6. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ Σ___

6.1 Aufgabe 1

Geg.:

- $U_0 = 12.5$ V
- $U_1 = 10$ V
- $I = 150$ A

a) Da die Batterie als eine Reihenschaltung angeordnet ist, ist die Gesamtspannung U_0 die Summe der einzelnen Spannungen U_1 und U_i:

$$U_0 = U_1 + U_i \tag{1}$$
$$\rightarrow U_i = U_0 - U_1 \tag{2}$$

Damit lassen sich beide Widerstände bestimmen. Aus $U = RI$ folgt:

$$R_a = \frac{U_1}{I} = \frac{1}{15}\ \Omega \tag{3}$$
$$R_i = \frac{U_i}{I} = \frac{1}{60}\ \Omega \tag{4}$$

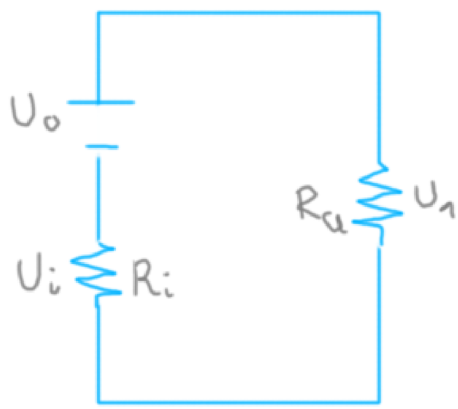

Abbildung 1: Schaltplan Batterie

b) Aus 1 folgt:

$$U_1 = U_0 - R_i I \qquad \left| I = \frac{U_1}{R_a}\right. \tag{5}$$

$$U_1 = U_0 - \frac{R_i U_1}{R_a} \tag{6}$$

$$U_1\left(1+\frac{R_i}{R_a}\right) = U_0 \tag{7}$$

$$U_1 = \frac{U_0}{1+\frac{R_i}{R_a}} \qquad |R_i \to R_a \tag{8}$$

$$U_1 = \frac{U_0}{2} \tag{9}$$

$$= 6.25\ \mathrm{V} \tag{10}$$

c) Die Leistung im Anlasser und der Batterie lässt sich mit $P = UI$ berechnen. Dabei ist aber I abhängig vom variablen Widerstand R_a. Für den Anlasser gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_a} \qquad |U_1 = U_0 - R_i I \tag{11}$$

$$= \frac{U_0 - R_i I}{R_a} \tag{12}$$

$$I\left(1+\frac{R_i}{R_a}\right) = \frac{U_0}{R_a} \tag{13}$$

$$= \frac{U_0}{\left(1+\frac{R_i}{R_a}\right)R_a} \tag{14}$$

$$= \frac{U_0}{R_i + R_a} \tag{15}$$

Also ist die Leistung P:

$$P = U_1 I \tag{16}$$

$$= R_a I^2 \tag{17}$$

$$= \frac{R_a U_0^2}{(R_i + R_a)^2} \tag{18}$$

Diese Leistung wird maximal wenn die Ableitung nach R_a maximal wird, also:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_a} = \frac{U_0^2}{(R_i+R_a)^2} - \frac{2R_a U_0^2}{(R_i+R_a)^3} \tag{19}$$

$$= 1 - \frac{2R_a}{R_i + R_a} \tag{20}$$

$$R_i + R_a = 2R_a \tag{21}$$

$$\rightarrow R_i = R_a \tag{22}$$

Einsetzen der Werte aus a) ergibt eine Leistung von: $P_{Anl} = 1500$ W im Anlasser, und für die b) ist $P_{Anl} \approx 586$ W.

Für die Leistung in der Batterie gilt $P = U_0 I$. In Aufgabenteil a) nehmen wir $I = 150$ A, also ist $P_{Bat} = 1875$ W und in Aufgabenteil b) nehmen wir $I = \frac{U_1}{R_a}$, also $P_{Bat} \approx 1171$ W.

d) Für eine reale elektrische Quelle muss der Strom im Kurzschlussfall ausschließlich durch den Innenwiderstand R_i laufen, so dass gilt: $R_i = \frac{U_0}{I_0}$.

