

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan „Provencio“

Tutor: Tobias Hammel

1. Bohrsches Atommodell, Vergleich mit der vollen Lösung

Das Bohrsche Atommodell geht von zwei grundsätzlichen Kräften aus, die ein Elektron an einem Kern halten: Einerseits wirkt die Coulomb-Kraft um das Elektron hin zum Kern anzuziehen, aber auch gleichzeitig dreht sich das Elektron auf einer Bahn um den Kern herum, also erfährt es eine Zentrifugalkraft. Beim Gleichgewicht dieser zwei Kräften bleibt das Elektron dann auf einer Bahn. Wir betrachten in diesem Fall für die Überlegungen die reduzierte Masse μ :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \stackrel{!}{=} \frac{\mu v^2}{r} = F_Z \quad \checkmark \quad (1)$$

Außerdem existiert eine sogenannte Quantisierungsregel, laut welcher die Wirkung von einer geschlossenen Trajektorie mit fester Energie einem vielfachen des Wirkungsquantums h entspricht. Für Kreisbahnen lautet diese:

$$S = \mu v_n \oint r_n d\varphi = 2\pi \mu v_n r_n \stackrel{!}{=} nh \quad (2)$$

$$\rightarrow v_n = \frac{n\hbar}{\mu r_n} \quad \checkmark \quad (3)$$

Diese Geschwindigkeit setzen wir in die Kräftebilanz ein und lösen nach den erlaubten Bahnradien auf:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Ze^2 = \mu \left(\frac{n\hbar}{\mu r_n} \right)^2 r_n \quad (4)$$

$$\rightarrow r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{Ze^2 \mu} \quad \checkmark \quad | \quad a'_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} \quad (5)$$

$$= a'_B \frac{n^2}{Z} \quad \checkmark \quad (6)$$

Die nächst relevante Größe ist die Geschwindigkeit, um einen Ausdruck für die Gesamtenergie zu erhalten. Die Geschwindigkeit ist dann:

$$v_n = \frac{Z\hbar}{\mu n a'_B} \quad \checkmark \quad (7)$$

Und die Energie E_n beträgt:

$$E_n = E_{n,\text{kin}} + E_{n,\text{pot}} = \frac{\mu v_n^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} \quad (8)$$

$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{Z\hbar}{\mu n a'_B} \right)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{a'_B n^2} \quad (9)$$

$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{Z\hbar\mu e^2}{\mu n 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z\mu e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 \mu}{n^2 \hbar^2} - \frac{\mu}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 \mu}{\hbar^2 n^2} \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Z^2 e^4 \mu}{\hbar^2 n^2} \quad (12)$$

$$= -\frac{Z^2 e^4 \mu}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad \checkmark \quad (13)$$

b) c) d) ?

1/3

2. Dipolmomente im Wasserstoffatom

Gegeben seien die folgenden Zustände des Wasserstoffatoms:

$$|1s\rangle = |1, 0, 0\rangle \quad (14)$$

$$|2s\rangle = |2, 0, 0\rangle \quad (15)$$

$$|2p_z\rangle = |2, 1, 0\rangle \quad (16)$$

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1s\rangle + |2s\rangle) \quad (17)$$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1s\rangle + |2p_z\rangle) \quad (18)$$

- a) Die Wellenfunktion der Zustände ist in der Ortsdarstellung jeweils in der Form

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \langle x|n, l, m\rangle = R_{n,l}(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (19)$$

gegeben.

$$\Psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) = R_{1,0}(r)Y_0^0(\vartheta, \varphi) \quad (20)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{a'_B}\right)^3 \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{a'_B}r} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (21)$$

$$(22)$$

$$\Psi_{200}(r, \vartheta, \varphi) = R_{2,0}(r)Y_0^0(\vartheta, \varphi) \quad (23)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{a'_B}\right)^3 \frac{1}{8}} e^{-\frac{1}{2a'_B}r} \left(2 - \frac{2}{a'_B}r\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (24)$$

$$(25)$$

$$\Psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) = R_{2,1}(r)Y_1^0(\vartheta, \varphi) \quad (26)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{a'_B}\right)^3 \frac{1}{24}} e^{-\frac{1}{2a'_B}r} \frac{1}{a'_B}r \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta) \quad (27)$$

