8. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

8.1 Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}
F &= m\ddot{z} && (1)\\
\dot{p} &= -\alpha v_0 && (2)\\
\alpha v_0 &= m(a+g) && (3)\\
\alpha v_0 &= (m_0 - \alpha t)(\ddot{z}+g) && (4)\\
\ddot{z}+g &= \frac{\alpha v_0}{m_0-\alpha t} && (5)\\
\ddot{z} &= \frac{\alpha v_0}{m_0-\alpha t} - g && (6)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= \frac{\alpha v_0}{m_0-\alpha t} - g && \Big| \int_0^t && (7)\\
\dot{z} &= \int_0^t \frac{\alpha v_0}{m_0-\alpha t'} - g dt' && && (8)\\
&= -v_0 \ln\left(m_0 - \alpha t'\right) - gt'\big|_0^t && && (9)\\
&= -v_0 \ln\left(m_0 - \alpha t\right) - gt + v_0 \ln\left(m_0\right) && && (10)\\
&= \ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\right) - gt && && (11)
\end{aligned}$$

Wir überprüfen die Anfangsbedingung: $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(0) &= \ln\frac{m_0}{m_0} = \ln 1 && (12)\\
&= 0 && (13)
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt t_E ist der Treibstoff komplett weg. Die Masse der Rakete zu dem Zeitpunkt sei also $m_E = m_0 - \alpha t_E$

$$\dot{z} = \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right) - gt_E \tag{14}$$

Für $t > t_E$ kann sich die Masse der Rakete nicht mehr ändern, also ist der einzige Term, der sich noch ändert gt. Somit ist also

$$\dot{z}(t) = v_0 \ln\left(\frac{m_E}{m_0}\right) - gt \tag{15}$$

c) Wir integrieren nochmal:

$$\dot{z} = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - gt \qquad \Big| \int_0^t \tag{16}$$

$$z = \int_0^t v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t'}\right) - gt' dt' \tag{17}$$

$$= v_0 \int_0^t \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t'}\right) dt' - \int_0^t gt' dt' \tag{18}$$

$$= v_0 \left[\int_0^t \ln m_0 dt' - \int_0^t \ln (m_0 - \alpha t') dt'\right] - \int_0^t gt' dt' \tag{19}$$

$$\int_0^t \ln (m_0 - \alpha t') dt' \qquad \Big| u = m_0 - \alpha t' \tag{20}$$

$$\frac{du}{dt} = -\alpha \tag{21}$$

$$dt' = \frac{du}{-\alpha} \tag{22}$$

$$\int_0^t \frac{\ln u}{-\alpha} du \qquad u_a = m_0 \tag{23}$$

$$u_b = m_0 - \alpha t \tag{24}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \int_{m_0}^{m_0 - \alpha t} \ln u du \tag{25}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} [u \ln u - u]_{m_0}^{m_0 - \alpha t} \tag{26}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} [(m_0 - \alpha t) \ln (m_0 - \alpha t) - (m_0 - \alpha t)] \tag{27}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} [m_0 \ln m_0 - m_0] \tag{28}$$

$$= -\frac{m_0 - \alpha t}{\alpha} [\ln (m_0 - \alpha t) - 1] + \frac{m_0}{\alpha} [\ln m_0 - 1] \tag{29}$$

Wir setzen das zurück in die Gleichung ein:

$$z = v_0 \left[\ln (m_0) t' - \left[-\frac{m_0 - \alpha t'}{\alpha} [\ln (m_0 - \alpha t') - 1] + \frac{m_0}{\alpha} [\ln m_0 - 1] \right] \right]_0^t \tag{30}$$

$$- \frac{gt'^2}{2}\Big|_0^t + v_0 t + z_0 \tag{31}$$

$$= v_0 \left[\ln (m_0) t + \left[\frac{m_0 - \alpha t}{\alpha} [\ln (m_0 - \alpha t) - 1] - \frac{m_0}{\alpha} [\ln m_0 - 1] \right] \right] - \frac{gt^2}{2} \tag{32}$$

$$- v_0 \left[\frac{m_0}{\alpha} [\ln m_0 - 1] - \frac{m_0}{\alpha} [\ln m_0 - 1] \right] + v_0 t + z_0 \tag{33}$$

$$= v_0\left[\ln(m_0)t + \frac{m_0-\alpha t}{\alpha}[\ln(m_0-\alpha t)-1] - \frac{m_0}{\alpha}[\ln m_0 - 1]\right] - \frac{gt^2}{2} + v_0 t + z_0 \quad (34)$$

$$= \quad (35)$$

[1]

