Versuch 13 **28. September 2021**

Resonanz

Physikalisches Anfängerpraktikum I

Juan Provencio Betreuer: Constantin Tormann

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuches

In diesem Versuch werden wir anhand freier und erzweungener Schwingungen das Phänomen der Resonanz an einem Pohlschen Rad untersuchen. Wir werden das Rad als erstes ohne Dämpfung untersuchen, danach werden wir es mit einer stromdurchflossenen Spule dämpfen und danach werden wir es mit einem Motor antreiben.

2 Grundlagen

2.1 Freie Schwingung

Man definiert eine freie Schwingung wenn ein System nach einer leichten Störung von sich alleine in seinen Gleichgewichtszustand zurückkehrt. Das System habe eine ”Eigenfrequenz” mit welcher es bevorzügterweise schwingt. Man kann dieses System anhand folgender Differrentialgleichung beschreiben:

$$\ddot{x} = -\alpha x \tag{1}$$

Hier ist α eine positive Proportionalitätskonstante, oft wird sie für das Quotient von Federkonstante k zu Masse m verwendet. Im Fall eines Drehpendels lautet diese Differentialgleichung

$$\ddot{\phi} = -\frac{D}{J}\phi \tag{2}$$

wobei D das Richtmoment des Pendels und J sein Trägheitsmoment sind. Eine Lösung dieses Systems ist

$$\phi = a_0 \sin\left(\omega_f t + \phi_0\right) \tag{3}$$

mit der Kreisfrequenz $\omega_f = \sqrt{\frac{D}{J}}$.

2.2 Gedämpfte Schwingung

Bei einer gedämpften Scwingung kommt zusätzlich ein Faktor δ der Dämpfungskonstante. Eine äußere Kraft wie zum Beispiel Luftwiderstand oder Reibung wirken der Bewegung entgegen und bringen sie diese langsam zum Stillstand. Diese Kräfte sind oft proportional zur Geschwindigkeit, also erhalten wir einen zusätzlichen Term in unserer Differentialgleichung. Die Amplitude lässt sich dann in der Regel durch einen zusätzlichen exponentiell steigenden Faktor beschreiben:

$$a = a_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin \omega_f t \tag{4}$$

An einem der Umkehrpunkten lässt sich, dadurch dass der sinus hier maximal 1 wird, die Amplitude einfacher so beschreiben:

$$a = a_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5}$$

Man kann diese Proportionalitätskonstante δ bestimmen, indem man die Amplitude auf logarithmischen Papier aufträgt und daraus entsteht einen linearen Zusammenhang zur Zeit $t = nT_0$ (falls $t = 0$ an einem Umkehrpunkt begonnen hat). Aus der Steigung der Gerade ermitteln wir δ.

Wenn die Amplitude seinen Halbwert erreicht hat zum Zeitpunkt $t = t_{1/2}$, dann gilt:

$$a(t_{1/2}) = \frac{a_0}{2} = a_0 \mathrm{e}^{-\delta t_{1/2}} \tag{6}$$

und daraus folgt

$$\delta = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \tag{7}$$

Die gedämpfe Kreisfrequenz ω_f, die ungedämpfte ω_0 und der Dämpfungsfaktor δ hängen folgendermaßen miteinander zusammen:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{8}$$

2.3 Erzwungene Schwingung

Wird das Pendel durch eine äußere Kraft angeregt, in unserem Fall durch einen Triebmotor mit Exzenter, so stellt sich nach einer bestimmten Zeit, die Einschwingszeit eine gleichmäßige Amplitude, die wir mit stationären Amplitude b bezeichnen. Man kann die Amplitude des Pendels in Abhängigkeit der Frequenz wie folgt beschreiben

$$b(\omega) = \frac{A\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \tag{9}$$

Dabei bezeichnet A Amplitude des Erregers. Die Frequenz bei der diese Amplitude maximal wird kann durch Differentiation und Bestimmung der Nullstelle. Diese ist

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{10}$$

Außerdem beschreiben H die Halbwertsbreite und die Resonanzüberhöhung. H ist

$$H = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta \tag{11}$$

und die Resonanzüberhöhung wie folgt definiert

$$\frac{b(\omega_{\max})}{b(\omega \to 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{12}$$

Für den Winkel ϕ ist theoretisch

$$\phi = a_0 \sin\left(\omega_f t - \phi_0\right) \mathrm{e}^{-\delta t} + b(\omega) \sin\left(\omega t - \varepsilon\right) \tag{13}$$

Dabei ist ϕ_0 die Anfangsphase und ε der Phasenunterschied zwischen Erreger und der Schwingung. Nach einer Zeit wird der erste Term zu klein und es bleibt nur noch der zweite relevant.

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialen und Geräte

- Drehpendel, angeregt von einem Schrittmotor mit Exzenter
- Schrittmotorsteuerung mit Netzteil
- Frequenzgenerator
- Netzgerät zur Regelung der Dämpfung

