob. Subjetiva*. Cuanto más observacines más nos acercaremos al valor real. Esto se ha usado para justificar el razonamiento *Induc. Epistem.*. Es **el sentido común reducido a cálculo** (*Calculus Ratiocinator*), es un *Sist. Formal*, según dijo [Laplace1814 Essai philosophique sur les probabilités]. En (principio 6) redescubre sin saberlo el *Tma Bayes*. Usada recientemente en *HMM* (*Aprend. Autom.*) e *Infer. Solomonoff*. Ver *Estim. Bayes.*. Las dos grandes aplicaciones son:
  - *Vuelta Bayes.*
  - *Actual. Bayes.*

25.9 Aplicaciones: Vuelta bayesiana (pelo largo, voz, lechín). Actualización bayes.: proporción bayesiana (con COVID) mejor que muestral, modelo binomial. Amanecer (proc. Bernoulli, condicional temporal). Pavo inductivista (falsac. y reproduc.). Paradoja del falso positivo

- *Vuelta Bayes.* : dado que la *F. Verosimilitud* es objetiva y fácil de *Entren.* (separando la *Base Datos*), usamos Bayes para computar la posterior (difícil). Dos ej.:
  - Mujer de pelo largo: alguien dice "he conversado con persona de pelo largo" ¿Prob. de hablado con mujer?: $P(M|L) = \frac{P(M)P(L|M)}{P(M)P(L|M)+P(H)P(L|H)} = \frac{0.5*0.8}{0.5*0.8+0.5*0.1}$
  - *Rec. Voz* : estimar prob. del modelo vocal a (un *GMM*) dado que hemos observado un vector espectro *Fourier* $s = [0.1, 0.2, 0.9, 0.3, 0.1] \Rightarrow P(a|s) = \frac{P(a)P(s|a)}{P(s)}$. Ver *ARMA*, *HMM*, *Mod. Lenguaje*, *Dat. Perd.*,
  - *Prob. Lechin* ¿Como razonar correctamente en *Teor. Prob.*.: en una finca la prob. de lechín es 0.7 y la de picual 0.3, la prob. de muy negra es 0.7 para lechín y 0.4 para picual. ¿si vemos una clarilla cual es la prob. de lechín? crear *Arbol de Prob.*.
- *Actual. Bayes.* : es un *Metodo Iterativo* con implicaciones *Epistem.*. Lo bueno de la *Infer. Bayes.* (*Prop. Bayes.*) comparada con la *Infer. Frec.* (*Prop. Mu.*) es que requiere menos cantidad de observaciones (no requiere un gran muestreo si observamos una rápida convergencia):
  - *Prop. Bayes.* [YutubeMatCovid]: ¿como conocer la proporción p real de infectados con pequeñas cantidades de test diarios (k,n) que se actualiza (más que con un test masivo)?: ¿$P(p_{t+1}|(k,n)) = P(p_t)\frac{P((k,n)|p_t)}{P((k,n))}$? 1) Según el *INE* un gran muestreo inicial nos da la siguiente *Prop. Mu.* $P(p_t) = 0.016$. 2) Una pequeña nueva muestra nos da $k = 3$ positivos sobre $n = 170$ personas luego $P((k,n)) = \frac{3}{170}$ (ver *MLE*). 3) Nuestro modelo es *Binomial* luego $P((k,n)|p_t) = B(k = 3, n = 170; p_t = 0.016)$. 4) Finalmente $P(p_{t+1}|(k,n)) = 0.016\frac{B(k=3,n=170;p_t=0.016)}{3/170}$.
    [1]
  - *P. Amanecer-Pavo* [Laplace1814] y Pavo *Induc.* (*) [Rusell, WikiProblInduc]: ej. *Epistem.* (*Estad. Cientif.*) de que la *Eviden.* no es *Dem.* y es mejor el *Falsac. y Reprod.* de Popper.

[1]

1. P(A)=a priori=idea original de la proporción de infectados reales en la población. Los estudios dicen que el 80%=4/5 son asintomáticos, i.e. solo 1/5 de los reales son detectados, por lo tanto hay que multiplicar por 5 para obtener los reales. Si se han detectado 148000 positivos por PCR, en verdad en España hay 148000*5=741000 positivos. P(A)=prob. a priori para población afectada en España=741000/poblacion españa=0.016
2. P(B)=prob de infectados=#infectados/#tests=3/170.
3. P(B/A)=*F. Verosimilitud*. Nuevo *Muestr.* hoy: realizamos 170 nuevos test aleatorios sobre la población y obtenemos 3 positivos. Al ser *Binomial* $P(B/A) = B(x = 3, n = 170, p = 0.016) =$
4. P(A/B)=prob. de A (nuestra hipótesis) dado que ha ocurrido B (observado). Con los datos anteriores podemos actualizarla con cada nuevo muestreo. Si la población no cambia al final ocurrirá la convergencia.

con su Regla de Sucesion (principio 7): sea un *Proc. Bernoulli* con n ensayos y observados s éxitos, la *Prob. Condic.* temporal (*HMM*)) $\Rightarrow P(X_{n+1}|X_1+..+X_n = s) = \frac{s+1}{n+2}$, cuando n y s tienden a ∞ la prob. de amanecer el dia siguiente tiende a 1.

- (*) Pavo *Induc.*: [2]

- *Parad. Falso Pos.* : partamos de un test razonablemente bueno (ini). Calculamos las conjuntas (medio) mediante *Prob. Condic.*. La P(enfermo/pos)=0.5, ¡es un test muy malo!. Ver *Clasif. Bin.*

P(enfermo)=0.01, P(sano)=0.99 P(pos/sano)=0.01, P(neg/sano)=0.99 P(neg/enfermo)=0.01, P(pos/enfermo)=0.99
P(sano $\cap$ neg)=P(sano)*P(neg/sano)=0.99*0.99=0.9801 P(enfermo $\cap$ pos)= idem =0.0099 P(sano $\cap$ pos)= idem = 0.0099 P(enfermo $\cap$ neg)= idem = 0.0001 P(pos)=P(sano $\cap$ pos) + P(enfermo $\cap$ pos)=0.0099+0.0099=0.0198
P(enfermo/pos)= P(enfermo $\cap$ pos)/ P(pos)=0.0099/0.0198 =0.5

- *PGM*: *HMM*, *Red Bayesiana*

[2]

Un pavo tras varias muestras ha computado que la prob. de comida E dado que ha venido el hombre H es $P(E|H) = 0.7$ ya que a veces venia H y no dejaba E. También ha computado que $P(E|\bar{H}) = 0.01$ ya que rara vez ha visto la comida sin el hombre (quizás por despiste). Con independencia de su creencia sobre si ha visto el hombre puede concluir la ley $E \Rightarrow H$ pues: $P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H)+P(\bar{H})P(E|\bar{H})} \approx 0.9$

Visto como serie temporal, cuantas más veces observe que $P(E|\bar{H}) \to 0$, Bayes indica que más seguro podrá estar de su ley. Hay autores como Popper que critican esta visión. De cualquier modo, la $P(H)$ suele ser subjetiva (creencia), mientras que la $P(E|H)$ es objetiva (hecho observado). Permite combinar creencia con evidencia, ver *Prob. Subjetiva*. Se suele usar para actualizar la creencia de partida $P(H)$ (Ej-*Rec. Voz*: incertidumbre en la distrib de las vocales) una vez computada la *F. Verosimilitud* objetiva $P(E|H)$

Chapter 26

T65. Distribuciones de probabilidad de variables discreta. Características y tratamiento. Las distribuciones binomial y de Poisson. Aplicaciones. T66. Distribuciones de probabilidad de variable continua. Características y tratamiento. La distribución normal. Aplicaciones.

26.1 Introducción: distribución >1 (unif.), sin media (Cauchy) y sin ella (Cantor). Convergencia en distribución

- Ej-motivador:
  - ¿Como es posible Distr. con valores >1, sin *Media* (*Distr. Cauchy*), o sin definida (*Distr. Cantor*)?
  - ¿Qué prob. asignamos a un suceso de una distr. multidim. mixta (continua, discreta como *SPN*) $P(x_1 \in [0.5, 0.6], x_2 = 3)$, crea paradojas de medida (la formalización de VA lo evita))?
  - ¿Cual es el límite teórico de una *Distr. Frec.* (la *Distr. Prob.*) y porqué suele ser *Normal* (por el *TLC*)? (*Conv. Distr.*).
- Importancia-histórica: *Var. Aleatoria*, *Sigma-Alg. Borel*, *F. de Distr.*, *Distr. Prob.*, *Alg. de VA*, *Binomial*, *Normal*, *T-Student*

26.2 Función medible (preimagen también). Sigma álgebra de Borel (unión de intervalos R). Variable Aleatoria (aplicación de espacio medible (sucesos) a Borel (n^o)), realización. var. estad. (cuantitativa, continua/discreta, ej. indicatríz, entropía)

- *F. Medible* f: si su **Preimagen** también es medible. Sean dos *Esp. Medible* cualesquiera, ej: (X,A,M_x) y (Y,B,M_y), cuando la preimagen (ver *Int. Lebesgue*)de todo subconj. de Y que sea elemento de B es un subconj. de X que es elemento de A. f es respetuosa con las *Sigma-Algebra* de partida y llegada. Hay una rel. de orden.

- *Sigma-Alg. Borel* : $B(\mathbb{R})$ *Sigma-Algebra* que se forma uniendo intervalos abiertos, semi o cerrados de $\mathbb{R}$ incluyendo al $\pm\infty$, ej: $(-\infty,a]\cup[b,c)$. En general $B(X)$ sobre cualquier *Esp. Topol.* (X,T). *Esp. Borel* : *Esp. Medible* donde $(\Omega,\Sigma)=(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$.

- *Var. Aleatoria* (VA): $X:\Omega\to\mathbb{R}$. *F. Medible* que va de un *Esp. Medible* de *Event.* a otro de números (*Esp. Borel*) manteniendo la misma prob. P. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o $X:(\Omega,S,P)\to(\mathbb{R},B(\mathbb{R}),P)$, i.e *Aplicacion* que asocia números a los resultados de un *Exp. Aleatorio* y permite ir claramente de Intervalos a *Event.* (preimagen clara) [1].

  - *Realiz.* : $x=X(\omega)$ un resultado numérico. Notación mayúscula/griega *Esp. Muestral* Ω, *Var. Aleatoria* X, *Suc. Elem.* ω y *Realiz.* x. Ver notación *Estimador*

  - Ej: Es un tipo de *Var. Estad.* cuantitativa y distinguimos:

    * Continuas: $X=$ peso exacto de un animal aleatorio del zoo de Madrid, $X=$ T^a,lluvia geográfic
      $X=$*Estimador*.

    * Discretas: *Var. Indic.*, *Proc. Bernoulli* $Y=\begin{cases}-13.8 & \text{si cara}\\ 941 & \text{si cruz}\end{cases}$. *F. Aritm.* sumar (*Binomial Entropia*) $Y:\Omega=$ n^o caras en dos monedas $=\{cc,cx,xc,xx\}\to\{2,1,1,0\}$.

    * Multidim.: *Campo Aleatorio*

    * Mixta (ver)??

  - Esta conversión a números permite el lenguaje de la *Medida* [2]

[1] El ser F. Medible garantiza que siempre exista la preimagen (el evento real) de cualquier subconj. de la VA (de números) elegido: $\forall b\in B(\mathbb{R}),\exists X^{-1}(b)\in S$. Def. de VA con Preimagen: X lo es si la preimagen X^{-1} de cualquier intervalo de la forma $(-\infty,x]$ es un *Event.*. $X^{-1}(-\infty,x]=\{A\in\Omega o\Sigma : X(A)\le x\}$. Esto es posible por la rel. de ordenamiento de F. Medible.

[2] "prob. de suma de los 7 dados entre [4,8] y [12,15]" $\to P(S\in[4,8]y[12,15])$. Los conj. de medida deben ser lo suficientemente restrictivos para evitar *Par. Banach-Tarski* debido a la unión contable infinita de eventos, i.e. deben ser *Sigma-Algebra*.

26.3 Función de distribución acumulada: no-decreciente, continua dcha, P(interv), 0 y 1. Distribución de probabilidad (med. prob. de Borel), f>0, int f=1. (mod. est., hipersup., distr. frec. Caracterización de VA: continua/discreta si hay FDP (int-Lebesgue,derivada)/FMP. Notas: FDP>1, Cantor

- *F. de Distr.* (Acumulada) FDA: de una *Var. Aleatoria* $F_X(x) = P(X \leq x)$, i.e. prob. de que tenga un valor menor que x. También def. con Preimagen [3] Cumple:

  - F es no decreciente y continua solo a la derecha, pues si Discreta es escalonada en los x_i (ver Fig. 26.1).
  - $P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$

  Ej: FDA de *Normal* (tablas *F. Error*) con *Int. Num.*

- *Distr. Prob.* (F. de Probabilidad): $P(w \in \Omega) = Distr(x \in X)$ *Medida de Prob.* en el *Esp. Borel* de la *Var. Aleatoria*, i.e. *Funcion* que asigna a cada *Suc. Elem.* la prob. de que este lo asuma. Caracterización: f es Distr. si:

  - PI (Positiva): $f(x) \geq 0$. PII (Completa): $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
  - Es un *Mod. Estad.* (de un solo output). Es una *Hipersuperf.* o *Var. Riemann* (*Geom. Inform.*) $P = f(x_1, x_2, .., x_n)$ en un esp. dim. n+1 t.q. $P \in [0,1]$. Es el límite teórico de una *Distr. Frec.* (*Conv. Prob.*). Es la *FDP* o *FMP*

  Ej: *SPN* de un solo output. *Normal* o *Binomial*.

- Caracterización del tipo de VA (Fig. 26.1):

  - Continua: si $\exists f(x)$, F. Densidad de Prob. (*FDP*), : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ (*Int. Lebesgue*). Si f continua en $x \Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$
  - Discreta: si $\exists\{p(x_i)\}$, F. Masa de Prob (*FMP*), : $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$. La cardinalidad de p_i puede ser finita o ∞.
  - Mixta Multidim.: $\int_0^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} f(x,y)dy = 1$. En Fig. 26.1 vemos una. Ej: Hybrid-*SPN* [Molina18] sol. al problema de la inferencia mixta eficiente (*Crisis Prob.*).

- NOTA1: La ordenada de *FDP* puede tomar valores > 1 (ver *Distr. Uniforme*). NOTA2: Hay Distr. que no tienen ni FMP ni FDP definida pero todas tienen FDA. Ej: la *Distr. Cantor* (la distr. cuya FDA es la *F. Cantor*) no es ni discreta ni continua.

[3] $F_X(x) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\{A \in \Omega : X(A) \leq x\})$

26.4 Parámetros (media, varianza, momento, conv. abs. Cauchy). Función Generadora de Momentos (Laplace E[etX], no central mr=der-r(0)). Función característica (Fourier E[eitX], mr=der-r(0)/ir. Análisis funcional

- Def: *Param. Estad.*, *Media*, *Varianza* y *Momento* (requerimientos *Conv. Abs.* y *Distr. Cauchy*)

- Func. Generadora de Momentos (*FGM*) $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx < \infty$ donde $t \in \mathbb{R}$ (Transf. *Laplace* bilateral). No confundir con *F. Generad.*

  - Si existe (requerimiento de converg. como el *Momento* (no abs)) permite obtener los momentos no centrales derivando en torno al 0: $m_r = E[X^r] = \frac{d^r M_X}{dt^r}|_{t=0}$.
  - La que siempre existe es la *Func. Caract.* $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) f(x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} sin(tx) f(x)dx$ que es la Transf. *Fourier* de la FDP. Toma valores reales y devuelve complejos permitiendo *Anal. Funcional* en probabilidad. Los momentos salen derivando: $m_r = E[X^r] = \varphi^{(r)}(0)/i^r$.

26.5 Transformación de VA: Ley del estadístico inconsciente (Y=g(X), media y var de transf. afin en estimac.). Álgebra de VAs: suma: (convol.), media y var (covar), distr. estable (Normal, Cauchy), TLC. producto: independ.

- *Transf. de VA* o Ley del Estadístico Inconsciente: sea una VA diferenciable $X \sim f(x)$, una F. de Borel Medible $g(x)$ y una nueva VA $Y = g(X)$ entonces: la *Media* de la nueva VA es: $E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) d(x)$. Ej: *Media* y *Varianza* de la *Transf. Afin* ($g(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{b}$ multi/unidim.) que es $E[aX+b] = aE[X]+b$ y $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$. Si una VA es Transf. Afín es que es invariante a giros (como la *Normal*). Ver *Des. Markov*. *Med. Estim.*, *Var. Estim.*, *Distr. Muestral*.

- *Alg. de VA*

  - Suma: $Z = X+Y$, distr. *Convol.*. $E[Z] = E[X]+E[Y]$, $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y]) = Var[X] + Var[Y] + Cov[X,Y]$, usando la *Covarianza*. *Distr. Estable* : si suma de dos VA es la misma distr. salvo parámetros de localización y escala. Solo hay tres: *Normal*, *Distr. Cauchy* y Levy. Ej: *TLC*. Ej: suma de dos ruidos (mi Tesis). Ver *Media Mu.*, *Entropia*, *Chi2*
  - Producto: $Z = XY$, distr. complicada [WikiProductDistr]. $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = [SiIndep] = E[X]E[Y]$ *Indep.*, $Var[Z] = [SiIndep] = E[X^2]E[Y^2] - (E[X]E[Y])^2$. Ver *Chi2*

No confundir el producto de dos VA con el producto de dos FDPs mostrado en la Tabla siguiente:

Suma o dif. (de PDFs *Normal*es)	$x_1 \pm x_2 \sim N(\mu_1 \pm \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ (¡varianza suma!)
Producto (idem)	$x_1 * x_2 \sim N(\frac{\mu_1\sigma_2^2+\mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2*\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$ (varianza es la suma paralela (como resistencias))

26.6 Distribuciones famosas: demostrar media, varianza (de FGM) y completitud=1. Binomial: P(np, npq, Fisher n/pq, meso p=.5) U(monedas, entropía formas, prop. muestral/bayes. Covid, Tma Moivre). Poisson: P(l,l, lepto), U (nº radioct en I, pg. ADN, a Binomial). Normal: P(mu,s,68 inflex-pulgar, estable, tipif. Z, f. error), U(biometr. (CI,altura-log), geogr. lluvia, Galton error (regr., calidad), ruido, TLC, Curtosis).

Famosas por modelar gran cantidad de: fenómenos naturales y matemáticos.

Distr. FMP o FDP	Signif. *Param. Estad.*	*Media*, *Varianza*, *Curtosis*	Uso: 1)real, 2)matem.
Binomial (Discr.) $B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$k \geq 0$ VA #exitos observados, p P(éxito, $q = 1-p$), n *#Ensayo Bernoulli*	np, npq. Meso si $p = 0.5$ (otros no se??). *Inform. Fisher* n/pq	1) Prob. de k caras al lanzar n veces moneda (*Conj. Potencia*), *Entropia* (*F. Aritm.* sumar), *Prop. Mu.* (*Tam. Muestra*) o *Prop. Bayes.* Covid, *Prueba Binomial* (catador). 2) *Tma Moivre-Laplace*
Poisson (Discr.) $P(k;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$k \geq 0$ VA idem en intervalo tiempo I (sucesos raros); $\lambda \in (0,\infty)$ # exitos esperados en I, proporcional (si $I' = mI \Rightarrow \lambda' = m\lambda$)	λ, λ. Lepto	1) Prob. de k alfas *Radiact.* en un I. o errores/mutaciones en una pg./cadena. Fenomenos que ocurren 0, 1, 2, 3...2) *Binomial* con $n\uparrow, p\downarrow$
Normal (Contin.) $N(x;\mu;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \in (-\infty,\infty)$ VA	μ, σ^2. Meso $\forall \mu, \sigma^2$. *Distr. Estable* En $(\mu \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ ptos de inflexión (68% datos, *Regla del Pulgar*). FDA *F. Error Tipific.* Tablas (*Prueba Z*)	1) *Biometr.* (CI, altura logNo), *Var. Aleatoria* (geográfica, lluvia), *Camino Aleat.* (*Maquina Galton*), Causa común *Control Calidad*), *Regr.*), Ruido Blanco Gaussiano (mi Tesis). 2)*Maquina Galton=Error=Normal=TLC*, *Tam. Muestra* (*Distr. Muestral*), *Chi2*, *Curtosis*

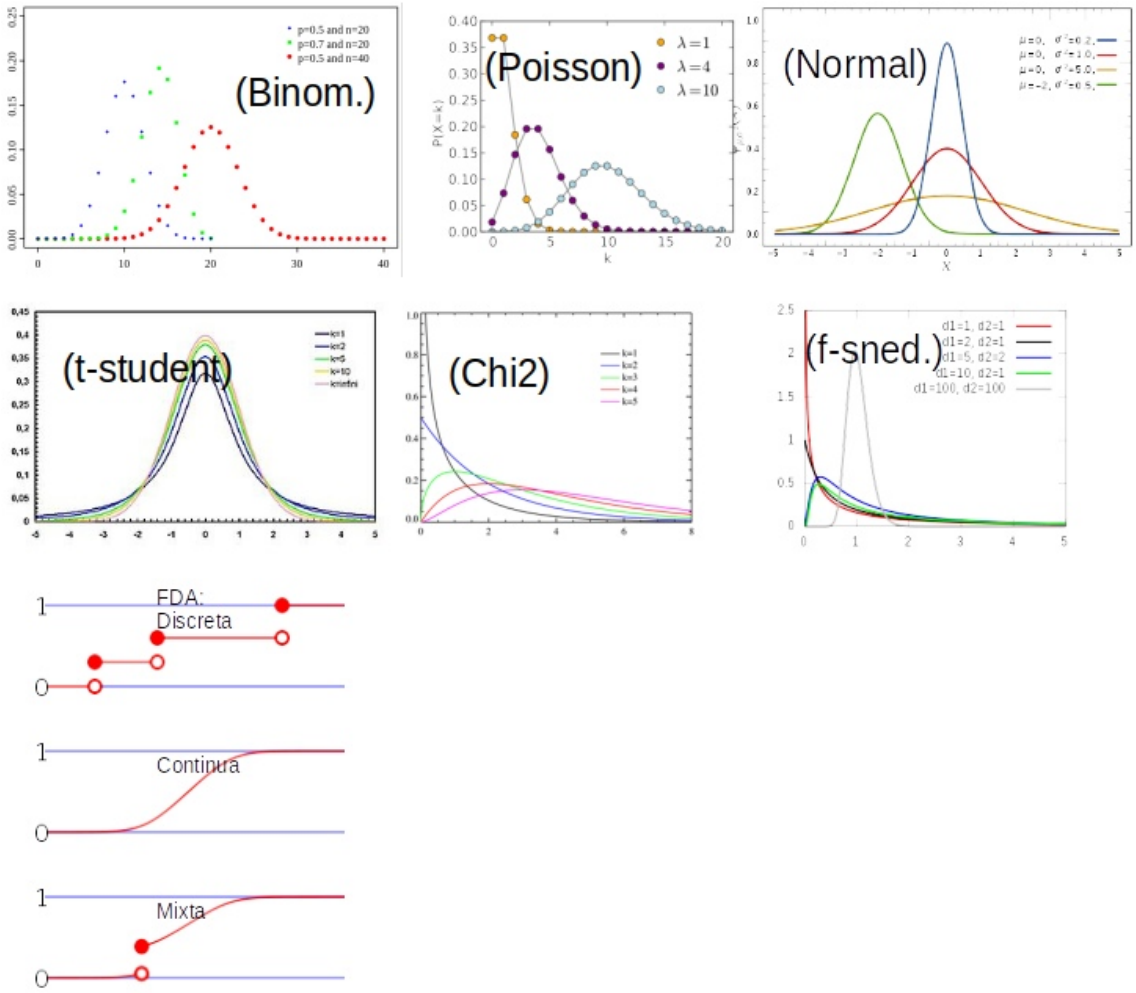
- Distr. *Binomial*: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P[X=k] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^t p)^k (1-p)^{n-k} = (e^t p + (1-p))^n$. Usemos la *FGM* para estimar sus parámetros.
  - Media: $\mu = M_X'(t) = n(e^t p + (1-p))^{n-1} p e^t = npe^t(e^t p + (1-p))^{n-1} \Rightarrow E[X] = M_X'(0) = np(p+1-p)^{n-1} = np$. Otra Dem. es mediante *Proc. Bernoulli*
  - Varianza: $M_X''(t) = npe^t(e^t p + (1-p))^{n-1} + npe^t(n-1)(e^t p + (1-p))^{n-2} e^t p \Rightarrow E[X^2] = M_X''(0) = np(p+1-p)^{n-1} + np(n-1)(p+1-p)^{n-2} p = np + np^2(n-1) \Rightarrow Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = np + np^2(n-1) - n^2p^2 = npq$
  - PII Caract.: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$
- Distr. *Poisson*: $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$

- Media: $M'_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \Rightarrow E[X] = M'_X(0) = \lambda$
- Varianza: $Var[X] = [\text{de forma similar}] = \lambda$
- PII-Complet. de Caract. *Distr. Prob.* .: $e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

- Distr. *Normal*: Gauss y Laplace (estudio de errores) $M_X(t) = [\text{Cambio var.+Integr. por partes}] = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

  - Media: $M'_X(t) = e^{t^{\mu+t^2\sigma^2/2}}(\mu+t\sigma^2) \Rightarrow E[X] = M'_X(0) = \mu$
  - Varianza: $M''_X(t) = e^{t\mu+t^2\sigma^2/2}(\mu+t\sigma^2)^2 + (e^{t\mu+t^2\sigma^2/2}\sigma^2 \Rightarrow E[X^2] = M''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2 \Rightarrow Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = \sigma^2$
  - PII Caract.: dem. con sencillo cambio variable.

Figura 26.1: Distrib. famosas: Binomial, Poisson, Normal.... Describirlas: dominio, simetria, ptos-corte, asintotas, monotonia, inflexión..



26.7 Otras distribuciones: Uniforme (nº normal,>1,tanque,MATN) Chi2 (gamma, suma cuadr., var. muestral tipif), T-Student (media mu. con cuasiv. mu. desconces var.), F-Snedecor (cociente de var. tipif.)

- Otras (Fig. 26.1):
  - *Distr. Uniforme* (discreta o continua): ¡su FPD puede tener valores mayor que 1! aunque su integral FDA no. Ej: Prob. *Tanque Aleman* (*MVUE*). Ver *MATN*, *Num. Normal*
  - Distr. *Chi2* o Ji2 o de Pearson: $fdp(x;k) = x^{k/2-1}e^{-x/2} * cte(k)$ que depende de F. Gamma. Distr. de suma de los cuadrados de *Normal*es *Tipific.* (Tma Cochran): $\chi_k^2 = Z_1^2 + .. + Z_k^2$ donde k es el grado de libertad. Para *Prueba Chi2* y *Distr. Muestral* (*Var. Mu. Tipific.*). La de Rayleigh es un caso especial para $k = 2$.
  - Distr. *T-Student* [por Gosset, cervecería Guinness Dublin, bajo el pseudónimo Student, Fisher creyó que era una revolución lógica]: depende de F. Gamma. Gosset demostró que es la distr. que sigue la *Media Mu. Tipific.* con *Cuasivar. Mu.* (desconoces *Varianza*, tienes pocas muestras) ($T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$, ver *Distr. Muestral*). Aparece en *Prueba T-Student*
  - Distr. *F-Snedecor* [también Fisher]: depende de F. Beta. Distr. de división de dos VA *Chi2*. Para *Distr. Muestral* de razón de varianzas.
  - *Distr. Cauchy*, *Distr. Cantor*
  - Distr. Hipergeom. nos da la misma prob. pero sin reeplazamiento. Distr. Multinomial es para dado trucado [4]
  - *Familia Exp.*

[4] En una población la prob. de haber votado al candidato A, B y C es 0.2, 0.3 y 0.5, ¿cual es la prob. de que en muestra de 6 personas encontremos 1, 2 y 3 votantes a A, B y C, sol: $P(A = 1, B = 2, C = 3) = \frac{6!}{1!2!3!} 0.2^1 0.3^2 0.5^3$. La sol. exacta es con la Hipergeom. Multinomial

Chapter 27

T67. Inferencia estadística. Test de hipótesis.

27.1 Introducción: entrenem., contraste de hipótesis (si pocas muestras, precisión de Mercurio o prueba controlada), presución de inocencia

- Ej-motivador:
  - Ej1: ¿Mejores param. de *Entren.* un modelo? (*MLE*)
  - Ej2: ¿Podemos *Sentenc.* algo a pesar de poseer *Tam. Muestra* bajo o alto *Error* de medida? como en *Precesion Mercurio* o en *Prueba Controlada Aleatorizada* (RCT, Randomized Controlled Trial) *Estad. Cientif.* de vacuna Covid [1]
  - Ej3: en medicina al contrario que en justicia es mejor ser precavido, ver *Presuncion de Inocencia*, ¿pero cuanto?
- Historia-Inferencia: Estimación MLSE: ya la usaba Gauss pero fueron Fisher y Wilks quien las analizaron y recomendaron. Historia-Contraste: El Contrate de Hipótesis (responder a preguntas tipo Si/No): fue iniciado por Karl Pearson (Hip. Nula) y Jerzy Neyman (ErrII)
- Importancia-histórica: *Cota CR*, *Estim. Bayes.*, *Prueba Binomial*, *Compromiso ErrI-II*, *Lema Neyman*

27.2 Definiciones de estadística inferencial: var. de estim. y eficiencia. Función de verosimilitud: L(Mod;Datos) no es prob. condic., para estimación Bayes, entrenar y contraste

- *Estad. Infer.*: *Estimador Var. Estim. Efic.*.

[1] 1) La población es aleatoriamente separada en dos grupos. 2) Al Grupo Tratamiento se le aplica el medicamento y al Grupo Control (no o un placebo). 3) Se comparan los resultados con un Test Estadístico.

- *F. Verosimilitud* (likelihood, op. *F. Perdida*): $P(Mod;Datos)$ probabilidad de los *Param. Estad.* dadas las *Realiz.* o de forma más general, F. Obj. que mide lo bien ajustados que están los datos a un módelo. $L(\theta;x_1,x_2,...x_N) = \begin{cases}\prod_i f_\theta(x_i) & \text{si pdf}\\ \prod_i p_\theta(x_i) & \text{si pmf}\end{cases}$. La log-likelihood se nota como $l(\theta,X) = \log L(\theta,X)$ Usamos ";" porque es lo opuesto a *Prob. Condic.* $P(Datos|Mod)$. Se usa para *Estim. Bayes.*, *Entren.*, y *Contraste Hipot.* (ver *Lema Neyman*)..

27.3 Geometría de la Información: geom. dif. y anal. cvx por Información de Fisher (I=varianza de la log-verosimilitud, aditiva, ej. I(mu-Normal)). Cota Cramer-Rao: Var(T)>1/I (ej. media muestral)

Geom. Inform. : en la que una *Distr. Prob.* es considerada una *Var. Riemann*. Ej: el conj. de todas las distr. *Normal*es forman un *Manifold* con *Geom. Hiperb.*. La *Inform. Fisher* es su *Tensor Metrico*. Se usan técnicas de *Geom. Dif.*, *T. Inform.* y *Anal. Cvx* como en *Familia Exp.* [2]. Veamos algunos conceptos:

- *Inform. Fisher* $I(\theta) = E_x[(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta))^2] = \int(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta))^2 f(x;\theta)dx$. Varianza de la derivada de la log-*F. Verosimilitud* (*SGD Entren.*). Medida de la info (*Entropia Inform.*) que la VA X transporta sobre un parámetro desconocido θ [Wiki] [3]. Es aditiva y si θ vector, se tiene Matriz Fisher (combinaciones de parciales) de *Tensor Metrico* usada por 1º vez en *Geom. Inform.* por Rao para probar la *Cota CR*. Ej: suponiendo $X_i \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ *Normal.* :

  - I. de *Media* (*Med. Estim.*): para 1 muestra $\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \Rightarrow I_1(\mu) = E[(\frac{x-\mu}{\sigma^2})^2] = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$.
  - (*) I. de *Varianza* (*Var. Estim.*): para 1 muestra $I(\sigma^2;x_1) = E_x[(\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f(x))^2] = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}$ y para varias $I(\sigma^2;x_1,...,x_n) = \frac{n}{2(\sigma^2)^2}$.
  - (*) I. de *Ensayo Bernoulli* es $\frac{1}{pq}$ y de *Binomial* $\frac{n}{pq}$. Ver *Entropia Inform.*.

