Versuch 223 **17. November 2021**

Brown'sche Bewegung

Physikalisches Anfängerpraktikum 2.1

Jan A. Kesting Betreuer/in: Johannes Becker

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Ziel/Motivation

Anhand der leicht zu beobachtenden Brown'schen Bewegung (Bewegung kleinster Partikel in Wasser) lässt sich die für die Thermodynamik fundamentale Boltzmannkonstante k bestimmen.

1.2 Aufgaben

1. Präparieren einer Mikroskopprobe einer Partikelsuspension
2. Aufnahme des Mikroskopbildes eines bestimmten Partikels
3. Bestimmung des Abbildungsmaßstabes mittels Objektmikrometer
4. Vermessung der Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder
5. Ermittlung der Boltzmannkonstant k aus der mittleren quadratischen Verschiebung des Teilchens

1.3 Versuchsaufbau

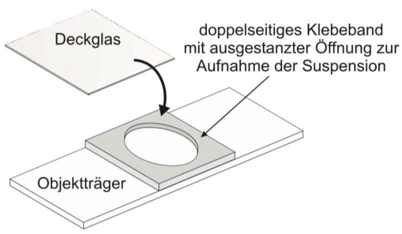


Abbildung 1: Versuchspräparat zur Beobachtung der Brown'schen Bewegung

Das Präparat wird dann unter einem Mikroskop passend fokussiert und per Kamera aufgezeichnet.

1.4 (physikalische) Grundlagen

Wassermoleküle sind aufgrund ihrer relativ hohen Temperatur in flüssiger Form ständig in Bewegung. Gibt man nun sehr kleine (und leichte) Partikel in Wasser, so lässt sich erkennen, dass sich jene Partikel anfangen zu bewegen. Dies geschieht, weil bei der Kollision zwischen Partikel und Wassermolekülen

Impulse weiter gegeben werden, wodurch sich ein Partikel augenscheinlich zufällig Bewegt; das ganze ähnelt einer ausgefalteten Vibration.

Da jeder Stoßprozess bzw. dessen Orientierung zufällig ist, bewegt sich das Partikel auf zufälligen Bahnen in 3 Dimensionen. Da der Versuch allerdings in einer sehr dünnen Schicht durchgeführt wird, kann man die Beobachtun auf 2 Dimensionen verallgemeinern.

Die mittlere Verrückung $\langle x \rangle$ eines Teilchens in einer Dimension sollte bei unendlichen Versuchsdauer im Mittel auf $= 0$ sein, da die Bewegungsverteilung symmetrisch ist:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P(x;t) dx = 0 \tag{1}$$

Zur Beschreibung der Brown'schen Bewegung eignet sich offensichtlich das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2 \rangle$ besser, das dies der Varianz $\sigma^2 = 2Dt$ entspricht, wobei, D der sogenannte Diffusionskoeffizient und t die vergangene Zeit ist:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x;t) dx = 2Dt = \sigma^2 \tag{2}$$

Nun lässt sich der mittlere Abstand des Partikels zum Ursprungsort als folgender definieren:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \tag{3}$$

Da man sich allerdings, wie oben bereits erwähnt, sich das Ganze in zwei Dimensionen bewegt, kann man das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle r^2 \rangle$ aufgrund der isotropie folgendermaßen beschreiben:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = 4Dt \tag{4}$$

Der oben genannte Diffusionskoeffizient D lässt sich außerdem über die Boltzmannkonstante k (und umgekehrt) bestimmen. Hierzu wird noch der Radius der Partikel r_p, die Viskosität des Mediums η und dessen Temperatur T gebraucht:

$$D = \frac{4kT}{6\pi\eta r_p} \tag{5}$$

Setzt man nun die Definition für das mittlere Verschiebungsquadrat ein, so kann man die Boltzmannkonstante k mittels messbaren Größen folgendermaßen ermitteln:

$$k = \frac{3\pi\eta r_p \langle r^2 \rangle}{2Tt} \tag{6}$$

Beim Versuch wird nach jeder Sekunde eine Aufnahme des Mikroskopausschnittes gemacht, worauf man dann im Nachhinein die Größe und somit auch die Bewegung der einzelnen Teilchens ermitteln kann.