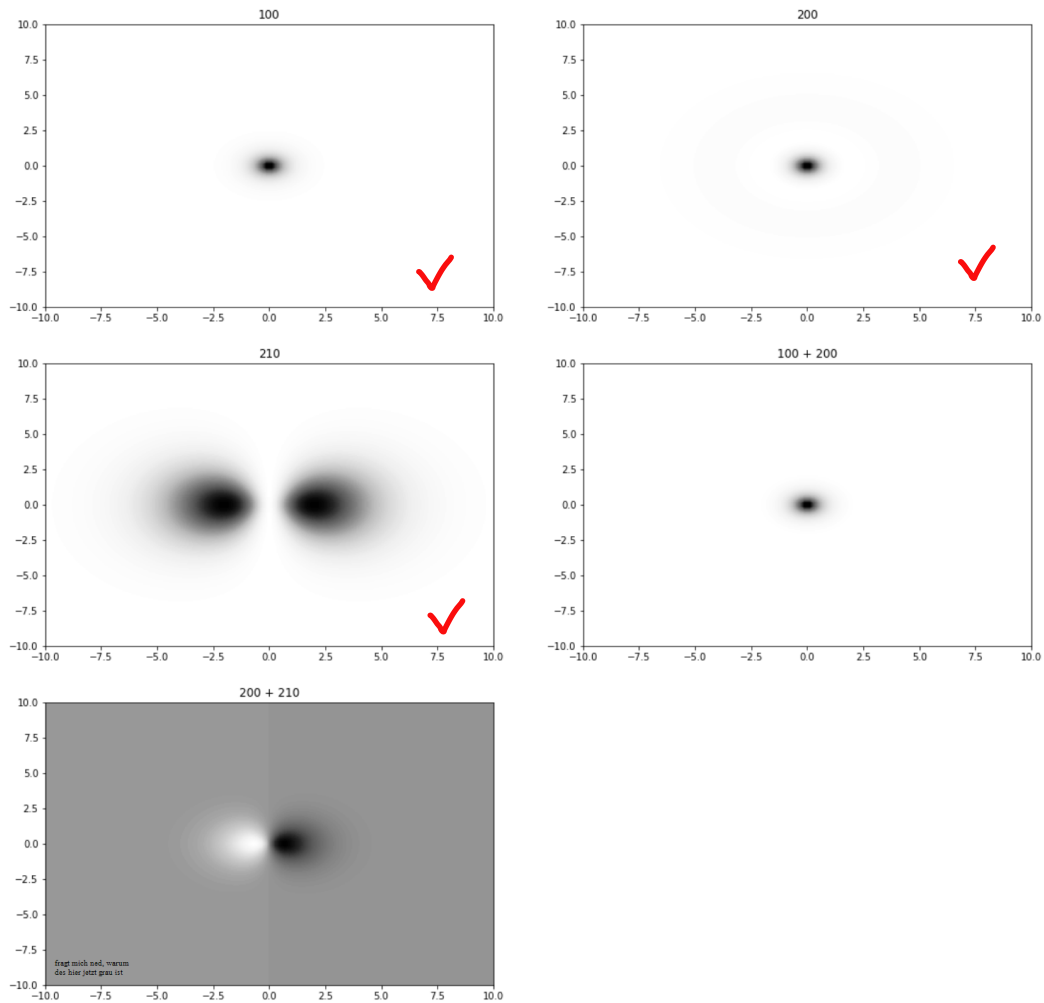


Abbildung 1: Coole Plots

b) Das Dipolmoment $\langle \mathbf{d} \rangle$ errechnet sich mit dem Skalarprodukt:

$$\langle \mathbf{d} \rangle = -e \langle \psi | \hat{\mathbf{r}} | \psi \rangle \quad \checkmark \quad (28)$$

In Ortstdarstellung bedeutet dies

$$-e \langle \psi | \hat{\mathbf{r}} | \psi \rangle = -e \int \Psi_{nlm}^*(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{r} \Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) dV \quad (29)$$

$$= -e \int \Psi_{nlm}^*(r, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) dV \quad (30)$$

\checkmark

Wie in der Skizze zu sehen, handelt es sich bei Ψ_{100} und Ψ_{200} um radialsymmetrische Funktionen. Eine Funktion Integration über den gesamten Raum über diese Funktionen wird also Verschwinden. Betrachten wir den Zustand $|M\rangle$, bzw. dessen Skalarprodukt mit sich selbst, erhalten wir

$$\langle M|M\rangle = \frac{1}{2}(\langle 1s|1s\rangle + \langle 1s|2s\rangle + \langle 2s|1s\rangle + \langle 2s|2s\rangle). \quad (31)$$