- (*) *Divergencia* : medida generalizada de distancia distribución y datos. Ej: Diverg. Kullback–Leibler (o *Entropia Inform.* relativa): $D_{KL}(P||Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log(\frac{p(x)}{q(x)})dx$. Rel. con Entropia Cruzada. [4]

- *Cota CR* (Cramer-Rao): indica lo más *Efic.* en *Var. Estim.* que puede llegar a ser un T si es In*Sesgad.*: $Var[T] \geq 1/I(\theta)$. Dem: ver Rao en *Inform. Fisher*. Ver Rel. con *MSE*. Ej: si Distr. *Normal*:

[2] *Normal*, *Poisson Chi2*, tienen métrica *Inform. Fisher* Cvx y permiten *Anal. Cvx*

[3] si $f(X;\theta)$ es picuda (con respecto a cambios en θ) bastarán pocas muestras de X para estimar θ (los datos X proporcionan mucha info sobre θ), si f es plana necesitaremos muchas

[4] Es una medida (no simétrica) de como una distribución de probabilidad difiere de una segunda (distr. de referencia). Cuando $P = f(\theta)$ y $Q = f(\theta')$ pertenecen a una misma familia distribuciones y θ y θ' difieren poco D se puede poner como serie de *Taylor* de *I Inform. Fisher*. Ej: usada en *GAN*s o *AIC*. La idea de *Medida Central* como minimizar un *C. Variaciones* se puede generalizar a una *Distr. Prob.* que min. una *Divergencia*

- Cota para *Media Mu.*: según *Distr. Muestral* Cota CR $= \frac{1}{nI_1} = \frac{\sigma^2}{n}$ coincide con $Var[\bar{x}]$.
- (*) Cota para *Var. Mu.* y otro similar a *Cuasivar. Mu.* (T_n y T_n' de *Var. Estim.*): según *Distr. Muestral*. $Var(T_n)$ coincide con la *Cota CR* pero la $Var(T_n')$ no. Si μ es desconocido el estimador más eficiente se obtiene dividiendo por $n+1$ *Cuasivar. Mu.*

27.4 Estimador frecuentista MVUE: si Var[T]=CR => MVUE (recíproco no). Si Normal, media y var. muestral, si Uniforme rango medi. Si Uniforme Tanque alemán: N=muestra mayor mas el hueco promedio. MSE=Var[T]+Bias[T]2, rel. con Gaus-Markov, Cota-CR y MVUE

- *MVUE* : Minimum Variance Unbiased Estimator (Estimador Insesgado de Minima Varianza *Efic.*). Si $Var[T] = Cota\ CR \Rightarrow MVUE$. El *Reciproco* no es cierto ya que hay MVUE que no alcanza la Cota CR [WikiCrao]. No es *Estim. Bayes.* si no *Infer. Frec.* y no existe siempre. Ver relación con *MSE*. Ej: Si *Normal*, para μ y σ^2 la *Media Mu.* y *Var. Mu.* son MVUE. Si *Distr. Uniforme*:
  - Para media: *Rango* Medio (donde se desconocen extremos).
  - Para extremo mayor (nº total de tanques, *Tanque Aleman*): $\hat{N} = m + \frac{m-k}{m} = m(1+k^{-1}) - 1$ i.e. muestra mayor m (nº serie mayor observado) más el hueco promedio entre muestra (k es nº muestras no importan las muestras solo su valor max.!).
- *MSE* : Mean Square *Error* (or Deviation) (Error Cuadrático Medio) $MSE(\hat{T}_n) = E[(\hat{T}_n - T_n)^2]$ es la media de la Norma *Esp. Lp*2. Se puede expresar como *Var. Estim.* y *Sesgad.*: $MSE(\hat{T}_n) = Var[\hat{T}_n] + (bias[\hat{T}_n])^2$ por lo que no debe confundirse con *Var. Estim.*, *RMS* etc.. Esta expresión permite, de entre todos los *Estimador*es In*Sesgad.* U_i (unbiased) afirmar que:
  - *Regr. Lin.* es el más *Efic.* (min. *Var. Estim.*) de entre los U_i (*Tma Gauss-Markov*).
  - Si U_i alcanza *Cota CR* es totalmente *Efic.*: es el de menor *MSE* y por tanto el *MVUE*
  - Si U_i es el más *Efic.* $\Rightarrow$ es el *MVUE*

27.5 Estimadores bayesianos (min. E[posterior], no MVUE, entrenar). MMSE: min MSE equiv. E[T|y] (Imputación, Peinado). MAP: max poster. Caso MLE: max Log-Binomial da p=k/n. AIC (TAI). Método de los Momentos (sist. ec. de momentos muestrales)

- *Estim. Bayes.* (*Infer. Bayes.*): *Estimador* que minimiza/max. la *Media* de la posterior (*Tma Bayes*) de una *F. Perdida*: $\hat{\theta}(X_n) = \text{argmin}_{\hat{\theta}} E[L_\pi(\hat{\theta}(X_n), \theta|X_n)]$ donde π es la distr. a priori de θ. Es usado cuando no existe *MVUE* o poseemos información a priori de por donde andan los parámetros a estimar (partimos de parámetros previos estimados (iterativo), conocemos distribución o rango...). Se suele usar para *Entren.* con *SGD*. Es más sencilla que la *Infer. Frec.* (ver *F. Perdida*). Veamos los principales:

- *MMSE* : Minimum *MSE* Estimator $\hat{\theta}_{MMSE}(y) = \text{argmin}_{\hat{\theta}} E[(\hat{\theta}(y) - \theta)^2] = (*) = \int \theta f(\theta|y) d\theta = E[\theta|y]$, i.e. la estima no es más que la media de la posterior (y dato observado/ruidosa). Ej: Imputación *Dat. Perd.* o A. Peinado [5]

  $(*)$ [Openheim] MSE$= \int (\theta - \hat{\theta}(y))^2 f(\theta|y) d\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} MSE = -2 \int (\theta - \hat{\theta}(y)) f(\theta|y) d\theta = 0$ (ver *Regr. Lin.*) $\iff \int \hat{\theta}(y) f(\theta|y) d\theta = \int \theta f(\theta|y) d\theta$ considerando que $\hat{\theta}$ es cte y la *Marginal Total* $\iff \hat{\theta}(y) = \int \theta f(\theta|y) d\theta$. Ver *Prop. Bayes.*

- *MAP* : Maximum A Posteriori. $\theta_{MAP} = \text{argmax}_\theta f(\theta|x)$ donde el posterior (por *Tma Bayes*) $f = \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{\int_a f(x|a)g(a)da}$. El denominador (marginal likelihood) es cte+ y se ignora. Es un *MLE* pero con regularización $g(\theta)$ de los param (prior distrib).

  - *MLE* : Maximum Likelihood Estimator (Estimador de Máxima *F. Verosimilitud*, Fisher). $\theta_{MLE} = \text{argmax}_\theta l(\theta; x_1, ..., x_n)$ donde la Verosimilitud $l = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$. Es un MAP pero asume *Princ. Indif.* (*Distr. Uniforme* de los param i.e. no tiene regularización, da *Crisis Prob.* en *Prob. Laplace*). Ej: mi paper *CRF*. Ej: $\hat{p}_{MLE}$ de *Ensayo Bernoulli* o *Binomial*:

    Lanzamos 40 veces y obtenemos $-++++--+-....+ = 35+5-$ ¿de todas las *Binomial* con $n = 40$ y p variable (ver Fig. 27.1), cual es la que tiene un max. en $k = 35$?. Nuestro modelo es una *Binomial* y su log-*F. Verosimilitud* es $l(p; n, k) = logB(k; n, p) = log\binom{n}{k} + klogp + (n-k)log(1-p)$, derivando $\frac{\partial l}{\partial p} = 0 \iff \hat{p}_{MLE} = \frac{k}{n}$

    El *Estim. James-Stein* lo supera

  - *EM* (Expectation-Maximization, Esperanza-Maximización) (Fig. 27.1): *Metodo Iterativo* para estimar los *Param. Estad.* de un *GMM* via *MLE* o *MAP*.

- Otros:

[5] con entrenamiento computamos tabla feature limpio-ruidos $f(\theta|y)$ y en test promediamos para estimar el limpio dado el ruidoso. Ej: Si lineal *Regr. Lin.* s.t. $\hat{\theta} = Wy + b$

- *AIC* Criterio de información de Akaike: compromiso entre bondad del ajuste (*Sobreajuste*, *MSE*) y complejidad del *Mod. Estad.* (*Infer. Solomonoff* o *TAI*, Gr. del Polinom.): $AIC = 2k - 2ln(L)$ donde k es el número de parámetros en el modelo estadístico, y L es el máximo valor de la *F. Verosimilitud* para el modelo estimado. El ajuste podemos medirlo con *Divergencia* $DKL(g||f)$ si tenemos estima de la distrib. g y conocemos la distrib. objetivo f.
- *Met. Momentos* [Pearson]: ajusta una Distr. a unos datos. Modelado *Estad. No Param.*. Usa los *Momento* muestrales para estimar cualquier parámetro (media, varianza..), al conocer la distribución podemos expresar sus parámetros como función de los momentos en un sist. ec (no lineal, con tantas ec. como parámetros).

27.6 Hipótesis nula: simple, rechazable, con no (catadora de te, primalidad, vacuna). Contraste de hipótesis (=red. absurdo, si pocas muestras). Aceptar es en verosimilitud. Tipos (bilateral)

- *Hip. Nula* H_0: *Sentenc.* sobre un parámetro de la población de que la situación experimental presenta un "estado normal". Suele ser la Hip. Simple [6] Es la de partida que queremos rechazar (*Red. al Absurdo* en *Contraste Hipot.*). Suele incluir un "no".
  - "la *Catadora Te* no distingue las tazas" (*Dis. Exp.*), "n es compuesto" (*Test Primalidad*), "la vacuna no es efectiva" (igual que placebo *Prueba Controlada Aleatorizada*)
  - "el paciente no está enfermo (está sano)", el acusado no es culpable (es inocente), no hay voz (hay silencio), "el Cl2 no es mejor que el Cl1 (diferencia tiene media 0)",

  Hip. Alternativa H_1: si no se especifica es del tipo "H_0 es falsa" Ej: es paciente enfermo,..., suele ser la compuesta).
- *Contraste Hipot.* (*Infer. Frec.*): procedimiento que permite rechazar la *Hip. Nula* H_0 sobre un *Estadistico* a partir de una *Muestr.* $X_n = \{x_1, .., x_N\}$ (equivale a *Red. al Absurdo*). También para saber si se ha modelado bien una población (*Regr.*) o para ver si dos var. son realmente *Indep.*.
  - Cuando algo es claramente mejor que otra cosa (*Tam. Muestra* y *Confianza* alta) los *Contraste Hipot.* no merecen la pena. Cuando es interesante es cuando queremos saber si la mejora, aunque es pequeña, es significativa (cuando tenemos pocas muestras). Parece que los grandes descubrimientos (Relatividad) empiezan con mejoras pequeñas (*Precesion Mercurio*).
  - OJO: aceptar H_1 es en probabilidad, simplemente la tacha de verosímil (lo que no significa obligatoriamente que sea cierta, simplemente que es más probable de serlo) o inverosímil.
- (*) Tipos de contraste:

[6] Hip. Simple: *Sentenc.* con $=$, i.e. de que un parámetro de la población vale un determinado valor numérico. Hip. Compuesta: con $\neq$ o $<$, i.e. está dentro de un *I. Confianza*).

	simple	bilateral (RC son 2 colas)	lateral (RC es 1 cola)	lateral (RC es 1 cola)
H_0 H_1 *Valor-p*	$\mu = \mu_0$ $\mu = \mu_1$ (*Lema Neyman*)	$\mu = \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$ $p(\lvert t_{n-1}\rvert > \lvert t_c\rvert)$	$\mu \leq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $p(t_{n-1} > t_c)$	$\mu \geq \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $p(t_{n-1} < t_c)$

27.7 Clásicas: H0 a rechazar: media creida=muestral. Prueba Z (tiempo ocio): estadístico de contraste (tipif., T-Student), región de aceptación, decisión. Prueba Binomial (catador): valor-p (marginal de cola), rechazar H0 si < alfa

- *Prueba Z* Contraste Bilateral *Normal*, **Tiempo Ocio**: se cree que el tiempo de ocio de alumnos es $\mu_0 = 350$ min $\sigma_0 = 60$ min Normal. Para contrastar esta hipotesis se toma muestra 100 alumnos y sale *Media Mu.* $\bar{x} = 320$. ¿Se puede aceptar esta hipótesis con *Confianza* $nc = 0.9$?

1. *Hip. Nula* y *Confianza*: $H_0 : \mu = 350$, $H_1 \neq 350$, $nc = 0.9$
2. *Estadistico* de Contraste (EC) *Tipific.*: $z_c = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{320-350}{60/\sqrt{100}} = -5.0$. Basándonos en la *Distr. Muestral* de H_0. Usar *T-Student* si desconoces σ^2.
3. Región de Aceptación (RA) (Tablas): $(z_{-\alpha/2}, z_{\alpha/2})$: $nc = 0.9 \Rightarrow z = \frac{0.9+1}{2} = 0.95 \Rightarrow$ Tablas $z_{\alpha/2} = 1.65 \Rightarrow RA = (-1.65, 1.65)$. Similar a *I. Confianza* y opuesto de Rechazo o Crítica (RC).
4. Decisión (aceptar H_1 si $EC \in RA$): $-5.0 \notin (-1.65, 1.65) \Rightarrow$ rechazamos H_0 con un $nc = 0.9$

- *Prueba Binomial* : Ej: **Amigo Bravuc.** o *Catadora Te*: dice adivinar tipo wishky el 90% de las veces. Hacemos prueba y acierta $k = 14$ de $n = 20$ $\hat{p} = 70\%$ ¿mala suerte?.

Sea H_0 : las catas del bravucón siguen una $B(k; p = 0.9; n = 20)$ (*Binomial*), entonces si H_0 cierta $P(k = 14|H_0) = 0.0089$, $P(k = 13|H_0) = 0.002...P(k = 0|H_0) = 0 \Rightarrow$ su *Valor-p* (*) es $p - value = P(k \leq 14|H_0) = \sum_{k=0}^{1} 4P(k|H_0) = 0.013$. Rechazamos H_0, i.e. no lo creemos pues es un $p - value$ muy bajo para una *Binomial* con $p = 0.9$. Si hubiese $p - value > 0.05$ le hubiésemos creido.

(*) *Valor-p* : prob. de resultado extremo o más dado que ocurre hipot. nula H_0 $p - value = P(\text{resultado tan extremo o más}|H_0) = 0.05$. Es la *Distr. Marginal* de una cola. Si es menor que la Significación (*Confianza*) rechazamos H_0. Se relaciona con *Falsa Alarma*. Ej: *Prueba Binomial*

27.8 Otras pruebas. De dependencia/ajuste: Chi2 (nominal, tab. conting., col. mueve como total). Regr. (H0:r=0, r=T-Student). De diferencia de medias: Wilcoxon (H0: dif.=0, muestra relacional, 7000 muestras). T-Student: var. y tam. muestra diferente. ANOVA: (análisis de varianza, comparar medias >2 poblac.). Jarque Vera: curtosis y asimetria como Normal

- Pruebas de *Depend. Estad.* o bondad de *Regr.*:
  - *Prueba Chi2* [Pearson]: en *Tab. Conting.* X,Y (*Nomin.* u *Ordin.*). En muestreo ideal, donde la columna (o fila) total final es plana *Distr. Uniforme* (hemos tomado la misma cantidad de hombres y mujeres), es claro que si una c. y_i es plana también podemos afirmar que la variable X es *Indep.* del y_i elegido (el sexo no influye en el voto del partido). En muestreo real, decimos que hay independencia si las *Frec. Rel.* una c. se mueve como la total. Esta permite decidir cuanta diferencia (*Error* entre observada y esperada) en movimiento aceptamos comparando con *Chi2* [7]
  - *Prueba Regr.* [WikiContr]: para saber si hay o no *Correl. Lin.* ($\rho \neq 0$) considerando el *Coef. Pearson* sigue una *T-Student* Fig. 23.1. [8]
- Pruebas de Dif. Medias:
  - *Prueba Wilcoxon* de los rangos con signo: basado en *Estad. de Rango Estad. No Param.*. Para decir si la *Media Mu.* de dos distr. **relacionadas** es 0 o no. Ej: MiPaper 7000 muestras en Pred. Estr. Proteica Algo1 y Algo2 son $[54,30,..70]\%$ y $[60,28,....72]\%$ $H0$: "diferencia de los resultados de Algo1 y Algo2 tiene media 0" [9]
  - *Prueba T-Student* : decidir si dos *Poblac. Normal*es tienen medias diferentes, el *Tam. Muestra* y las σ^2 pueden ser distintas [WikiEstadMuestral], parecido a *Prueba*

---

[7]

1. H_0: (X,Y) "son independ". H_1: "contrario". Calcular *Frec. Abs.* Observadas: las originales. Frec. abs. Esperadas: las entre paréntesis; p.e. $n_{hombre,A} = n_A \hat{P}(hombre) = 33\frac{37}{96} = 12.7$.
2. Estadístico de Contraste (EC): discrepancia entre frec. obs. y esp. para las i celdas $\chi_0^2 = \sum_i \frac{(observada_i - esperada_i)^2}{esperada_i} = \frac{(23-12.3)^2}{12.3} + ... = 20.6$.
3. Valor de Aceptación (Tablas): si $\alpha = 0.05 \Rightarrow Chi2\ \chi^2_{\alpha,(nf-1)*(nc-1)} = \chi^2_{0.05,2} = [Tablas] = 5.991$.
4. Decisión: como $\chi_0^2 = 20.6 > 5.7$ rechazamos H_0. Esto se veia desde el principio pues la gran mayoría de los hombres votan al A (26) y las mujeres al B (35).

Otro usos: 1) Bondad de *Regr.* (f_i observada vs teórica) y 2) Homogeneidad (ver si las proporciones de elección de actividades (música, deporte, informática) ha cambiado de un año a otro entre los alumnos de la ESO)

[8] $H_0 : \rho = 0$. La *Distr. Muestral* de una f. *Coef. Pearson* $f(\rho)$ sigue una *T-Student* de grado $n-2$. Despejando queda $\rho = \frac{t}{\sqrt{n-2+t^2}}$ y podemos determinar el CE del *Contraste Hipot.*. Similar a *Prueba Chi2*

[9] Al 0.05 de significación con (200 con igual valor eliminadas), el Algo1 supera al Algo0 en 58% de las muestras $\Rightarrow p-value = 8.7 \cdot 10^{-107} < 0.05 \Rightarrow$ podemos rechazar la H_0 de que "la diferencia entre los resultados de los dos Algo es de media 0". Equivale al *AUC*??. Prueba McNemar es similar.

Wilcoxon. [10]

- *ANOVA* (Analyses of Variance, [Fisher]): similar a *Prueba T-Student* pero cuando queremos comparar las medias de no solo dos poblaciones si no de tres o más considerando sus varianzas. Ej: 7 muestras diarias de la leche que dan tres vacas, la H_0 es que las tres vacas tienen la misma media. Útil en *Exp. Fact.*

- *Prueba Jarque-Vera* : para comprobar si una muestra tiene la *Asimetria* y *Curtosis* de una *Normal* (o es bi*Moda*l

27.9 Tabla: rechazo ok=conf., falsa alarma=errI, desaparecido=errII=beta, acierto=poder-estad (no-param. tiene menos). Compromiso ErrI-II (inocencia, ROC y detec. señal). Lema de Neymam-Pearson (hip. simples, rechaza H0 si razón verosimilitud R=L(T0|X)/L(T1|X)<k, donde P(R<k|H0), test unif. de max pot.

- Errores en el Contraste:

	si $H_0 = V$	si $H_1 = V$
Eliges H_0	OK (*Rechazo Correcto* , Correct rejection, TN) $1-\alpha = 0.95$ *Confianza*	(*Desaparecido* , Missing o False Negative, FN) $p(ErrII) = p(AceptarH_0 \| H_1 = V) = \beta = 0.2$
Eliges H_1	(*Falsa Alarma* , FP) $p(ErrI) = p(AceptarH_1 \| H_0 = V) = \alpha = 0.05$ significac.	OK (*Acierto* , Hit,TP) $1-\beta = 0.8$ *Poder Estad.*

- *Poder Estad.* (Potencia del Contraste): $p(AceptarH_1|H_1 = V) = 1-\beta = \Pi = 0.8$ cuanto mayor es, menos prob. de cometer ErrII (sensib. en *Clasif. Bin.*). Ej: Prueba *Estad. No Param.* tiene menos [11]. Ver *Compromiso ErrI-II*

- *Compromiso ErrI-II* : A *Tam. Muestra N* fijo, si $\alpha \downarrow \Rightarrow \beta \uparrow$. A menos *Falsa Alarma*s más *Desaparecido*s. Ej: *Presuncion de Inocencia*, *Curva ROC*, *Detec. Segnal.*,

- *Lema Neyman* -Pearson (hijo de Karl): (profesor de Dantzig *Metodo Simplex*) para contraste simple $H_0 : \theta = \Theta_0; H_1 : \theta = \Theta_1$. Rechaza H_0 cuando razón de *F. Verosimilitud*es $\Lambda(x) = \frac{L(\theta_0|x)}{L(\theta_1|x)} \leq k$. La k sale de $P(\Lambda(x) \leq k|H_0) = \alpha$ (recuerda a *Valor-p*). Es un resultado que describe el criterio óptimo para distinguir entre dos Hipot. Simples. Garantiza el test uniforme de max *Poder Estad.* Π a significación α.

[10] El estadístico es la *T-Student* $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{X_1 - X_2}}$ donde la varianza conjunta se obtiene de las muestrales $s_{X_1 - X_2} = \sqrt{f(s_1, s_2, N_1, N_2)}$

[11] un test paramétrico es más capaz (potente) de conducir a un rechazo de H_0. La mayoría de las veces, el *Valor-p* asociado a un test paramétrico será menor que el asociado a uno no-paramétrico aplicados sobre los mismos datos

- Para Contrast. compuesto: $H_0 : \theta \in \theta_0; H_1 : \theta \in \theta_1$. $\nexists$ un Lema general como el de Neyman-Pearson salvo para ciertas distribuciones.

Usado en *Detec. Segnal.*

27.10 Aplicaciones: Presunción de Inocencia (sistema judicial vs médico). Clasificación Binaria: exactitud, precisión, sensibilidad y especificidad. Cl. estúpido (Curva ROC y AUC)

- *Presuncion de Inocencia* : por *Compromiso ErrI-II*. $ErrI$ suele ser menos grave que el $ErrII$. Ej: Es mejor que 10 culpables escapen *Desaparecido* (FN)a que un inocente sufra *Falsa Alarma* (FP). En sist. humanistas hay muchos *Desaparecido* (no son dañinos) y pocos *Falsa Alarma* (dañinos). [Blackstone1750]. En medicina es lo contrario: mejor decir a sano hemos encontrado algo (hagamos más pruebas, aunque sea *Falsa Alarma*) que decir a enfermo todo bien (y que resulte ser un *Desaparecido*). En Radares o *Detec. Segnal.* decidimos nosotros el compromiso *Confianza Poder Estad.*.

- *Clasif. Bin.* : *Test* binario.

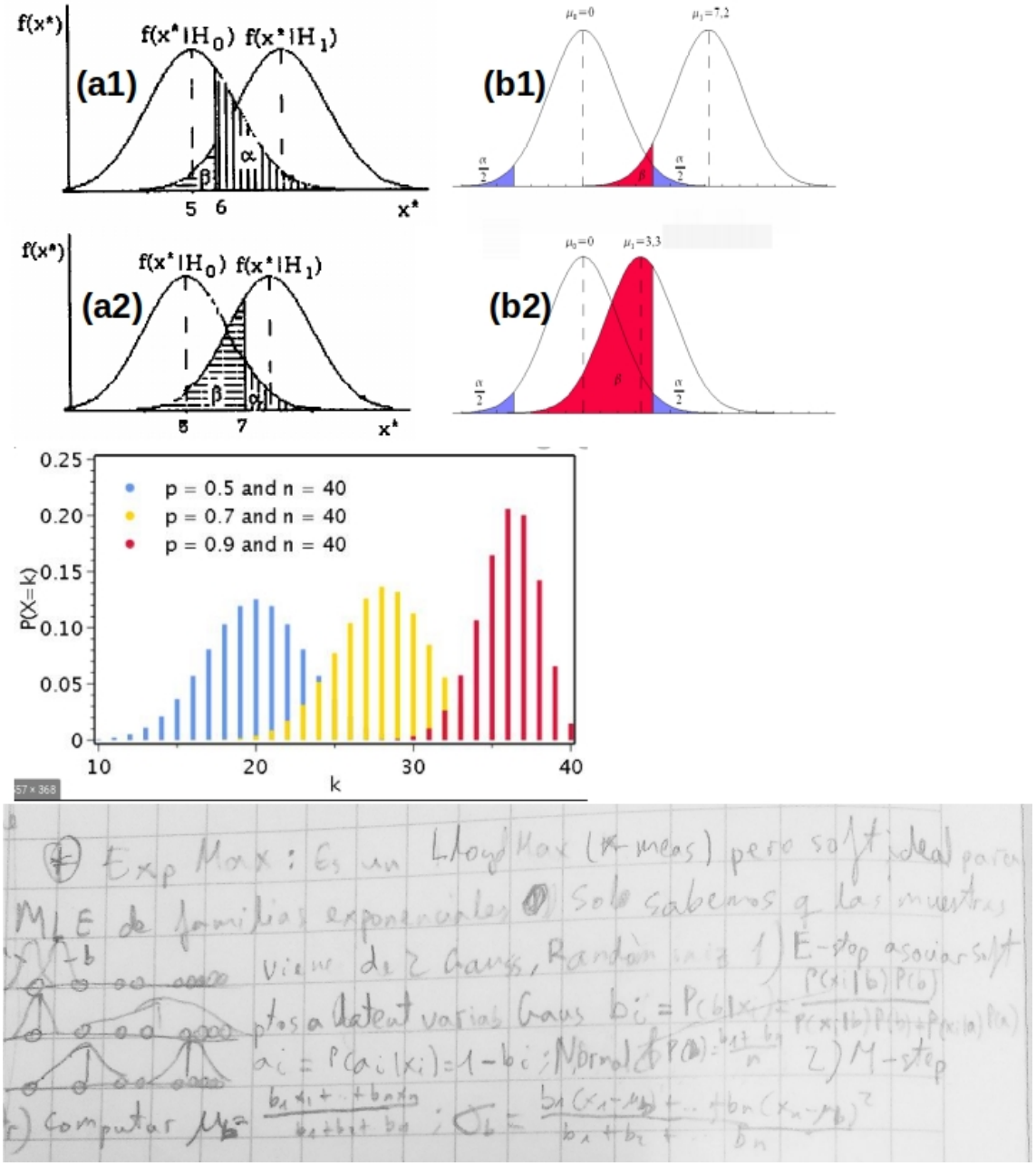
  - (*)*Exact.* (accuracy): poco *Sesgad.* Fig. 19.1.
  - (*) *Precis.* : poca *Var. Estim.* o alta *Efic.*
  - Sensibilidad (Sensitivity) o *Poder Estad.* : TPR capacidad de *Acierto* detectar 1s correctamente o
  - Especificidad (Especifity): o TNR capacidad de *Rechazo Correcto* o detectar 0s correctamente.

  Como evitar **Clasif. Estupido**: todo 0s o 1s

  > *Curva ROC* : curva según varias el *threshold* donde en eje-x FPR (*Falsa Alarma*, 1-Especificity) y en eje-y tenemos TPR (*Aciertos*, True Positive Rate, Sensitivity). Área Bajo la Curva (*AUC* , *Int. Def.*): mayor cuanto más tienda hacia arriba-izda y mejor clasificador (equivale a *Prueba Wilcoxon*) . Ver

- *Detec. Segnal.*, *Parad. Falso Pos.*

Figura 27.1: Inferencia y test de hipótesis



Chapter 28

T68. Aplicaciones de la Estadística y el Cálculo de Probabilidades del estudio y toma de decisiones en problemas de las Ciencias Sociales y de la Naturaleza. Evolución histórica.

28.1 Introducción: Juegos de azar, biometría, INE

- Ej-motivador: Ej1: *Juegos Azar*, Ej2: *Biometr.* y *INE*
- Importancia-histórica: *T. Decis. Estad.*, *Hist. Prob.*, *Hist. Estad.*

28.2 Historia de la Probabilidad

Hist. Prob. : Nace más asociada a los *Juegos Azar* mientras que la Estadística a los Censos. Luego convergen.

- Dado Sumerio: tallaban hueso para que cayera en cuatro posiciones distintas (*Juegos Azar*) y *Al-Kindi*, *Criptogr.*
- Término Probable [<1650]: usado para denotar "acción o situación aprobable" (la que hace la gente sensata). En derecho usado como sinonimo de *Eviden.*
- Cardano1550: Intuye *Ley Grandes Num.* en *Prob. Laplace*. Primer estudio serio en "Libro de los *Juegos Azar* (Liber de ludo aleae)"
- Juan Carmuel, Cardano, Méré, Pascal y Fermat1650: *Juegos Azar*.
- Jakob Bernoulli: *Tma Dorado Bernoulli*, *Proc. Bernoulli*) y *Ley Grandes Num.*, Moivre *TLC*, Distr. de *Poisson*: más allá de los juegos.
- Bayes: *Tma Bayes*.
- Laplace: [Theorie Analitique de Probabilities]: *Prob. Laplace* relacionada con *Combinat.*, *Tma Moivre-Laplace* y *Infer. Bayes.*.

- Cotes, Simpson, Laplace, Gauss: *Error* (*Maquina Galton*) y *Normal* Distr. *Normal*.
- Lengendre-Gauss: *Regr. Min. Cuadr.*
- Rusos: *Crisis Prob.* (*Par. Bertrand*), solo estos la mantienen viva:
  - Markov: *Cadena Markov* inicia *Estoc.*
  - Chevichev y Lyapunov: refinan *Ley Grandes Num.*.
  - Kolmogorov: *Prob. Axiom.* [Fundamentos de la Teoria de Probabilidad]. Le quitó las paradojas usando la Teor. *Medida*. *TAI*
- Moderna: *T. Inform.* y *Aprend. Autom.*

28.3 Historia de la Estadística

Hist. Estad. : al principio asociada a la política económica, Laplace y Gauss la aplican a otras ramas, Fig. 28.1. Ver *Hist. Prob.*

- Emperadores romanos: *Encuest.* para muestrear sus riquezas (*Estad. Descr.*). *INE CIS*
- Árabes [*Al-Kindi* 850]: usaban el análisis de la frec. de palabras (*Combinat.*) para *Criptogr.*. Tambiém *Mod. Lenguaje*
- Término: Estatista: Latin Italiano, hombre de estado. Statistik: 1700 en alemania análisis de datos del estado (Staat, estado en alemán). Estudios demográficos y de estado en europa (pelicula El espia y el oficial [Polanski])
- Graunt1660: Ingles, usando tablas de mortalidad de parroquias estimo Tablas de Mortalidad de Londres.
- Bayes: Bacon1600 *Induc.* y *Infer. Bayes.* (primero en mezclar Prob. y Estad.)
- Legendre,Gaus: *Pred. Ceres Regr. Min. Cuadr.*
- Ingleses (1ª ola): Los tres eran eugenista, Bioestadística (análisis de *Genetica de Poblaciones*)
  - Francis Galton1870: término *Desviac. Tip.*, Correl. (*Depend. Estad.*) *Regr.* y *Maquina Galton*. Primo de Darwin.
  - Karl Pearson: supervisado por el anterior y seguidor de Darwin. Creó *Met. Momentos*, *Prueba Chi2*, *PCA*. Revista*Biometr.* (1er Dpto de Estad.)
  - Ronald Fisher: leyó libro del anterior y creo la *Varianza*, *Hip. Nula* (*Catadora Te*) *Dis. Exp.* , apoyó *T-Student*, *Inform. Fisher MLE*, *Dis. Exp. PCA* gran bioestadístico (agricultura experimental, salvando millones de vidas).
- Europeo-americanos (2ª ola):
  - Wald1939: *T. Decis. Estad.* (II Guerra Muldial).
  - Neyman: *Lema Neyman* (*Poder Estad.*), *Compromiso ErrI-II*, *I. Confianza*, *Mu. Aleat.* Estratif.

  - Box: casado con hija de Fisher *Control Calidad Dis. Exp. All Models Are Wrong*, *ARMA*

- Moderna (ordenador herramienta): *T. Segnal* [Oppenheim1990] y *Aprend. Autom.* [Hilton2005]

28.4 Juegos de azar (Teoría de juegos). Partida interrumpida (futuro), apuesta de Pascal (calentamiento global). Cadena de Markov (=camino aleatorio), prob. ganar=pr. geom.. Proceso de decisión de Markov y HMM. dilema del prisionero.

- *Juegos Azar* [Pascal,Fermat]: rama de *T. Juegos*, basada en *Prob. Laplace*. Ej: cartas o dados. o *Cadena Markov*

  - *Probl. Partida Interr.* : $D_i = D_T P_i$ donde D_i dinero a jugador i, D_T dinero total y P_i prob. de ganar i.

    > ¿Si la probabilidad de ganar A es P_A y apuesta A euros, cuanto debe apostar B? La de B $P_B = 1 - P_A$ entonces para que sea justo: $AP_A = BP_B \iff B = AP_A/P_B$. Ej: un jugador ha ganado 2 partidas y el otro 3 antes de interrumpirse la partida ¿como se deben repartir lo apostado? Pascal y Fermat llegaron a la misma conclusión por caminos distintos: no repartir según pasado (lo que a ocurrido) si no según futuro (prob. de ganar cada uno si continuara).
    > Esto inició el *Triang. Pascal*, la *Teor. Prob.* y los Proc. *Estoc.*

    Se lo planteó a Pascal el Caballero (Chevalier) de Méré (Fig. 28.1) [1].

  - *Apuesta Pascal* sobre la ganancia de vivir creyendo en Dios. Von Neumann se convirtió al catolicismo por esto. Ver *Calent. Global*, *Creer en Ficciones*

- *Cadena Markov* : *Camino Aleat.* discreto con saltos entre estados. Grafo representado por una matriz de transición (si orden>1 la matriz es un tensor); Ej: *Juegos Azar*.

  > El nº de pasos para terminar cadena puede ser considerado una *Var. Aleatoria X* cuya prob. la da el desarrollo en *Diagr. en Arbol* . $P(X = k) = (\frac{4}{6})^{k-1}\frac{2}{6}$. Puede ser que el jugador 2 gane en los pasos $X = \{2,5,8,...\} \Rightarrow P(G_2) = \sum_k (\frac{4}{6})^k$ *Pr. Geom.*

  Ver *HMM*, *Mod. Lenguaje* y *Proc. Decis. Markov*. Algunos son no *Ergod.*. Ver *Maquina Galton*

- (*) *HMM* y *Proc. Decis. Markov* : *Tupla* $(S = estados, A = acciones, P_a = prob., R_a = recompensas)$, el objetivo es encontrar una buena táctica o política de decisión (policy) $\pi(s)$ (acción a tomar para cada estado s). Es un Juego *Estoc.* (ver *T. Juegos*). Fig. 28.1. Sol. *Optim.* por *Progr. Dinam.*. Planificar sobre un PDM Parcialmente Observable (*Dat. Perd.*) es un *Probl. Indecib.* Uso: *Juegos Azar*, *T. Decis. Estad.*, Conducción Autónoma, Videojuegos. Ver *Cadena Markov*.

[1] Era dandista: creer que la mejor forma de resolver las cuestiones que se planteaban era en discusiones abiertas entre personas inteligentes, ingeniosas y a la moda. No confundirlo con *Primo Mersenne* que no contribuyó a la Teoría de Prob. por ser cura

28.5 Entropía física=f. aritmética suma. Teoría de la información (código de Huffman). Aritmética: tma primos, test primalidad

- *Fisica Estad.* [Boltzmann]: *Entropia* y *Modelo Ising*. Otras: *Cuantica*, *Radiact.*,
- *T. Inform.* [Shannon]: *Codig. Huffman*
- Aritmética [Hardy,Chaitin]: *F. Aritm.* (*Tma Num. Primos*), *Test Primalidad TAI*, Prob. de No-*Num. Comput.*

28.6 Error de medida (=máquina Galton=Normal=TLC). Corrección: datos perdidos+modelo de lenguaje+Viterbi. Regresión (lin. ley.)

- *Error* o Incertidumbre de Medida [Gauss,Laplace]: ¡*Maquina Galton=Normal=TLC*!
  - *Maquina Galton* : *TLC* con bolas. Cuando en fenómenos se sospecha la presencia de un gran número de pequeñas causas (*Error*) actuando de forma aditiva (*Media Mu.* positiva o negativa) e independiente es razonable pensar que las observaciones serán "*Normal*es". *Camino Aleat.*, *Control Calidad*

  Venga de donde venga, *Exp. Aleatorio*, *Incert. Fisic.*, hay que lidiarla.
- *Det. Corr. de Errores* []: Inform. en *Mod. Lenguaje*: *Dat. Perd.* + *Viterbi*
- *Regr. Min. Cuadr.* [Gauss]: *Lin. Ley* da *Sist. Sobredet.*.
- Propag. *Error* [Cotes,Simpson1750]: Física y [Morales2017] [2]

28.7 Estadística científica: regla del pulgar, presentación de resultados, factor de impacto (cuartil). Inductiva: actualización bayesiana. Contraste de hipótesis: detección de señales (errorI-II).

- *Estad. Cientif.* [Bacon]: Tratamiento adecuado de resultados (*Regla del Pulgar* y *Prueba Controlada Aleatorizada*). *Present. Resultados*. *Factor Impacto* (*Cuartil*). La C. empírica es *Estad.* (*Induc. Epistem.*):

Actual. Bayes.: *Prop. Bayes. P. Amanecer-Pavo*

- *Detec. Segnal.* [Neymam]: por *Compromiso ErrI-II*. Fig. 27.1: (a) Umbral variable, μ_1 fijo. (b) Umbral fijo, μ_1 variable. Ver *T. Decis. Estad.*. Usado en radares, astronomia, voz, alarmas, psicología...