Messprotokoll

17.11.2021

Versuch 223

Jan Kesting
Victoria Hahn

BROWN'SCHE BEWEGUNG

Geräteliste

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Drucker
- Thermometer
- Objektmikrometer

Durchführung

1. Probenpräparation

Auf einen Objektträger wird doppelseitiges Klebeband mit ausgestanztem Loch in der Mitte aufgebracht. In das Loch wird die Proben-flüssigkeit (in Wasser suspendierte Latex-Partikel) mit einer Pipette (250 µl) gefüllt. Mit dem Deckglas wird die Probe abgedichtet.

Durchmesser der Latex-Partikel: $d = (755 \pm 30)$ nm
Raumtemperatur: $T = (21{,}3 \pm 0{,}1)$ °C

2. Aufnahme einer Bildfolge

Ist das Mikroskop richtig eingestellt, kann mit dem Programm kamera.exe die ~~Mess~~ Aufnahme der Bilder gestartet werden. Es wird ein Partikel ausgewählt, dessen Bewegung beobachtet wird. Nun wird jede Sekunde mindestens 150 Mal ein Bild des Partikels aufgenommen.

3. Eichung des Abbildungsmaßstabs

Unter das Mikroskop wird nun ein Objektmikrometer gelegt und ein Eichbild aufgenommen.

4. Vermessung der Partikelpositionen

Mit dem Programm Auswertung.exe und dem Eichbild wird der Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmt. Nun werden anhand der in 2. aufgenommenen Bilder die Partikelpositionen bestimmt.

17.11.21 J.Becker

3 Auswertung

Die Berechnungen der Auswertung finden in einem Python Skript und einem entsprechendem Programm statt. Jenes ist im Anhang enthalten; in der Auswertung werden somit nur wesentliche Rechenwege und Ergebnisse angegeben.

3.1 Graphische Darstellung der Messdaten

Zuerst werden alle gemessenen Daten bzw. die ermittelten Koordinaten des beobachteten Partikels in einem Diagramm aufgezeichnet. Man erhält die Partikeltrajektorie durch das Wasser.

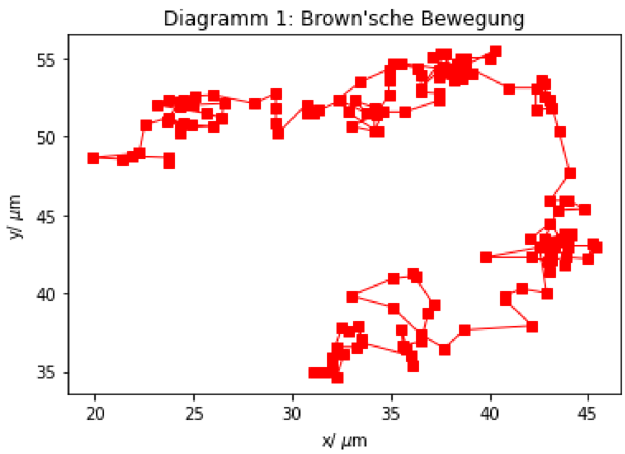


Diagramm 1: Die beobachtete und aufgezeichnete Bewegung eines ausgewählten Latex-Partikels in Wasser

3.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Zur berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates muss erstmal Δx und Δy bestimmt werden. Dazu nimmt man einfach die bestimmten Messdaten und nutzt folgende, triviale Rechnung:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \tag{7}$$
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \tag{8}$$

Aus den jeweiligen Verschiebungen wird dann das mittlere Verschiebungsquadrat bestimmt mittels (4) berechnet. Nach einsetzen bildet man dann den Durchschnitt $\langle \bar{r^2} \rangle$ und nimmt als Fehler die Standartabweichung der Messreihe.