Mit Anfangsbedingung: $z(0) = z_0$

$$z_0 = v_0\left[\ln(m_0)\cdot 0 + \frac{m_0}{\alpha}(\ln m_0 - 1) - \frac{m_0}{\alpha}(\ln m_0 - 1)\right] - \frac{g0^2}{2} \quad (36)$$

$$= v_0[0] \quad (37)$$

$$= 0 \quad (38)$$

Diese Gleichung gilt nur bis zum Punkt wo der Treibstoff leer wird, danach gilt:

$$z(t) = v_0\left[\ln(m_0)t_E + \left[\frac{m_E}{\alpha}[\ln m_E - 1] - \frac{m_0}{\alpha}[\ln m_0 - 1]\right]\right] - \frac{gt^2}{2} + v_0 t_E + z_0 \quad (39)$$

d) Den höchsten Punkt erreicht die Rakete, nachdem der Treibstoff schon alle ist, wenn die Geschwindigkeit gleich 0 ist, also

$$v(t) = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right) - gt \quad (40)$$

$$0 = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right) - gt \quad (41)$$

$$t = \frac{v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right)}{g} \quad (42)$$

Setzen wir nun die oben angegebene Zeit in unsere Gleichung ein und erhalten:

$$z(t) = v_0\left[\ln(m_0)t_E + \left[\frac{m_E}{\alpha}[\ln m_E - 1] - \frac{m_0}{\alpha}[\ln m_0 - 1]\right]\right] - \frac{g\left(\frac{v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right)}{g}\right)^2}{2} + v_0 t_E + z_0 \quad (43)$$

$$= v_0\left[\ln(m_0)t_E + \left[\frac{m_E}{\alpha}[\ln m_E - 1] - \frac{m_0}{\alpha}[\ln m_0 - 1]\right]\right] - \frac{\left(v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right)\right)^2}{2g} + v_0 t_E + z_0 \quad (44)$$

[1] aaaa sorry, ich kann die ln's nicht weiter kürzen

e) Laut der ursprünglichen differentialgleichung hatten wir:

$$m\ddot{z} = \alpha v_0 - mg \tag{45}$$

An dieser Stelle können wir merken, dass wenn $v_0 < \frac{mg}{\alpha}$ ist, dann wird die Rakete nicht genug Kraft haben um die Gravitationskraft zu überwinden und wird nicht losfliegen können.

8.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $x'^i = R^{ik}x^k + v^i t + b^i$
- $R \in O(3)$
- Rotation: $g_1 : (t, x) \mapsto (t, Rx)$
- Translation: $g_2 : (t, x) \mapsto (t + c, x + b)$
- Boost: $g_3 : (t, x) \mapsto (t, x + vt)$

a) Bei der Hintereinanderausführung der Transformationen erhält man:

$$g_1 : (t, x) \mapsto (t, Rx) \tag{46}$$
$$g_2 : (t, Rx) \mapsto (t + c, Rx + b) \tag{47}$$
$$g_3 : (t + c, Rx + b) \mapsto (t + c, Rx + vt + b) \tag{48}$$

b) Um aus diesem Zustand zurück in unsere ursprüngliche Lage zu kommen, müssen wir bei jedem Komponent eine inverse Abbildung finden. Dafür nehmen wir den transformierten Vektor x' und wenden folgende Transformation darauf an:

- $h_1 : (t, x') \mapsto (t, R^T x')$
- $h_2 : (t, x') \mapsto (t - c, x' - b')$
- $h_3 : (t, x') \mapsto (t, x' - v't)$

Sei $x' = Rx + vt + b$ der transformierte Vektor, dann ist

$$R^T(x') - v't + b' = x \tag{49}$$
$$R^T(Rx + vt + b) - v't + b' = x \tag{50}$$
$$R^T Rx + R^T vt + R^T b - v't - b' = x \tag{51}$$

Dafür muss gelten:

$$R^T R = I \tag{52}$$
$$R^T v - v' = 0 \tag{53}$$
$$R^T b - b' = 0 \tag{54}$$

c) Nehmen wir

$$\begin{aligned}
g_1 &: (t,x) \mapsto (t, R_g x) && (55)\\
g_2 &: (t,x) \mapsto (t + c_g, x + b_g) && (56)\\
g_3 &: (t,x) \mapsto (t, x + v_g t) && (57)\\
\to x' &= R_g x + v_g t + b_g, \qquad t' = t + c_g && (58)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h_1 &: (t,x) \mapsto (t, R_h x) && (59)\\
h_2 &: (t,x) \mapsto (t + c_h, x + b_h) && (60)\\
h_3 &: (t,x) \mapsto (t, x + v_h t) && (61)\\
\to \hat{x} &= R_h x + v_h t + b_h, \qquad t' = t + c_h && (62)
\end{aligned}$$