[2] 1) los errores en medida se van acumulando en la F. final (ojo a los truncados de las series *Taylor*). 2) Laplace y Gauss *Normal* (errores +,- de *Maquina Galton*)

- Supongamos queremos estimar el valor de μ verdadero de una señal de intensidad μ_1 constante o variable sobre un fondo con μ_0. La $P(ErrI)$ (Fig. en azul) no cambia (tanto como si $\mu = \mu_0$ o $\mu = \mu_1$) y es fácil estimar, pero el $ErrII$ (rojo) no se puede estimar fácilmente pues depende del H_1.
- Los pasos son 1) Prefijar α. 2) Reducir β todo lo posible. Para ello hay que elegir una RA adecuada (umbral, ej. con *Lema Neyman*). Si no estamos conformes con β lo único que podemos hacer es aumentar tamaño de muestra. Ej: *Curva ROC*.

- (*) *Clasif. Bin.* (*Curva ROC*) *Aprend. Autom.*

28.8 Investigación operativa. Teoría de la decisión estadística: función de pérdida (infer. frec. vs bayesiana). Regla de decisión (minimax, estimador de tono). Intervalo de confianza vs MMSE o MAP. Estimador de James-Stein (Tma Gauss-Markov).

- *Invest. Operat.* [Dantzig,Wald]: usa herramientas de casi todas las ramas (*Teor. Unif.*) para hacer mejores decisiones: *T. Decis. Estad.* (*Detec. Segnal.*, *Proc. Decis. Markov*), *Optim.*, *PL* (con millones de variables), *T. Juegos*, Grafos (*Red Flujo*, *P. del Viajante*, *Camino Critic.*). Lógica (*Tma Imposib. Arrow*, *Fuzzy*)

- *T. Decis. Estad.* [Wald1940]: rama de la *Invest. Operat.* fundada en la *Estad.* mas que en *Fuzzy*
  - Distingue: **Normativa** para que el agente tome la decisión *Optim.* y **Descriptiva** para explicar como los agentes toman su decisión [3]
  - *F. Perdida* o de Coste (opuesto a F. Objetivo o de Recompensa o *F. Verosimilitud*): a *Optim.*. En la Fig. 28.1 podemos que ver que en *Infer. Frec.* (*I. Confianza* y *Contraste Hipot.*) trabaja con la **F. Riesgo** R sobre todas las muestras (*Media* de la FP) y en *Estim. Bayes.* (*MMSE*, *MAP*) con ρ posterior o *F. Verosimilitud* de la muestra actual. Es mucho más difícil encontrar un opt. de R (basado en todas las posibles muestras) que de ρ (basado solo en la actual, conj. *Entren.*) [WikiLossFun].
  - *Regla Decision* : F. que mapea una observación o *Muestr.* a una acción adecuada según una *F. Perdida*. Ej: *Minimax*, *Estimador*:
    - *Tono* (pitch): *Regla Decision* sobre *Autocorr.*. Intens.: con *RMS*. o *Varianza*. Ver *L. Weber*, *Curtosis*, *Base Datos*, *Biometr.*, Ruido-Tunnelling, etc. ¿Es el óptimo?
  - Unifica: *Infer. Bayes.*, *Infer. Frec.* (*Contraste Hipot.* y *Estimac.*), MixMax (*T. Juegos*), *Aprend. Autom.*. Ver *PL*, *SGD*, *Efic.*, *Estim. Bayes.*.

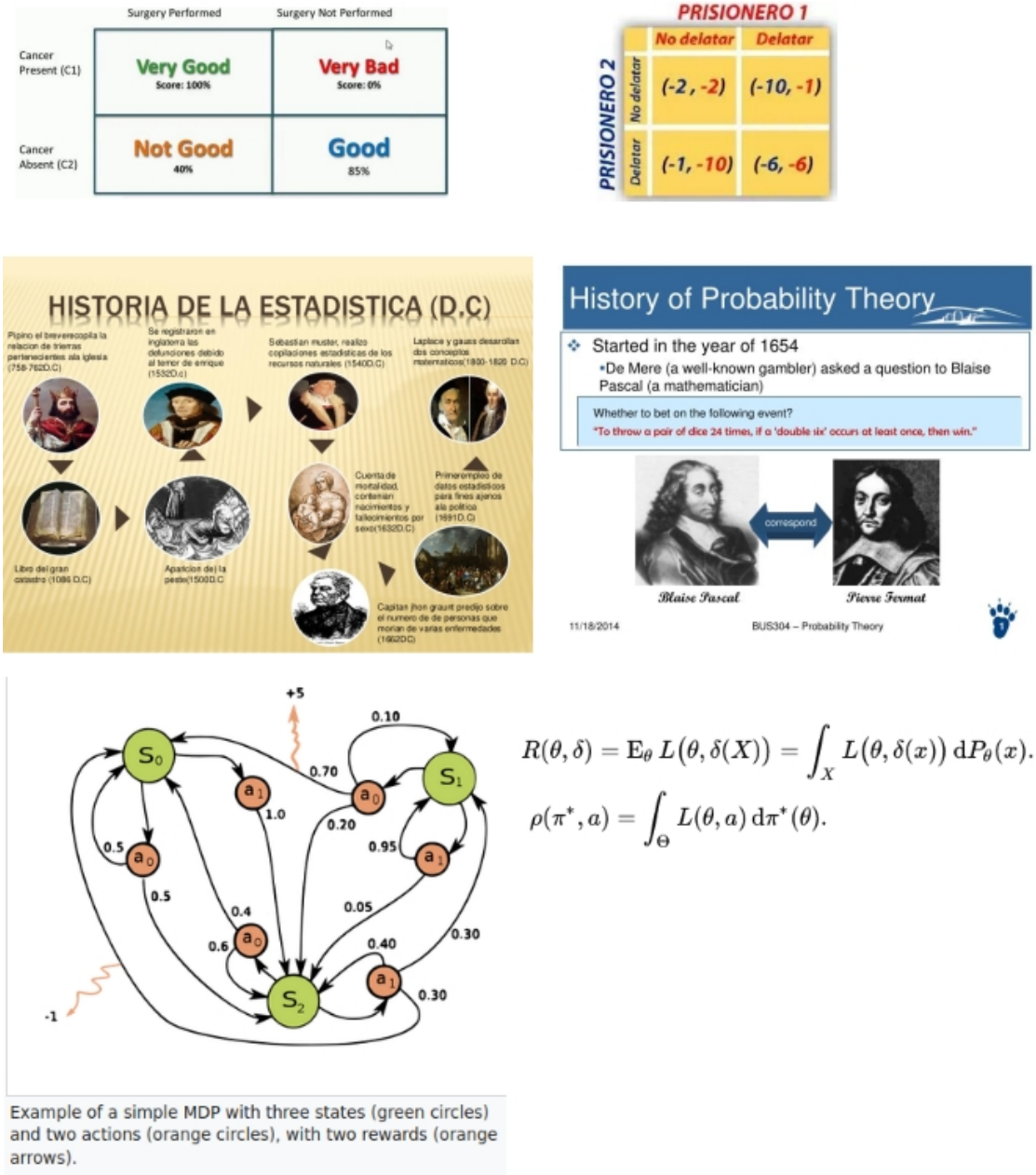
- *Infer. Frec.*: *I. Confianza* de *Media Mu.*: Votantes

- *Estim. Bayes.*: *MMSE* y *MLE*

[3] el agente no siempre dispone de información perfecta o puede paralizarse frente a tantas alternativas

- *Estim. James-Stein* : *Estimador Sesgad.* con menor *MSE* que *Regr. Min. Cuadr.* o *MLE*. Es un ejemplo de *Regla Decision* **Admisible** (la *Optim.* de todas, Equivale a Efic. Pareto (*Tma Imposib. Arrow*). No contradice el *Tma Gauss-Markov* pues es *Sesgad.*. [4]

Figura 28.1: Aplicaciones de la estadística y probabilidad e historia



[4]esto ocurre en vector de *Param. Estad.* ≥ 3. En tal caso es mejor *Optim.* una *F. Perdida* conjunta que separada (partida, *Dat. Perd.*), incluso si las VA son *Indep.* (vel. luz, consumo de te en Taiwan y peso de cerdos de Andalucía). Ej: $\theta_{JS} = f(\sigma^2, y)$ E. de la media de una *Normal* multivar. $y \sim N(\theta, \sigma^2 I)$ a partir de una sola observación y (vector). Da menos *MSE* que el E. *Regr. Min. Cuadr.* $\theta_{LS} = y$ (que simplemente considera la media como la observ.)

28.9 Control de calidad (error común vs especial, bombilla coef. variación). Diseño experimental (var. explicativa y respuesta). Experimento factorial (ANOVA, Regr.): Y=producción de olivo, X=riego,abono,corte, niveles=+,-, 8 factores. Modelo: Y=f(X1,X2,X3)

- *Control Calidad* [Box]: % probabilidad *Error* de producto (chips, aceite,..) con *Tam. Muestra* bajo. Estos pueden ser Causa Común (*Normal*, *Maquina Galton*) y Especial (no esperable, *Num. Aleatorio*). Ej: Bombilla *Coef. Var.*. Ver *Gastos Muestr.*, *Exp. Fact.*, *Test*, *Valid.* Cruzada.

- *Dis. Exp.* [Fisher, Box]: uso de técnicas como *Exp. Fact.* o *Regr. Lin.* (*Lin. Ley*??) para identificar y cuantificar $Y = f(X)$, i.e. las causas o (X *Var. Expl.*) de un efecto (Y o *Var. Resp.*). Ej: Fumar mata (*Correl. Causal.*)

  También es un libro de [FisherBook1935] donde analiza la *Hip. Nula* de la *Catadora Te*. Ver *Control Calidad*, *Endogeneidad*, , *Depend. vs Correl.*

- Dis. o *Exp. Fact.* (no confundir con *Anal. Fact.*): técnica para hacer *Dis. Exp.*. Puede analizarse haciendo *ANOVA* o *Regr.*. Ej: *Control Calidad* $Y =$ cantidad de aceituna que da un olivo, 3 variables $X = (riego, abono, corte)$ con 2 niveles $(+,-) = (aplicado, no-aplicado)$. Con *Var. Rep.* $2^3 = 8$ da 8 puntos factoriales experimentos o experimentos. Tabla de resultados con N olivos estudiados:

$(riego, abono, corte)$	N	$Y(kg)$
$(-,-,-)$	10	100
$(-,-,+)$	25	150
.....	...	...

  al final obtenemos un *Mod. Estad.* similar a *Regr. Lin.* $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \varepsilon$

28.10 Biometría (CI var. tipificada, medicina de precisión, genética de poblaciones, alineamiento de proteinas). Ciencias sociales (CIS, INE, prop. muestral, actuarial y bolsa ARMA, paternidad de obras de arte)

- *Biometr.* [Galton,Person]: ¿como sabemos si tenemos un hijo alto o que le ha nacido el pelo a tiempo o desarrollo fetal o que puede subirse a un columpio?. Si separamos hombres-mujeres vemos que: *Tono* y presión sanguinea es *Normal*, la altura es Log-*Normal* debido al peso-masa corporal. La *Estad.* es intrínseca por la exploración evolutiva del espacio de posibles individuos. Bandada de Estorninos (ver). Ej: **CI** en *Tipific.*

  - *Medicina de Precision*: *Aprend. Autom.*
  - *Alinea.* de Proteinas: prob. coevol. y matriz de mutación PSSM. *CRF*
  - *Genetica de Poblaciones*:

- Social: *CIS* (Centro de Investigaciones Sociológicas) *INE* (Instituto Nacional de Estadística). (*Encuest.*). *Prop. Mu.* (% voto, satisfacción). Decidir *Tam. Muestra*. Ver *Dinam. Social*

- Ciencia Actuarial o de los Seguros: estimar la probabilidad de catástrofe para decidir precio al usuario. Es de las primeras aplicaciones de la estadística. Predicción *Estoc.*: demanda de un bien (bolsa, bitcoin) con *Serie Temporal*: *ARMA*.
- Arte: análisis de paternidad de obras de arte (WolframLanguage *Aprend. Autom.*)

Chapter 29

T11. Conceptos básicos de la teoría de conjuntos. Estructuras algebraicas.

29.1 Introducción: común de Lógica, Probab. y Conj.=conj.; común de composic. func. y prod. m.=monoide (EA). Seguridad de Gauss (C)

- Ej-Motivador:
  - Ej-Conj.: ¿Que tienen en común la Lógica, la Probabilidad y los Conj.?: la *Teor. Conj.*
  - Ej-EA: ¿Que tienen en común la composición de funciones con el *Prod. M.*?: son *Monoide*.
  - Ej-EV: Que tienen en común los enteros y los polinomios: forman un *Anillo* y las reglas de divisibilidad son comunes.
  - Ej-EA: seguridad de Gauss $\mathbb{C}$ *Creer en Ficciones*
- Galois (grupos), Dedekin (ideales), Noether (anillos), Hilbert (espacios), Bourbaki (Rel. Bin. Equiv. y *Fund. Matem.*) ,
- Importancia-histórica: *Teor. Conj.*, *Alg. Boole*, *EA*,*Rel. Binaria* (*Aplicacion*), *Rel. Equiv.*, Clasif.*Homomorf.*, *Teor. Represent.*

29.2 Teoría de conjuntos (fund. mat., conj. bien def.). Pertenencia, sub/superconj. im/propio. Producto cartesiano (par ordenado, n-tupla, digraf., coord.). Cardinal. (inyectiva, conjunto potencia, in/contable).

Teor. Conj. [Cantor1900]: rama matem. y *Fund. Matem.*, ver *Teoria ZFC*.

- Conj.: colección *Bien Def.* de elementos considerada en si mismo como un *Obj.*. Si los elem. son conj. u obj. Mal Def. puede dar *Par. Russell*. Ej: $A = \{2,4,6\}$.

- Pertenencia $a \in A$ (ver *F. Indic.*). Sub/Super conj. *Propio* : $A \subset B$ / $B \supset A \iff A$ está estrictamente contenido en B ($\iff A$ subconj. de B pero $A \neq B \iff \forall a \in B$ y $|A| < |B|$ *Cardin.*). Subconj. Im*Propio* $A \subseteq B$, Ej: de Impropios, el vacio 0, y el total V (de *SubEV* y *Sigma-Algebra*). Ver *Par. Russell*, *Conj. Num.*.

- *Prod. Cartesiano* : $AxB = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ conj. de todos los *Par Ord.* de los conj. A y B . El Par Ord. se generaliza a como N-*Tupla* en los que a diferencia de un conj. $\{a,b\} = \{b,a\}$ el orden importa $(a,b) \neq (b,a)$ (llaves vs paréntesis) [1]. Se da en las *Rel. Binaria*, *Correspondencia*. Es el Princ. del Prod. (*Tec. Recuento*). Ej: *Coord.*, *Digraf.*, Coord. $\mathbb{Z}$ posit. que forman un *Poset*

- *Cardin.* $|A|$: nº elementos de un conj.. $|A| < |B| \iff \exists b \notin A$ i.e. $\exists$ aplicación *Inyect.* pero no *Biyect.*. Hay 3 tipos básicos:

  - *Finit.*: *Conj. Potencia* : conj. de todos los subconj., $|Pot(A) = 2^{|A|}$. Dem. por *Combin.* del Binom. Newton. Ver *Conj. Cociente* Z ModN, Dim. *Base*. Ver *Fuerza Bruta* (*P. Suma de Subconj.*), *Sigma-Algebra*, *Binomial*.
  - Inf. *Contable* o Numerable: Ej: tam. de Naturales $\mathbb{N}$, es el primer cardinal Trans*Finit.* $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = \omega = \omega + 1 = \omega + 2 = ...$ Ver: Card. de *Esp. Hilbert*. *C. Num. Alg.*, Conj. textos en Español.
  - Inf. *Incontable* : Ej: tam. de $\mathbb{R}$ o **Continuo** c, es el *Conj. Potencia* de $\mathbb{N}$ ($c = |Pot(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}|$). Ver *Diag. Cantor*, *Hip. Continuo I*), *Event.*. Card. *Esp. Cociente*.

  Es controvertido el In*Finit.* Actual. No confundir con *Ordin.* (que son nº ordenados).

29.3 Álgebra de conjuntos=Alg. Boole (Y,O,No): 1) diagrama de Venn=f. boole (minterms) 2) Simpl.=Karnaugh 3) F. indicatriz=f. boole. Dif., Morgan. Producto vacío. Incl.-excl. (Cardinal.)

- *Alg. Conj.* =*Alg. Suces.* =*Alg. Boole*: *Conj. Potencia* de cualquier conj. $B = Pot(C)$ con los 3 *Op. Log.* es un *Alg. Boole* [WikiConjPot]. Es *Teor. Unif.*:

Diagr. Venn = F. Conj.	=*F. Booleana* expandida o minterms (*Karnaugh*). [2].
Exp. o *Simpl. Alg.* = *Reescr.* F. Conj.	= *Karnaugh* [3]
F. Indic. =F. Pertenencia (*Fuzzy*)=*Var. Indic.* (ocurrir)(ver *Rec. Enum.*) [4].	= *F. Booleana* [5]

[1] Clásicamente $(a,b) = (c,d) \iff a = c \& b = d$

[2] DV representa todos los elem. del *Conj. Potencia* y según pintemos una F. Conj.=*F. Booleana* en forma minten. Ver *Conj. Num.*, *Tmas Goedel*, *Tma*

[3] *TAI* de una *Ec. Alg.*, $f(A,B,C) = A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

[4] FI: $1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & otro \end{cases}$ (pertenencia). Ej: *F. Dirichlet*, *F. Impulso*. Ver *Tma Num. Primos*, *Reticulo* de *Op. Log.*

[5] ¿Pertenencia de pto $(A,B,C) = (0,1,1)$ al área de $f(A,B,C)$? = ¿*F. Booleana*=V en ese pto? Esto permite las igualdades que hay en *F. Indic.*. Ver *F. Aritm.*

Destacar las 2 primeras son: *Dif. Simetrica*, *Leyes de Morgan*.

- (*) (Suma y) **Prod. Vacio** [YoutubeDerivando]: resultado de multiplicar entre si ningún n^o. Es un ejemplo como la *Teor. Conj.* justifica hechos matemáticos. Sea $A = \{2,1,5\}, B = \{3,6\}$ entonces $Sum(A \cup B) = Sum(A) + Sum(B)$ y $Prod(A \cup B) = Prod(A) * Prod(B)$ eso implica que $Sum(\emptyset) = 0$ y $Prod(\emptyset) = 1$ (los elementos neutros de la operación suma y multiplicación)!!!!. Esto también explica porqué $a^0 = 1$ y $1! = 1$.
- *Princ. Inclusion-Excl.*: *Cardin.*.

29.4 Paradoja Russell (subconj. propio y teoría de tipos). Axioma de elección (no construct.). Hipótesis del continuo (Banach-Tarski, lema de Zorn).. Hipótesis del continuo

- *Par. Russell* 1902 (carta a Frege): aparece en la Teor. Conj. Informal (Naive, no *Teoria ZFC*). Sea $R = \{A : A \notin A\} \Rightarrow R \in R \iff R \notin R$ (*Autorref.*). Dio *Crisis Matem.* de los Fundamentos. Sol.: se evita difer. Im/*Propio* y *Teor. Tipos* de Russell.

- *Ax. Eleccion* : dada una "familia" de conj. (puede ser ∞) podemos tomar un elemento de cada conj. Ej: *Muestr.*. El ∞ lo hace no *Construct.* (no podemos tomar un elemento de cada uno) y controvertido (*Hip. Continuo I* y *Par. Banach-Tarski*). Equiv. al *Lema Zorn* y Tma *Bien Orden.*. Ver *Par. Bertrand*

  Hip. Continuo I [Cantor1878] (*Probl. Hilbert*): afirma que $\aleph_2 = c$, i.e que $\nexists$ conj. $\aleph_1$ cuyo tamaño esté estrictamente entre el *Contable* ($\aleph_0$ o tamaño de $\mathbb{N}$) y el *Incontable c* (tamaño de $\mathbb{R}$)

  Si añadimos *Ax. Eleccion* a Ax. de Zermelo-Fraenkel (=*Teoria ZFC* , *Sist. Formal* de *Log-1* que evita *Par. Russell*) todo lo que puede demostrarse es que: $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$. Gödel 1940 y Cohen 1963 dem. que la V o F de su $\exists$ es independiente de Teoria ZFC . Esta y el Ax. Eleccion son *Indecib.* e independientes en ZF.

29.5 Retículo (asoc., conmut, idempot., absorción), álgebra de Boole (ret. distr. comple.) y teoría unificadora

- *Reticulo* : dos posibles definiciones:

  1. *EA* $(R, \cup, \cap)$: donde $R = Pot(E)$ suele ser el *Conj. Potencia*. Ambas op. ($\cup$ y $\cap$) cumplen 4 prop.: 1) Asoc. 2) Conmut. 3) Idem*Potente* $a \cup a = a$ y $a \cap a = a$ (ver *Proyec.*). (Nil*Potente* ver P. Matr. Mortal *Probl. Indecib.*, *Dom. de Integridad*) 5) *Absorcion Dual* $a \cup (a \cap b) = a$ y $a \cap (a \cup b) = a$.
  2. *Poset* con dos operaciones t.q. $\forall a, b \exists_1$ supremo $= a \cup b$ y $\exists_1$ infimo $= a \cap b$. Ver *Lema Zorn*

El nombre viene de la forma de su representación en *Diagr. Hasse* [6]. Ver *Esp. Topol.*, *Progr. Dinam.* (*P. del Viajante*) *Viterbi* (*Prop. Markov*)

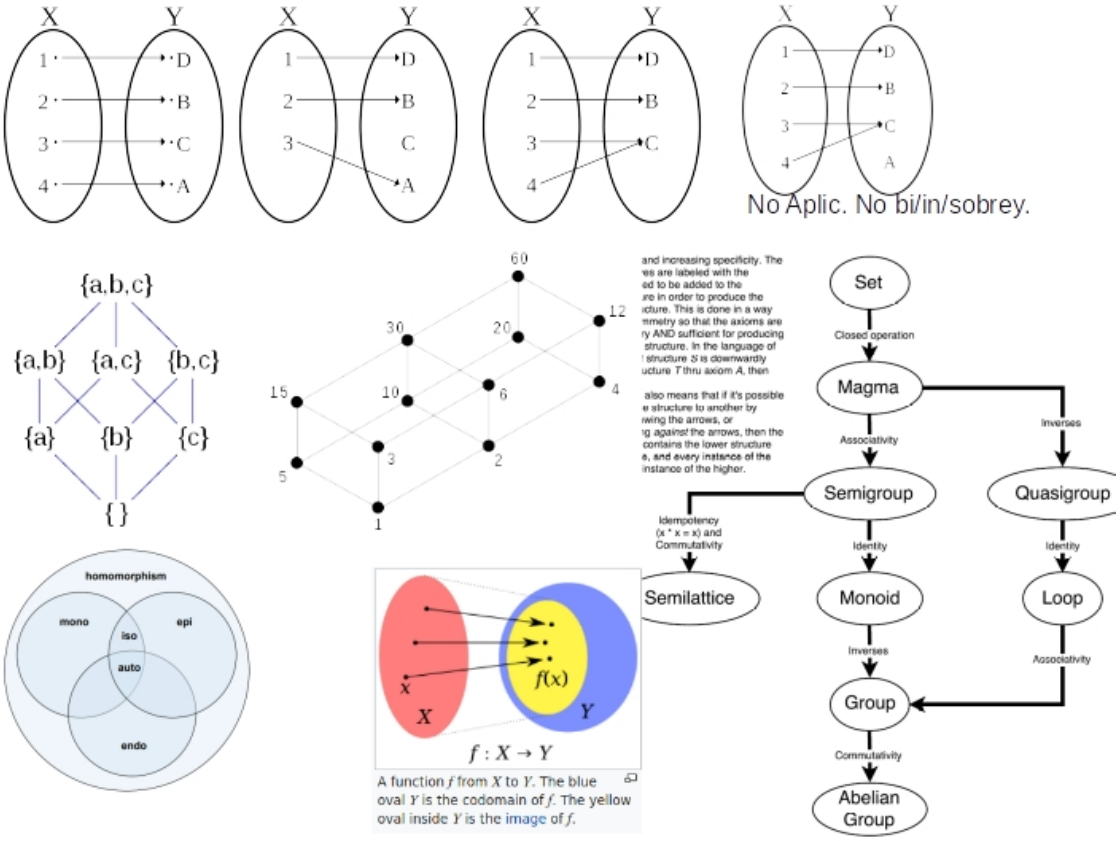
- *Alg. Boole* : $(B,\cup,\cap,\bar{\ })$ *Reticulo* Distrib. Complementario donde:

  - Ret. Distrib.: *Reticulo* doblemente distrib. 5) $a\cup(b\cap c)=(a\cap b)\cup(a\cap b)$. 6) y ¡su *Dual* también! $a\cap(b\cup c)=(a\cup b)\cap(a\cup b)$.

  - Ret. Complementario: *Reticulo* donde la unión e intersección con su complemento da el total o el vació: $\forall A\exists\bar{A}$: 7) $A\cup\bar{A}=\Omega$ max del retículo. 8) $B\cap\bar{B}=0$ min.

CONCLUSIÓN: se define con 8 *Axiom.* pero se puede quedar en 1 (ver *Completitud Funcional*). Hay muchos *Sist. Formal* equivalentes (ver *Ej. Log-0*). Satisface muchas reglas del Alg. común como: asoc. $x+y+z=(x+y)+z$, distr. $x(y+z)=xy+xz$, prod. nulo/id $x0=0/x1=1$, pero otras extrañas como: Idem*Potente* $x+x=x$ o *Absorcion* $x(x+y)=x$.

Figura 29.1: Conj. y Estr. Alg. Tipos de Aplicaciones. Diagrama de Venn de como se relacionan las diferentes categorías de Homomorfismos.



[6](*Digraf.* donde se eliminan las flechas porque la relación va indicada de abajo arriba) ver los *Poset* de la Fig. 29.1 (Particiones de un conj. (*Conj. Potencia*) y *Reticulo de Divisibilidad*)

29.6 Estructuras Algebraica (op. in/externa, clausura). Abeliano (conmut., prod. m.), Subconjunto por la izquierda (de op. no-conmut, ideal). Semigrupo (clausura+asociativa>monoide unitario)

- Estructura Algebraica *EA* :

  N-*Tupla* $(E, *_1, *_2, .., o_1, o_2, ...o_n)$ donde E conj. de elementos (soporte), $*_i$ conj. op. interna $ExE \to E$ y o_i conj. op. externa $FxE \to E$. Ambas op. son binarias (aunque a veces *N-Aria*) y cumplen *Axiom.*, siendo el común la *Clausur.* (*Teor. Unif.*) [7]. Las op. hace de los Num ser Algoritmos *Creer en Ficciones* (seguridad de Gauss *Creer en Ficciones*)

- Definiciones:

  - **Abeliano**: si la operación es conmutativa Ej-: *Prod. M.*
  - SubEA/SubConj $S_{izda} \subset C$ *Por la Izda* respecto de un op. $*$ no conmut.: el formado por todos los elem. $s * c$ (que es distinto del $c * s$). Ej: *Ideal* PLI, *SubG. Normal*, *Prod. Esc.*, Clasif. *Apl. Lin.* (inv. PLI).
  - *SemiG.* ($\supset$ *Monoide*, Fig. 29.1): *Clausur.*+asociativa. *Unitario* : $\exists$ neutro (normalmente para el $*$). Ej: Suma de $\mathbb{N}$

29.7 Estructuras Algebraicas: jerarquías de inclusión. Grupo (asoc. simetr. neutr., (Z,+), (Zn,*) mod, GL(n), EV+). Anillo (+abel, *semig. +*distr., (M,+,*), (Zn) ciclic., (K[x]), pol.=dom. eucl., ent. alg.), Cuerpo (*inv. o 4 op. alg. (Q o C,+,*), c. finito, num. alg.). EV (K[x], Esp. Hilbert). Álgebra de Boole y sobre un Cuerpo ((C,+,.,*), prod. vect., cuatern.)

- *Jerarq. EA* : *Jerarq.* que hace que unas sean casos de otras: *Grupo* $\supset$ *Anillo* $\supset$ *Cuerpo* $\supset$ *EV*. Ej. En Fig. 29.1 cuanto más arriba mas general y menos axiomas tiene el *Grupo* y cuanto más abajo más específico y más axiomas. Regla de ej: lo ideal es colocar al conj. en la EA más específica posible. Ej. $(\mathbb{C}, +)$ es un *Grupo* pero lo pongo como ej. de *Cuerpo*. Ver *Dom. de Integridad*.

[7] La*Clausur.* de un conj. entrada bajo una op. es el menor conj. salida *TAI* resultante de aplicar la op. sobre todos las entradas y salidas *Autorref.*. Ambos conj. pueden ser ∞. Ver *Clausura Alg.*, *Clausura Kleene*, *Generad.*, *Sigma-Algebra*, *Env. Cvx*, *G. Hamilton.*, *Poblac.*

Op.	*EA*	*Axiom.*	Ej.
1 op. int.	*Grupo* $(G,*)$	Asoc. Simetr. Neutr. (*SemiG.* Unit. con Simetr. o *Monoide* con Simetr.)	*G. Abel. Adit. Z*, *G. Mult. Z ModN*, *G. Simetrico*, (*SubG. Normal*), *G. Lineal General*, *EV+*
2 op. int.	*Anillo* $(\mathbb{A},+,*)$	+G.Abel, **SemiG.* y +*Distr (*Por la Izda* y dcha)	*A. Ent.*, *A. No Conm. Matr. Cuadr.*, *A. Polin. sobre K*, *A. Ciclico*, *Dom. de Integridad* (*Dom. Eucl.*,), *A. Ent. Alg.*, *Ent. Gauss.*, (*Ideal*)
	Cuerpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$	+*A.Conm.Unit, (+Neutr. $\neq$ *Neutr.) y *Invertible (todo elemento - 0) [Conj. donde 4 primeras *Op. Alg.* funcionan]	C. Racion., *C. EV Alg. Compl.*, *C. Finito*, *C. Func. Rac.*, *C. Num. Alg.*, *C. Num. Constr.*
2 op., 1 int. y 1 ext.	*EV* $(V,+,\cdot)$	7 propiedades	ver *Ej. de EVs*
3 op., (2 int. y 1 ext.)	*Alg. sobre Cuerpo* $(A,+,\cdot,\wedge)$	según prod. no/asocic. y no/conmut.	ver
3 op. int.	*Alg. Boole*	ver	ver

- Otras EAs: *Sigma-Algebra*: no EA si no conj.

29.8 Relación N Aria (algor. unaria). R. binaria (subconj. del prod. cartesiano, g. bipartido). RB heterogenea: Correspondencia (jfun, prod. con escalar). Aplicación: (1 imagen, co/dominio). Función: nº. Biyectiva (E1 x), inyect. (f(x1)=f(x2)), sobrey. (E1 o más x)

- Rel. *N-Aria* : $R(x_1,x_2,...,x_n) = V$ algoritmo *Turing* que tiene n elementos de entrada y devuelve uno de salida. En *Op. Log.* devuelve *VoF*. En *EA* Op. devuelve un num. Las hay unarias, binarias, ternaria,... etc.

- *Rel. Binaria* [Bourbaki] *xRy*: entre elem. de un conj. X y otro Y es un subconj. del *Prod. Cartesiano*, i.e. subconj. de *Par Ord.* (x,y). Es representable mediante un *G. Bipartido* o F. con salida booleana V si hay arista. Es *Teor. Unif.* pues conecta Op. de *EA* Alg. con *Funcion* de Anal. y *G. Bipartido* o *Turing*-algor. de Lógica. Puede ser Homogenea si X y Y del mismo conj. y Heterogenea si no. Los tipos de Heterogeneas son:

  - *Correspondencia* o Rel. Diádica: $f : X \to Y$ subconj. del *Prod. Cartesiano XxY*. Es equivalente a una Rel. Binaria (*G. Bipartido*) pero se usa cuando se enfatiza

los conj. X e Y, mientras que en la otra se enfatiza solo la rel. Puede ser Unívoca (U, cada elem. dominio tiene una sola imagen) o No (NU, da doble ambigüedad *Entropia*). Ej: Composic. *Digraf.* como *Prod. M.* (aeropuertos, NU) Ej: *Grafica* (NU, Circunf. o *Var. Alg.*) Ej: *Prod. con Escalar* en EV. Mi "jfun" de latex: Ej: *Base Datos*, relaciones de "uno a muchos" (1:M, estuche:peliculas) o "muchos a muchos (M:M, peliculas:actores)

- *Aplicacion* $f : X \to Y$: *Correspondencia* Unívoca, regla o alg. entre 2 conj. en la que todos los elem. del dominio tienen imagen y solo una. A veces llamada Mapeo o *Funcion* (si es de números).

  * **Dominio** (conj. partida X), *Codominio* (conj. destino Y) e *Imagen* (conj. rango, $f(X) \subseteq Y$) ver Fig. 29.1 idea de jeringa que se vacia entera.

  Los términos inventados por [Bourbaki] para clasificarlas son (Fig. 29.1):

  * *Biyect.* : $\forall y \in Y, \exists_1$ (único) $x \in X : y = f(x)$. Ver Dem. Inval. *Falacia*
  * *Inyect.* : $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
  * *Sobreyect.* : $\forall y \in Y, \exists$ (uno o más) $x \in X : y = f(x)$.
  * No-*Aplicacion*: no bi/in/sobreyect. ver *Probl. Inv.* y ej. de *Apl. Lin.*

  Se corresponde con la clasif. de *Homomorf.*, *Apl. Lin.*. Ej:*Suces.*, *Forma Multilin.*, *Var. Aleatoria*, A. *Afin*. Ej-: *Var. Alg.* como *Conica* (porque por la raiz tiene más de un valor) o *Monodrom.*

29.9 Teoría del orden (=RB homogenea): Preorden (refl. y transit., <=, preferencia). Poset (antisim. reticulo divisib. o bool.). Orden total (G. conexo, <, N conj. más peq., Z no acotado, Q denso, R conexo). Bien ordenado (min incluso para el total, N, pero Z o R no)

- **T. Orden**: estudio de los conj. que cumplen una *Rel. Binaria* homogénea y que da lugar a un *G. Bipartido* con flechas ordenadas al cumplirla todos los *Par Ord.*. Las RBH (u ordenes) más típicos según las propiedades que cumplan se muestran en la siguiente tabla, con *Jerarq.* de inclusión. Empezamos con un *Preorden*:

Preorden : Reflexiva ($\forall x, xRx$) y Transitiva ($xRy, yRz \Rightarrow xRz$)	*Poset* : Antisimétrica si $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	*Orden Total* : Total o Conexa $\forall x, y, xRy \vee yRx$. Todas parejas comparables. *G. Bipartido* completo o conexo.	*Bien Orden.* : Rel. Bien Fundada: $\forall$ subconj. **incluyendo el total** $\exists$ a min
Desigualdad $a \leq a$; $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$	*Reticulos*: de Divisibilidad $a\|b, b\|a \Rightarrow a = b$, de mcm, de MCD, Booleanos (*Op. Log.*)	Con $<$, $\mathbb{N}$ el Conj. Más Pequeño (CMP) acotado infer. $\mathbb{Z}$ CMP no acotado. $\mathbb{Q}$ CMP *Denso*. $\mathbb{R}$ CMP *Conexo*.	$\mathbb{N}$ por 0 (o 1) pero no $\mathbb{Z}$ (subcon. $\mathbb{Z}_-$ no tiene min) ni $\mathbb{R}$ ($(1,2]$). Equivale a *Dem. por Induc.*
Alcanzabilidad. Preorden (*Tma Imposib. Arrow*), Reducción Turing	*Coord.* enteras positivas (*Par Ord.*). *SubEV* ordenados por inclusión. *Lema Zorn*	Letras con $<$ (orden alfabético)	Todas los conj. de cadenas finitas sobre alfabeto, con el orden definido por $s < t \iff$ es subcad. de t. $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ ordenado por $(n1, n2) < (m1, m2) \iff n1 < m1 \& n2 < m2$. Permite *Ind. Transf.* Su Tma (todo conj. puede ser BO, controvertido en $\mathbb{R}$) equivale al *Ax. Eleccion* y *Lema Zorn* (dando *Par. Banach-Tarski*)

29.10 Relación binaria de equivalencia: refl. trans. simetr. Clase de equivalencia (representante/proyección canónica). Conjunto cociente. F. bien definida respecto RBE. Ej: rel. congr. (reloj), var. lin. (y Kernel, EC=planos paralelos, dimens) y subg. normal (RC= 2 clases laterales).

