Wieder eine tolle Lösung! Bei Aufgaben wie 3.2 c) find ich es super, dass ihr es mathematisch korrekt löst so bekommt ihr immer eine Lösung, auch wenn die Zustände mal sehr kompliziert werden, falls euch das aber länger Zeit kostet ist es hier auch ratsam das "schlaue raten" wie ihr es später auch bei den orthogonalen Basiszuständen gemacht habt zu üben. (Wichtig später in der Prüfung wenn Zeit evtl. knapp wird...)

Insgesamt freu ich mich immer auf eure Abgabe, also weiter so (solange es euch nicht zu viel Zeit kostet!!!)

Blatt 3 **8. November 2021**

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor/in: Tobias Hammel

1. Quantenmechanisches Zwei-Pfad-Interferometer, Blochkugel

Gegeben seien zwei Basiszustände

$$|\uparrow\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und ein Zweipfadinterferometer nach der Konstruktion aus Aufgabe 2.1. Dadrin seien folgende Transformationen gegeben:

$$\text{Strahlteiler 50:50} \qquad \hat{T}_{\text{ST}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\text{Spiegel} \qquad \hat{T}_{\text{Sp}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\text{Phasenverschieber} \qquad \hat{T}_{\text{Ph}} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

a) Wir untersuchen ihren Einfluss auf die einzelnen Basiszustände mit der Dirac-Notation:

$$\hat{T} : |\psi_1\rangle \mapsto |\psi_2\rangle \tag{5}$$

$$|\psi_2\rangle = \hat{T}\,|\psi_1\rangle \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Angewandt auf die einzelnen Basen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\text{ST}}\,|\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

✓

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert\uparrow\rangle + i\lvert\downarrow\rangle) \\
\hat{T}_{\mathrm{ST}}\lvert\downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (9)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\lvert\uparrow\rangle + \lvert\downarrow\rangle)\\
\hat{T}_{\mathrm{Sp}}\lvert\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad (10)\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \lvert\downarrow\rangle\\
\hat{T}_{\mathrm{Sp}}\lvert\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (11)\\
&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \lvert\uparrow\rangle\\
\hat{T}_{\mathrm{Ph}}\lvert\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad (12)\\
&= \mathrm{e}^{i\phi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{e}^{i\phi}\lvert\uparrow\rangle\\
\hat{T}_{\mathrm{Ph}}\lvert\downarrow\rangle &= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (13)\\
&= \cancel{\mathrm{e}^{i\phi}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \cancel{\mathrm{e}^{i\phi}}\lvert\downarrow\rangle
\end{aligned}
$$

Der Phasenversatz kommt ja nur in einem von beiden Armen vor!

Nun wenden wir im Interferometer mehrere Transformationen nacheinander auf die Zustände an:

Dabei wird zuerst ein Basiszustand durch einen Strahlteiler transformiert, dann wird die Hälfte davon gespiegelt und die andere Hälfte gespiegelt und zusätlich phasenverschoben, danach werden beide Strahlen wieder durch einen Strahlteiler transformiert. Wir betrachten zuerst den Zustand ohne Phasenverschiebung:

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 : |\psi_1\rangle &\to |\psi_2\rangle && (14)\\ |\psi_1\rangle &\mapsto \hat{T}_{\text{ST}}\Big(\hat{T}_{\text{Sp}}\Big(\hat{T}_{\text{ST}}\,|\psi_1\rangle\Big)\Big) && (15)\end{aligned}$$

Exemplarisch betrachten wir den Basiszustand $|\uparrow\rangle$. Es erfolgt analog für $|\downarrow\rangle$.

$$\begin{aligned}\hat{T}_1\,|\uparrow\rangle &= \hat{T}_{\text{ST}}\Big(\hat{T}_{\text{Sp}}\Big(\hat{T}_{\text{ST}}\,|\uparrow\rangle\Big)\Big) && (16)\\
&\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right] && (17)\\
&\overset{(8)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}}_{\text{Nach 1. ST}}\right] && (18)\\
&\overset{(10)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{Nach Spiegel}} && (19)\\
&\overset{(8)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix}i\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{Nach 2. ST}} && (20)\\
&\leftrightarrow i\,|\uparrow\rangle && (21)\end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir den Weg durch den Phasenverschieber. Es wird angenommen, dass zuerst die Phasenverschiebung, danach die Spiegelung stattfindet.

