
Versuch 243

17. Januar 2022

Messung der Boltzmannkonstante Teil II
Thermisches Rauschen

Physikalisches Anfängerpraktikum II

Juan Provencio

Betreuer/in: Tobias Martiné

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| 1 | Ziel des Versuches | 2 |
| 2 | Grundlagen | 2 |
| 2.1 | Thermisches Rauschen | 2 |
| 3 | Versuchsaufbau | 4 |
| 3.1 | Materialen und Geräte | 4 |
| 3.2 | Aufbau | 5 |
| 4 | Messung und Auswertung | 6 |
| 4.1 | Messprotokoll | 6 |
| 4.2 | Auswertung | 8 |
| 5 | Zusammenfassung und Diskussion | 10 |
| 5.1 | Zusammenfassung | 10 |
| 5.2 | Diskussion | 10 |
| 6 | Quellen | 11 |

1 Ziel des Versuches

Mit diesem Versuch wollen wir grundsätzlich zwei Sachen untersuchen. Als erstes wollen wir natürlich die Boltzmann-Konstante bestimmen, aber grundlegend wollen wir das Phänomen des thermischen Rausches untersuchen. Dabei werden wir beobachten, wie Rauschen auf die Spannung und die Messungen wirkt.

2 Grundlagen

2.1 Thermisches Rauschen

Thermisches Rauschen ist ein statistisches Phänomen bei allen elektrischen Leitern. Die zufällige Brownsche Bewegung der Ladungsträgern, führt dazu, dass selbst ohne Anlegung einer Spannung sich Ladungsträgern in allen Richtungen gleichmäßig bewegen, dies erzeugt ein statisch variierendes elektrisches Potential im Leiter. Dabei schwankt die sogenannte Rauchspannung U_R natürlich um den Mittelwert 0 ohne Anlegung einer äußeren Spannung, denn sich die Ladungsträgern in allen Richtungen bewegen. Um zu quantifizieren, wie viel Rauschspannung es gibt nimmt man deswegen nicht den Mittelwert, sondern das "Root Mean Square". Das heißt, man nimmt die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats, so dass man die absolute Abweichung von der Null beobachten kann:

$$\sqrt{\langle U_R^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U_r^2(t') dt'} \quad (1)$$

Bei der Untersuchung des Frequenzspektrums einer Rauschquelle beobachtet man, dass sich alle Frequenzen im Bereich von 0 bis einige THz gleichmäßig repräsentiert zeigen. Keine Frequenz wird an dieser Stelle bevorzugt, deswegen spricht man in Analogie über "weißes Rauschen" aus der Akustik oder "weißes Licht", bei welchen alle Frequenzen (in einem Bereich) vorhanden sind. Dieses Rauschen nennt man auch Nyquist-Rauschen. Nyquist hat auch eine Beziehung zwischen dem quadratischen Effektivwert der Rauchspannung und weitere Faktoren gefunden:

$$\langle U_R^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad (2)$$

wobei k die Boltzmannkonstante, T die Temperatur, R der Widerstand und Δf die Bandbreite des Messinstruments sind.

2.1.1 Messprinzip

Da die zu messende Spannung extrem klein ist, muss man sehr genaue Messprozesse anwenden. Im Prinzip hat man ja das meiste relativ leicht gegeben, die Temperatur, der Widerstand und die Bandbreite sollten keine große Schwierigkeit darstellen, aber die Spannung befindet sich im Bereich von μV , weshalb man die Einbeziehung eines sensiblen Spannungsverstärkers benötigt. Dieser verstärkt die gemessene Spannung um einen Faktor von 10^3 . Allerdings stellt der Verstärker eine weitere Rauschquelle $\langle U_V^2 \rangle$ dar, so dass man insgesamt die Rauschspannung

$$\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2 \langle U_R \rangle \langle U_V \rangle} \quad (4)$$

$$= \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle} \quad (5)$$

Das Rauschen des Verstärkers messen wir durch eine "Nullmessung". Zur Bestimmung des anderen Rauschens verwenden wir einen zusätzlichen Bandfilter um die Bandbreite einzuschränken, da die obere Grenze der Bandbreite bei hohen Frequenzen bei den meisten Voltmetern nicht deutlich definiert, und außerdem können wir damit die niederen Störsignalen ebenfalls herausfiltern.