- *Rel. Equiv.* : si reflexiva, transitiva (*Preorden*) y simétrica ($xRy \iff yRx$, rel. en ambos sentidos). Ej-tabla: *Rel. de Congr.*, *Rel. SubEV*, *Rel. SubG. Normal* Otras: Rel. *Proyec. Canon.*, *Rel. Def. de Ent.*, **Rel. de Frac.**, *Rel. Equipol.*, *Rel. P. Circular*, Rel. del *Conj. Vitali*. Ver *Igual*.

- *Clase Equiv.* : 1) Un conj. de elementos relacionados. 2) Una de las particiones generadas por la relación. *Repr. Canon.* suele ser el más simple de la clase (*TAI*) (*Generad.*, *Base*). Ver *Proyec. Canon.*:

- Esp., Anillo, Grupo,... *Conj. Cociente* : el conj. de todas las Clases de Equiv. Ej.: Tabla + *A. Cociente* (mediante *Ideal*).
- *Funcion Bien Def.* bajo una *Rel. Equiv.* (con n-inputs y 1-ouput): si $f(a_1,..,a_n)Rf(b_1,...,b_n)$ cuando a_1Rb_1,...,a_nRb_n. Ej: los de antes.
- Ej:

Rel. Equiv.	*Rel. de Congr.*	*Rel. SubEV*	*Rel. SubG. Normal*
Clase Equiv.	*Repr. Canon.*	*Var. Lin.*	*Cl. Lateral*
Conj. Cociente	*Conj. Cociente* $\mathbb{Z}/mod12 = \{[0],..[12]\}$	*Esp. Cociente* $\mathbb{R}^2/U = \{[a]\} = d(\mathbb{R}^2) - d(U) = 1$ (Card.*Esp. Cociente*)	*G. Cociente* $G/N = \{[\vec{g}],[\vec{e}]\}$

29.11 Homomorfismo: aplicación lineal entre EA del mismo tipo. Isomorf. expon. de grupos: (R,+) y (R+,.) (op./dom. distintas). Kernel y Tma fund. homom.. Clasificación (Venn): iso/mono/epimorf. y endo(dom.-imag. iguales)/automorf (iso). Ej: Apl. Lin. (base/l.i./s.g.) y (isom. grafos, autom.=compl. conj., mono/epi de tmas isomorf.). Teor. represent. (busca h.)

- *Homomorf.* f: es una *Aplicacion* f entre dos *EA* (EVs, grupos...) del mismo tipo que preserva las operaciones definidas en dichas EAs. $f:(E,*_1,*_2,o_1,o_2)\to(E',*'_1,*'_2,o'_1,o'_2)$ ($*/o$, op. internas/externas): $\forall i$ a) $f(x*_i y)=f(x)*_i f(y)$ y b) $f(\alpha o_i x)=\alpha o'_i f(x)$. Da lo mismo si hacemos la "*Comb. Lin.*" de los elementos antes o después de aplicar la función. Son un caso específico de *Morfism.* (Teor. *Categ.*) usado en *Teor. Represent.*. No confundir con *Homeomorf.*, *F. Holomorfa*, *G. Homolog.*/Homotop. . Definiciones:
- *Isomorf. Grupos* : Ej: *G. Mult. Z ModN*, Ej: $f:x\to e^x$ entre los *Grupo* $(\mathbb{R},+)$ y $(\mathbb{R}_+,.)$ y el Homom. Lo es porque $e^{x+y}=e^x.e^y$. Es además *Isomorf.* ya que su f. inv. ($f^{-1}:x\to\log x$) satisface $\log x.y=\log x+\log y$. Importante: **las op. y Domin. no tienen porqué ser el mismo entre ambas EAs**
- *Kernel* o Nucleo de un *Homomorf.*: conj. de todos los elementos de E cuya imagen es el elem. identidad (*Grupo*) o nulo (*EV*). Es la *Entropia* del H. (ver *Apl. Lin.*). Ej: *Ec. Homog.*, Ej: centro camara (*Vision 3D*). Ver *Truco Kernel*, *Ideal*=K.. Ver Kernel de *Apl. Lin.*
- *Tma Fund. de Homomorf.* (Fig. 30.1): extensión del 1er *Tmas de Isomof.* a cualquier *EA*. Relaciona *Homomorf.*, *Imagen* y *Conj. Cociente* siendo K cualquier *SubObj.* [8] del *Kernel*.

[8] En *Alg. Abstr.*, Teor. *Categ.*, cada *EA* u *Obj.* tiene su "sub": Subconj., *SubEV*, *Ideal* o *SubG. Normal*. Ver *Topos*.

- **Clasif. Homomorf.** [Bourbaki]: *Diagr. Venn* de Fig. 29.1. Como los tipos de *Aplicacion*:

	Apl. Lin.	Otros
Isomorf. : *Biyect.* ($\exists f^{-1}$ inv., ver *Igual*):	ver	*Isomorf. Grupos*, *Isomorf. de G.*, *Transf. en Plano C=G. Semejanzas*,
Monomorf. : *Inyect.*	ver	Monom. en *Tmas de Isomof.*
Epimorf. : *Sobreyect.*	ver	Epim. en *Tmas de Isomof.*
Endomorf. : h. en si mismo (conj dom. e im. iguales).	ver	*Proyec.* ortog. $\mathbb{R}^2 \to eje - x$ (no Auto, [WikiEndo])
Automorf. si además *Isomorf.*	ver	Ej: $\mathbb{C}$ conj. $f(z) \to \bar{z}$, *Teor. Galois*

Anillos $(R,+,*),(S,\oplus,\cdot)$ (Enteros, Grafos)	*EV*s	*Grupos* $(G,*),(H,\cdot)$
H. de As: si 1) $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$ 2) $f(a*b) = f(a)\cdot f(b)$.	H de EVs: si *Apl. Lin.*. Ej:	H. de Gs.: si $f(g_1 * g_2) = f(g_1)\cdot f(g_2)$
Automorf. $\mathbb{C}$ conj. (ver)	*Isomorf.*, *Epimorf.* en *Tmas de Isomof.*	*Isomorf. Grupos* y *Tma de Cayley*

(ver), dos represent. (la binómica y la polar de $\mathbb{C}$)	*Tma Rango-Nulidad. G. Lineal General* (todos los *Isomorf.* de un EV).	G. *Automorf.*: conj. de todos los *Automorf.* del obj. matem. y si el obj. es geom. (tetraedro) equivale a su G. Simetrias (G. *Isometr.*). *Isomorf.* entre G. Finitos:. *Correspond. Curry-Howard*

- *Teor. Represent.*: busca *Homomorf.*

29.12 Algebra Abstracta vs Teoría de Conj.

- *Alg. Abstr.* : estudio de las *EA*s. Originada en el SXIX para estudiar las similitudes entre los distintos conjuntos matemáticos (y sus operaciones). Rompe con la *Teor. Conj.* "lo importante no son los conj. si no sus operaciones y leyes".
  - Teor. *Categ.* y *Teor. Represent.*: al añadirle los *Homomorf.* y *Morfism.*
  - (*) **Alg. Universal**: originada más recientemente para estudiar las similitudes entre las distintas *EA*s y tratarlas como un *Obj.*. Ej: *Tma Fund. de Homomorf.*: que sirve para varias EAs. [9]

[9] Ej: la clase de Grupos es considerada un obj. o *Var. Alg.*. Ej: Las reglas se escriben en forma de ecuaciones (*Log. Ec.*) más que de grafos de Teor. *Categ.*. Ej: ¿Clasif. *Homomorf.*?. Op. *N-Aria* de EA. Abarca más EAs como Alg. Homologica, Lenguajes Formales y las K-Algebras.

Chapter 30

T12. Espacios vectoriales. Variedades lineales. Aplicaciones entre espacios vectoriales. Teorema de isomorfía.

30.1 Introducción: común suma fuerzas y polin., rotaciones y op. cuántico

- Ej-motivador: ¿qué tienen en común, la suma de Fuerzas en Física y la de Polinomios en Matemáticas?. son un *EV*. Ej2: ¿y las rotaciones 3D con los op. diferenc. de la *Cuantica*? son *Apl. Lin.*

- Notación matricial [Cayley1850]. P.e. y p.v [Cliford]. Grassman. 1ª def de EV [Peano]. Hilbert. Noether.

- Importancia-Histórica: *EV* (historia *U2GPlano*), *Var. Lin.* (*Esp. Cociente*), *Apl. Lin.* (*G. Lineal General*), *Tmas de Isomof.* (*Tma Rango-Nulidad*, *Form. Grassmann*)

30.2 Espacio Vectorial sobre un K (vector, inf-tupla, +,. correspondencias). 8 propiedades (4 grupo abel., 4 f-mod. (.pseudoasoc,.mod,+.distrib,.+distr). Ej: todo cuerpo como C, esp. Hilber (Fourier), pol. K[x], conj. fuerzas sobre un pto. SubEV: c.l., (var. lin. no)

- Espacio Vectorial *EV* : sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (el de .) es una *EA* $(V,+,.)$ donde a cada elemento del conjunto se le llama vector (*Tupla* de tam. inf.) $\vec{x}$ o simplemente x y con las op.: suma (interna) $+$ y *Prod. con Escalar* (externa) ., definidas con las siguientes *Correspondencias*:

  - $+: VxV \rightarrow V$
    $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \vec{x}+\vec{y}$
  - $.: \mathbb{K}xV \rightarrow V$
    $(\alpha,\vec{x}) \mapsto \vec{\alpha}\vec{x}$

Debe cumplir las siguientes 8 propiedades: 1) +asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$; 2) +conmutativa: $x+y = y+x$; 3) +neutro: $x+0 = x$; 4) +opuesto: $x+(-x) = 0$; 5) .pseudoasociativa: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$; 6) .Modular: $1x = x$; 7) +.pseudodistributiva: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; 8) .+pseudodistributiva: $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$. Los 4 primeros axiomas dan un + *Grupo* Abeliano (lo es, si quitamos el escalar), el resto lo hacen un F-Modulo (*Anillo* similares a anteriores pero para escalar).

- *Ej. de EVs* :
  - *Cuerpos*: por *Jerarq. EA* todos los *Cuerpo* de EV son también EV., Ej: $\mathbb{C}$ (*C. EV Alg. Compl.*), $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$. También *Ext. de C. como EV*.
  - *Esp. Hilbert* (EV+*Prod. Esc.* que permite medir ángulos-distancias y *Anal. Funcional* como *Fourier*. También vectores y matrices sobre un $\mathbb{K}$ con op. clásicas.
  - *A. Polin. sobre K*, *Serie Pot.* Formal
  - Otros: *Conj. Apl. Lin. como EV*, *Rec. Lineal*, *Transf. en Plano C*, sol. de *Ec. Dif.* y *Ec. Homog.* son *SubEV Afin*
  - Ej-: Fuerzas y Momentos no (aunque el conj. ejercidas sobre un punto origen si). *Campo Vect.* no (aunque el conj. de todos los CV sobre un conj. si).

30.3 Subespacio vectorial: c.l. (alfa in K); inters. y suma si, unión no; improp. 0 y total; kernel si, var. lin. no; ideal, subg. normal; poset. Independencia lineal: c.l.=0. Sistema generador S de SubEV V: v=c.l.(si); V pequeño; V=Span=clausura. Base: s.g. y l.i. ; canónica; unicidad y dim (lema Zorn). Coordenadas: unic. (red. abs.)

- *SubEV* : $U \subset V \iff$ cerrado bajo:
  - *Comb. Lin.* o suma ponderada $\forall u_1, u_2 \in U \quad \& \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ (consecuencia: contiene al 0_V, Ej-c.l.: *Comb. Cvx*, Expans. (*Simpl. Alg.*), *Tma Prob. Total*, *I. Polin.*, *Anal. Funcional*, *Karnaugh*, *Indep. Afin*). *Teor. Unif.* por *Teor. Represent.*.
  - La intersección $\cap_i U_i$ y la suma $\sum_i U_i$ dan otro SubEV (ver *Suma Dir.*). La unión $\cup_i U_i$ no. Los SubEV Im*Propio* son el nulo 0 y el total V (como *Sigma-Algebra*). Ej: *Kernel* lo es, una *Var. Lin.* no por lo general. Equivale a *Ideal* o *SubG. Normal*. Ordenados por inclusión forman un *Poset*
- **Linealmente Independientes (l.i.)**: $\{u_i\} \iff \sum_i \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$.
- Sist. *Generad.* de un *SubEV* U: conj. vect. $S = \{s_i\}$ (no necesariamente, finito y l.i.) que permiten expresar como c.l. cualquier elemento de U: $\forall u \in U, u = \sum_i \alpha_i s_i$. Colorarios:
  - U es el *SubEV* más pequeño que contiene a S *TAI*
  - El Span, Esp. *Generad.* o *Clausur.* Lin. de S es U: $U =< S >= \{\sum_i \alpha_i s_i : \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

  Ver *Env. Cvx*, *G. Cayley*, *Dom. I. Princ.*, *Sup. Reglada*, *Discr. vs Gener.*

- *Base* de V: $\{b_i\}$ sist. *Generad.* y l.i. Es el generad. mínimo *TAI* pero no el único y se suele tomar la canónica *Repr. Canon.*. **Tma Dim.** y Unic.:

  > si consideramos el conj. de todos los subconj. de vectores l.i. de V, por *Lema Zorn* todo EV posee al menos una y todas las bases tienen la misma *Cardin.* llamada dim. (puede ser ∞ como *Esp. Hilbert*

  (*)*Tma Ampl. Base* (usar *Det.*) [1]. Ver *Cambio Base*

- *Coord.* de un vect.: los α_i de la *Comb. Lin.* de las *Base* para expresar ese vector. Es un N-*Tupla*. Ej: *Gr. Ext.*, *Rec. Lineal*, *Coord. Homog.*. **Tma Unic. Coord.**: son únicas para un vector. En efecto,

  > *Red. al Absurdo*: supongamos hay 2 coordendas para $v = \sum_i \alpha_i b_i = \sum_i \beta_i b_i$, restando $\sum_i (\alpha_i - \beta_i) b_i = 0$ como las bases son l.i. $\Rightarrow (\alpha_i - \beta_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$.

30.4 Variedad Lineal: 1) Var. difer. lin.: L:3x+5y=8 (hiperpl. es un caso). 2) Var. alg. lin.: sol. SCI Ax=b (L:x=xp+U, U=Ker(A)=subEV). 3) SubEV afín: L=a+U (generado, dim(L)=d(U)). 4) Clase de equiv. L=[a] (rel. subEV (de equiv): xRy si x-y in U).

- *Var. Lin.* L de un EV (flat, linear variety): varias definiciones

  1. *Var. Dif.* Lin. (*Manifold* Lin.): recta $L: 3x+5y=8$, plano $3x+5y+2z=8$,... *Hiperplano* : caso de VL, estrictamente es una VL con dim. $n-1$ en un esp. de dim. n. Ej: *Regr. Lin.*, *SVM*. Se generaliza como *Hipersuperf.*
  2. *Var. Alg.* Lin.: conj sol. de un Sist. (Lin.) Comp. Indeterm (SCI): Sea $Ax = b \Rightarrow$, sol. general=sol. part. + sol. *Ec. Homog.* $L: x = x_p + U$. La x_p es un pto que lo suelen dar y cumple $Ax_p = b$. El *SubEV* $U = Ker(A)$ del *Kernel* y sale de resolver la *Ec. Homog.* $Ax = 0$. En efecto:

     > En efecto, $A(x_p + U) = Ax_p + AU = b + 0 = b$.

     . Ej: *Var. Holg.*, Rouche-Frobenius (ver TProblema), *Ec. Diof.* y *Ec. Dif.* Lineal.
  3. *SubEV Afin* : $L = a + U = \{u + a : u \in U\}$ i.e. el Esp. *Generad.* por a "v. posición" y U "*SubEV* director" (paso por 0). Recuerda a *Transf. Afin*. La $dim(L) = dim(U)$. Recordar que U suele ser el $Kern(A)$ del sist. *Ec. Homog.*.
  4. *Clase Equiv.*: $L = [a]_U$ conj. de ptos relacionados con otro a (*Repr. Canon.*) bajo la *Rel. Equiv.* *Rel. SubEV* xRy si $x - y \in U$, donde U *SubEV* (recuerda a *Rel. de Congr.* y Aplic. 2pto-1vec de Esp. *Afin*, ver *Proyec. Canon.*). El RC a suele tomarse simple (con ceros, corte con un eje de L, *TAI*)

[1] Sea $dim(V) = 4$ *Finit.*, si sabemos que $\{b_1, b_2\}$ son subconj. de la base de V o l.i., si añadimos b_3, b_4 (normalmente de canonicos) y si $det(b_i) \neq 0$ entonces es base. Útil en base de *Esp. Cociente* de V/S.

30.5 Aplicación Lineal: homomorf. EVs. Matriz de transformación T ej: col-i=f(base-i). Estr. Alg.: (T,*)=grupo lineal general, (T,+)=EV. Ej: Geom: invar. origen y colinealidad (proyec., afin y semenjanza, c. homog.), Anal.: comp. f. lin., op. lin. (deriv. e int., cuańtica), Estad.: media.

- *Apl. Lin.* (linear map): $f: \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ f(\sum_i \alpha_i v_i) & \mapsto & \sum_i \alpha_i f(v_i) \end{array}$ i.e. *Aplicacion* que es un *Homomorf.* entre los EVs V (dominio) y W (*Codominio*).

- *M. Transf.* : rectangular de una *Apl. Lin.* para esp. finitos: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $y = A_{n,m}x$ (ver *Prod. M.* composic. de sist. ec.).

  Ej: cuando input y output en *Base*s canónicas (en no canónicas ver TProblemas). $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donde las columnas son $f(b_1), f(b_2), f(b_3), f(b_4)$, el resultado de aplicar f a las *Base*s canónicas de $\mathbb{R}^4$ [a].

  [a] Si trabajamos con vector fila: $\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}$ donde las filas son los $f(b_i)$

- *EA*: con la op. *Prod. M.* ciertas M. forman *Grupos*: *G. Lineal General*. *Conj. Apl. Lin. como EV* : $(f(V,W), +, .)$ el conj. de todas las AL con $+$ y . forman un *EV*. Dem.: obvio si consideramos AL = *M. Transf.* = Vector (desarrollado).

- Ej:
  - (Geom.) *M. Transf.* que **mantiene origen y colinealidad** *Incidenc.* y (ver Fig. 30.1). En general las 3 del *Pr. Erlangen*: *Proyec.*, *Transf. Afin*, *G. Semejanzas*... con *Coord. Homog.*. *Cambio Base* (sin traslación)
  - (Anal.) Funciones y Op.: 1)F. lin. compuestas dan lin.: si $f(x)$ y $g(x)$ lin. $\Rightarrow$ $(f \circ g)(x) \Rightarrow$ lin. 2) Op. Deriv. e *Int. Def.* (*Ec. Dif.* Lin.), Op. *Hermit.* (*Esp. Hilbert*, *Cuantica*).
  - (Estad.): *Media* es AL.

30.6 Imagen: <f(bi)>. Kernel: subEV (dem.: cerrado c.l. y 0v). Tma rango-nulidad (d(ImT)=rg(T), dem.: V=um+wb=b-Ker+b-ext, Tb-ext s.g. y l.i.). Tma de EV isomorfos (dim). Espacio cociente (RelSubEV) y d(V/U)=dV-dU. Complemento ortogonal: V/U isom. CO(U)

- *Imagen*: $Im(f) = \{w \in W : w = f(v)\}$. Es el *Generad.* de *Base* V: $Im(f) =< f(b_1), f(b_2), ..., f(b_n) >$ (elegir los $f(b_i)$ l.i. para *Base* de la $Im(f)$. La $d(Imf) = rg(f)$ (*Tma Rango-Nulidad*)

- *Kernel*: $Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ y es un *SubEV* de V. En efecto:

  > *Clausur.* bajo *Comb. Lin.*: $\forall x, y \in Kerf \Rightarrow f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y) = 0_W$. Obviamente contiene al 0_V pues si f es una matriz (otra $f(0_V) = f(v - v) = f(v) - f(v) = 0_w$)

  Su dim. es la *Entropia* [2]

- *Tma Rango-Nulidad* de $T : V \to W$: $n = rg(T) + Ker(T) \iff d(V) = d(ImT) + d(KerT)$, para *EV*s *Finit.* (Fig. 30.1) IMPORTANTE: Vemos que la dim. de *Imagen* de T equivale a su rango.

  > – Suponemos $d(V) = n + m$: con $\{u_1, .., u_m\} \in V$ *Base* del $KerT$ y por *Tma Ampl. Base* $\{u_1, .., u_m, w_1, ..., w_n\}$ Base de V.
  > – $\{Tw_i\} = \{Tw_1, ..., Tw_n\}$ *Generad.* de ImT: $v = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j w_j$ [base], $\Rightarrow$ $Tv = \sum_i a_i T u_i + \sum_j T b_j w_j = [Ker] = \sum_j b_j T w_j$
  > – $\{Tw_i\}$ es l.i.: $\sum_i c_i T w_i = 0 \iff T(\sum_i c_i w_i) = 0 \iff \sum_i c_i w_i \in KerT \Rightarrow$ [por base Ker] $\sum_i c_i w_i = \sum_j d_j u_j$, pero como $\{u_1, .., u_m, w_1, ..., w_n\}$ es base todos $c_i, d_i = 0 \Rightarrow l.i.$
  > – $\{Tw_i\}$ es base de ImT: gener. y l.i. $\Rightarrow d(ImT) = n$ y $d(V) = n + m = d(ImT) + d(KerT)$

- *Tma EV Isomorf.* : los *SubEV* $V \cong W \iff d(V) = d(W)$, i.e. $\exists$ un *Isomorf.* f que los relaciona si tienen igual dim, (espacialmente 2 EV isomorf. son idénticos o indistinguibles).

- *Esp. Cociente* : $V/U = \{[a]_U\}$ de una *Rel. SubEV*, *Conj. Cociente* no contable de todas las *Var. Lin.* def. por U (clases de equiv. o conj. *Hiperplano* paralelos al U). **Card. *Esp. Cociente*** $d(V/U) = d(V) - d(U)$ (se prueba gráficamente en 3D, Fig. 30.1). Ver *Proyec. Canon.*, *Tma Ampl. Base*

- (*) **Compl. Ortog.** $CO(U) = U^{\perp}$: (en un *Esp. Hilbert*, EV con *Prod. Esc.*) es el conj. de todos los v. $\perp$ a un *SubEV* U. Permite expresar el total como *Suma Dir.*: $V = U \bigoplus U^{\perp}$.

  – El *Esp. Cociente* V/U es *Isomorf.* al $CO(U)$. [WikiQuotienSpace]

  – Si $f : V \to W$ es *Proyec.* Ortog. $\Rightarrow$ el $Ker(f) = CO(W)$ (Dem. 3Dvisual). $\Rightarrow$ el *Esp. Cociente* $V/Ker(f) = CO(Ker(f))$ (creo por ser $V/Ker(f)$ *Proyec. Canon.*)

30.7 Clasificación de las aplicaciones lineales: bi/in/sobreyect. y no-apl., iso/mono/epimorf., Tma rango: d(V)=d(W)/d(Im)=d(V),d(Base/l.i. (dem. Ker(f)=0)/s.g.. Homomorf./incrustado/proyec.

- Clasif. *Apl. Lin.*:

[2] grados de libertad de una solución (en sist. ec.) [WikiLinearMap], o redundancia de una transf. (la inform. del esp. original perdida tras la transf.) [1stIsomorfTheInLinAlg]

Homomorf.	*Isomorf.*	*Monomorf.*	*Epimorf.*	No *Aplicacion*
a) Clasif. *Homomorf.*	*Biyect.*	*Inyect.*	*Sobreyect.*	
b) *Tma Rango-Nulidad* $d(Imf) = d(V) - d(Kerf)$	$d(V) = d(W)$	$d(Imf) = d(V) \Rightarrow d(Kerf) = 0$ *Imagen<Codominio*	$d(Imf) = d(W) \Rightarrow d(Kerf) \geq 0$	
c) Transf. *Base* $\{f(x_i) = y_i\}$ (...para generar W)	base (perfecto)	l.i. (pequeño)	s.g. (de sobra)	
Ej:	Transf. como Fig. 30.1, *Cambio Base*, *Homograf.* $V_{grande} \to= W_{grande}$ $\begin{pmatrix} xxx \\ xxx \\ xxx \end{pmatrix}$	Transf. + *Inclus. Canon.* $V_{chico} \to W_{grande}$ $\begin{pmatrix} xx \\ xx \\ xx \end{pmatrix}$	*Proyec.* $V_{grande} \to W_{chico}$ $\begin{pmatrix} xxx \\ xxx \end{pmatrix}$	*Probl. Inv. Proyec.* (*Vision 3D*)
Tma Rango-Nulidad $rg(T) = d(V) - d(KerT)$	$rg(T) = dV = dW = n$ (nº incog) $\Longleftrightarrow \exists T^{-1} \Longleftrightarrow \lvert T \rvert \neq 0$ (*M. Inv.*)	$rg(T) = d(V) < d(W)$	$rg(T) = d(W) < d(V)$	

NOTA: Ej: *Endomorf.*: M cuadrada cualquiera $V = W$ (posiblemente con f. o c. l.d.) . *Automorf.*: *M. Inv.=G. Lineal General*

- $f : V \to W$ *Monomorf.* $\Longleftrightarrow$:
  - a) f *Inyect.*. Dem. obvia considerando que una AL es un *Homomorf.* y según Clasif. de *Homomorf.*
  - b) $Ker(f) = \{0\}$. Dem. obvia según *Tma Rango-Nulidad* o esta [3]
  - c) $\{y_i = f(x_i)\}$ l.i.. Dem. según como se transforme en W la *Base* de V.

    $\Rightarrow$) Sea $\sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i y_i = 0$, luego $\sum \lambda_i x_i \in Ker(f) \Rightarrow \sum \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ por ser base l.i.

    $\Leftarrow$) Sea $x \in Ker(f)$ y sean λ_i coord de x repecto de la base B $\Rightarrow 0 = f(x) = f(\sum_i \lambda_i x_i) = sum_i \lambda_i y_i \Rightarrow \lambda_i = 0$ por ser $\{y_i\}$ l.i. $\Rightarrow x = sum_i \lambda_i x_i = \sum_i 0 x_i = 0$ luego f es *Monomorf.*

  - *[Wiki]) f *M. Inv. Por la Izda*: pensando en *Prod. M.* rectangular $\exists g : W \to V$ t.q. $g * f = i \neq f * g$ donde i es la apl. id.

[3]

$\Rightarrow$) Si $x \in Ker(f), f(x) = 0 = f(0)$ y como f inyect $\Rightarrow x = 0$. $\Leftarrow$) Si $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$ de donde $x - y \in Ker(f) = \{0\}$, luego $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

30.8 Tmas de isomorfia (extendible con subobjetos). 1) Tma rango nulidad V/Kerf=Imf: dem1 (TRN+d(U/V)+Isomf EV dim), dem2 (descomposición canónica f: proyección c.+biyec+insec. c.; proyec. c=rel. Kerf en homomorf.), dem3 (tma fund. homomorf.). 2) Tma suma inters (N+H)/N=H/(NyH form. Grassmann y suma directa. 3) Tma del cociente V/H=(V/N)/(H/N)

Tmas de Isomof. : originalmente propuestos por Noether1927 para *Homomorf.* de Modulos se extiende mediante *SubObj.* a otras *EA* (ver *Tma Fund. de Homomorf.*)

- 1. *Tma Rango-Nulidad* extendido: $V/Kerf \cong Imf$ (*Isomorf.*): relaciona *Apl. Lin.*, *Kernel* e *Imagen*, ver *Diagr. Conmut.* de Fig. 30.1. Damos tres demostraciones:

Con *Tma Rango-Nulidad*: solo para dim. finita [PdfTheIsomorphismTheorems]

Como hemos visto, el *Kernel* de una *Apl. Lin.* es un *SubEV*. Por Card. del *Esp. Cociente* se cumple $d(V/Kerf) = d(V) - d(Kerf)$ y por *Tma Rango-Nulidad*: $d(Imf) = d(V) - d(Kerf)$, igualando $d(V/Kerf) = d(Imf)$. Por *Tma EV Isomorf.* concluimos que $V/Kerf \cong Imf$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "P"'] & W \\ \frac{V}{R_f} \arrow[r, dashed, "\cancel{B}"] & Im(f) \arrow[u, hook, "I"'] \end{tikzcd}$$

Con **Descomp. Canon.** (Fig. 30.1 [Youtube1erTmaIsomorf]): cualquier *Aplicacion* f (bi/in/sobreyect.) de *Teor. Conj.* puede descomponerse como $f = I \circ B \circ P$ donde:

- $P(x) = [x]_f$ es *Sobreyect.*=*Proyec. Canon.* o Natural que asigna cada elem. a su *Repr. Canon.* bajo la *Rel. Equiv.* $xR_fy \iff f(x) = f(y)$.
- $B([x]) = f(x)$ es *Biyect.*. Asigna cada $[x]_f$ a $f(x)$.
- $I(f(x)) = f(x)$ (en Y) es *Inyect.*=*Inclus. Canon.* : incrustado o F. identidad que lo pasa al conj. Y de mayor dim. Ver *Var. Holg.*, *Truco Kernel*, One-hot (*NLP*)

Rel. Kerf: la *Proyec. Canon.* en *Homomorf.* resulta ser una *Rel. SubEV* que asigna cada elem. al *Esp. Cociente* partido por el *Kernel*. En efecto: $v_1R_fv_2 \iff f(v_1) - f(v_2) = 0 \iff v_1 - v_2 \in Kerf$. Similar

Dado que por Descomp. Canon. $\exists B$ *Biyect.* $\Rightarrow V/Kerf$ y $Im(f)$ son *Isomorf.*.

Con *Tma Fund. de Homomorf.*: reemplazando por $K \to Ker(f)$ lo obtenemos inmediatamente.

- 2. Tma Suma Intersección: si $N\&H \subset V$, se cumple $(N+H)/N \cong H/(N \cap H)$. Colorario *Form. Grassmann* : $d(N+H) = d(N) + d(H) - d(N \cap H)$. Nota si la intersección de los dos SubEV es 0 trivial (si N y H son planos $N \cap H = recta$) hablamos de *Suma Dir.* ($d(N \bigoplus H) = d(N) + d(H)$) y es posible expresar de forma única cualquier vector del SubEV suma $v_{N+H} = \sum_i \alpha_i n_i + \sum_j \beta_j n_j$.

- 3. Tma de cocientes: si $N \subset H \subset V$, se cumple $V/H \cong (V/N)/(H/N)$. Forma un *Compl. Caden.* : linea de flechas entre EA (normalmente Grupos Abelianos) en Teor. *Categ.*. Ej: *G. Homolog.*

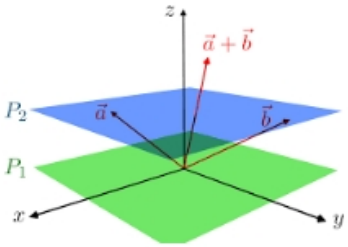
30.9 Aplicaciones: Teoría de la representación. Conjetura de Hodge

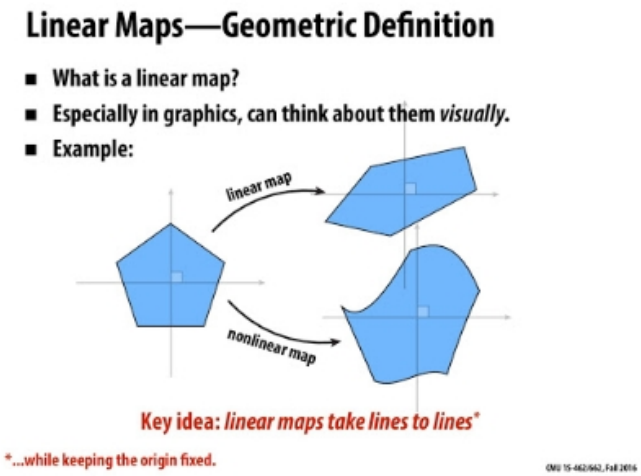
- *Teor. Represent.* : Intenta buscar *Morfism.* (Teor. *Categ.*) o (*Homomorf.*) que convierta una *EA* (normalmente un Grupo o Algebra) en un *EV*, simplificando problemas de *Alg. Abstr.* en Alg. Lin. (*Apl. Lin.*, *Comb. Lin.*...). Es un ej. de *Dual*. Unifica Anal. (via *Anal. Funcional* (T. *Fourier*), Geom. (*Pr. Erlangen*) y Aritm. (*Forma Automorfica*, *G. Lineal General* del *Progr. Langland*).

- *Conj. Hodge* : *P. Milenio* en *Geom. Alg.*.
  - *Teor. Unif.* de *Geom. Alg.* con *Topol.* [Youtube]: dada una curva (o *Hipersuperf.*) con bordes dentados o no), ¿cuando es *Homeomorf.* a una curva polinómica *Suav.*(o *Var. Alg.*). Hay hipersuperf. como R4-Exótico de Freedman que no se pueden.
  - Sea X una *Var. Alg. Proyec.*tiva y $\mathbb{C}$, $\Rightarrow CH(X) = \sum_i r_i CC(X_i)$, donde $CH(X)$ es la clase Hodge sobre X, $r_i \in \mathbb{Q}$, $CC(X_i)$ son cohomologías de las clases de las sub*Var. Alg.*. Ciertos G. de Cohomología De Rham son *Comb. Lin.* de *Dual*idades de Poincare de clases homólogas de sub*Var. Alg.*. Descomposición racional de ciclos algebraicos. Los ciclos de Hodge son una *Comb. Lin.* racional de ciclos algebraicos.