$$\begin{aligned}\hat{T}_2 : |\psi_1\rangle &\to |\psi_2\rangle && (22)\\ |\psi_1\rangle &\mapsto \hat{T}_{\text{ST}}\Big(\hat{T}_{\text{Sp}}\Big(\hat{T}_{\text{Ph}}\Big(\hat{T}_{\text{ST}}\,|\psi_1\rangle\Big)\Big)\Big) && (23)\end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt exemplarisch den Basiszustand $|\uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{T}_2\,|\rangle &= \hat{T}_{\text{ST}}\Big(\hat{T}_{\text{Sp}}\Big(\hat{T}_{\text{Ph}}\Big(\hat{T}_{\text{ST}}\,|\uparrow\rangle\Big)\Big)\Big) && (24)\\
&\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right]\right] && (25)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\phi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}}_{\text{Nach 1. ST}}\right]\right] && (26)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\phi}\\ i\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Nach}\\ \text{Phasenverschiebung}}}\right] \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ e^{i\phi}\end{pmatrix}}_{\text{Nach Spiegel}} \tag{28}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i + ie^{i\phi}\\ -1 + 1e^{i\phi}\end{pmatrix}}_{\text{Nach 2. ST}} \tag{29}$$

$$\leftrightarrow |\psi\rangle = \frac{i}{2}\left(1 + e^{i\phi}\right)|\uparrow\rangle - \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\phi}\right)|\downarrow\rangle \tag{30}$$

b) Für den Zustand $|\psi\rangle$ berechnen wir jetzt die Wahrscheinlichkeit, einen Photon 'oben' und 'unten' zu finden als:

$$|\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{i}{2}\left(1 + e^{i\phi}\right)\right|^2 \qquad \Big| i = e^{i\frac{\pi}{2}} \tag{31}$$

$$= \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\left(1 + e^{i\phi}\right)\right|^2 \qquad \Big| \left|\ldots\cdot\frac{e^{i\frac{\phi}{2}}}{e^{i\frac{\phi}{2}}}\right|^2 \tag{32}$$

$$= \left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\left(e^{i\frac{\phi}{2}}e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}}e^{i\frac{\phi}{2}}\right)\right|^2 \tag{33}$$

$$= \left|\frac{e^{\frac{i}{2}(\pi+\phi)}}{2}\left(e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}}\right)\right|^2 \qquad \Big| \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{34}$$

$$= \left|\frac{e^{\frac{i}{2}(\pi+\phi)}}{2}\left(2\cos\frac{\phi}{2}\right)\right|^2 \qquad \Big| \left|e^{ix}\right| = 1 \tag{35}$$

$$= \left|\cos\frac{\phi}{2}\right|^2 \tag{36}$$

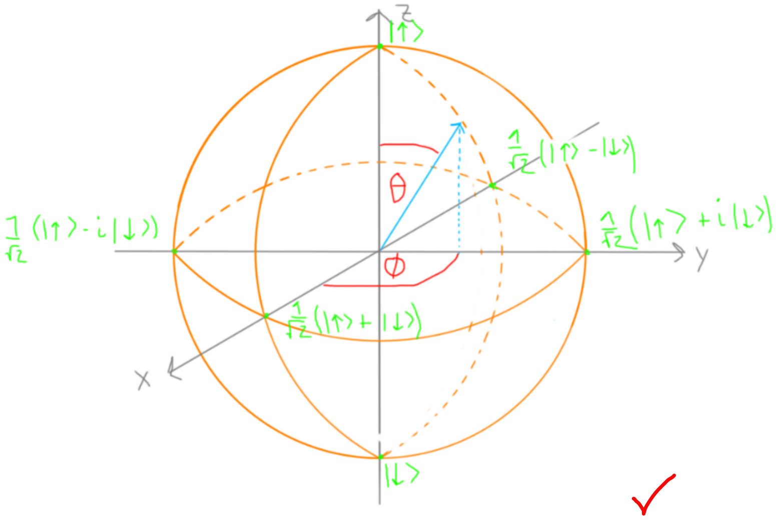
$$= \cos^2\frac{\phi}{2} \qquad \Big| \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos\phi) \tag{38}$$

