13. Übungsblatt zu Analysis I (WS 20/21)

Name(n): Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

13.1 Aufgabe 1: Wurzelkriterium

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Es gebe ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Z.z.: $\sum a_n$ konvergiert absolut

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta < 1 \tag{1}$$
$$\implies |a_n| \leq \theta^n < 1 \tag{2}$$

So ist θ^n eine Majorante der geometrischen Reihe. Es folgt daraus, dass $|a_n|$ absolut konvergiert.

b) Es sei $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Z.z.: $\sum a_n$ konvergiert absolut.

Sei $B_n := \sup\{\sqrt[k]{a_k} | k \geq n\}$. Diese Folge ist monoton fallend und beschränkt. Daraus folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} B_n \tag{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} B_n < 1 \iff B_n < 1 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \tag{4}$$
$$\iff \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ f. f. a. } n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

13.2 Aufgabe 2

a) Geg.: $s_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

$b_n := \dfrac{1}{n^3}$ ist eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dementsprechend ist nach dem Leibniz-Kriterium $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ konvergent.

Wir untersuchen nun die Reihe der Beträge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6}$$

$$\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \tag{7}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \tag{8}$$

$$= 1 + 1 = 2 \tag{9}$$

Die Reihe $\sum \frac{1}{n^3}$ ist beschränkt, also konvergent.

s_n konvergiert absolut

b) $s_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

Die Folge $b_n := \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ ist monoton fallend und beschränkt. So konvergiert die Reihe s_n nach dem Leibniz-Kriterium.

Wir untersuchen zunächst die Folge der Beträge mit dem Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n+1}\left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} - 1\right)}{\sqrt{n+1}\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)} \right| \tag{10}$$

$$= \left| \frac{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} - 1}{1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}} \right| \tag{11}$$

$$= \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} - 1} \right| \tag{12}$$

$$\leq \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}} \right| + \left| \frac{-1}{-1} \right| \tag{13}$$

$$= \left| \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}} \right| + 1 \tag{14}$$

$$\left| \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \right| \geq \left| \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}} \right| \geq 1 \tag{15}$$

Da der Zähler innerhalb der Wurzel immer größe als der Nenner ist, so wird das Ergebnis auch stets größer gleich 1 sein und nach dem Quotientenkriterium divergiert diese Reihe.

c) Geg.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-1^n)n^n} \tag{16}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \tag{17}$$

Wir untersuchen zunächst die Reihe der Beträge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \tag{18}$$

Nach dem Quotientenkriterium gilt:

$$\left| \frac{\frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}} \right| = \left| \frac{n^n (n+2)^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n-1}} \right| \tag{19}$$
$$= \left| \frac{n^n (n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \right| \tag{20}$$
$$\leq \left| \frac{n^n (n+1)^n}{(n+1)^2 n} \right| \tag{21}$$
$$= \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| \tag{22}$$
$$= \left| \frac{n}{1+n} \right|^n \tag{23}$$
$$= \left(\left| \frac{n+1}{n} \right|^n \right)^{-1} \qquad \Big| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e \tag{24}$$
$$= e^{-1} \leq q < 1 \tag{25}$$

Die Reihe konvergiert absolut.

d) Geg.: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[3]{n+1})^n}$

13.3 Aufgabe 3: Potenzgesetze

Geg.:

- $a > 0$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $f : a^x := e^{x \log a}$

a) Z.z.: $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig.

$$\begin{align} a^x &= e^{x \log a} \tag{26} \\ &= \tag{27} \end{align}$$

b) Z.z.: $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{align} a^{x+y} &= e^{(x+y)\log a} \tag{28} \\ &= e^{x \log a + y \log a} \tag{29} \\ &= e^{x \log a} e^{y \log a} \tag{30} \\ &= a^x a^y \tag{31} \end{align}$$

c) Z.z.: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ für alle $q \geq 2, p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{align} a^{\frac{p}{q}} &= e^{\log a \frac{p}{q}} \tag{32} \\ &= e^{\frac{(\log a)^p}{q}} \tag{33} \\ &= ... \tag{34} \\ &= \sqrt[q]{a^p} \tag{35} \end{align}$$

d) Z.z.: $(a^x)^y = a^{xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{align} (a^x)^y &= a^x \cdot a^x \cdot ... \cdot a^x && |y - \text{mal} \tag{36} \\ &= a^{x+x+...+x} && |y - \text{mal} \tag{37} \\ &= a^{xy} \tag{38} \end{align}$$

e) Z.z.: $a^x b^x = (ab)^x$ für alle $x \in \mathbb{R}, b > 0$

$$\begin{align} a^x b^x &= e^{x \log a} e^{x \log b} \tag{39} \\ &= e^{x \log a + x \log b} \tag{40} \\ &= e^{x(\log a + \log b)} \tag{41} \\ &= e^{(\log a + \log b)^x} \tag{42} \\ &= (ab)^x \tag{43} \end{align}$$

f) Z.z.: $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{align} \frac{1}{a^x} &= \frac{1}{e^{x \log a}} \tag{44} \\ &= e^{-x \log a} \tag{45} \\ &= a^{-x} \tag{46} \end{align}$$

13.4 Aufgabe 4: Evaluation

Analysis I? Nimmermehr (hoffentlich)