Versuch 221 **17. März 2022**

Adiabatenkoeffizient

Physikalisches Anfängerpraktikum II

Juan Provencio Betreuer/in: Charlotte Ochs

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuches

In diesem Versuch werden wir zwei Methoden zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizientes untersuchen. Mittels von beiden wird der Adiabatenkoeffizient bestimmt und miteinander verglichen, und nur anhand einer dieser Methoden wird der von Argon ausgerechnet. Diese zwei Methoden richten sich nach den Angaben von Clément und Desormes über die Druckdifferenz und von Rüchardt über die Periodendauer einer schwingenden Masse im Gas.

2 Grundlagen

2.1 Adiabatenkoeffizient

Der Adiabatenkoeffizient besteht aus dem Quotient der Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p und konstantem Volumen c_V

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}. \tag{1}$$

Diese Zahl ist immer größer oder gleich 1. Das folgt daraus, dass die Wärmekapazität $c_p > c_V$ ist.

2.2 Clément und Desormes

Bei der Bestimmung des Adiabatenkoeffizientes nach Clément und Desormes betrachten wir einen Gasbehälter mit einem Manometer und einer Luftpumpe. Der Aufbau ist in Abbildung 1 beschrieben.

Beim Drücken des Luftbalgs wird ein Druck erzeugt, welchen wir am Manometer als ein Höhenunterschied der Wassersäulen erkennen können. Durch diesen Überdruck wird das Gas erwärmt. Wenn das wieder die Ursprungstemperatur erreicht hat. Dann sind wir auf **Zustand 1** angekommen wie in Abbildung 2 dargestellt:

$$V_1, \qquad p_1 = b + h_1, \qquad T_1. \tag{2}$$

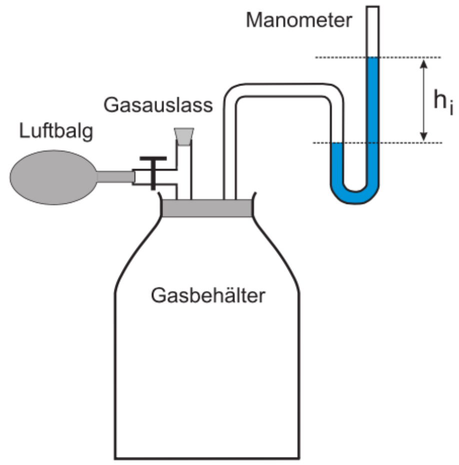


Abbildung 1: Aufbau nach Clément und Desormes

Durch kurzes Öffnen des Stopfens gleichen sich der äußere Luftdruck und der im Behälter an und wir landen in **Zustand 2**:

$$V_2 = V_1 + \Delta V, \qquad p_2 = b, \qquad T_2 = T_1 - \Delta T. \tag{3}$$

Nach einigen Minuten erreichen wir wieder die Raumtemperatur und wir erreichen **Zustand 3**:

$$V_3 = V_1, \qquad p_3 = b + h_3, \qquad T_3 = T_1. \tag{4}$$

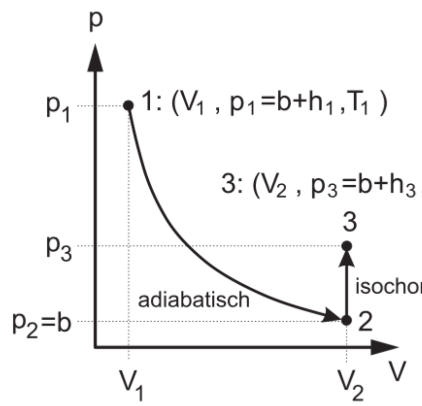


Abbildung 2: pV-Diagramm

Zustände **1** und **2** sind durch die Poisson'sche Gleichung so verknüpft:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \tag{5}$$

und durch Einsetzen der Eigenschaften (2) und (3) heißt das

$$\begin{aligned}
(b + h_1) V_1^\kappa &= b (V_1 + \Delta V)^\kappa && (6)\\
&= b V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa && | V_1 \gg \Delta V \quad (7)\\
&\approx b V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right). && (8)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1}. \tag{9}$$

