

Kreisel

Physikalisches Anfängerpraktikum II

Juan Provencio

Betreuer/in: Marcel Fischer

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	2
2	Grundlagen	2
2.1	Kreisel	2
3	Versuchsaufbau	5
3.1	Materialen und Geräte	5
3.2	Aufbau	5
4	Messung und Auswertung	6
4.1	Messprotokoll	6
4.2	Auswertung	8
5	Zusammenfassung und Diskussion	14
5.1	Zusammenfassung	14
5.2	Diskussion	15
6	Quellen	17
7	Anhang	18

1 Ziel des Versuches

Mit diesem Versuch werden wir anhand des Kreisels die Phänomenen der Präzession und Nutation untersuchen. Wir werden dafür den Einfluss der Reibung auf den Kreisel analysieren und mithilfe dieser zwei charakteristischen Bewegung in einem Kreisel auch das Trägheitsmoment bestimmen, was als Anwendung der berechneten und gesammelten Daten wirken wird.

2 Grundlagen

2.1 Kreisel

Wir bezeichnen ganz viele physikalische Systeme als ein Kreisel. Voraussetzung dafür ist ein starrer Körper, welcher um einen Punkt rotiert. Darunter erkennen wir drei Achsen: die Figurenachse \vec{F} , diese entspricht der Symmetrieachse des Körpers, die raumfeste Drehimpulsachse \vec{L} , da wir von der Drehimpulserhaltung ausgehen und die Richtung der Drehachse $\vec{\omega}$ durch die Winkelgeschwindigkeit.

2.1.1 Freier, symmetrischer Kreisel

Zusätzlich betrachten wir verschiedene Arten von Kreiseln, insbesondere interessiert uns der kräftefreie Kreisel, in diesem Fall wird er im Schwerpunkt gelagert und die Gewichtskraft übt kein äußeres Drehmoment auf ihn aus. Die Figurenachsen werden an diesem Beispiel auf Abbildung 1 dargestellt.

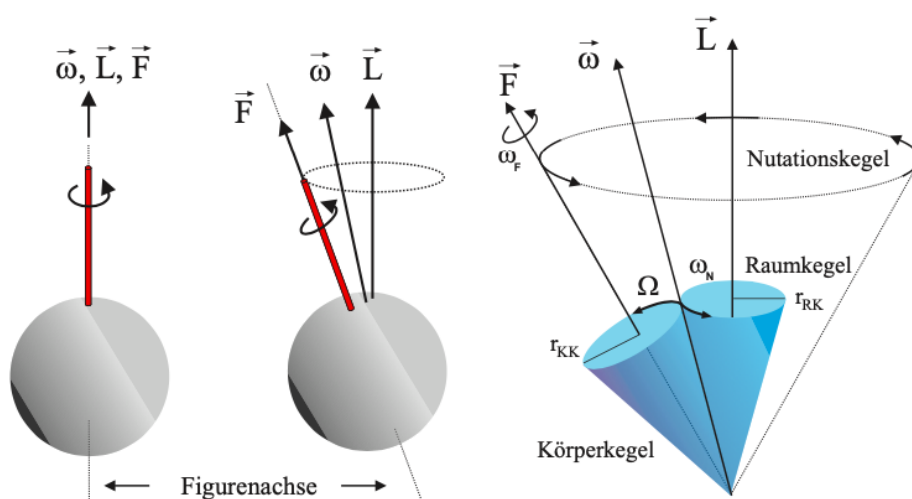


Abbildung 1: Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels

Wenn man den Kreisel einen leichten Schlag gibt und ihn aus seiner "Ruhelage" (Abbildung 1 links) stoßt, so tritt eine komplizierte Nutationsbewegung (ω_N) auf (mitte). Gleichzeitig führt der Körper eine eigene Rotation um die Figurenachse durch (ω_F). Die gesamte Rotation kann durch eine Überlagerung dieser zwei Rotationen beschrieben werden

$$\omega = \omega_N + \omega_F. \quad (1)$$

Wir können gemäß Abbildung 2 die Verhältnisse zwischen den verschiedenen vektoriellen Größen $\omega_{N,F}$ herleiten:

$$\omega_x = \omega_N \sin \theta \quad (2)$$

und unter Ausnutzung der Beziehungen $L_x = L \sin \theta = I_x \omega_x$ heißt das

$$\omega_N = \frac{L}{I_x}. \quad (3)$$

Unter der Annahme, dass der Kreisel nur leicht aus seiner senkrechten Position abgelenkt wird dürfen wir den obigen Ausdruck vereinfachen durch $L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F$ zu

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F. \quad (4)$$

Mittels der Kreisfrequenz Ω können wir auch folgendes Verhältnis darstellen

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_z} \omega_F \quad (5)$$

was sich sinnvoll umformen lässt zu

$$I_x = I_z \left(\frac{1}{\frac{\Omega}{\omega_F} - 1} + 1 \right) \quad (6)$$

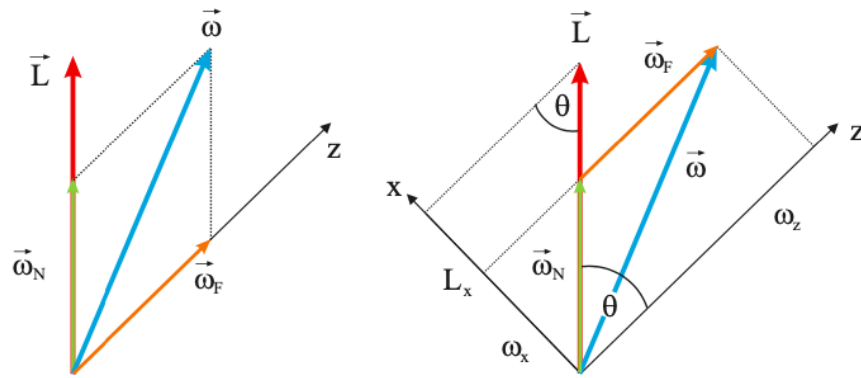


Abbildung 2: Geometrie der Nutationsbewegung

2.1.2 Schwerer, symmetrischer Kreisel

Beim schweren Kreisel verschieben wir den Unterstützungspunkt mithilfe von Massen, die wir dran hängen. Dadurch wirkt die Gewichtskraft ein zusätzliches Drehmoment auf den Kreisel. Wir untersuchen den Fall ohne Nutation und schauen uns die Präzessionsbewegung genauer an. Hier gilt

$$\omega_P = \dot{\phi} = \frac{\dot{L}}{L \sin \alpha} \quad | \quad L = I_z \omega_F \quad (7)$$

$$= \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad (8)$$

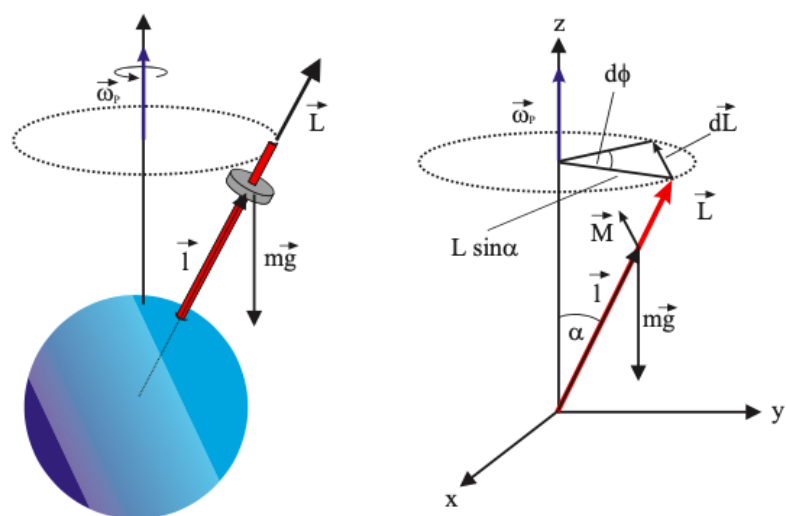


Abbildung 3: Schwerer Kreisel

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ($m = 4,164$ kg incl. Stab, Kugelradius $r = 5,08$ cm) als Kreisel gelagert in einer Luftkissenpfanne
- 2 Gewichte ($r_a = 0,725$ cm, $r_i = 0,325$ cm, $h = 1,1$ cm, $m = 9,85$ g)
- Farbscheibe, Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseigenschaften

3.2 Aufbau



Abbildung 4: Aufbau nach Praktikumsskript

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll V213 Kreisel

15.03.2022
 Maximilian Moller
 Mike Brandt
 Juan Provencio

Teilaufgabe 2: Dämpfung des Kreisels

Der Kreisel wird mit 2 Gewichten am Stabende auf $600-700 \text{ min}^{-1}$ beschleunigt und 12 min lang jede 2 min die Drehfrequenz dokumentiert:

Tabelle 1: Drehfrequenz

Zeit t [min]	Drehfrequenz f [min^{-1}]	Δf [min^{-1}]
0	671	
2	618	
4	570	5
6	525	
8	486	
10	450	
12	416	

Teilaufgabe 3: Präzession

a) Es wird ein Gewicht im Abstand von 20 cm auf ^{den} Stab gelegt und mit etwa 500 min^{-1} gedreht und möglichst rotationsfrei unter drei Winkeln wird die Präzessionsdauer gemessen.

Tabelle 2: Präzessionsdauer als Funktion des Winkels

Winkel θ [$^\circ$]	Präzessionsdauer T_p [s]	ΔT_p [s]
≈ 60	70	
≈ 40	84	5
≈ 5	74	

b) Es werden Massen in verschiedenen Einstellungen auf den Stab gelegt und bei jeweils vier Frequenzen $250 \text{ min}^{-1} < f < 700 \text{ min}^{-1}$ die Präzessionsdauer gemessen

Tabelle 3: Präzessionsdauer als Funktion der Drehfrequenz

Gewichtsanordnung	Frequenz f [min^{-1}]	Präzessionsdauer T_p [s]
Ein Gewichts- stück bei etwa 15 cm	260 260	122
	302 302	709 50
	440 440	91
	370	73
Ein Gewichts- stück bei etwa 20 cm	630	92
	555	80
	572 540	50
	255	36

Abbildung 5: Messprotokoll

zwei Gewichts- stücke bei etwa 15 cm	680 545 402 260	66 52 40 26
zwei Gewichts- stücke bei etwa 20 cm	695 535 390 248	52 38 28 18

Teilaufgabe 4: Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurachse

a) Umlaufrichtung: Mathematisch positiv

b) Es wird für 10 Frequenzen $300 \text{ min}^{-1} < f < 600 \text{ min}^{-1}$ die Zeit t für 10 Umläufe der momentanen Drehachse gemessen

Tabelle 4: Umlaufdauer in Abhängigkeit der Frequenz

$f \text{ [min}^{-1}]$	$10 \cdot \Omega \text{ [s]}$
652	4014
580	16
540	17
495	18
430	21
380	24
340	27
299 444	20
402	25
366 309	36

Teilaufgabe 5: Nutation

Der Kreisel wird in Nutation versetzt und 10 Wertepaare für ω_N, f gemessen.

Tabelle 5: Nutations- und Figurenfrequenz

$\omega_F \text{ [min}^{-1}]$	$\omega_N \text{ [min}^{-1}]$
410	410 380
380	370
380	360
470	450
450	440
340	320
320	300
310	270
300	280
290	270

MFS
15.03.2k

Abbildung 6: Messprotokoll

4.2 Auswertung

Im Folgenden wird bei der Fehleranalyse wenn nicht anders explizit angegeben die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt um die Fehlern der Größen zu bestimmen. Diese wird explizit in der digitalen Auswertung durch Python und wird in trivialen Fällen nicht nochmal bei der Ausarbeitung vorkommen.

4.2.1 Vorversuch

Beim Vorversuch haben wir den Kreisel eingestellt und zu diversen Situationen Beobachtungen aufgeschrieben.

Als erstes wurde der Kreisel kräftefrei eingestellt und wir haben den Metallring des Kugellagers mit einem Finger zur Seite gedrückt. Dabei leistet der Kreisel einen Widerstand gegen diese Bewegung, denn im Optimalfall würden im kräftefreien Kreisel die Achsen aufeinander zusammenfallen, so dass diese vertikal ausgerichtet sind.

Zunächst wurde eine Nutationsbewegung eingestellt und an der Farbscheibe erkennt man in der Mitte einen Punkt, bei welchem die Farbe unvermischt erscheint. Dieser Punkt rotiert gemäß der Drehrichtung auch die Farbe.

Nun wurde die Scheibe mit den konzentrischen Kreisen, bei welcher der Mittelpunkt seitlich vom Zentrum steht auf den Kreisel gelegt und dieser wurde zuerst ohne Nutation beobachtet. Dort entstehen konzentrische Kreise um den Stab. Mit der Scheibe wo das Zentrum der Kreise auch im Zentrum liegt beobachtet man nachdem der Kreisel in Nutation versetzt wird ein Punkt seitlich vom Stab sichtbar, der zwischen schwarz und weiß alterniert. Dieser Fixpunkt dreht sich ebenfalls in Kreis.

Schließlich ändern wir die Lage des Schwerpunkts durch die Farbscheiben und zusätzliche Massen am Ende des Stabes. Im ersten Fall liegt der Schwerpunkt unterhalb Kugelmitte. Hier erfolgt die Drehung immer im entgegengesetzten Sinn zur Präzession. Liegt der Schwerpunkt allerdings oberhalb der Kugelmitte indem man ein Masse am Stab hängt, so stimmen Drehungs- und Präzessionsrichtung miteinander überein.

4.2.2 Dämpfung des Kreisels

Die Dämpfung des Kreisels folgt einem üblichen exponentiellen Verlauf der Form

$$\omega = \omega_0 e^{-\delta t} \quad (9)$$

Wird die Frequenz gegen die Zeit auf einem Diagramm aufgetragen, so können wir durch eine Kurvenanpassung die Faktoren ω_0 und δ berechnen. Diese Dämpfungskonstante wird

uns später insbesondere wichtig sein. Der Einfachheit halber wurde nicht die Kreisfrequenz ω , sondern die Frequenz f , dies beeinflusst aber die Ergebnisse nicht.

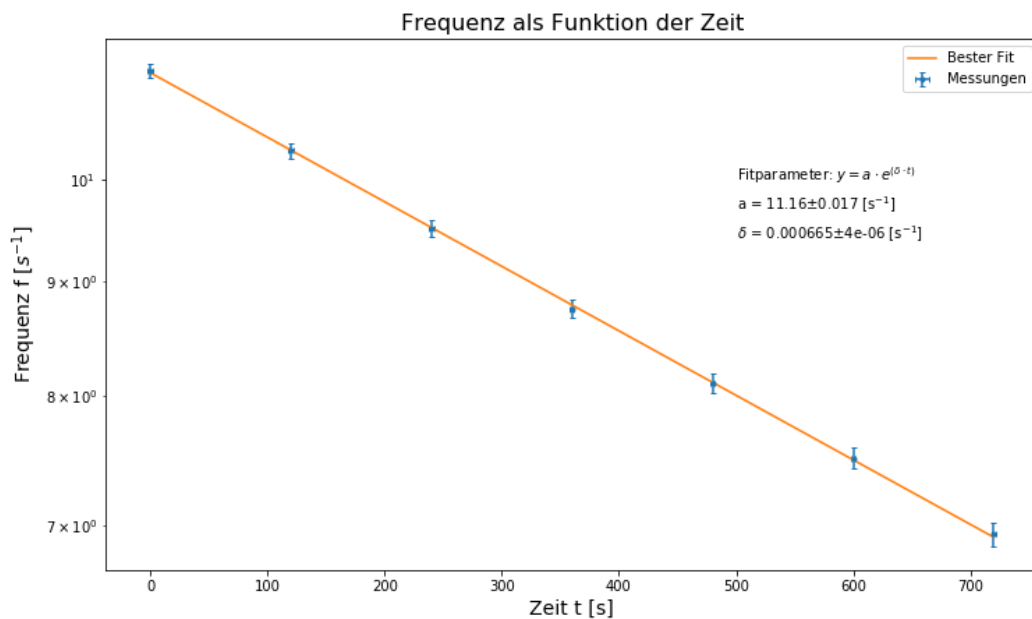


Diagramm 1: Dämpfung des Kreisel

Wir erhalten hier eine Dämpfung von

$$\delta = 6,65(4) \cdot 10^{-4} \cdot \text{s}^{-1} \quad (10)$$

und eine Halbwertszeit von

$$T_{1/2} = 1042(6) \text{ s} \quad (11)$$

4.2.3 Präzession

Teil a)

An dieser Stelle sollten wir grob überprüfen, dass die Präzessionsdauer nicht vom Winkel abhängt und wurde dafür für drei verschiedene Winkeln die aufgeschrieben:

Tabelle 6: Präzessionsdauer für verschiedene Winkeln

Winkel [°]	Präzessionsdauer T_P [s]
≈ 60	70(5)
≈ 40	84(5)
≈ 5	74(5)

Der Fehler der Zeit wurde hier sehr großzügig abgeschätzt, denn wir nur eine Beziehung zum Winkel ausschließen wollten.

Teil b)

Nun haben wir für verschiedene Massenanordnungen die Frequenz und die Präzessionsdauer jeweils 4 Mal gemessen (für verschiedene Frequenzen) und auf einem Diagramm aufgetragen. Die erste Messung war mit einer Masse in einem Abstand von 15 cm zum Kugelzentrum, bei der zweiten war eine Masse 20 cm, dann 2 Massen 15 cm und als letztes 2 Massen 20 cm entfernt. Hier wurde auf die Genauigkeit der Durchführung besser aufgepasst und der Fehler der Zeitmessung auf etwa $\Delta T_P = 2\text{ s}$ abgeschätzt. In den Fehler spielt natürlich die Reaktionszeit eine Rolle, aber insbesondere die genaue Bestimmung des Anfangs und Ende der Präzessionsbewegung, als Referenz war ein Stab am Versuchsaufbau befestigt, womit man die Position des Kreisels nach einer Umdrehung vergleichen konnte, wenn man währenddessen ganz in Ruhe in der selben Position geblieben ist. Aus diesen Daten haben wir mit der Dämpfungskonstante (10) gemäß unseres Modells die Frequenz am Ende der Präzession bestimmt. Aus diesem Endpunkt und Anfangspunkt wurde dann ein Mittelwert gebildet. Zur Bestimmung dieses Mittelwertes war als erstes die Überlegung über die Periode zu integrieren und den Erwartungswert bestimmen gemäß

$$\langle \omega_f \rangle = \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \omega_A \cdot e^{-\delta t} dt \quad (12)$$

$$= \frac{\omega_A - \omega_E}{\delta T_P} \quad (13)$$

zu bestimmen. Allerdings ergibt diese Formel insbesondere für kleine Präzessionsdauern T_P absurd große Fehlern, weshalb wir uns für den arithmetischen Mittel entschieden haben und die mittlere Frequenz gemäß

$$\bar{\omega}_F = \frac{\omega_A + \omega_E}{2} \quad (14)$$

$$\Delta \bar{\omega}_F = \frac{\sqrt{(\Delta \omega_A)^2 + (\Delta \omega_E)^2}}{2} \quad (15)$$

ausgerechnet wurde. Ein Vergleich zwischen beiden Zeiten lieferte vernachlässigbare Unterschiede. Dies ist im Anhang unter der Berechnung der σ -Abweichungen zu finden. Als Sanity Check haben wir nur den Fehler des arithmetischen Mittelwertes benutzt, denn der andere Mittelwert mit absurden Fehlern behaftet war. Dies lieferte trotzdem sehr zufriedenstellende Ergebnisse.

Nun haben wir die Präzessionsdauer gegen die mittlere Kreisfrequenz geplottet und

darüber lineare Anpassungen durchgeführt.

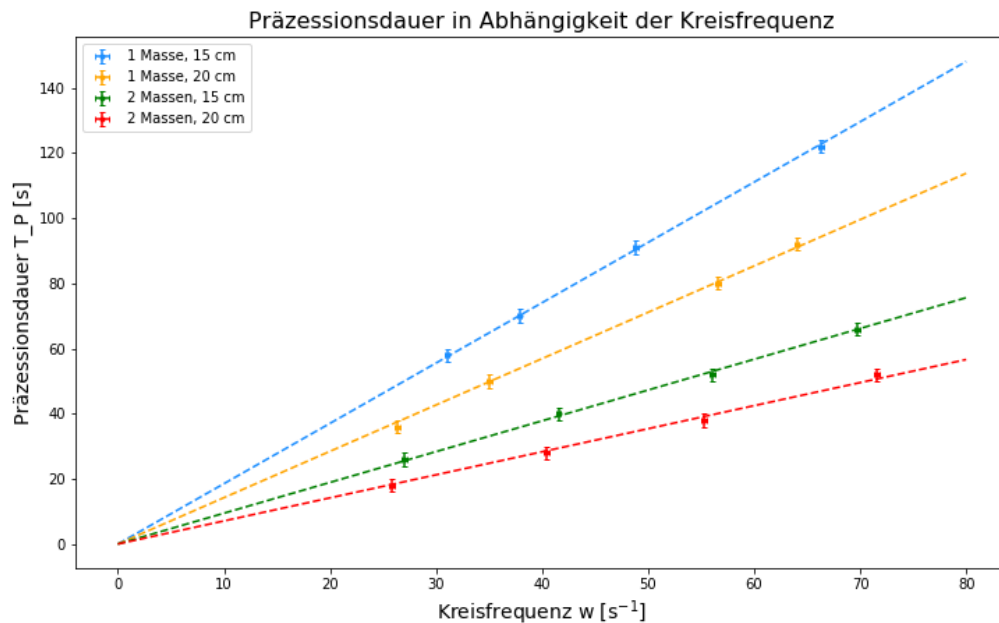


Diagramm 2: Präzessionsdauer in Abhängigkeit der Frequenz

Gemäß (8) lässt sich durch die Steigung s_i dieser Geraden auch das Trägheitsmoment bestimmt durch

$$I_{z_i} = \frac{mgl}{2\pi} s_i. \quad (16)$$

Den Fehler haben wir mittels des relativen Fehlers ausgerechnet als

$$\Delta I_{z_i} = I_{z_i} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s_i}{s_i}\right)^2} \quad (17)$$

wobei wir einen Fehler in der Länge l von $\Delta l = 0,002$ m abgeschätzt haben. Für die Masse haben wir den Wert aus dem Skript $m = 9,85$ g.

Die Steigung der jeweiligen Geraden und die zugehörige Trägheitsmomente sind in folgender Tabelle aufgeschrieben

Tabelle 7: Steigung und Trägheitsmoment bei verschiedenen Massenanordnungen

	Steigung s_i [s ²]	Trägheitsmoment I_{z_i} [10 ⁻³ · kg m ²]
1 Masse, 15 cm	1,851(7)	4,27(6)
1 Masse, 20 cm	1,422(11)	3,28(5)
2 Massen, 15 cm	0,945(8)	5,81(8)
2 Massen, 20 cm	0,708(11)	4,35(8)

Aus dem Mittelwert und dem zugehörigen Fehler des Mittelwertes dieser Trägheitsmomente folgt

$$\bar{I}_z = 4,4(5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (18)$$

Als Vergleichswert nehmen wir das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel nach Angaben der Größen aus dem Praktikumsskript:

$$I_{z\text{lit}} = \frac{2}{5}mr^2 = 4,3 \cdot 10^{-3} [\text{kg m}^2] \quad (19)$$

Dies sollte nicht exakt mit dem experimentellen Wert übereinstimmen, denn durch den Stab die Kugel nicht homogen verteilt ist. Die Annahme hierfür ist, dass der Stab kaum einen Beitrag zum Trägheitsmoment gibt, denn die Figuren- und die Rotationsachse "nahe" von einander sind und deshalb der senkrechte Radius, welcher zum Trägheitsmoment miteinwirkt klein genug ist. Es gibt keine Angabe, wie man hier den Fehler der Annahme mitberücksichtigen soll. Wir gehen einfachheitshalber von keinem Fehler aus. Dies wird ausführlicher in der Diskussion erläutert.

4.2.4 Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenachse

Teil a)

Wir beobachten aus (4), dass es ein proportionales Verhältnis zwischen ω_N/ω_F und I_z/I_x , und aus unseren Beobachtungen ist die Nutationsfrequenz ω_N kleiner als die Figurenfrequenz ω_F , woraus folgt dass I_z ebenfalls kleiner bzw. gleich groß sein muss wie I_x . Im Fall von Gleichheit ist keine Nutation vorhanden.

Teil b)

Als erstes wandeln wir unsere Messdaten leicht massiert um sie vernünftig gegeneinander graphisch aufzutragen. Hierfür haben wir die Winkelfrequenz Ω aus der Umlaufzeit für 10 Umdrehungen bestimmt durch

$$\Omega = \frac{2\pi \cdot 10}{T_{P,10}}. \quad (20)$$

Aus unseren Messwerten wurden zwei Datenpaare rausgenommen, die sehr stark von den anderen abweichen. Diese sind im Diagramm 3 gekennzeichnet aber werden bei der Anpassung der Kurve nicht mitberücksichtigt. Wir gehen davon aus, dass bei der Bemessung der Periodendauer einmal zu viele und einmal zu wenige Wechsels beobachtet wurden.

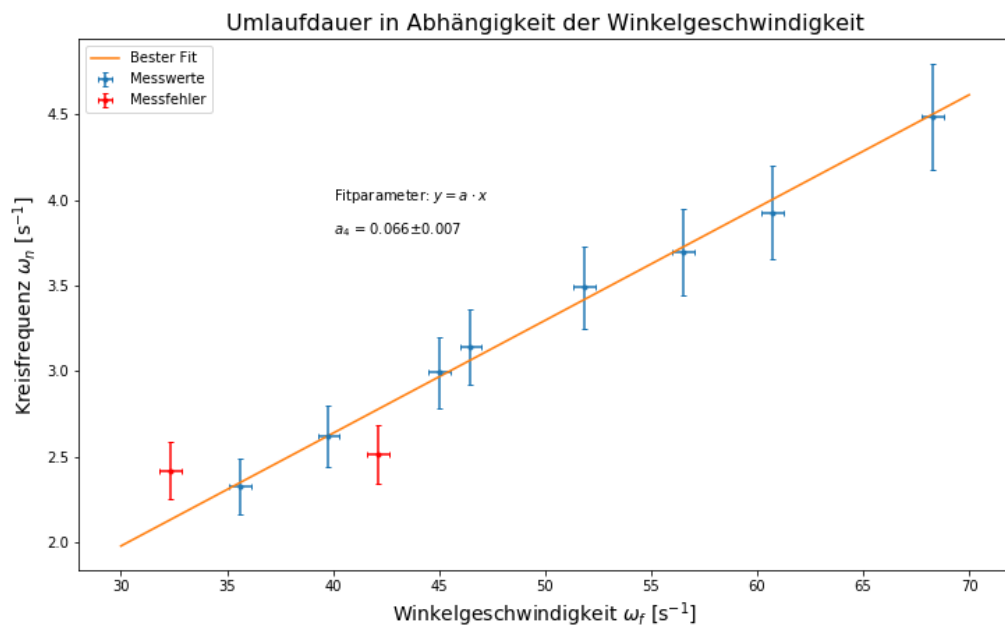


Diagramm 3: Kreisfrequenz Ω gegen Winkelgeschwindigkeit ω_f

Die Steigung dieser Gerade entspricht genau $\frac{\omega_F}{\Omega}$, was wir mittels Gleichung (6) benutzen können um das Trägheitsmoment I_x zu bestimmen.

$$I_{x_4} = 4,7(6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (21)$$

4.2.5 Nutation

Als nächstes tragen wir die Nutationsfrequenz gegen die Figurenfrequenz auf.

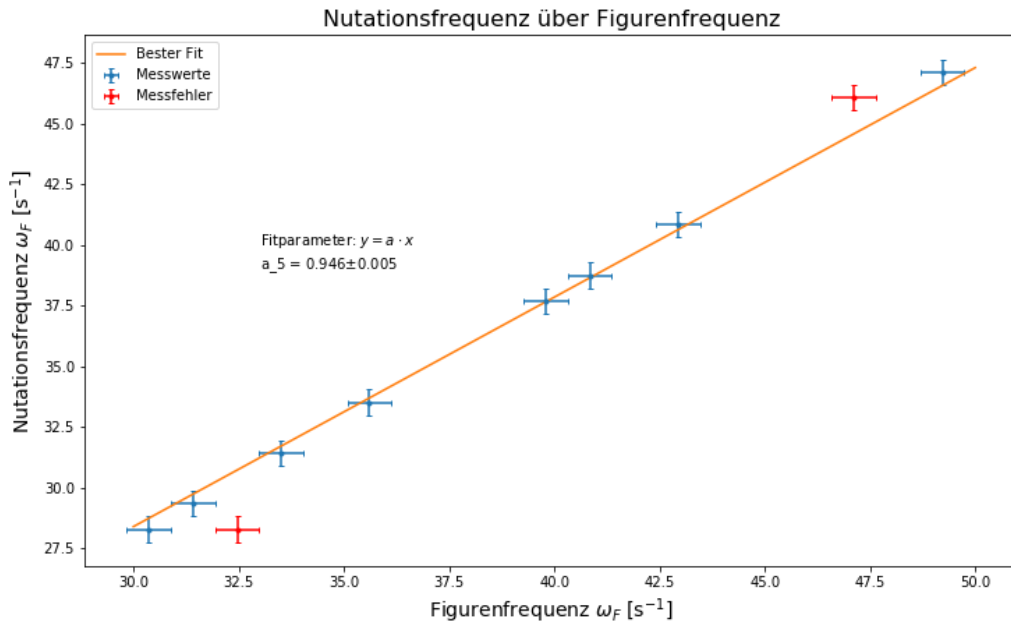


Diagramm 4: Nutationsfrequenz gegen Figurenfrequenz

Aus dieser Steigung bestimmen wir gemäß (4) wieder das Trägheitsmoment I_x .

$$I_{x_5} = 4,7(6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (22)$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir uns genau die Phänomenen der Nutation und Präzession angeschaut und dadurch auch die Trägheitsmomente des Kreisels berechnet. Als erstes wurde ein Vorversuch durchgeführt, welcher nützlich war um später die Messmethoden schnell hinzukriegen. In diesem Vorversuch haben wir qualitativ die Nutations und Präzessionsbewegung untersucht und durch verschiedene Farb- und Ringscheiben die optischen Effekten die zur Messung hilfreich waren beobachtet.

Im zweiten Teil haben wir die Dämpfung des Kreisels untersucht und dafür die Frequenz in Abhängigkeit der Zeit gemessen um daraus die Dämpfungskonstante δ zu bestimmen. Diese Dämpfungskonstante würde in der nächsten Aufgabe gebraucht werden.

Als nächstes haben wir die Präzessionsbewegung des Kreisels beobachtet indem wir für verschiedene Massenanordnungen am Ende des Stabes, die den kräftefreien Zustand

unterbrochen und dadurch die Präzession erlaubt haben, die Präzessionsdauer gemessen haben. Man konnte hier mittels einer anfänglichen Frequenzmessung und mit der Dämpfungskonstante die Frequenz am Ende des Umlaufs einen Mittelwert bilden, welchen wir gegen die Präzessionsdauer aufgetragen haben. Aus diesem Diagramm erhielten wir die Steigung eines linearen Fits, womit man das Trägheitsmoment I_z bestimmen konnte.

In der nächsten Teilaufgabe haben wir bei dem Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenaxe das Trägheitsmoment I_x bestimmt, indem wir die Kreisfrequenz Ω gegen die Winkelgeschwindigkeit ω_F aufgetragen haben. Die Steigung dieser Gerade sollte für die Berechnung des Trägheitsmoments benutzt werden.

Schließlich haben wir zum Vergleich wieder das Trägheitsmoment I_x bestimmt, dieses Mal über die Nutationsfrequenz ω_N und die Winkelgeschwindigkeit ω_F .

5.2 Diskussion

Als Vergleichsgrößen haben wir nun 2 verschiedene Trägheitsmomente $I_{z,x}$ berechnet. Bevor wir mit der Diskussion darüber anfangen wollen wir chronologisch über unsere Methodologie gehen. Zu jeder Kurvenanpassung haben wir mittels die χ^2 -Methode die Fitwahrscheinlichkeit bestimmt und sind über all die Ergebnisse sehr zufrieden. Bei Diagramm 1 erhalten wir eine Fitwahrscheinlichkeit von 100%, was sich nicht auf zu groß abgeschätzte Fehler zurückführen lässt, denn diese prozentuell meistens kleiner oder ungefähr 1% beträgt. Für die Dämpfungskonstante haben wir keinen Vergleichswert, die Bestimmung dieser war rein für die weitere Arbeit gedacht. Ebenfalls für die Halbwertszeit lässt sich kein weiterer Vergleich machen. Die Vergleiche der Trägheitsmomente werden mittels folgender Formel durchgeführt werden:

$$\frac{|I_1 - I_2|}{\sqrt{(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2}}. \quad (23)$$

Nun bei der Präzession, insbesondere bei Teilaufgabe b) kommen wir zu wichtigen Entscheidung die wir bei der Auswertung zum größten Teil schon gerechtfertigt haben. Insbesondere bei der Bestimmung des Mittelwertes der Kreisfrequenz hätte man über die kontinuierliche Bestimmung des Mittelwertes laut (13) den genaueren Mittelwert angeben können. Allerdings mit der Formel für den Mittelwert entstehen absurd große Fehlern wenn man das nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet, weshalb wir den arithmetischen Mittel genommen haben. Diese Entscheidung begründen wir anhand der Tatsache, dass in diesem Fall der arithmetische Mittel und der kontinuierliche Mittel im

extremen Fall, wo wir den Fehler des kontinuierlichen Mittels auf 0 setzen bei allen bis auf eine Messung eine σ -Abweichung von unter 0,1 besitzen. Diese Analyse ist im Anhang unter "Sigmas" Abschnitt 7 zu sehen. Bei dieser Methode erhalten wir für die vier Anpassungen Fitwahrscheinlichkeiten im Bereich von 82-95%, was für Praktikumsstandards sehr befriedigend ist. Wir vergleichen als nächstes das mithilfe dieser Steigung berechnete mittlere Trägheitsmoment mit dem Literaturwert. Die Benutzung dieses Literaturwertes wurde ebenfalls in der Auswertung kurz begründet.

Tabelle 8: Vergleich des Trägheitsmomentes I_z

	$\bar{I}_z [10^{-3} \text{ kg m}^2]$	$\frac{\Delta \bar{I}_z}{\bar{I}_z} [\%]$	$I_{z,\text{lit}} [10^{-3} \text{ kg m}^2]$	$\frac{\Delta I_{z,\text{lit}}}{I_{z,\text{lit}}} [\%]$	σ
Wert	4,4(5)	12	4,3		0,25

Wir sind hier von einem Fehler des Literaturwerts von 0 ausgegangen um die größtmögliche Abweichung zu erhalten. Immerhin haben wir ein sehr gutes Ergebnis von 0,25 σ -Bereiche von Abweichung erhalten. Allerdings ist zu bemerken, dass der relative Fehler des experimentellen Wertes schon sehr groß ist und die Messung hätte an einigen Stellen genauer sein können oder der Fehler kleiner abgeschätzt.

Mit den nächsten zwei Teilaufgaben haben wir das Trägheitsmoment I_x bestimmt. Hierzu wollen wir kommentieren, dass die bestimmten Werten mit der Behauptung im Einklang sind, dass dieser größer als I_z sein muss. Dies ist insbesondere logisch wenn wir daran denken, dass eine größere Masse durch den Stab längs der z -Achse gelagert ist, weshalb diese für das Trägheitsmoment I_z nur eine kleine Rolle, aber für die anderen eine größere Rolle spielt. Bei der Diskussion werden wir weitere signifikante Nachkommastellen in Betracht ziehen, weil beide Werte bis auf die in der Auswertung berücksichtigte Stelle identisch sind. Wir erhalten mittels der zwei Aufgaben folgende Werte:

Tabelle 9: Vergleich des Trägheitsmomentes I_x

	$I_{x_4} [10^{-3} \text{ kg m}^2]$	$\frac{\Delta I_{x_4}}{I_{x_4}} [\%]$	$I_{x_5} [10^{-3} \text{ kg m}^2]$	$\frac{\Delta I_{x_5}}{I_{x_5}} [\%]$	σ
Wert	4,74(56)	12	4,68(55)	12	0,08

Zur Bestimmung dieser Werten haben wir allerdings Messdaten aus unserer Anpassung rausgenommen. Diese weichen sehr stark vom Fit ab und wurden deswegen als Messfehlern gekennzeichnet. Die Ergebnisse sind sehr gut und es lassen sich beide Messmethoden gut für die Bestimmung des Trägheitsmomentes anwenden. Allerdings ist es wichtig zu erwähnen, dass beide Werte von sehr großen Fehlern behaftet waren. Zum Einen wurden

diese Fehlern vom fehlerbehafteten \bar{I}_z übertragen, welcher für die Ausrechnung benutzt wurde. Dies in sich selbst stellt schon einen systematischen Fehler dar, der sich aber durch diese Messmethoden nur schwer beheben lässt, denn eine Bekanntheit über das Trägheitsmoment I_z vorausgesetzt wird. Dafür hätte entweder der andere Versuchsteil sorgfältiger durchgeführt oder ein Vergleichswert angegeben werden.

Ein weiterer Fehler in den Messungen stellt zum Beispiel die Grenze von "leichter" Nutation dar. Bei einer schwachen Nutation sollen einige Annahmen möglich sein, allerdings lassen sich Effekte wie der wie feste Farbe in der Kreisscheibe nur schwer beobachten, und noch schlimmer mehrere Male nacheinander, wenn die Augen schon müde und verwirrt sind. Bei der zweiten Messmethode mithilfe des Stroboskops hätte auch die Messung der Frequenzen $\omega_{N,F}$ schneller durchgeführt werden, aber manchmal war es schwierig beide Frequenzen schnell nacheinander abzulesen und diese sind dementsprechend von großen Fehlern behaftet.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik B.Sc..

Experiment Kreisel

28. März 2022

7 Anhang

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log, pi
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
from scipy import odr
from scipy.integrate import quad
from scipy.signal import find_peaks

def fehler(name, G, sig_G, G_lit, sig_G_lit):
    print(name)
    print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)
    print('Rel. Fehler (Vergleich):', sig_G_lit / G_lit * 100)
    print('Absoluter Fehler: ', G - G_lit)
    # print('Verhältnis:', G / G_lit)
    print('Sigma-Abweichung: ', np.abs(G - G_lit) / sqrt(sig_G ** 2
                                                    + sig_G_lit ** 2), '\n')

def fehler_small(name, G, sig_G):
    print(name)
```

```

print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)

def ergebnis(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma), '+/-' , np.round(sig_G,
    komma), einheit)

def ergebnis_large(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma))
    print('+/-' .rjust(len(name) + 2), np.round(sig_G, komma), einheit)

def fitparameter(name, G, sig_G, komma, einheit):
    return name + ' = ' + str(np.round(G, komma)) + '$\pm$' + str(np.
    round(sig_G, komma)) + einheit

def chi_sq(test_func, x_val, y_val, sig_y_val, popt, number):
    chi2_ = np.sum((test_func(x_val, *popt) - y_val) ** 2
                    / sig_y_val ** 2)
    dof = len(y_val) - number
    chi2_red = chi2_ / dof

    print("chi2 =", chi2_)
    print("chi2_red =", chi2_red)

    prob = np.round(1 - chi2.cdf(chi2_,dof), 2) * 100
    print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%\n")

```

*

Dämpfung des Kreisels

```

[2]: # Messwerte
t = np.array([0, 2, 4, 6, 8, 10, 12]) * 60 # s
sig_t = np.ones(len(t)) * 3

```

```

f = np.array([671, 618, 570, 525, 486, 450, 416]) / 60 # s-1
sig_f = 5 / 60

# Fit
def expo(t, a, delta):
    return a * exp(- t * delta)

popt_1, pcov_1 = curve_fit(expo, t, f, sigma = sig_t, p0 = [0, 0])

a = popt_1[0]
sig_a = sqrt(pcov_1[0, 0])
delta = popt_1[1]
sig_delta = sqrt(pcov_1[1, 1])

x = np.linspace(0, 12 * 60, 100)

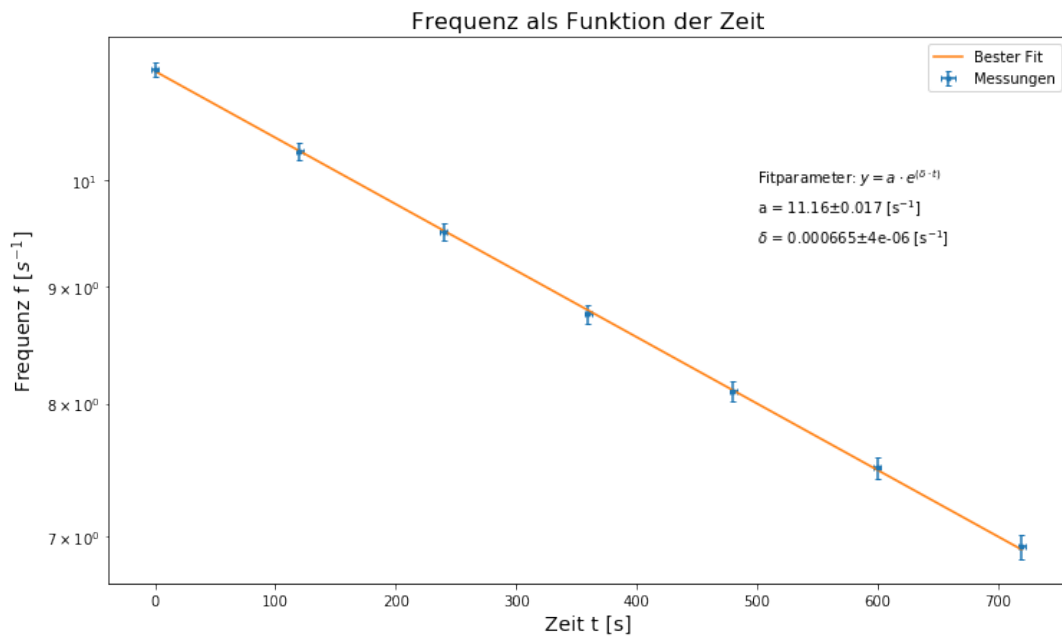
# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.errorbar(t, f, xerr = sig_t, yerr = sig_f, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messungen')
plt.plot(x, expo(x, *popt_1), label = 'Bester Fit')

# Fitparameter
plt.text(500, exp(2.3), 'Fitparameter:  $y = a \cdot e^{(\delta \cdot t)}$ ')
plt.text(500, exp(2.27), fitparameter('a', a, sig_a, 3, ' [s-1]'))
plt.text(500, exp(2.24), fitparameter('$\delta$', delta, sig_delta, 6, ' [s-1]'))

plt.title('Frequenz als Funktion der Zeit', size = 16)
plt.xlabel('Zeit t [s]', size = 14)
plt.ylabel('Frequenz f [s-1]', size = 14)
plt.yscale('log')
plt.legend(loc = 'best')

plt.savefig('images/213/V213Diagramm1.png')

```

[3]: *# chi² Analys*

```
chi_sq(expo, t, f, sig_f, popt_1, 2)
```

```
chi2 = 0.36191811658481965
```

```
chi2_red = 0.07238362331696394
```

```
Wahrscheinlichkeit = 100.0 %
```

[4]: *# Dämpfungskonstante*

```
ergebnis('Dämpfungskonstante delta', delta, sig_delta, 6, '[s^{-1}]')
```

```
# Halbwertszeit
```

```
T_12 = log(2) / delta
```

```
sig_T_12 = log(2) * sig_delta / (delta ** 2)
```

```
ergebnis('Halbwertszeit T_12', T_12, sig_T_12, 0, '[s]')
```

```
Dämpfungskonstante delta = 0.000665 +/- 4e-06 [s^{-1}]
```

```
Halbwertszeit T_12 = 1042.0 +/- 6.0 [s]
```

Präzession

```
[5]: # Messwerte 3a
# Winkel 60, 45, 5
T_P = np.array([70, 84, 74]) # s
sig_T_P_a = 5

[6]: # Messwerte 3b
f_3b = np.array([np.array([659, 302, 480, 370]), # 1 x 15 cm
                 np.array([630, 555, 340, 255]), # 1 x 20 cm
                 np.array([680, 545, 402, 260]), # 2 x 15 cm
                 np.array([695, 535, 390, 248])]) / 60 # 2 x 20 cm

w_3b = 2 * pi * f_3b # s^-1
sig_w_3b = 2 * pi * 2 / 60 * np.ones(len(w_3b))

T_P_3b = np.array([np.array([122, 58, 91, 70]),
                   np.array([92, 80, 50, 36]),
                   np.array([66, 52, 40, 26]),
                   np.array([52, 38, 28, 18])])

sig_T_P = 2

# Endwert w_E
def w_E(w_A, T):
    return w_A * exp(-delta * T)

def sig_w_E(w_A, sig_w_A, T, sig_T):
    return sqrt( (sig_w_A * exp(-delta * T)) ** 2
                + (w_A * T * sig_delta * exp(- delta * T)) ** 2
                + (w_A * delta * sig_T * exp(- delta * T)) ** 2)

w_3b_E = w_E(w_3b, T_P_3b)
sig_w_3b_E = sig_w_E(w_3b, sig_w_3b, T_P_3b, sig_T_P)

# Mittleres w_F
```

```

w_mean_test = (w_3b - w_3b_E) / (delta * T_P_3b)
sig_w_mean_test = sqrt( (sig_w_3b / (delta * T_P_3b)) ** 2
                        + (sig_w_3b_E / (delta * T_P_3b)) ** 2
                        + ((w_3b - w_3b_E) * sig_delta / (delta ** 2 *
↳T_P_3b) ) ** 2
                        + ((w_3b - w_3b_E) * sig_T_P / (delta * T_P_3b_
↳** 2) ) ** 2 )

w_F_mean = (w_3b + w_3b_E) / 2
sig_w_F_mean = sqrt((sig_w_3b ** 2 + sig_w_3b_E)) / 2

# Drücke Mittelwert aus
print('Mittelwerte: w_F_mean')
for i in range(len(w_3b)):
    ergebnis_large('w_F_mean_' + str(i), w_F_mean[i], sig_w_F_mean[i],
↳4,
                    ' [s^-1]\n')

# Fit
def line(x, a):
    return a * x

x = np.linspace(0, 80, 200)

popt_3b = np.array([])
pcov_3b = np.array([])

for i in range(len(w_3b)):
    popt_i, pcov_i = curve_fit(line, w_F_mean[i], T_P_3b[i], sigma =
↳sig_w_F_mean[i],
                                p0 = [0])
    popt_3b = np.append(popt_3b, popt_i)
    pcov_3b = np.append(pcov_3b, pcov_i)

```

```

# Vorbereitung für Plot
name = np.array(['1 Masse, 15 cm', '1 Masse, 20 cm', '2 Massen, 15 cm',
                 '2 Massen, 20 cm'])
col = np.array(['dodgerblue', 'orange', 'green', 'red'])

# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Präzessionsdauer in Abhängigkeit der Kreisfrequenz', size = 16)

for i in range(len(w_3b)):
    plt.errorbar(w_F_mean[i], T_P_3b[i], xerr = sig_w_F_mean[i], yerr = sig_T_P,
                 fmt = '.', capsize = 2, label = name[i], color = col[i])
    plt.plot(x, line(x, popt_3b[i]), #label = 'Bester Fit: ' + name[i],
             color = col[i], linestyle = '--')

    ergebnis('Steigung ' + name[i] + ': s_' + str(i), popt_3b[i],
             sqrt(pcov_3b[i]), 3, '[s^2]')

plt.xlabel('Kreisfrequenz w [s-1]', size = 14)
plt.ylabel('Präzessionsdauer T_P [s]', size = 14)
plt.legend(loc = 'best')

plt.savefig('images/213/V213Diagramm2.png')

```

Mittelwerte: w_F_mean

```
w_F_mean_0 = [66.3197 31.0267 48.7887 37.8646]
             +/- [0.2535 0.2498 0.2508 0.25 ] [s-1]
```

```
w_F_mean_1 = [64.0145 56.6129 35.0221 26.3875]
             +/- [0.2543 0.2531 0.2508 0.2507] [s-1]
```

```
w_F_mean_2 = [69.6795 56.1017 41.5445 26.9936]
```

+/- [0.2572 0.2547 0.2525 0.2514] [s⁻¹]

w_F_mean_3 = [71.5425 55.3256 40.4637 25.8159]

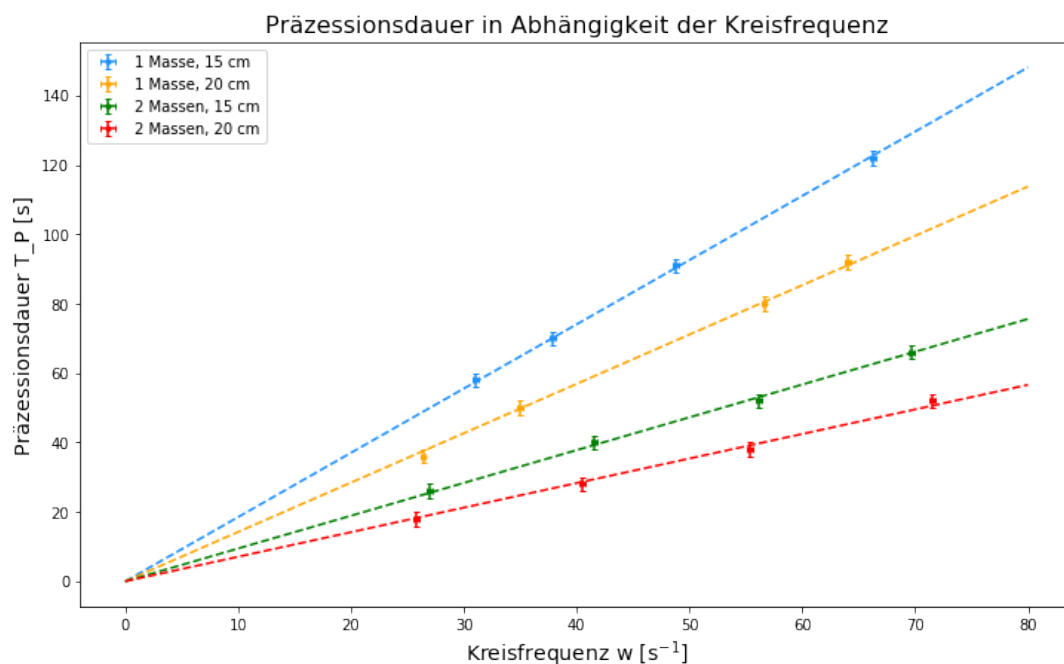
+/- [0.2585 0.2553 0.2531 0.2518] [s⁻¹]

Steigung 1 Masse, 15 cm: s_0 = 1.851 +/- 0.007 [s²]

Steigung 1 Masse, 20 cm: s_1 = 1.422 +/- 0.011 [s²]

Steigung 2 Massen, 15 cm: s_2 = 0.945 +/- 0.008 [s²]

Steigung 2 Massen, 20 cm: s_3 = 0.708 +/- 0.011 [s²]



```
[7]: # chi^2 Analyse
for i in range(len(w_3b)):
    print(name[i] + ':')
    chi_sq(line, w_F_mean[i], T_P_3b[i], sig_T_P, np.
    ↳array([popt_3b[i]]), 1)
```

1 Masse, 15 cm:

chi2 = 0.3462392602008266

chi2_red = 0.11541308673360888

Wahrscheinlichkeit = 95.0 %

1 Masse, 20 cm:

chi2 = 0.8890425987064264

chi2_red = 0.29634753290214216

Wahrscheinlichkeit = 83.0 %

2 Massen, 15 cm:

chi2 = 0.4611971798198711

chi2_red = 0.15373239327329036

Wahrscheinlichkeit = 93.0 %

2 Massen, 20 cm:

chi2 = 0.9212290670614741

chi2_red = 0.307076355687158

Wahrscheinlichkeit = 82.0 %

```
[8]: # Trägheitsmoment
m_g = 0.00985 # kg
g = 9.81 # m s^-2
l = np.array([0.15, 0.15, 0.2, 0.2]) # m
sig_l = 0.002
m = np.array([1, 1, 2, 2]) * m_g

I_z = m * g * l / (2 * pi) * popt_3b
sig_I_z = I_z * sqrt((sig_l / l) ** 2 + (sqrt(pcov_3b) / popt_3b) ** 2)

ergebnis_large('I_z', I_z, sig_I_z, 5, '[kg m^2]')

I_z_mean = np.mean(I_z)
sig_I_z_mean = 1 / sqrt(len(I_z) - 1) * np.std(I_z)

# Trägheitsmoment des Kreisels
ergebnis('I_z_mean', I_z_mean, sig_I_z_mean, 4, '[kg m^2]')

# Trägheitsmoment Literatur
m_k = 4.164 # kg
r_k = 0.0508 # m
```



```
I_z_lit = 2 / 5 * m_k * r_k ** 2

print('I_z_lit =', np.round(I_z_lit, 4), '[kg m^2]')
```

```
I_z = [0.00427 0.00328 0.00581 0.00435]
      +/- [6.e-05 5.e-05 8.e-05 8.e-05] [kg m^2]
I_z_mean = 0.0044 +/- 0.0005 [kg m^2]
I_z_lit = 0.0043 [kg m^2]
```

Umlauf der momentanen Drehachse

```
[9]: # Messwerte
f_4 = np.array([652, 580, 540, 495, 430, 380, 340, 444, 402, 309]) / 60
      ↪ # s^-1
f_4_mf = f_4[[8, 9]]
mask = np.ones(len(f_4), dtype = bool) # Problematische Messungen
      ↪ entfernen
mask[[8, 9]] = False

f_4 = f_4[mask, ...]

w_4 = 2 * pi * f_4
w_4_mf = 2 * pi * f_4_mf
sig_w_4 = 2 * pi * 5 / 60

Omega_10 = np.array([14, 16, 17, 18, 21, 24, 27, 20, 25, 26]) / 10 # s
      # (Umlaufdauer, falsch benannt aber jetzt zu spät)
Omega_10_mf = Omega_10[[8, 9]]
Omega_10 = Omega_10[mask, ...]

sig_Omega_10 = 0.3 / 10

Omega = 2 * pi / Omega_10
Omega_mf = 2 * pi / Omega_10_mf
sig_Omega = sqrt(2 * pi * sig_Omega_10 / Omega_10 ** 2)
sig_Omega_mf = sqrt(2 * pi * sig_Omega_10 / Omega_10_mf ** 2)
```

```

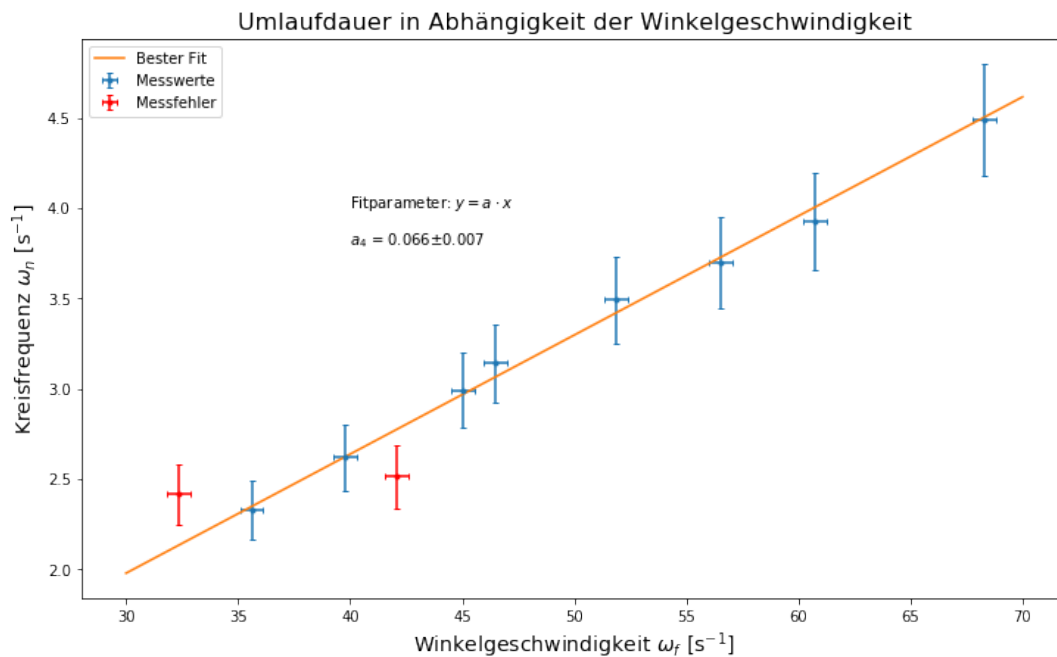
# Fit
popt_4b, pcov_4b = curve_fit(line, w_4, Omega, absolute_sigma = True,
    ↪ p0 = [0])
a_4 = pop_4b[0]
sig_a_4 = sqrt(pcov_4b[0, 0])

x = np.linspace(30, 70, 100)

# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.errorbar(w_4, Omega, xerr = sig_w_4, yerr = sig_Omega, fmt = '.',
    ↪ capsize = 2, label = 'Messwerte')
plt.errorbar(w_4_mf, Omega_mf, xerr = sig_w_4, yerr = sig_Omega_mf, fmt = '.',
    ↪ capsize = 2, label = 'Messfehler', color = 'red')
plt.plot(x, line(x, *popt_4b), label = 'Bester Fit')
plt.text(40, 4, 'Fitparameter:  $y = a \cdot x$ ')
plt.text(40, 3.8, fitparameter('$a_4$', a_4, sig_a_4, 3, ''))
plt.title('Umlaufdauer in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit', size = 16)
plt.xlabel('Winkelgeschwindigkeit  $\omega_f$  [ $s^{-1}$ ]', size = 14)
plt.ylabel('Kreisfrequenz  $\omega_n$  [ $s^{-1}$ ]', size = 14)
plt.legend(loc = 'best')

plt.savefig('images/213/V213Diagramm3.png')

```



```
[10]: # chi^2 Analyse
chi_sq(line, w_4, Omega, sig_Omega, popt_4b, 1)
```

```
chi2 = 0.34370714549490805
```

```
chi2_red = 0.04910102078498686
```

```
Wahrscheinlichkeit = 100.0 %
```

```
[20]: # Trägheitsmoment
I_x4 = I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_4 - 1))
sig_I_x4 = sqrt( (sig_I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_4 - 1))) ** 2
                + (I_z_mean * sig_a_4 / ((1 / a_4 - 1) ** 2 * a_4 ** 2)) ** 2)

ergebnis('I_x4', I_x4, sig_I_x4, 5, '[kg m^2]')
```

```
I_x4 = 0.00474 +/- 0.00056 [kg m^2]
```

Nutation

```
[12]: # Messwerte
f_F5 = np.array([410, 390, 380, 470, 450, 340, 320, 310, 300, 290]) / 60 # s-1
f_F5_mf = f_F5[[4, 7]]
f_N5 = np.array([390, 370, 360, 450, 440, 320, 300, 270, 280, 270]) / 60 # s-1
f_N5_mf = f_N5[[4, 7]]
sig_f_5 = 5 / 60

mask = np.ones(len(f_F5), dtype = bool) # Problematische Messungen entfernen
mask[[4, 7]] = False

f_F5 = f_F5[mask, ...]
f_N5 = f_N5[mask, ...]

w_F5 = 2 * pi * f_F5
w_F5_mf = 2 * pi * f_F5_mf
w_N5 = 2 * pi * f_N5
w_N5_mf = 2 * pi * f_N5_mf
sig_w_5 = 2 * pi * sig_f_5

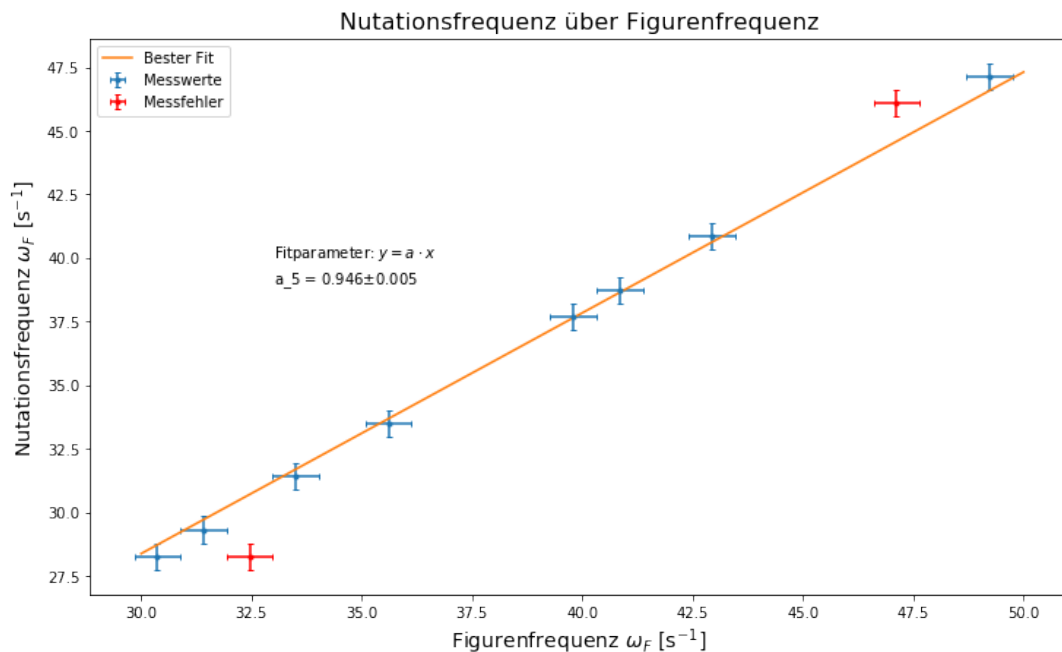
# Fit
poopt_5, pcov_5 = curve_fit(line, w_F5, w_N5, absolute_sigma = True,
                             sigma = sig_w_5 * np.ones(len(w_F5))) # hehe
a_5 = poopt_5[0]
sig_a_5 = sqrt(pcov_5[0, 0])

x = np.linspace(30, 50, 100)

plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Nutationsfrequenz über Figurenfrequenz', size = 16)
plt.xlabel('Figurenfrequenz  $\omega_F$  [s-1]', size = 14)
plt.ylabel('Nutationsfrequenz  $\omega_F$  [s-1]', size = 14)
```

```
plt.errorbar(w_F5, w_N5, xerr = sig_w_5, yerr = sig_w_5, fmt = '.',
             capsize = 2, label = 'Messwerte')
plt.errorbar(w_F5_mf, w_N5_mf, xerr = sig_w_5, yerr = sig_w_5, fmt = '.',
             capsize = 2, label = 'Messfehler', color = 'red')
plt.plot(x, line(x, *poopt_5), label = 'Bester Fit')
plt.text(33, 40, 'Fitparameter: $y = a \cdot x$')
plt.text(33, 39, fitparameter('a_5', a_5, sig_a_5, 3, ''))
plt.legend(loc = 'best')

plt.savefig('images/213/V213Diagramm4.png')
```



```
[19]: # Trägheitsmomente
I_x5 = I_z_mean / a_5
sig_I_x5 = sqrt( (sig_I_z_mean / a_5) ** 2 + (I_z_mean * sig_a_5 / a_5_
    ↳ ** 2) ** 2)
#I_x5 = I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_5 - 1))
#sig_I_x5 = sqrt( (sig_I_z_mean * (1 + 1 / (1 / a_5 - 1))) ** 2
#           + (I_z_mean * sig_a_5 / ((1 / a_5 - 1) ** 2 * a_5 **_
    ↳ 2)) ** 2)
```

```
ergebnis('I_x5', I_x5, sig_I_x5, 5, '')
```

I_x5 = 0.00468 +/- 0.00055

```
[14]: # chi^2 Analyse  
chi_sq(line, w_F5, w_N5, sig_w_5, popt_5, 1)
```

chi2 = 3.1299183370452397

chi2_red = 0.4471311910064628

Wahrscheinlichkeit = 87.0 %

Sigmas

```
[15]: # Präzessionszeiten  
fehler('T_P: 60-45', T_P[0], sig_T_P_a, T_P[1], sig_T_P_a)  
fehler('T_P: 60-5', T_P[0], sig_T_P_a, T_P[2], sig_T_P_a)  
fehler('T_P: 45-5', T_P[1], sig_T_P_a, T_P[2], sig_T_P_a)
```

T_P: 60-45

Relativer Fehler: 7.142857142857142

Rel. Fehler (Vergleich): 5.952380952380952

Absoluter Fehler: -14

Sigma-Abweichung: 1.979898987322333

T_P: 60-5

Relativer Fehler: 7.142857142857142

Rel. Fehler (Vergleich): 6.756756756756757

Absoluter Fehler: -4

Sigma-Abweichung: 0.565685424949238

T_P: 45-5

Relativer Fehler: 5.952380952380952

Rel. Fehler (Vergleich): 6.756756756756757

Absoluter Fehler: 10

Sigma-Abweichung: 1.414213562373095


```
[16]: # Mittlere Kreisfrequenz: arithmetisch und kontinuierlich
for i in range(len(w_F_mean)):
    fehler('w_mean_' + str(i), w_F_mean[i], sig_w_F_mean[i],
          w_mean_test[i], 0) # Fehler des Test Mittelwertes wird auf
    ↪ 0 gesetzt
```

w_mean_0

Relativer Fehler: [0.3822406 0.8049968 0.5139914 0.6602593]

Rel. Fehler (Vergleich): [0. 0. 0. 0.]

Absoluter Fehler: [0.03640306 0.00385113 0.01490406 0.00684537]

Sigma-Abweichung: [0.14360137 0.0154191 0.05943327 0.027381]

w_mean_1

Relativer Fehler: [0.39729177 0.44713098 0.71624003 0.94988776]

Rel. Fehler (Vergleich): [0. 0. 0. 0.]

Absoluter Fehler: [0.01998726 0.013367 0.0032307 0.00126194]

Sigma-Abweichung: [0.07858963 0.05280609 0.01287939 0.00503465]

w_mean_2

Relativer Fehler: [0.36912916 0.45390905 0.60784638 0.93129681]

Rel. Fehler (Vergleich): [0. 0. 0. 0.]

Absoluter Fehler: [0.01119879 0.00559748 0.00245281 0.00067337]

Sigma-Abweichung: [0.04353992 0.02198102 0.00971309 0.0026786]

w_mean_3

Relativer Fehler: [0.36130459 0.46152157 0.62556983 0.9753786]

Rel. Fehler (Vergleich): [0. 0. 0. 0.]

Absoluter Fehler: [0.00713807 0.002948 0.00117065 0.00030867]

Sigma-Abweichung: [0.02761488 0.01154541 0.00462474 0.00122582]

```
[17]: # Trägheitsmoment I_z
fehler('I_z', I_z_mean, sig_I_z_mean, I_z_lit, 0)
```

I_z

Relativer Fehler: 11.777299166022564

Rel. Fehler (Vergleich): 0.0

Absoluter Fehler: 0.00013033143724419573

Sigma-Abweichung: 0.24988061574493717

```
[21]: # Trägheitsmoment I_x  
fehler('I_x', I_x4, sig_I_x4, I_x5, sig_I_x5)
```

I_x

Relativer Fehler: 11.800147127737853

Rel. Fehler (Vergleich): 11.788295793975136

Absoluter Fehler: 6.066033029899359e-05

Sigma-Abweichung: 0.07719777922767168

```
[ ]:
```