ZUSAMMENFASSUNG

MATHE

Methoden der Mathematischen Physik I: Funktionentheorie

SS 22, Salmhofer

Juan

15. Juli 2022

Inhaltsverzeichnis

0. Extras

0.1 Einleitung

0.1.1 Andere Projekte:

Theo I Guide

Theo II Guide

Theo III Guide

Ana I Zusammenfassung

Ana II Zusammenfassung

Ana III Zusammenfassung

LA I Zusammenfassung

Ex I Formelsammlung

Ex II Formelsammlung

Ex III Formelsammlung

1. Holomorphe Funktionen und Cauchy'scher Integralsatz

1.1 Kurven und Wegintegrale

Orientierte Kurven

Parametrisierung *Definition 1.1*

Eine parametrisierte Kurve ist eine Stückweise C^1 Abbildung

$$\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n \tag{1.1.1}$$

$$t \mapsto \gamma(t). \tag{1.1.2}$$

Reparametrisierung *Definition 1.2*

Es sei $\varphi : [\theta_0, \theta_1] \to [t_0, t_1]$ und existieren folgende nichtverschwindende Grenzwerte:

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} \neq 0, \qquad \lim_{\theta \to \theta_1} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} \neq 0. \tag{1.1.3}$$

Dann ist $\eta : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\eta = \gamma \circ \varphi. \tag{1.1.4}$$

Voraussetzungen

φ ein Homöomorphismus
$\varphi\big|_{(\theta_0, \theta_1)}$ ein C^1-Diffeo.

φ induziert auf γ eine Reparametrisierung, also nennen wir φ die Reparametrisierung.

Orientierungserhaltende Reparametrisierung *Definition 1.3*

Eine Reparametrisierung φ heißt orientierungserhaltend, falls

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} > 0 \;\forall\; \theta \in (\theta_0, \theta_1). \tag{1.1.5}$$

Kurvenintegrale

Voraussetzungen

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und γ eine parametrisierte Kurve mit $\gamma([t_0, t_1]) \subset \Omega$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld

Linienintegral *Definition, Lemma 1.5*

Wir definieren das Linienintegral einer Kurve γ entlang eines Vektorfeldes als

$$I_\gamma(F) = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma) \cdot \dot{\gamma}\, \mathrm{d}t\,. \tag{1.1.6}$$

$I_\gamma(F)$ ist invariant unter orientierungserhaltenden Reparametrisierungen.

Endliche Zerlegbarkeit *Definition 1.8*

Wir nennen $A \subset \mathbb{R}^2$ endlich zerlegbar, wenn A offen ist, $\overline{A}$ kompakt ist, und wenn A durch Schnitte längs Geradenstücken in endlich viele verallgemeinerte Dreiecke zerlegt werden kann.[1]

Satz von Green-Stokes *Satz 1.9*

Voraussetzungen

$A \subset \mathbb{R}^2$ endlich zerlegbar
$F \in C^1(\Omega)$

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld F gilt:

$$\int_A \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \int_{\partial A} F \cdot \mathrm{d}x\,. \tag{1.1.7}$$

1.2 Kompleze Zahlen und Funktionen

Komplexe Funktionen

Linearität *Definition 1.10*

Eine additive Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist

- $\mathbb{R}$-linear, falls $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $L(\lambda z) = \lambda\, L(z)$,
- $\mathbb{C}$-linear, falls $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ gilt $L(\lambda z) = \lambda\, L(z)$

Komplexe Differenzierbarkeit *Definition 1.13*

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, wenn folgender Grenzwert eindeutig existiert:

$$f'(z_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \delta) - f(z_0)}{\delta}. \tag{1.2.1}$$

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen *Lemma 1.14*

Eine reell differenzierbare Funktion $f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ ist genau dann komplex differenzierbar wenn folgendes gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v, \tag{1.2.2}$$
$$\partial_y u = -\partial_x v. \tag{1.2.3}$$

[1] In anderen Worten, A ist eine nicht all zu hässliche Menge

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen sind erfüllt $\iff \partial_{\overline{z}} f = 0$.

Holomorphie *Definition 1.13*

Eine Funktion f auf Ω ist **holomorph**, wenn $f\big|_\Omega$ komplex differenzierbar ist und die Ableitung $f'\big|_\Omega$ stetig ist.

Insbesondere ist f holomorph, wenn (es reell differenzierbar ist, die Ableitung stetig ist *und*) die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind.

Die Summe und das Produkt holomorpher Funktionen sind holomorph. $\frac{1}{f}$ ist holomorph, falls $f\big|_\Omega$ keine Nullstellen hat.