Zur Messung benötigen wir den Frequenzgang der Messelektronik, welcher definiert wird durch das Quotient des Ausgangssignals und des Eingangssignals:

$$g(f) = \left. \frac{U_{\text{Aus}}}{U_{\text{Ein}}} \right|_f \quad (6)$$

womit wir den Ausgangssignal in einem kleinen Intervall df bestimmen können als

$$d \langle U_{\text{Aus}}^2 \rangle = g(f)^2 d \langle U_{\text{Ein}}^2 \rangle = 4kTRg(f)^2 df \quad (7)$$

Nach Integration und Mitberücksichtigung des Verstärkers erhalten wir also

$$\langle U_{\text{Aus}}^2 \rangle = 4kTR \underbrace{\int_0^\infty g(f)^2 df}_{=B} + \langle U_V^2 \rangle \quad (8)$$

$$= 4kTRB + \langle U_V^2 \rangle \quad (9)$$

B wird als äquivalente Rauschbandbreite bekannt. Aus (9) lässt sich die Boltzmannkonstante bestimmen gemäß

$$k = \frac{\langle U_{\text{Aus}}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB}. \quad (10)$$

2.1.2 Messung des Frequenzgangs

Da $g(f)$ a priori nicht bekannt ist, muss man experimentell den Frequenzgang bestimmen. Dazu gibt man durch einen Funktionsgenerator ein Sinus-Signal ein, was durch ein Dämpfungsglied mit $D = 10^{-3}$ gedämpft wird um den Verstärker nicht in Sättigung zu bringen. Durch den Rechner wird automatisch die Messung durchgeführt. Dabei wird ein Signal der Frequenz f eingegeben und eine konstante Eingangsspannung $\langle U^2_{\text{ein}} \rangle$ angelegt und mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung $\langle U^2_{\text{Aus}} \rangle$ gemessen. Dieser Vorgang wird für mehrere Frequenzen wiederholt. Die Messdaten können später numerisch integriert werden.

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U^2_{\text{Aus}} \rangle}}{\sqrt{\langle U^2_{\text{Ein}} \rangle}} \quad (11)$$

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung und zuschaltbarem Bandfilter
- Dämpfungsglied mit 1/1000 Dämpfung
- Beheizbarer Widerstand (Pt4000-Widerstand)
- Heizungsanteil mit integrierter Regelelektronik für den beheizbaren Widerstand
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC

3.2 Aufbau

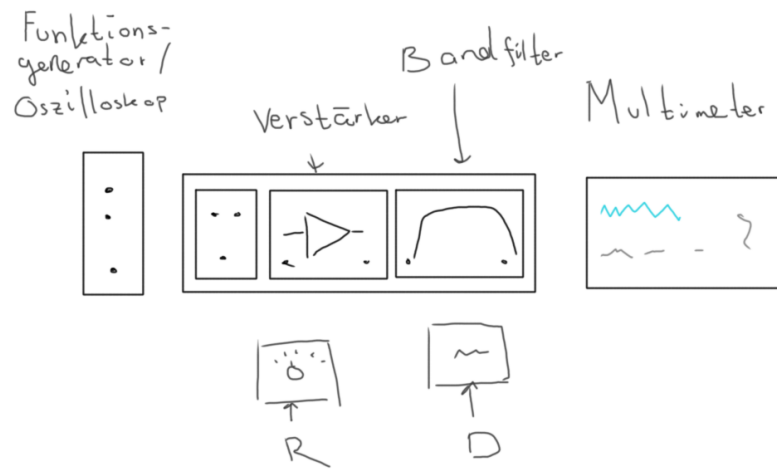


Abbildung 1: Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll 243: Thermisches Rauschen
 17. 01. 2022
 Mike Braunt
 Juan Provencio

Teilaufgabe 1: Qualitative Untersuchung der Rauschspannung
 Qualitative Beobachtung des Spektrums / der Spannung
 mit Oszilloskop zu unterschiedlichen Widerständen.

