4. Übungsblatt zu Experimentalfüsik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ Σ___

4.1 Aufgabe 1

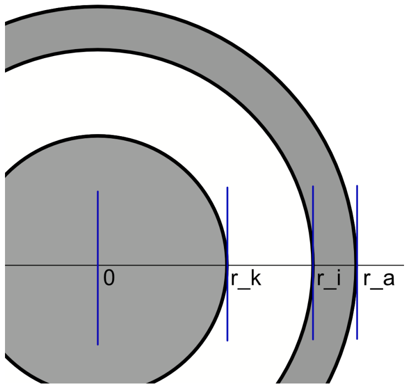

Abbildung 1: Darstellung des Kondensators

a) Nach dem Gausschen Gesetz gilt:

$$\oint_A \mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Der Betrag des Integrals über eine Kugeloberfläche ist bekannt, deshalb können wir direkt einsetzen. Es handelt sich außerdem um ein Radialfeld, dessen Feldvektoren aus der Kugelmitte heruausgerichtet sind.

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \tag{2}$$

Da es sich, wie erwähnt, um ein Radiafeld handelt, können wir ab jetzt auf Grund der davon ausgehenden Symmetrie rein mit dem Betrag des E-Feldes arbeiten.

Aufgrund der Influenz durch die Innere Kugel auf die äußere Kugelschale, wird auf der Kugelschale eine Ladungstrennung stattfinden. Hierdurch wird die nach innen gerichtete Fläche negativ und die nach außen gerichtete Fläche positiv geladen sein. In Summe ergibt sich zu diesem Zeitpunkt dennoch für die Kugelschale eine Gesamtladung 0 C.
Für die Feldstäre zu den verscheidenen Radien gilt:

$r < r_k$: $|E| = 0$, da wir uns innerhalb eines Leiters befinden.

$r_k < r < r_i$: $|E| \sim \frac{1}{r^2}$. Nach der obigen Formel.

$r_i < r < r_a$: $|E| = 0$, da wir uns innerhalb eines Leiters befinden.

$r_a < r$: $|E| \sim \frac{1}{r^2}$. Nach der obigen Formel.

Skizze:

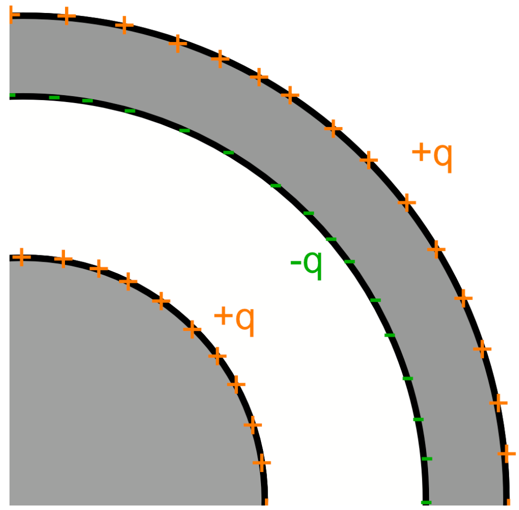

Abbildung 2: Ladungsverteilung bei nicht geerdeter Außenschale.

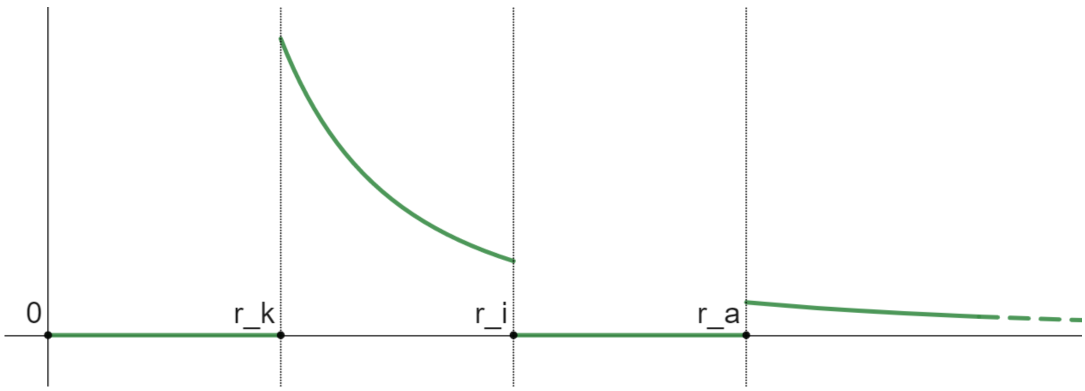

Abbildung 3: Verlauf der elektrischen Feldstärke

b) Solange die Außenschale nicht geerdet war, konnten die Ladungen auf dieser sich nur im Rahmen der bereits erwähnten Ladungstrennung positionieren.
Sobald die Erdung besteht, wird ein Ladungsaustausch mit dem Grund stattfinden. Hierbei werden die abgestoßenen positiven Ladungen "abfließen" und stattdesse negative Ladungen, welche von der inneren Kugel angezogen werden, "zufließen".
Somit ist die Außenschale nicht mehr neutral, sondern nun mit einer **Ladung von** $-q$ **negativ geladen**.

Da sich außerhalb der Kugelschale nun zwei gleichwertige Elektrische Felder mit entgegengetzter Feldlinienrichtung überlagern, wird nach der Erdung $|E(r > r_a)| = 0$ gelten.

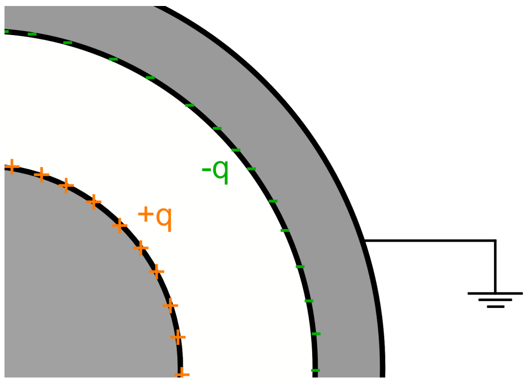

Abbildung 4: Ladungsverteilung bei geerdeter Außenschale.

c) Wir bestimmen zuerst die Spannung zwischen den Platten.

$$U = -\int \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3}$$

In unserem Fall Integrieren wir über die "Strecke" zwischen r_k und r_i.

$$\begin{align}
U &= -\int_{r_k}^{r_i} \mathbf{E} \, \mathrm{d}r \tag{4}\\
&= -\int_{r_k}^{r_i} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \, \mathrm{d}r \tag{5}\\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_k}^{r_i} \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r \tag{6}\\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_k}^{r_i} \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r \tag{7}\\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right|_{r_k}^{r_i} \tag{8}\\
&= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_k}\right) \tag{9}\\
U &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_k - r_i)}{r_k r_i} \tag{10}
\end{align}$$

Für die Kapazität gilt dann:

$$\begin{align}
C &= \frac{Q}{U} \tag{11}\\
&= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_k - r_i)}{r_k r_i}} \tag{12}\\
C &= 4\pi\epsilon_0 \frac{r_k r_i}{(r_k - r_i)} \tag{13}
\end{align}$$

4.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $E_1 = 130 \text{ V m}^{-1}$
- $E_2 = 4 \text{ V m}^{-1}$
- $h = 10 \text{ km}$
- $r = 6371 \text{ km}$

a) Die Flächenladungsdichte einer homogen geladenen Kugel ist bekannt als:

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon_0 \cdot E_1 && (14)\\ &\approx -1.15 \cdot 10^{-9} \text{ C m}^{-2} && (15) \end{aligned}$$

Die Raumladungsdichte ist:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{q}{V} && (16)\\ &= \frac{q}{\frac{4}{3}\pi((r-h)^3 - r^3)} && (17) \end{aligned}$$

Und nach Gauß gilt:

$$\begin{aligned} \frac{Q+q}{4\pi(r+h)^2} &= \varepsilon_0 E_2 && (18)\\ \frac{Q+q}{4\pi} &= \varepsilon_0 E_2 (r+h)^2 && (19)\\ \frac{q}{4\pi} &= \varepsilon_0 E_2 (r+h)^2 - \frac{Q}{4\pi} \qquad \Big| \cdot \frac{3}{((r+h)^3 - r^3)} && (20)\\ \frac{q}{\frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - r^3)} &= \frac{\varepsilon_0 E_2 (r+h)^2}{(r+h)^3 - r^3} - \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - r^3)} && (21)\\ \rho &= \frac{\varepsilon_0 E_2 (r+h)^2}{(r+h)^3 - r^3} - \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi((r+h)^3 - r^3)} && (22)\\ &\approx 1.114 \cdot 10^{-13} \text{ C m}^{-3} && (23) \end{aligned}$$

b) Um das elektrische Feld zu bestimmen, was zwischen der Erdoberfläche und der Atmosphäre wirkt, benutzen wir das Superpositionsprinzip und sagen, dass:

$$E(z) = E_1 - E_z \tag{24}$$

Dabei bezeichnet E_z die "Abschwächung" des elektrischen Feldes der Erde, als wir weiter in z-Richtung gehen. Um dies zu bestimmen benutzen wir den Differentialsatz von Gauß:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} && (25)\\ &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z && (26) \end{aligned}$$

Wegen des Größenverhältnisses zwischen dem Erdradius und der Höhe der Atmosphäre können wir zunächst das System als eine unendlich ausgedehnte Platte annähern. Dabei wirkt logischerweise das elektrische Feld nur senkrecht zur Platte, also dürfen wir $E_x = E_y = 0$ setzen. Dann wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z} && \Big| \int \mathrm{d}z && (27)\\ E_z &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} z && && (28) \end{aligned}$$

Somit gilt für den Potentialunterschied:

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^h (E_1 - E_z)\,\mathrm{d}z && (29)\\ &= -\left[E_1 z - \frac{\rho}{2\varepsilon} z^2\right]_0^h && (30)\\ &= -E_1 h + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} h^2 && (31)\\ &= -670 \cdot 10^3\ \mathrm{V} \qquad \Big|[\ \mathrm{V}][\ \mathrm{m}^{-1}][\ \mathrm{m}] - [\ \mathrm{V}][\ \mathrm{m}^{-2}][\ \mathrm{m}^2] = [\ \mathrm{V}] && (32) \end{aligned}$$

4.3 Aufgabe 3

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir das Problem einer Ladung, die auf eine leitende Platte wirkt mit dem Problem zweier umgekehrt gleich geladener Teilchen darstellen können, mit sogenannten "Spiegelladungen".

Ähnlich zur Herleitung des elektrischen Feldes auf einer unendlichen homogenen Platte mittels einer Gaußschen Fläche können wir hier die "zylindrische" Symmetrie benutzen um das Problem zu vereinfachen.

Aus der Vorlesung wissen, wir, dass das elektrische Potential

$$\varphi = \frac{E_{\text{pot}}}{q} \tag{33}$$

einer unendlichen Platte mit einer Punktladung im Abstand a geschrieben werden kann als

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right|} - \frac{q}{\left|\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right|}\right] \tag{34}$$

Dabei bezeichnet $\left|\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right|$ den Abstand von unserer Ladung zu irgend einem Punkt im Raum und $\left|\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right|$ den Abstand von unserer Spiegelladung zum gleichen Punkt. Dadurch, dass wir die Rechnung weiter in Zylinderkoordinaten führen, können wir dies schreiben als:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}}\right] \tag{35}$$

Um das elektrische Feld zu bestimmen, benutzen wir folgendes:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi \tag{36}$$

Zur Vereinfachung benutzen wir den Gradient in Zylinderkoordinaten:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{37}$$

Dabei beachten wir, dass per Aufgabenstellung ist das elektrische Feld an der Oberfläche gesucht, das heißt $z = 0$, zusätzlich gibt es wegen der Symmetrie auch keine Änderung bezüglich des azimutalen Winkels

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} && (38)\\
&= -\boldsymbol{e}_\rho \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}^3} + \frac{q\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}^3}\right] && (39)\\
&\quad - \boldsymbol{e}_z \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q(z-a)}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}^3} + \frac{q(z+a)}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}^3}\right] \qquad \Big| z = 0 &&\\
&= -\boldsymbol{e}_z \frac{qa}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2 + a^2}^3} && (40)
\end{aligned}$$

b) Die Feldlinien gehen aus der Ladung q raus und treffen immer senkrecht auf die leitende Platte. Die blauen Linien sind die Äquipotentiale.

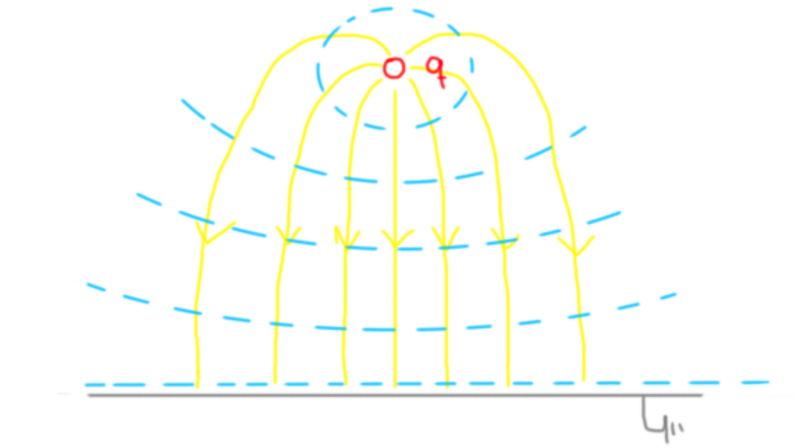

Abbildung 5: Skizze

c) Die induzierte Ladung auf die Platte lässt sich berechnen durch

$$\sigma = \varepsilon_0 E(z=0) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{41}$$

Und da können wir das Ergebnis aus a) einsetzen:

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi\sqrt{\rho^2+a^2}^3} \tag{42}$$

Das Integral für die Gesamtladung mittels der Ladungsdichte bestimmen wir durch:

$$\begin{aligned}
Q &= \int \sigma \;\mathrm{d}A && (43)\\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \;\; -\frac{qa\rho}{2\pi\sqrt{\rho^2+a^2}^3} && (44)\\
&= -qa \int_0^\infty \mathrm{d}\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}^3} && (45)\\
&= -qa \int_0^\infty \mathrm{d}\rho \frac{\rho}{a^3\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}+1}^3} && |\rho = a\tan u \quad (46)\\
& && |\; \mathrm{d}\rho = a\sec^2 u \;\; \mathrm{d}u\\
&= -q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u \frac{a\tan u \; a\sec^2 u}{\sqrt{\tan^2 u+1}^3} && |\sqrt{\tan^2 x+1} = \sec x \quad (47)\\
&= -q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u \frac{\tan u}{\sec u} && (48)\\
&= -q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}u \sin u && (49)
\end{aligned}$$

$$= -q[-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{50}$$
$$= -q \tag{51}$$

d) Geg.:

- Elementarladung: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C
- Masse: $m_e = 9,109383 \cdot 10^{-31}$ kg

Die elektrische Kraft auf das Teilchen ist

$$\boldsymbol{F}_C = Q\boldsymbol{E} \qquad |\rho = 0 \tag{52}$$
$$= \boldsymbol{e}_z \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q(z-a)}{\sqrt{(z-a)^2}^3} + \frac{q(z+a)}{\sqrt{(z+a)^2}^3}\right] \qquad |z = a \tag{53}$$
$$= \boldsymbol{e}_z \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2qa}{(2a)^3}\right] \tag{54}$$
$$= \boldsymbol{e}_z \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{55}$$

Es gibt ein Gleichgewicht, falls

$$\boldsymbol{F}_C + \boldsymbol{F}_G = 0 \tag{56}$$
$$\boldsymbol{e}_z \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} = \boldsymbol{e}_z mg \tag{57}$$
$$a^2 = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 m_e g} \tag{58}$$
$$a = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 m_e g}} \tag{59}$$
$$\approx 2,54 \text{ m} \tag{60}$$

Die Gravitationskraft zieht die Ladung zum Boden an und die Elektrische Kraft stoßt die Ladung ab. Die Elektrische Kraft wird mit zunehmender Höhe schwächer und die Gewichtskraft bleibt konstant, also an der gegebenen Höhe wird eine kurze Abweichung um die Gleichgewichtslage ausgeglichen. Wäre das Elektron ein bisschen weiter oben, dann wurde die elektrische Kraft nicht groß genug sein, um es weiter abzustoßen, wird also zurück zur Gleichgewichtslage von der Gravitationskraft angezogen. Wäre das Elektron stattdessen ein bisschen weiter unten, dann wäre es von der elektrischen Kraft zurück zur Gleichgewichtslage abgestoßen.

In dem Fall, dass sich die Platte über dem Elektron befindet, dann zeigt die Elektrische Kraft in die gleiche Richtung der Gravitationskraft und obwohl beide Kräfte betragsmäßig gleich sind, dann wird kein stabiles Gleichgewicht entstehen.