3. Übungsblatt zu Theoretischer Physik I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___/___ Σ___

3.1 Aufgabe 1

z.z. $|\overrightarrow{z}| = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}||\sin\theta|$

Geg.:

- $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$

Ges.:

$\vec{z} \cdot \vec{z}$ mit

$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

1.$\delta_{kk} z^k z^k = z_1^2 + z_2^2 + z_3^3$ wobei

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$= (\vec{x} \times \vec{y})^i = \epsilon^{ijk} x^j y^k = \begin{pmatrix} x^2y^3 & - & x^3y^2 \\ x^3y^1 & - & x^1y^3 \\ x^1y^2 & - & x^2y^1 \end{pmatrix}$

und das mit sich selbst:

$\vec{z} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} (x^2y^3 & - & x^3y^2)^2 \\ (x^3y^1 & - & x^1y^3)^2 \\ (x^1y^2 & - & x^2y^1)^2 \end{pmatrix}$

Z.z.: $\epsilon^{kij}\epsilon^{klm} = \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}$

$\delta^{kk} z^k z^k = \delta^{kk}\epsilon^{kij} x^i y^j \epsilon^{klm} x^l y^m$

$= \delta^{kk}\epsilon^{kij}\epsilon^{klm} x^i y^j x^l y^m$

Einsetzen von $\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}$ in die Gleichung:

$= \delta^{kk}(\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}) x^i y^j x^l y^m$

$= \delta^{il}\delta^{jm} x^i y^j x^l y^m - \delta^{im}\delta^{jl} x^i y^j x^l y^m$

$= \delta^{il} x^i x^l \delta^{jm} y^j y^m - \delta^{im} x^i y^m \delta^{jl} x^l y^j$

...

3.2 Aufgabe 2

a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y+2x}$

Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}e^{2x}$$

$$\to \frac{dy}{e^{-y}} = e^{2x}dx \to \text{integrieren}$$

$$\to \int e^y dy = \int e^{2x} dx$$

$$\to e^y = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\to y = \ln e^{2x} - \ln 2 + \ln C$$

$$\to y = 2x - \ln 2 + \ln C$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}(e^{-x} + \frac{y^2}{x^2})$

Substitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\to y = zx$$

c) $\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x$ mit Randbedigungen: $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{-y^2} = \sin(x)dx \to \text{integrieren}$$

$$\to \int \frac{dy}{-y^2} = \int \sin(x)dx$$

$$\to \frac{1}{y} = -\cos x + C$$

$$\to y = \frac{1}{-\cos x + C} \to \text{Allgemeine Lösung}$$

Analyse des Anfangswertproblems:

$$C = \frac{1}{y_0} + \cos x_0$$

$$C = 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\to y = \frac{1}{-\cos x} + 1$$

3.3 Aufgabe 3

Zerfall radioaktiver Atome:

a) Änderung der Gesamtzahl $N(t) \sim$ der Gesamtzahl $N(t)$

$$\to N'(t)\ N(t)$$

$$\to N'(t) = kN(t)$$

Randbedingungen: $N(0) = N_0$

$\frac{dN}{dt} = kN$

$\rightarrow \frac{dN}{N} = kdt$

$\rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt$

$\rightarrow \ln N = kt + C$

$\rightarrow N = e^{kt} + e^{C} \rightarrow$ Allgemeine Lösung

Analyse des Anfangswertproblems:

$C = \ln N_0 \sim 0k = \ln N_0$

$\rightarrow N = e^{kt} + N_0$

Halbwertszeit $N(\tau) = \frac{N_0}{2}$

$\rightarrow \frac{N_0}{2} = e^{k\tau} + N_0$

$\rightarrow -\frac{N_0}{2} = e^{k\tau}$

$\rightarrow -\ln\frac{1}{2} = k\tau$

$\rightarrow \tau = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{k}$

b) $N(t) = N_0 + \alpha t$

3.4 Aufgabe 4

geg.: $F(x,y,z) = ze^{xy} + (x^2+y^2)\sin z + \ln(1+x^2+y^2)$

ges.: $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z) = zye^{xy} + 2x\sin z + \frac{2x}{1+x^2+y^2}$

ges.: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,z) = zy^2e^{xy} + 2 + \frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}$

ges.: $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z) = xze^{xy} + 2y\sin z + \frac{2y}{1+x^2+y^2}$

ges.: $\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y,z) = x^2ze^{xy} + 2 + \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}$

ges.: $\frac{\partial}{\partial z} F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x,y,z) = z + (x^2+y^2)\cos z$

ges.: $\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x,y,z)$

$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x,y,z) = 1 - (x^2+y^2)\sin z$

3.5 Aufgabe 5

a) Geg.: $\frac{1}{\rho} = |\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}|$ und $\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$ mit

$\dot{\vec{x}} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{x}}{ds}$ und

$\ddot{\vec{x}} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}(\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{x}}{ds})$

$\rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{|\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{x}}{ds} \times \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}(\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{x}}{ds})|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

mit $\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|$, $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{T}(s)$ und der Produktregel:

$\rightarrow \frac{||\vec{v}| \cdot \vec{T}(s) \times |\vec{v}| \cdot (\frac{d|\vec{v}|}{vs}\frac{d\vec{x}}{ds} + |\vec{v}|\frac{d^2\vec{x}}{ds^2})}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

$= \frac{||\vec{v}|\vec{T}(s) \times (|\vec{v}|\frac{d|\vec{v}|}{ds}\vec{T}(s) + |\vec{v}|^2\frac{d^2\vec{x}}{ds^2})|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

b) Vektorprodukt zwei paralleler Vektoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a_1} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt:

$\vec{a} \times \vec{a_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a_2 a_3 & - & \alpha a_3 a_2 \\ \alpha a_3 a_1 & - & \alpha a_1 a_3 \\ \alpha a_1 a_2 & - & \alpha a_2 a_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ der Vektorprodukt zwei paralleler Vektoren verschwindet

$|\vec{v}|$ und $\dfrac{d|\vec{v}|}{ds}$ sind skalare, d.h., dass

$|\vec{v}|\vec{T}(s) \times |\vec{v}|\dfrac{d|\vec{v}|}{ds}\vec{T}(s)$

verschwindet und übrig bleibt

$$\rightarrow \frac{||\vec{v}|\vec{T}(s) \times |\vec{v}|^2 \frac{d^2\vec{x}}{ds^2}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$$

$$= \frac{||\vec{v}|\vec{T}(s) \times |\vec{v}|^2 \frac{d\vec{T}(s)}{ds}|}{|\vec{v}|^3}$$

mit $\dfrac{d\vec{T}(s)}{ds} = \dfrac{\vec{N}}{\rho}$

$$\rightarrow \frac{||\vec{v}|\vec{T}(s) \times |\vec{v}|^2 \frac{\vec{N}}{\rho}|}{|\vec{v}|^3}$$

$$= \frac{|\vec{v}|^3 \frac{1}{\rho}(\vec{T} \times \vec{N})}{|\vec{v}|^3}$$

$$= \frac{1}{\rho}|\vec{T} \times \vec{N}|$$

c) mit $\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$

$= \dfrac{1}{\rho}|\vec{B}|$ und $|\vec{B}| = 1$ also

$$\frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{1}{\rho}$$