Zustände **1** und **3** verbinden wir durch das Boyle-Mariott'sche Gesetzt $pV =$ const. s.d.

$$(b + h_1)V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V) \qquad |h_3 \ll b,\ \Delta V \ll V \tag{10}$$

$$h_1 V_1 = h_3 V_1 + b\Delta V \tag{11}$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{12}$$

Durch Kombinieren von (9) und (12) erhalten wir

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \tag{13}$$

2.3 Rüchardt

Im Aufbau nach Rüchardt wird eine Masse in einer Röhre zum Schwingen gebracht, so wird das Gas in der Röhre adiabatisch komprimiert und expandiert. Da diese Schwingung sehr stark gedämpft wäre wird durch eine kleine Öffnung in der Röhre oberhalb des Schwingkörpers, so dass ein extra Druck auf den Körper wirkt. Dieser Aufbau ist in **??** dargestellt.

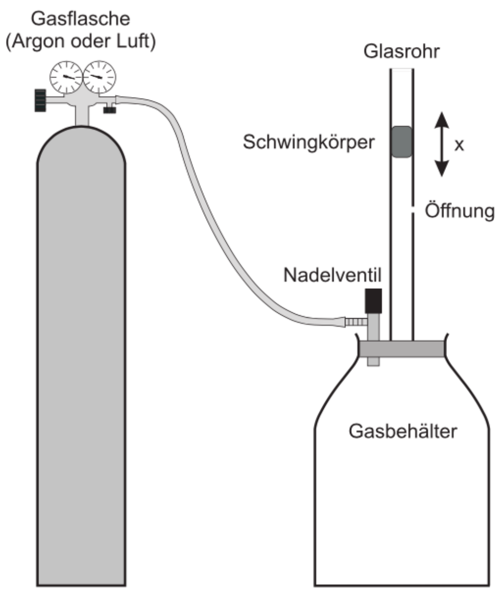


Abbildung 3: Aufbau nach Rüchardt

Der Druck p lautet

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{14}$$

mit dem äußeren Druck p_0, der Masse des Schwingkörpers m, der Erdanziehungskraft g und der Bodenfläche des Körpers A. Für die Bewegung des Körpers folgt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = A\,\mathrm{d}p\,. \tag{15}$$

Hier dürfen wir ebenfalls die Adiabatengleichung $pV^\kappa =$ const. benutzen und erhalten nach einiger Umformung

$$\mathrm{d}p = -\kappa\frac{p}{V}\,\mathrm{d}V\,. \tag{16}$$

Außerdem gilt $\mathrm{d}V = Ax = \pi r^2 x$, und wir können dies und (16) mit (15) kombinieren und erhalten die Gleichung eines harmonischen Oszillators