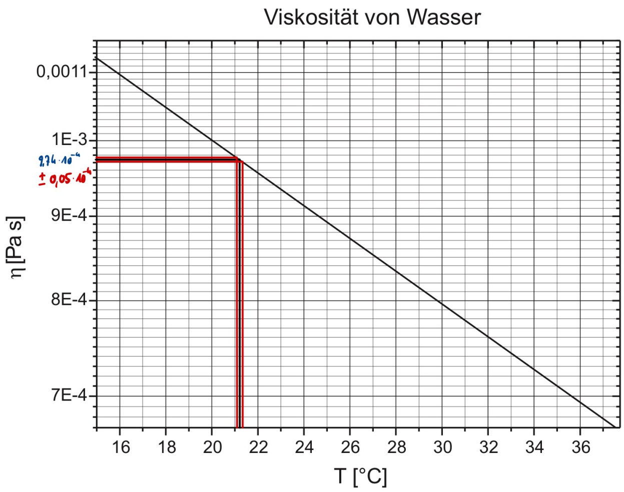


Diagramm 2: Viskosität η von Wasser bei der gemessenen Raumtemperatur T_R

In Diagramm 2 wird die Viskosität $\eta \pm \Delta\eta$ von Wasser bei der gemessenen Zimmertemperatur T bestimmt, damit man im Anschluss die Boltzmannkonstante k (und die Diffusionskonstante D bestimmen kann). Die Boltzmannkonstante k lässt sich mittels (6) berechnen:

$$k = \frac{3\pi\eta r_p \langle r^2 \rangle}{2Tt}; \quad \Delta k = k\sqrt{\left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_R}{T_R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\langle r^2\rangle}{\langle r^2\rangle}\right)^2} \tag{9}$$

t ist in diesem Falle nicht Fehlerbehaftet, da jedes Bild nach exakt einer Sekunde aufgenommen wurde bzw. das Programm hat dies in unserem Falle so berechnet. Zur Bestimmung der Diffusionskonstante D nutzt man (4):

$$D = \frac{\langle r^2 \rangle}{4t} \qquad \Delta D = D \cdot \frac{\Delta\langle r^2\rangle}{\langle r^2\rangle} \tag{10}$$

Diese Rechnungen liefern mit den gemessenen Daten:

$$\underline{\underline{k = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{D = (4,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}} \tag{12}$$

3.3 Kontrollverteilung

Als nächstes werden alle Verschiebungen (sowohl in x- als auch in y-Richtung, da diese isotrop sind) in ein Histogramm mit einer auf 1 normierten Fläche eingetragen. Darüber wird eine Gausskurve gelegt.

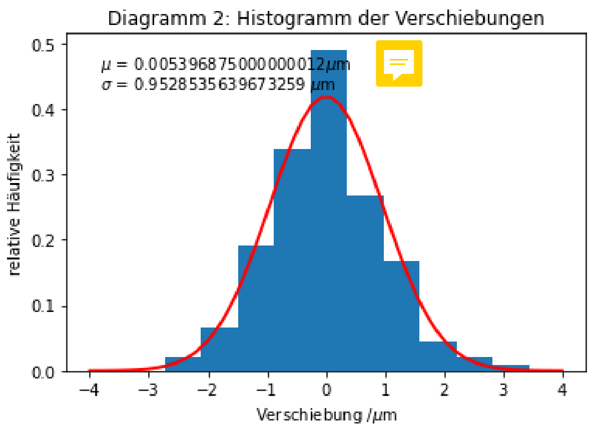


Diagramm 3: Histogramm der Verschiebungen mit überlappender Gaußkurve

Man erkennt, dass die Messungen tatsächlich den erwarteten Bewegungswahrscheinlichkeiten annähern, welche man bei zufälligen Bewegungsmustern erwarten würde.