In einem Leerlauf wird an die Spannungsquelle kein Verbraucher angeschlossen, das heißt, dass die Spannung maximal wird. Im Kurzschlussfall wird aber der Strom maximal und die Spannung wird minimal. Für die Modellierung der Leerlaufverluste ist also eine Spannungsquelle besser geeignet.

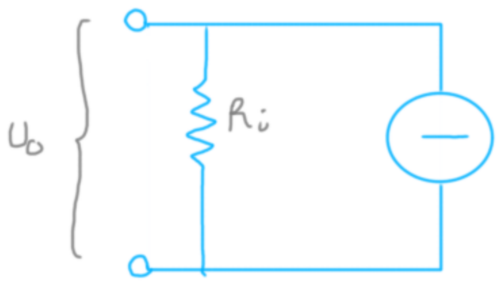

Abbildung 2: Reale Stromquelle

6.2 Aufgabe 2

Zur Anschaulichkeit zeichnen wir einen äquivalenten Schaltplan:

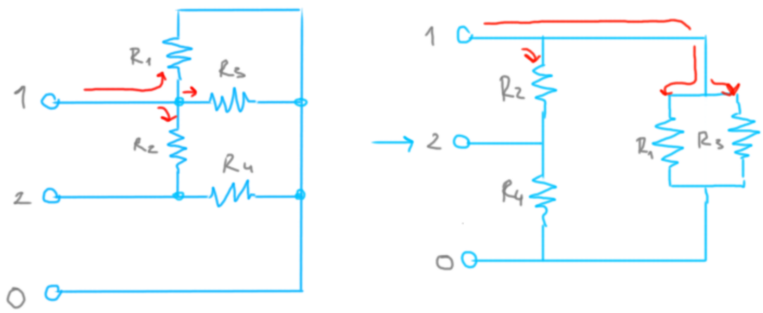

Abbildung 3: Alternativer Schaltplan

Zur Begründung können wir uns den ersten Knoten angucken, an welchem R_1, R_2 und R_3 direkt angeschlossen sind. Der Strom verteilt sich parallel in diese 3 Richtungen. Außerdem ist R_2 direkt an den Klemmen 2 und 0 verbunden.

a) Wir wissen, dass es folgendes Verhältnis zwischen Spannungen und Widerstände gibt, wenn $I_a = I_b$:

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{R_a}{R_b} \tag{23}$$

Angepasst an unser Beispiel sind $U_a = U_1,\ U_b = U_2,\ R_a = R_2 + R_4$, da zwischen den Klemmen 1 und 0 eine Reihenschaltung der Widerstände R_2 und R_4, und $R_b = R_4$. Daraus folgt:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_2 + R_4}{R_4} \tag{24}$$

$$U_2 = \frac{U_1 R_4}{R_2 + R_4} \tag{25}$$

b) Der alternative Schaltplan hilft uns dabei, den Gesamtwiderstand leichter zu erkennen, da er sehr klar in Reihen- und Parallelschaltungen eingeteilt ist. Insgesamt gilt:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4} \tag{26}$$

$$= \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4} \tag{27}$$

$$= \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1 R_3}{R_1 R_3 (R_2 + R_4)} \tag{28}$$

$$\rightarrow R = \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1 R_3} \tag{29}$$

c) Wenn zwischen den Klemmen 1 und 0 kurzgeschlossen wird, dann fließt der Strom nur durch R_2 und R_4. Zwischen den Klemmen 2 und 0 gibt es eine Parallelschaltung:

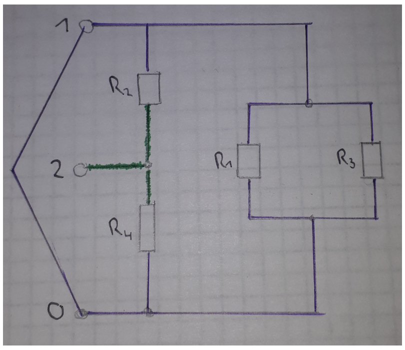

Abbildung 4: Kurzschalten von 0 und 1

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \tag{30}$$
$$= \frac{R_2 + R_4}{R_2 R_4} \tag{31}$$
$$\rightarrow R = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \tag{32}$$

d) Geg.:

- $U_A = \phi_A = 10$ V
- $U_B = \phi_B = 40$ V
- $C_i = i \cdot C \qquad i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Beim Betrachten des folgenden Schaltplans stellen wir fest, dass es sich in dieser Anordnung um zwei unterschiedliche Maschen handelt: Einerseits die Masche zwischen den Punkten A, C, D, E und andererseits zwischen B, C, D, E. Per Maschenregel muss folgen, dass $\sum U_k = 0$.

Für Masche A gilt:

$$U_1 + U_3 + U_4 = U_A \tag{33}$$
$$U_1 + U_3 + U_4 = U_A \qquad |U_i = \frac{Q_i}{U_i} \tag{34}$$

Die Ladungen Q_i entsprechend der Anordnung von Kondensatoren sind: $Q_3 = Q_4$, $Q_3 = Q_1 + Q_2$

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1 + Q_2}{C_3} + \frac{Q_1 + Q_2}{C_4} = U_A \tag{35}$$
$$\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1 + Q_2}{3C} + \frac{Q_1 + Q_2}{4C} = U_A \tag{36}$$

Für Masche B gilt:

$$U_2 + U_3 + U_4 = U_B \tag{37}$$

Die gleiche Überlegung über die Ladungen gilt für diese Masche.

$$\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{C_3} + \frac{Q_1 + Q_2}{C_4} = U_B \tag{38}$$
$$\frac{Q_2}{2C} + \frac{Q_1 + Q_2}{3C} + \frac{Q_1 + Q_2}{4C} = U_B \tag{39}$$

Das entspricht 2 Gleichungen für 3 Unbekannten Q_1, Q_2 und C. Die dritte Gleichungen erhalten wir, wenn wir die Punkte A und B betrachten:

$$U_1 - U_2 = U_A - U_B := \phi \tag{40}$$
$$\frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{2C} = U_A - U_B \tag{41}$$

Aus 41 folgt, dass:

$$\frac{2Q_1 - Q_2}{2C} = \phi \tag{42}$$
$$2Q_1 - Q_2 = 2C\phi \tag{43}$$
$$2Q_1 = 2C\phi + Q_2 \tag{44}$$
$$Q_1 = C\phi + \frac{Q_2}{2} \tag{45}$$

Das eingesetzt in 36 ergibt:

$$\frac{C\phi + \frac{Q_2}{2}}{C} + \frac{C\phi + \frac{Q_2}{2} + Q_2}{3C} + \frac{C\phi + \frac{Q_2}{2} + Q_2}{4C} = U_A \tag{46}$$
$$\frac{(12C\phi + 6Q_2) + (4C\phi + 6Q_2) + \left(3C\phi + \frac{9}{2}Q_2\right)}{12C} = U_A \tag{47}$$
$$\frac{19C\phi + \frac{33}{2}Q_2}{12C} = U_A \tag{48}$$
$$19C\phi + \frac{33}{2}Q_2 = 12CU_A \tag{49}$$
$$\frac{33}{2}Q_2 = C(12U_A - 19\phi) \tag{50}$$
$$\frac{Q_2}{2C} = \frac{1}{33}(12U_A - 19\phi) \tag{51}$$

Nach Einsetzen der numerischen Werte ergibt das:

$$U_2 = \frac{230}{11}\ \mathrm{V} \approx 20,9\ \mathrm{V} \tag{52}$$

Für U_1 gilt:

$$Q_1 = C\phi + \frac{Q_2}{2} \tag{53}$$
$$U_1 = \phi + U_2 \tag{54}$$
$$\approx -9,1 \text{ V} \tag{55}$$

Wir wissen aufgrund der Anordnung der Kondensatoren, dass $Q_3 = Q_1 + Q_2$, also

$$Q_3 \approx C32,7 \text{ V} \tag{56}$$
$$\rightarrow U_3 = 10,9 \text{ V} \tag{57}$$
$$U_4 \approx 8,2 \text{ V} \tag{58}$$

Die Spannung zwischen C und D entspricht der Spannung im Kondensator 3: $\phi_{CD} = 10,9 \text{ V}$

6.3 Aufgabe 3

Geg.:

- $R_1 = 800\ \Omega$
- $R_2 = 200\ \Omega$
- $U_{AC} = 1$ V

a) Wie es in der Abbildung dargestellt wird, gibt es insgesamt 3 Maschen entsprechend den drei Systemen von roten Pfeilen und 4 Knoten, jeweils an den Eckpunkten des Rhombus. Per die Kirchhoffschen Regeln können wir daraus 7 verschiedene Gleichungen aufstellen:

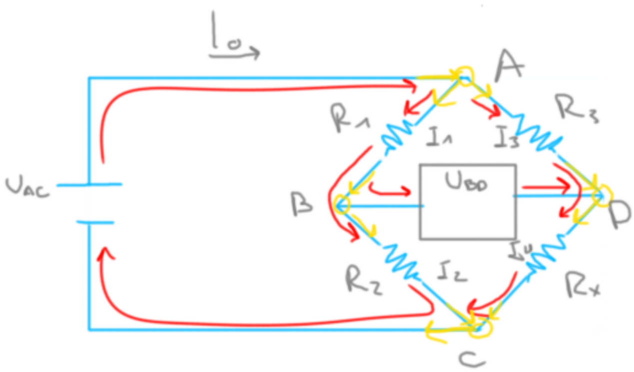

Abbildung 5: Maschen und Knoten

$$
\begin{aligned}
\text{Knoten A}: \quad 0 &= I_0 - I_1 - I_3 && (59)\\
\text{Knoten B}: \quad 0 &= I_1 - I_2 && (60)\\
\text{Knoten C}: \quad 0 &= I_2 + I_4 - I_0 && (61)\\
\text{Knoten D}: \quad 0 &= I_3 - I_4 && (62)\\
\text{Masche B}: \quad 0 &= U_1 + U_2 - U_{AC} && (63)\\
\text{Masche BD}: \quad 0 &= U_1 + U_4 - U_{AC} && (64)\\
\text{Masche D}: \quad 0 &= U_1 + U_2 - U_3 - U_4 && (65)
\end{aligned}
$$

b) Geg.:

- $R_3 = 438,92\ \Omega$
- $R_x(\vartheta) = 100\ \Omega + \theta \cdot 0.39\ \Omega\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$

Zum Abgleich der Brücke ist die Spannung $U_1 = U_3$ und $U_2 = U_4$ und der Strom $I_3 = I_4$ per die Knotenregel. Daraus können wir schließen, dass

Aus Knoten B folgt, dass $I_1 = I_2$, also:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \tag{66}$$

$$U_2 = \frac{U_1 R_2}{R_1} \tag{67}$$

In Masche B:

$$U_1 + \frac{U_1 R_2}{R_1} = U_{AC} \tag{68}$$

$$U_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = U_{AC} \tag{69}$$

$$U_1 = \frac{U_{AC}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \tag{70}$$

Aus $U_1 = R_1 I_1$ folgt:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_{AC}}{R_1 + R_2} \tag{71}$$

Aus $U_2 = U_4$ folgt:

$$I_2 R_2 = I_4 R_x \qquad |I_3 = I_4 \tag{72}$$

$$I_2 R_2 = I_3 R_x \tag{73}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{U_1}{R_3} = \frac{R_1 U_{AC}}{(R_1 + R_2) R_3} \tag{74}$$

$$I_1 R_2 = \frac{R_1 U_{AC}}{(R_1 + R_2) R_3} R_x \qquad |I_1 = I_2 \tag{75}$$

$$\frac{R_2 U_{AC}}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 U_{AC}}{(R_1 + R_2) R_3} R_x \tag{76}$$

$$R_2 = \frac{R_1}{R_3} R_x \tag{77}$$

$$R_x = \frac{R_2 R_2}{R_1} \tag{78}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$R_x \approx 109,73\ \Omega \tag{79}$$

c) Um die Temperatur zu bestimmen setzen wir den Wert für R_x gleich der Formel für $R_x(\vartheta)$

$$R_x = 100\ \Omega + \vartheta 0.39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1} \tag{80}$$