$$m\ddot{x} = -\pi^2 r^4 \kappa \frac{p}{V} x \tag{17}$$

mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}} \tag{18}$$

bzw. der Periodendauer

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}} \tag{19}$$

woraus sich für den Adiabatenkoeffizient schließen lässt

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p} \tag{20}$$

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialen und Geräte

Aufbau nach Clémentes und Desormes

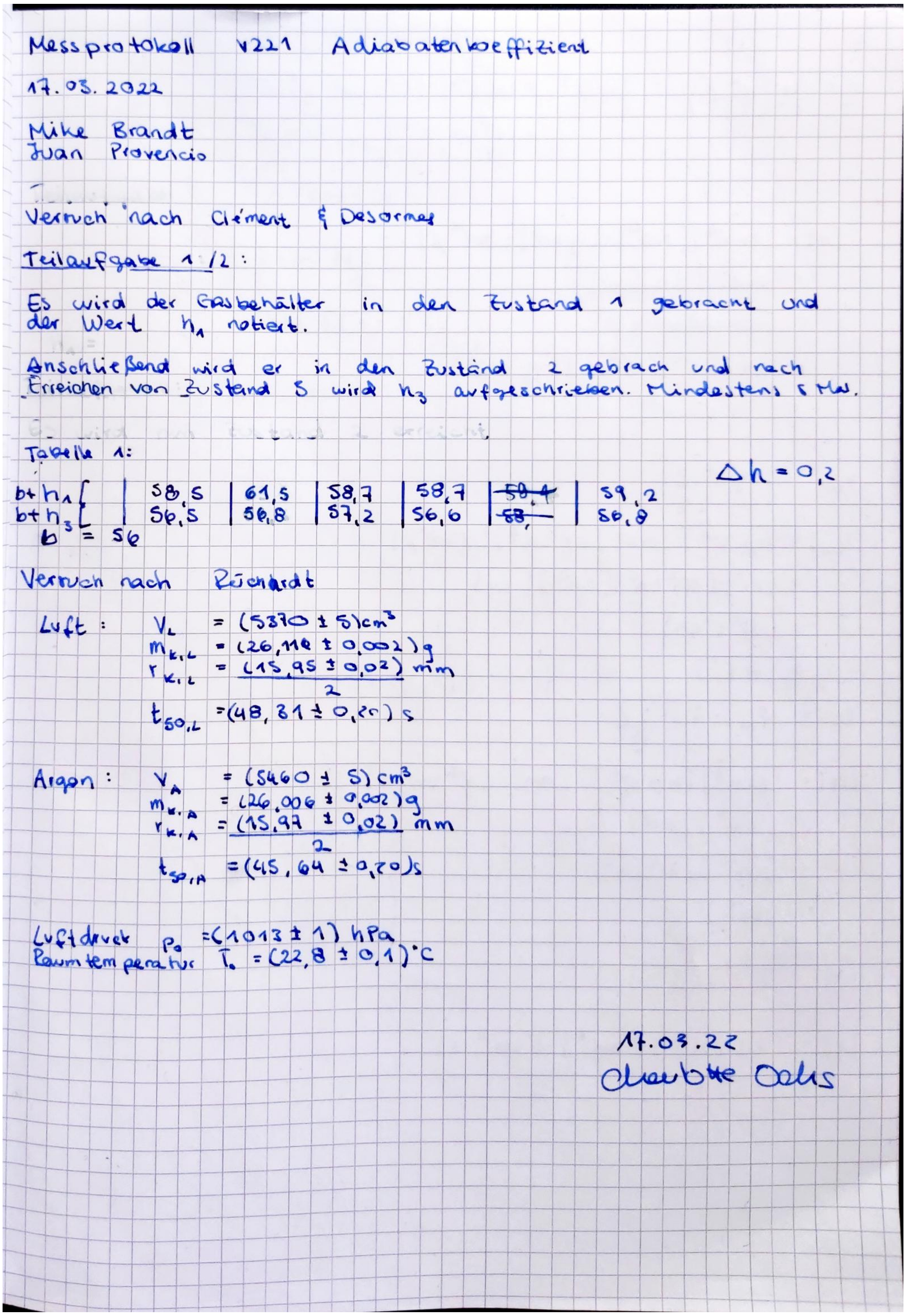
- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg

Aufbau nach Rüchardt

- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll



Messprotokoll V221 Adiabatenkoeffizient

17.03.2022

Mike Brandt
Juan Provencio

Versuch nach Clément & Desormes

Teilaufgabe 1/2:

Es wird der Gasbehälter in den Zustand 1 gebracht und der Wert h_1 notiert.

Anschließend wird er in den Zustand 2 gebrach und nach Erreichen von Zustand 3 wird h_3 aufgeschrieben. Mindestens 5 Mal.

Tabelle 1:

$\Delta h = 0{,}2$

$b+h_1$	58,5	61,5	58,7	58,7	~~58,4~~	59,2
$b+h_3$	56,5	56,8	57,2	56,6	~~58,~~	56,8

$b = 56$

Versuch nach Rüchardt

Luft:
$V_L = (5370 \pm 5)\,\text{cm}^3$
$m_{K,L} = (26{,}116 \pm 0{,}002)\,\text{g}$
$r_{K,L} = \frac{(15{,}95 \pm 0{,}02)}{2}\,\text{mm}$
$t_{50,L} = (48{,}31 \pm 0{,}20)\,\text{s}$

Argon:
$V_A = (5460 \pm 5)\,\text{cm}^3$
$m_{K,A} = (26{,}006 \pm 0{,}002)\,\text{g}$
$r_{K,A} = \frac{(15{,}97 \pm 0{,}02)}{2}\,\text{mm}$
$t_{50,A} = (45{,}64 \pm 0{,}20)\,\text{s}$

Luftdruck $p_0 = (1013 \pm 1)\,\text{hPa}$
Raumtemperatur $T_0 = (22{,}8 \pm 0{,}1)\,^\circ\text{C}$

17.03.22
Charlotte Ochs

Abbildung 4: Messprotokoll

4.2 Auswertung

4.2.1 Clémentes und Desormes

Zur Berechnung des Adiabatenkoeffizientes nach Clémentes und Desormes wenden wir die Methoden die in der Einleitung unter Unterabschnitt 2.2 erläutert sind. Hierzu haben wir als erstes fünf Mal die Höhenunterschiede im Manometer gemessen und aus jeder einzelnen den Adiabatenkoeffizient gemäß (13) bestimmt. Als erstes berechnen wir fünf verschiedene Werte für κ, um zu überprüfen dass kein einzelner Wert überwiegend aus einem tolerierbaren Bereich heraussticht und aus diesen Werten formen wir einen Mittelwert. Für die einzelnen Messungen erhalten wir

Tabelle 2: Adiabatenkoeffiziente

Messung	1	2	3	4	5
κ	1,25(14)	1,17(6)	1,80(26)	1,29(14)	1,33(13)

Der Fehler der einzelnen Messungen wurde bestimmt als

$$\Delta\kappa_i = \kappa_i \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\Delta h}{(h_1 - h_3)}\right)^2} \tag{21}$$

mit einem abgeschätzten Ablesefehler von $\Delta h = \sqrt{2} \cdot 0,1$, da wir mit einem Fehler der Gleichdruckshöhe b und der Ablese h_i gerechnet haben.

Der Mittelwert dieser Messung beträgt

$$\kappa_{\mathrm{CD,\,Luft}} = 1,37(11). \tag{22}$$

4.2.2 Rüchardt

Im Fall von Rüchardt untersuchen wir zwei verschieden Gase, einmal Luft und einmal Argon. Die Berechnung erfolgt komplett analog bei beiden, sodass wir diese explizit anhand für Luft aufschreiben.

Wir benutzen Gleichung (20), wodurch sich der Adiabatenkoeffizient berechnen lässt als

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \tag{23}$$

Für den Fehler haben wir den relativen Fehler benutzt und gemäß

$$\Delta\kappa = \kappa\sqrt{\left(\frac{4\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2}. \tag{24}$$

Die anderen relativen Fehlern, die der Masse, des Volumens und des Drucks waren im Vergleich zu den anderen betrachteten Fehlern vernachlässigbar klein.

Als erstes geben wir die Periodendauer T an. Für diese haben wir einmal 50 Schwingungen gemessen und wir teilen diese dann entsprechend durch 50:

$$T = \frac{t_{50,l}}{50} = 0,966(6)\,\mathrm{s} \tag{25}$$

Der Druck berechnet sich aus der Masse des Schwingkörpers und seiner Querschnittsfläche als

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} = 1026(2)\,\mathrm{hPa} \tag{26}$$

Mit diesen und den im Messprotokoll angegebenen Werten für Luft erhalten wir

$$\kappa_{\mathrm{R,\,Luft}} = 1,45(2). \tag{27}$$

Mit einer analogen Rechnung kommen wir auch auf das Ergebnis für Argon:

$$\kappa_{\mathrm{R,\,Arg}} = 1,63(2) \tag{28}$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir uns insbesondere die zwei verschiedenen Methodologien zur Berechnung des Adiabatenkoeffizients κ angeschaut. Die erste Methode, wo man anhand einer Messung der Höhe im Manometer entlang verschiedener Phasen des pV-Verlaufs protokollieren musste, war durch mehrere Messungen unterstützt, um einen sinnvollen Mittelwert zu bilden.

Bei der zweiten Methode haben wir mittels einer gasgefüllten Röhre einen Schwingkörper zum harmonischen Schwingen gebracht. Durch die Periodendauer dieses Schwingens konnten wir nämlich den Adiabatenkoeffizient bestimmen.

5.2 Diskussion

Nun wollen wir mit der Diskussion weitermachen, und zwar haben wir für Luft und Argon zwei Quellen für einen Vergleich. Die Vergleichsmessungen von Luft wurden von uns selber durchgeführt, und für Argon besitzen wir einen Literaturwert aus dem Praktikumsskript (Wagner, 2021). Wir werden die Abweichungen zwischen den erhaltenen Werten berechnen und anschließend beide Methoden qualitativ bewerten. Die σ-Abweichungen einer Größe G werden gemäß folgender Formel ausgerechnet:

$$\frac{|G_1 - G_2|}{\sqrt{(\Delta G_1)^2 + (\Delta G_2)^2}}. \tag{29}$$

Für den Adiabatenkoeffizient der Luft erhalten wir

Tabelle 3: Vergleich des Adiabatenkoeffizients der Luft

Größe	$\kappa_{\text{CD, Luft}}$	$\frac{\Delta\kappa_{\text{CD, Luft}}}{\kappa_{\text{CD, Luft}}}$ [%]	$\kappa_{\text{R, Luft}}$	$\frac{\Delta\kappa_{\text{R, Luft}}}{\kappa_{\text{R, Luft}}}$ [%]	$\kappa_{\text{CD, Luft}} - \kappa_{\text{R, Luft}}$	σ
Wert	1,37(11)	8	1,45(2)	1,4	-0,08	0,7

Im Fall von Argon erhalten wir folgende Abweichungen

Tabelle 4: Vergleich des Adiabatenkoeffizients von Argon

Größe	$\kappa_{\text{R, Arg}}$	$\frac{\Delta\kappa_{\text{R, Arg}}}{\kappa_{\text{R, Arg}}}$ [%]	$\kappa_{\text{K, Arg}}$	$\frac{\Delta\kappa_{\text{K, Arg}}}{\kappa_{\text{K, Arg}}}$ [%]	$\kappa_{\text{R, Arg}} - \kappa_{\text{K, Arg}}$	σ
Wert	1,63(2)	1,4	1,648		-0,013	0,6

Für die Abweichungen zwischen den Messwerten erhalten wir sehr zufriedenstellende Ergebnisse innerhalb eines σ-Bereiches kleiner als 1. An den relativen Fehlern können wir beobachten, dass die erste Messmethode nach Clémentes und Desormes mit größeren Fehlern behaftet ist, nahezu 10%, wobei der relative Fehler nach Rüchardt im Bereich von 1-2% liegt, und sogar bessere Ergebnisse mit dem Literaturwert liefert.

Mögliche Gründe für die großen relativen Fehlern sind zum Beispiel eine ungeduldige Durchführung des Versuches. Damit die von uns verwendeten Gesetze Gültigkeit behalten ist gefordert, dass die Temperatur zum gewünschten Wert gekommen ist, und wenn man nicht lang genug vor der Messung gewartet hat, würden die Ergebnisse gefälscht werden. Eine vorsichtigere Durchführung hätte die Messfehlern verringern können. Außerdem spielt bei dieser Methode der menschliche Fehler eine weitere Rolle beim kurzen rausholen und wieder reinlegen des Stopfens, was die Luft im Behälter behält. Hierfür war es von großer Wichtigkeit dass der Druck nicht all zu viel gesunken ist, aber schon genug gesunken war um die Höhenunterschiede im Manometer sinnvoll benutzen zu können. Der Fehler könnte natürlich durch eine größere Anzahl an Messungen ebenfalls verringert werden, dies ist aber im aktuellen Aufbau nicht praktisch, denn es zu jeder Methode jeweils einen Versuchsaufbau gibt. Die Rüchardt Methode ist viel schnell und das heißt dass die Gruppe, die parallel daran arbeitet für eine lange Zeit nichts zu tun hat. Man könnte währenddessen mit der Auswertung anfangen, aber die große Differenz zwischen Durchführungszeiten wäre immerhin unwünschenswert.

Bei der zweiten Methode erfolgt der Prozess wie gesagt wesentlich schneller. Zugegeben, man muss am Anfang des Versuches noch den richtigen Druck genau justieren, was in unserem Fall durch große Hilfe der Tutorin erfolgte. Ansonsten wäre das ein bisschen langsamer gewesen. Aber ab der Stelle kann man in weniger als eine oder zwei Minuten fertig sein, wenn beide Praktikumspartner jeweils bei einem Gas messen. Um genauer zu sein, könnte man natürlich mehrere Messungen durchführen, aber mit einer Periodenanzahl von 50 ist schon der Fehler sehr gering. Größere Fehlern könnten an dieser Stelle entstehen, wenn man sich bei der Aufzählung der Perioden verzählt, dafür kann man aber ja wenn man unsicher ist die Messung kurz wiederholen.

Eine bisher nicht erwähnte Fehlerquelle tritt hier an der Stelle von Luft auf. Und zwar haben wir keine Garantie, dass die Druckluft im Gasbehälter der beiden Methoden identisch ist. Vermutlich gibt es kleine Abweichungen, aber genaueres lässt sich nicht sagen. Trotzdem ist ein Vergleich der zwei Methoden sinnvoll und man kann davon ausgehen, dass die Unterschiede vernachlässigbar bei der Berechnung des Adiabatenkoeffizientes ist, zumindest mit der Genauigkeit die wir im Anfängerpraktikum zu Verfügung haben.

Schließlich hätte weitere Reibung des Schwingkörpers einen Einfluss auf die Periodendauer haben können, diese wäre nämlich größer geworden wodurch das Ergebnis kleiner. Diesen Effekt können wir allerdings vernachlässigen anhand unseres Zeugnis, dass die Schwingkörper weit über die 50 Perioden harmonisch geschwungen haben, wodurch die Reibung nun eine niedrige Rolle spielte und anhand der Tatsache, dass der nach Rüchardt bestimmte Adiabatenkoeffizient der Luft größer ist als der nach Clémentes Desormes. Was allerdings dagegen spricht ist die Tatsache, dass im Einklang mit unserer Behauptung, der Adiabatenkoeffizient von Argon kleiner ist als der Literaturwert. Bei einer so kleinen Probe ist dies aber nicht signifikant genug um einen Urteil darüber zu bilden.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik B.Sc..

Experiment Adiabatenkoeffizient

1. April 2022

7 Anhang

[12]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log, pi
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
from scipy import odr
from scipy.integrate import quad
from scipy.signal import find_peaks


def fehler(name, G, sig_G, G_lit, sig_G_lit):
    print(name)
    print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)
    print('Rel. Fehler (Vergleich):', sig_G_lit / G_lit * 100)
    print('Absoluter Fehler: ', G - G_lit)
#    print('Verhältnis:', G / G_lit)
    print('Sigma-Abweichung: ', np.abs(G - G_lit) / sqrt(sig_G ** 2
                                                          + sig_G_lit **␣
↪2),'\n')


def fehler_small(name, G, sig_G):
    print(name)
```

```
    print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)


def ergebnis(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma), '+/-', np.round(sig_G,␣
 ↪komma), einheit)


def ergebnis_large(name, G, sig_G, komma, einheit):
    print(name + ' =', np.round(G, komma))
    print('+/-'.rjust(len(name) + 2), np.round(sig_G, komma), einheit)


def fitparameter(name, G, sig_G, komma, einheit):
    return name + ' = ' + str(np.round(G, komma)) + '$\pm$' + str(np.
 ↪round(sig_G, komma)) + einheit


def chi_sq(test_func, x_val, y_val, sig_y_val, popt, number):
    chi2_ = np.sum((test_func(x_val, *popt) - y_val) ** 2
                   / sig_y_val ** 2)
    dof = len(y_val) - number
    chi2_red = chi2_ / dof

    print("chi2 =", chi2_)
    print("chi2_red =",chi2_red)

    prob = np.round(1 - chi2.cdf(chi2_,dof), 2) * 100
    print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%\n")
```

Clément und Desoremes

[22]:
```
# Messwerte
bh_1 = np.array([58.5, 61.5, 58.7, 58.7, 59.2])
bh_3 = np.array([56.5, 56.8, 57.2, 56.6, 56.8])
b = 56
```

```
sig_bh = 0.1
h_1 = bh_1 - b
h_3 = bh_3 - b
sig_h = sqrt(2) * sig_bh

kappa_cd = h_1 / (h_1 - h_3)
sig_kappa_cd = kappa_cd * sqrt( (sig_h / h_1) ** 2 + (sqrt(2) * sig_h /
 ↪(h_1 - h_3)) ** 2)

ergebnis_large('kappa_cd', kappa_cd, sig_kappa_cd, 2, '')

kappa_cd_mean = np.mean(kappa_cd)
sig_kappa_cd_mean = 1 / (sqrt(len(kappa_cd) - 1)) * np.std(kappa_cd)

ergebnis('kappa_cd_mean', kappa_cd_mean, sig_kappa_cd_mean, 2, '')
```

```
kappa_cd = [1.25 1.17 1.8  1.29 1.33]
       +/- [0.14 0.06 0.26 0.14 0.13]
kappa_cd_mean = 1.37 +/- 0.11
```

Rüchardt

[32]:
```
# Messwerte Luft
m_luft = 26.116 # g
sig_m = 0.002
V_luft = 5370 # cm^3
sig_V = 5
r_luft = 15.95 / 2 # mm
sig_r = 0.01
T_luft = 48.31 / 50 # s
sig_T = 0.3 / 50

A_luft = pi * r_luft ** 2 # mm^2

g = 9.81 # m s^-2

p_luft = 1013 + m_luft * g / A_luft * 10 # hPa
```

```
sig_p = 2 # Nur Ablesefehler



kappa_r_luft = 4 * m_luft * V_luft / (r_luft ** 4 * T_luft ** 2 *␣
 ↪p_luft) * 10
sig_kappa_r_luft = kappa_r_luft * sqrt(#(sig_m / m_luft) ** 2
                                       #+ (sig_V / V_luft) ** 2
                                       + (4 * sig_r / r_luft) ** 2
                                       + (2 * sig_T / T_luft) ** 2
                                       #+ (sig_p / p) ** 2 Werte zu␣
 ↪klein
                                       )

ergebnis('T_luft', T_luft, sig_T, 3, '[s]')
ergebnis('p_luft', p_luft, sig_p, 0, '[hPa]')
ergebnis('kappa_r_luft',kappa_r_luft, sig_kappa_r_luft, 2, '')
```

```
T_luft = 0.966 +/- 0.006 [s]
p_luft = 1026.0 +/- 2 [hPa]
kappa_r_luft = 1.45 +/- 0.02
```

[27]:
```
# Messwerte Argon
m_arg = 26.006 # g
V_arg = 5460 # cm^3
r_arg = 15.97 / 2 # mm

A_arg = pi * r_arg ** 2

T_arg = 45.64 / 50

p_arg = 1013 + m_arg * g / A_arg * 10

kappa_r_arg = 4 * m_arg * V_arg / (r_arg ** 4 * T_arg ** 2 * p_arg) * 10
sig_kappa_r_arg = kappa_r_arg * sqrt(#(sig_m / m_luft) ** 2
                                       #+ (sig_V / V_luft) ** 2
                                       + (4 * sig_r / r_arg) ** 2
                                       + (2 * sig_T / T_arg) ** 2
```

```
                                              #+ (sig_p / p) ** 2 Werte zu␣
 ↪klein
                                              )

ergebnis('kappa_r_arg',kappa_r_arg, sig_kappa_r_arg, 2, '')
```

kappa_r_arg = 1.63 +/- 0.02

Sigmas

[28]:
```
# Luft
fehler('kappa_luft', kappa_cd_mean, sig_kappa_cd_mean, kappa_r_luft,␣
 ↪sig_kappa_r_luft)
```

```
kappa_luft
Relativer Fehler:  8.134982327795857
Rel. Fehler (Vergleich): 1.3394332417173165
Absoluter Fehler:  -0.08029271574347807
Sigma-Abweichung:  0.7108539951508213
```

[29]:
```
# Argon
kappa_arg_lit = 1.648
fehler('kappa_arg', kappa_r_arg, sig_kappa_r_arg, kappa_arg_lit, 0)
```

```
kappa_arg
Relativer Fehler:  1.4068435245022695
Rel. Fehler (Vergleich): 0.0
Absoluter Fehler:  -0.01329448533125599
Sigma-Abweichung:  0.5780776856688609
```

[ ]:
```
```