- Spannungskurve \uparrow für Widerstand \uparrow
- Exponentieller Abfall für hohe Frequenzen \checkmark Noch stärker mit Bandfilter

Teilaufgabe 2: Rauschspannung als Fkt. des Widerstandes
 Für verschiedene Widerstände nimmt das Voltmeter ca. 100 Spannungsmessungen auf

| Widerstand [k Ω] | Effektivwert [mV] | Mittelwert [mV] \pm Standardabw. |
|-----------------------------------|-------------------|------------------------------------|
| 5 kΩ | 2,425 | $2,4079 \pm 0,0085 / \sqrt{102}$ |
| 10 | 3,1066 | $3,1188 \pm 0,0116 / \sqrt{103}$ |
| 15 | 3,6881 | $3,6390 \pm 0,014 / \sqrt{93}$ |
| 20 | 4,1054 | $4,1988 \pm 0,0143 / \sqrt{101}$ |
| 25 | 4,6338 | $4,6552 \pm 0,018 / \sqrt{111}$ |
| 30 | 5,0483 | $5,0701 \pm 0,0189 / \sqrt{101}$ |

* Fehler Widerstände $\pm 0,5\%$
 * Messgenauigkeit Voltmeter $\pm 0,3\%$
 * Zimmertemperatur $22,2^\circ\text{C}$
 * Messung mit Kurzschluss:
 Effektivwert: $0,005888 \text{ mV}$, Mittelwert: $0,00581 \text{ mV}$
 Standardabweichung: $0,00025$ # Messungen = 103

Teilaufgabe 3: Messung des Frequenzganges des Verstärkers + Bandpass
 Mit Dämpfungsglied wird über den Funktionsgenerator
 mittels Oszilloskop der Frequenzgang gemessen.
 Einstellungen siehe Skript

17.01.21
 J.M.

Abbildung 2: Messprotokoll

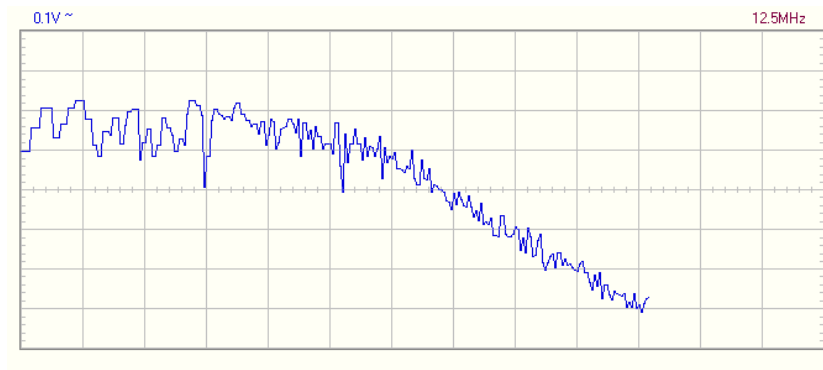


Abbildung 3: Rauschspektrum in einem großen Frequenzintervall

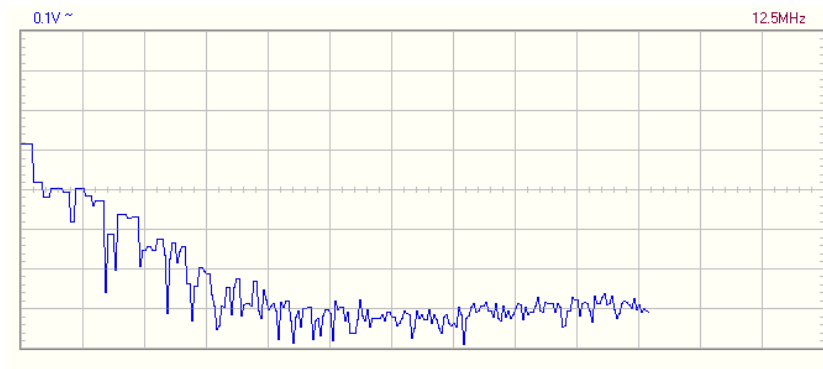


Abbildung 4: Rauschspektrum in einem großen Frequenzintervall mit einem Bandpassfilter

4.2 Auswertung

4.2.1 Anpassung und äquivalente Rauschbandbreite

Als erstes wollen wir den Frequenzgang quantitativ untersuchen und damit schließlich die äquivalente Rauschbandbreite bestimmen, welche notwendig ist um die Boltzmannkonstante zu bestimmen. Dafür haben wir im Python-Skript die Dateien aus Teilaufgabe 3. der Durchführung hochgeladen und mit einer passenden Skala auf Diagramm 1 aufgetragen.