1.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

1.3.1 Der Cauchy'sche Integralsatz

Cauchy'scher Integralsatz *Satz 1.16*

Aus dem Kurvenintegral einer komplexen Funktion folgt für eine holomorphe Funktion f in über eine endlich zerlegbare Menge

$$\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{1.3.1}$$

Voraussetzungen

Ω offen
$f\big|_\Omega$ holomorph
A mit $\overline{A} \in \Omega$ endlich zerlegbar

Konturdeformation *Korollar 1.17*

Bei holomorphen Funktionen können wir uns oft einen schöneren Integrationsbereich aussuchen. Dadurch, dass unter ganz großzügigen Bedingungen ein Integral verschwindet, so können wir diese Bedingungen bei ganz vielen Mengen benutzen, über die alle das Integral verschwindet.

Voraussetzungen

A, B endl. zerlegbar
$\overline{A} \subset B$
$B \setminus \overline{A} \subset \Omega$

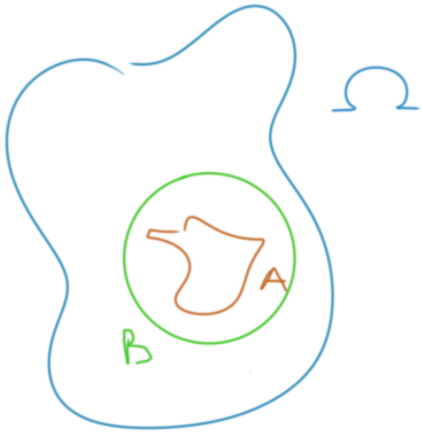

Abbildung 1.1: Konturdeformation

Wenn f auf ganz Ω holomorph ist, und wir das Integral über A ausrechnen wollen, wobei wir wissen, dass es verschwindet, so wissen wir ebenfalls auch, dass es in der größeren und schöneren Menge B auch verschwindet. Dies wird besonders nützlich sein, wenn wir gleich zu den Singularitäten kommen, wo der Wert eines Integrals nicht mehr trivialerweise Null ist. Es gilt:

$$\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.3.2}$$

1.3.2 Linienintegrale der Potenzfunktion

Kreisintegral *Konvention*

Das Integral über einen Kreis mit Radius $r = |z - z_0|$ schreiben wir als

$$\int_r f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{\partial B_r(z_0)} = \int_0^{2\pi} ir\,\mathrm{e}^{i\theta} f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{1.3.3}$$

(Negative) Potenzfunktion *Lemma 1.19*

Für eine endlich zerlegbare Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \overline{A}$ gilt:

$$\int_{\partial A} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.4}$$

Wenn $0 \in A$, dann gilt

$$\int_{\partial A} \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = 2\pi i \delta_{n,1}. \tag{1.3.5}$$

1.3.3 Die Cauchy'sche Integralformel

Cauchy'sche Formel *Satz 1.20*

Für eine holomorphe Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt für jedes $z_0 \in A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.3.6}$$

Voraussetzungen

f holomorph
A mit $\overline{A} \in \Omega$ endl. zerlegbar

Mittelwerteigenschaft *Satz 1.21*

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$ so gewählt, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$, dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{1.3.7}$$

Voraussetzungen

Ω offen
f holomorph

2. Hauptsätze der Funktionentheorie

2.1 Potenzreihen und analytische Funktionen

2.1.1 Reihen

Die geometrische Reihe *Lemma 2.1*

Die geometrische Reihe konvergiert für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ absolut mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \tag{2.1.1}$$

außerdem konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k q^n \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{2.1.2}$$

auch absolut, unter den Bedingungen von vorher.

2.1.2 Analytische Funktionen

Analytische Funktionen *Definition 2.5*

Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt analytisch auf Ω, wenn es zu jedem Punkt z_0 in Ω ein $r_0 > 0$ gibt, so dass für alle $z \in \Omega$ mit $|z - z_0| < r_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.1.3}$$

sich die Funktion als ihre Taylor-Entwicklung darstellen lässt.