Analoge Umformungen führen für $|\downarrow\rangle$ zu:

$$|\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\phi) \tag{39}$$

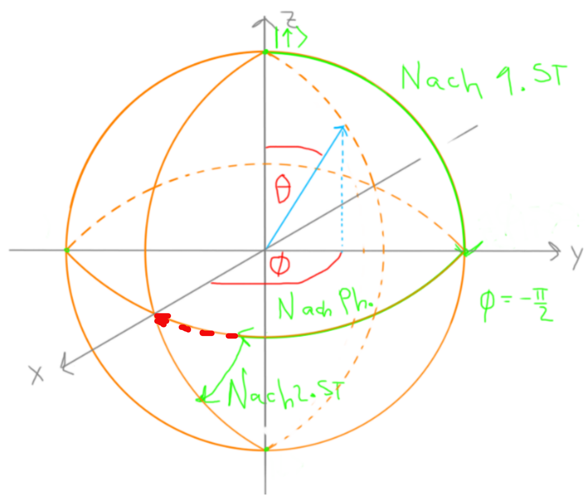
c) Blochkugel



✓

Abbildung 1: Blochkugel

d) Wir nehmen die Phase $\phi = -\frac{\pi}{2}$ als Beispiel.



Für phi=pi/2 landet der Zustand auf der x-Achse

✓

Abbildung 2: Blochkugel nach Transformation

3/3

2. Zweiniveausystem: Polarisation eines Photons

Gegeben seien die Basiszustände

$$|H\rangle_+ = |\uparrow\rangle \tag{40}$$
$$|V\rangle_+ = |\downarrow\rangle\,. \tag{41}$$

a) Zunächst sei der Zustand

$$|V\rangle_\times = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + |V\rangle_+\big) \tag{42}$$

gegeben. Nun sollen die Wahrscheinlichkeiten, ein Photon in den gegebenen Basiszuständen vorzufinden, berechnet werden.

$$P_{H_+}^{V_\times} = |\langle H_+|V_\times\rangle|^2 \tag{43}$$
$$\langle H_+|V_\times\rangle = \langle H_+|\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle + |V_+\rangle)\right\} \tag{44}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle H_+|H_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle H_+|V_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{45}$$
$$\implies P_{H_+} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{46}$$

$$P_{H_+}^{V_\times} = |\langle V_+|V_\times\rangle|^2 \tag{47}$$
$$\langle V_+|V_\times\rangle = \langle V_+|\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle + |V_+\rangle)\right\} \tag{48}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle V_+|H_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle V_+|V_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{49}$$
$$\implies P_{V_+} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{50}$$

Den zu $|V\rangle_\times$ orthogonalen Basiszustand, $|H\rangle_\times$ bestimmen wir durch die Bedingungen

$$\langle H_\times|V_\times\rangle \stackrel{!}{=} 0\,(\text{orthogonal}) \tag{51}$$
$$\langle H_\times|H_\times\rangle \stackrel{!}{=} 1\,(\text{normiert}). \tag{52}$$

Wir verwenden

$$|H\rangle_\times = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+\big) \tag{53}$$

und prüfen die Bedingungen

$$\langle H_\times | V_\times \rangle = \left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\langle H|_+ - \langle V|_+ \big) \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|H\rangle_+ + |V\rangle_+ \big) \right\} \right) \tag{54}$$

$$= \frac{1}{2} (\langle H_+ | H_+ \rangle + \langle H_+ | V_+ \rangle - \langle V_+ | H_+ \rangle - \langle V_+ | V_+ \rangle) \tag{55}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 0 - 0 - 1) = \frac{1}{2}(0) = 0 \quad \checkmark . \tag{56}$$

$$\langle H_\times | H_\times \rangle = \left(\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\langle H|_+ - \langle V|_+ \big) \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+ \big) \right\} \right) \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2} (\langle H_+ | H_+ \rangle - \langle H_+ | V_+ \rangle - \langle V_+ | H_+ \rangle + \langle V_+ | V_+ \rangle) \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 0 - 0 + 1) = \frac{1}{2}(2) = 1 \quad \checkmark . \tag{59}$$

✓

Abschließend wollen wir nun auch zum Zustand $|H\rangle_\times$ die Wahrscheinlichkeiten bestimmen, das Photon in den beiden Basiszuständen vorzufinden.