3.2 Aufbau

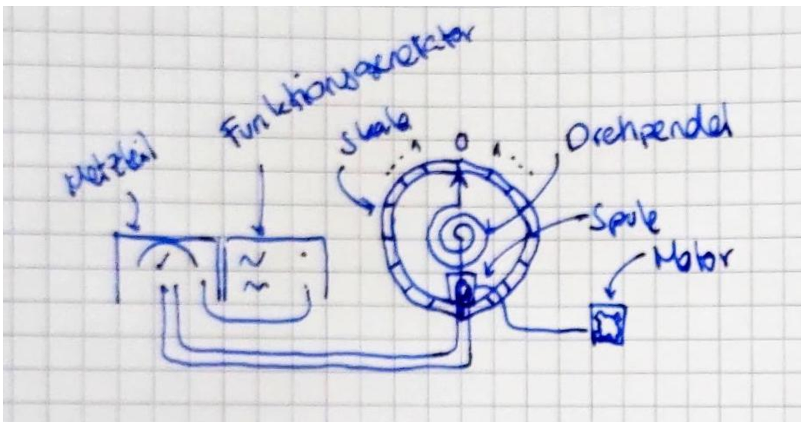
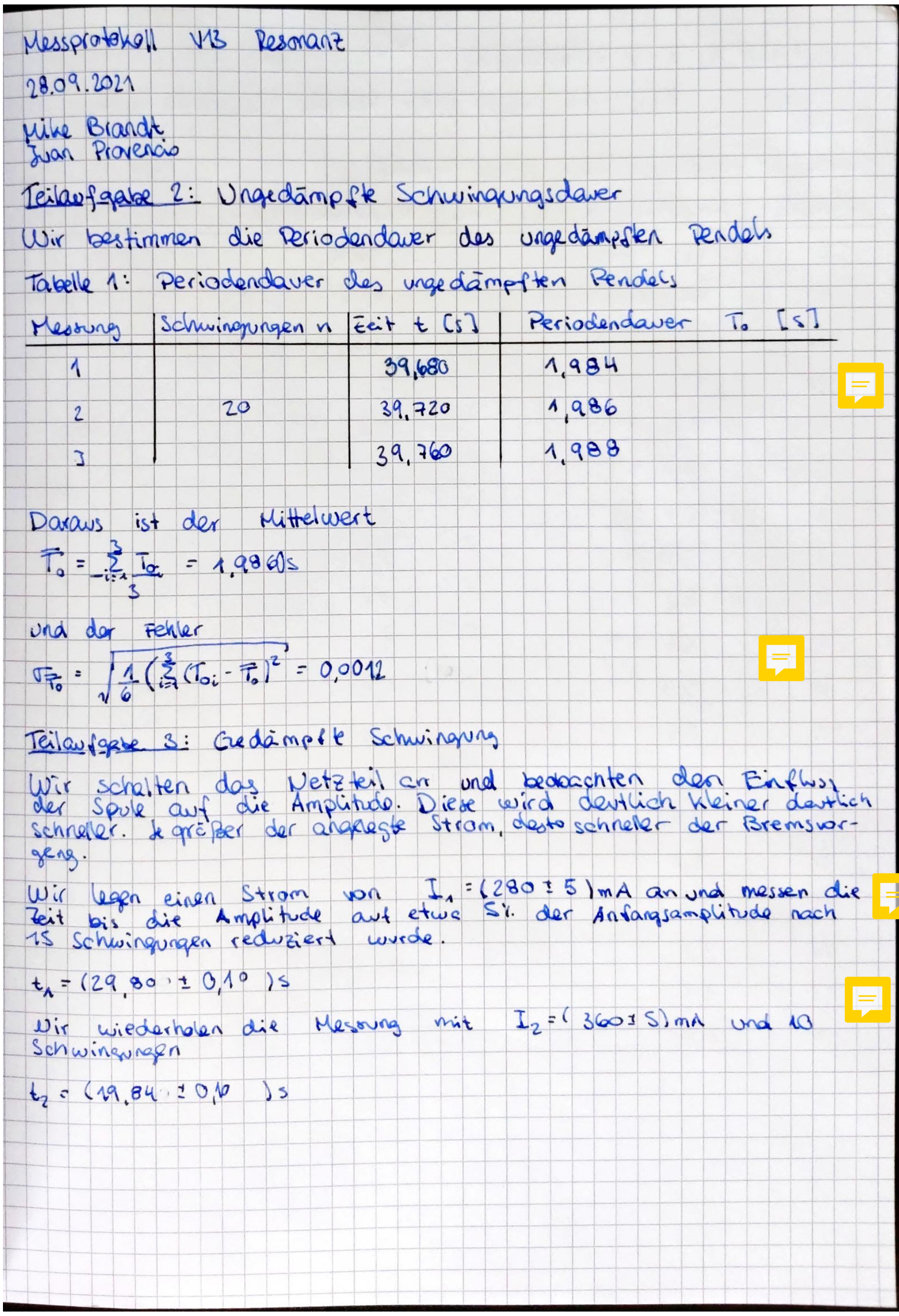


Abbildung 1: Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll


Messprotokoll V13 Resonanz

28.09.2021

Mike Brandt
Juan Provencio

Teilaufgabe 2: Ungedämpfte Schwingungsdauer

Wir bestimmen die Periodendauer des ungedämpften Pendels

Tabelle 1: Periodendauer des ungedämpften Pendels

Messung	Schwingungen n	Zeit t [s]	Periodendauer T_0 [s]
1		39,680	1,984
2	20	39,720	1,986
3		39,760	1,988

Daraus ist der Mittelwert

$$\bar{T}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} T_{0i}}{3} = 1,9860\,s$$

und der Fehler

$$\sigma_{\bar{T}_0} = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{3}(T_{0i} - \bar{T}_0)^2\right)} = 0,0012$$

Teilaufgabe 3: Gedämpfte Schwingung

Wir schalten das Netzteil an und beobachten den Einfluss der Spule auf die Amplitude. Diese wird deutlich kleiner deutlich schneller. Je größer der angelegte Strom, desto schneller der Bremsvorgang.

Wir legen einen Strom von $I_1 = (280 \pm 5)\,mA$ an und messen die Zeit bis die Amplitude auf etwa 5% der Anfangsamplitude nach 15 Schwingungen reduziert wurde.

