4. Übungsblatt zur Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

4.1 Aufgabe 1: Quiz

Code Juan Provencio: xZSpV2
Code Marius Pfeiffer: 7nBfRS
Code Leo Knapp: 8eb7PF

4.2 Aufgabe 2: Partielle Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

Zu zeigen ist, dass diese Funktion überall zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{2}$$

Es muss also gezeigt werden, dass obwohl alle Richtungsableitungen der ersten und der zweiten partiellen Ableitungen existieren[1], nicht alle zweite partielle Ableitungen stetig sind.

Es ist klar, dass die Funktion überall in $(x,y) \neq (0,0)$ (partiell) differenzierbar ist und dass die Ableitungen nach x, y als Komposition stetiger Funktionen stetig sind, also untersuchen wir die problematische Stelle $a = (0,0)$

Erste partielle (Richtungs-)Ableitungen:

$$\begin{aligned}
D_{e_1}f(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1) - f(a)}{t} && (3)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)y\dfrac{(x+t)^2-y^2}{(x+t)^2+y^2} - xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{t} && a = (0,0) \quad (4)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(0+t)\cdot 0\dfrac{t^2}{t^2} - 0}{t} && (5)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 && (6)
\end{aligned}$$

[1]Definition 3.1

$$D_{e_2}f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_2)-f(a)}{t} \tag{7}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{0\cdot\frac{t^2}{-t^2}-0}{t} \tag{8}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0 \tag{9}$$

Es existieren also die ersten zwei Richtungsableitungen, und die zugehörigen partiellen Ableitungen sind:

$$f'_x := \frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\left(-2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{x^2+y^2}\right) \quad |\text{Produktrgel, zwei Mal} \tag{10}$$
$$= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \tag{11}$$
$$f'_y := \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad |\text{Produktregel, zwei Mal} \tag{12}$$

Die Stelle $a = (0,0)$ ist aber immernoch problematisch, also jetzt untersuchen wir, ob die Richtungsableitungen dieser Funktionen an a auch existieren. Dafür brauchen definieren wir den Wert von f'_x, f'_y an dieser Stelle als 0, und zeigen, dass es dort auch stetig ist.

Wir benutzen das Folgenkriterium mit den Folgen

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$$f'_x(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} - \frac{2\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2} + \frac{2\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \tag{13}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{0}{\frac{2}{n^2}} - \frac{2\frac{1}{n^3}\cdot 0}{\frac{4}{n^4}} + \frac{2\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} \tag{14}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \tag{15}$$
$$f'_y(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} - \frac{2\frac{1}{n}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} - \frac{2\frac{1}{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2} \tag{16}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot 0 - \frac{2\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} - 2\frac{1}{n^3}\cdot 0 \tag{17}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \tag{18}$$

Nun wollen wir die Richtungsableitungen in e_1, e_2-Richtung suchen:

$$
\begin{aligned}
D_{e_1} f'_x(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f'_x(t,0) - f'_x(0,0)}{t} && (19)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot \dfrac{t^2}{t^2} - \dfrac{2t^2 0(t^2)}{t^4} + \dfrac{2t^2 0}{t^2} - 0}{t} && (20)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 && (21)\\
D_{e_2} f'_x(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f'_x(0,t) - f'_x(0,0)}{t} && (22)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\dfrac{-t^2}{t^2} - \dfrac{2\cdot 0\cdot t(-t^2)}{t^4} + \dfrac{2\cdot 0\cdot t}{t^2}}{t} && (23)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} = -1 && (24)\\
D_{e_1} f'_y(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f'_y(t,0) - f'_y(0,0)}{t} && (25)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\dfrac{t^2}{t^2} - \dfrac{2t\cdot 0}{t^2} - \dfrac{2t\cdot 0\cdot (t^2)}{t^4}}{t} && (26)\\
&= 1 && (27)\\
D_{e_2} f'_y(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f'_y(0,t) - f'_y(0,0)}{t} && (28)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{0\dfrac{-t^2}{t^2} - \dfrac{2\cdot 0\cdot t^2}{t^2} - \dfrac{2\cdot 0\cdot t^2(-t^2)}{t^4}}{t} && (29)\\
&= 0 && (30)
\end{aligned}
$$

Nun bleibt jetzt zu zeigen, dass nicht alle zweite Ableitungen der Funktion f stetig sind, was wir nochmal mit dem Folgenkriterium zeigen:

Wir nähern uns der Stelle a von zwei Seiten an mit den Folgen:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}$, und $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} := \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{-1}{m}$.

Die zweite Ableitung nach y ist:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{8xy^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} + \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \frac{6xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{6xy}{x^2+y^2} \tag{31}
$$

Wir suchen den Grenzert:

$$
\frac{\partial^2 f(x_n,y_n)}{\partial y^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\frac{1}{n}\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^3} + \frac{8\frac{1}{n}\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2} - \frac{6\frac{1}{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2} - \frac{6\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \tag{32}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n^4}}{\frac{4}{n^4}} - \frac{\frac{6}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \tag{33}$$

$$= 2 - 3 = -1 \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_m, y_m)}{\partial y^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{8\frac{1}{m}\frac{-1}{m^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2}\right)}{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}\right)^3} + \frac{8\frac{1}{m}\frac{-1}{m^3}}{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}\right)^2} - \frac{6\frac{1}{m}\frac{-1}{m}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2}\right)}{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}\right)^2} - \frac{6\frac{1}{m}\frac{-1}{m}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}} \tag{35}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{-8}{m^4}}{\frac{4}{m^4}} + \frac{\frac{6}{m^2}}{\frac{2}{m^2}} \tag{36}$$

$$= -2 + 3 = 1 \neq -1 \tag{37}$$

Nicht alle (zweite) partielle Ableitungen sind stetig, und dementsprechend ist $f \notin C^2$, weshalb der Satz von Schwarz nicht verwendet werden darf.

4.3 Aufgabe 3: Produktregel

a) Sei $p : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion, mit $p(x_1, \dots, x_{n+k}) := (x_1, \dots x_n)$

Zunächst sei $a = (x_1, \dots, x_{n+k})$ und $h = (h_1, \dots, h_{n+k})$

Zu zeigen ist, dass p differenzierbar ist.

Wir wenden die Definition von Differenzierbarkeit nach Definition 3.3, Bemerkung b) an: p ist genau dann differenzierbar, wenn

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{h\to 0} \frac{p(a+h) - p(a) - Dp(a)h}{|h|} \tag{38}$$

Wir benutzen die Eigenschaft der Projektion als eine lineare Abbildung[2] und können somit sagen:

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{h\to 0} \frac{p(h) - Dp(a)h}{|h|} \qquad p(h) \stackrel{!}{=} Dp(a)h \tag{39}$$

$$Dp(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_i} h = \sum_{i=1}^{n} e_i h \tag{40}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{p(h) - \sum\limits_{i=1}^{n} e_i h}{|h|} \tag{41}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h_1, \dots, h_n) - (h_1, \dots, h_n)}{|h|} = 0 \tag{42}$$

Außerdem, da p wie bereits gezeigt differenzierbar ist und $\mathbb{R}^{n+k}$ offen ist, können wir $Dp(a)h$ als eine Jakobi-Matrix darstellen:

$$J_p(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial x_{n+k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial x_{n+k}} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

Das ist eine $n \times n + k$ Matrix, deren Elemente wir wie folgt beschreiben können:

$$J_p(a) = (b_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n \quad n+k} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{45}$$

[2] LA I

b) Sei $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (x, x)$ die Diagonalabbildung, $e_i \in \mathbb{R}^n$

Zu zeigen ist, dass Δ differenzierbar ist.

Wir verwenden das Kriterium über stetige partielle Differenzierbarkeit. Δ ist stetig differenzierbar genau dann, wenn Δ stetig partiell differenzierbar ist[3]. Wir zeigen stetige partielle Differenzierbarkeit indem wir alle Richtungsableitungen an einem Punkt x finden, und zeigen, dass diese stetig sind.

$$\begin{aligned} D_{e_i}\Delta(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\Delta(x + te_i) - \Delta(x)}{t} && |\Delta \text{ linear} \quad (46) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\Delta(e_i)}{t} && (47) \\ &= (e_i, e_i) && (48) \\ & && (49) \end{aligned}$$

Als Konstanten sind alle Richtungsableitungen stetig. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von Δ.

Die partiellen Ableitungen lassen sich schreiben als:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_i} = \begin{cases} \delta^{ij}, & 1 \le j \le n \\ \delta^{ij}, & 1 + n \le j \le 2n \end{cases} \tag{50}$$

Als Jacobi-Matrix können wir das auffassen als:

$$\mathrm{D}_\Delta(a) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n\times n} \\ \mathbb{1}_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{51}$$

[3] Satz 3.7

c) $(f \times g) : U \times V \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$

i. Differenzierbarkeit
Da $f : U \to \mathbb{R}^l$ und $g : V \to \mathbb{R}^m$ als differenzierbar gegeben sind, finden wir mit $h_1 \in U, h_2 \in V$ die Defnitionen:

$$f(x + h_1) = f(x) + \mathrm{D}_f(x) \cdot h_1 + \varphi_f(h_1) \tag{52}$$
$$g(y + h_2) = g(y) + \mathrm{D}_g(y) \cdot h_2 + \varphi_g(h_2) \tag{53}$$

mit D_f und D_g den Differenzialen von f und g,

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{\varphi_f(h_1)}{|h_1|} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{\varphi_g(h_2)}{|h_2|} = 0. \tag{54}$$

und

$$\varphi_f(0) = \varphi_g(0) = 0. \tag{55}$$

Somit gilt für $(f \times g)$:

$$
\begin{aligned}
(f \times g)(x + h_1, y + h_2) &= (f(x + h_1), g(y + h_2)) && (56)\\
&= (f(x) + \mathrm{D}_f(x) \cdot h_1 + \varphi_f(h_1), && (57)\\
&\qquad g(y) + \mathrm{D}_g(y) \cdot h_2 + \varphi_g(h_2)) && (58)\\
&= (f(x), g(y)) + (\mathrm{D}_f(x) \cdot h_1, \mathrm{D}_g(y) \cdot h_2) && (59)\\
&\qquad + (\varphi_f(h_1), \varphi_g(h_2)) && (60)\\
&= (f \times g)(x, y) + \begin{pmatrix} \mathrm{D}_f(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_g(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} && (61)\\
&\qquad + \varphi_{f \times g}(h_1, h_2) && (62)
\end{aligned}
$$

Definiere $h := (h_1, h_2) \in U \times V$

$$= (f \times g)(x, y) + \mathrm{D}_{(f \times g)}(x, y) \cdot h + \varphi_{f \times g}(h) \tag{63}$$

Aus (54) folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{f \times g}(h)}{|h|} = \lim_{h_1 \to 0} \lim_{h_2 \to 0} \left(\frac{\varphi_f(h_1)}{|h_1|}, \frac{\varphi_g(h_2)}{|h_2|} \right) = (0, 0) \tag{64}$$

und aus (55)

$$\varphi_{f \times g}(0) = (\varphi_f(0), \varphi_g(0)) = (0, 0). \tag{65}$$

Somit ist $(f \times g)$ nach Def. 3.3 differenzierbar.

ii. Differenzial (folgt aus i.)

$$\mathrm{D}_{(f \times g)}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{D}f(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{D}g(y) \end{pmatrix} \tag{66}$$

$$\tag{67}$$

d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, F(x) := f(x)g(x)$

i. Differenzierbarkeit & Differenzial von $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{e_1} m((x,y)) &= \lim_{t\to 0} \frac{m((x,y)+te_1) - m((x,y))}{t} && (68)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{m((x+t,y)) - m((x,y))}{t} && (69)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)y - xy}{t} && (70)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(xy+ty) - xy}{t} && (71)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} y && (72)\\
&= y && (73)
\end{aligned}$$

Analog für e_2:

$$\mathrm{D}_{e_2} m((x,y)) = x \qquad (74)$$

Differential:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}m &= \begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial y} \end{pmatrix} && (75)\\
&= \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} && (76)\\
& && (77)
\end{aligned}$$

ii. Differenzial für $F = \mathrm{m} \circ (f \times g) \circ \Delta$ via Kettenregel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{(f\times g)\circ\Delta}(x) &= \mathrm{D}_{f\times g}(\Delta(x)) \cdot \mathrm{D}_\Delta(x) && (78)\\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{D}_f(x) & 0 \\ 0 & \mathrm{D}_g(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n\times n} \\ \mathbb{1}_{n\times n} \end{pmatrix} && (79)\\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{D}_f(x) \\ \mathrm{D}_g(x) \end{pmatrix} && (80)\\
& && (81)\\
\mathrm{D}_{m\circ(f\times g)\circ\Delta}(x) &= \mathrm{D}_m(((f \times g) \circ \Delta)(x)) \cdot \mathrm{D}_{(f\times g)\circ\Delta}(x) && (82)\\
&= \begin{pmatrix} g(x) & f(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{D}_f(x) \\ \mathrm{D}_g(x) \end{pmatrix} && (83)\\
&= g(x)\mathrm{D}_f(x) + f(x)\mathrm{D}_g(x) && (84)
\end{aligned}$$

$\implies \mathrm{D}_F(x) = g(x)\mathrm{D}_f(x) + f(x)\mathrm{D}_g(x).$

4.4 Aufgabe 4

Wir identifizieren den Raum $M(n,n,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$

a) Sei $m : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2},\ (A,B) \mapsto AB$. Außerdem sei $a = (A,B)$ und $\hat{a} = (\hat{A},\hat{B})$ und $\Delta \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^{n^2}$

   Zu zeigen ist, dass m differenzierbar ist, mit Richtungsableitung

$$D_{\hat{a}}m(a) = \hat{A}B + A\hat{B} \tag{85}$$

   Matrix-Multiplikation ist in jedem (A,B) differenzierbar. Das erkennt man an der Definition:

$$(A \cdot B) = C \tag{86}$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk} \tag{87}$$

   Als Summe und Produkt stetiger Abbildungen ist diese Abbildung stetig.

   Die Richtungsableitung in eine allgemeine Richtung $\hat{a}$ ist:

$$D_{\hat{a}}m(a) = \lim_{t\to 0} \frac{m(a + t\hat{a} - m(a))}{t} \tag{88}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(A + t\hat{A})(B + t\hat{B}) - AB}{t} \tag{89}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{AB + t\hat{A}B + tA\hat{B} + t^2\hat{A}\hat{B} - AB}{t} \tag{90}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\hat{A}B + tA\hat{B} + t^2\hat{A}\hat{B}}{t} \tag{91}$$

$$= \lim_{t\to 0} \hat{A}B + A\hat{B} + t\hat{A}\hat{B} \tag{92}$$

$$= \hat{A}B + A\hat{B} \tag{93}$$

   Die Richtungsableitung ist ebenfalls stetig und partiell differenzierbar, daraus folgt, dass m differenzierbar ist.

b) Sei $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ die offene Teilmenge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen und $i : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ die Inversenabbildung.

Zu zeigen ist, dass i stetig differenzierbar ist mit Differential

$$Di(A) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2},\ \hat{A} \mapsto -A^{-1}\hat{A}A^{-1} \tag{94}$$

Die Inverse Matrix lässt sich über die Determinante der Matrix und ihre Adjunkte Matrix bestimmen, und da die Determinante ein Polynom ist, so ist es stetig differenzierbar, und die Adjunkte Matrix zusammengesetzt ist aus der Summe und Multiplikation stetiger Abbildungen, so ist sie auch stetig differenzierbar:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj}(A) \tag{95}$$

Für den Fall $\det A = 0$ müssen wir die Stetigkeit nicht zeigen, da dann die Inverse Matrix auch nicht definiert ist. Diese Abbildung ist als Verknüpfung stetig differenzierbarer Abbildungen auch differenzierbar.

Die Ableitung ist:

$$\begin{aligned}
& & AA^{-1} &= \mathbb{1} & (96)\\
&\Longrightarrow & (AA^{-1})' &= (\mathbb{1})' & (97)\\
&\Longleftrightarrow & \hat{A}A^{-1} + A\hat{A}^{-1} &= 0 & (98)\\
&\Longleftrightarrow & A\hat{A}^{-1} &= -\hat{A}A^{-1} & (99)\\
&\Longleftrightarrow & A^{-1}A\hat{A}^{-1} &= A^{-1}(-\hat{A}A^{-1}) & (100)\\
&\Longleftrightarrow & \hat{A}^{-1} &= -A^{-1}\hat{A}A^{-1} & (101)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ Di(A) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}, \hat{A} \mapsto -A^{-1}\hat{A}A^{-1}$