Da es sich bei allen Summanden um gerade Funktionen, bzw. das Produkt zweier gerader Funktionen handelt, verschwinden diese und somit wird auch hier das Dipolmoment = 0 sein. Für den Zustand $|2p_z\rangle$ ergibt sich eine radialsymmetrische Funktion, ebenfalls erkennbar an deren Plot. Somit wird auch hier das Dipolmoment verschwinden. Einen Sonderfall bildet die Superposition $|D\rangle$, der Plot dieses Zustandes zeigt, insofern dieser auch nur ansatzweise korrekt ist, dass dieser in der Nähe des Koordinatenursprungs asymmetrisch ist. Das Dipolmoment wird hier also nicht verschwinden.

symmetrisch hinsichtlich
Spiegelungen an den
Koordinatenachsen

(32)

- c) Für einen allgemeinen Zustand $|\psi\rangle$ ist die Zeitentwicklung gegeben durch

$$|\psi\rangle_t = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} |\psi\rangle_{t=0} \quad \checkmark \quad (33)$$

Für die Aufgabe ersetzen wir $|\psi\rangle$ mit den jeweiligen gegebenen Zuständen:

$$|n, l, m\rangle_t = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n, l, m\rangle_{t=0}. \quad (34)$$

Hierbei gibt E_n das bekannte Energieniveau an. Betrachten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte eines solchen einfachen Zustandes,

$$\rho = \left| \langle x | e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n, l, m\rangle \right|^2 \quad (35)$$

$$= \left| e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \langle x | n, l, m\rangle \right|^2 \quad (36)$$

$$= \left| e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \Psi_{nlm} \right|^2 = |\Psi_{nlm}|^2, \quad \checkmark \quad (37)$$

sehen wir, dass die Zeitabhängigkeit hier herausfällt. Uns interessieren also zunächst nur die Superpositionen. Die Zeitentwicklung „implementieren“ wir hierbei wie folgt:

$$|M\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} |1s\rangle + e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} |2s\rangle \right) \quad \checkmark \quad (38)$$

$$= e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1s\rangle + e^{-i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} |2s\rangle \right) \quad (39)$$

$$|D\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} |1s\rangle + e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} |2p_z\rangle \right) \quad (40)$$

$$= e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1s\rangle + e^{-i\frac{E_2-E_1}{\hbar}t} |2p_z\rangle \right) \quad (41)$$

Wir setzen nun $\Delta E = E_2 - E_1$. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeitsdichten ergeben sich zu

$$\rho_M = \left| \langle x | e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} |2s\rangle \right) \right|^2 \quad (42)$$

$$= \left| e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x | \left(|1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} |2s\rangle \right) \right|^2 \quad (43)$$

$$= \left| e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle x | 1s \rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle x | 2s \rangle \right) \right|^2 \quad (44)$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \Psi_{200}(r, \vartheta, \varphi) \right) \right|^2 \quad (45)$$

und nach dem gleichen Schema gilt

$$\rho_D = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{100}(r, \vartheta, \varphi) + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \Psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) \right) \right|^2. \quad (46)$$

Die Plots seien an dieser Stelle dem Leser als Übung überlassen. Auf der nächsten Seite findet sich zu diesem Zwecke ausreichend Platz zum Zeichnen.



Zeichnen Sie hier.

- d) Wie in Aufgabenteil (b) „gezeigt“, ist das Dipolmoment für alle Zustände außer $|D\rangle$ gleich 0. Somit müssen wir nur dieses Berechnen. Hierzu ziehen wir zunächst die Zeitabhängige Variante dieses Zustandes zur Hand:

$$|D\rangle_t = |D(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} |2p_z\rangle) \quad \checkmark \quad (47)$$

Und, weil wir sie bis hier hin schon wieder vergessen haben, sei auch die Formel für das Dipolmoment an dieser Stelle noch einmal gegeben: ✓

$$\langle \mathbf{d} \rangle = -e \langle \psi | \hat{\mathbf{r}} | \psi \rangle \quad (48)$$

Da uns nur die z -Komponente interessiert, schreiben wir wie folgt um

$$\langle d_z \rangle = -e \langle D(t) | \hat{z} | D(t) \rangle \quad (49)$$

$$= -e \left\{ e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1s| + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 2p_z|) \right\} \hat{z} \left\{ e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} |2p_z\rangle) \right\} \quad (50)$$

$$= -\frac{e}{2} e^{i\frac{E_1-E_1}{\hbar}t} \left\{ \langle 1s| + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 2p_z| \right\} \hat{z} \left\{ |1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} |2p_z\rangle \right\} \quad (51)$$

$$= -\frac{e}{2} (\langle 1s|\hat{z}|1s\rangle + e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 1s|\hat{z}|2p_z\rangle + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 2p_z|\hat{z}|1s\rangle + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 2p_z|\hat{z}|2p_z\rangle) \quad (52) \quad \checkmark$$

In Ortsdarstellung sind

$$\langle 1s|\hat{z}|1s\rangle = z \langle 1s|1s\rangle = 0 \quad (53)$$

$$\langle 2p_z|\hat{z}|2p_z\rangle = z \langle 2p_z|2p_z\rangle = 0 \quad \checkmark \quad (54)$$

somit ist

$$\langle d_z \rangle = -\frac{e}{2} (e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 1s|\hat{z}|2p_z\rangle + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \langle 2p_z|\hat{z}|1s\rangle). \quad \checkmark \quad (55)$$

Als nächstes müssen die Skalarprodukte berechnet werden. Da die Ausdrücke hierfür größer sind als unsere Aussichten für die Zukunft, beginnen wir dazu eine neue `align`-Umgebung. :D

$$\begin{aligned} \langle 1s|\hat{z}|2p_z\rangle &= \int \Psi_{100}^*(r, \vartheta, \varphi) z \Psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) dV \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Psi_{100}^*(r, \vartheta, \varphi) r \cos(\vartheta) \Psi_{210}(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\pi a_B'^3}} e^{-\frac{1}{a_B'} r} \cos^2(\vartheta) \sqrt{\frac{1}{32\pi a_B'^5}} e^{-\frac{1}{2a_B'} r} r^4 \sin(\vartheta) \, dr d\vartheta d\varphi \\
&= \sqrt{\frac{1}{32\pi^2 a_B'^8}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) e^{-\frac{3}{2a_B'} r} r^4 \sin(\vartheta) \, dr d\vartheta d\varphi \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{1}{32\pi^2 a_B'^8}} \int_0^\infty \int_0^\pi \cos^2(\vartheta) e^{-\frac{3}{2a_B'} r} r^4 \sin(\vartheta) \, dr d\vartheta
\end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\vartheta$$

$$u = \cos(\vartheta) \implies du = -\sin(\vartheta) d\vartheta$$

$$\begin{aligned}
\implies I_1 &= \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} u^2 \sin(\vartheta) \frac{1}{-\sin(\vartheta)} du \\
&= - \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} u^2 du = - \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} = - \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\langle 1s | \hat{z} | 2p_z \rangle = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{1}{32\pi^2 a_B'^8}} \int_0^\infty e^{-\frac{3}{2a_B'} r} r^4 \, dr$$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3a_B'} r} r^4 \, dr$$

$$r = \frac{2a_B'}{3} x \implies dr = \frac{2a_B'}{3} dx$$

$$\begin{aligned}
\implies I_2 &= \int_0^\infty e^{-\left(\frac{3}{2a_B'}\right)\left(\frac{2a_B'}{3}\right)x} \left(\frac{2a_B'}{3}\right)^4 x^4 \left(\frac{2a_B'}{3}\right) dx \\
&= \left(\frac{2a_B'}{3}\right)^5 \int_0^\infty e^{-x} x^4 dx
\end{aligned}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

$$\implies I_2 = \left(\frac{2a_B'}{3}\right)^5 \Gamma(5) = \left(\frac{2a_B'}{3}\right)^5 \cdot 24$$

$$\begin{aligned}
\langle 1s | \hat{z} | 2p_z \rangle &= \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{1}{32\pi^2 a_B'^8}} \cdot \left(\frac{2a_B'}{3}\right)^5 \cdot 24 \\
&= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{32\pi a_B'^4}} \cdot \frac{32a_B'^5}{243} \cdot 24 = \frac{a_B' 128\sqrt{2}}{243}
\end{aligned}$$

Da nach den Rechenregeln der Dirac-Notation hier gilt, dass $(\langle 1s|\hat{z}|2p_z\rangle)^* = \langle 2p_z|\hat{z}|1s\rangle$, müssen wir das ganze nicht zwei mal machen. yay.