$t_1 = (29,80 \pm 0,10)\,s$

Wir wiederholen die Messung mit $I_2 = (360 \pm 5)\,mA$ und 10 Schwingungen

$t_2 = (19,84 \pm 0,10)\,s$

Abbildung 2: Messprotokoll

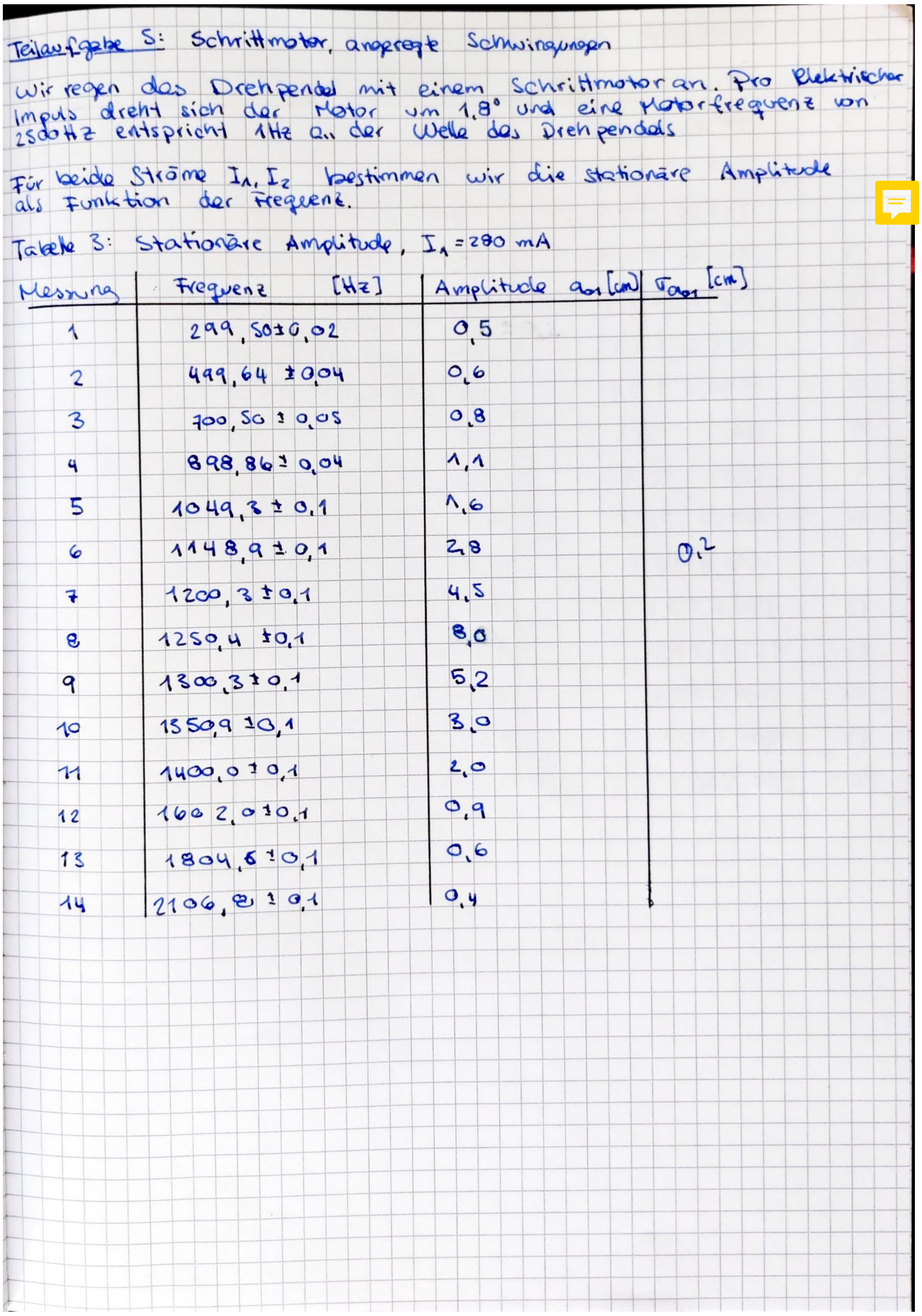
Teilaufgabe 4: Amplitudenmessung

Wir lesen die Amplitude nach jeder Periode des gedämpften Pendels ab.

Tabelle 2: Amplitude nach jeder Periode

Periode	Amplitude a_1 (I_1) [cm]	Amplitude a_2(I_2) [cm]	σ_a [cm]
0	17,2	16,4	
1	14,4	12,4	
2	12,1	9,5	
3	10,2	7,2	
4	8,5	5,6	0,2
5	7,1	4,3	
6	6,0	3,3	
7	5,0	2,6	
8	4,2	2,0	
9	3,6	1,6	
10	3,0	1,3	
11	2,6	1,0	
12	2,2	0,9	
13	1,9	0,8	
14	1,6		
15	1,4		
16	1,2		
17	1,1		
18	1,0		

Abbildung 3: Fortsetzung Messprotokoll



Teilaufgabe 5: Schrittmotor, angeregte Schwingungen

Wir regen das Drehpendel mit einem Schrittmotor an. Pro elektrischer Impuls dreht sich der Motor um 1,8° und eine Motorfrequenz von 2500 Hz entspricht 1 Hz an der Welle des Drehpendels

Für beide Ströme I_1, I_2 bestimmen wir die stationäre Amplitude als Funktion der Frequenz.

Tabelle 3: Stationäre Amplitude, $I_1 = 280$ mA

Messung	Frequenz [Hz]	Amplitude a_{01} [cm]	$\sigma_{a_{01}}$ [cm]
1	299,50 ± 0,02	0,5	
2	499,64 ± 0,04	0,6	
3	700,50 ± 0,05	0,8	
4	898,86 ± 0,04	1,1	
5	1049,3 ± 0,1	1,6	
6	1148,9 ± 0,1	2,8	0,2
7	1200,3 ± 0,1	4,5	
8	1250,4 ± 0,1	8,0	
9	1300,3 ± 0,1	5,2	
10	1350,9 ± 0,1	3,0	
11	1400,0 ± 0,1	2,0	
12	1602,0 ± 0,1	0,9	
13	1804,5 ± 0,1	0,6	
14	2106,8 ± 0,1	0,4	