2.2 Wichtige Sätze über holomorphe Funktionen

2.2.1 Holomorphe Funktionen sind analytisch

Holomorphie $\iff$ Analyitizität *Satz 2.6, 2.7*

Eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist analytisch.
Es gilt für alle $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.2.1}$$

Voraussetzungen

Ω offen,
f holomorph

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_0} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \,. \tag{2.2.2}$$

Es gilt

$$f \text{ ist holomorph auf } \Omega \iff f \text{ ist analytisch auf } \Omega \tag{2.2.3}$$

Taylor-Koeffizienten *Korollar 2.9*

Da die Reihendarstellung aus Satz 2.6 in (2.2.1) gleich der Taylor-Entwicklung ist, gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_0} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \,. \tag{2.2.4}$$

Abschätzung *Satz 2.10*

Es gilt

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \le \frac{1}{r^n} \right| \cdot \sup \{ |f(w)| \mid w \in \partial B_{r_0}(z_0) \}. \tag{2.2.5}$$

Voraussetzungen

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph

Ganz *Definition 2.11*

Eine Funktion f heißt ganz oder ganz analytisch, wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz von Liouville *Satz 2.12*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und beschränkt, dann ist f konstant. Dies folgt daraus, dass der Konvergenzradius nach unendlich schießt. Damit die Abschätzung aus (2.2.5) gilt muss also jede Potenz von $(z - z_0)^n$ mit $n \ge 1$ verschwinden also $f = a_0$.

2.2.2 Der Identitätssatz

Gebiet *Definition 2.17*

$G \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn G offen und zusammenhängend ist

Identitätsatz *Satz 2.18*

Folgende Aussagen sind äquivalent

Voraussetzungen

G Gebiet
$f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph

1. $f = g$ heißt $f(z) = g(z)\ \forall\ z \in G$
2. $\{w \mid f(w) = g(w)\}$ hat einen Häufungspunkt in G
3. $\exists\ z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)\ \forall\ k \in \mathbb{N}_0$

2.2.3 Der Satz über die umgekehrte Funktion

Umkehrsatz *Satz 2.19*

Voraussetzungen

Ω offen,
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph,
$f'(z_0) \neq 0$

Sei Ω offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z_0) \neq 0$ mit $U_r := f(B_r(z_0))$. Dann gilt

1. $\exists r > 0$ und $g : U_r \to \Omega, w \mapsto g(w)$ mit
$$\forall\ w \in U_r\ :\ f(g(w)) = w \tag{2.2.6}$$
und
$$\forall z \in B_r(z_0)\ :\ g(f(z)) = z. \tag{2.2.7}$$
Die Funktion g ist holomorph auf U_r und $\forall w \in U_r$ gilt
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{f'(g(w))}. \tag{2.2.8}$$
Man nennt $f\big|_{B_r(z_0)}$ *biholomorph.*
2. $f(B_r(z_0))$ ist offen.

2.3 Konvergenz holomorpher Funktionen

2.3.1 Erinnerung: Konvergenz

Sei X ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $f_n : X \to \mathbb{C}$.

Punktweise Konvergenz

Die Folge f_n konvergiert punktmäßig gegen eine Funktion f, wenn
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ x \in X\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Die Folge f_n an der Stelle x wirkt ab ein bestimmtes $n = n_0$ sehr gut als Näherung für die Funktion f. Dieses n_0 muss nicht für jeden x der selbe sein, d.h., n_0 hängt von x ab.

Gleichmäßige Konvergenz

Die Folge f_n konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f, wenn
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in X\ \forall\ n \geq N_0\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3.2}$$

Die Folge f_n an allen Stellen $x \in X$ ist ab ein bestimmtes $n = N_0$ eine sehr gute Näherunf von f. Dieses N_0 ist für alle x gültig.

2.3.2 Vertauschung von Integral und Grenzwert

Vertauschung von Integral und Grenzwert
Satz 2.24, Korollar 2.25

Sind die nebenstehenden Bedingungen erfüllt, so darf man einen Limes-Prozess mit dem Integral vertauschen. Beispiele davon sind natürlich Limiten, aber auch unendliche Reihen wenn die Reihe $\sum \varphi_n = \varphi$ gleichmäßig konvergent auf K ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n \,\mathrm{d}x = \int_K \lim_{n\to\infty} f \,\mathrm{d}x \tag{2.3.3}$$

Voraussetzungen

$m, d \geq 1$,
$K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt,
(f_n) Folge stetiger Fkt.
$f_n : K \to \mathbb{R}^d$,
f_n gleichmäßig $\to f$

Ableitung bei kompakter Konvergenz *Satz 2.26, Korollar 2.27*

Sei eine Folge $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen mit Ω offen, die gleichmäßig auf einer kompakten Teilmenge von Ω konvergieren, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)} \to f^{(k)} \tag{2.3.4}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und zwar kompakt.

Voraussetzungen

f_n holomorph,
konvergiert gleichmäßig auf kompakten $U \subset \Omega$

Kompakt konvergente Reihen holomorpher Funktionen haben als Grenzwerte holomorphe Funktionen und können gliedweise differnziert werden.