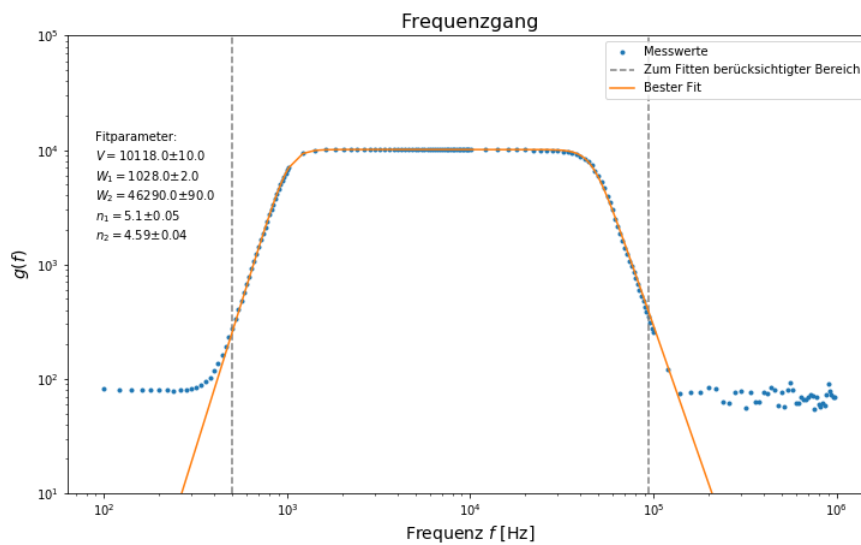


Diagramm 1: Gemessener Frequenzgang inklusive Fit

Dafür haben wir uns auf Gleichung 2 gestützt und über die Messwerte folgende Funktion angepasst:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{\omega_1}\right)^{-2n_1}} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{\omega_2}\right)^{-2n_2}}} \quad (12)$$

Dies entspricht der Überlagerung aus dem Frequenzgang eines Hoch- und eines Tiefpassfilters mit der Verstärkung V , $\omega_{1,2}$ die Grenzfrequenz des Tief bzw. Hochpassfilters und $n_{1,2}$ die Filterordnung des Tief bzw. Hochpassfilters.

Aus diesem Frequenzgang wurde als nächstes die äquivalente Bandbreite

durch numerische Integration bestimmt. Nach dem Python-Skript lautet diese

$$B = (4,73 \pm 2\%) \cdot 10^{12} \text{ Hz} \quad (13)$$

Der Fehler von 2% wurde als der im Praktikumsskript angegebene systematischer Fehler angegeben.

4.2.2 Differenz der Rauschspannung² und Verstärkerrauschspannung² und Bestimmung der Boltzmannkonstante

Als nächstes wurde die in Teilaufgabe 2 gemessene Rauschspannung U_R^2 der Verstärkerspannung bei der Nullmessung U_V^2 abgezogen und gegen den Widerstand aufgetragen.

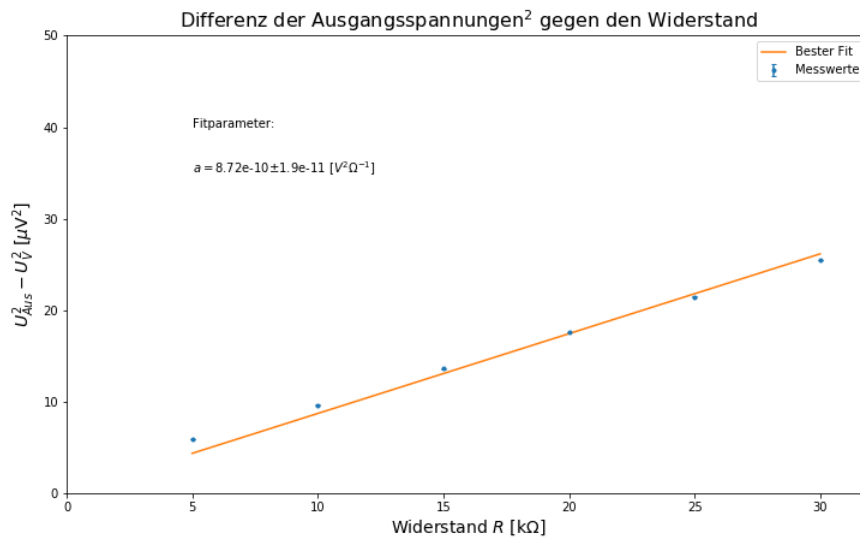


Abbildung 5: Spannungsdifferenz² gegen Widerstand

Daraus ließ sich die Steigung der Gerade feststellen, welche nach der Theorie

$$a = 4k_B T B \quad (14)$$

$$\rightarrow k_B = \frac{a}{4TB} \quad (15)$$

Die Temperatur im Raum wurde gemessen und B wurde bereits bestimmt. Damit ließ sich die Boltzmannkonstante bestimmen als

$$k_B = (1,56 \pm 0,03 \text{ stat.} \pm 0,03 \text{ sys.}) \cdot 10^{-25} \text{ J K}^{-1} \quad (16)$$