Wenden wir die zweite Transformation nach der ersten an, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
g_{12} &:= g_2 \circ g_1 : (t, R_g x) \mapsto (t + c_g, R_g x + b_g) && (63)\\
g_{13} &:= g_3 \circ g_2 \circ g_1 : (t + c_g, R_g x + b_g) \mapsto (t + c_g, R_g x + v_g t + b_g) && (64)\\
h_{11} &:= h_1 \circ g_{13} : (t + c_g, R_g x + v_g t + b_g) \mapsto (t + c_g, R_h(R_g x + v_g t + b_g)) && (65)\\
h_{12} &:= h_2 \circ h_{11} : (t + c_g, R_h(R_g x + v_g t + b_g)) && (66)\\
&\mapsto (t + c_g + c_h, R_h(R_g x + v_g t + b_g) + b_h) && (67)\\
h_{13} &:= h_3 \circ h_{12} : (t + c_g + c_h, R_h(R_g x + v_g t + b_g) + b_h) && (68)\\
&\mapsto (t + c_g + c_h, R_h(R_g x + v_g t + b_g) + v_h t + b_h) && (69)
\end{aligned}$$

Aus diesem langen Term können wir aber vieles vereinfachen, sagen wir

$$\begin{aligned}
c_g + c_h &= c^* && (70)\\
R_h b_g + b_h &= b^* && (71)\\
R_h R_g &= R^* && (72)\\
R_h v_g + v_h &= b^* && (73)
\end{aligned}$$

Dann lässt sich der letzte Ausdruck vereinfachen zu

$$g^* : (t,x) \mapsto (t + c^*, R^* x + v^* t + b^*) \qquad (74)$$

Das ist wieder eine allgemeine Galilei-Transformation.

d) Insgesamt hat die Galilei-Gruppe 10 freie Parameter, diese sind gegeben durch die Zeit t, drei Freiheitsgraden der Rotation, drei Freiheitsgraden der Translation und drei Freiheitsgraden der Boosts, denn einzeln kann jede dieser drei Transformationen mithilfe eines 3-komponentigen Vektors beschrieben werden.

3 interessante Untergruppen sind zum Beispiel die Rotationen und Boosts (nicht abelsch):

$$g_1 \circ g_3 \neq g_3 \circ g_2 \tag{75}$$

die Translationen und Boosts (doch abelsch:)

$$g_2 \circ g_3 = g_3 \circ g_2 \tag{76}$$

und die Translationen und Rotationen (nicht abelsch):

$$g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1 \tag{77}$$

Wir merken, dass die Verknüpfungen mit Rotationen im Allgemeinen nicht abelsch sind, da die Matrizen, mit welchen wir rotieren normalerweise nicht kommutieren.

8.3 Aufgabe 3

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \tag{78}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} \tag{79}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-V} \tag{80}$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V}} \tag{81}$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-V}} \tag{82}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E-V}} \tag{83}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E(1-\frac{V}{E})}} \tag{84}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{V}{E}}} \qquad |V = A|x|^n \tag{85}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{A|x|^n}{E}}} \qquad E = A|x_{max}|^n \tag{86}$$

$$\frac{A|x|^n}{A|x_{max}|^n} = \frac{|x|^n}{|x_{max}|^n} \tag{87}$$

$$y = \frac{|x|}{|x_{max}|} \tag{88}$$

$$y_a = 0 \tag{89}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-y^n}} \qquad y_b = 1 \tag{90}$$

$$\left| \frac{dy}{dx} = \frac{\text{sign}(x)}{|x_{max}|} \right. \tag{91}$$

$$dx = \text{sign}(x)|x_{max}|dy \tag{92}$$

$$\text{O.B.d.A. sei sign}(x) = 1 \text{ im} \tag{93}$$

$$\text{gewählten Intervall} \tag{94}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^1 \frac{|x_{max}|dy}{\sqrt{1-y^n}} \tag{95}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} |x_{max}| \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}} \tag{96}$$

Nun können wir diese Funktion jetzt in die gewünschte Beta-Funktion einsetzen:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{97}$$

$$= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^t dt \tag{98}$$

$$\tag{99}$$

Seit $y^n = t$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-t}} \qquad \left| t = y^n \right. \tag{100}$$

$$\frac{dt}{dy} = ny^{n-1} \tag{101}$$

$$dy = \frac{dt}{ny^{n-1}} \tag{102}$$

$$y^{n-1} = \left(t^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = t^{1-\frac{1}{n}} \tag{103}$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt}{t^{1-\frac{1}{n}}} \tag{104}$$

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt \tag{105}$$

Nun ersetzen wir jetzt mit den Gamma Funktionen:

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \tag{106}$$

Somit ist

$$T(E) = 4t = \frac{4|x_{max}|}{n}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}\right) \tag{107}$$

Sei zum Beispiel in einem harmonischen Oszillator $n = 2$, dann

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^t dt &(108)\\ &= \sqrt{\pi} &(109)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = 1 \tag{110}$$