3.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Als nächstes betrachtet man die kumulativen Verschiebungen. Da diese linear von der Zeit abhängen, lassen sie sich in ein Diagramm eintragen und aus dessen Steigung relevante Größen ableiten. Das aus diesen Werten entstehende Diagramm sieht folgendermaßen aus:

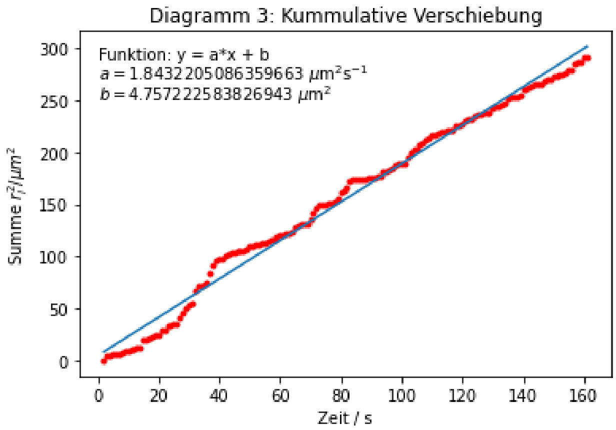


Diagramm 4: Kumulative Verschiebung eines Latex-Partikels in Wasser

Mit der nun bekannten Steigung a (und von Python ermittelten Fehlerwert mittels 'pcov') lässt sich die Diffusionskonstante auf andere Art und Weise bestimmen:

$$D = \frac{a}{4} \qquad \Delta D = D\frac{\Delta a}{a} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D = (4,61 \pm 0,04) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}} \tag{14}$$

Nutzt man nun diesen Wert, lässt sich die Boltzmannkonstante k bestimmen:

$$k_2 = \frac{6\pi\eta r D}{T} \qquad \Delta k_2 = k_2\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k_2 = (1,08 \pm 0,04) \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}} \tag{16}$$

3.5 Vergleich der ermittelten Werte

Vergleicht man zuerst die bestimmten Boltzmannkonstanten miteinander:

$$\sigma = \frac{|k - k_2|}{\sqrt{\Delta k^2 + \Delta k_2^2}} = \underline{\underline{0,19}} \tag{17}$$

Die Literatur liefert uns für die Boltzmannkonstante $k_L = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$. Vergleicht man nun den naheliegendsten ermittelten der Werte:

$$\sigma_L = \frac{|k - k_L|}{\Delta k^2} = \underline{\underline{2,8}} \tag{18}$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

Die Durchführung des Versuches lief nicht ganz reibungslos. Zuerst hatten wir Probleme die Latex-Partikel ausfindig zu machen. Nachdem uns dies gelungen war, starteten wir mit der Aufnahme der Bilder. Hierbei gab es einen technischen Fehler, wodurch die Zeiten, zu denen die Bilder aufgenommen worden sind, nicht korrekt verzeichnet worden, wodurch manuel in das vorinstallierte Programm neue Zeiten, von exakt 1s zwischen dem einem Bild und dem nächsten, eingetragen werden mussten.

Nachdem diese Unannehmlichkeiten beiseitigt worden sind, konnte man den Versuch ohne Weiteres durchführen.

4.2 Diskussion

Die zwei, auf unterschiedliche Art und Weise berechneten, experimentell bestimmten Boltzmannkonstanten k und k_2 liegen beide innerhalb ihrer Fehlerbereiche, was darauf hindeutet, dass die Berechnungen stimmen und uns hier keine Fehler unterlaufen sind.

Beim Vergleich mit dem Literaturwert sieht es etwas anders aus: eine σ-Abweichung von 2,8. Diese ist zwar nicht signifikant, dennoch nicht schön. Woran könnte das gelegen haben?
Ein Grund könnte die nicht gespeicherte Zeitangabe sein, wodurch sich kein Fehler für die Zeit bestimmen (und abschätzen!) ließ. Der andere könnte die

Luftblase im Wasser am Rande des ausgestanzten Klebefilms sein. Hierdurch könnte es eine leichte Strömung im Wasser gegeben haben, da das Wasser allerdings luftdicht abgeschlossen war, ist dies nur eine Vermutung.

Aufgrund der nicht signifikanten Abweichungen und nur kleinen Hindernissen bei der Durchführung kann man dennoch von einem gelungenem Experiment sprechen.