Es ist wichtig an dieser Stelle den statistischen von dem systematischen Fehler zu unterscheiden, weil

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir uns mit den Ursachen und Effekte des thermischen Rausches auseinandergesetzt. Als erstes haben wir das Spektrum der Rauschspannung qualitativ beobachtet. Dabei konnte man klar erkennen, dass die Spannungskurve höher wird mit steigendem Widerstand, und dass es einen exponentiellen Abfall bei höheren Frequenzen abgibt, welcher mit einem Bandfilter noch deutlich weiter gesunken wird.

Als nächstes haben wir für verschiedene Widerstände die Rauschspannung gemessen, dabei wurde automatisch durch den Rechner ein Mittelwert über etwa 100 Messungen gebildet und einen entsprechenden Fehler angegeben. Dazu hat man auch eine Messung mit Kurzschluss durchgeführt um die Nullmessung zu berücksichtigen.

Als letztes haben wir den Frequenzgang des Verstärkers bestimmt. Die zugehörige Messung wurde auf eine Datei gespeichert und später in der Auswertung gebraucht.

5.2 Diskussion

Als erstes wollen wir in der Diskussion auf einen scheinbaren Fehler in der Auswertung eingehen. Es fällt in erster Linie bei den Fitparametern des Frequenzgangs, dass die angegebene Verstärkung um den Faktor 10 größer ist als die ursprüngliche Vorhersage. Die weiteren Parametern passen grob zur Vorhersage. Auf diesem Grund entsteht bei der numerischen Integration einen Faktor von 10^2 , welcher nicht den Erwartungen entspricht. Diese Ordnungsgröße übersetzt sich schließlich in der Angabe der Boltzmannkonstante, welche ganze um ganze 2 Größenordnungen vom Literaturwert abweicht. Um die Einheiten der Ausgangsspannung im Einklang mit der Eingangsspannung zu bringen wurde die Ausgangsspannung, welche ursprünglich in mV_{rms} angegeben war, um den Faktor 10^{-3} in V_{rms} gebracht. Im Folgenden werden wir diesen Faktor 10^2 für den Vergleich mit dem Literaturwert korregieren.

Mit dem Fit über den Frequenzgang lässt sich nach der χ^2 -Analyse einen fast perfekten linearen Zusammenhang mit einer Fitwahrscheinlichkeit von 98%. Allerdings bei der χ^2 Analyse des linearen Fits bei der Spannungsdifferenz beträgt die Fitwahrscheinlichkeit 0%. Da man aus der Steigung dieser Gerade zum Teil die Boltzmannkonstante bestimmen will, lässt sich schon vermuten, dass diese stark von dem Literaturwert abweichen wird. Dies ist besonders merkwürdig, denn die Messungen hier automatisch durch einen Rechner durchgeführt wurden und daher der menschliche Faktor nur noch eine geringe Rolle spielt.

Zur Diskussion wollen wir die von uns bestimmte Boltzmannkonstante mit dem Literaturwert (BIPM, 2019) vergleichen:

$$k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{23} \text{ J K}^{-1} \quad (17)$$

Der von uns gemessene Wert weicht um 6 σ -Bereiche von diesem ab, woraus sich deutlich feststellen lässt dass es in der Durchführung des Versuches zu systematischen Fehlern kam. Diese mögen möglicherweise an den Bauteilen liegen, sei es durch eine ungenaue Angabe des Widerstands oder der Dämpfung, welche mit der Zeit von der ursprünglichen Angabe abweichen können. Außerdem wurden die kleinen Rauschspannungen von anderen Bauelementen wie die (möglichst kurzen) Kabeln nicht berücksichtigt, aber es wird angenommen, dass diese nur einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Messung hatten. Ansonsten ließ dieser Versuch wenig Raum für menschlichen Fehler.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik B.Sc..

BIPM. (2019). The International System of Units (9. Aufl.). BIPM.