Abbildung 4: Fortsetzung Messprotokoll

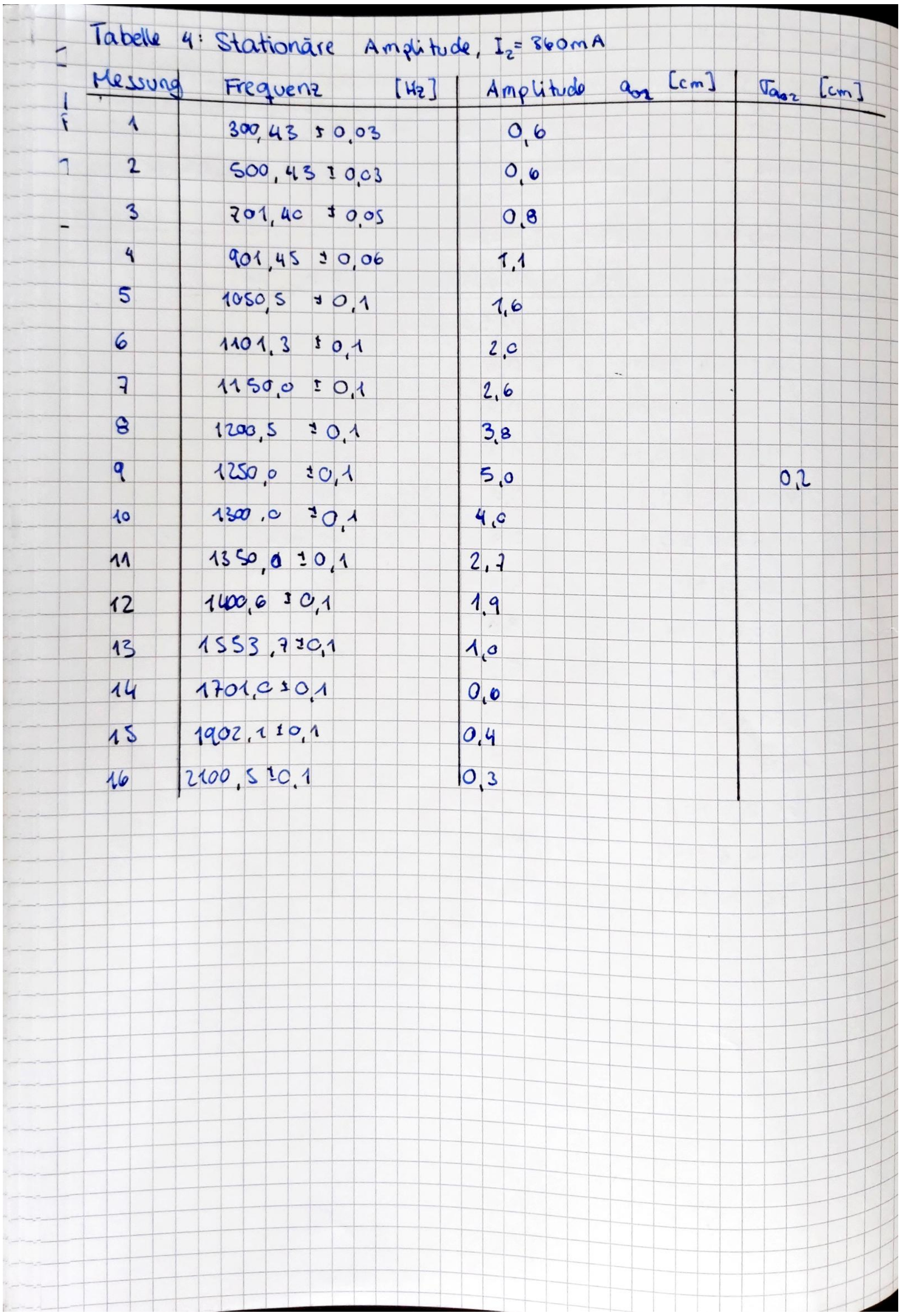


Tabelle 4: Stationäre Amplitude, $I_2 = 860\,mA$

Messung	Frequenz [Hz]	Amplitude a_{0z} [cm]	$\sigma_{a_{0z}}$ [cm]
1	300,43 ± 0,03	0,6	
2	500,43 ± 0,03	0,6	
3	701,40 ± 0,05	0,8	
4	901,45 ± 0,06	1,1	
5	1050,5 ± 0,1	1,6	
6	1101,3 ± 0,1	2,0	
7	1150,0 ± 0,1	2,6	
8	1200,5 ± 0,1	3,8	
9	1250,0 ± 0,1	5,0	0,2
10	1300,0 ± 0,1	4,0	
11	1350,0 ± 0,1	2,7	
12	1400,6 ± 0,1	1,9	
13	1553,7 ± 0,1	1,0	
14	1701,0 ± 0,1	0,0	
15	1902,1 ± 0,1	0,4	
16	2100,5 ± 0,1	0,3	

Abbildung 5: Fortsetzung Messprotokoll

4.2 Auswertung

Für die Fehlerberechnung wird im Folgenden, wenn nichts explizit anders gesagt der Fehler einer Funktion $f(x, y, z)$ nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt ausgerechnet:

$$\sigma_f = \sqrt{(\partial_x(f) \cdot \sigma_x)^2 + (\partial_y(f) \cdot \sigma_y)^2 + (\partial_z(f) \cdot \sigma_z)^2} \tag{14}$$

In trivialen Fällen wird aber auf eine explizite Rechnung übersichtshalber verzichtet.

4.2.1 Ungedämpfte Schwingungsdauer

Für den Mittelwert der Schwingungsdauer wurden 3 Mal 20 Schwingungen durchgeführt und dabei die Zeit gestoppt. Im Messprotokoll haben wir den Mittelwert für eine Periode aus diesen 3 Messungen als

$$\overline{T}_0 = (1,986 \pm 0,0012)\,\mathrm{s} \tag{15}$$

berechnet.

4.2.2 Amplitudenmessung

Mit der im Messprotokoll durchgeführte Messung der Amplitude bei schwacher und starker Dämpfung ($I_1 = 280\,\mathrm{mA},\ I_2 = 360\,\mathrm{mA}$) haben wir im logarithmischen Papier die Amplitude gegen die Zeit, angegeben in Anzahl der Schwingungen, aufgetragen. Aus der Herleitung in (7) haben wir beschlossen, dass wir die Dämpfungskonstante δ bestimmen können, indem wir die Zeit ablesen, wann die Dämpfung ihren Halbwert erreicht hat. Bei starker Dämpfung lesen wir aus Diagramm 1 ab, dass dieser Wert nach $t_{1,1/2} = T_0 n$ mit $n = 3,9 \pm 0,6$ erreicht wird.

$$t_{1,1/2} = (7,7 \pm 1,2)\,\mathrm{s} \tag{16}$$

Für den Fehler wurde der Ablesefehler berücksichtigt und mit einfacher Gaußscher Fehlerfortpflanzung nach

$$\sigma_{t_{1,1/2}} = \partial_n\left(t_{1,1/2}\right) \cdot \sigma_n = 1,2\,\mathrm{s} \tag{17}$$

Dämpfungskonstante über die Halbwertszeit der Amplitude

Mit den oben angegebenen Werten lautet

$$\delta_1 = \frac{\ln 2}{t_{1,1/2}} = (0,089 \pm 0,014)\,\mathrm{s}^{-1} \| \tag{18}$$

Der Fehler der Dämpfungskonstante wurde mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt.

Analog machen wir es für die Dämpfungskonstante bei starker Dämpfung. Dabei wird der Halbwert bei $t_{2,1/2} = T_0 n$ mit $n = 2,6 \pm 0,3$ erreicht. Die Dämpfungskonstante δ_2 lautet.

$$\delta_2 = (0,134 \pm 0,015)\,\mathrm{s}^{-1} \| \tag{19}$$

4.2.3 Schrittmotor, angeregte Schwinungen

Dämpfungskonstante über die Halbwertsbreite

Die Amplitude der stationären Schwingung bei schwacher und starker Dämpfung ist auf Diagramm 3 und 4 aufgetragen worden. Aus dem Diagramm haben wir das Maximum abgelesen und zusätzlich die Frequenzen, bei der die Amplitude $\frac{1}{\sqrt{2}}$ des Maximums entspricht. Diese Werte tragen wir in Tabelle 5 auf. Für die Umrechnung von der Motorfrequenz f auf die Kreisfrequenz ω wird folgendes Verhältnis verwendet

$$\omega = \frac{2\pi f}{2500} \tag{20}$$

	f_{max} [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	ω_{max} [s^{-1}]	ω_1 [s^{-1}]	ω_2 [s^{-1}]
I_1	1250 ± 20	1210 ± 20	1290 ± 20	$3,14 \pm 0,05$	$3,04 \pm 0,05$	$3,22 \pm 0,05$
I_2	1250 ± 20	1200 ± 20	1330 ± 20	$3,14 \pm 0,05$	$3,02 \pm 0,05$	$3,34 \pm 0,05$

Tabelle 5: Abgelesene Frequenzen aus Diagrammen 3 und 4

Die theoretische Dämpfungskonstante δ bestimmt man theoretisch nach Gleichung (11) als

$$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tag{21}$$

Für eine Schwache Dämpfung erhalten wir

$$\delta_1 = (0,09 \pm 0,04)\,\mathrm{s}^{-1} \tag{22}$$

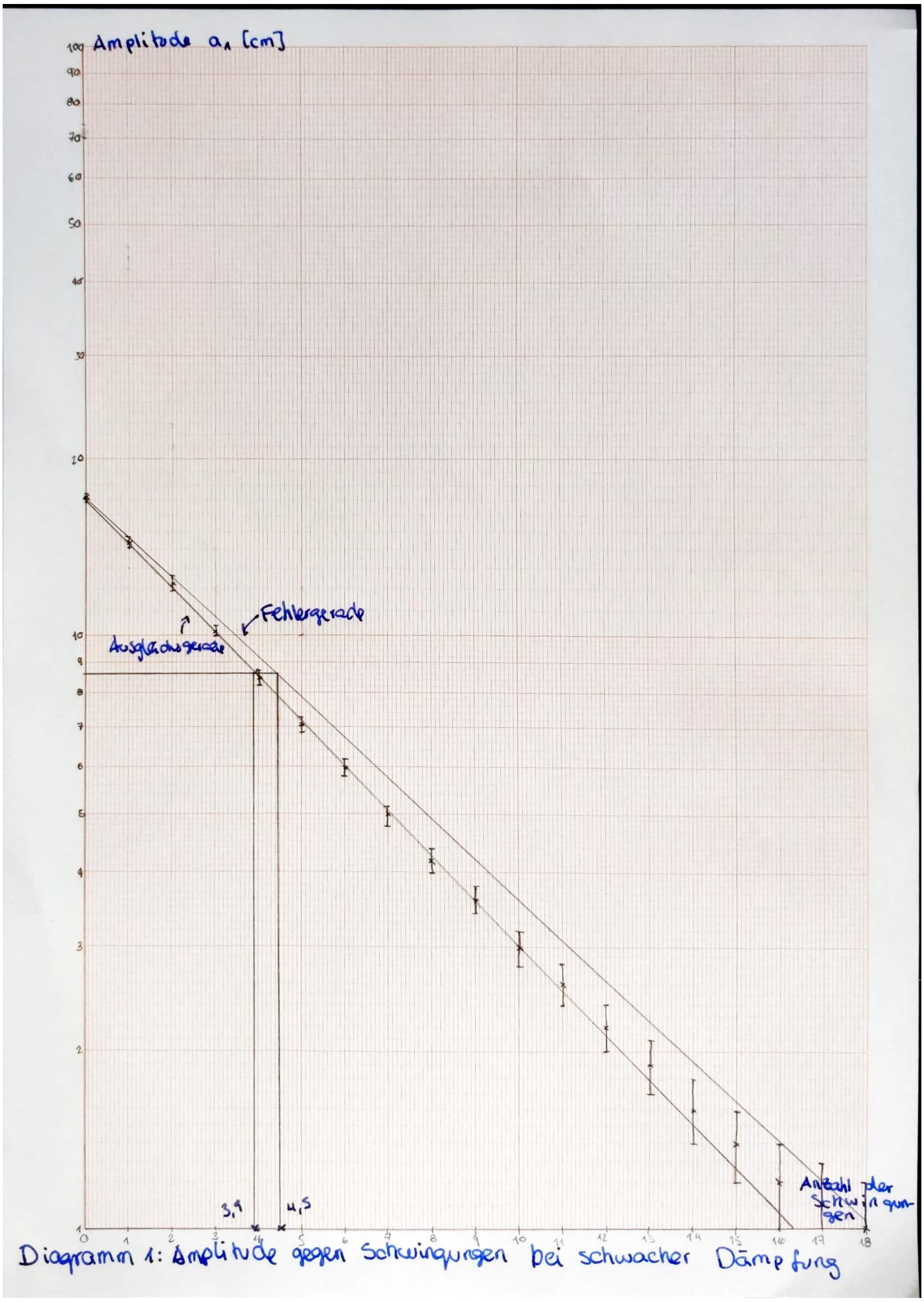


Diagramm 1: Zeitabhängigkeit der Amplitude bei schwacher Dämpfung

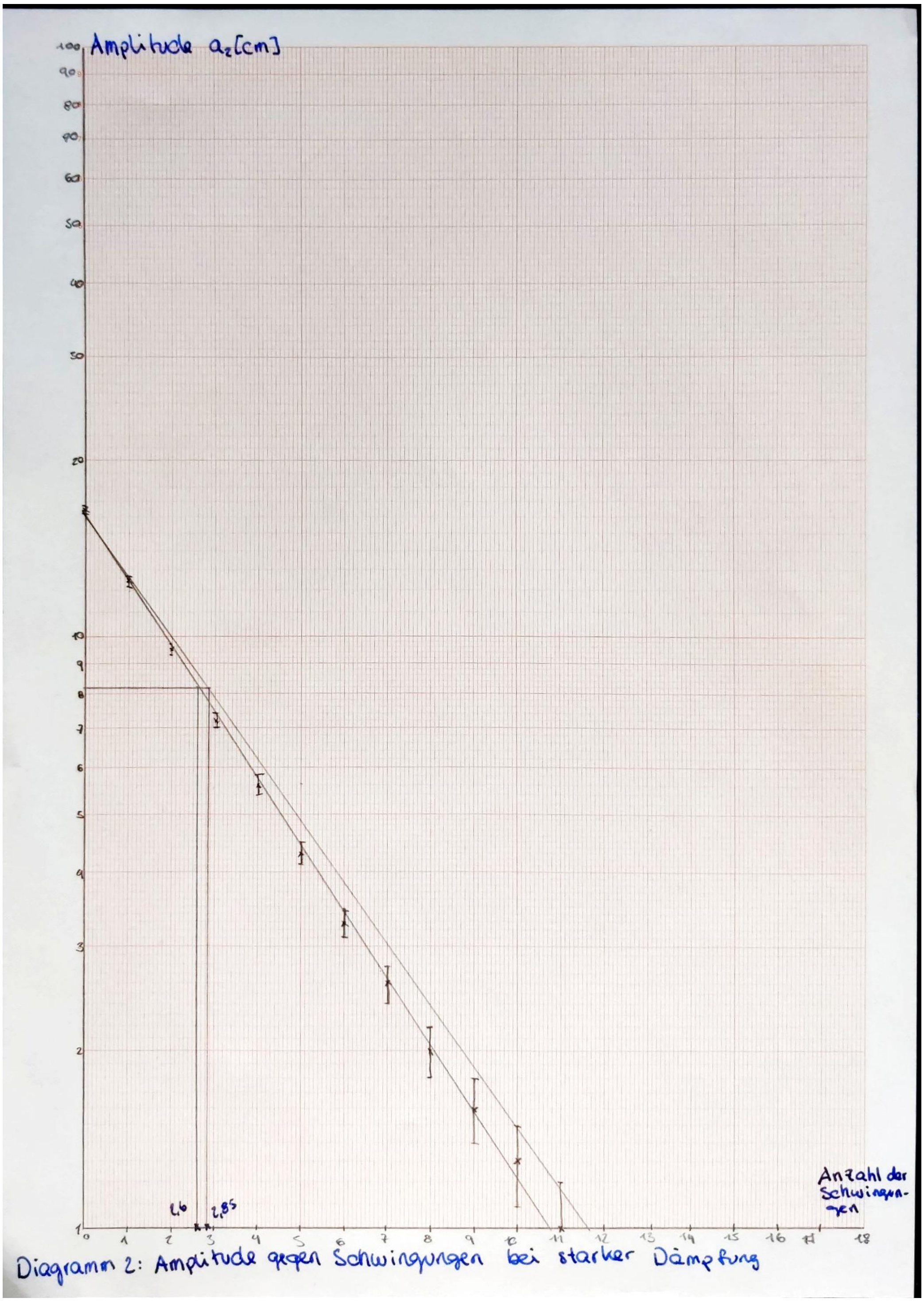


Diagramm 2: Zeitabhängigkeit der Amplitude bei starker Dämpfung

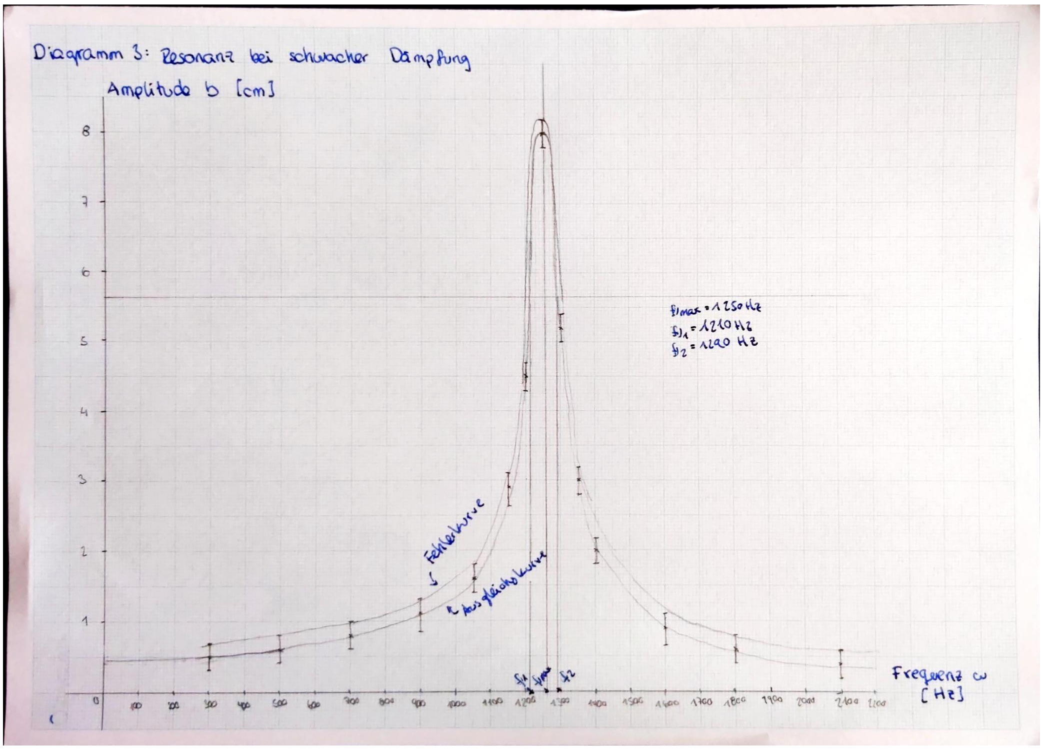


Diagramm 3: Resonanzverhalten bei schwacher Dämpfung

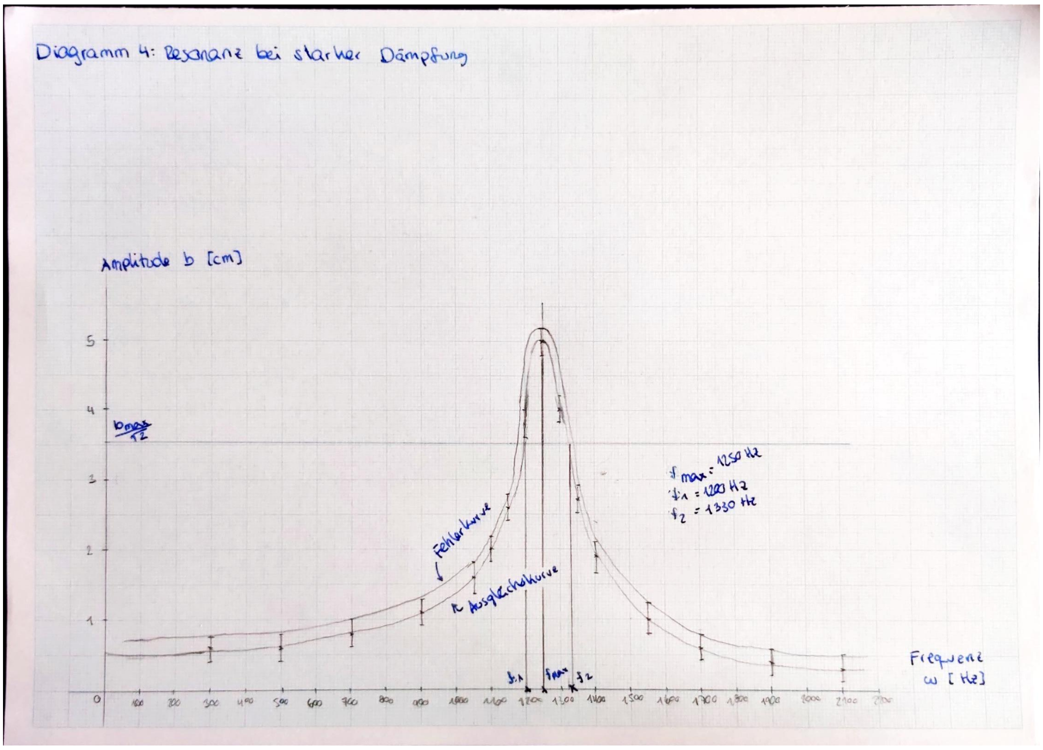


Diagramm 4: Resonanzverhalten bei starker Dämpfung

und für die Starke

$$\delta_2 = (0,16 \pm 0,04)\,\mathrm{s}^{-1} \tag{23}$$

Dämpfungskonstante über die Resonanzüberhöhung

Die Eigenfrequenz ω_0 lässt sich mit Gleichung (10) und der angegebenen $\omega_{\max}$ und Dämpfungskonstante bestimmen. Als vergleich benutzen wir das für uns bekannte Verhältnis

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = (3,1637 \pm 0,0018)\,\mathrm{s}^{-1} \tag{24}$$

Mit Gleichung (10) erhalten wir

$$\omega_{01} = \sqrt{\omega^2{}_{\max} + 2\delta_1^2} = (3,14 \pm 0,05)\,\mathrm{s}^{-1}\| \tag{25}$$

und

$$\omega_{02} = (3,15 \pm 0,05)\,\mathrm{s}^{-1}\| \tag{26}$$

Gleichung (12) lässt sich nach der Dämpfungskonstante umformen. Zur Auswertung fehlt uns der Wert $b(\omega \to 0)$, diesen lesen interpolieren wir aus Diagramm 3, er scheint sich dem Wert $b = (0,4 \pm 0,2)\,\mathrm{cm}$ anzunähern, aber genau lässt sich das nicht sagen. Mit diesem und dem Rest der angegebenen Werten erhalten wir:

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\frac{\omega_{01} \cdot b(\omega \to 0)}{b(\omega_{\max})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3,14\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0,4\,\mathrm{cm}}{8\,\mathrm{cm}} = (0,08 \pm 0,04)\,\mathrm{s}^{-1}\| \tag{27}$$

Der Fehler wurde ebenfalls nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz berechnet als

$$\sigma_{\delta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega_{01}} \cdot b(\omega \to 0)}{b(\omega_{\max})}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{01} \cdot \sigma_{b(\omega\to 0)}}{b(\omega_{\max})}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{01} \cdot b(\omega \to 0)}{b^2(\omega_{\max})} \cdot \sigma_{b(\omega_{\max})}\right)^2} \tag{28}$$

Analog erhalten wir für die starke Dämpfung

$$\delta_2 = (0,16 \pm 0,06)\,\mathrm{s}^{-1}\| \tag{29}$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir die Einflüsse einer Dämpfung auf eine Schwingung qualitativ und quantitativ untersucht. Für die Dämpfung haben wir eine stromdurchflossene Spule, welche mittels der Lorentzkraft das metallische

Drehpendel zum Bremsen bringt. Durch die Gegenüberstellung der Amplitude gegen die Zeit ließ sich graphisch die Dämpfungskonstante bestimmen.

Wir haben bei einer schwachen Dämpfung von $I_1 = 280\,\mathrm{mA}$ sowie bei einer starken Dämpfung $I_2 = 360\,\mathrm{mA}$ das Resonanzverhalten des Drehpendels beobachtet. Dann haben wir das Drehpendel mit einem Motor angetrieben, welches dieses nach einer gewissen Zeit die Schwingung zu einer konstanten Amplitude führte. Wir haben die Abhängigkeit dieser stationären Amplitude von der Frequenz graphisch dargestellt, und daraus konnten wir auch die Dämpfungskonstante bestimmen.

Wir tragen zunächst die Ergebnisse auf Tabelle 6 ein.

	δ (Halbwertszeit) $[\mathrm{s}^{-1}]$	δ (Halbwertsbreite) $[\mathrm{s}^{-1}]$	δ (Resonanzüberhöhung)
I_1	$0,089 \pm 0,014$	$0,09 \pm 0,04$	$0,08 \pm 0,04$
I_2	$0,134 \pm 0,015$	$0,16 \pm 0,04$	$0,16 \pm 0,06$

Tabelle 6: Zusammenfassung der Ergebnisse

5.2 Diskussion

Als erstes wollen wir kurz die erwartete Eigenfrequenz nach der Bestimmung der Periodendauer und der erhaltenen Eigenfrequenz mit der graphischen Darstellung des Resonanzverhalten vergleichen. Beide Werte weichen um

$$\frac{|3,1637\,\mathrm{s}^{-1} - 3,15\,\mathrm{s}^{-1}|}{\sqrt{(0,0018\,\mathrm{s}^{-1})^2 + (0,05\,\mathrm{s}^{-1})^2}} = 0,26 \tag{30}$$

0,26 σ-Abweichungen voneinander ab.

Als nächstes lässt sich beobachten, dass alle Ergebnisse der Dämpfungskonstante bei schwacher Dämpfung miteinander in ihren Fehlerbereichen übereinstimmen. Dies liegt teilweise daran, dass die Fehlern der letzteren zwei Methoden verhältnismäßig riesig sind, bis zu 50% des angegebenen Wertes. Wir führen einen Vergleich der σ-Abweichungen tabellarisch[1] durch. Dabei wird die Abweichung wie folgt angegeben:

$$\frac{|\delta_a - \delta_b|}{\sqrt{\sigma_{\delta_a}^2 + \sigma_{\delta_b}^2}} \tag{31}$$

[1] vielleicht ist die Tabelle ein bisschen redundant, aber funktioniert

δ_1	Halbwertszeit	Halbwertsbreite	Resonanzüberhöhung
Halbwertszeit		$0,024$	$0,21$
Halbwertsbreite	$0,024$		$0,18$
Resonanzüberhöhung	$0,21$	$0,18$	

Tabelle 7: σ-Abweichungen δ_1

Nicht alle Dämpfungskonstanten liegen aber innerhalb der Fehlerbereiche der bei der starken Dämpfung. Beispielsweise liegt die Messung der Halbwertszeit in den Fehlerbereichen der anderen zwei Messungen, aber die Umkehrung gilt nicht. Das liegt wahrscheinlich daran, dass der Fehler der Halbwertszeit deutlich unterschätzt worden ist, wobei der Fehler der anderen zwei Messungen auch überschätzt wurde.

δ_2	Halbwertszeit	Halbwertsbreite	Resonanzüberhöhung
Halbwertszeit		$0,6$	$0,4$
Halbwertsbreite	$0,6$		0
Resonanzüberhöhung	$0,4$	0	

Tabelle 8: σ-Abweichungen δ_2

An beiden Tabellen erkennen wir allerdings, dass nur insignifikante Abweichungen zwischen den Messungen auftreten. Dies ist aber meiner Meinung nach nicht aussagekräftig genug, denn der überproportionale große Fehler der Messungen aus Diagramm 3 und 4 die Ergebnisse möglicherweise verfälscht hat.

Eine wichtige Fehlerquelle ist die graphische Bestimmung der Werte. Dabei treten natürlich Fehlern bei der Zeichnung aufgrund der Skalierung des Papiers und auch menschliche Fehlern bei der Interpolation der Kurve. Beispielsweise wurde auf Diagrammen 3 und 4 der Hochpunkt am höchsten *gemessenen* Punkt gelegt, aber mit sehr großer Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Hochpunkt in der Nähe dieses Punktes. Dafür war aber eine zeichnerische Bestimmung dieses aus den bekannten Daten unmöglich, insbesondere wäre diese aber ebenso willkürlich gewesen wie die Stellung des Maiximums am gemessenen Wert. Dies führt natürlich zu einer riesigen Fortpflanzung von Fehlern. Durch die Entscheidung, an dieser Stelle das Maximum zu stellen sehen sich die folgenden Werten beeinflusst: $\omega_{\max}$, ω_1, ω_2, $b(\omega_{\max})$. Die Dämpfungskonstante δ berechnet mit den zwei letzteren Methoden hängt von all diesen Größen ab. Wir können mit relativer Sicherheit sagen, dass der erhaltene Wert nicht dem wahren Wert entspricht, denn es mit höchstwahrscheinlich falschen Werten berechnet worden ist. Zur Behebung dieses systematischen Fehlers bräuchte man an dieser Stelle entweder mehr Messungen um das Maximum oder genauere Werkzeuge um die Kurve zu interpolieren.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP1 für Studierende der Physik B.Sc., 41-44.