Also:

$$\begin{aligned}T(E) &= \frac{4|x_{max}|}{2}\sqrt{\frac{m}{2A|x_{max}|^2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1}\right) &(111)\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{2A}} &(112)\end{aligned}$$

8.4 Aufgabe 4

a) (i) Die Multiplikation des Epsilon-Symbols mit sich selbst mit gleichnamigen Indizes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} &= \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon^{231} + \varepsilon_{213}\varepsilon^{213} + \varepsilon_{312}\varepsilon^{312} + \varepsilon_{321}\varepsilon^{321} &(113)\\ &= 1+1+1+1+1+1 &(114)\\ &= 6 = 3! &(115)\end{aligned}$$

(ii) Die Verknüpfung zweier Epsilon-Symbole durch Multiplikation kann auch als eine Verknüpfung von Kronecker-Deltas dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} &= \begin{cases} 2 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} &(116)\\ &= 2\delta_i{}^l &(117)\end{aligned}$$

Probieren wir jetzt durch die verschiedenen Kombination auf das Ergebnis zu kommen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} =& \varepsilon_{i23}\varepsilon^{l23} + \varepsilon_{i32}\varepsilon^{l32} &(118)\\ &+ \varepsilon_{i12}\varepsilon^{l12} + \varepsilon_{i21}\varepsilon^{i21} &(119)\\ &+ \varepsilon_{i13}\varepsilon^{l13} + \varepsilon_{i31}\varepsilon^{l31} &(120)\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir eine Entscheidung treffen, und zwar haben wir schon *alle* Termen der Summe aufgeschrieben, nur fehlt jetzt i und j einzusetzen. Dabei sind i und j beliebig aber fest, z.B. $i = j = 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} =& \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} && (121)\\
&+ \varepsilon_{112}\varepsilon^{112} + \varepsilon_{121}\varepsilon^{121} && (122)\\
&+ \varepsilon_{113}\varepsilon^{113} + \varepsilon_{131}\varepsilon^{131} && (123)\\
=& 1+1+0+0+0+0 && (124)\\
=& 2 && (125)
\end{aligned}$$

Sei andersrum $i = 1$ und $j = 2$, dann haben wir

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} =& \varepsilon_{123}\varepsilon^{223} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{232} && (126)\\
&+ \varepsilon_{112}\varepsilon^{212} + \varepsilon_{121}\varepsilon^{221} && (127)\\
&+ \varepsilon_{113}\varepsilon^{213} + \varepsilon_{131}\varepsilon^{231} && (128)\\
=& 0+0+0+0+0+0 && (129)\\
=& 0 && (130)
\end{aligned}$$

In anderen Worten können wir also sagen, dass

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = 2\delta_i{}^l \tag{131}$$

(iii) Als nächstes Beispiel haben die beiden Epsilon-Tensoren nur einen gleichnamigen Index:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk} = \delta_i{}^l\delta_j{}^m - \delta_i{}^m\delta_j{}^l \tag{132}$$

(133)

Weggelassen werde alle Terme, die 0 ergeben, also wenn sich ein Index wiederholt. Dann haben wir folgende Möglichkeiten:

Falls $i = l$ *und* $j = m$, dann haben wir 1, falls $i = m$ *und* $j = l$, dann haben wir -1, da es sich um eine antizyklische Permutation handelt. Um diesen Zusammenhang mathematisch zu formulieren können wir die Kronecker-Deltas benutzen.

b) (i)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \varepsilon^{ijk} a^j (\vec{b} \times \vec{c})^k && (134)\\
&= \varepsilon^{ijk} a^j (\varepsilon^{kmn} b^m c^n) && |\varepsilon^{kmn} = \varepsilon^{mnk} \quad (135)\\
&= \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{mnk} a^j b^m c^n && (136)\\
&= (\delta^{im}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jm}) a^j b^m c^n && (137)\\
&= \delta^{im}\delta^{jn} a^j b^m c^n - \delta^{in}\delta^{jm} a^j b^m c^n && (138)\\
&= \delta^{im} b^m \delta^{jn} a^j c^n - \delta^{in} c^n \delta^{jm} a^j b^m && |\delta^{im} b^m = b^m \quad (139)\\
&= b^i \delta^{jn} a^j c^n - c^i \delta^{jm} a^j b^m && (140)\\
&= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) && (141)
\end{aligned}$$

(ii)

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = (\varepsilon^{ijk}a^j b^k)(\varepsilon^{ilm}a^l b^m) \tag{142}$$
$$= (\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl})a^j b^k a^l b^m \tag{143}$$
$$= (a^j)^2(b^k)^2 - (a^j b^j)^2 \tag{144}$$
$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \tag{145}$$