$$P_{H_+}^{H_\times} = |\langle H_+ | H_\times \rangle|^2 \tag{60}$$

$$\langle H_+ | H_\times \rangle = \langle H_+ | \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+ \big) \right\} \tag{61}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle H_+ | H_+ \rangle - \langle H_+ | V_+ \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{62}$$

$$\implies P_{H_+}^{H_\times} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \tag{63}$$

✓

$$P_{V_+}^{H_\times} = |\langle V_+ | H_\times \rangle|^2 \tag{64}$$

$$\langle V_+ | H_\times \rangle = \langle V_+ | \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+ \big) \right\} \tag{65}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle V_+ | H_+ \rangle - \langle V_+ | V_+ \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{66}$$

$$\implies P_{V_+}^{H_\times} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \tag{67}$$

✓

b) Gegeben sei nun der Zustand eines rechtshändig zirkular polarisierten Photons

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|H\rangle_+ - i\,|V\rangle_+ \big). \tag{68}$$

✓

Den dazu orthonormalen Zustand eines linkshändig zirkular polarisierten Photons definieren wir durch

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|H\rangle_+ + i\,|V\rangle_+\Big) \checkmark \tag{69}$$

und prüfen die Bedingungen:

$$\langle R|L\rangle = \left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H_+| + i\,\langle V_+|)\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle + i\,|V_+\rangle)\right\}\right) \tag{70}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle H_+|H_+\rangle + i\,\langle H_+|V_+\rangle + i\,\langle V_+|H_+\rangle + i^2\,\langle V_+|V_+\rangle\Big) \tag{71}$$

$$= \frac{1}{2}(1+0+0-1) = \frac{1}{2}(0) = 0 \quad \checkmark \tag{72}$$

$$\langle R|R\rangle = \left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H_+| + i\,\langle V_+|)\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle - i\,|V_+\rangle)\right\}\right) \tag{73}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle H_+|H_+\rangle - i\,\langle H_+|V_+\rangle + i\,\langle V_+|H_+\rangle - i^2\,\langle V_+|V_+\rangle\Big) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2}(1+0+0+1) = \frac{1}{2}(2) = 1 \quad \checkmark \tag{75}$$

✓

Nun wollen wir auch für den Zustand $|R\rangle$ die Wahrscheinlichkeiten, die bisher eingeführten Zustände anzunehmen, berechnen.

i.) $|R\rangle \to |H\rangle_+$

$$P^R_{H_+} = |\langle H_+|R\rangle|^2 \tag{76}$$

$$\langle H_+|R\rangle = \langle H_+| \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|H\rangle_+ - i\,|V\rangle_+\Big)\right\} \tag{77}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{78}$$

$$\implies P^R_{H_+} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \checkmark \tag{79}$$

ii.) $|R\rangle \to |V\rangle_+$

$$P^R_{V_+} = |\langle V_+|R\rangle|^2 \tag{80}$$

$$\langle V_+|R\rangle = \langle H_+| \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|H\rangle_+ - i\,|V\rangle_+\Big)\right\} \tag{81}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 - i) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \tag{82}$$

$$\implies P^R_{V_+} = \left|-\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \tag{83}$$

iii.) $|R\rangle \to |V\rangle_\times$

$$P^R_{V_\times} = |\langle V_\times|R\rangle|^2 \tag{84}$$

$$\langle V_\times|R\rangle = \left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H_+| + \langle V_+|)\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle - i\,|V_+\rangle)\right\}\right) \tag{85}$$

$$= \frac{1}{2}(\langle H_+|H_+\rangle - i\,\langle H_+|V_+\rangle + \langle V_+|H_+\rangle - i\,\langle V_+|V_+\rangle) \tag{86}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - i) \tag{87}$$

$$\implies P^R_{V_\times} = \left|\frac{(1-i)}{2}\right|^2 = \left(\frac{(1-i)}{2}\right)\left(\frac{(1+i)}{2}\right) = \frac{1 + i - i - i^2}{4} \tag{88}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{89}$$

iv.) $|R\rangle \to |H\rangle_\times$

$$P^R_{H_\times} = |\langle H_\times|R\rangle|^2 \tag{90}$$

$$\langle H_\times|R\rangle = \left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H_+| - \langle V_+|)\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_+\rangle - i\,|V_+\rangle)\right\}\right) \tag{91}$$

$$= \frac{1}{2}(\langle H_+|H_+\rangle - i\,\langle H_+|V_+\rangle - \langle V_+|H_+\rangle + i\,\langle V_+|V_+\rangle) \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + i) \tag{93}$$

$$\implies P^R_{V_\times} = \left|\frac{(1+i)}{2}\right|^2 = \left(\frac{(1+i)}{2}\right)\left(\frac{(1-i)}{2}\right) = \frac{1 - i + i - i^2}{4} \tag{94}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{95}$$

v.) $|R\rangle \to |L\rangle$

$$P^R_L = |\langle L|R\rangle|^2 \tag{96}$$

Aus der Orthonormalitätsbedingung wissen wir, dass

$$\langle L|R\rangle = 0 \tag{97}$$

und somit

$$P_L^R = |\langle L|R\rangle|^2 = |0|^2 = 0. \tag{98}$$

c) Abschließend wollen wir noch eine Zerlegung der anfangs eingeführten Basiszustände $|H\rangle_+$ und $|V\rangle_+$ der Basis B_1 in der Basis $B_2 := \{|R\rangle, |L\rangle\}$ finden. Hierzu bestimmen wir zunächst die Matrix für den Wechsel von Basis B_1 zu Basis B_2

$$T_{B_2}^{B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{99}$$

Mit dieser gilt

$$\begin{pmatrix} |R\rangle \\ |L\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |H_+\rangle \\ |V_+\rangle \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\implies \begin{pmatrix} |R\rangle \\ |L\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |H_+\rangle - i\,|V_+\rangle \\ |H_+\rangle + i\,|V_+\rangle \end{pmatrix}. \tag{101}$$

Die inverse dieser Matrix entspricht nun genau der Basiswelchelmatrix von B_2 nach B_1

$$T_{B_1}^{B_2} = \left(T_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det T_{B_2}^{B_1}} \cdot \operatorname{adj} T_{B_2}^{B_1}. \tag{102}$$

$$\det T_{B_2}^{B_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (1i - (-1)i) = \frac{1}{2} \cdot 2i = i \tag{103}$$

$$\operatorname{adj} T_{B_2}^{B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{104}$$

$$\implies T_{B_1}^{B_2} = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{i\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Mit dieser können wir nun einfach rechnen:

$$\begin{pmatrix} |H\rangle_+ \\ |V\rangle_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{i\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |R\rangle \\ |L\rangle \end{pmatrix} \tag{106}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \\ -\frac{1}{i\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) \end{pmatrix} \tag{107}$$

Für die Vorfaktoren gilt also

$$c_R^H = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_L^H = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{108}$$

$$c_R^V = -\frac{1}{i\sqrt{2}}, \quad c_L^V = \frac{1}{i\sqrt{2}}. \tag{109}$$

3. Modifikation des Polarisationszustandes: Verzögerungsplatte

a) Gegeben sei eine Verzögerungsplatte deren Berchungsindex von der Polarisation des eintreffenden Lichts abhängt. Die gegebenen Brechungsindizes seien gegeben als

$$n_l := \text{B.-Index entlang der langsamen Achse,} \tag{110}$$

$$n_s := \text{B.-Index entlang der schnellen Achse} \tag{111}$$

In der vorliegenden Verzögerungsplatte sei die horizontal orientierte optische Achse die zum B.-Index n_s gehörige. Die Phase der beiden Achsen ermitteln wir anhand der Wellenzahl k, welche wie über die Wellenlänge wie folgt definiert ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{112}$$

Im Medium errechnet sich die Wellenlänge anhand der eingehenden Wellenlänge λ_0 und dem Brechungsindex n_x wie folgt

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{n_x}. \tag{113}$$

Somit gilt für die Wellenzahl

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{\lambda_0}. \tag{114}$$

Diese ist in der Einheit $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$, die Phase φ ermitteln wir also aus dem Produkt mit der zurückgelegten Strecke, also der Breite der Verzögerungsplatte

$$\varphi_x = \frac{2\pi n_x}{\lambda_0} \cdot d. \tag{115}$$

Die Phasen*verschiebung* zwischen dein beiden verschieden polarisierten Wellen lässt sich nun als Differenz der beiden Phasen φ_l und φ_s herleiten:

$$\Delta\varphi = \varphi_l - \varphi_s = \frac{2\pi n_l d}{\lambda_0} - \frac{2\pi n_s d}{\lambda_0} = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_l - n_s). \tag{116}$$

b) Nun soll die Transformation der eingehenden Wellen unterschiedlicher Polarisation anhand einer Transfermatrix dargestellt werden. Hierzu führen wir zunächst die Identifikation der beiden Basiszustände der Polarisation in Vektorschreibweise ein:

$$|H\rangle_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |V\rangle_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{117}$$

Hierbei steht, wie bereits in Aufgabe 2 eingeführt, H für die horizontale und V für die vertikale Polarisation. Wir definieren die Transformationsmatrix so, dass die Phasenverschiebung nur auf eine Komponente wirkt und die andere unverändert bleibt.

$$M := \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\Delta\varphi}\end{pmatrix} \tag{118}$$

Außerdem ist die Matrix so definiert, dass die Phasenverschiebung auf die langsame optische Achse wirkt.

$$\tag{119}$$

c) Die in b) eingeführte Transformationsmatrix soll nun angewandt werden, um die Änderung des Polarisationszustand einer im Zustand $|V\rangle_\times$ eingehenden Welle zu bestimmen. Wiederum aus Aufgabe 2 wissen wir, dass dieser Zustand als Linearkombinatation der beiden Basiszustände wie folgt definiert ist:

$$|V\rangle_\times = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + |V\rangle_+\big). \tag{120}$$

In der anfangs eingeführten Vektorschreibweise also:

$$|V\rangle_\times \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}. \tag{121}$$

Somit gilt für den neuen Polarisationszustand

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x'\\\varepsilon_y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\Delta\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\Delta\varphi}\end{pmatrix} \tag{122}$$

mit $\Delta\varphi$, aus a) bekannt, als

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_l - n_s). \tag{123}$$

Zurückübersetzt in die Dirac-Notation entspricht dies

$$\big(|V\rangle_\times\big)' = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + e^{i\Delta\varphi}\,|V\rangle_+\big). \tag{124}$$

d) Zum Schluss wollen wir zwei spzielle Arten von Verzögerungsplatten betrachten. Die $\lambda/4$-Platten, definiert durch die Eigenschaft

$$(n_l - n_s)d = \frac{\lambda_0}{4} \tag{125}$$

resultieren in einer Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi_4 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \tag{126}$$

Die $\lambda/2$-Platten, definiert durch

$$(n_l - n_s)d = \frac{\lambda_0}{2} \tag{127}$$

resultieren dahingegen in einer Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi. \tag{128}$$

Somit können wir die Transformationsmatrizen definieren als

$$M_{\lambda/4} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tag{129}$$

$$M_{\lambda/2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{130}$$

Die verschiedenen Polariastionszustände, die wir transformieren wollen sind

$$|H\rangle_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{131}$$

$$|H\rangle_\times \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |V\rangle_\times \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{132}$$

$$|R\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |L\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{133}$$

$$\tag{134}$$

Die Zustände nach der Polarisation mit der $\boldsymbol{\lambda/4}$-Platte entsprechen dann

$$\big(|H\rangle_+\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow |H\rangle_+\,,$$

$$\big(|V\rangle_+\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \leftrightarrow i\,|V\rangle_+\,,$$

$$\big(|H\rangle_\times\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{oi}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ - i\,|V\rangle_+\big) = |R\rangle\,,$$

$$\big(|V\rangle_\times\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + i\,|V\rangle_+\big) = |L\rangle\,,$$

$$(|R\rangle)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + |V\rangle_+\big) = |V\rangle_\times\,,$$

$$(|R\rangle)' \leftrightarrow M_{\lambda/4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+\big) = |H\rangle_\times\,.$$

Durch die $\boldsymbol{\lambda/2}$-Platte erhalten wir die folgenden Zustände:

$$\big(|H\rangle_+\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow |H\rangle_+\,,$$

$$\big(|V\rangle_+\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \leftrightarrow -\,|V\rangle_+\,,$$

$$\big(|H\rangle_\times\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + |V\rangle_+\big) = |V\rangle_\times\,,$$

$$\big(|V\rangle_\times\big)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ - |V\rangle_+\big) = |H\rangle_\times\,,$$

$$(|R\rangle)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ + i\,|V\rangle_+\big) = |L\rangle\,,$$

$$(|L\rangle)' \leftrightarrow M_{\lambda/2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|H\rangle_+ - i\,|V\rangle_+\big) = |R\rangle\,.$$

3/3