11. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ Σ___

11.1 Wellengleichung

Gegeben ist die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1}$$

a) **Gesucht** sind die Bedingungen für a unter welchen $\xi = A\sin(\omega t - kx)$ eine Lösung ist. Wir setzen ξ ein:

$$-Ak^2 \sin(\omega t - kx) = -\frac{1}{a^2}A\omega^2 \sin(\omega t - kx) \tag{2}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{3}$$

$$\rightarrow a = \frac{\omega}{k} \tag{4}$$

b) Aus der Dimensionanalyse von a lässt sich folgern:

$$\left[\frac{\omega}{k}\right] = \mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{m} \tag{5}$$

a hat also die Einheit einer Geschwindigkeit. Wir können sie mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im gegebenen Medium identifizieren.

c) Die Funktion $\xi = \frac{c_1}{(x - c_2 t)^2 + c_3}$ ist eine Lösung, falls:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{6}$$

Die jeweiligen Ableitungen geben wir aus Mathematica ein:

$$\frac{8c_1(-c_2 t + x)^2}{(c_3 + (-c_2 t + x)^2)^3} - \frac{2c_1}{(c_3 + (-c_2 t + x)^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{8c_1 c_2^2(-c_2 t + x)^2}{(c_3 + (-c_2 t + x)^2)^3} - \frac{2c_1 c_2^2}{(c_3 + (-c_2 t + x)^2)^2}\right) \tag{7}$$

Beide Terme sind gleich genau dann, wenn $a = \pm c_2$. Die Geschwindigkeit mit der sich der Puls ausbreitet, per Teilaufgabe b), ist a, also ist hier $\pm c_2$.

d) Geg.:

- Massenbelegung: $\mu = 100\ \mathrm{gm\ m^{-1}}$
- Spannkraft: $\tau = 1000\ \mathrm{N}$
- Wellenfrequenz: $\nu = 5\ \mathrm{Hz}$

Wir benutzen für η die Lösung zur Wellengleichung:

$$\eta = A \sin(\omega t - kx) \tag{8}$$

Von oben wissen wir, dass a die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Stellen wir um, so finden wir:

$$\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$\iff \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{a^2} \widehat{=} \frac{\mu}{\tau} \tag{11}$$

$$\iff a = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{12}$$

$$= 100 \text{ m s}^{-1} \tag{13}$$

Wir nutzen $c = \lambda \cdot \nu$ und finden

$$\lambda = 20 \text{ m} \tag{14}$$

11.2 Polarisierte, Ebene Welle

a) Analog zu der Vorlesung leiten wir zunächst die Wellengleichung für das magnetische Feld her. Ausgehend von den Maxwellgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{18}$$

wollen wir einen Ausdruck der allgemeinen Form $a\nabla^2 \mathbf{B} = c\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$ erhalten: Als erstes leiten wir 17 partiell nach der Zeit ab:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{20}$$

Zunächst setzen wir $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ aus 18 ein:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{21}$$

Jetzt benutzen wir folgende Identität: $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\big(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}\big) = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{22}$$

Aus 16 folgt $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, also:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{23}$$

Wie erwartet ist diese Gleichung in der Form identisch zu der in der Vorlesung hergeleitete Wellengleichung für das elektrische Feld.

$$\tag{24}$$

b) Huh, stimmt. $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_x \cdot B_0 \cos(\omega t - kz)$ ist eine Lösung zu dieser Gleichung. Ich bin überzeugt davon. Nach Auflösen der Gleichung erhlten wir

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\big(-B_0 k^2 \cos(\omega t - kz)\big)\hat{\mathbf{e}}_x = -B_0 \omega^2 \cos(\omega t - kz)\hat{\mathbf{e}}_x \tag{25}$$

$$\frac{k^2}{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega^2 \qquad \Big| c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \tag{26}$$

$$c^2 k^2 = \omega^2 \tag{27}$$

$$ck = \omega \tag{28}$$

Daraus lesen wir ab, k und ω unterscheiden um die Einheiten und um den konstanten Faktor der Phasengeschwindigkeit c.

c) Aus diesem gegebenen magnetischen Feld bestimmen wir mithilfe der Maxwell-Gleichungen das elektrische Feld. Dadurch, dass sowohl $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ wissen wir, dass $E \perp B$ gelten muss. Außerdem breitet sich unsere Welle in z-Richtung. Deshalb wissen wir, das elektrische Feld muss von der Form

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot E_0 \cos(\omega t - kz) \tag{29}$$

sein. Durch Anwendung von 18 auf unser Magnetfeld $\mathbf{B}$ erhalten wir:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} B_x \end{pmatrix} = -\hat{\mathbf{e}}_y \cdot B_0 k \sin(\omega t - kz) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30}$$

Dies können wir leicht nach t integrieren:

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot B_0 \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kx) \qquad \Big| \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \tag{31}$$

$$\frac{1}{c}\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot B_0 \cos(\omega t - kz) \tag{32}$$

Daraus folgt, dass $E_0 = B_0 c$ und somit ist das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot B_0 c \cos(\omega t - kz) \tag{33}$$

d) Nun interessiert uns der Poyntingvektor:

$$\mathbf{S}(z,t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{34}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_x E_y \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$= -\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \frac{B_0 E_0}{\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \tag{36}$$

Die zeitlich gemittelte Intensität dieses Vektors ist:

$$\langle \mathbf{S}(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(z,t)\ \mathrm{d}t \qquad |\text{ignoriere Richtung} \tag{37}$$

$$= \frac{B_0 E_0}{T \mu_0} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz)\ \mathrm{d}t \qquad |u = \omega t - kz \tag{38}$$

$$\mathrm{d}u = \omega\ \mathrm{d}t$$

$$u(0) = -kz;\ u(T) = \omega T - kz$$

$$= \frac{B_0 E_0}{T \mu_0 \omega} \int_{u(0)}^{u(T)} \cos^2 u\ \mathrm{d}u \tag{39}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

$$= \frac{B_0 E_0}{2T \mu_0 \omega} \int_{u(0)}^{u(T)} \cos 2u + 1\ \mathrm{d} \qquad |v = 2u \tag{42}$$

$$\mathrm{d}v = 2\ \mathrm{d}u \tag{43}$$

$$= \frac{B_0 E_0}{2T\mu_0\omega}[u]_0^T + \frac{B_0 E_0}{2\mu_0\omega}\int_{v(u(0))}^{v(u(T))} \frac{\cos v}{2}\,\mathrm{d}v \tag{44}$$

$$= \frac{B_0 E_0}{2T\mu_0\omega}\left([u]_0^T + \left[\frac{\sin v}{2}\right]_{v(u(0))}^{v(u(T))}\right) \tag{45}$$

Als Ergebnis zu dieser Rechnung erhalten wir

$$\langle S(z)\rangle = \frac{B_0 E_0}{2T\mu_0\omega}\left(\omega T + \frac{\sin\left(2(\omega t - kz)\right)}{2} - \frac{\sin\left(-2kz\right)}{2}\right) \tag{46}$$

$$= \frac{B_0 E_0}{2T\mu_0\omega}\left(2\omega t + \sin\left(2(\omega t - kz)\right) + \sin 2kz\right) \tag{47}$$

Die Einheit dieses Vektors ist

$$[S] = \frac{\mathrm{T\ T\ m\ s^{-1}}}{\mathrm{s\ N\ A^{-2}\ s^{-1}}} \tag{48}$$

$$= \frac{\mathrm{T^2\ m\ s^{-1}}}{\mathrm{N\ A^{-2}}} \tag{49}$$

$$= \frac{(\mathrm{\ kg\ s^{-2}\ A})^2\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{\mathrm{kg\ m\ s^{-2}\ A^{-2}}} \tag{50}$$

$$= \mathrm{\ kg\ s^{-3}} \tag{51}$$

$$= \frac{\mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}}}{\mathrm{m^2}} \tag{52}$$

$$= \mathrm{\ W\ m^{-2}} \tag{53}$$

Das beschreibt eine "Leistung pro Fläche". Der Vektor zeigt uns die Richtung des Energieflusses in der Zeit und der Betrag des Vektors, gemittelt auf eine Zeit T beschreibt im Prinzip das gleiche, nur angepasst auf eine angemessene Zeitskala und ohne eine Richtung.

e) Für die Superposition der verschiedenen möglichen Lösungen

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x \cdot E_0 \sin\left(\omega t - kz\right) + \hat{\mathbf{e}}_y \cdot E_0 \cos\left(\omega t - kz\right) \tag{54}$$

erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \hat{\mathbf{e}}_x \cdot E_0\omega \cos\left(\omega t - kz\right) - \hat{\mathbf{e}}_y \cdot E_0\omega \sin\left(\omega t - kz\right) \tag{55}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| = E_0\omega\sqrt{\cos^2\left(\omega t - kz\right) + \sin^2\left(\omega t - kz\right)} \tag{56}$$

$$= E_0\omega \tag{57}$$

In der Vektornotation können wir deutlich merken, das elektrische Feld wird an einem festen Punkt z durch eine Kreisbewegung dargestellt:

$$\mathbf{E}(t) = E_0\begin{pmatrix}\sin(\omega t - kz)\\ \cos\left(\omega t - kz\right)\\ 0\end{pmatrix} \tag{58}$$