5 Anhang

Versuch 223: Brown'sche Bewegung

In [111]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
from scipy.optimize import curve_fit
```

Importieren und graphische Darstellung der Messdaten

In [175]:
```
# Ersetzte Kommata durch Punkte
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))

# Importiere Daten
t, x, y, = np.loadtxt('Messung2.dat', skiprows = 1, usecols = (1, 2, 3), converters =
                      {1:comma_to_float, 2:comma_to_float, 3:comma_to_float}, unpack = True)

# Plot
plt.plot(x, y, marker = 's', color = 'red', linewidth = 1)
plt.xlabel('x/ ' + '$\mu$' + 'm')
plt.ylabel('y/ ' + '$\mu$' + 'm')
plt.title("Diagramm 1: Brown'sche Bewegung")
plt.savefig('brown1.pdf', format = 'PDF')
plt.figure(figsize = (12,45))
```

Out[175]: `<Figure size 864x3240 with 0 Axes>`

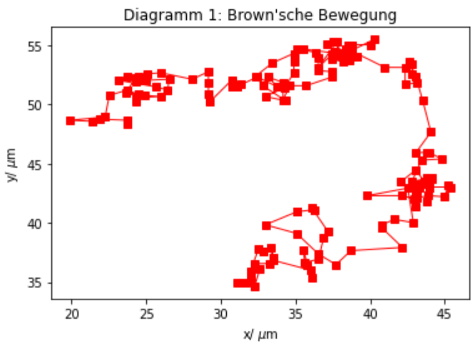


Abbildung 2: Pythonskript zum Abschnitt 3.1

Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

In [176]:
```
# Koordinatenänderungen
dt = np.array([])
dx = np.array([])
dy = np.array([])
i = 0
while i < len(t) - 1:
    dt = np.append(dt, t[i + 1] - t[i])
    dx = np.append(dx, x[i + 1] - x[i])
    dy = np.append(dy, y[i + 1] - y[i])
    i = i + 1

# Abstandsquadrat
r_squared = dx**2 + dy**2

# mittlere quadratische Abweichung
r_squared_mean = np.mean(r_squared)
r_squared_mean_std = np.std(r_squared) / np.sqrt(len(r_squared))
print('r_squared =', r_squared_mean, '+/-', r_squared_mean_std, '[10^(-12) m^2]')

dt_mean = np.mean(dt)
print('dt_mean =', dt_mean)
```

```
r_squared = 1.8159180812500004 +/- 0.15886493908432286 [10^(-12) m^2]
dt_mean = 1.0
```

In [179]:
```
# Berechnung der Boltzmann-Konstante
etha = 9.74 * 10**-4 #[Pa s]
delta_etha = 0.05 * 10**(-4) #[Pa s]
r = 377.5 * 10**(-9) #[m] umbenannt von a zu r, damit keine Verwechslung mit Steigung a
delta_r = 15 * 10**(-9) #[m]
T = 294.45 #[K]
delta_T = 0.1 #[K]
t = 1

k = 3 * np.pi * etha * r * r_squared_mean * 10**(-12) / (2 * T * t)
delta_k = k * np.sqrt((delta_etha / etha)**2 + (delta_r / r)**2 + (r_squared_mean_std / r_squared_mean)**2 + (delta_T / T)**2)
print('Boltzmann-Konstante: k =', k, '+/-', delta_k, '[J/K]')
```

```
Boltzmann-Konstante: k = 1.0685669530928658e-23 +/- 1.0282095353114797e-24 [J/K]
```

In [152]:
```
# Berechnung der Diffusionskonstante
D = r_squared_mean * 10**(-12) / (4 * t)
delta_D = r_squared_mean_std * 10**(-12) / (4 * t)
print('Diffusionskonstante: D =', D, '+/-', delta_D, '[m^2/s]')
```

