1. Übungsblatt zur Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___ Σ___

1.1 Aufgabe 1

Gegeben: $(V, \|\cdot\|)$ als normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

a) Zu Zeigen: $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$ definiert eine Metrik auf V.

1) Positive Definitheit

$$\begin{aligned}
\forall x,y \in V : x = y &\iff d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| \\
&\iff d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|0\| \\
&\iff d_{\|\cdot\|}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

2) Symmetrie

$$\text{Behauptung: } \forall x,y \in V : d_{\|\cdot\|}(x,y) = d_{\|\cdot\|}(y,x)$$

$$\begin{aligned}
\text{Beweis: } \forall x,y \in V : \|x-y\| &= \|x-y\| \\
\iff \|x-y\| &= |-1| \cdot \|x-y\| \\
\iff \|x-y\| &= \|(-1)\cdot(x-y)\| \\
\iff \|x-y\| &= \|y-x\| \\
\iff d_{\|\cdot\|}(x,y) &= d_{\|\cdot\|}(y,x)
\end{aligned}$$

3) Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\forall x,y,z \in V : \; & d_{\|\cdot\|}(x,y) + d_{\|\cdot\|}(y,z) \\
&= \|x-y\| + \|y-z\| \\
&\geq \|(x-y)+(y-z)\| \\
&= \|x-y+y-z\| \\
&= \|x-z\| = d_{\|\cdot\|}(x,z)
\end{aligned}$$

$$\implies d_{\|\cdot\|}(x,z) \leq d_{\|\cdot\|}(x,y) + d_{\|\cdot\|}(y,z)$$

b) Die *triviale Metrik* wird nicht von einer Norm induziert:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Eine Metrik wird, wie in der Aufgabenstellung angegeben, durch eine Norm induziert nach

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Für eine Norm $\|\cdot\|$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V muss gelten

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall v \in V : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Somit muss für eine induzierte Metrik d gelten:

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda \cdot (x - y)\| = |\lambda| \cdot \|x - y\| = |\lambda| \cdot d(x,y)$$

Sei nun d die *triviale Metrik*, $x, y \in V$ mit $x \neq y$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Dann gilt:

$$d(\lambda x, \lambda y) = 1 \neq |\lambda| \cdot d(x,y) = |\lambda|$$

c) *Siehe nächste Seite.*

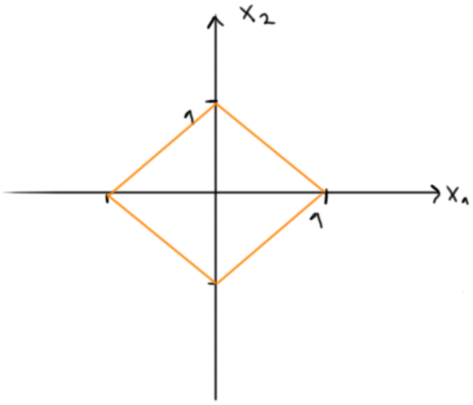

Abbildung 1: $\|\cdot\|_1$: n=2

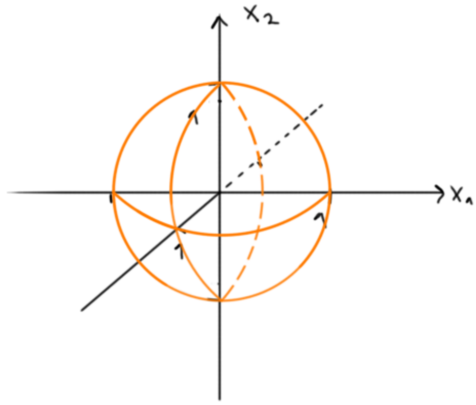

Abbildung 4: $\|\cdot\|_2$: n=3

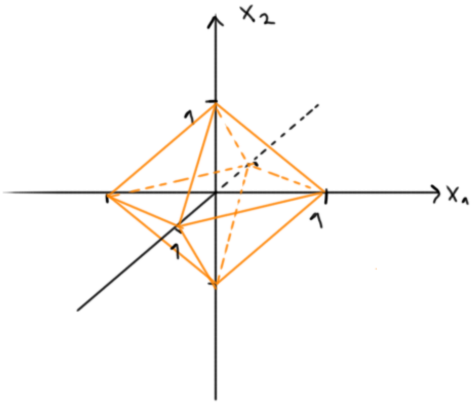

Abbildung 2: $\|\cdot\|_1$: n=3

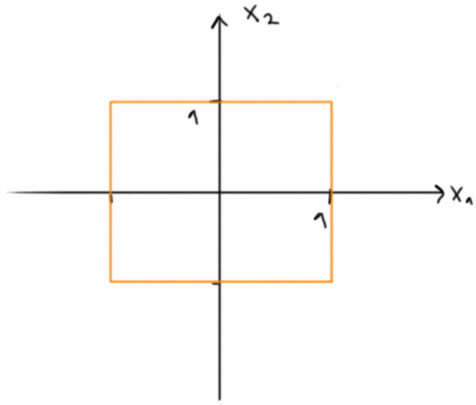

Abbildung 5: $\|\cdot\|_\infty$: n=2

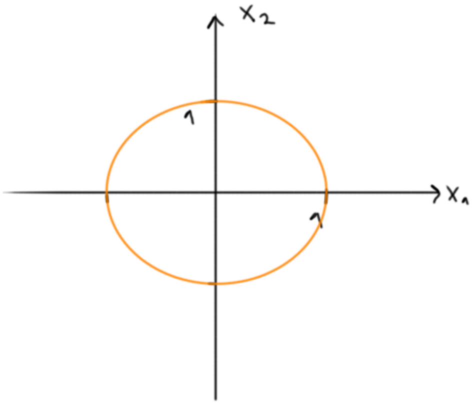

Abbildung 3: $\|\cdot\|_2$: n=2

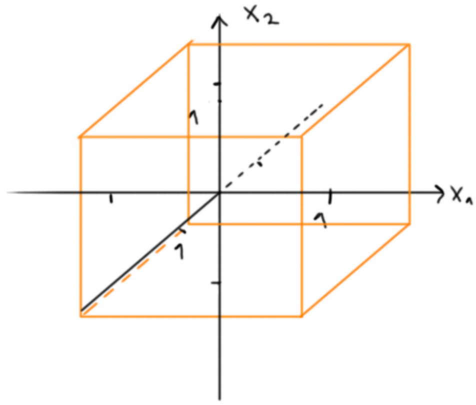

Abbildung 6: $\|\cdot\|_\infty$: n=3

1.2 Aufgabe 2

a) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx &= \int_0^1 \left(x\left(x(x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}} dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{7}{8}} \\
&= \left[\frac{8x^{\frac{15}{8}}}{15}\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 e^x(1-x+x^2)dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x(1-x+x^2)dx &= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 x^2e^x dx && \mid \text{partiell integrieren} \\
&= [e^x]_0^1 - [xe^x - e^x]_0^1 + \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_0^1 \\
&= \left[x^2e^x - 3xe^x + 4e^x\right]_0^1 \\
&= 2e - 4
\end{aligned}$$

c) $\int_0^1 e^{x^2} x^3 dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{x^2} x^3 dx &= \int_0^1 \frac{u\sqrt{u}e^u}{2\sqrt{u}} du && \left| u = x^2,\ x = \sqrt{u},\ dx \right. = \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 ue^u du \\
&= \frac{1}{2} [ue^u - e^u]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} &= x \tan x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x && \left| \text{ partiell integrieren} \right. \\
&= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx && \left| u = \cos x,\ du = -\sin x dx \right. \\
&= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{u} du \\
&= [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln u]_{u(0)}^{u\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= [x \tan x + \ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$