- Física: *Cambio Base* (videojuegos), *Cuantica* (autovalores), Electrónica: *Esp. Hilbert* (compresión de imágenes, DCT) *Aprend. Autom.*: *Transf. Afin*

Figura 30.1: Esp. Vectorial





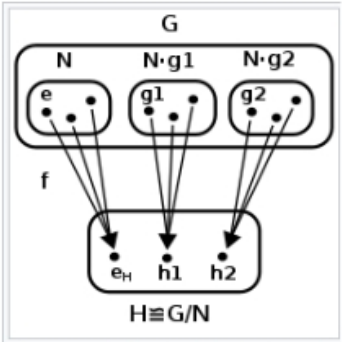
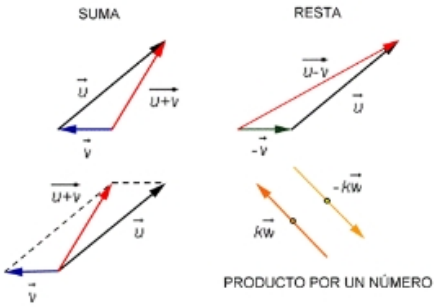
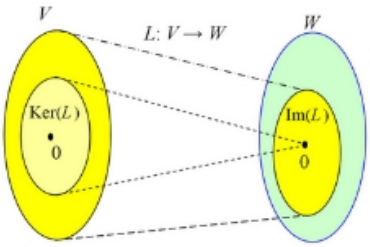
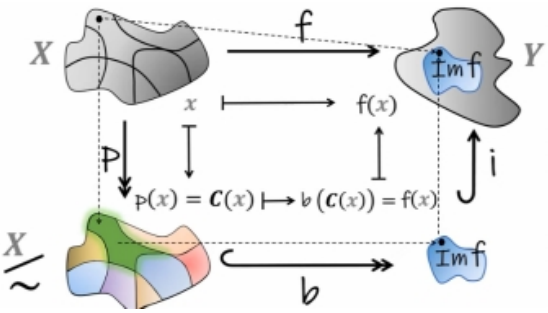


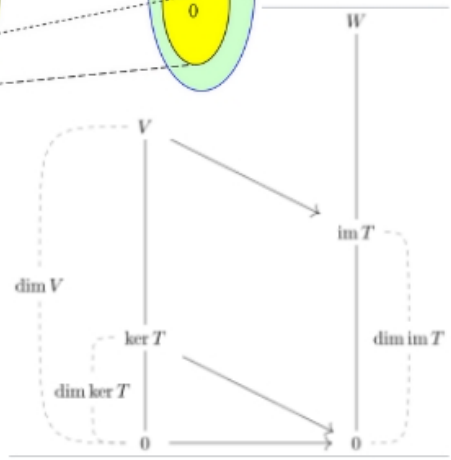
Diagram of the fundamental theorem on homomorphisms where f is a homomorphism, N is a normal subgroup of G and e is the identity element of G

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im} f \\ G/\ker f \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$









Chapter 31

T69. La resolución de problemas en Matemáticas. Estrategias. Importancia histórica.

31.1 Introducción: ad hoc vs resolvedor de problemas (ciertas clases si)

- Ej-Motivador: ¿existe una forma general de resolver cualquier problema o todas las soluciones son ad hoc (específicas)? (ciertas clases si, pero general no desde *Tmas Goedel*, ver *NLP*.
- Historia: Descartes, Hadamard (inconsciente), Church/Turing (*ATP* y computabilidad), Grothendieck (sueños, diarios), Penrose (entender), Chaitin (creatividad), Wolfram (quasiempirismo).
- Importancia-histórica: *Ejerc. vs Probl.*, *Creat.*, *Met. Polya*, *Heurist.*, *Metod. Dem.*, *Desbloq.*, *P. Milenio*

31.2 Tipos de problemas: bien definido (3 condic Hadamard, existe, 1 sol. y estable. Problema inverso: proyeccion inv.. Ejercicio vs problema (analogía vs tiempo desconocido). Incognita-datos-ecuación (relacionar variables, resolver ec. dif.) vs demostrar (elegancia)

- Tipos de Problemas:
  - Probl./F./Concepto/Rel. *Bien Def.* (well/ill-posed): si espeficicada de forma *Turing* comput. o con *Axiom.*. A un Probl. BF Hadamard le exige 3 condic. : 1) $\exists$ sol. 2) $\exists_1$ (*Ec. Dif.*). 3) Sol. estable (cambia *Suav.* con las cond. iniciales, la más quebrantada). Ej: *Ec. Dif.*, *Optim.* (*Compromiso*). Otros Ej:
    - Potenc. (*Malinterpret.*)
    - Conj. (*Teor. Conj.*),

    * *Funcion* BD bajo una *Rel. Equiv.*

  – *Probl. Inv.* =No-*Aplicacion*=Percepcion=*Vision 3D*=*Entropia*: empieza con el efecto (datos) y calcula la causa (parámetros que no podemos medir directamente). Son opuestos a los Prob. Directos (mecánicos y lógicos), requieren *Creat.*. Suelen ser Probl. No *Bien Def.*. Es *Teor. Unif.*.

	Probl. Inv.	P. *Reciproco*, Contrario, Dual....
Aritm.	*P. Fact. Ent.* (*F. Unidirecc.*)	Comprobación
Geom.	*Vision 3D*, *Mapa Contact.*	*Proyec.*
Alg.	*Interpol.*	*Ceros*
Estad.	*Entren.*	*Test*
Logica	*Karnaugh*	*SAT*

Otros Ej: Diseño *Filtro FIR*, *Matem. Recreativa*, *Direc. Llegada* (de una fuente), "*Pred. Ceres*, Neptuno o Planeta9 (por sus perturbaciones a otros)". "densidad de la tierra desde su campo gravitatorio", "diseñar una nueva trampa para ratones" [BungeElPais] "robotica evol.".

- *Ejerc. vs Probl.* : ejercicio (*Analog.*, aplicar método), problema (*Creat.*, desconoces tiempo en resolverlo). Dos tipos en Matemáticas (por su formalidad):

  1. P. Incog.-Datos-Ec.: los datos son conocidos como condiciones de contorno o iniciales y las ecuaciones como restricciones. La dificultad puede estar en plasmar el problema en una ec. (buscar un *Lenguaje Adecuado*, relacionar variables) o en resolver dicha ec. Los problemas de física son así. Ej: *Optim.*, *Ec. Dif.*, resolver una palanca
  2. P. Demostr.: la dificultad está en encontrar los axiomas o tmas intermedios que hagan la dem. elegante (*TAI*). *Metod. Dem.*

31.3 Método hipotético deductivo (complejidad infinita), NP (irreducibilidad Wolfram, fuerza bruta). Creatividad o pensamiento lateral: pr. aritm. gauss, unir 3x3 ptos. Matemáticas recreativas: Rubik (NP),

- *Met. Hip.-Deduct.* de la Fig. 31.1 muestra nunca termina debido a la *Compl. Inf. Matem.* (*Tmas Goedel*, Límites). Además para muchos problemas debido a *P. NP vs P* no se conocen atajos *Irreduc. Wolfram* mas que la *Fuerza Bruta*: "Cuando te lo han dicho, to el mundo listo". Ver *Metodo Iterativo*, *Ensayo Error*

- *Creat.* o Pensamiento Lateral: se origina como consecuencia estos límites. Ej: Suma *Pr. Aritm.* [Gauss]. Ej: Unir puntos 3x3 puntos con 4 lineas (e incluso 3) sin levantar el lápiz. Aprendizaje por Refuerzo del escondite lo hace! DotCSV. Quizás aleatoriedad única fuente de creatividad [Chaitin]

- *Matem. Recreativa* [Gardner]: su base está en los problemas *NP*, *Indecib.* o *Probl. Inv.*, fáciles de comprender difícil de resolver como ocurre en Aritmética, Geometría u *Optim.*. Sudoku, Cubo Rubik, Lógica. Ver *T. Juegos*

31.4 Estrategias generales: método de Polya45. Comprender: objetivo (propias palabras, dibujar, datos-incognita, no malinterpretar, continuar). Planificar: proyecto, ciega la inteligencia, creatividad Witten. Ejecutar: paciencia, ambiente, heurísticas. Aprender: aunque fracase. (*) Redactar e iterar (met. cientif.). Otras: TRIZ, Brainstorming, Mason88: abordaje, ataque y revisión

- *Met. Polya* 1945 "How to solve it" ("Como plantear y resolver problemas"): fijándose en resolución de muchos problemas propuso las siguientes 4 etapas de resolución de un problema:
  - Comprender: cual es el objetivo. Ver el problema (*Platon.*). No sientes que hay problema" (¿por qué estamos aquí?). dibujar, explicarlo en propias palabras, diferenciar datos e incógnitas, *Bien Def.* (no *Malinterpret.*, **detalles y palabras pista**), continuar (*Desbloq.*).
  - *Planif.* : para alcanzar objetivo (proyecto). Ser metódico, [Descartes] "Actuar sin método ciega la inteligencia". Requiere *Creat.*. [Witten] tiene buena intuición para el *Compromiso* importancia/probabilidad de resolverlo.
  - Ejecutar: Ser paciente, cada problema tiene su tiempo. Concentrarse, motivarse (ambiente adecuado). *Heurist.*
  - Aprender: Sacar partido al problema: vuelve a hacerlo en el futuro (son fuentes inagotables). Dar por bueno el tiempo empleado: aunque no consigas resolverlo.
  - (*) Redactar sol. (social) para que otros lo comprenda, puedes hacerlo sin haberlo resuelto para que tu supervisor te ayude.
  - (*) Iterar: los pasos anteriores *Met. Hip.-Deduct.* feedback de *Ensayo Error* Fig. 31.1
- Otras metodologías:
  - TRIZ [Altshuller1946], Tormenta de ideas (Brainstorming).
  - Mason88: "Pensar matemáticamente": abordaje, ataque y revisión. También trata los bloqueos (ver)
- (*) Relación con Penrose.

Polya (mundo Penrose, Fig. 31.1)	
Comprender (Ideas)	objetivo-ético
Planificar (Mental)	inteligencia *Creat.*
Ejecutar (Físico)	salud y energía

31.5 Técnicas de desbloqueo: estimularse (hablar), pensamiento positivo (Dantzing), dormir/andar, comenzar de 0, continua.

- Técnicas de *Desbloq.* (atascos) [Mason88]: No solo por la dificultad del problema si no por el interés:
  - Estimularse (apatía al problema): busca tu incentivo (mejor un porqué ético superior), ponte una meta muy cortita (autoengañas a tu cerebro con dopamina y luego quieres más), **habla** con otros (publica)
  - *Pensam. Pos.* : tener autoconfianza (el miedo bloquea): en nuestras capacidades, sentir que el problema está a nuestro alcance. Ej: Dantzing *Metodo Simplex*
  - Descansar/dormir (cansancio): sal y anda, deja trabajar al subconsciente. Poincaré 2h por la mañana y tarde. [ElTamiz].
  - Comenzar de 0 (apego a hipótesis): destruye todo, pensamiento lateral (*Creat.*)
  - Continuar: sigue leyendo si no comprendes

31.6 Heurísticas concretas: técnica de resol. (ejec.); otros (disciplina, algor., argumento). Ad hoc vs genérica. 1) Simplificar-particularizar (diagonales, sum n3=(sum n)2, induc., evidencia); generalizar (Tma Fund. Alg. en C, Grothendieck, Poncelet). 2) Condiciones: anclas, arbol posib., artim., ec. dif. 3) Dibujar/tablas: ley Moore, árbol probab. 4) Lenguaje: 0-indio, Leibniz r. cadena, cuaterniones. 5) Simetrías/patrones: coord. curvil. 6) Empezar final: met. iterativo, garrafas. 7) Analog.: ejerc/probl. dual, Fourier, dem. contrar. 8) Ensayo error: fuerza bruta, x2-x=10

- *Heurist.* ica: varios significados [WikiDesambiguation]:
  - Técnica: aquí equivaldrá a "**técnica de resolución** de un problema" (normalmente no rigurosa, como por tanteo). Para ejecución en *Met. Polya*.
  - Disciplina "arte/ciencia del descubrimiento/inventar" (relacionado con Eureka).
  - Algoritmo (en Informática): sub*Optim.* que da una sol. buena en un tiempo razonable.
  - Argumento (en Física): demostración convincente intuitiva pero no rigurosa. Eistein1905 "Über einen heuristischen Geischtspunkt des Lichtes" (sobre un punto de vista heurístico de la luz).

- Tipos: ad hoc ("para esto" problema) vs genérica

- Polya45 y Miguel de Guzman: [Aventuras matemáticas 83]. [Para pensar mejor 93]. [Matemáticas I 89] proponen las siguientes Heurísticas:

1. Simplificar-particularizar/generalizar: *Progr. Dinam.* (divide y vencerás). *Dem. por Induc.*: Ej: diagonales de un polígono de 85 lados $\frac{n(n-3)}{2}$. Ej: $\sum n^3 = (\sum n)^2$ (particular/general pero no dem. *Eviden.*).

   - *Filos. Groth.* (extender/sumergir/embedir) = Paradoja del Inventor (más fácil resolver el general que el particular): Puedes resolver el problema (romper la nuez, idea feliz, yang, estropajo) o disolverlo (ying, generalizar, agua) en sistema más genérico y se resuelve solo. Ej: *Var. Holg.* (inmersión en esp. superior, *Inclus. Canon.*), *Tma Fund. del Alg.* o *Ley de Reciproc. Cuadr.* (en $\mathbb{C}$), *Vision 3D* o *Tma Bezout* o *Tma de Cierre Poncelet* (en $\mathbb{C}$ *Coord. Homog.* y *Geom. Proyectiva*), *Rel. General* (en Espacio-Tiempo), *Ec. Dif.* Lin. (en Fasores), *Creer en Ficciones*.

2. Buscar condiciones de contorno (anclas): que reduzcan los posibles caminos del *Diagr. en Arbol* de posibilidades. Ej: encontrar nº de 4 cifras, Aprox. Log-Max. *Ec. Dif.*

3. Dibujar, tabla (*Ley Moore*), diagrama (árbol de probab. y combinatoria), lista. *Diagr. en Arbol*, *Visualiz. Datos*

4. *Lenguaje Adecuado* /notación: *Creer en Ficciones* ($\mathbb{C}$ ec. 3er grado), *Ind. Transf.*. *Malinterpret.* (compleja). Indios 0. Newton $\dot{y}$ vs Leibniz "regla de cadena" $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ (notación compleja vs simple). Matrices, *Coord. Homog.*, *Princ. del Palomar* (2 personas con igual nº de pelos). Pastor-lobo-col-oveja.

   - *Estimac. Fermi* o Probl. de Orden de Magnitud (*U4Estrat*) . [1]. Basado en *Anal. Dim.*. Ver *Dif.*

5. Simetrías/patrones: ver triángulos isoceles. *Aprend. Autom.*, *Teor. Galois*. *Coord. Curvil.* (según simetría)

6. Empezar for final: Suponer resuelto. *Metodo Iterativo Metodo de Exhaucion*. *Locus*. Garrafas de 9 y 4, sacar 6 l. Ec. de frac. de frac. con x. *Red. al Absurdo*

7. *Analog.* y *Dual*: darle la vuelta al Probl. (para simplificarlo) *Dem. por Contrarr.*, *Ejerc. vs Probl.*, *Tma Fermat*, *Progr. Langland* (*Fourier*)

8. *Ensayo Error* y *Fuerza Bruta*: $x^2 - x = 10$ se queda por encima, bajo. *Metodo Iterativo*, *Met. Hip.-Deduct.*, *Rec. Enum.*,

[1] Ej: ec. Drake, Aristóteles ¿cuantos granos de arena caben en Siracusa, Sicilia o la Tierra?

31.7 Métodos de demostración: 1) Directa: x=m6=>x=m2, des. Markov, sum par=par. 2) Inducción: Log1 transitiva, Log2 axioma, =bien orden., suma pr. arit., tma fund. aritm., 3.1) Reducción al absurdo: sqrt(2), diag. Cantor, no constr. contraste hip. 3.2). Por contrarrecíproco: n2->n impar, n2->n par, Tma Fermat. 3.3) Incumplimiento de impl.: err. nder. ncont. conv. unif.. 3.4)Contrajemplo: primos impares (2), pavo. 4) Visual: Pitag. 5) ATP

- *Metod. Dem.* : formas que hay de probar (*Dem.*) una *Impl.* $H \Rightarrow T$ (directa). Ver *Dem. Inval.*, *U4Estrat*):

1. Directa o *Deduc.*: si se dem. que cuando ocurre H ocurre T. Ej: *Des. Markov* Ej: A:"x es multiplo de 6" $\Rightarrow$ T:"x es multiplo de 2". Ej: suma de dos pares = par.

2. *Dem. por Induc.* : en *Log-1* seria un Tma de la *Ley Transit.*?? [2] y en *Log-2* el *Ax. Induc.* de *TAR* [WikiTARPeano]: asumiendo $[f(n) = V \Rightarrow f(suc(n)) = V] \Rightarrow f(n) = V \forall n$ donde $suc(n) = n+1$ [3]. Ej: Suma *Pr. Aritm.*, S_{n^2} (*Dif. Finitas*), *Tma Fund. de la Aritm.*, Truco Difer. (TProblem)

3. Indirectas o Inferencia lógica:

   - *Red. al Absurdo* : Dem. $p = V$ equivale a Dem. que si $p = F$ se deriva una contradicción manifiesta. Ej: *Raiz 2 Irrac.*, *Tma de Euclides Tma Fermat Diag. Cantor* (para probar conj. *Incontable* [0,1], ordenar en tabla y cambiar diagonal, *Conj. Cantor*, *P. Parada*). RA y *Tercero Excluido* (*Pot. Irr. Rac.*) son Dem. no *Construct.*. Equivale al *Contraste Hipot.* (*Hip. Nula*).

   - *Dem. por Contrarr.* (por Contraposición): se usa cuando es mas sencillo probar el *Contrarr.* $\neg T \Rightarrow \neg H$. Ej: n^2 impar $\Rightarrow n$ impar (difícil). n^2 par $\Rightarrow n$ par (fácil). Otros Ej: Sol. a los *Puentes de Koenigsberg* (Euler solo conocia la Directa) o al *Tma Fermat*. Ver *Analog.*

   - Incumplimiento de *Impl.* (Cond. Necesaria): Ej: *Conv.* Unif.. Ver *Reciproco*, *Err. NDer. NCont.*

   - *Contraej.* : o excepción a la regla. Opuesto a *Eviden.*. Ej: Todos los números primos son impares (no por el 2). Ej: el de *Tma Num. Primos*, *P. Amanecer-Pavo* y *Eviden.*

4. Visual: Ej: Tma de Pitagoras (UD5)

5. *ATP*

[2] Si A_1 y si $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ concluimos $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n$

[3] $\forall f((f(0) \wedge \forall x, f(x) \rightarrow f(x+1)) \rightarrow \forall y, f(y))$ "para toda función f (puede ser conjuntista $X(a) = a \in X$), si ocurre lo del medio, podemos concluir lo del final". Equivale al principio de *Bien Orden.* de $\mathbb{N}$. Ver *Ind. Transf.*

31.8 Problemas para educar: reforzar, concretar y evaluar teoría (ejercicios), motivar (vida real), desarrollar creatividad (problemas)

- Problemas para Educar: eslogan del NCTM80 (National Council of Teacher of Math) y [Gaulin82]:
  - Reforzar, concretar y evaluar teoría (ejercicios, concretar lo importante)
  - Motivar con problemas prácticos (vida real)
  - Desarrollar creatividad (problemas)

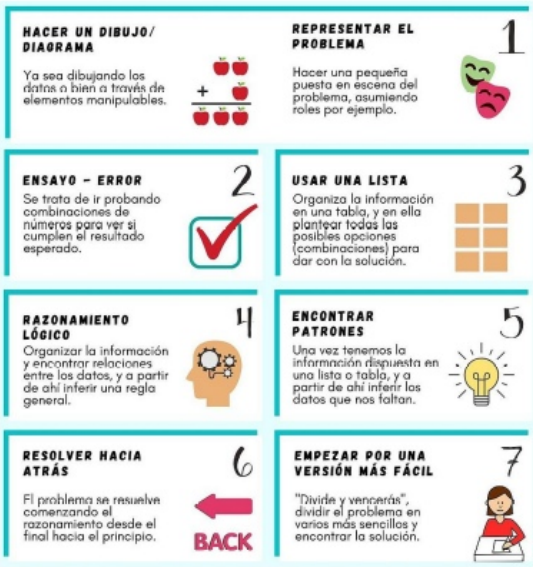
31.9 Problemas históricos: Aritm.: tma Fermat. primos, ec. diof. Geometr.: V postulado, exhaucion, descartes, egregium, Erlangen, costa. Topología: Koenisberg, solidos platónicos. Álgebr.: Galois, num. constr., PL, alg. abstr. Análisis: Basilea, braquistocrona, difus. Fourier. Prob.: Ceres, partida interrumpida, amanecer, te. Lógica: hip. continuo, consist. de TAR. Listas: 23 Hilbert (hip. cont., TAR, ax. Física, hip. Riemann, alg. diof.). 21 Karp (NP-completos). 7 Mileneo: Birch (c. elipt=f.-L), P vs NP, Hodge (manifold homeomorf a var. alg.). Hip. Riemann. Navier-Stokes, Pincaré, Yang-Mills

Problemas prácticos o Tmas fascinantes son el motor de las Matemáticas: equivalen a los retos internacionales de *Aprend. Autom.*. Definen bien el que-hacer matemático.

- Areas:
  - Aritmética: *Tma Fermat*, Probl. *Tma Num. Primos*, *Alg. Diof. X*, origen del *Progr. Langland*, Conj. de *Goldbach*.
  - Geometría: *V Postulado*, *Metodo de Exhaucion*, *Geom. Anal.* [Descartes], *Tma Egregium*, *Pr. Erlangen*, *P. Apolonio*, *Par. Costa*
  - Topología: *Puentes de Koenigsberg*, y *Solidos Platon.*, *Compl. Simplic.*
  - Álgebra: Ec. de 5 Grado (*Teor. Galois*), *C. Num. Constr.*, *PL* (*Red Flujo*), *Alg. Abstr.*
  - Análisis: *P. Basilea*, *Braquistocrona* , *Ec. Difus.* Calor (*Fourier*)
  - Probabilidad: *Pred. Ceres*, *Probl. Partida Interr.*, *Cuantica*, *P. Amanecer-Pavo*, *Catadora Te*
  - Lógica: *Hip. Continuo I* y *Consist. TAR II*, *Alg. Diof. X*

- Listas:
  - 23 *Probl. Hilbert* : *Hip. Continuo I*, *Consist. TAR II*, *Axiom. Fisica VI*, *Hip. Riemann VIII*, *Alg. Diof. X*, Apilamiento más denso XVIII. Sol. anal. lagrang. XIX
  - 21 Probl. de Karp: *NP-Completo*.
  - 7 *P. Milenio* : *Conj. de Birch*, *P. NP vs P*, *Conj. Hodge*, *Hip. Riemann VIII*, Ec. de Navier-Stokes, Conj. de Poincaré, Yang-Mills y salto de Masa
  - 18 Problemas matemáticos para el próximo siglo [Smale]

Figura 31.1: Estrategias



Heuristic	Informal Description	Formal analogue
Analogy	Can you find a problem analogous to your problem and solve that?	Map
Generalization	Can you find a problem more general than your problem?	Generalization
Induction	Can you solve your problem by deriving a generalization from some examples?	Induction
Variation of the Problem	Can you vary or change your problem to create a new problem (or set of problems) whose solution(s) will help you solve your original problem?	Search
Auxiliary Problem	Can you find a subproblem or side problem whose solution will help you solve your problem?	Subgoal
Here is a problem related to yours and solved before	Can you find a problem related to yours that has already been solved and use that to solve your problem?	Pattern recognition Pattern matching Reduction
Specialization	Can you find a problem more specialized?	Specialization
Decomposing and Recombining	Can you decompose the problem and "recombine its elements in some new manner"?	Divide and conquer
Working backward	Can you start with the goal and work backwards to something you already know?	Backward chaining
Draw a Figure	Can you draw a picture of the problem?	Diagrammatic Reasoning[26]
Auxiliary Elements	Can you add some new element to your problem to get closer to a solution?	Extension

Chapter 32

T70. Lógica proposicional. Ejemplos y aplicaciones al razonamiento matemático.

32.1 Introducción: f. lóg. signos mult., ATP (igualdades), silogismo Socrates, deriv. vs contin. Lógica: formas validas de deduc y dem. (evitar crisis). Lógica-0 vs 1 y 2

- Ej-Motivador:

  Ej1: ¿qué función lógica es la de los signos de multiplicación: "mas por menos, mas"....? (*Bicond.*) Ej2: igualdades de *ATP* Ej3: *Silogismo Socrates* [Aristóteles (Organon)] funciona en *Log-1*: $\frac{\begin{array}{c}\text{Todos los hombres son mortales}\\ \text{Socrates es un hombre}\end{array} \quad \begin{array}{c}\forall x, H(x) \to M(x)\\ H(S)\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Socrates es mortal}\end{array} \quad \begin{array}{c}M(S)\end{array}}$

  Ej2: Es F que: $f(x)$ no derivable $\Rightarrow$ no continua, ¿por qué? *Err. NDer. NCont.* Ej: *Calculus Ratiocinator*

- *Logic.* (formas válidas de dem.) y *Log-0* (o proposic.)

- Historia: Mesopotania (médicos, $\nexists$ Dem.). Aritoteles. Kant (cree que Aristoteles perfecto), Boole, Russel, Gödel.

- Importancia-historica: *Logic.*, *Op. Log.*, *Alg. Boole*, *Regla Infer.*, *Sist. Formal*, *Cond. vs Impl.*, *Tautol.*, *Cond. Nec. y Suf.*, *Metod. Dem.*, *Malinterpret.*,

32.2 Operador y f. lógica (aplicac. y, o, no, computación ubicua agua, N, R, C). 16 binarias (retículo teseracto, Venn). Alg. Boole (). Dif. simétrica (XOR), Morgan, princ. incl-excl. Bi/condicional. Mapa de Karnaugh (minterm del bicondic.).

- *Op. Log.* (Connectiva Log. u Op. Booleano): *Aplicacion* que toma una o dos var. y devuelve valor lógico. Los 3 primeros básicos (como *Op. Alg.*) que forman un *Alg.*

Boole son O $\vee$, Y $\wedge$ y NO $\neg$. Explicarlas con *Comput. Ubicua* (agua) [1]. *F. Booleana* : su extensión, puede ser *N-Aria* pero hay 16 binarias representables con *Diagr. Venn* o **Tabla Verdad**. Forman un *Reticulo Teseracto* (ordenado por inclusión, Fig. 29.1). Destacamos:

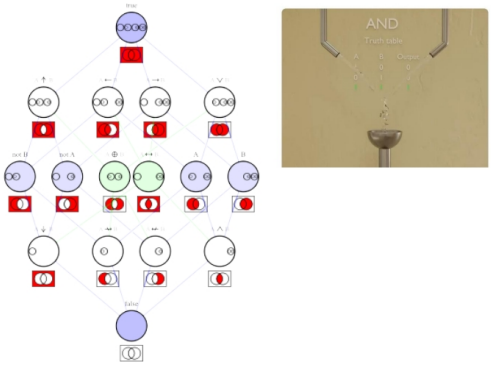
- 3-Conjuntistas: 1) *Dif. Simetrica* (**XOR**=$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, A o B pero no ambas, a veces $A \ominus B$, $A \triangle B$) (ver *Prob. Compl.*) Diferencia ($A - B = A \cap \bar{B}$). 2) *Leyes de Morgan*. 3) *Princ. Inclusion-Excl.*.
- 2-Lógicas: *Cond.* $p \to q$ (*Cond. vs Impl.* no confundirlos) y *Bicond.* $p \leftrightarrow q = (p \to q) \vee (q \to p)$ (*Equiv.*, signo product., ver minterm *Karnaugh*):

$p\ q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	0	1
1 0	0	0
0 1	1	0
1 1	0	1

- Mapa *Karnaugh* o Alg. Quine-McCluskey (Fig. 32.1): *Simpl. Alg.* o *Reescr.* de *F. Booleana* desde su Forma Canónica o expandida: 1) minterms (suma de prod. o "*Comb. Lin.*") o 2) maxterms (prod. de sumas). Con *Alg. Boole*=*Alg. Conj.* (sin visualizar) es *NP*. Es el *Probl. Inv.* del *SAT*, similar a *SPN*). Ej: *Bicond.*: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. NAND *Completitud Funcional*

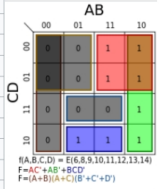
- *Comput. Ubicua* : curiosamente las *F. Booleana* no solo se pueden implementar electrónicamente si no incluso con chorros de agua (ver Fig. 32.1).

Figura 32.1: Computación Ubicua



	A	B	C	D	$f(A,B,C,D)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

$$f(A,B,C,D) = \sum m_i, i \in \{6,8,9,10,11,12,13,14\}$$
$$f(A,B,C,D) = \prod M_i, i \in \{0,1,2,3,4,5,7,15\}$$



$$= \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} +$$
$$A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}$$
$$= A\bar{C} + A\bar{B} + BC\bar{D}$$

[1] o *Conj. Num.* ($\mathbb{N}$, *Trascend.*, $\mathbb{C}$) o con *Alg. Suces.* (*Incomp.*) o con Búsquedas (creación de páginas en *Base Datos*, pg. donde aparezca 1a. palabra, luego donde también la 2a.)

32.3 Reglas de inferencia: aplicac. (premisas, conclusion), arg. log., tautol. Introducción de la conjunción (axiom.). Modus ponen y tollen (p->q,nq=>np, der. vs cont.). Ley transitiva (ax. induc., >=). Morgan (NAND y NOR completitud funcional)

- *Regla Infer.* (RI): *Aplicacion* que toma premisas y devuelve una conclusión (*Deduc.*). Se puede escribir como *Arg. Log.* y es una *Tautol.*. Ej: Veamos 5:
  - Eliminación e *Introd. Conj.* EC/IC (es un *Axiom.*): $\frac{p\wedge q}{p}$ e $\frac{\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}}{p\wedge q}$
  - Modus Ponen MP: $\frac{\begin{smallmatrix}p\to q\\p\end{smallmatrix}}{q}$. Ej: deriv. -> cont, der. => cont.
  - Mode Tollen MT: $\frac{\begin{smallmatrix}p\to q\\\neg q\end{smallmatrix}}{\neg p}$.
  - *Ley Transit.* LT: $\frac{\begin{smallmatrix}p\to q\\q\to r\end{smallmatrix}}{p\to r}$. Dem. *Ax. Induc.*. Ej: 6>2, 2>1 => 6>1
  - *Leyes de Morgan* : $\frac{\neg(p\wedge q)}{\neg p\vee\neg q}$ o $\frac{\neg(p\vee q)}{\neg p\wedge\neg q}$. De forma general: $\neg(\wedge_i p_i)=\vee_i\neg p_i$ o $\neg(\vee_i p_i)=\wedge_i\neg p_i$. Ver NAND y NOR tienen *Completitud Funcional* (equivalen a Y, O, NO).

32.4 Tautología: f. boole siempre V, perogrullada=corta, ej. MP. Argumentación lógica: premisas, conclusion y dem. de concl. ej.: LT (de dos variables) + MT + Morgan

- *Tautol.* : *F. Booleana V* para toda combinación de Valores de Verdad de sus variables. Si su longitud es corta se le llama "*Eviden.*" (perogrullada). Ej: $A\Rightarrow A$ Toda *Regla Infer.* o *Axiom.* lo es. Ej: MP se puede *Reescr.* $((p\to q)\wedge p)\to q$ y es V para toda combinación p,q:

$p\ q$	$p\to q$	$(p\to q)\wedge q$	$('')\to q$ (MP)
0 0	1	0	1
1 0	0	0	1
0 1	1	0	1
1 1	1	1	1

De igual forma el MT $((p\to q)\wedge\neg q)\to\neg p$.

- *Arg. Log.* : es una larga Tautología puesta en Forma Estándar (filas conectadas con $\wedge$, *Introd. Conj.*), donde en las primeras filas están las Premisas, luego una Conclusión (barra de *Impl.*) y finalmente la Argumentación o *Dem.* de la Conclusión. Ej. LT (de dos variables) + MT + Morgan:

1	$p \vee q \to r \vee s$	*Premisa*
2	$r \vee s \to \neg t$	*Premisa*
3	t	*Premisa*
$\therefore$	$\neg p$	*Conclusion*
5	$p \vee q \to \neg t$	$LT1,2$
6	$\neg(p \vee q)$	$MT3,5$
7	$\neg p \wedge \neg q$	$Morgan6$
8	$\neg p$	$EC6$

En Matemáticas e Informática se usa en la *ATP*.

32.5 Sist. formal. Ej Log0: Boole (8 ax), Wolfram (1 ax.), Lukasiewicz (3 esquema ax), Gentzen (0 ax.). Cond. vs Impl (metateoría)

- *Sist. Formal*.
- *Ej. Log-0* :
  - *Alg. Boole*: *Reticulo* Distrib. Complementario: 8 *Axiom.*. Equivale a Alg. Robbins (*ATP*).
  - Wolfram: cuando NAND es el único op. ((*Completitud Funcional*)) basta el *Axiom.* $((a|b)|c)... = c$ (máxima de la *TAI*)
  - Deduc. Natural [Gentzen]: ningún axiom. + todas las *Regla Infer.* de antes (*Deduc.* de la gente, sin ax.)
  - Sist. Axiom. [Lukasiewicz]: **Esquema *Axiom.*** de Lukasiewicz (ver) + MP como única *Regla Infer.* (pocos ax. y RI) [2]
- *Cond. vs Impl.* : metatoría en *Sist. Formal*. No confundirlos como muestra la siguiente tabla:

Op. Log. o Material	Metateor.	Ej:
Cond.	*Impl.*	la barra final de la *Regla Infer.* es *Impl.* más que *Cond.*
Bicond.	*Equiv.*	

3

[2] Esquema de Axiom.: representan un conj. ∞ de ax. (los ax. salen de instanciar las var. prop.). Ej: Los 3 de Lukasiewicz (basados en implicación y negación) son:

* *Introd. Conj.*: $A \to (B \to A)$
* "Distributiva" (): $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
* *Contrarr.*: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Una instancia del primero es $a \to (b \to a)$ pero también $(a \to \neg b) \to (c \to (a \to \neg b))$.

3

- *Cond.* Material $A \to B$: Afirmación hipotética (meramente sintática o formal, no habla sobre el mundo) o *Op. Log.* donde A y B pueden ser V o F. El hecho de que se dé el antecedente no significa que se de (o no) el consecuente. Ej: "**Si** hoy es Martes, **entonces** mañana es miércoles". "Si llueve el suelo entonces se moja"
- *Impl.* Lógica $A \Rightarrow B$: Afirmación sobre el mundo (sintáctica y semántica) donde la V de A lleva implicita la de B (por tanto es una tautología). Se debe usar cuando A es siempre V. Ej: "Hoy es martes" **por tanto** "mañana es miercoles". "Llueve por tanto el suelo está mojado".

32.6 Tipos de relación (sentencias): Implicación directa H=>T (der. vs cont, necesario y suficiente). Recíproca (equivalencia o c.n.s.: g. euler, isomorf. no impl.: m. ortog., c. abs., corr. vs causa. Contrarrecíproco: nT=>nH (=directa, n2 impar). Contraria: falacia, Err. NDer. NCont.