Anhang

VIII Auswertung

In [1]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
import scipy.integrate as integrate
```

VIII.1/2 Importieren und graphische Darstellung + Fit

In [2]:

```
# Importieren der Daten
f, U_aus = np.loadtxt('data/243/A3.txt', skiprows = 1, usecols = (0,1),
                     unpack=True) # in Hz, U_aus in mV
U_aus = U_aus * 1e-3 # V

# Konstanten und Bestimmung des Frequenzgangs
D = 1e-3
sig_D = 0.002 * D
U_ein = 0.2 # Vrms
sig_U_ein = 0.03 * U_ein
sig_U_aus = 0.03 * U_aus
g = U_aus / (U_ein * D)
sig_g = g * sqrt((sig_U_aus / U_aus) ** 2 + (sig_D / D) ** 2
                + (sig_U_ein / U_ein) ** 2)

# Plot
xmin = 20
xmax = -48

plt.figure(figsize = (12,7))
plt.loglog(f, g, linestyle = 'None', marker='.', label = 'Messwerte')
plt.title('Frequenzgang', size = 16)
plt.xlabel('Frequenz $f$ [Hz]', size = 14)
plt.ylabel('$g(f)$', size = 14)
plt.axvline(f[xmin], ls = '--', color = 'gray')
plt.axvline(f[xmax], ls = '--', color = 'gray',
            label = 'Zum Fitten berücksichtigter Bereich')
plt.ylim(1e1, 1e5)

# Fit
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V / (sqrt(1 + 1 / (f / W1) ** (2 * n1)) * sqrt(1 + (f / W2) ** (2 * n2)
    )))

p0 = [1000, 1000, 50000, 5, 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[xmin:xmax], g[xmin:xmax], p0)

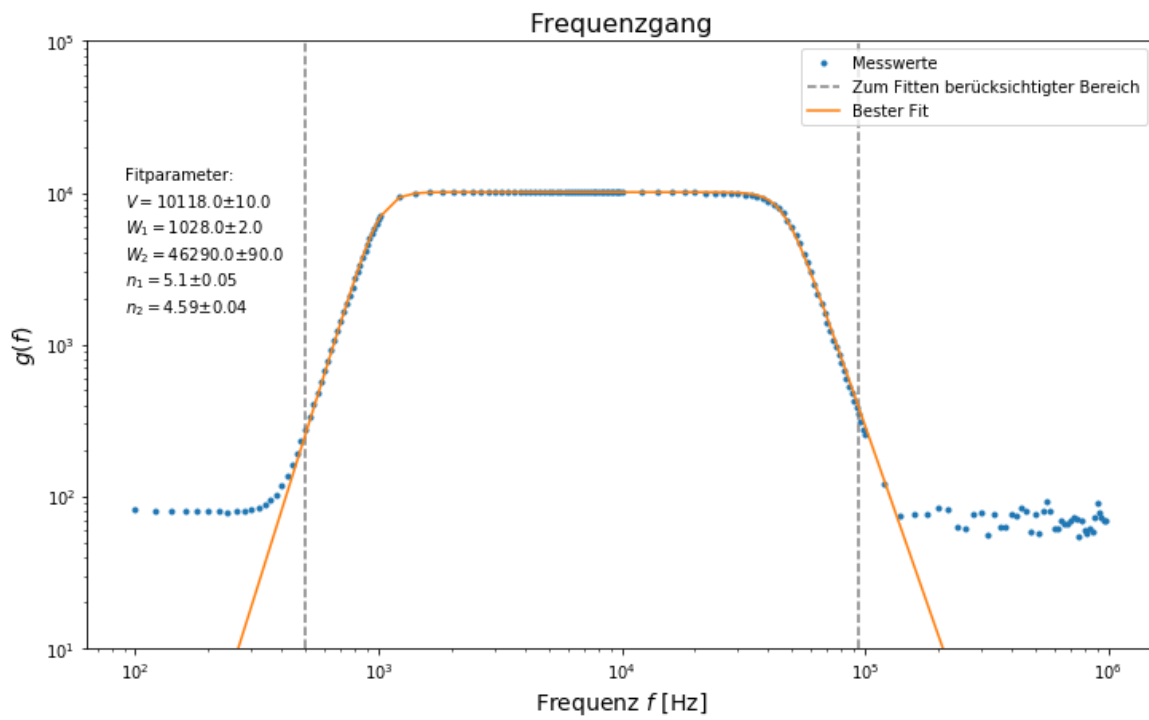
# Ergebnisse des Fits
V = popt[0] # Verstärkung 10 Mal grösser als erwartet
sig_V = sqrt(pcov[0,0])
W1 = popt[1]
sig_W1 = sqrt(pcov[1,1])
W2 = popt[2]
sig_W2 = sqrt(pcov[2,2])
n1 = popt[3]
sig_n1 = sqrt(pcov[3,3])
n2 = popt[4]
sig_n2 = sqrt(pcov[4,4])

plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label = 'Bester Fit')
plt.text(exp(4.5), exp(9.4), 'Fitparameter:')
plt.text(exp(4.5), exp(9), '$V = $' + str(np.round(V, 0)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_V, 0)))
```