$$\vartheta = \frac{R_x - 100\ \Omega}{0.39}\ \Omega^{-1}\ {}^\circ\mathrm{C} \qquad |R_x = 109,73\ \Omega \tag{81}$$

$$\approx 24,95\ {}^\circ\mathrm{C} \tag{82}$$

d) Die freigesetzte Heizleistung am Sensor ist:

$$P = R_x I_4^2 \tag{83}$$

Dabei ist der Widerstand laut 61:

$$I_4 + I_2 = I_0 \tag{84}$$

Und

$$I_2 R_2 = I_4 R_x \tag{85}$$

Einsetzen von I_2 in 84:

$$I_4 + I_4 \frac{R_x}{R_2} = I_0 \tag{86}$$

$$I_4 \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right) = I_0 \tag{87}$$

$$I_4 = \frac{I_0}{1 + \frac{R_x}{R_2}} \tag{88}$$

Dabei ist $I_0 = \frac{U_{AC}}{R_{ges}}$:

$$\tag{89}$$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_x} \tag{90}$$

$$= \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_x}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_x)} \tag{91}$$

Also:

$$I_4 = \frac{U_{AC}}{1 + \frac{R_x}{R_2}} \cdot \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_x}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_x)} \tag{92}$$

Einsetzen der bekannten Werten ergibt:

$$P = R_x I_4^2 \tag{93}$$

$$\approx 3,65 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W} \tag{94}$$

e) Bei einer Erhöhung des R_x Sensors auf 50 °C ändert sich ja die Spannung U_{BD}, diese lässt sich wie folgt bestimmen:

Dabei gilt: $I_3 = I_4$, also

$$U_{BD} = U_1 - U_3 \tag{95}$$

$$= \frac{R_1 U_{AC}}{R_1 + R_2} - \frac{R_3 U_{AC}}{R_3 + R_x} \tag{96}$$

Dadurch, dass wir die Temperatur erhöhen, ist der neue Wert von $R_x(50\ °\mathrm{C}) = 119,73\ \Omega$. Einsetzen der Werte in die Gleichung ergibt:

$$\approx 0,014\ \mathrm{V} \tag{97}$$

f) Zunächst setzen wir die Spannung U_{BD} in Abhängigkeit von R_3, ϑ:

$$U_{BD}(R_3, \vartheta) = R_1 I_1 - R_3 I_3 \tag{98}$$

$$= R_1 \frac{U_{AC}}{R_1 + R_2} - R_3 \frac{U_{AC}}{R_3 + R_x} \tag{99}$$

$$= \frac{R_1 U_{AC}}{R_1 + R_2} - \frac{R_3 U_{AC}}{R_3 + 100\ \Omega + \vartheta \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}} \tag{100}$$

Ableiten nach ϑ ergibt:

$$\frac{\partial U_{BD}}{\partial \vartheta} = \frac{R_3 U_{AC} \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}}{\left(R_3 + 100\ \Omega + \vartheta \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}\right)^2} \tag{101}$$

Nun setzen wir an dieser Stelle $\vartheta = 0$ ein:

$$\frac{\partial U_{BD}(R_3, \vartheta = 0)}{\partial \vartheta} = \frac{R_3 U_{AC} \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}}{\left(R_3 + 100\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}\right)^2} \tag{102}$$

Diese Funktion leiten wir dann nach R_3 ab, um zu bestimmen für welchen Wert R_3 es maximal wird, und setzen sie gleich 0.

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}U_{BD}}{\mathrm{d}R_3}\left(\frac{\partial U_{BD}(R_3, \vartheta = 0)}{\partial \vartheta}\right) = \frac{U_{AC} \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}}{(R_3 + 100\ \Omega)^2} - \frac{2R_3 U_{AC} \cdot 0,39\ \Omega\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}}{(R_3 + 100\ \Omega)^3} \tag{103}$$

$$= 1 - \frac{2R_3}{R_3 + 100\ \Omega} \tag{104}$$

$$2R_3 = R_3 + 100\ \Omega \tag{105}$$

$$R_3 = 100\ \Omega$$

Für diesen Wert R_3 ist die Änderung der Spannung U_{BD} um $\vartheta_0 = 0\ {}^\circ\mathrm{C}$ am größten.

$$\tag{106}$$