El mundo Matemático está lleno de hechos empíricos (*Sentenc.* o *Eviden.*) que se deben *Dem.* (*Cuasiempirismo*). Dada una *Sentenc.* Hipótesis H (con signif. semant. *Sist. Formal*) y una Sentenc. Tesis T los tipos clásicos de relaciones que hay entre ellas son:

- *Impl.* Directa: si $H \Rightarrow T$: si ocurre H implica que ocurre T. Ej: "$f(x)$ derivable $\Rightarrow$ es continua" (ver *Err. NDer. NCont.*) Se dice:
  - H es Cond. Suf. (pero no Nec.) para que se verifique T.
  - T es Cond. Nec. (pero no Suf.) para que se verifique H. Ej: Diferenciabilidad en *Envolvente*
  - T no es Cond. Suf. para que se verifique H.
  - H no es Cond. Nec. para que se verifique T.
- *Reciproco* : si $T \Rightarrow H$. Si ocurre junto con la Directa, conlleva a la *Equiv.* $H \iff T$ (ver *Igual*). Se dice "H es *Cond. Nec. y Suf.* para que se verifique T" o "H si y solo si T". Si no ocurre el *Reciproco* se dice "T *No Impl.* H" o "**Reciproco no V**" (a veces da lugar a *Falacia*).
  - Ej. de *Equiv.*: *G. Euler.* (caract.,), *G. Hamilton.* (Bondy), *Isomorf.*
  - Ej. de *No Impl.*: *Conv. Abs.*, *Diferenc.*, *M. Ortog.*, *Covar. vs Indep.*, *Indep. vs Incomp.*, *Correl. Causal.*, *Depend. vs Correl.*, *MVUE*, *Test Primalidad*
- *Contrarr.* (es un *Axiom.*): si $\neg T \Rightarrow \neg H$. Es consecuencia de la Directa. Ej: *Dem. por Contrarr.* ($n^2 impar \Rightarrow nimpar$, Fermat), *Dual*
- Contraria: si $\neg H \Rightarrow \neg T$. No es consecuencia de la *Impl.* Directa (la gente se confunde en esto, *Falacia*). Ej: *Err. NDer. NCont.* "Si no es derivable $\Rightarrow$ no es continua" es F (pensar en func. valor abs en 0).

32.7 Objetos matemáticos: primitivos (elem. conj., n^o, =, pto, suceso), definibles (ángulo, derivada, prob. condic.), complejos: axioma, FBF, Prop. Dem. Tmas tipos: corolario (seguido, long. cateto, Tma Ra. C Conj.), identidad o lema (ayuda a dem., id. notable, Bezout, Zorn), regla (útil, pulgar, bayes, cadena), principio/ley (frecuente, grandes n,)

- *Obj.* matemático: cualquier cosa con significado semántico y que pueda ser *Bien Def.* para *Deduc.* en un *Sist. Formal*. Ver *SubObj.*, Teor. *Categ.* . Se debate su existencia (*Platon.*, *Construct.*).
  - Obj. o término primitivo: no definible o semánticamente comprensible (Metateor. *Sist. Formal*) o intuitivo (*Construct.*. El punto de partida es libre, pero lo ideal que explica mucho con poco *TAI*. Ej: elemento *Teor. Conj.*, 0 o sucesor (Aritm.), punto o espacio (Geom., silla = *Formalismo*), = (Alg.), *Funcion* (Anal.) *Suc. Elem.* (prob).
  - Obj. o término definible o relacional: Ej: ángulo, derivada, *Prob. Condic.* $p(x|y)$.
  - Obj. complejo: *FBF*, *Axiom.*, *Prop.*, *Dem.*. *Tma* o incluso Teor. Matem. [Wiki]
- *Tma*: según énfasis distinguimos:
  - Corolario: sigue con poco esfuerzo de un Tma Ej: de *Indep.*, del 2° Tma Isomof. *Form. Grassmann*, del *Tma Ra. C Conj.*, del Tma de Pitágoras (la long. de un cateto es menor que la hipotenusa $b^2 = a^2 - c^2$), de *P. Parada*.
  - *Ident.* o Lema: ayuda a Dem. Ej: Id. Alg. Notable ($(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$), *Id. Bezout* (para *Ec. Diof.*) *Lema Zorn* (para) *Lema Yoneda*
  - Regla: muy útiles Ej: *Regla del Pulgar*, de la cadena (deriv. o prob.), de Bayes (*Tma Bayes*), L'Hopital
  - Principio/Ley: aparece con frecuencia. Ej: *Ley Grandes Num.*

32.8 Métodos de demostración

- *Metod. Dem.*

32.9 Malinterpretación: división, compleja, potencia, derivada, seno cuadrado. Falacia: Err. NDer. NCont.. Demostración invalida: lnx<0=> lnx/lnx<0/lnx => 1<0. Calculus Ratiocinator

- *Malinterpret.* : por notación imperfecta, no *Bien Def.*:

- División: $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{3}{4} = 1 \\ \frac{2}{3} : \frac{3}{8} = \frac{16}{9} \end{cases}$
- Compleja: $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq \sqrt{-1-1} = 1$ o $\frac{1}{\sqrt{a}} \neq \sqrt{\frac{1}{a}}$ [WikiComplex] (In*Consist.* con $\mathbb{R}$ que atormentaban a Euler, se evita usando *i Sist. Formal*).
- Potenc.: $a^{b^c} \begin{cases} a^{b^c} \\ (a^b)^c \end{cases}$ [Wolfram]
- Seno cuadrado: $\sin^2 x/2 = \begin{cases} \sin^2(x/2) \\ [\sin(x/2)]^2 \end{cases}$
- Derivada: $f'(3) = \begin{cases} f'(x)|_{x=3} & = 12 \\ (f(3))' & = 0 \end{cases}$
- *Igual*: (ver)

- *Falacia* : argumento que parece válido pero no lo es. Es un error de razonamiento (ver *Metod. Dem.*). Ej: *No Impl.*, *Err. NDer. NCont.*. *Dem. Inval.* : suele ser en el paso si $f(x) = f(y) \Rightarrow$ concluir erróneamente que $x = y$ cuando f no es *Biyect.*
  - Ej: 2=1: $a = b(1)a^2 = ab(2)a^2 - b^2 = ab - b^2(3)(a-b)(a+b) = b(a-b)(4)a+b = b$ como a=b $(5)b+b = b(6)2b = b(7)2 = 1$. fallo en (4) divis. por 0
  - Ej: 1<0: $x < 1(1)lnx < 0(2)\frac{lnx}{lnx} < \frac{0}{lnx}(3)1 < 0$. Fallo en (3) $lnx < 0$
  - Ej: [YoutubeQuantumCrespo]

- *Calculus Ratiocinator* [Leibniz]: junto a un lenguaje (characteristica universalis) máquina que pruebe cualquier verdad (chequear*Entscheidungsproblem*) "Juez de Leibniz" Entrada: hechos, Salida: sentencia (demostrar, *ATP*). Ver *ATP*, *Infer. Bayes.*, *NLP*, *Gramat.*, *Sist. Formal* .

Chapter 33

T71. La controversia sobre los fundamentos de la Matemática. Las limitaciones internas de los sistemas formales.

33.1 Introducción: Calculus Ratiocinator, sist. formal ESO, lógica ecuacional, carta Ramanujan con ATP. Tma Fermat (modularidad).

- Ej-Motivador: *Calculus Ratiocinator*
- Ej. *Sist. Formal* ESO. Ej2: *Log. Ec.* de *ATP* o *Tma* de carta de Ramanujan. *Tma Fermat* muestra la modularidad de las Matemáticas (ver *ATP*)
- Importancia-histórica: *Par. Russell Decib. Geom. Eucl.*, *Log-1*, *FBF*, *Dem. y Tmas son Rec. Enum.*, *Complet.*, *Tmas Goedel*, *Compl. Inf. Matem.*, *Construct.*, *Tercero Excluido*, *Fund. Matem.*, *Cuasiempirismo*, *ATP*

33.2 Paradoja (deduc.-griega. opinión): Zenon, raiz(2) (Hipaso). Geom. no eucl. (Erlangen). Alg.: dem. inval.. Anal.: Banach (medida). Anal.: Dirichlet, Weierstrass, Costa (fractal e int. Lebesgue). Prob.: Bertrand (prob. ax.). Crisis: paradoja de Russell (mentiroso, Berry en fund.). Programa de Hilbert (geom. eucl., Erlangen, ignorabismus: 1) entschei (p10), 2) conist. (explosión, p2), 3) compre(n)sión ax. (física, p8).

- Paradoja: conclusión *Deduc.* que parece contraria a la lógica u opinión general. Aparece con los Griegos porque son los primeros en usar la lógica.

- Par. Griegas:

  - *Par. Zenon* o de Aquiles y Tortuga [450ac]: "en una carrera el perseguidor nunca alcanzará al perseguido porque el perseguidor debe llegar primero al punto donde ya llego el perseguido". Aquiles le deja 10m de ventaja a la tortuga, debe completar un num. ∞ de tareas y eso es imposible. La *Serie Pr. Geom.* $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots=11.1$ *Conv.* por Fund. Matemática del Análisis (calc. dif.).

  - *Raiz 2 Irrac.* [Hipaso450ac]: los griegos se niegan a creer en su existencia (*Filos. Digital*) y mataron a Hipaso por difundir el descubrimiento de ser irracional. Ver *Pot. Irr. Rac.*

- Par. Modernas:

  - Geom.: *Geom. No Eucl.* (sol. *Geom. Riemann* y *Pr. Erlangen*)
  - Alg.: *Dem. Inval.* (sol. *ATP*)
  - Anal. y Geom.: *Par. Banach-Tarski*, *Conj. Vitali* (sol. Teor. *Medida*)
  - Anal. y Geom.: *F. Dirichlet*, *F. Weierstrass*, *Par. Costa* (sol. *Fract.*, *Int. Lebesgue*)
  - Prob. *Par. Bertrand* y *Crisis Prob.* (sol. *Prob. Axiom.*)
  - Log.: ver *Crisis Matem.*

- *Crisis Matem.* de [1900, Grundlagenkrise der Mathematik]: por aumento de rigor (como pasó con *Deduc.* griega). *Par. Russell*, del Mentiroso o Berry [1900] [1]: las peores pues se cuelan en los *Fund. Matem.*.

- **Pr. Hilbert**: su éxito en la *Decib. Geom. Eucl.* le animó a afirmar (Wir müssen wissen — wir werden wissen!, opuesto a frase de Reymond (Ignoramus et ignorabimus). Creo un programa *Formalismo* similar al *Pr. Erlangen* para *Fund. Matem.*. Los tres puntos a evitar para no dar *Crisis Matem.* son:

  - *Entscheidungsproblem*: evitar errores humanos, paradojas, *Falacia*, (*Dem. Inval.*) y *Malinterpret.*. Que lo hagan las Computadoras *ATP*. *Alg. Diof. X*, *Calculus Ratiocinator*
  - *Consist.*: **Princ. Explosion**: cualquier proposición puede ser derivada de una contradicción. *Consist. TAR II*
  - Comprensión *Axiom.* y no ambigüedad: máxima de *TAI* (Compresión es Comprensión). También *Axiom. Fisica VI* (*Probl. Hilbert*).

[1] El menor $\mathbb{N}$ NO definible con menos de 11 palabras ¿lo he definido? [Chaitin] muestra que es posible construir esta expresión en un *Sist. Formal* (ver)

33.3 Sistema formal (abstr. con regl. infer.): 1) Símbolos primitivos: variables (Log1 embebida, p:x+1=x+5-4), puntuación (,[]), op. log. (Y) cuantif. (exists). 2) Gramática: FBF (Log0, Log1). 3) Axioma vs postulado: FBF autoeved (ver ATP). 4) Sist. Deduc.: RI, Tmas. 5) Metateorría: Cond. vs Impl. Ej. Sist. Formal (ESO)

- *Sist. Formal* [Hilbert1921, *Formalismo*]: sist. abstracto para inferir (*Deduc.*, *ATP*) *Tma* desde unos *Axiom.* siguiendo unas *Regla Infer.*. Ej: *Log-0* (ver *Logic.*), *Log-1*, *Log-2*, *Calc. Lambda* o los de *ATP*, *Calculus Ratiocinator*. Sea del orden que sea, consta de 5 elementos.

  1. Símbolos Primitivos: del lenguaje para crear fórmulas (*FBF*). Distinguimos:
     - Variables: $p,q,r...$ al que se le asigna un Valor de Verdad V o F. Pueden tener significado semántico como los *Obj.*, ej: podemos suponer que *Log-1* o *TAR* está embebida en nuestra *Log-0* por lo que las variables pueden ser cualquier tipo de *Sentenc.* matemática.
     - Signos de Puntuación: espacio (como separador), paréntesis y comillas para tener ∞ variables.
     - *Op. Log.* o *Cuantif.*: que conectan *Sentenc.* Atómicas para dar las Moleculares.
  2. *Gramat.*: como hacer *FBF* con símbolos primitivos en *Log-0*, *Log-1*,...
  3. *Axiom.* : *Prop.* (o *FBF* o RI) tratada como auto*Eviden.* (por semántica, sin *Dem.*, *Tautol.*). Un **Postulado** (menos eviden. pero aceptado): Ej: *Ax. Eleccion* y *V Postulado*. Ej: Ax. Wolfram o Lukasiewicz (ver). Ej: de sist. de *ATP*. Se debate su existencia como *Obj.* semántico (*Formalismo*). Ver *EA* y *Bien Def.*
  4. Sist. Deductivo: *Regla Infer.*s sobre axiomas (o *Prop.*) para dar *Tma* u *Obj.*.
  5. Metateoria (*Platon.*): da significado semántico a los *Obj.* derivados. Ej: $p =$"llueve en Granada" como a las inferencias.

- Ej: *Sist. Formal* ESO y Bach: con ej. de *Ident.*

	Decible (*Indecib.*, *Probl. Inv.*, es un arte)
Aritm. $2+3=8+(-3)$?	regla signos y parant.
Geom. $sen(2x)=2sen(x)cos(x)$ $r_1 \parallel r_2, r_3 \perp r_1 \Rightarrow (r_2 \cap r_3) \neq \emptyset$ (*Tma Increible*)	Tma Pitag. *Decib. Geom. Eucl.*, *Geom. Anal.* f. simples
Alg. $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$	Exp. Alg. regla potenc. o matr. (*Simpl. Alg.*)
Anal. $\frac{\partial}{\partial x}((x^3)/\sqrt{5x-3}) = 3x^2/(5x-3)^{3/2}$	der. f. elem. +regl. cadena (*Primit.*)
Prob. $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$	*Alg. Suces.*, *Tma Bayes* = Pitagor. *Contraste Hipot.=Red. al Absurdo*
Log. $(\neg p \vee q) = (p \wedge \neq q) \wedge (\neg p \vee q)$	*Alg. Boole* (*SAT*)

33.4 Lógica: formas validas de deduc y dem. (evitar crisis). Lógica-0 vs 1 y 2. Log-x (sist. formal sobre gramat.-x poder expresivo vs metateoria, predicar sobre predicado): L0 (Boole, Socrates), L1 (cuantif. ZFC, no Par. Russell), L2 (TAR, inducc.).

- *Logic.* : estudio de las formas válidas de inferencia (*Deduc.*) y *Dem.* en los *Sist. Formal*. Evitar *Crisis Matem.*
- RESUMEN Lógica de orden-x: *Sist. Formal* para hacer inferencias en lenguaje (*Gramat.*) de orden-x. Todas son *Consist.*. y la *Jerarq.* se empezó a crear a raíz de percatarse del *Compromiso* "lo que se gana en *Poder Expr.* , se pierde en metateoría" [2]. Según [WikiHOLog] tenemos:

Log-0 solo variables	$\neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$ o *Log. Ec.*	*Ej. Log-0*
Log-1 *Cuantif.* sobre var.	$\forall x, (x+2)^2 = x^2 + 4 + 4x$ o *Sentenc.* Aritm. *Silogismo Socrates*	*Teoria ZFC* (casi todas las Matem.) evita *Par. Russell*
Log-2 cuant. además sobre conj	$\nexists x : [\Pi_x$ *Dem.* $P_w(w)]$ (*Tmas Goedel*) o *Dem. por Induc.*	*TAR* Peano, 9º *Ax. Induc.* suc.
Teor. Tipos cuant. sobre conj. de conj. etc.. (anidados).		*Calc. Lambda* tipado, *HoTT*, *Teor. Tipos Intuic.*

  - *Log-0* o proposicional o de *Alg. Boole*: aunque permite crear expresiones complejas (conectando otras) no se puede predicar (o cuantificar) sobre variables (nombres). Ej: no podemos expresar el *Silogismo Socrates* $\frac{p}{\frac{q}{r}}$. *Ej. Log-0*
  - *Log-1* o Predicativa o de Frege (pulida) o Peirce: se puede predicar sobre variables porque se añade *Cuantif.* $\forall, \exists$: Ej: $\forall x, F(x)$ (es V), $\exists_1 x : F(x)$ (es V). Ej: La *Teoria ZFC* la usa como aparato base y permite expresar casi todas las Matemáticas (*Teoria ZFC*. Es la *TAR* de Peano sin sus últimos ax. usan esta como base. Ej: si podemos expresar *Silogismo Socrates* Ej: $\forall x, (x+2)^2 = x^2 + 4 + 4x$ Ej: DIRHA $\forall x, Apagar(x)$ Es la de Freque pulida para evitar *Par. Russell* (es por esto que se empieza a distinguir entre Log-1 y Log-2 [WikiLog2]).
  - *Log-2*: se puede predicar sobre variables, conj. funciones o relaciones (también "predicados Peano") porque se añade Tipos de Variables. Ej: $\forall P \forall x (Px \vee \neg Px)$ (para todo P,x o Px V o no Px V, similar a *Tercero Excluido*). Ej: Teoría Aritmética Recursiva como la *TAR* de Peano (los 8 primeros ax. de *Log-1* [*Clausur.* $sucesor(n) \in \mathbb{N}$, def. 0, transitiva $x = y = z$,...], y el 9º *Ax. Induc.* (suces.) de *Log-2*) que permite definir los $\mathbb{N}$. En lo que sigue entenderemos equivalentes Log-2 y TAR. Se suele crear sist. más débiles reemplezando el 9ª por Esquema de *Axiom.* (*Ej. Log-0*, [WikiPeanoAx])

[2] se dice versión *Logic.* más débil/fuerte si quitamos/añadimos elem. al *Sist. Formal*. Permitiendo *ATP* (*Log. Ec.*, *Log-1* Presburger,...) / superar *Probl. Indecib.* (*Ind. Transf.*...)

- *Teor. Tipos* o Log. de Alto Orden: Es la extensión de *Log-2*. La de TT simple de Russell obliga a que objetos de un tipo dado están creados exclusivamente por objetos de un tipo inferior en la *Jerarq.*. Esto evita ciclos como la *Par. Russell*: el tipo R no es un conj. (*Propio*??). La clave es que no basta "compartir propiedad" para definir los elementos de un conj. Otras son *Calc. Lambda* tipado y *Teor. Tipos Intuic.*. Sirve como *Fund. Matem. Construct.*
- (*) Log-*Fuzzy* o Borrosa: hacer *Infer. Estad.* donde las *Sentenc.* tienen asociada una *Prob. Subjetiva* o un Nivel de *Confianza*. La principal diferencia con *Estad. Infer.* o Prob. está en la **F. Pertenencia** (*F. Indic.* de *Teor. Conj.*), aquí un obj. puede pertenecer a varias clases (no *Tercero Excluido*). La Prob. es un caso de *Fuzzy*. Ej: 1) Fuzzyficar: Tª con trapezoides o *F. Logistica* solapados Frio, Templado, Caliente. 2) *Op. Log.* $NOT(x) = 1 - x$, $AND(x,y) = min(x,y)$, $OR(x,y) = max(x,y)$

33.5 Objetos: Cadena de caracteres (Kleene). Fórmula bien formada (gramat.): sentencia (sin var. libres, x2=y), numeración de Goedel (Fermat). Proposición (V). Demostración (sec. prop./ax.+regla infer.). Teorema (Prop con Dem. L1 vs L2, interesante). Conj. recursivo (algor. decidir, primos, FBF), Rec. enum.: gen. vs discr., dem. y tmas (gen. lexicogr. y filtrar FBF (gramat.) +Dem. (Curry)), conj. diof. Consistente (no deducible Fi=V y Fi=F), completo (toda Pi dem.), decible (toda Fi dem.)

- *Obj.* matemáticos complejos:
  - Cadena de caracteres: *Clausura Kleene*
  - *FBF* o fórmula F_i: combinación de símbolos según *Gramat.* (la fórmula puede ser V o F pero no estar mal escrita).
    - *Sentenc.* u Oración (sentence) o Declaración (statement): a) *FBF* sin variables libres (lo cual permite que sea V o F) $\forall y \exists x : x^2 = y$ (es V en $\mathbb{C}$ pero falsa en $\mathbb{R}$), $\exists x^2 = y$ no lo es por tener y libre (en $\mathbb{R}$ no está claro su valor, si libremente $y = 2$ es V pero si $y = -2$ es F). b) Hecho (frase sobre el mundo, no sigue una *Gramat.* clara, *NLP*), "El agua hierve a 50ºC". Si además no contine *Op. Log.* o *Cuantif.* es Atom. Ver *Log. Ec.*, *Kripke*, *Prop.* y *Eviden.*
    - *Num. Goedel* permite un algor. de ida y vuelta que asigna un único $\mathbb{N}$ a cada *FBF* por el *Tma Fund. de la Aritm.*. Ej: las *Sentenc.* Aritm. simples tipo $\exists w,x,...z : [f(w,x,...,z) = 0]$ donde el *Tma Fermat* es $\nexists w,x,y,z : x^{w+2} + y^{w+2} - z^{w+2} = 0]$ tiene nº $2^{14}3^{10}5^{11}$.... (ver *Log. Ec.*)
  - *Prop.* $Prop_i = (F_i = V)$ (conj. T [Penrose]): FBF=V (puede no tener Dem. como en *Log-2*, algunos la confunden con fórmula y otros la usan como sinónimo de Tma [WikiTma]). Ver *Kripke*, *Estad. Infer.*
    - *Ident.* : es una *Igual*dad de dos expres. alg. $s = t$ o *Prop.* de la forma $\forall x_1,..,x_n.s = t$ donde se omite el $\forall$ y normalmente se usa el símbolo $\equiv$. Ej:

$(x+3)^2 = x^2+6x+9$, *Forma Cerrada* de una *Serie*, Id. Notable o Trigon.. los de *Sist. Formal*. No confundir con *Ec. Alg.*. Ver *Simpl. Alg.*, *Reescr.*itas, *Obj.*, *Tma Richardson*

- *Dem.* Π_n: secuencia Prop./Axiom. y *Regla Infer.*. No confundir con *Eviden.*. Ver *Metod. Dem.*, *Arg. Log.*, modularidad Matem. (*ATP*)
- *Tma* Tma_i (conj. *P* [Penrose]): *Prop.* con *Dem.*. En *Log-1* Tma=Prop=FBF y por eso "Tma es una Prop. interesante" (todas tienen *Dem.* por *Tmas Goedel* 0, última de una Dem, ver *P. Parada*). En *Log-2* hay Prop.=V sin Dem (*Tma*) *Diagr. Venn* de Fig. 33.1. Ej: las afirmaciones de la carta de Ramanujan a Hardy. Ver tipos *Obj.*, modularidad Matem. (*ATP*)

- Recursividad:
  - Conj. **Recurs. Comp.** (para los matem. o *Turing* Comput. para los informáticos): si existe algoritmo para decidir en tiempo finito (se para) la pertenencia de un punto (*F. Indic.*). Ej: Conj. primos, Conj. de programas bien escritos (*FBF*, *Gramat.*). Es una *Teor. Unif.* como *Calc. Lambda*. (ver *Discr. vs Gener.*). Ej: *Num. Comput.*
  - Conj. *Rec. Enum.* (o Semi*Decible*): si tienen algoritmo para generar sus puntos (enumerados con $\mathbb{N}$, por *Fuerza Bruta*) pero no para discriminarlos (*Discr. vs Gener.*, *F. Indic.*). Conj. en el que su complemento se define como "lo que queda" Fig. 33.1, por tanto si el punto (o prop.) que estamos comprobando $\notin$ al conj. el *Automata* comprobador se pierde en el ∞. Similar a si una máquina escupe decimales 0.112112112.... (una fórmula) y queremos determinar si es racional o no (debemos esperar infinito para verlo). Ej.:
    - Conj. de *Dem. y Tmas son Rec. Enum.* [PenrosePg187]: de *Log-1* o *Log-2*. Ojo no las *Prop.* generar por orden lexicográfico las cadenas de longitud 1, 2, ... y **filtrar** los sinsentidos y las no Dem usando la *Gramat.* (Recurs. Comput. como hemos dicho) y el **Comprobador de Dem.** (*Turing* Comp., por *Correspond. Curry-Howard* debe haberlo, ojo no hablamos de un buscador de Dem. *ATP*). Los Tmas Tma_i son las últimas lineas de las Dem. Π_i. Otra forma es recursivamente Axiomas+ReglasInfer+Prop=Tmas ([Penrose169] díficil de ordenar]).
    - Conj. *Prop.* Aritm. simples (de *Log-1*): si enumeramos las *Sentenc.* $\{v,x,\ldots,z\}$ donde v codifica lexicográfico a las distintas funciones (*Ec. Diof.* o *Ec. Alg.*), nos quedamos con los $w,x,\ldots,z$ que verifiquen la igualdad. Veremos, por *Tmas Goedel*, no es Recurs. Comp. y hace que no podamos dem. si es V o F el *Tma Fermat* via *Turing*-Comp. Ver *Log. Ec.*
    - Conj. Diof.: *Alg. Diof. X.*
    - Complemento del *Conj. Mandelbrot*.

- Límites
  - *Consist.* : $\forall F_i = V \oplus F$ (no ambas, *Dif. Simetrica*). No es posible deducir del sist. una *Prop.* y su contradic. como en *Par. Russell*. El *V Postulado* lo es.
  - *Complet.* : $\forall Prop_i (= V) \exists Dem.$. Toda *Prop.* es derivable del sist., toda Prop. es un Tma
  - *Decible* : $\forall F_i \exists Dem.Autom.$. Existe algoritmo que decide la veracidad de cualquier *FBF*. Prop. *Indecib.* que no se puede probar V o F en sist. (*Probl. Indecib.*)

33.6 Tmas de Gödel (consistencia de la TAR II): T0) [1929] L1 completa y Tma=Prop=FBF. T1) [1931] L2 incompl si consist. (Tmas<Prop, Venn, complejidad. inf.), T2) TAR in consist. no es Tma (casi Gentzen). Dem T1 (nexist Pix dem. pw(w)). Dem T1 (algor. diof. no existe)

- *Consist. TAR II* (*Probl. Hilbert*): probar la *Consist.* de los *Axiom.* de una *TAR*.

- *Tmas Goedel* : hay tres

  - 0 Tma de Completitud 1929: la *Log-1* (o *Log-0*) es *Complet.*, i.e. si $F_i = V$ entonces $\exists$ Dem. dentro del sist., i.e. Es más, en *Log-1* (y *Log-0*) $\{Prop_i\} = \{Tmas_i\} = \{F_i\}$ i.e. sus *Tmas* coinciden con *FBF* [WikiTeorem] [3].

  - I Tma de Incompletitud 1931: cualquier TAR *Consist.* (*Log-2*) es In*Complet.*. $\{Tmas_i\} \subset \{Prop_i\}$ (*Diagr. Venn* Fig. 33.1) *Compl. Inf. Matem.* [4]. Ver Dem. (*)

  - II Tma de Indecibilidad 1931: aun más trágico para Hilbert, la fórmula $TAR \in Consist$. no es un Tma, i.e. es *Indecib.*, no se puede probar V o F en propio *TAR* (aunque si con otros con más *Poder Expr.* [WikiTAR] [5])

(*) Dem. de I Tma basada en *Autorref.*:

1. Sabemos que *Dem. y Tmas son Rec. Enum.* (F_i y Π_x)
2. Si SF con alto *Poder Expr.* como *Log-2* (*TAR*) podemos generar FBF como "$T_n(w)$ se para" o "$\nexists x : [\Pi_x \quad Dem. \quad P_w(w)]$" cuyo *Num. Goedel* de FBF es $P_k(w)(= \nexists x : [...])$.
3. Si analizamos $P_k(w)$ para $w = k$ queda $\nexists x : [\Pi_x \quad Dem. \quad P_k(k)]$.
4. Esta FBF "vemos" (*Platon.*) que debe ser V pero *Indecib.* en el SF (lo mismo le ocurre a su negación). $\Rightarrow$ la*Log-2* tiene una FBF Goedeliana y es no *Complet.*

Otra Dem. con *Ec. Diof.*: del *Alg. Diof. X* se puede derivar una forma fuerte del I *Tmas Goedel* de Incompletitud: para cualquier *TAR*, uno puede construir explícitamente una *Ec. Diof.* sin soluciones, pero que este hecho no puede ser probado dentro del *Sist. Formal*. [a]

[a] existe un monstruo de Ec. Diof. que imita a otras (¡similar a Maq. Universal de *Turing*!)

[3] La verdad semántica equivale a la decibilidad sintáctica.

[4] El conj. de las $Prop_i$ (que ni siquiera es *Rec. Enum.*, ver colorario *P. Parada*) es mayor que el de las demostrables (*Dem. y Tmas son Rec. Enum.*). Según la *TAI* la Matem. tiene complejidad ∞ como para ser deducida de un conj. finito de *Axiom.* Ej: los dígitos de Ω.

[5] como *Teor. Tipos* [Goedel58] o *Ind. Transf.* [Gentzen36]

33.7 Entscheidungsproblem (de Log1, Hilbert1928). Church1936: cálculo lambda (no f. comput. recursiva de reescr. confluente, teor. unif.). Turing1936: no alg. que pare si otra para (Maq. univ.+diagon. Cantor). Colorarios: L1 y L2 indecibles (MT para = Prop. aritm.). Tab. resumen

Entscheidungsproblem [Leinbniz (idea), Hilbert y Ackermann 1928 (reto posterior a *Consist. TAR II*)]: ¿es *Log-1 Decible*, i.e. equivale (por 0 *Tmas Goedel*) encontrar metod. mecánico/efectivo para decidir si *FBF* de *Log-1* es un Tma.

- *Calc. Lambda* [Church1936] (software): $\nexists$ algoritmo general o *Funcion Turing* Comp. (FTC) que diga si dos expresiones calc. lambda son *Reescr.*.
  - FTC: F. que es expresable con *Rel. Recurr.*. Toda F. es una composición/recursión de F. que podemos nombrarla y componer de nuevo).
  - *Reescr.* confluente: si por caminos distinto llegamos *Igual*. Ej: de expresiones equivalentes: $\lambda f.f3)(\lambda x.x+2) = \lambda x.x+2)3 = 3+2$. Ver Tma Church-Rosser en *Log. Ec.*, *Ident.*, *Simpl. Alg.*, *Tma Richardson*.

  Su importancia reside en mostrar que estos dos conceptos son el corazón de las Matemáticas (*Teor. Unif.*) [6]

- *P. Parada* [Turing1936 de forma independiente] (hardware): $\nexists H(n,m)$ Maq. *Turing* que pare (=Alg. Turing Comp.=Alg. Recurs. Comp. =*Bien Def.* = *Automata* físico que pare) capaz de decidir si cualquier otra MT $T_n(m)$ se parará. Dem. Fig. 33.1 (**Maq. Universal** [7]+*Autorref.+Diag. Cantor*. Dem. Fig. 33.1
  - **Colorario**: *Log-1* es *Indecib.*.

    > Cualquier *Sentenc.* de la *Log-1* como la del *Tma Fermat* o *Alg. Diof. X* se corresponde con una MT (generadora de los $w,x,..z$ que hacen 0 la F.) o FTC *Calc. Lambda*, si existiera la $H(n,m)$ podriamos utilizarla para Dem. cualquier *Prop.* Aritm., pero como $\nexists$ la *Log-1* es *Indecib.*

  - **Colorario**: dado que *Log-1* es *Indecib.* $\Rightarrow$ *Log-2* también (por contener *Sentenc.* de L1). Otra Dem. es como colorario del I *Tmas Goedel* incompletitud [8]
  - Colorario: el Conj. $Prop_i$ en *Log-2* no es si quiera *Rec. Enum.* [9]

- Resumen:

  NOTA: los tres límites (Cons., Compl, y Decid) no pueden ir en parejeas. Ej: *Decib. Geom. Eucl.* (Decible pero Incompleta) pero la *Log-1* (al revés).

[6] Es un lenguaje de programación funcional (Haskell) o *Sist. Formal* minimalista (esquema para definir funciones + regla de transformación (sustitución de variables)). Posteriormente tipado por el propio Church 1940 (*Teor. Tipos* simple).

[7] La R110 de *Irreduc. Wolfram* lo es

[8] si Hilbert hubiera tenido razón existiría un conj. finito de ax. con un Alg. *Turing* Comp. (que para) capaz de decidir la veracidad de cualquier FBF de las Matem.: bastaría generar *Dem. y Tmas son Rec. Enum.* y hasta que llegaramos (en nº finito de pasos garantizado) a la fórmula. Al no ser posible $\Rightarrow$ *Log-2* es *Indecib.*

[9] el conj. $S(n) = T_n(n)$ no se para no es *Rec. Enum.* pues contradecería el *P. Parada*. Dado que este es un subconj. de las $Prop_i$ podemos decir que las $Prop_i$ no es *Rec. Enum.*

	Consist.	*Complet.*	*Decible*
Log-0	Si	Si	Si. Equivale al *SAT* [10]
Log-1	Si	Si [0 *Tmas Goedel*]	No [Colorario *P. Parada*], casi [11].
Log-2	Si, casi [II *Tmas Goedel*]	No [I *Tmas Goedel*].	No [Colorario de arriba o del I *Tmas Goedel*]

33.8 Problemas indecibles (equiv. Goedel o parada, superables). Conj: hip. cont. (indep. ZFC). Aritm.: alg. diof., Goodstein (op. salto base, ind. transf.). Geom.: tesel. de Wang, V post. (indep.). Topol: compl. simpl. homeom. Alg.: m. mortal. Richardson (expr.), n. constr. Galois. Anal.: Richardson (0s e int.). Prob.: proc. dec. Markov. Log.: Bussy-Beaver, Omega

Probl. Indecib. : se suele demostrar su *Indecib.* mostrando su equivalencia con Tmas Goedel o *P. Parada*. Ej: *Hip. Continuo I*. Pueden ser superados con más *Poder Expr.*:

- *Ind. Transf.* : extensión de la *Dem. por Induc.* a grandes conj. *Bien Orden.* como los *Ordin.* [12]. Da más *Poder Expr.* para probar: Suces. Goodstein, Consist. *TAR* (Gentzen36, II *Tmas Goedel*)
- Transp. Ángulos: *C. Num. Constr.*

- Conjuntos: *Hip. Continuo I* (indep. de *Teoria ZFC*)
- Aritm.: aparece pronto la indecibilidad (*Matem. Recreativa*).
  - *Alg. Diof. X*:
  - Toda *Suces.* de Goodstein termina en 0 independiente de la semilla s. De los primeros problemas mostrados no decibles en *TAR* (junto con II *Tmas Goedel*). Paris1982 lo ha mostrado con *Ind. Transf.* [13]
- Geom.: **Teselacion** con Poliominomios Wang-Berger (IDEA: como vida-proteinas Mittal y Winfree [WikiListUndec.]). *V Postulado* (no indecible con respecto a los otros cuatro)
- *Topol.*: *Compl. Simplic. Homeomorf.*

[10] Mediante Tabla de Verdad un *Automata* puede comprobar en nº finito de pasos *NP* si una *FBF* es Tma *Tautol.*.