3. Residuensatz und Residuenkalkül

3.1 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. S ist eine diskrete Teilmenge von U, wenn es zwischen jedem Punkt s in S einen Abstand $r > 0$ gibt,

$$\{z \in U \mid |z - s| < r\} \cap S = \{s\}. \tag{3.1.1}$$

Sei $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine isolierte Singularität.

Hebbare Singularität *Definition 3.1, Satz 3.5*

Es gibt mehrere Arten die Hebbarkeit einer Singularität nachzuweisen. z_0 heißt hebbare Singularität, falls

1. durch geeignete Definition von $f(z_0)$ die Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph wird;
2. f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, denke an

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1; \tag{3.1.2}$$

3. der Hauptteil der Laurentreihe, d.h. alle Koeffizienten mit $n < 0$ verschwinden.

Pol *Definition 3.1*

Man bezeichnet z_0 als Pol, wenn z_0 keine hebbare Singularität ist, aber $\exists n \in \mathbb{N}$, s.d.

$$z \mapsto (z - z_0)^n f(z) \tag{3.1.3}$$

doch eine hebbare Singularität hat. Die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ für die das gilt nennt man die Ordnung des Pols. Als Beispiel ist $z_0 = i$ *ein* Pol 1. Ordnung der Funktion

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 + 1} \tag{3.1.4}$$

Wesentliche Singularität *Definition 3.1*

z_0 ist eine wesentliche Singularität von f, wenn es weder hebbar noch ein Pol ist.

Meromorph *Definition 3.1*

Voraussetzungen

$S \subset U$ diskret,
$f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph,
s Pol $\forall s \in S$

Man nennt f meromorph auf U, falls es bei jedem $s \in S$ einen Pol hat.

Laurentreihe *Satz 3.3*

Wir konstruieren einen Kreisring $\mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}$ mit innerem Radius ρ_1 und äußerem Radius ρ_2, s.d.

$$f : \mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}(0) \mapsto \mathbb{C} \tag{3.1.5}$$

holomorph ist. Für $r \in (\rho_1, \rho_2)$ ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w \qquad \forall\, n \in z \tag{3.1.6}$$

unabhängig von n und die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{3.1.7}$$

konvegiert absolut und kompakt in $\mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}(0)$. Wir definieren den Hauptteil der Laurentreihe als der mit negativen Potenzen

$$H = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \tag{3.1.8}$$

und der konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho_1$. D.h. es konvergiert sogar außerhlab des Kreisrings wenn $\rho_2 < \infty$, aber nicht unbedingt um 0 selbst.

Der Nebenteil der Laurentreihe mit positiven Potenzen

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.1.9}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho_2$.

Wir konstruieren diese Konvergenzbedingungen auf dem Kreisring $\mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2}$. Der Radius ρ_2 streckt sich aus bis zu der Stelle, wo $f : \mathcal{K}_{\rho_1,\rho_2} \to \mathbb{C}$ nicht mehr holomorph ist, d.h., bis es an eine weitere Polstelle trifft. Somit ist auch der Konvergenzradius ρ_2 des Nebenteils der Abstand von der Singularität zur nächsten Singularität.

3.2 Residuen und Residuensatz

Residuum *Definition 3.9*

Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität bei z_0 mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{3.2.1}$$

Das Residuum von f bei z_0 ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = c_{-1} \tag{3.2.2}$$

Residuensatz *Satz 3.10*

Sei $S \subset U$ eine diskrete Teilmenge und $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Außerdem A endlich zerlegbar und $\overline{A} \subset U$ kompakt und $\partial A \cap S = \emptyset$. Dann ist

$$\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap A} \operatorname{Res}_{z_0} f \tag{3.2.3}$$

3.3 Residuenkalkül

3.3.1 Residuen an Polstellen

Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ habe an der Stelle z_0 einen Pol n-ter Ordnung. $g : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph um z_0

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \tag{3.3.1}$$

Residuum am Pol *Satz 3.12*

Voraussetzungen

$g : U \to \mathbb{C}$ holomorph

Das Residuum an einem Pol n-ter Ordnung einer Funktion wie in (3.3.1) ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}. \tag{3.3.2}$$

3.3.2 Berechnung von Integralen durch Residuen

Sei die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Satz zur Berechnung von Integralen *Satz 3.13*

Voraussetzungen

$f : \overline{\mathbb{H}} \setminus S \to \mathbb{C}$ stetig,
$f : \mathbb{H} \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=i}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f \tag{3.3.3}$$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Sei $S = \{z_1, \ldots, z_n\}$ und $f : \overline{\mathbb{H}} \setminus S$ stetig und $f : \mathbb{H} \setminus S$ sogar holomorph,
2. $\lim\limits_{|z| \to \infty} |zf(z)| = 0$ gleichmäßig in $0 \le \arg(z) \le \pi$,

3. die Grenzwerte

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B f(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \lim_{A\to-\infty}\int_A f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.3.4}$$

existieren, und zwar beide und unabhängig von einander.