Der Betrag des elektrischen Feldes bleibt ebenfalls konstant, also ist diese "Bewegung" tatsächlich ein Kreis, weshalb die Beschreibung von zirkular polarisiert sehr angemessen ist.

f) Ebenfalls bestimmen wir für den letzteren Fall den Poyntingvektor analog zu Teilaufgabe d).

$$\mathbf{S}(z,t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{59}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} E_0 \sin(\omega t - kz) \\ E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -B_0 \cos(\omega t - kz) \\ B_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 B_0 \sin^2(\omega t - kz) + E_0 B_0 \cos^2(\omega t - kz) \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 B_0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Der Vektor ist in diesem Fall eine Erhaltungsgröße, da es weder vom Ort noch von der Zeit abhängt.

11.3 Strom in einem Ladekondensator

a) Für diese Aufgabe betrachten wir den gleichen Aufbei wie in Aufgabe 10.1 des letzten Übungsblattes und können daher auch einige Formeln von dieser Übernehmen. So gilt für das **E**-Feld:

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A}, \text{ mit } A = \pi r_0^2 \tag{63}$$

Und für das **B**-Feld

$$B(r) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi r_0^2} \tag{64}$$

Der Pointingvektor ist gegeben durch

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{65}$$

Wir durch die Aufgabenstellung nochmal erklärt, verhält sich das Magnetfeld im Kondensator - ohne Randeffekte - wie das eines stromdurchflossenen Leiters. Somit

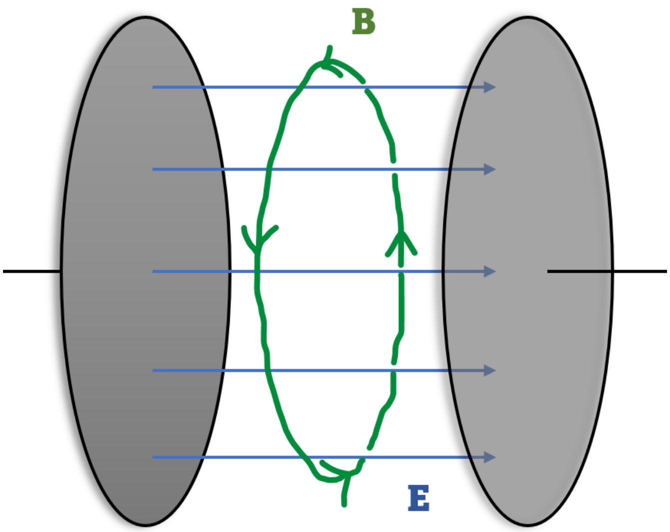

Abbildung 1: E- und B-Feld im Kondensator

wissen wir, dass B-Feldvektor und E-Feldvektor Senkrecht zueinander Stehen. Wir können den Betrag des Poyntingvektors also vereinfcht bestimmen als:

$$\begin{aligned} S(t,r) &= \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) && (66)\\ &= \frac{1}{\mu_0} \cdot E(t) \cdot B(r) \cdot \sin(\sphericalangle(\mathbf{E},\mathbf{B})) && (67)\\ &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \cdot \mu_0 \frac{Ir}{2\pi r_0^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) && (68)\\ &= \frac{Q(t)Ir}{2\epsilon_0 \pi^2 r_0^4} && (69) \end{aligned}$$

Betrachten wir nun $t = 0$ mit $Q(t = 0) = Q_0$

$$S(t = 0, r) = \frac{Q_0 Ir}{2\epsilon_0 \pi^2 r_0^4} \tag{70}$$

(71)

Die Richtung des Poyntingvektors können wir dann einfach anhand der Rechte-Hand-Regel für das Kreuzprodukt ermitteln: Es handelt sich also um einen Vektor

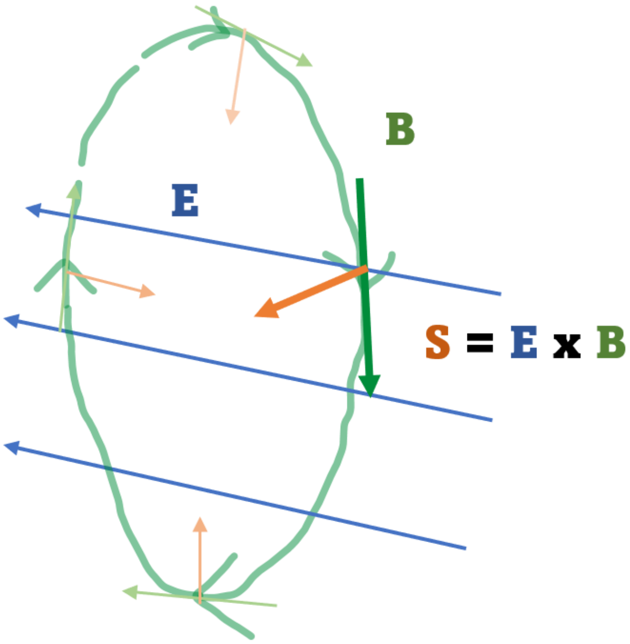

Abbildung 2: E- und B-Feld im Kondensator

in radialer Richtung zur Symmetrieachse des Kondensators. Wir nennen den Einheitsvektor in diese Richtung $\hat{r}$. Somit ist der Poyntingvektor:

$$\mathbf{S}(t=0,r) = \frac{Q_0 I r}{2\epsilon_0 \pi^2 r_0^4} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{72}$$

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Poyntingvektor die (Strahlungs-) Leistung pro Fläche Angibt. Um den Leistungsfluss durch die Mantelfläche des Kondensators zu bestimmen, betrachten wir also ein Oberflächenintegral für eben diese Mantelfäche durch das „Vektorfeld“der Poyintingvektoren.

Qualitativ:

$$S = \frac{[\text{Strahlungsleistung}]}{[\text{Fläche}]} \tag{73}$$

$$\iff S \cdot [\text{Fläche}] = [\text{Strahlungsleistung}] \tag{74}$$

Nun als Formel:

$$P(t) = \int_O \mathbf{S}(t, {\color{red}r})\ \mathrm{d}A \tag{75}$$

Da wir nur den „Leistungsfluss“an der Oberfläche betrachten wollen, muss der Rot markierte Teil konstant r_0, also der Radius der Platten, sein. Somit erhalten wir

$$P(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^D \mathbf{S}(t, r_0)\ r_0\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\phi. \tag{76}$$

(Unterwegs haben wir das Integral noch in Zylinderkoordinaten umgeschrieben.) Wie in Aufgabenteil a) gezeigt, steht der Poyntingvektor stets Senkrecht nach Innen gerichtet auf der Mantelfläche, deshalb können wir auch hier vereinfacht mit Beträgen arbeiten.

$$P(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^D S(t, r_0)\ r_0\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\phi \tag{77}$$
$$= S(t, r_0) r_0 2\pi D \qquad |\text{Auswertung Integrale} \tag{78}$$
$$= \frac{Q(t) I r_0}{2\epsilon_0 \pi^2 r_0^4} r_0 2\pi D \tag{79}$$
$$\Longleftrightarrow \quad P(t) = \frac{Q(t) I D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \tag{80}$$

Dies entspricht nun dem Leistungsfluss durch die Mantelfläche, in diesem Fall in den Kondensator hinein.

$$\tag{81}$$

c) Gegeben ist nun eine Formel für die im elektrischen Feld gespeicherte Energie:

$$W_{c)} = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2(\mathbf{r})\ \mathrm{d}V \tag{82}$$

Da es sich im Kondensator um ein homogenes Elektrisches Feld handelt, fällt die Abhängigkeit von r in unserem Fall weg. Das Volumenintegral können wir wieder in Zylinderkoordinaten umschreiben:

$$W_{c)} = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2(\mathbf{r})\ E^2\ \mathrm{d}V \tag{83}$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^D \quad r\ \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z \tag{84}$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{r_0^2}{2} \cdot 2\pi \cdot D \tag{85}$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 r_0^2 \pi D \tag{86}$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \right)^2 r_0^2 \pi D \tag{87}$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 \pi^2 r_0^4} r_0^2 \pi D \tag{88}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2 D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \tag{89}$$

Dies lassen wir erst einmal so stehen und betrachten nun noch einmal das Ergebnis von Aufgabenteil b). In diesem können wir $Q(t) = I \cdot t$ umschreiben:

$$P(t) = \frac{(I \cdot t) I D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} = \frac{I^2 t D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \tag{90}$$

Integrieren wir diese Leistung nun über die Zeit, so erhalten wir die Arbeit bzw. die Energie:

$$W_{b)}(t) = \int_0^t \frac{I^2 t' D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \mathrm{d}t' \tag{91}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{I^2 t'^2 D}{\epsilon_0 \pi r_0^2}\right|_0^t \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I^2 t^2 D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} \tag{93}$$

Was mit $I \cdot t = Q$ genau dem Ergebnis aus b) entspricht

$$W_{b)} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 D}{\epsilon_0 \pi r_0^2} = W_{c)}. \tag{94}$$

Dies ist im Endeffekt sehr schlüssig, da die Leistung welche über einen gewissen Zeitraum hinweg in den Kondensator „hineinfließt"dort auch wieder in einer Form aufzufinden sein muss.