[11] si nos limitamos a fórmulas con menos *Poder Expr.*, ver *ATP*

[12] $1 < 2 < ..w < w+1 < .. < 2w < 2w+1 < .. < w^2 < w^2+w... < w^3 < ..w^4 < ... < w^w < ...$ Pueden w puede ser ∞ *Incontable*. No confundir con *Cardin.* que es para medir tamaños. Ver *Var. Estad.*. Ver controversia *Finit.*

[13] Ej: con $s = 266$, $B[2](266) \to B[3](266) - 1 \to ...$, vamos rascando 1. Op. Salto de Base (*Rel. Recurr.*): $B[2](266) = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2 \to B[2+1](266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$.

- Alg.:
  - P. Matr. Mortal (Mortal Matrix Problem): dadas 6 matrices (*A. No Conm. Matr. Cuadr.*) $A_1, A_2.., A_6 \in \mathbb{Z}_{3x3}$ dem. que $\exists$ combinación-0 (Nil*Potente*). Ver *Dom. de Integridad* Ej. $A_4A_2A_6A_4...A_5 = 0$ es indecible.
  - *Tma Richardson* (creo *Simpl. Alg.* pero no Exp.), *C. Num. Constr.* y *Teor. Galois*
- Anal.: *Tma Richardson* (ceros, integral)
- Prob.: *Proc. Decis. Markov* (*Dat. Perd.*).
- Log.: Func. Bussy-Beaver $BB(n)$ (Maq. *Turing* de tam. n (*TAI*) que produce la mayor cantidad de 1s y se para) o Num. Ω (aleatoria e incomprimible, no *Num. Comput.*) definible pero no *Turing*-Comp.. *Irreduc. Wolfram*,

33.9 Formalismo [Hilbert]: obj. resultado de reescribir, Mat=invent=juego, consist. rel. pto=silla=nº, (controv. limit. Goedel, no humanista) Platonismo: o. existen, Mat=descubre, ver=comprender en [Goedel], C [Penrose] (¿existe Pot. Irr. Rac.?, ¿que mundo es?). Tercero excluido: Pot. Irr. Rac. (dem. exist. r=i1(i2))

- *Formalismo* [Hilbert, Tarski, Bourbaki]: *Obj.* y *Tmas* resultados de manipular y *Reescr. Axiom.* pero no existen en una realidad. Mat.=invent.=juego (como Intuic. *Construct.*). Lo importante es la **Consist. Relativa** en *Sist. Formal*. Por eso pto esp.=silla=nº $\mathbb{R}$. **Controvertido** por: 1) **limitado por *Tmas Goedel* y *Compl. Inf. Matem.*** y 2) quiere eliminar a hombre (no es humanista). [14]
- *Platon.* [Goedel, Penrose]: creen que los los *Obj.* matemáticos existen en una realidad eterna no espacio temporal. Mat.=Descub. Los *Tmas Goedel* muestra el que se pueden crear (no se si aceptado por *Construct.*) proposiciones goedelianas P_i que el hombre "ve" que son V pero no el sistema. **Controvertido**: 1) existir $\neq$ constr. (ver *Pot. Irr. Rac.*), 2) ¿donde está ese mundo? [15]
  - *Tercero Excluido* : controvertido para *Construct.*: la refutación de la falsedad de un *Obj.* no significa que es posible hallar una prueba de su existencia. 1) $p = V \vee p = F$. 2) Dem. $p = V$ equivale a Dem. $\neg p = F$. Ej: *Pot. Irr. Rac.*

[14]
- Hilbert tras dem. la *Decib. Geom. Eucl.*. dice "si cambiamos, ptos, rectas, y planos por mesas, sillas y botellas la Geom. Eucl. sigue valiendo". Eucl. define pto como "aquello que no tiene partes" sin embargo casi nunca volvemos a ella.
- Tarski: la V de los Tmas es relativa a los *Axiom.* del *Sist. Formal* elegido. Ej: si cambiamos pto del esp. por pto de recta $\mathbb{R}$ los *Axiom.* de $\mathbb{R}$ son iguales a los de la Geom. Eucl. Abs. (sin *V Postulado*, [WikiAxSystem]).
- *Teoria ZFC* no pretende definir conj. si no como se relacionan. En *Alg. Abstr.*: ocurre lo mismo.

Después de *Tmas Goedel* $\nexists$ *Axiom.* como *Obj.* con significado. Ver proyecto QED en *ATP*.

[15] Luego la V es algo que está ahí fuera y el hombre la capta. "Comprender" (*Met. Polya*) no es mecánico Ej.-Penrose: los $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}$ al principio parecen *Obj.* inventados pero luego $\exists$ como en la *Cuantica*, *Creer en Ficciones*

”Dem. que $\exists\ a,b \in$ Irr. t.q. $c = a^b \in \mathbb{Q}$.“ Sabemos que $\sqrt{2}$ Irr. (fácil, *Raiz 2 Irrac.*). $c1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ puede ser la sol. pero dificil Dem. 1) Si $c1$ Rac. hemos terminado. 2) Si $c1$ Irr. $\Rightarrow c2 = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = 2$ (fácil) $c2$ es Rac. y hemos terminado. No da el num. solo dos posibles candidatos $c1, c2$ de los cuales alguno debe funcionar.

Ver *Princ. Inclusion-Excl.*, *Fuzzy* (*F. Indic.*), *Princ. del Palomar*

33.10 Constructivismo [Brouwer]: exist. si constr.(inf. pasos; V obj. S;S) (como num. c.). Intuicionismo: actividad mental (S;N) Finitismo: (N;N), algunos inf. pot. (controv. rechaza ind. transf., diag. Cantor o Tarski y ficciones (Hilbert guantes)). ATP y HoTT (check fund. 4 colores). Cuasiempirismo (evidenc.)

- *Construct.* [Brouwer]: un *Obj.* matem. existe si se prueba un método para construirlo (no basta probar que existe). Similar a griegos con *C. Num. Constr.* o *Filos. Digital*. Se originó por el uso abusivo del *Tercero Excluido* sobre todo a conj. Inf*Finit.* (ver *Pot. Irr. Rac.*). [16]. Incluye las formas Intuic. y *Finit.* (ver Tabla).

	$\exists$ *Obj.* de ∞ pasos; Verdad objetiva	Comentario
Construct. [Markov,Bishop1967]	S; S/N	Acepta $\exists$ *Obj.* si constr. (incluso en In*Finit.* pasos como prueba *Diag. Cantor* o num. *Trascend.*)
Intuic. [Brouwer1927]	S; N	*Obj.* resultado de activad mental pura, (Mat.=invent. *Formalismo*) [17]
Finit. [Kronecker1850, Goodstein, casi Wittgenstein]	N/S; N	Algunos admiten el Inf. Pot. (ver)

Sospechan que los *Obj.* no *Eviden.* creadores de problemas como: a) *Red. al Absurdo* [WikiIntuic.], b) *Tercero Excluido*, c) In*Finit.* Actual y d) *Autorref.* . ([WikiLógicaIntuicionista]).

[16] Ej: Brouwer no acepta como *Prop.* V ”La conj. *Goldbach* es F o V“ pues puede no tener sol. con en *TAR*. A Ramsey no le gustaba, ver *Tma Amistad* y *Princ. del Palomar*

[17] $\nexists$ si no pensamos en ellos. No creen en el conj. ∞ de $\mathbb{N}$ porque no hay *Eviden.*. Intuición por lo vago del concepto de V (los pasos de un prop. a otra son creencias [WikiDefMathem] mientras que Construc. puede creer en la V. externa como *Platon.*. Log. Intuic. (la clásica sin *Tercero Excluido*), Ver *Teor. Tipos Intuic.*, *Incert. Fisic.* [Gisin], *Creer en Ficciones*

- *Finit.* : rechaza el uso en las matemáticas del Infinito (en general) ”Dios creó los números naturales; el resto es obra del hombre“. Algunos admiten el Inf. Potencial [18]. Nace en respuesta al abuso de la *Diag. Cantor* para probar resultados (entre ellos *Tmas Goedel*. **Controvertido** por lo que rechaza:
  - Uso de *Ind. Transf.*: útil para resolver *Probl. Indecib.* como el de Goodstein y otros *Obj.* [19]
  - Poder de *Creer en Ficciones*: Hilbert [20] Ver *Cardin.*, *Ordin.*
- *ATP* (Wolfram *Log. Ec.*) y *HoTT* (*Fund. Matem.* y Checkeo): *Construct.* revivido actualmente [21]
- *Cuasiempirismo* (*Epistem.*): trabajarlas como la Física, de forma no correctamente organizada (topsy-turvy), intuitiva e experimental. Buscar *Eviden.* y luego demostrar. Fe Matemat: los matemáticos hoy en dia o bien trabajan sin *Axiom.* (cuasiempirismo) o si lo hacen creen en la consistencia de *TAR* de Peano o de la *Teoria ZFC* (su sistema preferido). Ej: Wolfram-Bitcoin para demostrar hechos matemáticos (primos gigantes). Ej: *Conj. de Birch*.
- *Def. Matem.*: no clara

33.11 (*) Demostración Automática y Metabiolog.

- *ATP* (Automated Theorem Proving): por los *Tmas Goedel Dem.* es un ”arte“ mientras que la **verificación** formal (chequear o testar o comprobar) de que una demostración es correcta es ”mecánico“ (*Turing* Comp. gracias a Dem. Asistida Comp. o *Correspond. Curry-Howard*): *Eviden.* $\neq$ *Dem.*. Ver *Calculus Ratiocinator*
  - *Eviden. Estad.* $\neq$ *Dem.* o *Tautol.*: *Sentenc.* o hecho comprobado de forma experimental, pero rompible con un *Contraej.*. Dijkstra dijo: ”Testear (para unos cuantos parámetros un programa) puede servir para encontrar bugs pero nunca para mostrar su ausencia“. Hay hechos inesperados incluso en Python-sort que pueden hacer caer un avión). Ej: [StackExchangePatternEventFails] 1) Φ_{105} 1er pol. *C. Ciclotomico* con coef. no en $\{-1,0,1\}$. 2) $p(n) = n^2 + n + 41$ da primos hasta $n = 41$. 3) Si $n = 561$ (Carmichael) falla *Test Primalidad* en *Peq. Tma Fermat*. Ver *Tma Num. Primos*, *Goldbach* [Baez18,Mimram20pg11], *Num. Normal*, *Test Primalidad*,*P. Amanecer-Pavo Cuasiempirismo Epistem.* e *Interpr. Prob.*.

[18] solución propuesta por Aristóteles a medio camino entre el Finito y el Inf. Actual. (Cantor). Ej: admiten ”todo num. tiene suc.“ el significado de *Serie*, *Esp. Hilbert*, *Num. Comput.* o los resultados del *Anal. Num.* pero no ”el primer nº transfinito *Contable* es $\aleph_0$“. Pensar en la diferente interpretación de $\lim_{x\to\infty} 2x - x = \infty$

[19] No *Num. Comput.* $\mathbb{R}$ (nº con ∞ dígitos, *Incert. Fisic.* [Gisin]), Ω, *Par. Banach-Tarski*, *Conj. Vitali* o *Hip. Continuo I* son Obj./conjuntos (del Espacio Euclideo No-*Med. Lebesgue*) dem. que $\exists$ ¡pero construibles en ∞ pasos (=no costruible)!

[20] creía que cualquier *Obj.* (Tma) basado en ∞ podría *Reescr.* luego con finitos [WikiFinitism]. Le gustaba el Inf. (*Esp. Hilbert*). Dijo: "Quitar el Principio del *Tercero Excluido* a un matemático, seria lo mismo, a quitar un telescopio a un astrónomo o los guantes a un boxeador, prohibir la existencia a enunciados y el principio de exclusion es equivalente a renunciar a toda la ciencia de las matemáticas."

[21] (realizabilidad en pruebas de Kleene). La desventaja de perder el ∞ se compensa en hacer más computacional y entendible conceptos como *Topos* o *HoTT*, *ATP*..

- Prueba Asistida por Ordenador, lenguajes y proyectos:
  - *Tma 4 Colores* (1976, Coq 2005), Alg. Robbins=*Alg. Boole* (1996) Conj. de Kepler (1998, Isabelle), N^o de Rubick=20 (2010), Tma de Orden Impar (previamente dem. con muchas pg. pero en 2012, Coq-verificado, INRIA).
  - Proyecto *Formalismo* QED [1994]: pretende crear una *Base Datos* de Tmas *ATP* verificados, pero casi detenido por complejo. El proyecto Mathematical Knowledge Management pretende con IA facilitar el uso de Tmas. También MathML (webs).
  - Proyecto Xena [Buzzard+alumnos, 2017]: escrito en Lean (Microsoft) (mejor que Coq) muestra la *Consist.* de todos los *Tmas* de la carrera de Matem. del Imperial College.
  - IMP Grand Challenge [Selsam2018]: dado un problema de las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas en lenguaje Lean, resolverlo automáticamente
  - **Modularidad de las Matem.** [Buzzard]: entendemos el resultado o *Tma* pero no la *Dem.* y lo usamos para Dem. otros. Las pruebas de Matem. doctorales con más de 1000 paginas como el *Tma Fermat* o Tma de Orden Impar, necesitan implementarse por especialistas (no por estudiantes) pues nadie las entiende en su totalidad y podrían estar equivocadas (pero no hay fondos).

- *Log. Ec.* ecuacional [Gorard]: *Log-1* con *Sentenc.* sin cuantificadores y con *Igual* $=$ como único símbolo predicado. Tiene menos *Poder Expr.* pero gana en Metateoría. Era parte del Alg. Univ. (*Alg. Abstr.*) y luego de Teor. *Categ.* [Lawvere *Topos*]. Su *ATP* Wolfram se llama FindEquationalProof(thma,axioms) usando 4 o 5 *Regla Infer.*: reflex. simetr. trans. sustit. junto con el *Reescr.* Knuth-Bendix o Tma Church-Rosser. También AxiomaticTheory(theory) (*Reescr.* operadores).

- *Log-1* con menos *Poder Expr. Decible*:
  - Fórmulas *Log-1* con un solo argumento (ver *Tmas Goedel*)

WikiEntechidungProblem Aritm. Presburger ($x+3-y-2-y=x+1$ ec. con = y +, sin *) o de Skolem (con *, Robinson o EFA (casi toda la Matem.) no por tener Anal. *Ordin.* w y w^3), Cuerpos Cerrados Reales (*Decib. Geom. Eucl.*), y Sistemas de tipos estáticos de muchos lenguajes de program. (*Teor. Tipos*).

  - *MLN* (Markov Logic Network): ver Fig. 33.1 intenta juntar *Aprend. Autom.* con *ATP*
  - Ej. *Sist. Formal* ESO

- *Correspond. Curry-Howard* : Prueba=Programa (=*Categ.* incluso) es un *Isomorf.* más que *Igual*: las Demostraciones pueden ser vistas como Programas de Ordenador (en Coq) y pueden ser lanzadas y verificadas. De forma similar al *Anal. Dim.* se puede automatiza la Verificación Formal o de Tipos (*Teor. Tipos Intuic.*). "Pronto o temprano la Dem. Asistida Comp. (*ATP*) será la norma" [Voedosky14]. Ver *Dem. y Tmas son Rec. Enum.*

- Aplic. Inesperadas: las controversia filosófica ha tenido implicaciones como el origen de los ordenadores (Neumann vió la importancia de Göedel y Turing) o incluso el ADN y la Metabiología [Chaitin] [22].

[22] En Linz generan fármacos convirtiendo las fórmulas moleculares en lenguaje de calculadora

33.12 (*) Fundamentaciones de las Matemática

Fund. Matem. : teoría que define toda o casi toda la Matemática y evita *Crisis Matem.*. Los tres tipos principales son:

- *Teor. Conj. Teoria ZFC*: su estandard revisada por [Bourbaki1935] y usada como base para crear su templo.

- Teor. *Categ.* [Eilemberg42,Grothendieck]: extensión del *Alg. Abstr.*. Lo importante no es la $\exists$ de *Obj.* matemáticos (conjuntos...) si no la relación entre ellos. Una Categ. C es un *Diagr. Conmut.* (*Digraf.* que puede ser escrito en *Diagr. Hasse*) compuesto por:

  - *Obj.* y *SubObj.*: vértices.
  - *Morfism.* : arco (ver *Teor. Represent.*) debe cumplir 1) Ident.: $\forall A \in Obj(C) \exists Id$ (Para todo Obj. de la Categ. existe un Morf. similar a la Ident., compuesto por izda o dcha igual cualquier otro Morf.). 2) Compos.: $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C \Rightarrow A \xrightarrow{f \circ g} C$. 3) Comp. Asociat. Los *Homomorf.* son el caso más típico pero se generaliza a cuando no son *EA* o no tienen un conjunto. En Fig. 33.1 podemos ver significado de arcos [23]
  - Funtor: F. que transforma Obj.s y Morf.s entre dos Categ. de manera que se preservan la compos. de Morf. Similar a *Homomorf.* y *Isomorf. de G.*. *Lema Yoneda* [24]

  Ej: *Compl. Caden.* (*Tmas de Isomof.* y *G. Homolog.*)

  Ej: La Categ. de Conj. (obj.=Conj. y morf.=Funciones), de *Grupo* o de *EV*. Ej: La TC Lógica equivale a la *Teor. Tipos Intuic.* según [WikiYYoutubeProgramWithMath min.13] y a los *Topos*. Ej: Un algor. que transf. dato entrada en salida es la composición de algor. más simples. En programación los Obj. son los tipos (salidas de las funciones) y los Morf. las funciones que se componen.

- Fundament. *Construct.* basada en la *Teor. Tipos*:

  - *Teor. Tipos Intuic.* Martin-Loef1972: es una *Teor. Tipos* que usa Tipos Dependientes que es similar a usar cuantificadores universales sobre *Log-0* dando la *Log-1*. Esto es la *Correspond. Curry-Howard*. Desarrollada por Coquand99 (Agda), UlfNorrel08 (Agda2) y Altenkirch (Cubical-Agda)
  - *HoTT* (Teor. *Homotop.* de Tipos o Fundación Univalente): Voedosky13 (HoTT). Basada en *Teor. Tipos Intuic.*+Homotopia. Su único Ax. de Univalencia "tipos *Equiv.* son idénticos" (*Igual*). Usada para a) Verificar Dem. (*ATP*) y b) Nueva Fundam. y perspectiva debido a la homotopia. A Poincare le gustaría "Las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a diferentes objetos".

  La TC requiere un sistema separado debajo de ella como la *Log-0*. En TT conceptos como Y, O, NO pueden ser codificados como tipos también. Algunas TT son casi TC (*Topos*)

[23] ej. si arco rayado significa que el morfismo $\exists$ cuando se cumple el resto del diagrama y la tilde $\tilde{h}$ que es *Isomorf.* Ej: 1er *Tmas de Isomof.*

[24] nos permite sumergir una categoría en otra categoría de funtores, es una extensión del *Tma de Cayley*

*Topos

- *Topos* [Baez]: Categ. (Teor. *Categ.*) con ciertas restricciones que unifica Lógica y Geom.. Veamos dos conj. de restricciones equivalentes:
  - A) $\exists$ todos los lim sobre categ. indexadas. B) cada obj. tiene similar al *Conj. Potencia*)
  - A) Limitada finita. B) Exponencial. C) Clasif. de *SubObj.*.

  Da las últimas restricciones podemos afirmar que la Categ. Topos tiene los siguiente obj.:
  - A) 1) Ident.: o inicial como el . 2) Termin.: como el conj. con 1 element. 3) Co/Prod. binar.: como la union disjunta/Prod. Cartes. de conj. 4) Co/Igualador: como el Conj. Cociente (de elem. relacionado)/Subconj. (de sol. de un sist.)
  - B) Expon.: X^Y como el conj. de funciones $f : X \to Y$
  - C) Clasif. de *SubObj.*: Ω $f(X) :\to \{0,1\}$ como def. de subconj.
- Diversidad: hay muchos tipos, unos más matemáticos y otros más fundacionales. Los iniciales fueron los T. de Haces de Grothendieck1960 (equipados con cierta topología, para hacer *Geom. Alg.* y Conj. Weil) y los T. de Conj. de Lawvere1970 (para hacer *Teor. Conj.* con Categ. y *Log. Ec.*). Otros:
  - Matemát.: 1) T. G.-Acción (permite trabajar solo con conj. y F. compatibles con ese Grupo). 2) T. Prehaces $hom(C^{op}, Set)$ donde C es una Categ. (si es $C =$*Orden Total* finito=conj. simplicial=*Digraf.* multidim.), si $C =$Haz es de Grothendieck).
  - Fundac.: 1) T. *Construct.* (si eres *Construct.* y solo quieres F. *Turing*-Comp., ¡el ∞ no está incorporado en los T.!). 2) T. donde el *Ax. Eleccion*, *Tercero Excluido* o el ∞ de $\mathbb{N}$ no se dan y otros donde si. Esto crea diferentes Sist. Formales. La verdad de una fórmula depende de "donde (topos)" esté (no objetiva).
  - Vida real [CaramelloTED]: puente que une distintas teorías similares [25]

*Jerarquía de Chomsky: autómatas y monoides

El Conj. de Programas bien escritos en Python es *Turing*-Comp. y por tanto *Decible*, existe forma de decidir si una combinación de símbolos es una *FBF* (compilador=autómata).

- *Gramat.* : conj. reglas que indican como crear *FBF*. Ej: *Log-0* Asociativa $Prop = (Prop + Conectivas + Prop)$. En *Log-1* sus Tmas son las *FBF*. Ver *Mod. Lenguaje*. Ver *Poder Expr.*

  Su reconocedor (reg-exp, Fig. 33.1) se puede perder en el Inf (ver abajo). Si probabilístico los enlaces tienen peso. Es una *Tupla* $G = \{V, S, R, s\}$ donde V: símbolos terminales, alfabeto $(a, b, , ..)$. S: símb. no terminales $(A, B, ..)$. R: reglas $Aa \to aBb$. S: simb. comienzo INI.

[25] Ej: algoritmo representado en dos lenguajes diferentes, el ADN entre hombre y ratón (más que), el Sol entre los planetas del sistma (más que la Tierra de Ptolomeo), el significado entre la misma frase en dos idiomas (más que la traducción literal de diccionario)

- *Automata* : los más complejos son las Maq. Turing y los más simples los que tienen n^o finito de estados. Los más simples son la *Log-0*, Fig. 33.1. Otros maq. Moore y Mearly de sist. secuencial. Sist. Dialogo *Encuest.*

- *Monoide* : *EA* con *Clausur.*, asociativa, neutro. Es un *SemiG.* unitario o G. sin inversos. Ej: Mult. de Matrices $(A*B)x = A*(Bx)$=Composic. de funciones $f(g(x)) = (f\dot{g})(x)$=Mult. de $\mathbb{N}$ $ab(c) = a(bc)$.

  - *Clausura Kleene* , Estrella Kleen o Monoide Libre: V^* de un conj. V es el conj. más pequeño (∞, *Clausur.*) cerrado bajo concatenación de sus elementos y que contiene al vacio (similar a *Clausura Alg.*). El V^+ es igual pero sin el vacio). Ej: si $V = \{ab,c\} \Rightarrow V^* = \{\varepsilon, ab, c, abab, abc, cab, cc, ababab, ababc, abcab, abcc, cabab, cabc, ccab, ccc, ...\}$. Ej: En Expr. Reg. $V^* = \{ab*c\} = \{ac, abc, abbc, abbbc, ...\}$ y $V^+ = \{ab+c\} = \{abc, abbc, abbbc, ...\}$. Los Lenguajes tipo-3 son los aceptados por una Expr. Reg. o *Automata* Finito.

  - Descomposición Krohn-Rhodes: de un Automata Finito (Fig. 33.1) en semi/gr. aperiódico/simple finito sorprendentemente mostró que los monoides (a pesar de su débil axiom.) podian presentar teoremas de estructuras. Descomposiciones similares se han aplicado a la Teor. *Categ.* por su relación con Monoides.

*Definición de Matemáticas. Teorías Unificadoras y bibliografía

- *Def. Matem.* : no está claro y hay varias [WikiDefMath] :

  - Areas: 1) Estudio de los número y las formas. 2) Estudio deductivo de entes abstractos ideales (n^{o}s, figuras, símbolos y relaciones) y aplicada..

  - Aplicadas: El lenguaje de la naturaleza [Galileo] *Wigner*. 2) La Inform. es a la Biol. lo que las Mat. a la Fis. [Morowitz]

  - Axiomat.: 1) Disciplina del rigor basada en la axiomática [Euclides]. 2) La búsqueda de pautas [Feyman]. 3) Conjunto de lenguajes formales que pueden ser usados como herramienta para plantear problemas de manera no ambigua en contextos específicos

  - Límites: Estudio de lo imposible

  - Modernas: Arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes [Poincaré]

- *Teor. Unif.* [Wiki]:

	Aritm.	Geom.	Alg.	Anal.	Prob.	Log.
Aritm. [26]	1	1	1	1	1	1
Geom. [27]	*Progr. Langland Teor. Represent.*	1	1	1	1	1
Alg. [28]	*Clausura Alg.* (qué $\mathbb{K}$ sol.)	*Geom. Alg.*, *Pr. Erlangen* (*Topol.*)	1	1	1	1
Anal. [29]	*Progr. Langland* (*Hip. Riemann VIII*, *Funcion-L*)	*Geom. Dif.*, *Anal. Vect.*, *Geom. Anal.*	*Anal. Funcional* (*Laplace*, *Fasor.*), *Anal. Num.* (*Teor. Galois Forma Cerrada*, *Metodo Iterativo*). *Esquema*	1	1	1
Prob. *Estad.* [30]	*Tma Num. Primos*	*Geom. Inform.*	*Sist. Sobredet.* (*SVD*, *Regr. Lin.*) *Alg. de VA Cuantica PCA*	*FGM* (*Laplace*), *SGD*, Teor. *Medida*	1	1
Log. [31]	*Tma Matiyasevich*	*Topos* (*Geom. No Eucl.* como *Sist. Formal*)	*EA Alg. Boole*	*Rel. Recurr.*, (Derivadas como *Sist. Formal*)	*Prob. Axiom. Infer. Solomonoff Mod. Estad.* (*LSTM* para *Estoc.*)	1

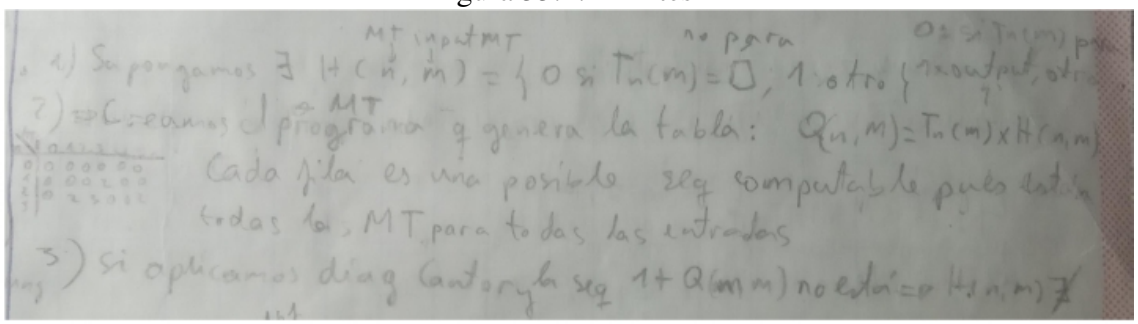
Concep. Unif.: *Rel. Recurr.*, *TAI* (simplicidad), *Clausur.*, *Dual*, *Forma Cerrada*, *Probl. Inv.*, *Invest. Operat.*, *Rel. Binaria*

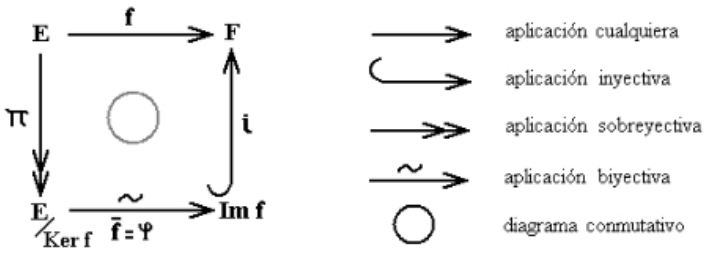
- Bibiografía ([HowToLearnPureMath]):

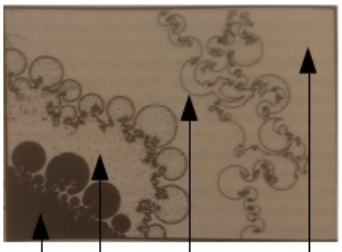
[26] griego, arithmos+tecni = nº+arte
[27] griego, geo+metro = tierra+medida
[28] polin.+sist. ec. (árabe, al-jabr= recomposic. = combin. de símbolos)
[29] deriv.+int.
[30] latín, aprobable; alemán, estado
[31] griego, argumentativo, palabrativo

Aritm.:	
Geom.:	Bachman-GeomApproachDiffForms
Alg.:	Axler-LinearAlgDoneRight, Friedberg-LinearAlg, Su-TopologyTroughInquiry, Gallian-ContemporaryAbstrAlg
Anál.:	Abbott-Understanding(Real)Analysis Zill-DiffEqWithBoundary Needham-VisualComplexAnal
Prob.:	
Lóg.:	

Figura 33.1: Límites

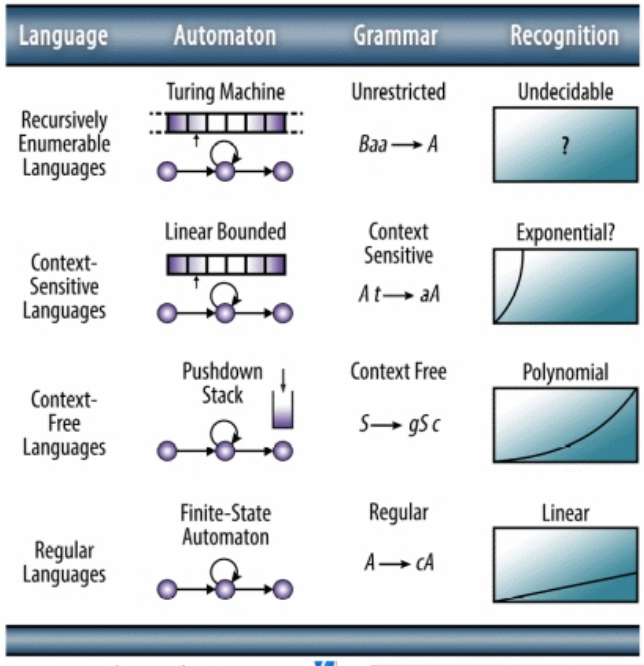


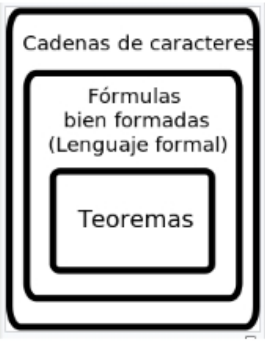




EJ. DE LOG-2

- (A) Tmas siples: prop. tipo Exist w,x,...,z:[f(w,x,..z)=0], - Rec. Enum. (RE)
- (P) **Tmas**: prop. Dem. (RE) (=FBF en Log-1)
- (T) Prop. Verdaderas: (no RE)
- (N) **FBF**
- (*) **Cadenas de caracteres**:





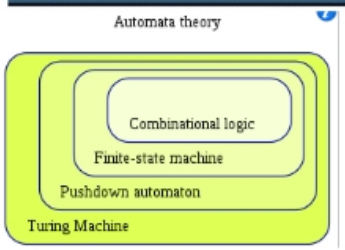


Table 1. Examples of logical and statistical AI.

Field	Logical approach	Statistical approach
Knowledge representation	First-order logic	Graphical models
Automated reasoning	Satisfiability testing	Markov chain Monte Carlo
Machine learning	Inductive logic programming	Neural networks
Planning	Classical planning	Markov decision processes
Natural language processing	Definite clause grammars	Probabilistic context-free grammars

Chapter 34

Fórmulas en problemas

34.1 Tablas

34.1.1 Figuras

- Circunferencia: $P = 2\pi r$ $A = \pi r^2$. Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $A = \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi r^2$, área lateral de un cilindro que contiene a la esfera. Piramides y Cono: V=1/3 del paralelipedo que los contiene (ver P. Mixto)

34.1.2 Trigonometría

	cos	sin
0	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$
30	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
60	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
90	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$

- $sin(\alpha \pm \beta) = s\alpha c\beta \pm c\alpha s\beta \Rightarrow s2\alpha = 2s\alpha c\alpha$
  $cos(\alpha \pm \beta) = c\alpha c\beta \mp s\alpha s\beta \Rightarrow c2\alpha = c^2\alpha - s^2\alpha$
  $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{t\alpha \pm t\beta}{1 \mp t\alpha t\beta}$
  $sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$ (para integrar)
  $sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ y $cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
  $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $c^2 + s^2 = 1$

34.1.3 Derivadas

$f(u(x))$	$f'(u(x))$
$\log\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}+k$
$x\log x - x$	$\log x$ (int. por partes)
$arcsin(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (*Deriv.* F. Inv. y s2+c2=1)
$arccos(u)$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$arctg(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$arccotg(u)$	$\frac{-u'}{1+u^2}$

34.1.4 Series

- $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$

34.2 Aritmética

- Divisibilidad:
  - *Suma Div.*, *Peq. Tma Fermat* a y p coprimos!
  - MCD.mcm=N (*Div. Eucl.*) *Alg. de Euclides* para *Ec. Diof.* (polin. también)
  - No eliminar D en $\frac{D.a.b}{D(a+b)} = \frac{p_1p_2p_3p_6}{p_1p_4p_5p_6}$ pues ayuda a restringir sol. $D = p_1p_6 \Rightarrow$ resto para $a.b$
  - Si Dem. $m|n$ descomponer $m|n_1$ y $m|n_1$
- Id. Notables: buscar $(algo+1)(algo-1)$ (obviar info??). Paridades $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$??
- *Suces.*: Frac. Generatriz *Pr. Geom.*
- *Ec. Diof.*
  - Lineal con C grande: Ej. $3x+7y=1780$ 1) Sol. part. de Bezout $3x+7y=1 \Rightarrow (x_0,y_0)=(-2,1)$ 2) Multiplicarla por C $x=7t-3560, y=-3t+1720$
  - *Ec. Diof.* dif. cuadrados y polin. en una var..
- *Congr. Pol.*: si $n^2 = a \pmod b \Rightarrow n = \pm\sqrt{a} \pmod b$ (ojo, 2 sol.)
- Paridad y consecutivos:
  - Si consecutivos $n(n-1) = dot(2^3 5^3) \Rightarrow$ 1) Si n par, $n-1$ impar. $n = \dot{2^3}$ y resolver. 2) Si n impar, $n-1$ par. $n = \dot{5^3}$ y resolver
  - El prod. de n consecut. es div. por $n!$: Dem. a) $1|m$ claro. b) $2|m(m+1)$ pues o div. a m o a $m+1$. c) $3|m(m+1)(m+2)$ idem.
- *Dem. por Induc.*: Truco de la Dif. Dem. $A_n = \dot{a} \iff$ Dem. $A_{n+1} - A_n = \dot{a}$

34.3 Geometría lineal

34.3.1 Vectores, puntos y productos

- Vector Director: $\vec{AB} = B - A$
  Vector Perpendicular $(x,y) = (y,-x)$ o $(-y,x)$[1]
  Pto Medio: $M = (A+B)/2$ (comb cvx para otras coord intermedias T17). Pto Simétrico: P' de P con respecto a centro Q: sacar P' visto desde Q y tomar su negativo [2]
  B conocido A y $\vec{AB}$: $B = \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = A + \vec{AB}$

- Producto Escalar: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\theta = u_v$ (proyección de u sobre dirección v). Desigualdad Cauchy–Schwarz: $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (para probar desigualdades, ej. invent $\vec{u} = (a,b,c)$ and $\vec{v} = (b,c,a)$ then $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$

- Producto Vectorial: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\begin{pmatrix} i & j & k \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}| = |\vec{u}||\vec{v}|sin\theta$ = area del paralelogramo (ver Area Triangulo). Para 2D basta hacer los $z = 0$. Es un v. $\perp$ al plano $\vec{u}, \vec{v}$ plano de sentido Regla Mano Derecha. Anticonmutativo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Ej: Área triángulo. Ej: Momentos [3]

- Producto mixto: Volumen del paralelipido=$\vec{u}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = |\vec{v} \wedge \vec{w}||\vec{u}|cos\alpha = A_{base}h$ donde h es la proyección del $\vec{u}$ sobe $\vec{p} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ (v. $\perp$ a la base)

34.3.2 Ec. de rectas/planos y v. perpendicular

- Hay tres tipos de ecuaciones:

	Recta en 2D	Plano en 3D
Vectorial o paramétrica	$(x,y) = P + \lambda\vec{u}$	$(x,y,z) = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
Continua (para cambiar a normal)	$K = \frac{x-P_x}{u_x} = \frac{y-P_y}{u_y}$	Sist. Param. $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-P_x \\ y-P_y \\ z-P_z \end{pmatrix}$
Normal, general, homogénea o completa. Explicita (si despejas una incog). Implicita o cartesiana (no)	$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$ ($\|\begin{pmatrix} u_x & v_x & x-P_x \\ u_y & v_y & y-P_y \\ u_z & v_z & z-P_z \end{pmatrix}\| = 0$, de hacer CD el Sist. Param.) [4]

- El v. director normal ($\vec{n}$) o pendiente perpendicular ($m_\perp$): Tg Ec. Normal: De recta en 2D es $\vec{n} = (A,B)$. De plano en 3D es $\vec{n} = (A,B,C)$
  Tg Regla de la Cadena: De cualquier curva 2D paramétrica (no necesariamente en polares) $(x(\theta), y(\theta))$; la recta tangente $y = mx + n$ tiene como pendiente $m = tg(\alpha) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$.
  Tg Inversa: La recta perpendicular $r_\perp : y = m_\perp x + n_\perp$ a $r : y = mx + n$ tiene $m_\perp = -1/m$ y $n_\perp$ sale de añadir pto de paso.

[1] pq $(x,y).(y,-x) = 0$ y $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+(-x)^2}$
[2] $QP = (0,1,3) \Rightarrow QP' = (0,-1,-3) \Rightarrow OP' = OQ + QP' = (1,1,2) + (0,-1,-3) = (1,0,-1)$
[3] M. Angular $L = r \wedge mv = r \wedge p$. M. de Fuerza $M = \frac{dL}{dt} = r \wedge F = I.\alpha$ donde I tensor de inercia y α aceleración angular (como L. Newton)
[4] $rg(M_{ampliada}) = 2 \iff |M_{ampliada}| = 0$, *Det.*. También sirve transpuesto

34.3.3 Distancias y ángulos en espacio

- Dist. pto-plano: $D(P,\Pi) = |\vec{P_rP}.\hat{n}| = \dfrac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ [5]. Otra es: recta $\perp$ al Π, pto + dist.

- Dist. Pto-recta: $D(P,r) = |\vec{P_rP} \wedge \hat{u_r}|$ [6]. Otra es: inventar $a(\vec{\lambda}) = |P - r(\lambda)|$, con $a(\vec{\lambda}).\vec{u_r} = 0$ sacar λ, pto en $\vec{r}$ de corte y medir $|PP_{corte}|$
  (*) En 2D: $D(P,r) = |\vec{P_rP}.\hat{n}| = \frac{|Ax_p+By_p+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (similar a anterior). La bisectriz de dos rectas es el *Locus* de los puntos equidistantes [7]

- Dist. recta-recta: $D(r,s) =$ Ec. vect. $\vec{r}(\lambda)$ y $\vec{s}(\mu)$. V. director genérico $\vec{rs}(\lambda,\mu)$. Sacar λ_0 y μ_0 (v. $\perp$ a las 2 rectas) t.q. $\vec{rs}(\lambda_0,\mu_0).\vec{u_r} = 0$ y $\vec{rs}(\lambda_0,\mu_0).\vec{u_s} = 0$. Medir distancia $|\vec{rs}(\lambda_0,\mu_0)|$ [GuzmanPg126]

- $Angulo(\Pi_1,\Pi_2) = \frac{|n_1.n_2|}{|n_1||n_2|}$

34.4 Geometría de figuras

34.4.1 Triángulo

- Ptos Notables del Triangulo: Incentro: C de cicunf inscrita (interior) (ver Area)
  Baricentro: C de masas. A $\frac{2}{3}$ del vertice a $\frac{1}{3}$ del lado opuesto (dibujar t. rectang para recordar)
  Circucentro: C de circunf circunscrita (exterior). En triang. rectang. C en mitad de hipotenusa
  Ortocentro: incentro del subtriangulo.
  (*) Recta de Euler: baric, ortoc y circuc. (medianas, alturas y mediatrices)

- Las 3 Areas: a) Clásica: $\frac{bh}{2}$. b) Prod. vectorial: $\frac{a.b.sen(\alpha)}{2}$ (semiprod de dos lados por seno ang forman). c) Circucentro: $Area = r.semiperimetro$
  Las 3 Desigualdades: $\exists$ triang. si cualquier lado menor que suma de los otros dos $a < b+c; b < c+a; c < a+b$. Par Dem. desigualdades

- Triang. Inscrito en Circunf: si un lado es el diametro $\Rightarrow$ t. rectángulo [8]

- Tma del Coseno: extensión de Pitagoras $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$
  Tma de Tales: si trazamos paralela a un lado $\Rightarrow$ triangulo semejante (con igual forma o lados proporcionales) i.e. $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

[5] Si el v. unitario normal al plano es $\hat{n} = \frac{(A,B,C)}{|(A,B,C)|}$ y un pto cualquiera es $P_r = (x,y,z)$, la distancia es la proyección del v. $\vec{P_rP}$ sobre $\hat{n}$: $d = |\vec{P_rP}.\hat{n}| = |\frac{(x_p-x)A+(y_p-y)B+(z_p-z)C}{|(A,B,C)|}|$

[6] Si el v. unitario director de la recta es $\hat{u_r} = \frac{\vec{u_r}}{|\vec{u_r}|}$ y un pto cualquiera de la recta es P_r, la distancia es la altura h del paralelogramo: $d = h = \frac{A_{paralelo}}{base}$

[7] $\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ sale ec. recta

[8] Dado que $x = \frac{arc(AB)}{2}$ (ver Angulos de 2 Cuerdas) y $arc(AB) = \pi \Rightarrow x = \pi/2$

34.4.2 Circunferencia

- Ángulo de 2 Cuerdas: (ver Fig.) si las cuerdas intersectan sobre la circunf. $\Rightarrow x = \frac{arc(AB)}{2}$ es cte, no depende del lugar de intersección
- La tg a circ. forma un ang. $\perp$
- Curvatura de una curva: $K = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ (ver T47)
- Potencia de un Pto $P(x_p, y_p)$ respecto a Circunf. $Circ((a,b),r)$: prod. de los 2 segmentos de corte a la circunf. que pasan por P. P puede ser interior o exterior a la circ. Es un valor cte independiente de la recta elegida $Pot = r^2 - d^2 = PA.PB = PC.PD$ (ver Fig.). En func. del P y $Circ$ sale $Pot(x_p, y_p) = (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 - r^2$.
  Eje Radical de dos Circ.: *Locus* de los puntos con igual potencia respecto de las mismas. Si reescribimos para cualquier pto$Pot(x,y) = x^2 + y^2 + mx + ny$ y $Pot(x,y) = Pot'(x,y)$ el eje es la recta $r : (m - m')x + (n - n')y + p - p' = 0$. Pto Radical el corte.

  Fig. 34.1

34.4.3 Poligones

- Poligono regular: Area: dividir en subtriangulos $A_n = P.a_p/2$ donde a_p apotema ($\approx$ altura). N^o de diagonales $= \frac{n(n-3)}{2} \neq$ n^o aristas grafo completo $= \binom{n}{2}$
- Pentágono: ver T29
- Cuadrilatero (cometa): $A = \frac{d_1.d_2}{2}\sin(\theta)$ semiproducto de diagonales por seno angulo que forman

34.5 Geometría de Cónicas

- ver T54

34.6 Geometría de transformaciones

34.6.1 Transformaciones en 2D

Fig. 34.1 ((a) Centro del giro con mediatrices. (b) Eje deslizamiento con Paralela Media (ptos medios)) Ver *Transf. en Plano C*, *G. Semejanzas*

- Homotecia: transforma círcunferencias en círcunf. Ej: ver Fig. $A'(0,0), B'(0,m)$. **La Razón** $|k| = \frac{d(A',B')}{d(A,B)} = 1 \Rightarrow k = \pm 1$. Tomaremos $k = 1$ (sem. directa o indirecta), si tomasemos $k = -1$ sería Simetría Central.
- Semejanza directa:
  - Traslación: debe cumplir **V. Trasl. Iguales** $\Rightarrow$ no lo es pues: $\vec{AA'} = (0, -2m) \neq \vec{BB'} = (m, -m)$

- Giro: El centro C sale del **Corte de las Mediatrices** AA' y BB'. El ángulo θ viendo cuanto gira un punto. Sol: $G(C=(m,m),\theta=\pi/2)$.
- *Simetría Central: equivale a un giro π.
- *Composiciones $G\dot{T}$: ver Sol. con $\mathbb{C}$.

- Semejanza inversa:
  - Simetría Axial: reflexión sobre eje. Debe $\exists$ **eje** $\perp$ **a V. Trasl.**. No lo es pues $\nexists$ eje $\perp$ a $\vec{AA'}$ y $\vec{BB'}$.
  - Simetría Deslizante: reflexión sobre eje e y traslación $\vec{v}$ en dirección de ese eje. El e sale con truco de la **Paralela Media** [9] como direc de e y $\vec{t}$ coinciden $\Rightarrow e$ pasa por $\frac{\vec{AA'}}{2}=(0,m)$ y por $\frac{\vec{BB'}}{2}=(m/2,m/2)\Rightarrow e: x+y=m$. El $\vec{t}$ sale tomando un pto $B\to B'$ y obligando igual dirección e. Sol: $SD(e: x+y=m,\vec{t}=(m,-m))$

Solución con $\mathbb{C}$:

- Sem. Directa: $f(z)=az+b$. **Resolver Sist.** $\begin{cases}0=a(0+2mi)+b\\ m=a(-mi)+b\end{cases}\Rightarrow f(z)=iz+2m$, como $i=e^{i\pi/2}$ ¡es una composición de giro y traslación $G((0,0),\pi/2)\dot{T}((2m,0))$!. Pero esto equivale a un solo giro, cuyo centro sale con truco del **Pto Invar.**: $z_c=f(z_c)=iz_c+2m \iff z_c=m+mi\Rightarrow$ Sol: $G((m,m),\pi/2)$

- Sem. Inversa: $f(z)=a\bar{z}+b$. **Resolver Sist.** $f(z)=-i\bar{z}+2m$ que equivale a una Sim. Desl. cuyo eje $z=x+iy$ y trasl. $v=(v_x+iv_y)$ salen con truco del **Eje Invar. Trasladado**: $z+v=f(z)=i\bar{z}+2m \iff (x+yi)+(v_x+iv_i)=-i(x-iy)+2m \iff 2m-v_x=-v_y \iff ...??...\Rightarrow$ Sol: $SD(x+y=m,(m,-m))$.

34.7 Álgebra Matrices

34.7.1 Matriz inversa y diagonalizable

- M. inversa: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{adj})^T=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}+A_{11} & -A_{12} & +A_{13}\\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23}\\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33}\end{pmatrix}^T$

  donde A_{ij} es el adjunto.

- Propiedades:
  - $\exists A^{-1} \iff |A|\neq 0$.
  - *M. Ortog.*

- *Diagon.*

[9] Si unimos los ptos medios de los lados de un triangulo se obtiene un segmento paralelo al tercer lado y que mide la mitad que este. Consecuencia del Tma de Tales

34.7.2 Determinantes

Determin. de A grande: desarrollar por adjuntos f o c con 0s: $|\begin{pmatrix} -2aaa \\ 0aaa \\ 0aaa \\ 0aaa \end{pmatrix}| = -2|\begin{pmatrix} aaa \\ aaa \\ aaa \end{pmatrix}| + 0|| + 0|| + 0||$

- 1) $|A.B| = |A||B|$. 2) $|\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}| = k|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}|$ 3) |A triangular|=|$\begin{pmatrix} axx \\ 0bx \\ 00c \end{pmatrix}| = abc$
- Si 2 o más f/c l.d. $\iff$ $|A| = 0$. $|A| = |A^T|$. OJO: $\alpha|A| \neq |\alpha A|$.
- Vandermonde (FFT) (así o tranpuesta): $|\begin{pmatrix} 1x_0x_0^2 \ldots x_0^n \\ \ldots\ldots \\ 1x_nx_n^2 \ldots x_n^n \end{pmatrix}| = \prod_{1<i<j<n}(x_i - x_j)$ hay $\binom{n}{2}$ comb. de productos
- Determin. o Potencia orden-n: 1) por induc. + desarrollo filas + factor común. 2) por Newton+Nilpotencia-k de M si triangular: $A^n = \begin{pmatrix} axx \\ 0ax \\ 00a \end{pmatrix}^n = (aI + \begin{pmatrix} 0xx \\ 00x \\ 000 \end{pmatrix})^n = (aI + M)^n$

34.7.3 Sist. de ec.

Cramer: $y = \frac{|A_y|}{|A|}$ donde $A_y = \begin{pmatrix} aba \\ aba \\ aba \end{pmatrix}$ (sust. term. ind. b en columna y). Usarlo en SCI mas que en SCD para impresionar.

Rango: $r(A)$ nº de f/c l.i. = max orden de menores adj no nulos (útil para buscar a ojo).

	Gauss	Pos. relativas	Rouche-Frobenius(*)
SCD	$\begin{pmatrix} aaa & b \\ 0aa & b \\ 00a & b \end{pmatrix}$	2 rectas cruzadas	$r(A') = r(A)$
SCI	$\begin{pmatrix} aaa & b \\ 0aa & b \\ 000 & 0 \end{pmatrix}$	recta cruza plano	$r(A') = r(A) <$ nº ec
SI	$\begin{pmatrix} aaa & b \\ 0aa & b \\ 000 & b \end{pmatrix}$	3 rectas 2 a 2 o paralelas	$r(A') < r(A)$

(*) Sol. general de SCI=*Var. Lin.* (afín)

34.7.4 Aplicación, bases y variedades lineales

- Represent. M. de una AL (ver T12EspVect) en no-canonicas: A supone v y v' en canónicas. Si piden $A_{u\to u'}$ (cuando $(v)_u$ y $(v')_{u'}$ en bases $\{u_i\}$ y $\{u'_i\}$): $(x\ \ y\ \ z\ \ w)_u \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (x'\ \ y'\ \ z')_{u'}$ donde cada fila es $(f(u_i))_{u'}$ 1)Aplicar A a u_i: $f(u_i)$. 2) Expresarlo en u': $(f(u_i))_{u'}$
- M de cambio base: $(x_1\ \ x_2)_B = (x'_1\ \ x'_2)_{B'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $B = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ y $B' = \{\boldsymbol{b'_1} = (1,-1), \boldsymbol{b'_2}\}$. Usar la clásica combinación da coord. canónicas siempre (pq la clásica da x en canónicas): $\begin{cases} x = x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} \\ x = x'_1\boldsymbol{b'_1} + x'_2\boldsymbol{b'_2} \end{cases}$ igualando sale M
- Hallar base de (sub)EV V:
  - Base de AL: $B_{Im(A)} = \{$column. l.i. de $A\}$ (ver Imagen de *Apl. Lin.*)
  - Base de subEV Parametrico: $V = \begin{cases} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow B_V = \{(2,1), (-1,3)\}$. Ej: 1) $Ker(A)$: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) Diagonalizacion,

- *Tma Ampl. Base*:

- Hallar base de V/S (donde V esp. total y S subEV) conocida base de $S = \{b_1, b_2\}$: 1) Con *Tma Ampl. Base* buscar base V que incluya los 2 elementos de S: $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. 2) Absorción: $V/S = \{[x] = x + S, \forall x \in V\} = [x = \sum_i \alpha_i b_i] = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_3 b_3 + S\} = [S = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2] = \{b_3 + S, b_4 + S\} = \{[b_3], [b_4]\}$ dos v.l.

- Ver que v.l. $[a] = \{a + S\}$ y $[b] = \{b + S\}$ son iguales: si $c = a - b \in S$, i.e. si las bases de S junto con c son l.d. $\iff |\begin{pmatrix} ..s_1.. \\ ..s_2.. \\ ..c.. \end{pmatrix}| = 0$

- Otros obvios:
  - Demostrar que U es subEV de V: ver que si $a, b \in U \Rightarrow \alpha a + \beta b \in U$
  - Demostrar que $\{b_1, .., b_n\}$ es base de V. 1) Sist. gener.: dem. $\forall v = \sum \alpha_i b_i$. 2)Lin. ind.: dem. $\sum \alpha_i b_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$.
  - Teoremas de Dimeniones: Tma Rango-Nulidad y Formula de Grassmann (ver T12EspVect).

34.7.5 Progr. Lineal

- PL compleja: técnica de los 3-vértices: 1) Buscar sol./vértices válidas: crear sist. ec. tomando ec. de 3 en 3 y ver si su sol. cumple las restantes ec. (empezar con 0). 2) Evaluar en z los vértices validos y elegir óptima.

- Ej: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 > 10(1) \\ x_2 + 2x_3 < 4(2) \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 > 6(3) \\ x_i > 0(4) \\ z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3(5) \end{cases}$ 1) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,0)$ no cumple (1). 2) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow (0,0,10/3)$ no cumple (2). ..... 20) hay $\binom{6}{3} = 20$ sist. ec. Finalmente, evaluamos los vértices válidos en $z = (5)$.

34.8 Algebra Polinomios y complejos

34.8.1 Álgebra compleja

- Rel. Cardano-Vieta: Sea un polinomio con n-raices y n-coef en cuerpo $\mathbb{C}$: $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2)..(z - z_n) \Rightarrow$ 1) Promedio de las raices (muy preguntado): $a_{n-1} = -a_n (z_1 + z_2 + .. + z_n)$ con $\binom{n}{1}$ sumandos; ojo al signo[10]. 2) Productos-2: $a_{n-1} = a_n (z_1 z_2 + z_1 z_3 + ... + z_{n-1} z_n)$ con $\binom{n}{2}$ sumandos..... n) Producto (coef independiente): $a_0 = (-1)^n a_n (z_1 z_2 ... z_n)$ con $\binom{n}{n}$

- Ruffini: Si coef $\mathbb{Z}$, $a_n = 1$ [11] y $\exists$ ra. enteras $\Rightarrow$ ra. dividen al a_0 (lo contrario no siempre). Probad con $\pm 1, \pm i$ en $z^2 + 5iz + (18 + 13i)$

- Tmas cuando coef $\mathbb{R}$ (2º, 3º o 4º): 1) *Tma Ra. C Conj.*: si tiene una ra. $\mathbb{C} \Rightarrow$ otra es su conjugada.

  2) Tma del discriminante [12] $\Delta = \begin{cases} = 0 & \exists \text{dos ra. } \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R}\text{) iguales (ra. doble, valido para coef } \mathbb{C}) \\ < 0 & \exists \text{dos ra. } \mathbb{C} \text{ conjugadas y resto ra. } \mathbb{R} \\ > 0 & \exists \text{dos/tres ra. } \mathbb{R} \text{ distintas (2º,3º); todas } \mathbb{R} \text{ o todas } \mathbb{C} \text{ (4º)} \end{cases}$.

[10] Recordar signo: $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$.
[11] cambiar $x = \frac{z}{a_n}$ para $a_n = 1$
[12] Hay fórmula (matricial[coef.] o productorio[ra.]) del determinante. Para grado 2º $\Delta = b^2 - 4ac$

- Raíz n-esima de la unidad: $z^n - 1 = \begin{cases} (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k & \text{Sum progr. geom.} \\ \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{\frac{2\pi i k}{n}}) & \text{ra. n de la unidad} \end{cases}$. Para reducir largas sumas (o productos) de complejos a una fracción (o fórmula corta). Ej: $1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.
- *Tma Ra. Deriv.*
- Ecuaciones complejas: 1) No olvidar las k-ramas. Ej: $e^{\frac{z+1}{z}} = 1 - i(= \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)})$. 2) Si z_0 es un cero (real) $\{Re(f(z_0)) = 0$ y $Im(f(z_0)) = 0\}$ resolver ec. más sencilla.

34.8.2 Geometría compleja

- *Transf. en Plano C* Dado $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ hallar a, b para que ra. triángulo: 1) Por Card-Vieta baricentro $O = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{-a}{3}$. 2) $P(z')$ visto en O debe $z'^3 = R \iff (z-O)^3 = R$. Desarrollo binomio-Newton, comparamos con $P(z)$ y sale.

34.9 Análisis

34.9.1 Representación

- Representar F.: en cartesianas o polares

– Dominio: – Simetrias: – Asintotas: 1) Horizontal. 2) Vertical: $\lim_{x\to a^{+o-}}$ (por izda o dcha). 3) Oblicua $y = ax + b$: $a = \lim_{x\to\infty} = f(x)/x$ y $b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$. Se acerca por arriba o por abajo (razonamientos tipo: "si no corta ejeX no queda otra que por debajo") – Extremo: monotonia y cvx: $f'(x) = 0$ Ptos de inflexión (cambia de cvx a concava): $f''(x) = 0$ – Ptos: dobles, simples, cortes con ejes	Ej: Folium Descartes: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (pulpo) – Cambio: $r = \frac{3as\theta c\theta}{s^3\theta + c^3\theta}$ – Simetrias: $(r,\theta) \to$ sustituyo por$(r,-\theta) \Rightarrow eje - x$; $(-r,-\theta)eje - y$; $(-r,\theta)en - 0$ – Asintotas: Creo que a ptos *Singular.* $\lim_{\theta\to a} f(\theta) = \pm\infty$ – Extremos: $\frac{\partial r}{\partial\theta} \Rightarrow \theta = \{\theta_1, \theta_2 ...\}$ ver si min o max con cvx o concav – Ptos:

34.9.2 Series

- Criterios de convergencia *Serie*:
  - C. de Leibniz: la serie alternada $S_k = \sum(-1)^n a_n$ converge a L si $a_n \to 0$ y es a_n monotona decreciente. Además el error: $|L - S_k| < a_{k+1}$
  - C. del abs: si $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
  - C. de comparación: si $a_n \leq b_n$ y $\begin{cases} \sum a_n Div. \Rightarrow \sum b_n Div. \\ \sum b_n Conv. \Rightarrow \sum a_n Conv. \end{cases}$

- Famosas:

Serie Pot. Geom. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (si $\lvert z\rvert < 1$)	Mercator: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+n)$ [13]	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$

- *Taylor*: Regla del reemplazamiento: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

34.9.3 Continuidad, Límites y Sucesiones

- *Cont.* Unif.
- Álgebra de Lim: Si $\lim f$ y $\lim g$ $\exists$ (son finitos) $\Rightarrow \lim f+g = \lim f + \lim g$, $\lim f.g = \lim f . \lim g$ y $\lim f^n = (\lim f)^n$.
- Casos de indeterminación $x \to \infty oa$ son:
  1. $\frac{0}{0}$: Factorizar [14]
  2. $\frac{0}{0}$: Radicalizar [15]
  3. $\frac{\infty}{\infty}$: Dividir por mayor exponente
  4. $\infty - \infty$: Como $\frac{0}{0}$, factorizar o radicalizar
  5. 1^∞: $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim(a_n-1)b_n}$ [16]
  6. L'Hopital: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0,\infty}{0,\infty} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
  7. 0∞ 0^0 ∞^0: Pasar a $\frac{0}{0}$ [17]
- Infinitésimos equivalentes: Si $a_n = 0 \to 0$

$\sin x \to x$	$\cos x \to 1 - x^2/2$ (*Geom. Esf.*)	$\log(1+x) \to x$	$e^x - 1 \to x$	$\arctan x \to x$

Se pueden usar en ambos sentidos ($x \to \log(1+x)$). Salen de truncar Taylor $x = 0$.

- Criterios de conv. de sucesiones: para sacar el dcha (el preguntado) desde la izda:

Stolz $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to \frac{a_n}{b_n}$ [18]	Raiz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \sqrt[n]{a_n}$
Med. aritm. $a_n \to \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$	Med. geom. $a_n \to \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots.a_n}$

[13] de integrar $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$

[14] $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{4}{5}$

[15] $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} ='' \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{4}{9}$

[16] Dem: $(1+a_n-1)^{b_n} = (1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}})^{b_n} = [(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}})^{\frac{1}{a_n-1}}]^{(a_n-1)b_n}$

[17] $\lim_{x\to\infty} x(e^{-2/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2/x}-1}{1/x}$ L'Hopital

[18] ¿$\frac{\log n}{n}$? $= \frac{\log(n+1)-\log(n)}{n+1-n} = \frac{1+1/n}{1} = 0$

- *Conv.* Unif.
- Suc. recurrente: 1) Monotona de/creciente: dem. por inducción. 2) Cota superior: suponer una a ojo $x_n \leq 1+a$ y Dem. por induc. 3) Límite: hacer $L = f_n(a_n - 1 = L)$ y despejar L. Ej: $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}} \iff L = \sqrt{a+L} \iff L = 1 + \frac{\sqrt{1+4a}}{2a}$

34.9.4 Integración y derivación

- Técnicas de derivación:
  - Regla general de Leibniz (n-derivada con binomio Newton): $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ Ej: $\frac{d^n e^{x^5}}{x^n}$
  - *Desc. Frac. Simpl.*: $[\frac{x-a}{x^2+1}]^{(n)} = [\frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}]^{(n)}$ combinar con anterior en derivada n-sima de *C. Func. Rac.*
- *Tma Fund. del Calc.*: Ej: halla max de $F(x)$.
- Técnicas de integración:
  - Cambio variable: $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx = \begin{cases} t^2 = 1+e^{2x} \Rightarrow x = ln(t^2-1)/2 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2} - 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1+e} \end{cases} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{tt}{t^2-1}dt$
  - Descomp. en frac. simples: racionales $\frac{x-a}{x^2+1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}$
  - Int. por partes: $\int udv = uv - \int vdu$ $ln, asin/cos/tg$ Ej: $\int xacos(x)dx =$ Ej: $I_n = \int_0^{\pi/2} sin^n(x)dx$ recursivo
  - Mezclas: 1) Id. notable+Camb. var.: irracionales $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \{_{x=sin(t)}$ 2) Expresar en una sola razón trigonom+Cambio var: Ej: $\Rightarrow \int sin^2 tdt =$ [ángulo mitad (ver)] $= \int \frac{1-cos2t}{2}dt$ Ej: Zorro-Liebre $sin(x(t)) = h(t)$??
- Integral de Riemann: Buscar $\frac{j}{n} = x$ y $\frac{1}{n} = dx$. Ej: $I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} acos(\frac{j}{n}) = \int_0^1 xacos(x)dx$
- Medidas de curva y superficie (ver *Dif.*):

34.9.5 Tmas del cálculo

- *Tma Bolzano*
- Tma de Cauchy: Si f cont en cerrado $[a,b]$ y derivable en abierto $(a,b) \Rightarrow g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$
- Tma del Valor Medio o de Lagrange o de Incrementos Finitos: bajo condiciones anteriores $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-c}$. Dem con Tma de Cauchy. Ej: Dem $|sin(x) - sin(y)| \leq |x-y|$ con TVM $|x-y||cos(c)| \leq |x-y|$ cqd.
- Tma de Rolle: bajo cond. ant. y además $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists f'(c) = 0$. Dem caso particular del TVM. Ej: Dem que f no tiene 2 o más raices en (a,b)

34.9.6 Optimización, Desigualdades y Búsqueda de Raíces

- $\text{argmin}_{x,y}[f(x,y) = \frac{cte}{xy}] \iff \text{argmax}_{x,y} = xy$ si además $x+y = cte_2 \Rightarrow$ max si $x = y$
- Probar Desigualdades:
  - $ln(1+x) < x \forall x > 0$: McLaurin y error $ln(1+x)$
  - $e^x < \frac{1}{1-x} \forall x \in (0,1)$: quitar cocientes y derivar, ver estrict. creciente $e^x - \frac{1}{1-x} < 0 \iff (1-x)e^x - 1 < 0; f'(x) > 0$
- Búsqueda de raices por *Tma Bolzano* (suponiendo $\in \mathbb{Z}$):
  - Averiguar nº de ra+ y ra- con: *Regla Sg. Descartes* (RSD), *Ra. F. Neg.* (RFN) y Afinación por Bolzano (AB):
    - RSD: *Regla Sg. Descartes* Ej: $P(x) = 50x^4 - 1075x^3 - 1386x^2 - 26813x + 2821$ tiene 2 o 0 ra+.
    - RFN: *Ra. F. Neg.*: $P(-x) = 50x^4 + 1075x^3 - 1386x^2 + 26813x + 2821$ tiene 2 o 0 ra- $\Rightarrow P(x)$ tiene: 2+2-; o 2+2C; o 2-2C.
    - AB: obteniendo ptos de $P(x) > 0$ y $P(x) < 0$ vemos al menos 1+1- $\Rightarrow$ 2+2- (no complejas).
  - Acotar una ra+ y otra ra- con: AB y Dominación de Termino Principal (DTP):
    - DTP para ra+: $x? : P(x) > 0$, si $P(x) = Q(x)) + 2821$ donde $Q(x)) = 50x^4 - 1075x^3 - 1386x^2 - 26813x > 0 \iff x > 1075/50 + 13863/50x + 26813/50x^2 \approx 40$. Probando vemos que $P(30) < 0 \Rightarrow ra+ \in [30,40]$. Con AB $\Rightarrow P(31) = 0$
    - DTP para ra-: haciendo igual pero con RFN $P(-x)$ vemos que $ra- \in [-10,-3]$, con AB $\Rightarrow H(-7) = 0$
  - Sacar Raiz considerando Acotaciones y Divisiores de Termino Independiente (forma alternativa a DTP): $2861 = 7.13.21 \Rightarrow Div(2861) = (1+7)(1+13)(1+21) = \pm 1, \pm 7, \pm 13 ... \pm 2861 \Rightarrow$ considerando los intervalos anteriores sale $ra+ = 31$ y $ra- = -7$
  - Simplificar Polinomio con Ruffini con las ra ya encontradas: $P(x) = (x+7)(x-31)(5x^2 + 125x - 13)$

34.10 Probabilidad

- Dado: *Tec. Recuento*.
- Destruir puente o bolas: *Prob. Compl.*
- *Medida Central* en Geom. triáng.: Dem. $\bar{x} = \frac{g_a+g_b+g_c}{3} > r \iff H = r = \frac{3}{1/g_a+1/g_b+1/g_c} < \bar{x}$

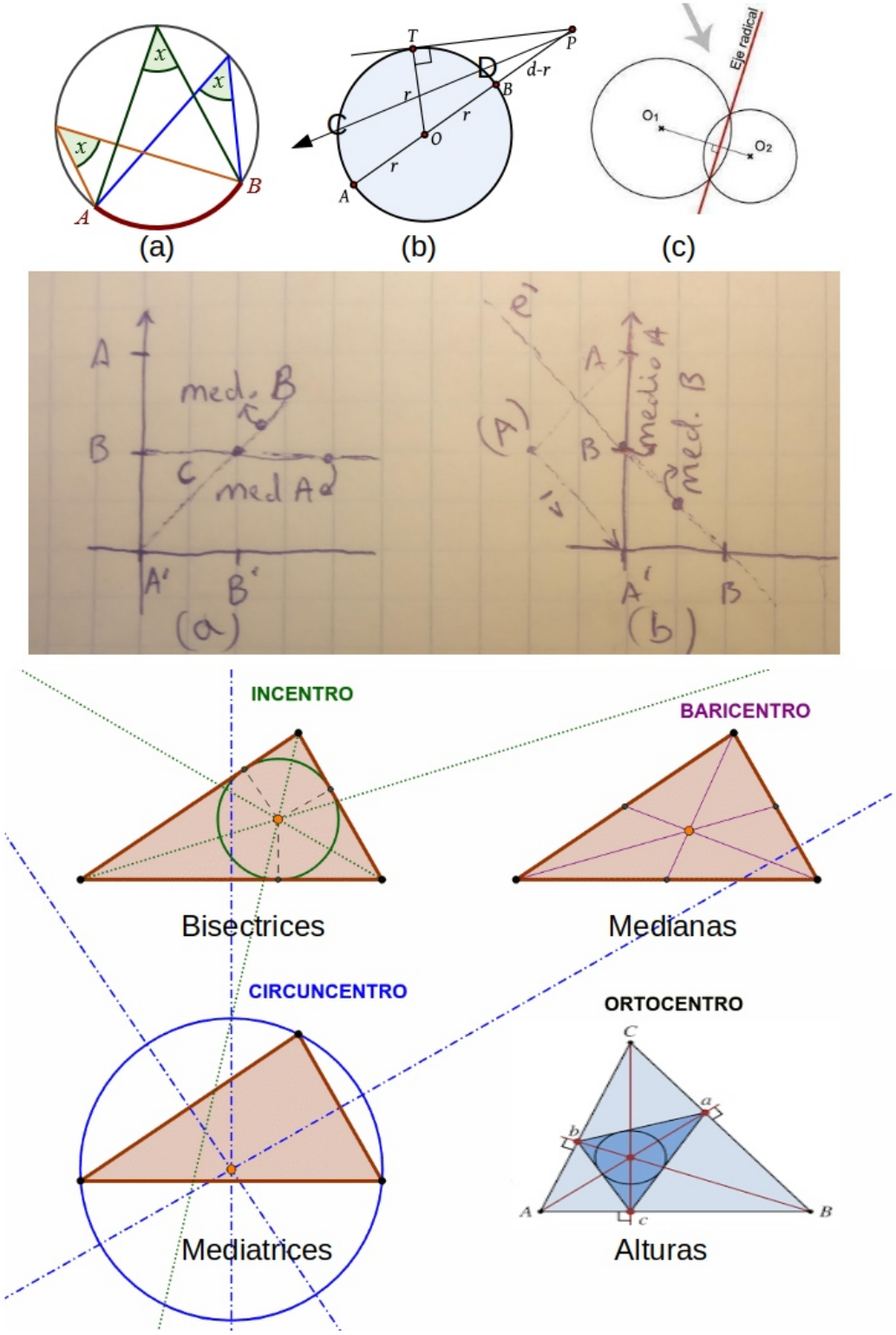



Figura 34.1: Problemas