Somit folgt abschließend:

$$\begin{aligned}\langle d_z \rangle &= -\frac{e}{2} \left(e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \frac{a'_B 128\sqrt{2}}{243} + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t} \frac{a'_B 128\sqrt{2}}{243} \right) \\ &= -\frac{e}{2} \frac{a'_B 128\sqrt{2}}{243} (e^{-i\frac{\Delta E}{\hbar}t} + e^{i\frac{\Delta E}{\hbar}t}) \\ &= -e \frac{a'_B 128\sqrt{2}}{243} \cos\left(\frac{\Delta E}{\hbar}t\right) \quad \checkmark\end{aligned}$$

e) Für die Bestimmung von Frequenz und Wellenlänge wenden wir an:

$$\Delta E = h \cdot f \quad (56)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\Delta E}{h} \quad (57)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \iff \lambda = \frac{c}{f} \quad (58)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c \cdot h}{\Delta E} \quad \checkmark \quad (59)$$

E_1 und E_2 könnte man an dieser Stelle nun mit der entsprechenden Formel für die Energieeigenzustände berechnen um so ein konkretes Ergebnis zu erhalten. *Könnte* man.

Wäre hier auch cool gewesen, weil dann hättet ihr gesehen, dass $L=122\text{nm}$ beträgt, was zufälligerweise der Wellenlänge der Lyman-alpha Linie im Wasserstoff entspricht. Tja... ✓

Sehr schöne Aufgabe!

3/3

f)



;-)

Abbildung 2: Nichts

3. Zeemaneffekt und optische Übergänge

a,b) Grafische Darstellung der möglichen Übergänge:

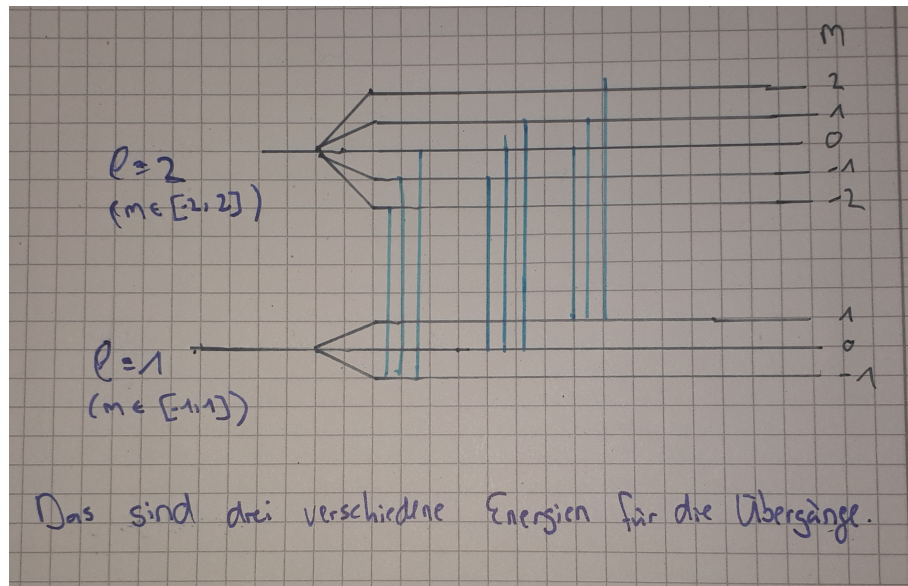


Abbildung 3: Mögliche Übergänge bei angelegtem Magnetfeld

c) Polarisationen der emittierten Photonen der verschiedenen Übergänge.

- parallel Magnetfeld
Man beobachtet für die Übergänge mit $\Delta m = \pm 1$ zirkular polarisiertes Licht. Für $\Delta m = -1$ ist das Licht rechtszirkular, sonst linkszirkular. Für $\Delta m = 0$ liegt keine Polarisation vor.
- senkrecht Magnetfeld
Hier sind drei Arten der linearen Polarisation zu betrachten. Für $\Delta m = 0$ ist die Polarisation parallel zum B-Feld, in den beiden anderen Fällen ist sie senkrecht.

Der Strahl selbst kommt immer senkrecht zur Polarisation und zeigt in eine bestimmte Richtung

d) 'Jeder Sender ist auch ein Empfänger'. Die logische Konsequenz aus Aufgabe c) ist, dass ein Parallelstrahl nur die Übergänge mit $\Delta m = 0$ treiben kann und ein senkrechter Strahl nur die mit $\Delta m = \pm 1$.

Frage von Leo: Könnten wir den Zeeman-Effekt und die verschiedenen Arten der Polarisation nochmal im Tutorium besprechen? Warum kommt es z.B. genau zur Aufspaltung und warum ist nur $\Delta m = \pm 1, 0$ erlaubt?