```
Diffusionskonstante: D = 4.539795203125001e-13 +/- 3.9716234771080715e-14 [m^2/s]
```

Abbildung 3: Pythonskript zum Abschnitt 3.2

Kontrollverteilung

In [173]:
```
# Plot Histogramm
all_data = np.append(dx, dy)
plt.hist(all_data, density = True)
plt.xlabel('Verschiebung /' + '$\mu$' + 'm')
plt.ylabel('relative Häufigkeit')
plt.title('Diagramm 2: Histogramm der Verschiebungen')

# Gaussverteilung
mu1 = np.mean(all_data)
sigma1 = np.std(all_data)
def gaussian(x, mu, sigma):
    return 1 / (np.sqrt(2 * np.pi * sigma**2)) * np.exp(- (x - mu)**2 / (2 * sigma**2))
gauss = gaussian(np.linspace(-4, 4), mu1, sigma1)

plt.text(-3.9, 0.46, ' $\mu$ = ' + str(mu) + '$\mu$m')
plt.text(-3.9, 0.43, ' $\sigma$ = ' + str(sigma) + ' $\mu$m')

plt.plot(np.linspace(-4, 4), gauss, 'r-', linewidth = 2)
plt.savefig('brown4.pdf', format = 'PDF')
```

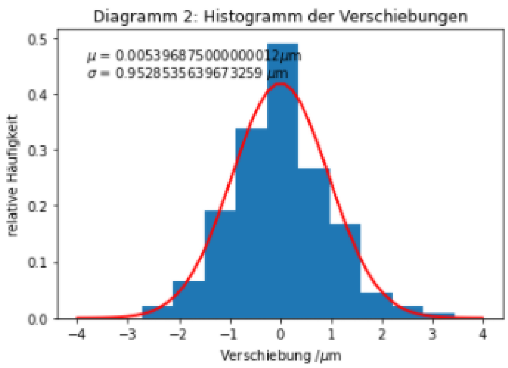


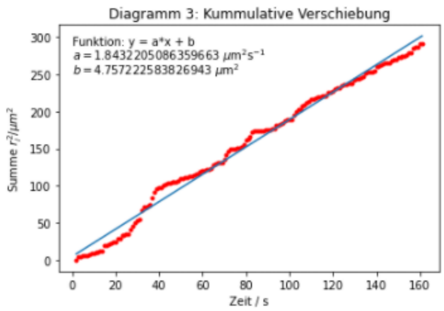
Abbildung 4: Pythonskript zum Abschnitt 3.3

```
In [177]: # Zusammenhang
r_kumm = np.cumsum(r_squared)
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker = '.', color = 'red', linewidth = 0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe $r_i^2 /\mu m^2$')
plt.title('Diagramm 3: Kummulative Verschiebung')

# Fit
def linear(x, a, b):
    return a * x + b
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1], *popt))

a = popt[0]
delta_a = np.sqrt(pcov[0][0])
b = popt[1]
delta_b = np.sqrt(pcov[1][1])
plt.text(0, 290, 'Funktion: y = a*x + b')
plt.text(0, 270, '$a = $' + str(a) + ' $\mu$m$^2$s$^{-1}$')
plt.text(0, 250, '$b = $' + str(b) + ' $\mu$m$^2$')

plt.savefig('brown3.pdf', format = 'PDF')
```




```
In [181]: # Berechnung D, k
D2 = a / 4 * 10**(-12)
delta_D2 = delta_a / 4 * 10**(-12)
print('Diffusionskonstante: D2 =', D2, '+/-', delta_D2, '[m^2/s]')

k2 = 6 * np.pi * etha * r * D2 / T
delta_k2 = k2 * np.sqrt((delta_T / T)**2 + (delta_etha / etha)**2 + (delta_r / r)**2 + (delta_D2 / D2)**2)
print('Boltzmann-Konstante: k2 = ', k2, '+/-', delta_k2, '[J/K]')

Diffusionskonstante: D2 = 4.608051271589915e-13 +/- 4.002680774373085e-15 [m^2/s]
Boltzmann-Konstante: k2 =  1.0846329155088455e-23 +/- 4.446726929526338e-25 [J/K]
```

Abbildung 5: Pythonskript zum Abschnitt 3.4