Wir parametrisieren ein Kurvenintegral entlang der reellen Achse mit der Kurve $\mathcal{C}$ von $-R$ zu R. Dann schließen wir einen Halbbogen mit Radius R an den Enden dieser Linie wie auf 3.1 dargestellt. Dann lassen wir $R\to\infty$. Dann benutzen wir das **Jordan'sche Lemma** und sagen, dass für eine Funktion der Form

$$\int_{\mathcal{K}_R} f(z)\mathrm{e}^{itz}\,\mathrm{d}z \tag{3.3.5}$$

mit dem Halbkreis $\mathcal{K}_R$, das Integral im Grenzwert verschwindet.

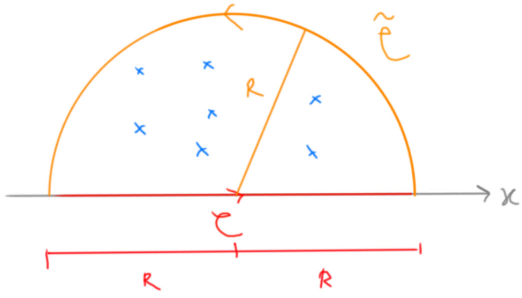

Abbildung 3.1: Konstruktion für Uneigentliches Integral

Somit haben wir im Limes des Integrals über eine Kurve entlang der reellen Achse, eigentlich per dem Residuensatz die Summe über alle Residuen auf der oberen Halbebene.

3.3.3 Residuenrezept

Zur Ausrechnung des Residuums, bzw. eines uneigentliches Integrals haben wir folgende Anleitung gegeben:

Gegeben sei

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x \tag{3.3.6}$$

mit $\alpha\in\mathbb{C}$, P,Q Polynome.

1. Konvergenz des Integrals
   i) Q hat keine reelle Nullstellen,
   ii) $\alpha\in\mathbb{R}$,
   iii) $\deg P\leq 2+\deg Q$

   oder

   $\deg P\leq 1+\deg Q$ und $\alpha\neq 0$,

   dann konvergiert das Integral.
2. Ausrechnung des Integrals
   i) $\alpha>0$: Man parametrisiert die Kurve auf der oberen Halbebene, das Integral berechnet sich aus

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{z_0\in S\cap\mathbb{H}}\mathrm{Res}_{z_0} f \tag{3.3.7}$$

ii) $\alpha < 0$: Man parametrisiert auf der unteren Halbebene und fügt aufgrund der Orientierung den Faktor -1 hinzu:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{i\alpha x} \,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{z_0 \in S \cap -\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{z_0} f \tag{3.3.8}$$

iii) $\alpha = 0$

Man darf sich aussuchen, ob man oben oder unten schließt. Es sollte hoffentlich das gleiche rauskommen[1].

[1]Danke Sarah :)

4. Kausalität und Analytizität

4.1 Kausalität

Es kann keine Antwort auf ein Signal kommen, bevor das Signal überhaupt losgeschickt wurde.

Wir gehen davon aus, dass die betrachteten Funktionen absolut integrierbar sind, d.h.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty \tag{4.1.1}$$

Fouriertransformierte

Wir benutzen folgende Definition der Fouriertransformierte:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{i\omega t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{i\omega t} \,\mathrm{d}t \qquad | f(t) = 0 \ \forall \ t < 0 \tag{4.1.2}$$

4.2 Analytizität in der oberen Halbebene

Einige Eigenschaften (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Satz 4.1*

Sei wieder die Funktion f absolut integrierbar. Dann gilt

1. die Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$ ist für alle $\omega \in \mathbb{R}$ wohldefiniert,

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1, \tag{4.2.1}$$

ist stetig und $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

2. Wenn außerdem $f(t) = 0 \ \forall \ t < 0$, dann ist $\hat{f}$ für alle $z \in \overline{\mathbb{H}}$ wohldefiniert, auf $\mathbb{H}$ holomorph, auf $\overline{\mathbb{H}}$ stetig und

$$\lim_{|z|\to\infty} \hat{f}(z) = 0 \tag{4.2.2}$$

gleichmäßig für $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

4.3 Dispersionsrelationen

????