```
plt.text(exp(4.5), exp(8.6), '$W_1 = $' + str(np.round(W1, 0)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_W1, 0)))
plt.text(exp(4.5), exp(8.2), '$W_2 = $' + str(np.round(W2, -1)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_W2, -1)))
plt.text(exp(4.5), exp(7.8), '$n_1 = $' + str(np.round(n1, 2)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_n1, 2)))
plt.text(exp(4.5), exp(7.4), '$n_2 = $' + str(np.round(n2, 2)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_n2, 2)))

plt.legend(loc = 'upper right')
plt.savefig('images/243/V243Diagramm1.png')
plt.show()
```

/usr/local/lib/python3.7/dist-packages/ipykernel_launcher.py:33: RuntimeWarning: invalid value encountered in power



In [3]:

```
# Güte des Fits
chi2_ = np.sum((fit_func(f[xmin:xmax], *popt) - g[xmin:xmax]) ** 2 / sig_g[xmin:xmax] ** 2)
dof = len(sig_g[xmin:xmax]) - 1 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red = chi2_/dof

print("chi2 =", chi2_)
print("chi2_red =", chi2_red)

prob = np.round(1 - chi2_.cdf(chi2_,dof),2) * 100
print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%")
```

```
chi2 = 83.86209407197536
chi2_red = 0.7487686970712086
Wahrscheinlichkeit = 98.0 %
```

VIII.3 Numerische Integration

In [4]:

```
# Numerische Integration
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2) ** 2

B = integrate.quad(fit_func_square, f[xmin], f[xmax], args = tuple(popt)) # Hz
print('Das Integral beträgt: {value:.4e}'.format(value = B[0]))
```

```
Das Integral beträgt: 4.7245e+12
```

VIII.4 Bestimmung der Boltzmann-Konstante

In [5]:

```
# Messwerte
R = np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3]) # kOhm
sig_R = R * 0.05
U_aus = np.array([2.425, 3.1066, 3.6881, 4.1954, 4.6338, 5.0493]) * 1e-3 # V
sig_U_aus = np.array([0.00845, 0.0116, 0.014, 0.0149, 0.019, 0.0199]) * 1e-3
N = np.array([102, 103, 99, 101, 111, 101]) # Anzahl Messungen
err_U_aus = sig_U_aus / sqrt(N)

U_V = 0.00587 * 1e-3 # V
sig_U_V = 0.00025 * 1e-3
N_V = 103
err_U_V = sig_U_V / sqrt(N_V)

# Differenz  $U_R^2 - U_V^2$ 
D_U = U_aus ** 2 - U_V ** 2
sig_D = sqrt((err_U_aus * 2 * U_aus) ** 2 + (err_U_V * 2 * U_V) ** 2)

# Plot
plt.figure(figsize = (12,7))
plt.errorbar(R, D_U, yerr = sig_D, fmt = '.', capsize = 2, label = 'Messwerte')
plt.axis([0,3.2e4,0,.5e-4])
plt.title('Differenz der Ausgangsspannungen $^2$  gegen den Widerstand', size = 16)
plt.xlabel('Widerstand  $R$  [k $\Omega$ ]', size = 14)
plt.xticks([0, 5e3, 10e3, 15e3, 20e3, 25e3, 30e3],
            [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30])
plt.ylabel('  $U_{\text{Aus}}^2 - U_V^2$  [ $\mu\text{V}^2$ ]', size = 14)
plt.yticks([0, 0.00001, 0.00002, 0.00003, 0.00004, 0.00005],
            [0, 10, 20, 30, 40, 50])

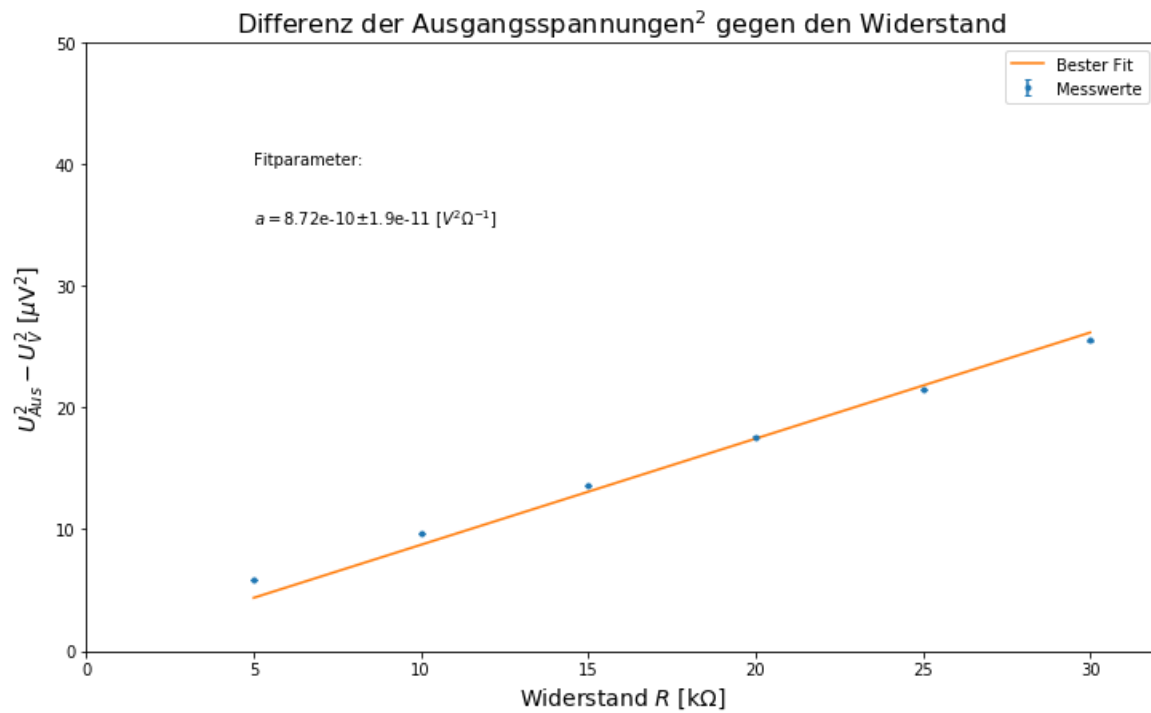
# Fit
def line(x, a):
    return a * x

popt, pcov = curve_fit(line, R, D_U)

# Fitergebnisse
a = popt[0] #  $\text{V}^2 \text{ Ohm}^{-1}$ 
sig_a = sqrt(pcov[0,0])

plt.plot(R, line(R, *popt), label = 'Bester Fit')
plt.text(5e3, 4e-5, 'Fitparameter:')
plt.text(5e3, 3.5e-5, '$a = $' + str(np.round(a, 12)) + '$\pm$'
        + str(np.round(sig_a, 12)) + ' [ $\text{V}^2 \Omega^{-1}$ ]\n')

plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('images/243/V243Diagramm2.png')
plt.show()
```



In [6]:

```
# Güte des Fits
chi2_ = np.sum((line(R, *popt) - D_U) ** 2 / sig_D ** 2)
dof = len(D_U) - 1 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red = chi2_/dof

print("chi2 =", chi2_)
print("chi2_red =", chi2_red)

prob = np.round(1 - chi2.cdf(chi2_,dof), 2) * 100
print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%")
```

```
chi2 = 161888.32011063426
chi2_red = 32377.664022126854
Wahrscheinlichkeit = 0.0 %
```

In [7]:

```
# Theorie: a = 4 k T B
# Messungen:
T = 273.15+22.2 # K
sig_T = 0.2
a = popt[0]
sig_a = sqrt(pcov[0,0])

kB = a / (4 * T * B[0]) * 1e25 # 10*-25 V^2 Ohm^-1 K^-1 Hz^-1 = m^2 kg s^-2 K^-1
sig_kB = kB * sqrt((pcov[0,0] ** 0.5 / popt[0]) ** 2 + (sig_T / T) ** 2)
sys_kB = kB * 0.02
print('Boltzmann Konstante: k_B =', '(', np.round(kB,2), '+/-',
      np.round(sig_kB,2), 'stat. +/-', np.round(sys_kB, 2), 'syst. ) * 1e-25 J K^-1')
```

Boltzmann Konstante: k_B = (1.56 +/- 0.03 stat. +/- 0.03 syst.) * 1e-25 J K⁻¹

In []: