

# STUDY GUIDE

## PHYSIK

---

# Theoretische Physik 2

---

SS 21, Hebecker

Juan  
Mit riesiger Hilfe von:  
Jacqueline Neila  
und  
Hannah Beste  
Marius Mangold

20. Juli 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mathe</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung . . . . .	1
1.1.1 Hilfe . . . . .	1
1.1.2 Notation . . . . .	1
1.1.3 Kommentare . . . . .	1
1.1.4 Andere Projekte . . . . .	1
1.1.5 Quellen und Inspiration . . . . .	2
1.2 Integrale 2 . . . . .	3
1.2.1 Trigonometrische Substitutionen . . . . .	3
1.2.2 Differentiation unter dem Integral . . . . .	6
1.2.3 Besondere Integrale . . . . .	13
1.3 Differentialgleichungen 2 . . . . .	13
1.3.1 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen . . . . .	13
1.3.2 Gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	16
1.4 Koordinatenwechsel und anderer Spaß mit Nabla . . . . .	16
1.4.1 Nabla Operator in Kugelkoordinaten . . . . .	16
1.4.2 Nabla Operator in Zylinder-Koordinaten . . . . .	20
1.4.3 Skalarfeld vs. Vektorfeld . . . . .	21
1.4.4 Rechenregeln für den Nabla Operator . . . . .	21
1.5 Wir Taylorn alles was geht . . . . .	22
1.5.1 Allgemein . . . . .	22
1.6 Tensoranalysis (Tensor Calculus) . . . . .	23
1.6.1 Was ist ein Tensor? . . . . .	23
1.7 Variationsrechnung . . . . .	24
1.7.1 Funktionale . . . . .	24
1.7.2 Extremalisierung von Funktionalen . . . . .	24
1.8 Homogene Funktionen und Satz von Euler . . . . .	28
1.9 Differentialformen . . . . .	29
1.9.1 Motivation . . . . .	29
1.9.2 Differentialformen . . . . .	30
1.10 Besondere Funktionen . . . . .	45
1.10.1 Theta-Funktion . . . . .	45
1.10.2 Delta-Funktion . . . . .	47
<b>2 Physik</b>	<b>49</b>
2.1 Lagrange-Formalismus . . . . .	49
2.1.1 Euler-Lagrange-Gleichung (ELG) . . . . .	50

2.1.2	Wie drückt man T eigentlich als Matrix aus? . . . . .	52
2.2	Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	53
2.2.1	Erhaltungssätze . . . . .	56
2.2.2	Noether-Theorem . . . . .	58
2.2.3	Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	61
2.2.4	Virialsatz . . . . .	61
2.3	Trägheitstensor . . . . .	62
2.3.1	Trägheitstensor . . . . .	62
2.3.2	Hauptträgheitsachsen . . . . .	64
2.3.3	Trägheitsellipsoid . . . . .	65
2.4	Kreisel . . . . .	66
2.4.1	Euler-Gleichungen . . . . .	66
2.4.2	Freier Kreisel . . . . .	68
2.4.3	Euler-Winkel . . . . .	70
2.4.4	Schwerer Kreisel . . . . .	71
2.5	D'Alembert und Lagrange 1. und 2. Art . . . . .	73
2.5.1	Zwänge . . . . .	73
2.5.2	Prinzip der virtuellen Arbeit und virtuelle Verrückungen . . . . .	75
2.5.3	D'Alembertsches Prinzip in verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	76
2.5.4	Lagrange-Gleichungen 1. Art . . . . .	80
2.6	Hamilton-Formalismus . . . . .	90
2.6.1	Legendre-Transformation . . . . .	90
2.6.2	Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen . . . . .	91
2.6.3	Phasenraum . . . . .	94
2.6.4	Hamilton-Mechanik in Differentialformen . . . . .	94
2.7	Kanonische Transformationen, Integrabilität, Chaos . . . . .	96
2.7.1	Kanonische Transformation . . . . .	96
2.7.2	Integrabilität . . . . .	98
2.7.3	Chaos . . . . .	98
2.8	Schwingungen und Kontinua . . . . .	99
2.8.1	Harmonisierung einer Lagrange-Funktion . . . . .	103
2.8.2	Lagrinoschian . . . . .	104
2.9	Ideale Hydrodynamik . . . . .	105
2.9.1	Materialableitung . . . . .	105
2.9.2	Euler-, Kontinuitäts-, Zustands- und Bernoulli-Gleichung . . . . .	106
2.9.3	Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	106
2.10	Statistische Mechanik . . . . .	107
2.10.1	Mittelwert . . . . .	110
2.10.2	Maxwell-Boltzmann-Verteilung . . . . .	111
2.11	Thermodynamische Ensembles . . . . .	112
2.11.1	Der My-Raum . . . . .	112
2.11.2	Der Gamma-Raum . . . . .	113
2.11.3	Das mikrokanonische Ensemble . . . . .	113
2.11.4	Das kanonische Ensemble . . . . .	114
2.12	Statistische Mechanik: Rechnen . . . . .	114

# Kapitel 1

## Mathe

### 1.1 Einleitung

#### 1.1.1 Hilfe

Dieser Guide ist immer ein Team-Effort, also falls jemand helfen will schreib mich bitte gerne an! Vor allem ist es hilfreich, dass Leute den Guide "proofreaden", weil ich habe oft kleine Fehler und hoffentlich ein bisschen seltener auch große Fehler.

#### 1.1.2 Notation

Fettgedruckte Variablen sind Vektoren, z.B.:  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Partielle Ableitungen sind manchmal  $\partial_x$  und manchmal  $\frac{\partial}{\partial x}$ , je nachdem was aus dem Kontext relevant ist.

#### 1.1.3 Kommentare

Falls ihr glaubt, dass ein wichtiger Abschnitt im Guide fehlt schreibt mich auch gerne an. Ihr könnt dann entweder den Abschnitt selber formulieren oder hoffen, dass ich das Thema selber verstanden habe und es hinzufügen kann.

Das Meiste aus den What did Hebbie do kann ignoriert werden, zum größten Teil ist es dafür da, dass ich die Rechenschritte verstehe.

#### 1.1.4 Andere Projekte

[Theo I Guide](#)

[Ana I Zusammenfassung](#)

[Ana II Zusammenfassung](#)

[LA I Zusammenfassung](#)

[Ex I Formelsammlung](#)

[Ex II Formelsammlung](#)

### 1.1.5 Quellen und Inspiration

#### Integrale 2

Trigonometrische Substitutionen:

1. WP: Trigonometrische Identitäten
2. WP: Trigonometrische Substitution
3. Khan: Trigonometrische Substitution

Differentiation unter dem Integral:

1. Analysis II Skript auf Mampf
2. WP: Leibniz Regel für Integrale

#### Differentialgleichungen

Gekoppelte Differentialgleichungen:

1. Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

#### Koordinatenwechsel

Nabla Operator in Kugel- und Zylinderkoordinaten

1. Nabla in Kugel- und Zylinderkoordinaten

#### Lagrange 1. Art

D'Alembert

1. D'Alembertsches Prinzip

Lagrange-Multiplikatoren

1. Khan: Lagrange-Multiplikatoren
2. Lagrange-Multiplikatoren

#### Hamilton-Formalismus in Differentialformen

Mannigfaltigkeiten

1. WP: Mannigfaltigkeiten
2. Diese kleine Erklärung in Fußnote 12 und 13

Differentialformen

1. Einleitung und Tangentialraum
2. WK: 1-Formen

3. Multiplikation von 1-Formen
4. Formen und Weiteres
5.  $p$ -Formen
6. WK: Differentialformen
7. Differentialformen 1
8. Differentialformen 2
9. Differentialformen 3
10. Differentialformen 4
11. Differentialformen 5
12. WK: Äußere Ableitungen

Tensorprodukt

1. WP: Outer Product
2. WP: Exterior Product
3. Wedge-Produkt
4. Wedge-Produkt und Determinante

Weiteres

1. Exterior Algebra
2. Hodge-Stern-Operator
3. Verallgemeinerter Stokes-Theorem

## 1.2 Integrale 2

### 1.2.1 Trigonometrische Substitutionen

Ok so, Integrale sind nicht wirklich cool, aber sie sind viel uncooler wenn wir all die coolen Tricks nicht kennen. Deswegen lernen wir jetzt ein paar super nützliche Werkzeuge kennen, für die nächsten Male wo wir keine Ahnung haben was wir vielleicht probieren könnten.

Super mächtig ist hier die trigonometrische Substitution, weil trigonometrische Funktionen extrem flexibel sind. Wenn Mathe ein Zirkus wäre, dann sind diese die Kontorsionisten. Am Besten sieht man das an folgender [Tabelle](#):

$f(x)$ in	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\frac{1}{\csc x}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\frac{\sqrt{\csc^2 x - 1}}{\csc x}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$	$\sqrt{\sec^2 x - 1}$	$\frac{1}{\cot x}$
$\csc x$	$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x}$	$\csc x$	$\frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$\sqrt{1 + \cot^2 x}$
$\sec x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\sqrt{1 + \tan^2 x}$	$\frac{\csc x}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$	$\sec x$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 x}}{\cot x}$
$\cot x$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$\cot x$

Am Anfang sieht es ein bisschen einschüchternd aus. Was mache ich mit den ganzen tans und secs und cots. Aber es ist eine riesige Hilfe, wie wir offensichtlich sehen können, um Äquivalenzen zwischen komischen Integralen mit Wurzeln usw. mit einfacheren trigonometrischen Integralen zu finden.

Wenn wir ein Integral haben, was irgendwie vielleicht wie eine dieser Äquivalenzen aussieht, dann können wir probieren es zu substituieren, aber das geht nicht immer so leicht, weil selbst wenn es von der Form passt, vielleicht wird es am Ende ein Produkt zweier komischer trigs werden, und das ist vielleicht auch kompliziert. Machen wir es zuerst an einem bekannten Beispiel aus den Hausaufgaben<sup>1</sup>:

### Beispiel 1

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} dz \quad (1.2.1)$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^3}} dz \quad (1.2.2)$$

$$= \int \frac{1}{r^3 \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}}} dz \quad (1.2.3)$$

- Suchen wir nach einer passenden Substitution in der Tabelle:

Möglicherweise könnten wir  $z = r \cot u$  wählen, so könnten wir das Integral lösen, aber  $\cot u$  ist ein bisschen tricky, weil die Funktion in manchen Stellen nicht definiert ist, also wird das problematisch sein wenn die Grenzen unseres Integrals über diese Definitionslücken gehen. Probieren wir dann lieber  $z = r \tan u$ , so wird der Nenner zu  $(r \sec u)^3$ . Die Funktion die wir damit erhalten ist über alle  $u$  definiert, also ist für uns auch besser, so müssen wir uns keine Sorgen über die

<sup>1</sup>Siehe Blatt 1, Aufgabe 1.2 b)

Grenzen machen.

$$I = \int \frac{1}{r^3 \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}^3}} dz \quad | z = r \tan u \quad (1.2.4)$$

$$dz = r \sec^2 u \ du \quad (1.2.5)$$

$$= \frac{1}{r^3} \int \frac{r \sec^2 u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}^3} du \quad | \sec x = \sqrt{1 + \tan^2 x} \quad (1.2.6)$$

$$= \frac{1}{r^2} \int \frac{1}{\sec^2 u} du \quad (1.2.7)$$

$$= \frac{1}{r^2} \int \cos u \ du \quad (1.2.8)$$

$$= \frac{\sin u}{r^2} \quad | u = \arctan \frac{z}{r} \quad (1.2.9)$$

$$= \frac{\sin \arctan \frac{z}{r}}{r^2} \quad | \text{Siehe Tabelle!} \quad (1.2.10)$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\tan \arctan \frac{z}{r}}{\sqrt{1 + \tan^2 \arctan \frac{z}{r}}} \quad (1.2.11)$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\frac{z}{r}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}}} \quad (1.2.12)$$

$$= \frac{z}{r^3 \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}}} + C \quad | C \text{ nicht vergessen!} \quad (1.2.13)$$

Das war jetzt nicht mehr so schlimm, aber wir müssen trotzdem vorsichtig und schlau sein, dass wir nichts Illegales machen. In diesem Fall haben wir Glück gehabt, dass unter unserer Wurzel eindeutig ein positiver Wert steht, so verstößen wir zummindest nicht gegen die Regeln der reellen Zahlen. Später untersuchen wir ein Beispiel, wo wir doch darauf aufpassen müssen.

Ok, aber, wann sollten wir diese Methode anwenden? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein?

1. Also als erstes können wir ja vermuten, dass wenn wir feste Grenzen haben, und beim Einsetzen dieser Grenzen auf eine Definitionslücke treffen, dann ist unsere Substitution kaputt no bueno.
2. Zweitens müssen wir bei Vorzeichen unter Wurzeln aufpassen, dass bei bestimmten Funktionen nicht irgendwie eine komplexe Zahl rauskommt. Wenn wir beispielsweise  $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$  mit trigs substituieren wollten, dann würden wir den Definitionsbereich von  $x$  auf  $x < |2|$  einschränken müssen. Danach würden wir gucken, ob in dem Bereich unsere Substitution auch gegen keine Regeln verstößt, was zu unserem nächsten Punkt bringt.

3. Wir möchten auch ungern durch 0 teilen, also müssen wir gucken, dass unsere Substitution in unserem Intervall nicht 0 wird
4. [bestimmt noch was]

Ok, so haben wir eine trig Substitution eingeführt, was machen wir jetzt? Vielleicht scheint das Integral noch ein bisschen kompliziert zu sein, oder wir müssen noch partiell integrieren oder mit  $u$  substituieren. Falls es immer noch schwer erscheint, können wir vielleicht das Problem vereinfachen, vor allem wenn es zu einem Produkt zweier trigs kommt. Dazu schauen wir uns die folgende Tabelle an oder gucken im [Anhang](#):

Doppel-Winkel	Doppel-Winkel Formel	
$\sin 2x$	$2 \sin x \cos x$	$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
$\cos 2x$	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$2 \cos^2 x - 1$
$\tan 2x$	$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	
$\csc 2x$	$\frac{2}{\sec x \csc x}$	
$\sec 2x$	$\frac{2}{\sec^2 x}$	$2 - \sec^2 x$
$\cot 2x$	$\frac{2}{\cot^2 x - 1}$	

Falls wir in unserem Integral wieder eine ähnliche Formel haben, so können wir es unter den gleichen Voraussetzungen mit dem Doppelwinkel vereinfachen. Ähnlicherweise gibt es [Dreifach-, Vierfach- und Halb-Winkel Formeln](#).

### 1.2.2 Differentiation unter dem Integral

Den folgenden Trick werden wir wahrscheinlich in all seiner Macht nicht in der nahen Theo II Zukunft brauchen, aber es ist trotzdem sehr cool und nützlich bei sonst nicht normal integrierbare Funktionen.

Das Grundkonzept ist, dass man die Ableitung eines Integrals wieder integrieren kann, um dieses zu lösen. Das ist im Prinzip logisch, weil Differentiation und Integration quasi "gegensätzliche Operationen" sind, aber der Trick erlaubt uns auch komplexere Integrale zu lösen.

1. Voraussetzung zur Anwendung:
  - i. Stetige Funktion  $f \in C^0$
  - ii. Bestimmtes Intervall  $[a, b]$  mit  $-\infty < a, b < \infty$
2. Anwendung

- i. Parametrisierung des Integrals:

Sei ein Integral  $I(t) := \int_a^b f(t) dt$  gegeben. Wir führen einen Parameter  $x$  in das Integral ein, sodass die Parametrisierung des Integrals ausgewertet an einen bestimmten  $x$  gleichwertig mit dem alten Integral ist:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \quad (1.2.14)$$

Diese Notation macht auch intuitiv Sinn, weil wenn man das Integral löst und bei  $a, b$  auswertet, dann ist man schon das  $t$  losgeworden, aber nicht das  $x$ , deswegen hängt  $F$  nur von  $x$  ab.

Etwas was man beachten muss, ist das nicht jede Parametrisierung erlaubt ist, obwohl die meisten schon. Für einige Werte des Parameters kann ein Integral vielleicht divergieren, in dem Fall muss man entweder zeigen oder annehmen, dass die Parametrisierung konvergiert. Außerdem muss man in einigen Fällen Fallunterscheidungen machen und andere langweilige Sachen.

**ii.** Ableitung der Parametrisierung:

Da  $F$  nur von  $x$  abhängt leiten wir normal nach  $x$  ab:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt \quad (1.2.15)$$

Dieser Trick sagt uns, dass wir die Ableitung *in das Integral hinein* ziehen können, dabei berücksichtigen wir, dass das was innerhalb des Integrals steht doch von zwei Variablen abhängt und deswegen müssen wir Partial ableiten.

$$\frac{dF}{dx} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (1.2.16)$$

**iii.** Löse das abgeleitete Integral:

Wenn man den Trick angewendet hat, sollte man einen Integral rauskriegen, was einfacher zu lösen ist als zuvor, integriere es.

**iv.** Integriere nochmal:

Wir haben ja technisch gesehen die Ableitung des Integrals integriert, das ist noch nicht das Integral unserer ursprünglichen Funktion. Wir sollten aber jetzt einen einfacheren Ausdruck (in Abhängigkeit vom Parameter  $x$ ) den wir nochmal jetzt einfach integrieren können.

**v.** Bestimme die Integrationskonstante:

Oh no, in Schritt **iii.** haben wir die Grenzen unseres Integrals verloren und wenn wir in **iv.** nochmal integrieren, müssen wir eine Integrationskonstante hinzufügen. Suche dir einen besonders schönen Wert von  $x$ , bei welchem du weißt was im Integral rauskommen wird, selbst wenn dieser Wert von  $x$  nicht mit dem ursprünglichen Integral übereinstimmt. Es kann zum Beispiel einen Wert  $x$  sein, was einen Term deines Integrals einfach tötet, oder das ganze zu einer konstanten macht.

**vi.** Setze den richtigen Wert  $x$  wieder ein:

**vii.** Voilà

So abstrakt ist es aber ein bisschen doof, deswegen werden wir ein paar einfachere Beispiele und am Ende ein gigantisches<sup>2</sup> Beispiel machen.

---

<sup>2</sup>Ich finde es zumindest beeindruckend, aber einige meinen es wäre eine triviale Aufgabe gewesen

## Beispiel 2

Sei folgendes Integral gegeben:

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt \quad (1.2.17)$$

- i. Well shit, wie sollen wir einen "ln" im Nenner integrieren? Können wir ihn nicht einfach loswerden? Jap das können wir, dafür müssen wir eine richtige Parametrisierung finden, bei welcher  $\ln x$  bei der Ableitung weggekürzt wird:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt \quad (1.2.18)$$

- ii. Jetzt leiten wir ab:

$$\frac{dI}{dx} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\ln t} dt \quad | \frac{d}{dx} a^x = \ln a \ a^x \quad (1.2.19)$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln t \ t^x}{\ln t} dt \quad (1.2.20)$$

$$= \int_0^1 t^x dt \quad (1.2.21)$$

- iii. Und integrieren einmal:

$$\int_0^1 t^x dt = \left[ \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 \quad (1.2.22)$$

$$= \frac{1^{x+1}}{x+1} - \frac{0^{x+1}}{x+1} \quad (1.2.23)$$

$$= \frac{1}{x+1} \quad (1.2.24)$$

- iv. Und integrieren noch einmal:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(1+x) + C \quad (1.2.25)$$

- v. Bestimme die Integrationskonstante:

Wenn  $x = 0$ , dann ist:

$$I(0) = \int_0^1 \frac{t^0 - 1}{\ln t} dt \quad (1.2.26)$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - 1}{\ln t} dt \quad (1.2.27)$$

$$= 0 \quad (1.2.28)$$

Daraus folgt, dass

$$\ln(1 + 0) + C = 0 \quad (1.2.29)$$

$$0 + C = 0 \quad (1.2.30)$$

$$C = 0 \quad (1.2.31)$$

vi. Setze  $x$  wieder ein:

Damit das Ergebnis stimmt, muss das gewählte  $x$  das ursprüngliche Integral unverändert lassen, also  $x = 1$

$$\int_0^1 \frac{t - 1}{\ln t} dt = \ln(1 + 1) \quad (1.2.32)$$

$$= \ln 2 \quad (1.2.33)$$

### Beispiel 3

Der Klassiker:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (1.2.34)$$

Wir wissen schon bestimmt, dass man dieses unbestimmte Integral nicht mit analytischen Methoden lösen kann. Das Bestimmte aber schon, wenn wir diesen Trick anwenden.

### Beispiel 4

Sei folgendes Integral gegeben:<sup>a</sup>

$$I = \int_0^\pi \ln(5 - 4 \cos x) dx \quad (1.2.35)$$

i. Wir führen eine Parametrisierung ein:

$$\varphi(t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx \quad |t| \neq 1 \quad (1.2.36)$$

Außerdem definieren wir:

$$f(x, t) := \ln(1 - 2t \cos x + t^2) \quad (1.2.37)$$

ii. Wir leiten ab:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx \quad (1.2.38)$$

$$= \int_0^\pi \frac{2t - 2 \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} dx \quad | \cdot \frac{t}{t} \quad (1.2.39)$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^\pi \frac{2t^2 - 2t \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} dx \quad | + 0 \quad (1.2.40)$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^\pi \frac{1 - 2t \cos x + t^2 - 1 + t^2}{1 - 2t \cos x + t^2} dx \quad (1.2.41)$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^\pi \frac{1 - 2t \cos x + t^2}{1 - 2t \cos x + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos x + t^2} dx \quad (1.2.42)$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^\pi 1 - \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos x + t^2} dx \quad (1.2.43)$$

$$= \frac{\pi}{t} - \int_0^\pi \frac{1 - t^2}{1 + t^2 - 2t \cos x} \quad (1.2.44)$$

Ja ok, das verbleibende Integral sieht ein bisschen freundlicher aus, aber trotzdem nicht so schön lösbar. Gott sei Dank es gab mal kluge Leute, denen solchen Ideen eingefallen sind.

Für  $x \in (-\pi, \pi)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \arctan(z(x)) \quad | \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} = z(x) \quad (1.2.45)$$

$$= \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1.2.46)$$

$$= \frac{1}{1 + \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} \right)^2} \cdot \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \quad (1.2.47)$$

$$= \frac{1+t}{2(1-t)} \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{1 + \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^2 \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (1.2.48)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1+t) \sec^2 \frac{x}{2}}{(1-t) + \frac{(1+t)^2}{1-t} \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (1.2.49)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+t}{(1-t) \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{(1+t)^2}{1-t} \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (1.2.50)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1-t}{1+t} \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1+t}{1-t} \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (1.2.51)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)^2 \cos^2 \frac{x}{2} + (1+t)^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad | \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \quad (1.2.52)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{(1-t)^2 \cos^2 \frac{x}{2} + (1+t)^2 (1 - \cos^2 \frac{x}{2})} \quad (1.2.53)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{(1+t)^2 - 4t \cos^2 \frac{x}{2}} \quad \left| \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \right. \quad (1.2.54)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+2t+t^2 - 2t(1+\cos x)} \quad (1.2.55)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+t^2 - 2t \cos x} \quad (1.2.56)$$

Und magischerweise finden wir einen Weg unser obiges Integral extrem zu vereinfachen, wir müssen nur (1.2.45) in (1.2.44) einsetzen:

iii. Wir integrieren also einmal:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} \right) dx \quad (1.2.57)$$

$$= \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t} \left[ \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} \right) \right]_0^\pi \quad (1.2.58)$$

An dieser Stelle hätten wir bereits gezeigt haben sollen, dass wir die Funktion  $\arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{x}{2} \right)$  auf  $x \in [-\pi, \pi]$  stetig fortsetzen können, denn  $\tan \frac{x}{2}$  an diesen Grenzen divergiert. Siehe Analysis II Lösungsblatt zu 5.4. im Mampf falls das dich interessiert, aber für unsere Zwecke ist es ausreichend zu glauben, dass wir  $\pi$  in  $\tan \frac{x}{2}$  einsetzen dürfen und dass es gegen unendlich geht.

$$= \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{\pi}{2} \right) - \frac{2}{t} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \tan \frac{0}{2} \right) \quad (1.2.59)$$

$$= \frac{\pi}{t} - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{t} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \cdot z \right) - \frac{2}{t} \arctan 0 \quad (1.2.60)$$

$$= \frac{\pi}{t} - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{t} \arctan \left( \frac{1+t}{1-t} \cdot z \right) \quad (1.2.61)$$

$$= \frac{\pi}{t} - \begin{cases} \frac{\pi}{t} & \text{für } |t| < 1 \\ -\frac{\pi}{t} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.2.62)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| < 1 \\ \frac{2\pi}{t} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.2.63)$$

iv. Wir integrieren nochmal:

$$\varphi(t) = \begin{cases} C_1 & \text{für } |t| < 1 \\ 2\pi \ln |t| + C_2 & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.2.64)$$

v. Wir bestimmen die Integrationskonstanten:

Für  $|t| < 1$

$$\varphi(0) = \int_0^\pi \ln(1 - 0 \cos x + 0^2) \, dx \quad (1.2.65)$$

$$= \int_0^\pi \ln 1 \, dx \quad (1.2.66)$$

$$= 0 \quad (1.2.67)$$

Für  $|t| > 1$  ist es nicht so einfach wie 0 einzusetzen und die Mehrheit der Termen verschwinden zu lassen. Dafür bedanken wir uns nochmal bei den klugen Leuten und zeigen, dass folgende Identität benutzt werden darf:

$$f\left(x, \frac{1}{s}\right) = 2 \ln \frac{1}{s} + f(x, s) \quad (1.2.68)$$

Für  $|t| > 0$  sei:

$$t = \frac{1}{|s|} \quad (1.2.69)$$

wobei

$$f\left(x, \frac{1}{s}\right) = 2 \ln \frac{1}{s} + f(x, s) \quad (1.2.70)$$

$$= 2 \ln \frac{1}{s} + \ln(1 - 2s \cos x + s^2) \quad (1.2.71)$$

$$= \ln \frac{1}{s^2} + \ln(1 - 2s \cos x + s^2) \quad (1.2.72)$$

$$= \ln \left( \frac{1}{s^2} \cdot (1 - 2s \cos x + s^2) \right) \quad (1.2.73)$$

$$= \ln \left( 1 - \frac{2}{s} \cos x + \frac{1}{s^2} \right) \quad (1.2.74)$$

$$= f\left(x, \frac{1}{s}\right) \quad (1.2.75)$$

Für  $\varphi(2)$  benutzen wir dies:

$$\varphi(2) = \varphi\left(\frac{1}{0.5}\right) = \int_0^\pi f\left(x, \frac{1}{0.5}\right) \, dx \quad (1.2.76)$$

$$= \int_0^\pi 2 \ln \frac{1}{0.5} + \ln\left(1 - \cos x + \frac{1}{4}\right) \, dx \quad (1.2.77)$$

$$= \int_0^\pi \ln 4 \, dx + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \quad | \varphi(t) = 0 \text{ für } |t| < 1 \quad (1.2.78)$$

$$= [x \ln 4]_0^\pi \quad (1.2.79)$$

$$= \pi \ln 4 \quad (1.2.80)$$

$$= 2\pi \ln 2 \quad (1.2.81)$$

$$\implies C_2 = 0 \quad (1.2.82)$$

- vi. Im letzten Schritt haben wir gleichzeitig die Integrationskonstante bestimmt und den richtigen Wert für  $t$  eingesetzt, nur noch einmal klar damit wir alle Schritte ordentlich aufgelistet haben:<sup>b</sup>

$$\varphi(2) = \int_0^\pi \ln(1 - 2 \cdot 2 \cos x + 2^2) dx \quad (1.2.83)$$

$$= \int_0^\pi \ln(5 - 4 \cos x) dx \quad (1.2.84)$$

$$= 2\pi \ln 2 \quad (1.2.85)$$

<sup>a</sup>Das hier ist die Dollar-Store-Version von Aufgabe 5.4 in Analysis II,

<sup>b</sup>Erst zu spät habe ich gemerkt, dass sich keiner diese scheiß lange Rechnung durchlesen wird, aber ich bin zu stolz und hatte genug copy-pasted und auf das Format angepasst um dieses Beispiel nicht "vollständig" zu zeigen. Es dient aber zumindest als Beispiel, wie mächtig diese Integrationsmethode ist.

### Disclaimer:

Das hier ist eine vereinfachte Version des Tricks, vollständiger gibt es in [Wikipedia](#) und die Regeln sind manchmal auch ein bisschen verschwommen, wie zum Beispiel wieso man  $\infty$  als Grenze im zweiten Beispiel einsetzen kann, obwohl Wikipedia sagt, die Grenzen sollen  $-\infty < a, b < \infty$  sein. Who knows.

## 1.2.3 Besondere Integrale

### Gamma Funktion

### Eulersche Betafunktion

## 1.3 Differentialgleichungen 2

### 1.3.1 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

Jo Differentialgleichungen sind blöd, aber es geht auch schlimmer. Manchmal hängen Differentialgleichungen von einander ab, yuck.

Gekoppelte Differentialgleichungen kommen sehr oft in der Physik und der Natur vor, als Einstiegsbeispiel nimmt man normalerweise eine Bevölkerung von Raub- und Beutetiere, dessen Anzahl von einander abhängt, außerdem haben wir zum Beispiel in den Eulergleichungen [2.4.1](#) auch voneinander abhängige Differentialgleichungen. Diese haben normalerweise die Form:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) \quad (1.3.1)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\alpha x_1(t) \quad (1.3.2)$$

Ein solches System ist sehr einfach lösbar, zur Entkopplung reicht es eine Gleichung

zu nehmen und sie abzuleiten und rückwärts einsetzen:

$$x_1(t) = -\frac{\dot{x}_2(t)}{\alpha} \quad | \frac{d}{dt} \quad (1.3.3)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\ddot{x}_2(t)}{\alpha} \quad | \text{In (1.3.1)} \quad (1.3.4)$$

$$-\frac{\ddot{x}_2(t)}{\alpha} = \alpha x_2(t) \quad (1.3.5)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\alpha^2 x_2(t) \quad (1.3.6)$$

Dies entspricht einfach dem harmonischen Oszillatoren. Zur Bestimmung von  $\ddot{x}_1$  würden wir aber zum genau gleichen Ergebnis wenn wir analog zu  $\ddot{x}_2$  fortfahren, aber wahrscheinlich sind sie nicht *exakt* gleich, sondern vielleicht um eine Phase verschoben. Das ist besonders der Fall wenn sie eigentlich unterschiedliche Vorfaktoren  $\alpha$  haben. Dann würden wir unsere allgemeine Lösung von  $x_2$  in die verbleibende Gleichung einsetzen und dadurch  $x_1$  bestimmen:

$$x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad | \text{In (1.3.1)} \quad (1.3.7)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha A \cos(\omega t + \phi) \quad | \int \quad (1.3.8)$$

$$x_1(t) = -A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.3.9)$$

## Systeme gekoppelter linearer Differentialgleichungen

Nun kommen wir zu einem Punkt, wo wir ein bisschen mehr Arbeit in die Entkopplung reinstecken müssen, aber das ist nicht so schlimm, wie wir bald sehen werden. Sobald wir die notwendigen Werkzeuge dafür haben ist es eigentlich recht einfach und etwas was wir schon seit dem letzten Semester aus LA I können. Wir verstehen unter einem System  $n$  gekoppelter linearer Differentialgleichungen versteht man sowas:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j \quad | i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.3.10)$$

Am Beispiel von  $n = 3$ :

$$x'_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 \quad (1.3.11)$$

$$x'_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 \quad (1.3.12)$$

$$x'_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 \quad (1.3.13)$$

Das sieht verdächtigerweise wie eine Matrix aus, und zwar können wir diese Gleichung genau wie eine Matrix darstellen als:

$$x' = A \cdot x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.14)$$

Was wir in diesem Fall machen können, ist diese Matrix zu diagonalisieren. Durch Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda_i$  und Eigenvektoren  $v_i$  kann man ganz große Systeme *linearer* Differentialgleichungen entkoppeln, angenommen die Matrix ist überhaupt diagonalisierbar. Falls dies der Fall ist, dann hat die allgemeine Lösung unseres Problems die

Form:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \quad (1.3.15)$$

Dabei muss man betrachten, die  $\lambda_i$  können aber ziemlich kompliziert werden, dadurch dass wir in der Physik normalerweise nicht so schöne Bewegungsgleichungen haben.

### Beispiel 5

Als Einstiegsbeispiel nehmen wir schöne runde Zahlen für die  $\alpha_{ij}$ . Sei folgendes System von linearen gekoppelten Differentialgleichungen gegeben:

$$x'_1 = 6x_1 + x_2 \quad (1.3.16)$$

$$x'_2 = -x_1 + 2x_2 \quad (1.3.17)$$

Wir können diese Matrix ganz einfach diagonalisieren, wenn wir uns an das Diagonalisierungsverfahren von LA I erinnern.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

Diagonalisierung:

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) \quad (1.3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \quad (1.3.20)$$

$$= (6 - \lambda)(2 - \lambda) + 1 \quad (1.3.21)$$

$$= 12 - 8\lambda + \lambda^2 + 1 \quad (1.3.22)$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3} \quad (1.3.23)$$

Die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.24)$$

Dann ist die allgemeine Lösung unseres Systems:

$$\mathbf{x} = c_1 e^{4+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4-\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.25)$$

Es ist im Prinzip egal, ob wir jetzt die Eigenvektoren normieren oder nicht, bei der Lösung eines Anfangswertproblems hätten sich die Konstanten  $c_1, c_2$  wohl nur geändert.

### 1.3.2 Gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen

Bei nichtlinearen Systemen von Differentialgleichungen ist es leider nicht so einfach und eine allgemeine Methode ist way above my paygrade<sup>3</sup>. Trotzdem werden wir uns einige Lösungsansätze angucken:

1. Linearisierung und Einschränkungen:

Gegeben Einschränkungen des Systems kann man die Differentialgleichungen linearisieren, zum Beispiel durch Angabe, dass einige Werte sehr klein sind, dann kann man entweder die nichtlinearen Elementen  $\cos x, \sin x, e^x$ , usw. in erster Ordnung Taylor-entwickeln und Werte quadratischer und höherer Ordnung vernachlässigen<sup>4</sup>.

2. Fixpunkte:

## 1.4 Koordinatenwechsel und anderer Spaß mit Nabla

### 1.4.1 Nabla Operator in Kugelkoordinaten

Wenn wir unser Koordinatensystem auf Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten wechseln, so können wir doch nicht mit dem gleichen Nabla-Operator rechnen, wie wir es im Kartesischen Koordinatensystem getan haben, weil die  $x, y, z$ -Richtungen uns nicht mehr wirklich interessieren.

#### Nabla Operator selbst

Zunächst leiten wir die Formel für den Nabla-Operator und einige damit bezogene Operationen von Anfang an her. Für das Endergebnis gehe zu Gleichung 1.4.34

Als erstes verlassen wir die kartesische Welt mit unseren neuen Koordinaten:<sup>5</sup>

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (1.4.1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (1.4.2)$$

$$z = r \cos \theta \quad (1.4.3)$$

Und jeweils nach den möglichen Parametern abgeleitet:

$$\partial_r x = \sin \theta \cos \varphi \quad \partial_r y = \sin \theta \sin \varphi \quad \partial_r z = \cos \theta \quad (1.4.4)$$

$$\partial_\theta x = r \cos \theta \cos \varphi \quad \partial_\theta y = r \cos \theta \sin \varphi \quad \partial_\theta z = -r \sin \theta \quad (1.4.5)$$

$$\partial_\varphi x = -r \sin \theta \sin \varphi \quad \partial_\varphi y = r \sin \theta \cos \varphi \quad \partial_\varphi z = 0 \quad (1.4.6)$$

Zunächst definieren wir auch die Ableitungsoperatoren in Abhängigkeit der alten Koordinaten mithilfe der verallgemeinerten Kettenregel:<sup>67</sup>

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.7)$$

---

<sup>3</sup>which is 0 btw

<sup>4</sup>Alternativ: Benutze Python / Mathematica lol

<sup>5</sup> $\theta$  ist der Winkel vom Vektor zur  $z$ -Achse,  $\varphi$  ist der Winkel von der Projektion des Vektors auf die  $x$ - $y$ -Ebene zur  $x$ -Achse

<sup>6</sup>Das machen wir, weil  $r, \theta, \varphi$  von  $x, y$  und  $z$  abhängen

<sup>7</sup>Hier schreibe ich "große" partielle Ableitungen, um besser zu zeigen, dass wir die verallgemeinerte Kettenregel verwenden

$$\partial_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.8)$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4.9)$$

Das können wir auch mit den Ableitungen oben neu schreiben und erhalten:

$$\partial_r = \sin \theta \cos \varphi \partial_x + \sin \theta \sin \varphi \partial_y + \cos \theta \partial_z \quad (1.4.10)$$

$$\partial_\theta = r \cos \theta \cos \varphi \partial_x + r \cos \theta \sin \varphi \partial_y - r \sin \theta \partial_z \quad (1.4.11)$$

$$\partial_\varphi = -r \sin \theta \sin \varphi \partial_x + r \sin \theta \cos \varphi \partial_y \quad (1.4.12)$$

Das ist aber noch nicht unser Ziel, denn am liebsten würden wir uns komplett von den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  trennen können. Was wir hier haben ist ein Lineares Gleichungssystem, und wir möchten unsere "Variablen"  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  bestimmen. Also wie wir letztes Semester in der Linearen Algebra I gelernt haben, stellen wir das in eine Matrix-Form (das ist btw die [Jacobi-Matrix](#))

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & \partial_r \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta & \partial_\theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 & \partial_\varphi \end{array} \right) \quad (1.4.13)$$

und geben das in den Computer ein<sup>8</sup>. Damit erhalten wir

$$\partial_x = \frac{r \cos \varphi \sin^2 \theta \partial_r + \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta - \sin \varphi \partial_\varphi}{r \sin \theta} \quad (1.4.14)$$

$$= \cos \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \quad (1.4.15)$$

$$\partial_y = \frac{r \sin \varphi \sin^2 \theta \partial_r + \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \partial_\theta + \cos \varphi \partial_\varphi}{r \sin \theta} \quad (1.4.16)$$

$$= \sin \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \quad (1.4.17)$$

$$\partial_z = \frac{r \cos \theta \partial_r - \sin \theta \partial_\theta}{r} \quad (1.4.18)$$

$$= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \quad (1.4.19)$$

Pfffft das war eine Menge hässliche Rechnung und wir scheinen noch nicht so weit zu sein. Was wir eigentlich wollten war das Nabla-Operator einfach mit  $r, \theta$  und  $\varphi$  beschreiben zu können, und wir haben schon die Hälfte der Elementen, die wir dazu brauchen, denn der Operator war definiert als:

$$\nabla_{\text{kart}} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (1.4.20)$$

Und wir haben schon alle Ableitungen!

---

<sup>8</sup>Mathematica gibt mit folgendem Befehl (siehe Latex-Code an dieser Stelle) eine äquivalente Definition an.

Für den nächsten Teil betrachten wir die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (1.4.21)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (1.4.22)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (1.4.23)$$

But yo how tf kriegen wir jetzt die Vektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$ ?

Dafür überlegen wir uns was: Da  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  alle orthogonal zueinander stehen, verschwinden die anderen Termen in  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  mit Multiplikation damit:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \quad (1.4.24)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \quad (1.4.25)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \quad (1.4.26)$$

Und der Vektor  $\mathbf{e}_x$  kann daraus bestimmt werden, denn der übrige Teil ist womit wir den entsprechenden Vektor multiplizieren müssen:

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (1.4.27)$$

Analog erhalten wir

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (1.4.28)$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.4.29)$$

Somit können wir endlich den letzten Schritt aufschreiben, und zwar haben wir den Nabla-Operator in Kugel-Koordinaten:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (1.4.30)$$

$$= \left( \cos \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) \quad (1.4.31)$$

$$+ \left( \sin \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) \quad (1.4.32)$$

$$+ \left( \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right) (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (1.4.33)$$

$= \dots$

Das ergibt also:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \quad (1.4.34)$$

### Divergenz in Kugelkoordinaten

Um die Divergenz in Kugelkoordinaten zu bestimmen, müssen wir nochmal ganz viel Mathe-Kram machen<sup>9</sup>. Nach dieser Rechnung erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \partial_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \mathbf{e}_\varphi \right) (A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \quad | A_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_r, \dots \quad (1.4.35)$$

$$= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi A_\varphi \quad (1.4.36)$$

### Gradient in Kugelkoordinaten

Für den Gradient erfolgt die Herleitung noch einfacher, denn es gilt:

$$\nabla f = \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) f \quad (1.4.37)$$

$$= \mathbf{e}_r \partial_r f + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi f \quad (1.4.38)$$

Mit dieser Formel kann man zum Beispiel die Kraft eines Zentralpotentials leichter bestimmen.

### Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.4.39)$$

### Infinitesimale Verschiebung in Kugelkoordinaten

$$ds = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi \quad (1.4.40)$$

### Infinitesimales Flächenenelement in Kugelkoordinaten

$$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \mathbf{e}_\theta r \sin \theta dr d\varphi + \mathbf{e}_\varphi r dr d\theta \quad (1.4.41)$$

### Infinitesimales Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \det \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) dr d\theta d\varphi \quad (1.4.42)$$

(Jacobi-Determinante)

---

<sup>9</sup>Beweis als Übungsaufgabe

### 1.4.2 Nabla Operator in Zylinder-Koordinaten

Nach einer ähnlichen Herleitung wie oben kommt man sicherlich alleine auf die Ergebnisse<sup>10</sup>.

#### Nabla Operator selbst

In Zylinderkoordinaten, bei welchen wir eine Höhe  $z$ , einen Radius  $\rho$  und einen Winkel  $\varphi$  haben, ist der Nabla Operator:

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi + \mathbf{e}_z \partial_z \quad (1.4.43)$$

#### Divergenz in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi A_\varphi + \partial_z A_z \quad (1.4.44)$$

#### Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\nabla f = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho f + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi f + \mathbf{e}_z \partial_z f \quad (1.4.45)$$

#### Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.4.46)$$

#### Infinitesimale Verschiebung in Zylinderkoordinaten

$$ds = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi + \mathbf{e}_z dz \quad (1.4.47)$$

#### Infinitesimales Flächenenelement in Zylinderkoordinaten

$$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r d\varphi dz + \mathbf{e}_\varphi dr dz + \mathbf{e}_z r dr d\varphi \quad (1.4.48)$$

#### Infinitesimales Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$dV = r dr d\varphi dz = \det \left( \begin{pmatrix} \partial f(x, y, z) \\ f(r, \varphi, z) \end{pmatrix} \right) dr d\theta d\varphi \quad (1.4.49)$$

(Jacobi-Determinante)

---

<sup>10</sup>aber ich muss Hausaufgaben machen und kann kein Theo mehr machen

### 1.4.3 Skalarfeld vs. Vektorfeld

Für die tolle Sammlung an Rechenregeln für den Nabla Operator ist es wichtig, den Unterschied zwischen Vektorfeld und Skalarfeld zu kennen. Dabei ist  $f(x_1, \dots, x_n)$  ein Skalarfeld und  $\mathbf{A}(x_1, \dots, x_n)$  ein Vektorfeld. Was ist nochmal ein **Skalarfeld**? Das ist eine Funktion (aka Maschine<sup>11</sup>), in die man viele Variablen reinwirft, die aber nur eine Variable - einen Skalar - ausspuckt. Wir können uns gut einen 3-Dimensionalen (Euklidischen) Raum vorstellen. Dann gibt das Skalarfeld Punkten mit den Koordinaten  $(x, y, z)$  einen Wert  $f(x, y, z)$ . Das kann natürlich auch zeitlich variieren wie die Temperatur z.B. Ein **Vektorfeld** ist fast dasselbe, nur dass die Funktion wieder einen Vektor ausspricht, also im Prinzip viele Skalarfelder untereinander in einen Vektor geschrieben. Hebbie schreibt ein Vektorfeld meistens so:  $\vec{f} \cdot (x_1, \dots, x_n)$ . Wir kennen Skalarfelder schon - das Potenzial  $V$  ist z.B. eins oder Druck und Dichte. Und auch Vektorfelder kennen wir schon - Kraftfelder wie das Gravitationsfeld oder das E-und B-Feld. Hier wirft man einen Vektor (Ortsvektor zum Punkt) rein und bekommt den Kraftvektor raus. Der **Gradient vom Skalarfeld** ist ganz normal  $\nabla f$ , der **Gradient vom Vektorfeld** ist die [Jacobi-Matrix](#). **Rotation und Divergenz** gibt es nur für Vektorfelder, Skalarfelder haben sowas gar nicht.

Fast offizielle Mathe-Definition<sup>12</sup>:

#### Skalarfeld

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ (bzw. } M \rightarrow \mathbb{R}) \quad (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}) \quad (1.4.50)$$

#### Vektorfeld<sup>13</sup>

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (f^1(x_1, \dots, x_n), \dots, f^m(x_1, \dots, x_n))^T = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.4.51)$$

#### Vektorfeld offizieller

$$M \rightarrow TM = \bigcup_{q \in M} T_q M \quad \{q_1, \dots, q_n\} \mapsto \mathbf{f}(q_1, \dots, q_n) \quad (1.4.52)$$

### 1.4.4 Rechenregeln für den Nabla Operator

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f \quad \text{Divergenz vom Gradient (Skalarfeld<sup>14</sup>) ist Laplace}$$

<sup>11</sup>in memoriam Herr Thommes

<sup>12</sup>statt dem Euklidischer Raum /  $\mathbb{R}^3$  ist die Definitionsmenge eigentlich eine **Mannigfaltigkeit**, denn nicht jedem Punkt wird ein Skalar zugeordnet, sondern nur Punkten auf einer irgendwie geformten Oberfläche (Mannigfaltigkeit = krumme Oberfläche, die dem euklidischen Raum lokal ähnelt). Man gibt aber die Koordinaten des Punktes genau so in die Funktion ein, als wäre es ein ganz normaler Vektor aus dem  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>13</sup>Auch hier hab ich geschummelt. Die Definitionsmenge ist eigentlich eine differenzierbare **Mannigfaltigkeit**. Der Vektor, der rauskommt, gehört auch eigentlich in das sogenannte **Tangentialbündel**. Das ist die disjunkte Vereinigung (=ohne überschneidung) aller Tangentialräume an allen Punkten der Mannigfaltigkeit. Stellt euch vor wir haben eine krumme Fläche und an jeden Punkt legt man eine senkrechte Ebene an. Das ist wie eine normale Tangente nur halt 2D und heißt Tangentialraum am Punkt  $q$  aka  $T_q M$ . Alle diese Ebenen zusammen ohne die Schnittpunkte doppelt zu zählen sind das Tangentialbündel.

<sup>14</sup>Das Skalarfeld hat keine Divergenz aber der Gradient davon schon, denn der liefert - wenn man ihn auf das Skalarfeld anwendet - ein Vektorfeld

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad \text{Rotation vom Gradient (Skalarfeld) ist Null}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \text{Divergenz von der Rotation (Vektorfeld) ist Null}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad \text{Graßmann-Identität aka BAC-CAB Regel}$$

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\Delta f \Delta g + f\Delta g$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{\mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad \text{Weber-Transformation } ^{15}$$

## 1.5 Wir Taylorn alles was geht

### 1.5.1 Allgemein

Taylor an der Stelle  $a$  in einer Dimension:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (1.5.1)$$

Einmal in 1-D bis zur 2. Ordnung vorgerechnet:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (1.5.2)$$

Mehrdimensionale Taylorentwicklung:

$$f(\mathbf{x}) = e^{(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \cdot \nabla} f(\mathbf{a}) \quad e^x = \sum_n \frac{1}{n!} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \sum_n \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n \cdot \nabla^n}{n!} \cdot f(\mathbf{a}) \quad (1.5.3)$$

Mehrdimensionale Taylorentwicklung mit [Jacobi- und Hesse-Matrix](#):

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a}) (\mathbf{x}-\mathbf{a}) \quad (1.5.4)$$

In n-Dimensionen bis 2. Ordnung :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^i - a^i) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a})(x^i - a^i)(x^j - a^j) + \mathcal{O}(3) \quad (1.5.5)$$

Beispiel in 2-D bis 2. Ordnung:

$$f(x, y) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x} \cdot (x - a_x) + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y} \cdot (y - a_y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x^2} \cdot (x - a_x)^2 \quad (1.5.6)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial y^2} \cdot (y - a_y)^2 + \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x \partial y} \cdot (x - a_x)(y - a_y) + \mathcal{O}(3) \quad (1.5.7)$$

Bei Symmetrietransformationen  $q(t) \rightarrow q(t+\varepsilon)$  Taylorn wir  $q(t+\varepsilon)$  an der Stelle t:

$$q(t + \varepsilon) = q(t) + q'(t)(t + \varepsilon - t) + \mathcal{O}(t^2) = q(t) + \varepsilon q'(t) \quad (1.5.8)$$

Das hat Hebbie zum Beispiel auch bei der Herleitung vom Noether Theorem gemacht.

---

<sup>15</sup>die brauchen wir für die Herleitung der Bernoulli-Gleichung aus Navier-Stokes (Blatt 11.1)

## 1.6 Tensoranalysis (Tensor Calculus)

[YouTube Videos dazu](#)

### 1.6.1 Was ist ein Tensor?

Ein Tensor ist ein mathematisches Objekt, das aus Komponenten  $a_{123\dots n}$  bzw.  $a_{ijk\dots}$  und Basisvektoren besteht. Tensoren haben die Eigenschaft, dass sie invariant unter Koordinatentransformationen sind, d.h. die Komponenten und Basisvektoren (also die Art, wie wir den Tensor beschreiben) ändern sich, aber das Objekt selbst bleibt unverändert.

Der **Rang p** eines Tensors sagt uns, wie viele Indizes - also wie viele Basisvektoren wir pro Komponente brauchen, um das ganze zu beschreiben. Die **Dimension d** des Raums, in dem wir uns befinden sagt uns, wie viele Komponenten wir insgesamt brauchen, nämlich  $d^p$  Stück.

Ein typischer Rang 0 Tensor wäre z.B. die Temperatur an einem Ort. Sie ist ein Skalar und braucht deshalb 0 Basisvektoren, um sie zu beschreiben, und sie ist gleich, egal mit welchen Koordinaten ich den Ort beschreibe.

Ein Rang 1 Tensor kann durch einen Vektor beschrieben werden. Ich brauche einen Basisvektor für jede Richtung. Die Dimension des Raums sagt mir jetzt, "wie viele Richtungen" es gibt, also wie viele Komponenten der Tensor im Endeffekt hat. Z.B. Strecken auf einer flachen Landkarte im  $\mathbb{R}^2$  werden mit den Basisvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  beschrieben. Dann besteht der Tensor aus 2 Komponenten und 2 Basisvektoren, z.B.  $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ . Ich kann aber meine Landkarte auch in Polarkoordinaten anordnen, dann habe ich die Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  und meine Strecke wird beschrieben durch  $r\mathbf{e}_r + \varphi\mathbf{e}_\varphi$ . Die Strecke zwischen zwei Punkten bleibt dieselbe, nur die Komponenten ändern sich, wenn ich die Koordinaten hin- und herwechsel.

Dasselbe geht auch im  $\mathbb{R}^3$ . Hier kann ich einen Rang 1 Tensor, wenn jede Komponente einen Basisvektor braucht, nur jetzt gibt es eben 3<sup>1</sup> Komponenten:  $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ .

Ein Rang 2 Tensor ist z.B. der Trägheitstensor oder der Spannungstensor. Der Spannungstensor besteht aus Komponenten  $\sigma_{ij}$ , wobei uns  $i$  sagt in welche Richtung die Fläche orientiert ist, an der eine Kraft wirkt und  $j$  in welche Richtung die Kraft wird, z.B. ist  $\sigma_{xx}$  eine Zugkraft in Richtung der Fläche senkrecht zur x-Achse, die genau an dieser Fläche wirkt, und  $\sigma_{yx}$  eine Scherkraft, die an der Fläche senkrecht zur y-Achse in x-Richtung wirkt. Diese Kräfte wirken zwar in dieselbe Richtung, können aber nicht addiert werden, da sie ganz unterschiedlicher Natur sind und von unterschiedlichen Größen abhängen. Analog sagt uns die Komponente  $I_{ij}$  des Trägheitstensors die Trägheit bezüglich der  $i$ -Achse, wenn das Objekt um die  $j$ -Achse rotiert wird. Trägheitstensoren sind besonders, weil sie immer symmetrisch sind und  $I_{ij} = I_{ji}$  ist und man sie deshalb immer diagonalisieren kann und es am Ende nur noch  $I_i$  gibt, aber das ist im Allgemeinen bei Tensoren nicht der Fall!

Wir sehen, Rang 2 Tensoren kann man mit einer Matrix beschreiben. Sie sind aber mehr als nur Matrizen, sie sind Matrizen kombiniert mit Basisvektoren, d.h. man muss immer die Parametrisierung mit angeben. Eine "richtige" Tensor-Komponenten würde man dann so schreiben:  $\sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und explizit im  $\mathbb{R}^3$ :  $a_{xx}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + a_{xy}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + a_{xz}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + a_{yx}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + a_{yy}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + a_{yx}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + a_{zx}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x + a_{zy}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y + a_{zz}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ .

## 1.7 Variationsrechnung

Bisher haben wir wahrscheinlich das Prinzip der Variationsrechnung verstanden. Wir stellen uns eine Trajektorie vor, und variieren diese ein kleines bisschen, um zu gucken, wie sie sich verhält, und welche Eigenschaften dieser Trajektorie sich ändern (zum Beispiel der Weg, die Zeit, die Arbeit, usw.).

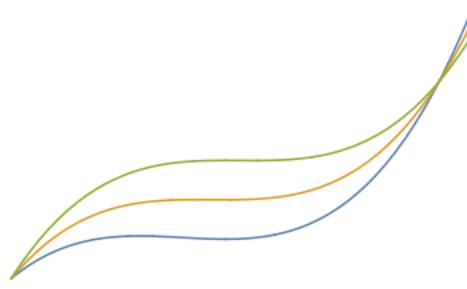


Abbildung 1.1: Funktionen die ein bisschen anders sind lol

### 1.7.1 Funktionale

Hauptfiguren der Variationsrechnung sind die sogenannten Funktionale. Ein Funktional nimmt eine Funktion  $y$  und wertet sie unter spezifischen Bedingungen aus, um eine reelle Zahl zu erhalten. Wir können beispielsweise ein Funktional bilden, das die Weglänge auf einer Trajektorie zwischen zwei Punkten angibt. Besonders interessant sind für uns Integrale der Form

$$F[y] = \int_{y_a}^{y_b} dx f(y(x), y'(x), x) \quad (1.7.1)$$

### 1.7.2 Extremalisierung von Funktionalen

Wenn eine *Funktion*  $y$  an der Stelle  $x_0$  ein Extremum bzw. einen Sattelpunkt hat, dann ist die Ableitung an dieser Stelle gleich 0. Diese Stellen sind für uns ganz nützlich, denn dort können wir zum Beispiel in der Physik stabile Potentialminima einer Funktion finden. Es sind im Allgemeinen halt besondere Stellen. Was heißt es aber, eine Extremstelle bzw. stationäre Stelle eines Funktionals zu finden, und wie machen wir das?

Wir machen es anhand der vorhin gegebenen Form:

$$F[y(x)] \equiv \int_0^1 dx f(y, y', x) \quad (1.7.2)$$

Für die nächste Herleitung nehmen wir an, dass wir schon das Extremum kennen, und zwar wird das Funktional durch eine Funktion  $y_0$  *extremalisiert*. Das können wir so definieren, selbst wenn wir nicht wissen, wie die Funktion  $y_0$  aussieht. Wenn wir schon  $y_0$  kennen, dann können wir es in das Funktional einsetzen und nochmal schauen, dass es tatsächlich das tut, was wir von ihm erwarten.  $\delta y$  ist eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion mit  $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$ , sodass

$$y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \delta y \quad |a \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (1.7.3)$$

Also was geht hier los: Wir wollen zeigen, dass der Wert des Funktionals größer wird, wenn wir unsere Funktion  $y_0$  *variieren* - also ein kleines Stück  $\alpha \delta y$ , addieren. Wir haben

gefordert, dass  $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$ , sodass die *Variation*  $y_\alpha$  mit den Randbedingungen übereinstimmt.

Dann ist unsere Abbildung

$$g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.7.4)$$

$$\alpha \mapsto g(\alpha) = F[y_\alpha] \quad (1.7.5)$$

und diese Abbildung muss ein Extremum bei  $\alpha = 0$  haben, denn nach Definition ist nach  $y_0$  gesucht. Dann wäre logischerweise, wenn wir analog zu der Bestimmung von Extrema in Funktionen fortfahren, die "Ableitung" des Funktionales an der Stelle  $\alpha = 0$  auch 0. Das ist aber eine eher umgangssprachliche und fachlich nicht korrekte Ausdruckweise für das was wir eigentlich machen<sup>16</sup>. Was wir tatsächlich machen ist, wir leiten die Funktion  $g(\alpha)$  ab, die das Funktional an einer spezifischen Stelle  $\alpha$  auswertet. Das ist nicht mehr ein komisches Objekt, von welchem wir gerade noch nicht genau wissen, wie es sich verhält, sondern eine ganz normale Funktion.

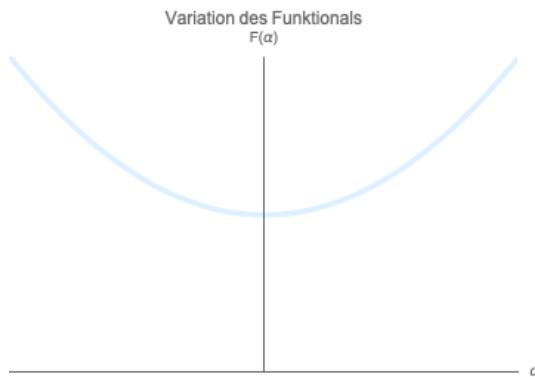


Abbildung 1.2: Funktional in Abhängigkeit von  $\alpha$

$$F[y_a] = \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \quad (1.7.6)$$

$$= \int_0^1 dx f(y_0 + 0 \cdot \delta y, y'_0 + 0 \cdot \delta y', x) + \text{Term erster Ordnung} + O(\alpha^2) \quad (1.7.7)$$

Mit dem ersten Glied unserer Taylor-Reihe haben wir keine Probleme, das ist doch die Definition unseres Funktionals  $F[y_0]$ . Aber beim nächsten bekommen wir einige Probleme. Was ist überhaupt die Ableitung eines Funktionals??

Dazu machen wir zwei kleine Einschübe: Die verallgemeinerte Kettenregel und die Vertauschung von Integration und Differentiation, welche im Abschnitt zum gleichnamigen Thema 1.2.2 ein bisschen ausführlicher behandelt wurde.

### Einschub 1. Verallgemeinerte Kettenregel

Um Notationskopfschmerzen zu verhindern<sup>a</sup> beschränken wir uns auf eine Funktion  $f$  in Abhängigkeit von 3 Variablen,  $y, y', x$ . Wenn wir diese Funktion ableiten woll-

<sup>16</sup>Danke Joris!

ten, und zwar nicht partiell nach nur einer dieser Variablen, dann müssen wir die *verallgemeinerte Kettenregel*<sup>b</sup> benutzen. Allgemein hat sie die Form:

$$\frac{df(g_1(t), \dots, g_n(t))}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_k} g'_k(t) \quad (1.7.8)$$

Aber wir gucken uns konkret den Fall  $f(y(t), y'(t), x(t))$  an:

$$\frac{df(y, y', x)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (1.7.9)$$

Das ist nämlich die totale Ableitung unserer Funktion, es werden alle  $t$ -abhängige Terme und ihre Änderungsrate aufaddiert, im Gegenteil zu der partiellen Ableitung nach  $t$ , die alle implizite  $t$ -Abhängigkeiten vernachlässigt.

<sup>a</sup>möglichst

<sup>b</sup>Danke Clara H.

## Einschub 2. Vertauschung von Differentiation und Integration, Erinnerung

Wenn wir ein Integral was nach der Variable  $t$  integriert haben, dann können wir dahin eine Variable  $x$  parametrisieren, sodass die Funktion

$$F(x). = \int_a^b f(x, t) dt \quad (1.7.10)$$

stetig ist, und so dass wenn wir diese Funktion  $F$  ableiten, dann können wir die Ableitung in das Integral hineinziehen.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt \quad (1.7.11)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \quad (1.7.12)$$

Wenn wir diese Regel für unser Funktional anwenden möchten, dann müssen wir genau den oben erwähnten Trick benutzen.

### What did Hebbie do?

$$g(\alpha) \equiv F[y_\alpha] = \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \quad \left| \frac{d}{d\alpha} \right. \quad (1.7.13)$$

$$\frac{d}{d\alpha} g(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \quad (1.7.14)$$

$$= \int_0^1 dx \frac{\partial f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x)}{\partial \alpha} \quad \left| y \equiv y_0 + \alpha \delta y; y' \equiv y'_0 + \alpha \delta y'; x \equiv x \right. \quad (1.7.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (1.7.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \quad (1.7.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \quad (1.7.18)$$

$$= \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) \quad (1.7.19)$$

Eins, das wir das geklärt haben, kommen wir zum ursprünglichen Problem, die Taylor-Reihe unseres Funktionals:<sup>17</sup>

$$F[y_a] = F[y_0] + \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \alpha \delta y' \right) + O(\alpha^2) \quad (1.7.20)$$

Wir wissen aber nach unserer Annahme, dass die erste Ableitung des Funktionals verschwindet, also muss der lineare Anteil auch gleich 0 sein.

### What did Hebbie do?

$$0 = \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) \quad \left| \int_a^b fg' dx = fg|_a^b - \int_a^b f'g dx \right. \quad (1.7.21)$$

$$= \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right) + \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_0^1 - \int_0^1 dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \quad | \delta y(1) = \delta y(0) = 0 \quad (1.7.22)$$

$$= \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \right) \quad (1.7.23)$$

$$= \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y \quad (1.7.24)$$

Als erstes merken wir, dass wir den **zweiten Summand** partiell integrieren können. Nach dem Einsetzen in der Formel merken wir zusätzlich, dass der erste Term vom Integral  $\left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right)$  verschwindet, denn wir genau in den Grenzen keine Variation haben. Mit der letzten Gleichung kommen wir nun zur Schlussfolgerung, dass entweder  $\delta y$  oder  $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$  gleich 0 sein sollen, und da nach unserer Annahme  $\delta y$  nicht 0 ist wohl:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.7.25)$$

Das ist die ganz schöne *Euler-Lagrange-Gleichung*, oder *Eulersche-Differentialgleichung*. Wenn wir mit dem Vergleich zur normalen Analysis machen, dann werden wir uns vielleicht uns an eine Stelle erinnern, wo wir eine ähnliche Entwicklung gefunden haben: Der

---

<sup>17</sup>Come on, wir wissen doch dass  $f$  von  $y_0, y'_0, x$  abhängt, warum muss die Notation so verwirrend sein

Schritt von Gleichungen auf Differentialgleichungen. Auf einmal war die Lösung einer Gleichung keine Zahl mehr, kein konkretes  $x$ , sondern sind wir eine Stufe höher gegangen und mussten eine Funktion bestimmen. Jetzt sind wir gerade auch auf einer höheren Stufe, wir behandeln keine Funktionen, sondern Funktionale, und es ist logisch, dass, um diese Funktionale zu lösen uns die normalen traurigen Zahlen nicht mehr genügen. Differentialgleichungen sind jetzt die Sidekicks der Funktionale in der Variationsrechnung.

⇒ Aufgaben dazu

## 1.8 Homogene Funktionen und Satz von Euler

Homogene Funktionen sind Funktionen, die folgende Bedingung erfüllen:

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.8.1)$$

wobei  $\alpha$  ein beliebiger Faktor und  $k$  der "Grad" der Funktion ist.

### Beispiel 6

Einige Beispiele sind in der Physik sind:

1.

$$f(x) = x^p \quad (1.8.2)$$

$$f(\alpha x) = (\alpha x)^p \quad (1.8.3)$$

$$= \alpha^p x^p \quad (1.8.4)$$

$$\rightarrow k = p \quad (1.8.5)$$

2.

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{Erklärung hier} \quad (1.8.6)$$

$$\dots \quad (1.8.7)$$

$$\rightarrow k = 2 \quad (1.8.8)$$

3. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist homogen in drei Argumenten,  $L, q$  und  $t$ :

$$0 = \frac{\partial \alpha \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \alpha \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (1.8.9)$$

$$= \alpha^1 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \quad (1.8.10)$$

$$\rightarrow k_L = 1 \quad (1.8.11)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d \alpha q}{dt}} \quad (1.8.12)$$

$$= \alpha^{-1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \quad (1.8.13)$$

$$\rightarrow k_q = -1 \quad (1.8.14)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq}{dt}} \quad (1.8.15)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (1.8.16)$$

$$\rightarrow k_t = 0 \quad (1.8.17)$$

Nach dem Satz von Euler hilft uns die Homogenität die totale Ableitung einer Funktion sehr leicht zu bestimmen. Zunächst ist  $f$  eine homogene Funktion vom Grad  $k$ :

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k \cdot f \quad (1.8.18)$$

Das wird später besonders hilfreich sein.

## 1.9 Differentialformen

### 1.9.1 Motivation

Als kurze Motivation zu dem, was wir mit den Differentialformen erreichen möchten gehen wir zu einem Thema zurück, welchem wir schon in Mathe und in Theo 1 mal begegnet sind. Das wollen wir zunächst nur in Erinnerung behalten, aber explizit werden wir erst später dazu kommen, es erklären zu können. Wir werden aber sofort erkennen, dass diese Werkzeuge besonders nützlich sein können.

Dafür gucken wir uns die folgenden 3 besonderen Beispiele an und versuchen da irgendeinen Muster zu erkennen:

$$\int_a^b f(t) dt = [F]_a^b \quad (1.9.1)$$

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{F} df = \oint_C \mathbf{F} ds \quad (1.9.2)$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \oint_A \mathbf{F} df \quad (1.9.3)$$

Naja, auf der linken Seite haben wir immer eine Differentialoperation, entweder  $df$ ,  $\nabla \times \mathbf{F}$  oder  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  und auf der rechten Seite steht nur die Funktion oder das Vektorfeld, worauf diese Differentialoperation wirkt alleine. Andererseits können wir merken, dass wir immer bei der Integration von der linken auf die rechten Seite eine Dimension verlieren. Wir integrieren mal über eine Kurve und setzen nur 2 Punkte rein (1.9.1), dann integrieren wir über eine Fläche und auf der anderen Seite über eine Kurve (1.9.2) und zum Schluss über ein Volumen und auf der anderen Seite über eine Fläche (1.9.3). Wenn wir super frisch wären, könnten wir sofort ohne jegliche Beweise annehmen, dass wir diese ganzen, bisher für uns unterschiedlichen Sätze verallgemeinern können als:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (1.9.4)$$

Dabei bezeichnet  $\omega$  alles was auf der rechten Seite im Integral drin liegt, und  $d\omega$  stellt irgendwie dieses Differentialoperator dar. Außerdem integrieren wir zuerst über den Rand einer "Mannigfaltigkeit" und dann über ihren Rand  $\partial M$ . Das können wir aber nicht ohne weiteres feststellen, aber es dient als etwas konkretes, wonach wir streben können.

Diese Differentialformen helfen um Konzepte wie den Fluss, oder die Arbeit eines Körpers durch eine Fläche oder entlang eines Weges auch auf höhere Dimensionen zu übertragen, selbst in unserem Beispiel mit 3 Dimensionen sind wir immer abstrakter geworden. In der Physik ist der Hamilton-Formalismus auch zu tiefstem in Differentialformen geschrieben.

## 1.9.2 Differentialformen

### Mannigfaltigkeiten

Eine Mannigfaltigkeit ist ein eher komisches mathematisches Objekt, für uns reicht es aber die Essenz zu verstehen. Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Körper, dessen Oberfläche *lokal* wie der euklidische Raum aussieht.

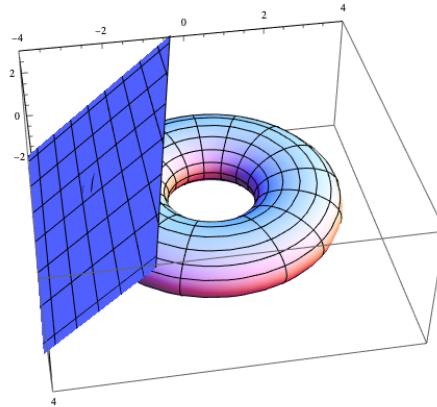


Abbildung 1.3: Torus mit Tangentialraum

So können wir beispielsweise einen Torus, eine Sphäre, oder irgendwelche andere "Flächen" oder topologischen Räume finden, die, wenn wir sie in der Nähe von einem Punkt untersuchen, wie der euklidische Raum aussehen. An der Sphäre kann man auch diese Eigenschaft über den euklidischen Raum erkennen, die ganze Oberfläche einer Sphäre hat nicht die gleiche Form wie der euklidische  $\mathbb{R}^2$ , aber lokal schon. Die Erde sieht ja von unserer Perspektive als Menschen auch flach aus. Insbesondere können wir eine Sphäre auf 2 Karten projizieren, sodass jeder Punkt der Sphäre mit einem Punkt in  $2 \mathbb{R}^2$  identifiziert sein kann.

Untermannigfaltigkeiten sind eine Teilmenge von einer Mannigfaltigkeit und es ist bequemer mit diesen zu rechnen, aber die Details waren für die Vorlesung nicht relevant

genug.

### Tangential- und Cotangentialraum

Der Vektorraum, mit welchem wir dann die Umgebung von Punkten einer Untermannigfaltigkeit approximieren können ist der Tangentialraum, genauso wie eine Tangente eine Funktion in der Nähe des Berührungs punktes approximieren kann. Das funktioniert natürlich nur in der Nähe des Punktes. Noch allgemeiner ist der Tangentialraum der Raum, in welchem sich alle möglichen Geschwindigkeiten an einem Punkt befinden. Sagen wir, wir sind ein Teilchen beschränkt auf einer Sphäre und wir können uns so schnell oder langsam auf dieser Oberfläche bewegen wie wir wollen; allerdings, kann wegen der Geometrie der Sphäre unsere Geschwindigkeit nicht in jede beliebige Richtung zeigen. Sie kann zum Beispiel nicht direkt nach oben zeigen, dann würden wir aus der Sphäre rauskommen. Mit dem Tangentialraum ordnet man also einen einzigen Punkt einem ganzen Vektorraum zu.

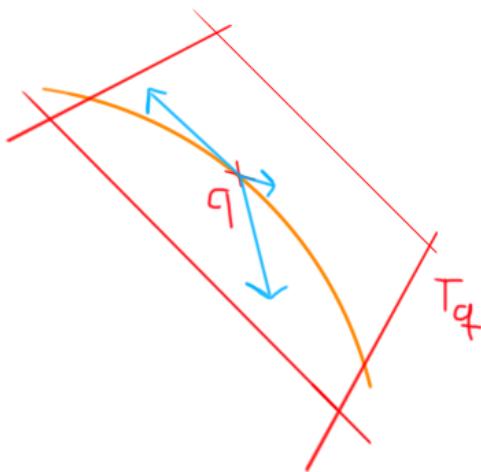


Abbildung 1.4: Tangentialraum am Punkt  $q$

Über Vektorräume haben wir in LA I einige Sachen gelernt, die wir gerade gerne zurück in Erinnerung bringen würden, und zwar hat jeder Vektorraum

1. eine Basis und
2. einen Dualraum.

Zu 1 können wir uns leicht aus der Vorstellung über die Geschwindigkeiten im Tangentialraum überlegen, dass er irgendwie mit den Ableitungen zu tun hat. In der Tat kann man diesen Vektorraum durch die "partiellen Ableitungen" bilden, denn als Linearkombination dieser können wir jeden Punkt im Tangentialraum bilden. In der Tat sind es nicht die "partiellen Ableitungen" sondern nur die Namen, den wir die Basiselemente geben, aber sagen wir mal es gibt einen Grund, weshalb wir diese Elemente so benennen.

$$B = \left\{ \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \quad (1.9.5)$$

Am Beispiel einer Sphäre im 3-dimensionalen Raum, das ist also eine 2-dimensionale Fläche ist der Tangentialraum ebenfalls 2-dimensional. Das heißt wir brauchen nur zwei Vektoren um eine Basis zu bilden.

Zu [2](#) wissen wir ebenfalls aus LA I<sup>18</sup>, dass die linearen Funktionalen  $\varphi_i$ , die eine Basis von  $\mathbb{V}^*$  bilden, definiert werden durch:

$$\varphi_i(v_j) := \delta_{ij} \quad (1.9.6)$$

In unserem Fall gilt also

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \equiv dx^i(\partial_j) = \delta_j^i \quad (1.9.7)$$

$$B^* = \{dx^i\} \quad (1.9.8)$$

Bisher ist das eine reine Definition. An dieser Stelle haben wir noch keine Ahnung was diese linearen Funktionalen machen, also können wir noch nicht versuchen zu erklären, wieso die obige Rechnung eigentlich gilt. [HEY]

Wir nennen die Elementen im Tangentialraum ( $T_q M$ ) (bzw. ab jetzt nur  $T_q$ ) die Vektoren  $v(x)$  welche als Linearkombination der Basis als  $v = v^j \partial_j$  geschrieben werden können. Die Elementen des Cotangentialraums  $T_q^*$  sind die Covektoren  $\omega = \omega_i dx^i$ <sup>19</sup>. Eine wahrscheinlich naive, aber für mich nützliche Interpretation des Tangential- und Cotangentialraums ist, dass der Tangentialraum der Platz unserer Geschwindigkeiten ist, und im Cotangentialraum befinden sich Werkzeuge, mit welchen wir unsere Geschwindigkeiten ausnutzen können<sup>20</sup>. Wenn wir einen Covektor auf einen Vektor anwenden passiert folgendes:

$$\omega(v) = \omega_i dx^i(v^j \partial_j) \quad (1.9.9)$$

$$= \omega_i v^j dx^i \partial_j \quad (1.9.10)$$

$$= \omega_i v^j \delta_j^i \quad (1.9.11)$$

$$= \omega_i v^i \quad (1.9.12)$$

## 1-Formen

Wir brauchen einen Weg um eine "Kommunikation" zwischen dem Tangential- und dem Cotangentialraum zu etablieren. Dafür finden wir die sogenannten "1-Formen" besonders nützlich. Solche Objekte nehmen einen Punkt  $q \in M$  und ordnen diesem genau einem Element im Cotangentialraum zu. Wir wissen aus LA I, dass solche Funktionen, die einen Vektorraum  $\mathbb{V}$  und seinen Dualraum  $\mathbb{V}^*$  "verbinden" per Definition linear sind. Der Dualraum ist ja der Raum der "linearen Funktionale" von  $\mathbb{V}$ , und das ist schon die erste wichtige Eigenschaft der 1-Formen. Formen sind im wesentlichen multilinear Abbildungen, aber wir fordern, dass sie bestimmte Bedingungen zusätzlich erfüllen

Eine 1-Form ist eine einfache lineare Abbildung. Insbesondere sind 1-Formen Abbildungen, die einem Punkt  $q \in M$  zu einem Element im Cotangentialraum führen.<sup>2122</sup>

$$\omega : M \rightarrow T^* \quad (1.9.13)$$

<sup>18</sup>Sonst gucke es im Internet nach oder siehe meine LA I Zusammenfassung

<sup>19</sup>Diese Schreibweise sollte uns daran erinnern, dass man jeden Element eines Vektorraums als lineare Kombination der Basiselemente bilden kann.

<sup>20</sup>Aber korrigiere mich, falls diese Vorstellung falsch oder unsinnig ist

<sup>21</sup>Technisch gesehen braucht die Notation  $(T_q^* M) = (T_q M)^*$  eine ausführlichere Erklärung, weil es nicht eine reine "Kosmetisierung" des Symbols ist, sondern sind es in der Tat zwei verschiedene Dinge. Es funktioniert aber in diesem Fall. Da ich sowieso für Lesbarkeit auf das hinzufügen des  $M$  bei  $T_q M$  verzichte, werde ich auch nicht tiefer ins Thema rein gehen.

<sup>22</sup>Kommentar: Die folgende Definition ist mathematisch korrekter, aber ein bisschen beyond our pay-

$$q \mapsto \omega(q) \in T_q^* \quad (1.9.14)$$

Die Eigenschaften dieser 1-Formen sind genau die, die wir von ganz normalen linearen Abbildungen erwarten:

$$(\omega_1 + \omega_2)(q) = \omega_1(q) + \omega_2(q) \quad (1.9.15)$$

$$(\lambda\omega)(q) = \lambda\omega(q) \quad (1.9.16)$$

Um in ein etwas konkreteres Beispiel über zu gehen sehen wir uns das besondere Fall einer Form: Zu jeder Funktion gehört nämlich eine spezielle 1-Form und wir nennen sie  $\omega = df = \omega_i dx^i$ . Hier sind die  $\omega_i$  die partielle Ableitungen von  $f$  nach den jeweiligen  $x^{i23}$

$$\omega = df \quad (1.9.17)$$

$$= \omega_i dx^i \quad (1.9.18)$$

$$= \partial_i(f) dx^i \quad (1.9.19)$$

und

$$df(v) = \partial_i(f)v^i \equiv D_v f \quad (1.9.20)$$

An dieser Stelle kriegen wir vielleicht einen kleinen Aha-Moment, wenn wir zurück an die Motivation denken, wir hatten uns ja "überlegt", dass wir irgendeinen Ausdruck der Form

$$\int_{\partial M} df = \int_{\partial M} \omega \quad (1.9.21)$$

schreiben könnten, und das haben wir hier tatsächlich gefunden. Insbesondere merken wir auch sofort, dass

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int df = f \quad (1.9.22)$$

Hoffentlich hilft das ein bisschen als Erinnerung, dass wir wirklich ein konkretes Ziel verfolgen, und nicht nur aus Spaß magische Tensor-Objekte und Formen einführen.

## p-Formen

Es gibt aber auch Formen höheren Grades, die sich nicht so schön verhalten wie die 1-Formen. Nämlich wollen wir jetzt verschiedene  $dx^i$  nach einander anordnen. Ebenfalls gilt für Formen höherer Ordnung die Linearität, es ist aber in diesem Fall nicht einfach Bilinearität oder Multilinearität gefordert, sondern spezifisch sind Formen total antisymmetrisch.

---

grades. Nämlich wird  $\omega : M \rightarrow T^*$  abgebildet,  $T^*$  ist das sogenannte Cotangentialbündel, die Vereinigung aller Cotangentialräumen. Aber das Objekt  $\omega(q)$  lebt doch im spezifischen  $T_q^*$ . Das soll aber nicht vom Wesentlichen ablenken, und zwar was wir wie mit diesen Formen machen können. Bleiben wir am Beispiel der Sphäre und ihre Tangentialräume: Wenn wir alle möglichen Tangentialräume vereinen, dann kommt das ganze  $\mathbb{R}^3$  raus. Danke Philipp!

<sup>23</sup>Den Ana-Leute fällt die folgende Definition wahrscheinlich auf, nämlich sieht (1.9.20) genau wie die Definition der Richtungsableitung unter Voraussetzung, dass  $f$  in jedem Punkt der offenen Menge differenzierbar ist. Sie lautet:  $D_v f = \nabla f \cdot v = \partial_i(f)v^i$ . Sonst lese es im Internet nach oder schlage kurz Ana II Zusammenfassung, 1.3.2: Differenzierbarkeit

### Einschub 3. Tensorprodukt

Da wir aber mit diesen komischen Objekten namens Tensoren arbeiten, müssen wir beachten, dass wir die übliche Notation nicht benutzen dürfen. Produkte zwischen Tensoren sind also nicht mehr mit  $\cdot$  bezeichnet, sondern mit  $\otimes$  für das, was man als Tensorprodukt bezeichnet. Im englischen wird dieses Produkt  $\otimes$  "Outer Product" bezeichnet. Wir sollten uns aber nicht von dieser neuen Notation ablenken lassen. Das Tensorprodukt<sup>a</sup> zwischen zwei Vektoren, bzw. Covektoren oder wtv. ergibt dann eine Matrix, und wir können es für zwei Elementen  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$  und  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$  wie folgt berechnen:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{bmatrix} \quad (1.9.23)$$

Wir behalten diese Tatsache im Kopf, aber achten für die Rechnung nur an das wichtige auf, und zwar die Indexnotation:  $u_i v_j$ .

Für die höheren Formen interessiert uns aber nicht dieses Tensorprodukt (Outer Product), sondern ein anderes Tensorprodukt (Exterior Product):  $\wedge$ . Das letztere nennen wir Wedge-Produkt, aber es ist auch unter "Äußeres Produkt" zu finden. Es wird aber ein bisschen verwirrend wenn man einen "outer" und "exterior" product hat. Das Wedge-Produkt funktioniert im Prinzip wie das Tensorprodukt, aber zusätzlich mit der Eigenschaft, dass es antisymmetrisch ist.

<sup>a</sup>Vorsicht, im Folgenden beschreibe ich den "Outer Product", *nicht* den "Exterior Product"

Ähnlich wie bei den 1-Formen, befinden sich die  $p$ -Formen  $\omega^p$  im Cotangentialraum, oder besser gesagt, im Tensorprodukt des Cotangentialraums  $p$ -Mal mit sich selbst. Wir können also eine sehr ähnliche Überlegung jetzt zur Basis und zur dualen Basis führen.

$$\omega^p : M \rightarrow \underbrace{T_q^* \otimes \cdots \otimes T_q^*}_{p\text{-Mal}} \quad (1.9.24)$$

$$q \mapsto \omega^p(q) \quad (1.9.25)$$

$$B^* = \{\underbrace{dx^i \otimes \cdots \otimes dx^j}_{p\text{-Mal}}\} \quad (1.9.26)$$

Für die Basis des Tangentialraums ist die gleiche Überlegung wie vorher gültig, wir definieren nun

$$B = \{\underbrace{\partial_i, \dots, \partial_j}_{p\text{-Mal}}\} \quad (1.9.27)$$

Die Anwendung einer  $p$ -Form auf einen Vektor im Tangentialraum erfolgt "komponentenweise", das heißt, man nimmt den ersten Eintrag der Form und wendet sie auf den

ersten Eintrag des Vektors, dann multipliziert man sie mit den nächsten usw.<sup>24</sup>:

$$\omega^p(v) = (\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^k)(\partial_i, \partial_j, \dots, \partial_k) \quad (1.9.28)$$

$$= \mathrm{d}x^i \partial_i \cdot \mathrm{d}x^j \partial_j \cdot \dots \cdot \mathrm{d}x^k \partial_k \quad | \mathrm{d}x^i \partial_j = \delta_j^i \quad (1.9.29)$$

$$= \delta_i^i \cdot \delta_j^j \cdot \dots \cdot \delta_k^k \quad (1.9.30)$$

Die Formen, die uns aber besonders interessieren sind wegen der Forderung, dass sie total antisymmetrisch sind besonders. Diese sind natürlich  $p$ -multilinear und bei Vertauschung zweier benachbarter Indizes ändern sie ihr Vorzeichen. Dafür ist es dann sehr bequem das Wedge-Produkt zu benutzen, weil diese Operation selbst total antisymmetrisch ist.

#### Einschub 4. Wedge-Produkt

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \quad (1.9.31)$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \quad (1.9.32)$$

Für das Wedge-Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  erhalten wir

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9.33)$$

Es wird oft bequem sein, sich das Wedge-Produkt als die Determinante einer Matrix vorzustellen, das können wir auch informell durch Rechnung zeigen. Es gilt nur falls die Anzahl der Wedge-Produkte mit der Dimension unserer Vektoren übereinstimmt. Seien  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ , dann ist das Wedge-Produkt:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + u^3 \mathbf{e}_3) \wedge (v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3) \quad (1.9.34)$$

$$= u^1 \mathbf{e}_1 \wedge v^2 \mathbf{e}_2 + u^1 \mathbf{e}_1 \wedge v^3 \mathbf{e}_3 + u^2 \mathbf{e}_2 \wedge v^1 \mathbf{e}_1 \quad (1.9.35)$$

$$+ u^2 \mathbf{e}_2 \wedge v^3 \mathbf{e}_3 + u^3 \mathbf{e}_3 \wedge v^1 \mathbf{e}_1 + u^3 \mathbf{e}_3 \wedge v^2 \mathbf{e}_2$$

$$= (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (u^3 v^1 - u^1 v^3) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (u^2 v^3 - u^3 v^2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (1.9.36)$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (u^1 v^2 - u^2 v^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (w^1 \mathbf{e}_1 + w^2 \mathbf{e}_2 + w^3 \mathbf{e}_3) \quad (1.9.37)$$

$$+ (u^3 v^1 - u^1 v^3) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge (w^1 \mathbf{e}_1 + w^2 \mathbf{e}_2 + w^3 \mathbf{e}_3)$$

$$+ (u^2 v^3 - u^3 v^2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge (w^1 \mathbf{e}_1 + w^2 \mathbf{e}_2 + w^3 \mathbf{e}_3)$$

$$= (u^1 v^2 w^3 - u^2 v^1 w^3) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (1.9.38)$$

$$+ (u^3 v^1 w^2 - u^1 v^3 w^2) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

$$+ (u^2 v^3 w^1 - u^3 v^2 w^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

$$= (u^1 v^2 w^3 - u^2 v^1 w^2 + u^3 v^1 w^2 - u^1 v^3 w^2 + u^2 v^3 w^1 - u^3 v^2 w^1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (1.9.39)$$

$$= |\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}| \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (1.9.40)$$

---

<sup>24</sup>Wir machen ein Beispiel ohne  $\omega_i, v^j$  aus Bequemheit

Das Wedge-Produkt  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  war ebenfalls aus Teildeterminanten gebildet, aber da lohnt es sich meiner Meinung nach nicht über diesen Weg zu gehen, weil es ist genauso viel Aufwand wie das normale Nachrechnen, nur muss man sich da mehr Sachen merken.

Eine Form  $\omega^p$  mit  $p = 2$  muss also folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\text{I. } dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (1.9.41)$$

$$\text{II. } (dx^i \wedge c \cdot dx^j) = c(dx^i \wedge dx^j) \quad (1.9.42)$$

$$\text{III. } (dx^i + \widetilde{dx^i}) \wedge dx^j = dx^i \wedge dx^j + \widetilde{dx^i} \wedge dx^j \quad (1.9.43)$$

Daraus können wir über die Gestalt einer Form schon einige wichtige Eigenschaften bestimmen: Wegen der Antisymmetrie gilt:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (1.9.44)$$

Dies ist nur möglich, wenn das Wedge-Produkt einer Form mit sich selbst gleich 0 ist, denn 0 ist die einzige reelle Zahl die zugleich ihre Negative Zahl ist. Allgemein gilt für eine  $\omega^p$  Form:

$$\omega^p(x) = \omega_{ij\dots k} dx^i \otimes dx^j \otimes \dots \otimes dx^k \quad (1.9.45)$$

$$= \frac{1}{d!} \omega_{ij\dots k} dx^i \wedge dx^j \wedge \dots \wedge dx^k \quad (1.9.46)$$

Und spezifisch für eine  $\omega^2$  Form:

$$\omega^2(x) = \omega_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (1.9.47)$$

$$= \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (1.9.48)$$

Zum Beispiel kann jede 2-Form im  $\mathbb{R}^3$  als eine Linearkombination wie folgt dargestellt werden:

$$\omega = f(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 + g(x^1, x^2, x^3) dx^2 \wedge dx^3 + h(x^1, x^2, x^3) dx^3 \wedge dx^1 \quad (1.9.49)$$

Selbst wenn wir am Anfang einen nicht so kompakten Ausdruck dafür haben, können wir ihn auf die oben geschriebene Form bringen. Dabei sind  $f, g, h$  wie diese Konstante  $c$  aus (1.9.42), nur sind sie halt nicht mehr konstant.

Die Anwendung dieser Form auf zwei Vektoren des Tangentialraums  $u = u^k \partial_k, v = v^k \partial_k$  ergibt:

$$\omega^2(u, v) = \omega_{ij} (dx^i u^k \partial_k \cdot dx^j v^k \partial_k) \quad (1.9.50)$$

$$= \omega_{ij} (\delta_k^i u^k \cdot \delta_k^j v^k) \quad (1.9.51)$$

$$= \omega_{ij} u^i v^j \quad (1.9.52)$$

In Matrixschreibweise mit  $\Omega = (\omega_{ij})$  hieße das:

$$= u^T \Omega v \quad (1.9.53)$$

Ein anderer Weg Differentialformen auszudrücken ist durch die Determinante. Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall und dann zeigen wir, dass es für eine 2-Form gilt:

$$\omega^p(v^1, \dots, v^p) = (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \cdot (v^1, \dots, v^p) = \begin{vmatrix} \omega_1(v^1) & \dots & \omega_p(v^1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v^1) & \dots & \omega_p(v^k) \end{vmatrix} \quad (1.9.54)$$

## Äußere Ableitung

Da wir gerade mit "exterior product" und einige weitere Werkzeuge der "exterior algebra" ausleihen, macht es auch Sinn, dass wir mit einer "exterior derivative" gerne arbeiten würden. Die äußere Ableitung  $d$  folgt folgenden Regeln:

1. Ist  $f$  eine 0-Form<sup>25</sup>, dann ist  $df$  das totale Differential von  $f$ <sup>26</sup>.
2.  $d(df) = 0$
3. Ist  $\omega$  eine  $p$ -Form und  $\eta$  irgend eine Form, dann gilt:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \quad (1.9.55)$$

Interessant ist vor allem dieses dritte Merkmal. Stellen wir uns vor, dass  $\eta$  eine 0-Form ist, sowas wie eine Funktion. Wenn eins der beiden Argumenten eines Wedge-Produkts eine skalare Größe ist, dann ist dieser äquivalent zur skalaren Multiplikation. Seien z.B.  $p = 2n$ ,  $f$  eine 0-Form, dann ist

$$d(\omega \wedge f) = d(\omega f) = f \, d\omega + \omega \, df \quad (1.9.56)$$

Waaaait a minute, warum machen wir auch nicht das andere Argument zu einer 0-Form?

$$d(g \wedge f) = f \, dg + g \, df \quad (1.9.57)$$

Ist das nicht etwa wie die Kettenregel für Ableitungen?

Ja aber ok, wie bestimmt man die äußere Ableitung im allgemeinen wäre die nächste sinnvolle Frage. Das ist nicht so schlimm! Es gibt eine eigentlich recht intuitive Formel dafür:

$$d\omega = d(\omega_{ij} dx^i \wedge \dots \wedge dx^p) \quad \text{Benutze 3.} \quad (1.9.58)$$

$$= d\omega_{i\dots p} \wedge (dx^i \wedge \dots \wedge dx^p) + \omega \wedge d(dx^i \wedge \dots \wedge dx^p) \quad (1.9.59)$$

$$= d\omega_{i\dots p} \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^p \quad (1.9.60)$$

$$+ \text{Term mit zu vielen wedges, guck: } \text{Wickerpedia} \quad (1.9.61)$$

$$= \text{d}\omega_{i\dots p} \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^p \quad |\omega_{i\dots p} \text{ ist 0-Form} \quad (1.9.62)$$

<sup>25</sup>Stell dir vor sie hat einfach keine  $dx^i$

<sup>26</sup>Hey das kennen wir!

$$= \frac{\partial \omega_{i \dots p}}{\partial x^q} dx^q \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^p \quad (1.9.63)$$

Dieser Index  $q$  gehört aber nicht zu den alten Indizes, den haben wir aus dem totalen Differential von  $\omega_{ij}$  rausgeholt. Da merken wir sofort, nach dem Ableiten einer  $p$ -Form kommt eine  $p+1$ -Form raus.

### Anschauliche Interpretation

Eine wichtige Vorstellung von Formen ist, zumindest bei 1- und 2-Formen, ist die eines Vektorfeldes. In der Tat kann jeder 1- und 2-Form ein Vektorfeld zugeordnet werden<sup>27</sup>.

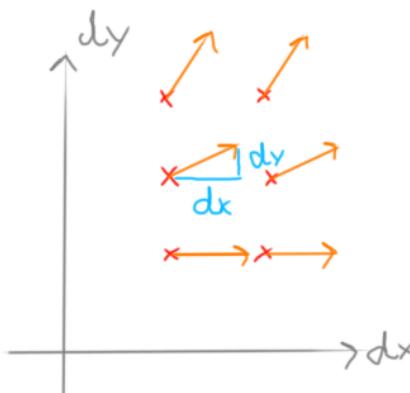


Abbildung 1.5: 1-Form als Vektorfeld

Zur Anschaulichung haben wir hier den Raum  $\mathbb{R}^2$  genommen, aber es gilt genauso für  $\mathbb{R}^3$  und höhere Dimensionen, obwohl die Vorstellung wird um einiges komplizierter.

Für eine 2-Form funktioniert diese Vorstellung auch!

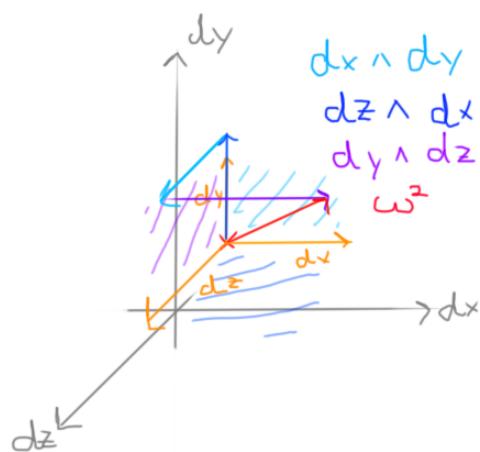


Abbildung 1.6: 2-Form als Vektorfeld

Hier in der Skizze haben wir aber etwas gemacht, was wir vielleicht noch nicht genau verstehen, ich habe so getan, als das Wedge-Produkt von zwei 1-Formen in die Richtung

<sup>27</sup>Wie man das macht weiß ich nicht

der dritten Form zeigt, aber offensichtlich ist  $dx \wedge dy = dz$  eine falsche Aussage, es macht so keinen Sinn das zu formulieren. Die Veranschaulich ist aber ziemlich nützlich. Anschaulich erinnert uns das aber an das Kreuzprodukt, wir nehmen die Fläche, die von zwei Vektoren aufgespannt wird und definieren einen Vektor normal zu dieser Fläche dessen Länge die Fläche entspricht.

Mit einer 3-Form scheitert es aber, und zwar auf einem ähnlichen Grund, weshalb wir ein Volumen nicht als ein Vektor gut darstellen können. Eine 3-Form ist dann wieder ein Skalar.

## Zusammenhang mit Vektoren und Vektorenoperationen

[28](#)

Hier kommen noch einige schmutzige Erklärungen zu der Menge schmutziger Erklärungen bisher hinzu, aber naja. Schmutzige Erklärung wird reichen müssen.

Wir können verschiedene Arten von Räumen miteinander identifizieren. Wir haben es zum Beispiel oft in Analysis mit dem Raum der  $(n \times n)$ -Matrizen und  $\mathbb{R}^{n^2}$  gemacht, bestimmt auch in einige LA Beispiele, aber von dieser Zeit habe ich die meisten Erinnerungen unterdrückt. So können wir auch den Raum der Formen mit dem reellen Raum identifizieren. Wir können uns vorstellen, so wie die  $e_i$  die Basiseinheitsvektoren des  $\mathbb{R}^n$  sind, und die  $dx^i$  die Basiseinheitsvektoren des Cotangentialraums, so können wir auch irgendwelche Beziehung zwischen den beiden verknüpfen. Auf einer naiven, für uns noch unbegründbare Weise stellen wir uns für einige Zwecke die Covektoren  $dx^i$  als die Vektoren  $e_i$ , was uns extrem mit der Vorstellung helfen wird. Mit den Einheitsvektoren haben wir auch eine bessere intuitivere geometrische Interpretation entwickelt als mit den Formen, und wir erkennen zum Beispiel leicht, dass  $e_1 \times e_2 = e_3$ . So stellen wir uns vor, dass  $dx^1 \wedge dx^2 = dx^3$ . In der echten Mathematik braucht man zuerst einige Bedingungen erfüllen, dann einen besonderen Operator (Der Hodge-Stern-Operator), der tatsächlich für 3 Dimensionen das Wedge-Produkt und das Kreuz-Produkt miteinander verbindet.

$$\star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (1.9.64)$$

$$\star dx^3 = dx^1 \wedge dx^2 \quad (1.9.65)$$

Aber das brauchen wir alles nicht.

## Zusammenhang mit Differentialoperatoren

Naja, am Anfang haben wir eine sehr mutige Aussage getroffen, dass sich 3 ganz wichtige unterschiedliche Sätze als eine sehr kleine Zeile zusammenfassen ließen. Jetzt möchten wir auch diese Aussage mit mehr Argumenten unterstützen<sup>29</sup>.

### 1. Fundamentalsatz der Analysis

$$\int_a^b df = f(b) - f(a) \quad (1.9.66)$$

Als erstes müssen wir hier erkennen, das wir auf der linken Seite über eine Kurve integrieren, das heißt eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, und auf der rechten Seite

---

<sup>28</sup>Danke Luka!

<sup>29</sup>Wir beschränken uns auf höchstens  $\mathbb{R}^3$

setzen wir zwei Punkte ein, das heißt zwei 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Es passt zumindest schon von den Dimensionen her. Da  $f$  eine 0-Form ist, lässt sich die äußere Ableitung ziemlich leicht bestimmen.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.9.67)$$

## 2. Satz von Stokes

$$\int_A \operatorname{rot} \mathbf{F} \, df = \oint_C \mathbf{F} \, ds \quad (1.9.68)$$

Wir betrachten nun eine 1-Form, sie hat die Form:

$$\omega = F_1 dx^1 + F_2 dx^2 + F_3 dx^3 \quad (1.9.69)$$

Etwas zu eilig könnten wir vielleicht sagen, dass  $\omega$  genau wie  $\mathbf{F} \, ds$  aussieht, denn in kartesischen Koordinaten ist

$$\mathbf{F} \, ds = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \quad (1.9.70)$$

Der Gedanke dahinter ist nicht schlecht, aber wir möchten ein bisschen vorsichtig mit solchen Sachen sein, weil manchmal kann  $\mathbf{F} \, ds$  anders aussehen, zum Beispiel wenn wir es in Kugel- oder Zylinderkoordinaten betrachten. Die  $\omega$  Form ist aber sehr allgemein, da könnten wir für  $dx^i$  zum Beispiel  $dr, d\varphi, d\theta$  einsetzen, die  $F_i$  auf Kugelkoordinaten anpassen und die Gestalt der Form wäre die gleiche.

Nun muss per unsere Annahme die äußere Ableitung dieser Form eben die Rotation mal ein Flächenvektor  $d\mathbf{A}$  sein, also gucken wir mal:

$$d\omega = d(F_i dx^i) \quad (1.9.71)$$

$$= \partial_q F_i dx^q \wedge dx^i \quad (1.9.72)$$

$$= \partial_2 F_1 dx^2 \wedge dx^1 + \partial_3 F_1 dx^3 \wedge dx^1 + \partial_1 F_2 dx^1 \wedge dx^2 \quad (1.9.73)$$

$$+ \partial_3 F_2 dx^3 \wedge dx^2 + \partial_1 F_3 dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 F_3 dx^2 \wedge dx^3$$

$$= (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) dx^3 \wedge dx^1 \quad (1.9.74)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\operatorname{rot} \mathbf{F})_i dx^j \wedge dx^k \quad (1.9.75)$$

Per unsere sehr schmutzig eingeführte anschauliche Vorstellung, können wir hier interpretieren, dass eben die  $dx^i \wedge dx^j$  Formen der orientierten Fläche des Parallelogramms was zwischen diesen aufgespannt wird entsprechen. Wir merken auch, dass dieses Ergebnis komponentenweise mit dem der Rotation übereinstimmt.

## 3. Satz von Gauß

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \oint_A \mathbf{F} \, df \quad (1.9.76)$$

Ähnlicherweise möchten wir jetzt auch zwei Sachen zeigen: Erstens, dass  $\omega^2 \equiv \mathbf{F} \, df$ , und zweitens, dass  $d\omega^2 \equiv \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (1.9.77)$$

$$= F_{12}dx^1 \wedge dx^2 + F_{23}dx^2 \wedge dx^3 + F_{31}dx^3 \wedge dx^1 \quad (1.9.78)$$

Es wird vielleicht unzufriedigend sein, dass wir an dieser Stelle nicht konkret die Differentialform auf genau den Ausdruck umformen können, was auch in der Vektorschreibweise steht. Dazu haben wir die Werkzeuge dafür einfach nicht. Aber Noch wichtiger ist zu verstehen

$$d\omega^2 = \partial_q F_{ij} dx^q \wedge dx^i \wedge dx^j \quad (1.9.79)$$

$$= \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \quad (1.9.80)$$

$$= \left( \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (1.9.81)$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{F} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (1.9.82)$$

Und klar, es stört ein bisschen, dass wir auf einmal 2 komische Indizes haben. Diese Elemente können wir aber leicht mit den Feldkomponenten identifizieren, von welchem der Index noch fehlt.

Am Ende steht auch noch  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ , was wir uns wie ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  vorstellen können und vorne steht die Summe der partiellen Ableitungen der zugehörigen "parallelen" Elementen, was wir als Divergenz kennen.

#### 4. Andere

Aus der allgemeinen Regel, dass für alle Formen  $d^2\omega = 0$  gilt können wir auch einige Verhältnisse der Vektoranalysis erkennen.

$$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{F}) = 0 \quad (1.9.83)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (1.9.84)$$

Analog wäre das in Formen:

$$d(df) = 0 \quad (1.9.85)$$

$$d(d\omega) = 0 \quad (1.9.86)$$

### Transformation von Formen

Aus der allgemeinen Gestalt einer Differentialform und den Transformationsgesetze für die Basis können wir beliebig zwischen verschiedenen Basen wechseln, manchmal finden wir es gemütlicher mit Kugel oder Zylinderkoordinaten zu rechnen.

Sei also eine Differentialform in kartesischen Koordinaten gegeben:

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (1.9.87)$$

Dann wissen wir, wir können die alten  $dx^i$  folgendermaßen mit neuen  $dx'^j$  beschreiben:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \quad (1.9.88)$$

Das erinnert uns zurecht an die äußere Ableitung, und dadurch, dass wir die  $x^i$  durch die neuen  $x'^j$  schreiben, z.B.  $x^1 = r \sin \theta \cos \varphi$ , ist diese auch eine berechtigte Vorstellung. Um die Form  $\omega(x)$  in die Sprache von  $x'$  zu übersetzen brauchen wir nur die  $dx^i$  durch ihre entsprechende  $x'$  Schreibweise zu ersetzen.

$$\omega(x') = \omega_{i_1 \dots i_p} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} dx'^{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{j_p}} dx'^{j_p} \right) \quad (1.9.89)$$

$$= \omega_{i_1 \dots i_p} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \right) \dots \left( \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{j_p}} \right) dx'^{j_1} \wedge \dots \wedge dx'^{j_p} \quad (1.9.90)$$

Das hier gilt für alle Fälle, ist ganz allgemein hergeleitet. Aber, falls zufällig die Anzahl der Dimensionen des Raumes mit dem Grad der Form übereinstimmt, das heißt, es gibt nur *eine* Kombination für die Form, denn bei Wiederholung der  $dx'^j$  würden Terme wegfallen müssen, dann gilt auch folgende Transformation:

$$\omega(x') = \frac{1}{d!} \varepsilon_{i_1 \dots i_p} \left( \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \right) \dots \left( \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{j_p}} \right) dx'^{j_1} \wedge \dots \wedge dx'^{j_p} \quad (1.9.91)$$

Lustigerweise, beschreiben die Elemente  $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$  die Einträgen einer besonderen ganz nützlichen Matrix: Die Jacobi-Matrix  $J$ . Auch ganz lustig, wir haben ja in Theo I eine Formel für die Determinante kennengelernt:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = \det(A) \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad (1.9.92)$$

Dann können wir in der Form erkennen, dass wir die Transformation so schreiben können:

$$\omega(x') = \frac{1}{d!} \varepsilon_{i_1 \dots i_p} J_{i_1 j_1} \dots J_{i_p j_p} dx'^{j_1} \wedge \dots \wedge dx'^{j_p} \quad (1.9.93)$$

$$= \frac{1}{d!} \varepsilon_{j_1 \dots j_p} \det(J) dx'^{j_1} \wedge \dots \wedge dx'^{j_p} \quad (1.9.94)$$

### Einschub 5. Die Jakobi-Matrix

Wir haben schon seit langem mit Gradienten, und noch seit viel längerem mit Ableitungen gespielt. Die sind aber nur sehr spezifische Sachen, und nicht immer "einfach" anwendbar. Den Gradienten kann man zum Beispiel nur von einer 1-dimensionalen Funktion bestimmen, und es spuckt ein Vektor raus. Was machen wir denn, wenn unsere Funktion selbst schon ein Vektor ist? Mit dem Gradient war das ganz einfach, unsere Funktion  $f(\mathbf{x})$  kann sich ja nur in 3 Richtungen bewegen,  $x, y, z$ . Aber mit einer Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  ist es um einiges komplizierter. Dann kann sich  $f_1(x, y, z)$  in  $x, y, z$ -Richtung bewegen, ebenfalls  $f_2$  und  $f_3$ . Wir brauchen also irgendeinen Differentialoperator, der uns hilft damit hilft. Das ist genau die Jakobi-Matrix. Eine weitere Verallgemeinerung des Differentials einer Funktion.

Die Jakobi-Matrix nimmt in jeder Zeile den zugehörigen Term der Funktion (z.B. in der erste Zeile steht der erste Eintrag von  $\mathbf{f}$ , also  $f_1$ ) und leitet ihn spaltenweise

nach jedem seiner Argumenten ab<sup>a</sup>:

$$J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_{i=1, j=1}^{m, n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^T f_1 \\ \vdots \\ \nabla^T f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^n} \end{bmatrix} \quad (1.9.95)$$

Falls die Definitions- und die Zieldimension übereinstimmen, d.h.  $m = n$ , dann existiert auch eine Jakobi-Determinante. Die Jakobi-Determinante. Was diese macht lässt sich an ein paar anschauliche Graphen zeigen.

Wir mögen uns jetzt gerne vorstellen, dass Funktionen bloß nicht nur eine Zahl oder was auch immer ausspucken, sondern, dass sie zusammen mit dem Raum interagieren. Fangen wir mit dem 1-dimensionalen Raum an. Einfach eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ . Hier brauchen wir keine Raketenwissenschaften, die Jakobi-Matrix ist einfach die Ableitung nach  $x$ .

Die Funktion  $f$  "verzerrt" im folgenden Bild die reelle Achse so, dass die Punkte nach der Transformation unterschiedlich weit voneinander entfernt sind, als sie ursprünglich waren:

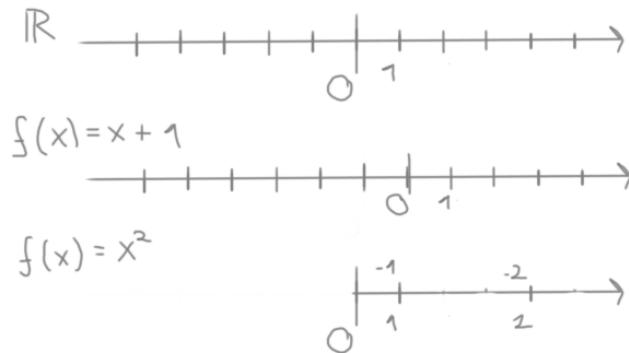


Abbildung 1.7: Transformation des Raumes

Die Ableitung sagt uns grob, um wie viel weiter die Punkte an einer bestimmten Stelle von einander entfernt sind. So würde zum Beispiel ein Knick (z.B. die Abstände werden auf einmal kleiner und dann kehrt sich die Achse zurück in sich selbst) entsprechen, dass die Funktion an der Stelle eine Ableitung von 0 hat<sup>b</sup>. Die Jakobi-Matrix, das heißt die Ableitung<sup>c</sup> sagt uns genau wie sich unser Raum in der Nähe von einem Punkt transformiert. Es hilft zum Beispiel auch zur Vorstellung, dass [HEY?]

Das war aber nicht so spannend. Funktionen können noch verrückteres Zeug machen, wenn wir es zulassen. Wir fangen aber ziemlich Vanilla an und gucken uns Koordinatentransformationen an. In Analysis-Sprache können wir von Diffeomorphismen reden. Diese sind Funktionen und besitzen die Eigenschaft, dass sie überall global invertierbar sind, deswegen können wir so einfach zwischen Koordinatensysteme wechseln.

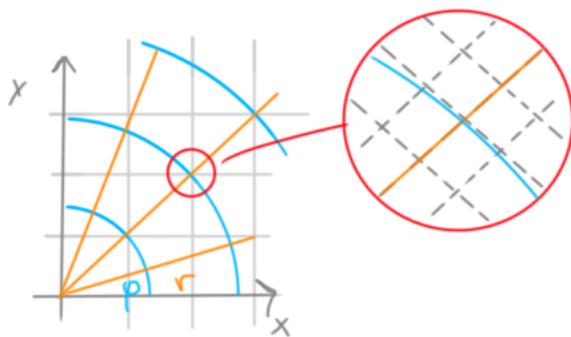


Abbildung 1.8: Transformation durch Polarkoordinaten

Gucken wir uns das obige Beispiel der Polarkoordinaten aus: Es handelt sich wie erwähnt um ein Diffeomorphismus, dass ist uns aber im Prinzip egal, nur brauchen wir diese Definition um uns die Koordinatentransformation als Funktionen vorzustellen. Diese Funktion würde ungefähr so aussehen:

$$\text{Seien } U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | x \leq 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$f : U \rightarrow V \quad (1.9.96)$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (1.9.97)$$

Die erste Sache mit den  $U$ 's und  $V$ 's sollte uns egal sein, ich schreibe sie nur auf, weil sonst diese Eigenschaft der Diffeomorphismusibilität nicht gelten kann. Wir sollten aber merken, diese Funktion  $f$  beschreibt genau den Wechsel von kartesischen- auf Polarkoordinaten. Der Raum sieht aber jetzt doch ein bisschen anders nicht war? Die "Raumlinien" sind nicht mehr alle gerade und schön kariert. Jetzt fallen uns einige Fragen auf:

1. Was können wir machen, um den Raum an einer Stelle wieder so gerade wie möglich zu machen?
2. Wenn wir unsere schönen geraden Linien verzerrt haben, wie ändert sich eine von uns vorher beschrieben "Quadrat-Fläche", in anderen Worten, wie stark entfernen sich bzw. annähern sich die Punkte im Raum nach der Transformation?

Als Antwort zur ersten Frage bringen wir ein Thema zurück, was wir letztes Jahr eingeführt haben und mit welchem wir schon einigermaßen gut zurecht kommen sollten: Matrizen als *lineare* Transformationen des Raumes. Wenn wir uns an die Videos von 3Blue1Brown zu Matrizen erinnern, dann können wir uns Matrizen als Transformationen anschauen, die den Raum entweder vergrößern, verkleinern, umdrehen, schräg machen, usw., aber bei welchen die Raumlinien stets parallel und in gleichem Abstand zueinander bleiben. Und wenn wir uns in 1.8 die Umgebung eines kleinen Punktes angucken, ja das ist natürlich nicht *genau* linear, d.h. parallel und in gleichem Abstand, aber für ganz ganz kleine Umgebungen, sieht der Raum nicht mehr gekrümmmt aus, sondern tatsächlich gerade. Es gibt also irgendeine Matrix, die den Raum so transformiert, dass unser Diffeomorphismus der Polarkoordinaten wie eine lineare Funktion in einer kleinen Umgebung aussieht. Es gibt also eine lineare Approximation für unsere gekrümmte nichtlineare Transformation. Nun verbinden wir

diese Idee, mit der Idee der Ableitung als beste lineare Approximation, und zusätzlich erweitern wir die Ableitung zu dem Konzept des Differentials, also der Jakobi-Matrix und voilà. Die Jakobi-Matrix ist die beste lineare Approximation einer Funktion, die den Raum verkrümmt.

Die Antwort zur zweiten Frage ergibt sich natürlicherweise aus dieser Vorstellung, denn wir wissen, die Determinante beschreibt so was wie die "orientierte Fläche", das "orientierte Volumen" einer linearen Transformation. Zu gucken wie sehr eine Funktion den Raum an einer Stelle vergrößert oder verkleinert, dann müssen wir uns nur die Determinante der Jakobi-Matrix anschauen.

Das funktioniert natürlich nicht nur bei Diffeomorphismen und Koordinatenwechseln, sondern auch bei ganz normalen Funktionen. Beweis: Bild

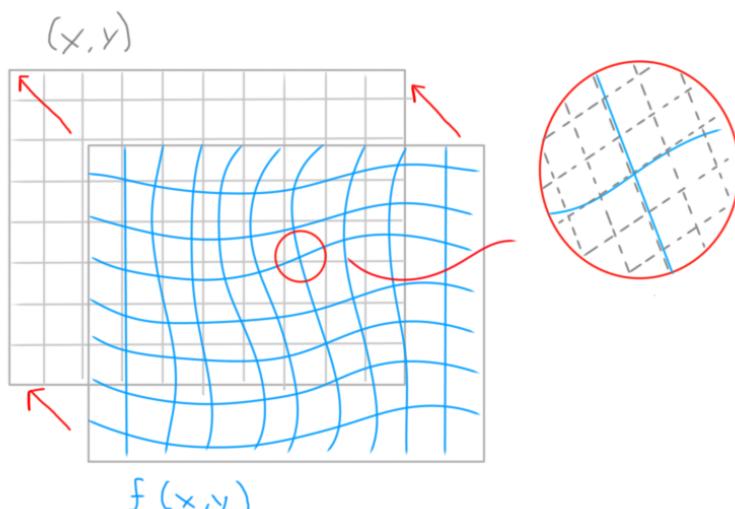


Abbildung 1.9: Transformation durch beliebige Funktion

<sup>a</sup>Das sind alle zunächst nützliche äquivalente Schreibweisen dafür

<sup>b</sup>pls leave me alone, wie werde ich den Scheiß schön wie 3b1b animieren

<sup>c</sup>und in diesem Fall ist sie gleichbedeutend mit ihrer Determinante

Ah ja, wie gesagt, wenn eine Form die gleiche Anzahl an Basisvektoren hat, als der Raum auf den sie wirkt Dimensionen, dann kann man sie durch die Determinante der Jakobi-Matrix in die neue gewünschte Darstellung transformieren.

### Beispiel 7

sum

## 1.10 Besondere Funktionen

### 1.10.1 Theta-Funktion

Wir haben schon im Vorkurs<sup>30</sup> über eine besondere Funktion gelernt: die Heavisidische Stufenfunktion, oder auch als Theta-Funktion bekannt, weil sie normalerweise mit  $\theta(x)$

<sup>30</sup>falls ihr im Vorkurs wart natürlich

bezeichnet wird. Ich habe mich oft gefragt, erstens wann diese Funktion relevant ist, und zweitens, warum wir eine neue Funktion brauchen, wenn wir schon normale Stufenfunktionen definieren können? Warum war  $\theta(x)$  besser als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.10.1)$$

Letzteres ist sogar die Definition der Theta-Funktion<sup>31</sup>. Es bleiben also die zwei ursprüngliche Fragen:

1. Die Theta-Funktion beschreibt etwas ganz merkwürdiges, weil es springt sofort von einem Wert in einen anderen Wert, und sowas sind wir nicht gewöhnt. Wir mögen stetige Funktionen, setzen sie auch meistens voraus wenn wir irgendwelche Differentialgleichungen oder Integrale lösen. In der Physik kommen aber momentane Sprünge oft vor, selbst wenn diese nicht mit einer unendlich hohen Geschwindigkeit passieren, kann dies schon näherungsweise der Fall sein. Am häufigsten wird das An- und Ausschalten von Licht als Beispiel benutzt, und es ist klar, weil als wir ganz schnell eine Spannung erzeugen

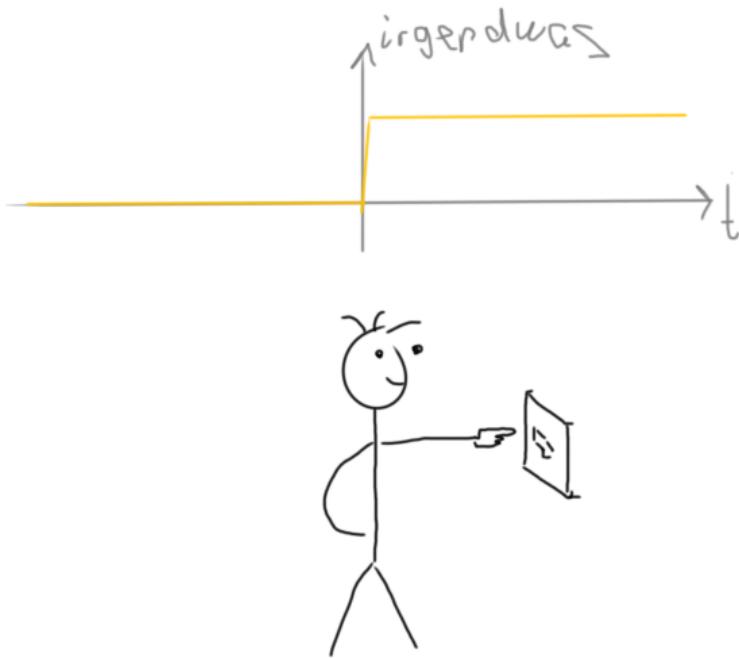


Abbildung 1.10: Let there be light amen

Die Theta-Funktion kann man mit Fourier-Zeug so annähern, dass sie sogar differenzierbar ist.

2. Es ist vorteilhaft die Theta-Funktion statt einer normalen Stufenfunktion zu benutzen, weil wir auf einer viel kompakteren Weise die Information einer explizit stückweise definierten Funktion ausdrücken können, und wir Physiker mögen so wenig schreiben wie möglich. Für allgemeinere Fälle kann man wie im Vorkurs gelernt

---

<sup>31</sup>Manchmal weichen die Definitionen untereinander ein bisschen ab, aber es ist egal

auch den "Sprungpunkt" verschieben mit

$$\theta(x - a) = \begin{cases} 1 & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases} \quad (1.10.2)$$

[HEY]

## 1.10.2 Delta-Funktion

So wie plötzliche Sprünge, die spontan auftreten und dann bleiben, so gibt es in der Welt ebenfalls spontane Sprünge die genauso schnell verschwinden. Diese sind zum Beispiel

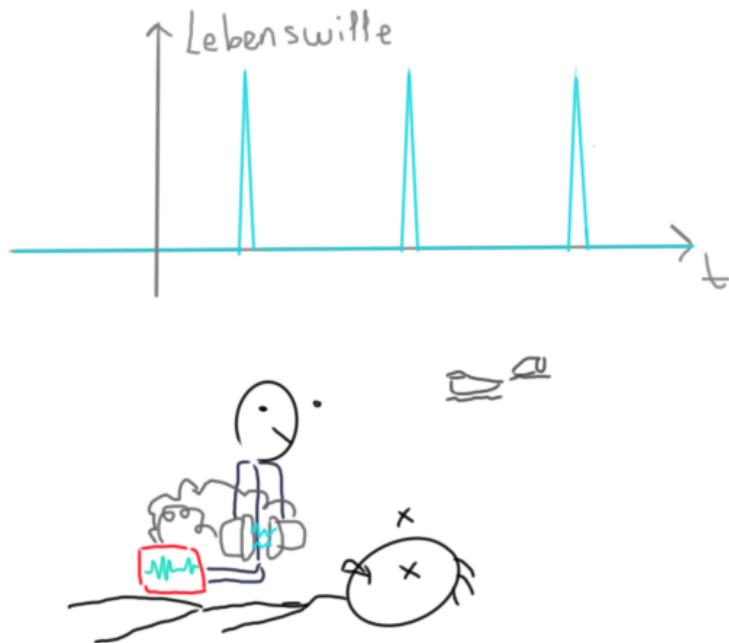


Abbildung 1.11: Pulse

auch ganz schnelle elektrische Pulse, oder solche Sachen vielleicht. Die Delta-Funktion, wenn wir versuchen sie anzunähern beschreibt ebenfalls dieses Pulzverhältnis. Es steigt plötzlich und verschwindet, aber wenn die delta-Funktion selbst betrachten, dann passiert ganz komisches Zeug. Bevor wir mit weiteren Beispielen machen hilft es sich zu gucken, wie die Funktion überhaupt definiert ist. Am häufigsten wird die folgende Definition mit der Funktion assoziiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (1.10.3)$$

Oder auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.10.4)$$

Blendet momentan euren Zweifel aus und glaubt mir, dass es die delta-”Funktion” dies tatsächlich erfüllt, selbst wenn wir noch keinen expliziten Ausdruck für  $\delta(x)$  überhaupt

definiert haben. Aber das ist genau der Punkt! Wir haben keinen Ausdruck für  $\delta(x)$  definiert und haben trotzdem darüber schon Aussagen gemacht. Eine mögliche, aber für mich unzufriedigende Definition ist

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.10.5)$$

Wenn wir uns das Integral über  $\delta(x)$  als die Fläche unter der Funktion vorstellen, dann sagt uns (1.10.4), dass plötzlich  $0 \cdot \infty = 1$  sein soll, aber selbst für unsere schmutzige Physikermagie ist diese Definition grenzwertig.

Das sind aber schon nützliche Werkzeuge um vieles in der Physik beschreiben zu können. Unter anderem ist ein weiteres physikalisches Beispiel die Ladungsdichte eines geladenen Massenpunktes, dann ist in einem Raum die ganze Ladung an dem einen infinitesimal kleinen Punkt des Raumes konzentriert ist. Damit kann man beispielsweise die Dichte  $\rho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  definieren, und da wir wissen, dass die Ladung das Integral der Dichte über das Volumen ist gilt:

$$Q = \int_V \rho \, dV = \int_V q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dV = q \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dV = q \quad (1.10.6)$$

Für mehrere Variablen definieren wir ähnlicherweise  $\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$

# Kapitel 2

## Physik

### 2.1 Lagrange-Formalismus

Im Lagrange-Formalismus distanzieren wir uns von Newton und versuchen die Welt unter einem anderen Blickwinkel zu beschreiben, nämlich das der Wirkung. Die Kraft übergibt der Wirkung der zentralen Rolle und Systeme verhalten sich so, dass sie nach dem Hamiltonischen Prinzip die kleinste Wirkung ausüben müssen. Falls wir uns mal gefragt haben, welche Form nimmt ein hängendes Seil an? Was ist der schnellste Weg von einem Punkt zum anderen? So müssen wir dann fragen, wie wird die Wirkung minimal. Das bedeutet beim hängenden Seil, unter welcher Form benötigt das Seil die kleinste potentielle Energie um zu hängen, bei der Geschwindigkeit natürlich wie wird unter dem Einfluss von einem Potential die Zeit einer Trajektorie zwischen zwei Punkten minimiert.

Why waste time say lot say lot word, when few word do trick.

-Kevin Malone

Nach dem Hamiltonschen Prinzip existiert also für jedes<sup>1</sup> mechanische System eine Lagrangefunktion, sodass das Wirkungsfunktional  $S$

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (2.1.1)$$

extremal<sup>2</sup> wird.

Wir können diese Lagrange-Funktion aber nicht mit irgendwelchen Funktionen  $q, \dot{q}$  parametrisieren, sondern müssen wir uns *verallgemeinerte* Koordinaten aussuchen, damit wir das System mit so wenigen Koordinaten wie möglich eindeutig beschreiben können.

⇒ Hier gibt's viele mehr und weniger schöne Aufgaben dazu

---

<sup>1</sup>fast

<sup>2</sup>stationär

### 2.1.1 Euler-Lagrange-Gleichung (ELG)

#### Anwendungen

In der Physik ist die Euler-Lagrange-Gleichung die Differenz zwischen der kinetischen und der potentiellen Energie

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.1.2)$$

Eine ganz coole<sup>3</sup> Sache ist, dass wir damit leicht das 2. Newtonsche Axiom herleiten können:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}) \quad (2.1.3)$$

$$(2.1.4)$$

In der Eulerschen Differentialgleichung eingesetzt ergibt das:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2} - V(x^i) \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left( \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2} \right) - V(x) \right) = 0 \quad (2.1.6)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}^i) = 0 \quad (2.1.7)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x^i} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}^i) \quad | m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} \quad (2.1.8)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (2.1.10)$$

Wir sehen hier, dass diese Herleitung auch für das allgemeinere 2. Newtonsche Axiom gültig ist, so kann beispielsweise die Masse in einem System variieren.

#### Totale Zeitableitung

Die totale Ableitung bzw. das totale Differential ist nützlich, (vor allem bei Funktionen mehrerer Variablen) um zu gucken, wie sich eine Funktion an einer bestimmten Stelle verhält, und zwar "in allen Richtungen". Das totale Differential einer Funktion in Abhängigkeit der drei Koordinaten im  $\mathbb{R}^3$  wird uns dann sagen, wie sich die Funktion in  $x, y, z$  Richtung an einer Stelle verändert. Es ist wie folgt definiert:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (2.1.11)$$

Die totale Zeitableitung ist nur der physikalisch relevante Begriff dafür. Es ist als ob wir durch  $dt$  dividiert hätten.

---

<sup>3</sup>und wegen der Bedeutung des Langrange-Formalismus offensichtliche

Eine Besonderheit der ELG ist, dass sich alle ELGs bis auf eine totale Zeitableitung gleich sind, das heißt, angenommen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  zwei verschiedene ELGs sind, dann folgt:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (2.1.12)$$

Aber warum ist das denn?

### What did Hebbie do?

Zwei Lagrange Funktionen  $\mathcal{L}', \mathcal{L}$  sind gleichwertig, wenn das Hamiltonsche Wirkungsprinzip bei beiden erfüllt wird. Also müssen wir fordern, dass falls beide Lagrange-Funktionen eine optimale Bewegung beschreiben, dann verschwindet ebenfalls die erste Variation der Wirkung<sup>a</sup>:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad (2.1.13)$$

$$\rightarrow \delta S' = \delta S \quad | \delta S \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.1.14)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L} dt \quad (2.1.15)$$

Wir müssen also eine Funktion suchen, bei der  $\delta S$  verschwindet. Welche Funktion könnte das erfüllen? Vielleicht eine Funktion, die ausgewertet an der Stelle  $t_1, t_2$  verschwindet, aber wie kommen wir darauf?

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \implies [f(q, t)]_{t_1}^{t_2} \quad (2.1.16)$$

$$(2.1.17)$$

Also die zwei verschiedenen Lagrange-Funktionen müssen sich nur um eine totale Ableitung unterscheiden! Diese totale Ableitung darf aber im Prinzip nicht von der Geschwindigkeit  $\dot{q}$  abhängen, denn wir haben nicht vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit der Variationen mit der optimalen Trajektorie an den Enden übereinstimmen muss. Nun gucken wir nochmal, wenn wir diese Definition in  $S'$  rückwärts einsetzen:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (2.1.18)$$

$$= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q, t) \quad | \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f = \int_{t_1}^{t_2} df \quad (2.1.19)$$

$$= S + [f(q, t)]_{t_1}^{t_2} \quad | [f(q, t)]_{t_1}^{t_2} = \text{const} \quad (2.1.20)$$

$$S' = S + \text{const} \quad (2.1.21)$$

Wenn wir nun jetzt die Variation der Funktionale betrachten, und das ist was uns eigentlich interessiert, dann werden wir merken, dass diese tatsächlich gleich sind.

---

<sup>a</sup>Danke, Henry!

### 2.1.2 Wie drückt man T eigentlich als Matrix aus?

Wir können tatsächlich bei jedem Mechanik-Problem<sup>4</sup> davon ausgehen, dass wir die kinetische Energie  $T$  als Matrix ausdrücken können, die von Variablen  $\dot{q}_i$  abhängt. Ein einfaches Beispiel ist folgendes in 2-D:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \quad (2.1.22) \quad T = \frac{1}{2}f_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

#### Beispiel 8

$$T = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{1}{2} f \dot{\mathbf{q}} \quad (2.1.23)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.24)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.25)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \quad (2.1.26)$$

Im Prinzip<sup>a</sup> kann man auch das schreiben:

$$T = \frac{1}{2}f_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}f \dot{\mathbf{q}}^2 \quad (2.1.27)$$

$$= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.28)$$

$$= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.29)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \quad (2.1.30)$$

Das klappt auch bei komplizierteren  $T$ 's wie z.B. bei (Aufgabe 4.4 b):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}r\dot{\varphi} \cos \varphi + r^2\dot{\varphi}^2)T = \frac{m}{2}(\dot{\varphi} \ \dot{x}) \begin{pmatrix} r^2 & r \cos \varphi \\ r \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (2.1.31)$$

<sup>a</sup>dann würde man nicht Kovektor und Vektor multiplizieren und hätte offiziell kein Skalarprodukt aber whatever darauf haben wir eh noch nie geachtet

<sup>a</sup>dann würde man nicht Kovektor und Vektor multiplizieren und hätte offiziell kein Skalarprodukt aber whatever darauf haben wir eh noch nie geachtet

Wie mach ich diese Matrix? Noch mal ganz langsam: in  $f_{11}$  kommt wie viele  $\dot{\varphi}^2$  vorkommen, in  $f_{12}$  kommt durch wie viele  $\dot{x}$  ich meine  $\dot{\varphi}$  ausdrücken kann, in  $f_{21}$  kommt durch wie viele  $\dot{\varphi}$  ich meine  $\dot{x}$  ausdrücken kann und in  $f_{22}$  kommt wie viele  $\dot{x}^2$  vorkommen. Die 2 wird auf  $f_{12}$  und  $f_{21}$  aufgeteilt  $\Rightarrow f$  ist automatisch symmetrisch

Wenn man es dann noch mit seinem tief vergraben LA1-Wissen schafft, diese Matrix

<sup>4</sup>ich hab die Aussage nicht geprüft aber das sollte stimmen

zu diagonalisieren, hat man die gekoppelte DGL gelöst nice.

## 2.2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Ok, wir wissen ungefähr was ein Erhaltungssatz ist, die Energie bleibt erhalten, der Impuls bzw. Drehimpuls bleiben erhalten, also manchmal. Aber wann? Und warum? Emmy Noether hat sich mit diesem Problem beschäftigt um zu erklären, warum die Energie, die erhalten bleiben sollte in Einsteins Generelle Relativitätstheorie doch verloren ging, denn die Energie galt bis dann als eine absolut erhaltende Größe. Noethers Theorem zeigt die Beziehung zwischen einer Erhaltungsgröße und einer zugehörigen *kontinuierlichen* Symmetrie und war grundlegend um die Gültigkeit Einsteins Theorie zu zeigen.

### Einschub 6. Kontinuierliche Symmetrie

Einer kontinuierlichen Symmetrie entspricht eine Transformation eines physikalischen Systems, die wir *kontinuierlich* durchsetzen können. Zum Beispiel ist Spiegelsymmetrie eine diskrete, i.e. nicht kontinuierliche, Symmetrie, denn es gibt nur entweder gespiegelt oder nicht gespiegelt. Bei kontinuierlichen Symmetrien dürfen wir die Transformation nur um ein ganz wenig verändern, sodass wir diese wie folgt beschreiben können:

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \equiv q(t) + \varepsilon \cdot \chi(t) \quad (2.2.1)$$

Es macht also keinen physikalischen Unterschied, wenn wir das System nach der entsprechenden Transformation verändern. So stellen wir uns zum Beispiel eine unendliche lange, komplett flache Straße, so können wir über diese Straße fahren, und wir würden nicht merken, wenn unter uns sich diese Straße plötzlich bewegt hätte<sup>a</sup>.

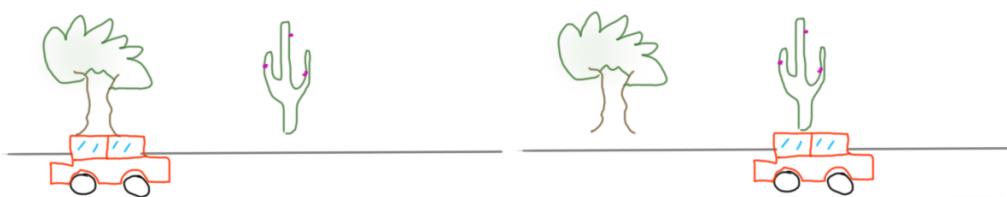


Abbildung 2.1: Vor und Nach Transformation

<sup>a</sup>Landschaft ist nur für bildliche Zwecke da

Dabei sind einige der bekanntesten Symmetrien der Physik:

### Homogenität von Raum

In einem Raum ohne Einflüsse von Kräfte oder Objekte, kann sich ein Massenpunkt frei überall bewegen, dabei macht es aber keinen Unterschied, ob sich der Massenpunkt im Punkt  $P = (0, 0, 0)$  oder  $Q = (-276, 30, 7834)$  befindet, denn der (Euklidische) Raum ist überall gleich.

## Homogenität von Zeit

Wenn auch die Zeit keinen Einfluss auf ein System hat, heißt das, dass sich, obwohl natürlich die Zeit verläuft, nichts im System im Lauf der Zeit verändert. Zum Beispiel ist ein Pendel ohne Berücksichtigung der Reibung zeitinvariant. Etwas Anderes was wir im letzten Semester gelernt haben ist, dass zeitunabhängige Kraftfelder  $\mathbf{F}$  für welche wir ein Potential  $V$  finden können, sodass

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (2.2.2)$$

gilt, konservativ sind, und dort die Energie erhalten bleibt. Die zur Zeitinvarianz zugehörige Erhaltungsgröße ist also die Energie! Das macht auch Sinn, wenn wir darüber denken, weil eine Energie in einem geschlossenen System erhalten bleibt. Es kann also keine Energie in das System rein- oder aus dem System rauskommen.

## Freier Massenpunkt

Aus der Homogenität von Raum und Zeit können wir uns freie Massenpunkte vorstellen und das Verhältnis der ELG betrachten:

Normalerweise hing  $\mathcal{L}$  von der Position, der Geschwindigkeit und der Zeit ab, aber wir haben gerade beschlossen, dass weder die Position noch die Zeit einen Einfluss auf unseren System bewirken, also hängt die ELG ausschließlich in irgendeiner Art von der Geschwindigkeit ab.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{v}) \quad (2.2.3)$$

”Wegen der Isotropie des Raumes“, das heißt, dass auch die Richtung keine Rolle spielt<sup>5</sup>, können wir auch feststellen, dass  $\mathcal{L}$  in quadratischer Form von der Geschwindigkeit abhängt, weil wir möchten uns nicht mit der Richtung der Geschwindigkeit beschäftigen, sondern mit ihrem Betrag.

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{v}^2) \quad (2.2.4)$$

### What did Hebbie do?

Was passiert aber, wenn wir den Raum selbst kontinuierlich bewegen? Wir können unseren Raum mit einem kleinen Galilei-Boost, uhm, boosten und gucken was damit passiert:

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' \equiv \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{v}'^2) \quad | \mathbf{v}'^2 = \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 \quad (2.2.6)$$

$$\equiv \mathcal{L}(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad | \text{Taylor um } \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$= \mathcal{L}(\mathbf{v}^2) + \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot (2\mathbf{v}\boldsymbol{\varepsilon}) + O(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (2.2.8)$$

<sup>5</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Isotropie>

Im letzten Schritt ist es vielleicht nicht klar, wieso die einzelnen Termen überhaupt dahin gekommen sind. Die Idee dahinten ist, die Lagrange-Funktion in der Nähe von  $\mathbf{v}^2$  um  $\varepsilon = 0$  zu entwickeln.

Als erstes müssen wir ganz vorne den Term  $\mathcal{L}(\mathbf{v}'(\varepsilon = 0))$  haben, also bleibt da nur  $\mathcal{L}(\mathbf{v}^2)$ . Danach kommt ein Term linearer Ordnung, das ist der Produkt zwischen der Ableitung von  $\mathcal{L}$  nach der für uns interessante Variable  $\mathbf{v}^2$  und der Änderung  $2\mathbf{v}\varepsilon + \varepsilon^2$ , aber der quadratische Term ist vernachlässigbar klein, also brauchen wir nur die Ableitung mal die führende Änderung  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot (2\mathbf{v}\varepsilon)$  und einen Term quadratischer Ordnung  $O(\varepsilon^2)$ .

Wenn wir uns an den Abschnitt über totale Ableitungen 2.1.1 erinnern, dann stellen wir fest, dass da

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f \quad (2.2.9)$$

dann muss auch gelten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot (2\mathbf{v}\varepsilon) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \quad (2.2.10)$$

Wie wir schon festgestellt hatten darf  $f$  nicht von  $\mathbf{v}$  abhängen. Um auf das Ergebnis in der letzten Formel zu kommen, muss  $f$  wie folgt aussehen:

$$f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot (2\mathbf{x}\varepsilon) \quad \left| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^2} = \text{const} \right. \quad (2.2.11)$$

Wenn wir uns das klassische Beispiel von  $L = T - V^a$  angucken, können wir leicht feststellen was diese Konstante sein soll, nämlich:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.2.12)$$

$$= \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - V(\mathbf{x}) \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}^2} = \frac{m}{2} \quad (2.2.14)$$

---

<sup>a</sup>Bei freien Massenpunkten spielt  $V$  keine Rolle, aber für die Allgemeinheit wollte ich das hinzufügen

## Mehrere Massenpunkte

Wegen der Eigenschaften der ELG können wir eine ELG die von mehreren unabhängigen Systemen abhängt in die ELGs der einzelnen Systemen trennen und diese addieren. So ist dann

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{i=1}^s \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (2.2.15)$$

## 2.2.1 Erhaltungssätze

### Energieerhaltung

Wie wir oben in 2.2 erläutert haben, folgt die Energieerhaltung aus der Homogenität der Zeit. Das heißt unter anderem, dass wir keine sich zeitlich ändernden Kraftfelder betrachten können, oder ganz wichtig keine Reibung haben dürfen, damit die Energie erhalten bleibt<sup>6</sup>.

#### What did Hebbie do?

Wenn  $L = \mathcal{L}(q, \dot{q})$  ist, dann können wir die verallgemeinerte Kettenregel 1 anwenden, wenn wir  $\mathcal{L}$  ableiten möchten.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad | \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (2.2.16)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i \quad | (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (2.2.17)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad | - \frac{d}{dt} \mathcal{L} \quad (2.2.18)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) \quad | \text{Ableitung} = 0 \implies \text{Funktion} = \text{const} \quad (2.2.19)$$

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (2.2.20)$$

An dieser Stelle können wir noch nicht sagen, dass  $E$  die Energie ist, wir wissen nur, dass es ein konstanter Wert sein soll. Aber um zu zeigen, dass diese Formel auch der uns näher liegenden  $E = T + V$  entspricht versuchen wir die ein bisschen umzuformen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad | V \text{ nicht von } \dot{q} \text{ abhängig} \quad (2.2.21)$$

$$= k \cdot T \quad | \text{Satz von Euler und Bsp. 4.} \quad (2.2.22)$$

$$= 2T \quad (2.2.23)$$

$$(2.2.24)$$

Sonst kann man das explizit nachrechnen, nach der Definition aus 2:

$$T = \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad | \text{Erklärung hier} \quad (2.2.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \quad | \text{Summe über } i \quad (2.2.26)$$

$$= \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \delta_{ik} \dot{q}_i \quad (2.2.27)$$

Bevor wir weiter machen müssen wir hier zuerst klären, was überhaupt wir gerade gemacht haben: Wenn wir uns den zweiten Schritt angucken, dann merken wir, dass

<sup>6</sup>In den Energiearten, die wir bisher betrachtet haben

die partielle Ableitung (nach  $\dot{q}_i$ ) des Termes innerhalb der Klammer verschwindet, wenn weder  $j$  noch  $k$  gleich  $i$  sind, dafür brauchen wir dann das Kronecker-Delta um diese Bedingung zu erfüllen. Damit bennnen wir effektiv auch die Variablen einfach um:  $\delta_{ij}x_j = x_i$ , so stimmt die Definition mit dem was wir vorher hatten überein. Da wir zwei Mal  $\dot{q}_{j,k}$  in der Ableitung haben, müssen wir natürlich für beide Fälle das Kronecker-Delta mitberücksichtigen. Wenn in einem der beiden Fällen doch  $j$  oder  $k$  gleich  $i$  ist, dann verschwindet dieser lineare Faktor beim ableiten und wird sofort danach hinzumultipliziert, da ein  $\dot{q}_i$  außerhalb der Klammer steht. Das heißt letztendlich haben wir:

$$\frac{1}{2}f_{jk}\delta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_k + \frac{1}{2}f_{jk}\dot{q}_j\delta_{ik}\dot{q}_i = f_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad (2.2.28)$$

$$= 2T \quad (2.2.29)$$

Eingesetzt in unser  $E$  ergibt das:

$$E = 2T - \mathcal{L} \quad (2.2.30)$$

$$= 2T - (T - V) \quad (2.2.31)$$

$$= T + V \quad (2.2.32)$$

## Impulserhaltung

Nach der Definition des Lagrange-Formalismus bleibt der Impuls genau in der Richtung erhalten, die nicht in der Lagrange-Funktion explizit vorkommt, denn

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad |_{q_1 \text{ nicht in } \mathcal{L}} \quad (2.2.33)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad (2.2.34)$$

$$\iff \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} := p_1 = \text{const} \quad (2.2.35)$$

Koordinaten, die nicht in der Lagrange-Funktion nennen wir *zyklisch*<sup>7</sup>

## Drehimpulserhaltung

Schauen wir uns ein Teilchen im Zentralpotenzial an:

$$T = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \quad |_{V = V(r)} \quad (2.2.36)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (2.2.37)$$

Die Variable  $\varphi$  ist zyklisch. Also ist  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$  eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \quad \text{Das ist der Drehimpuls}^8 \quad L = I\omega = mr^2\dot{\varphi} \quad (2.2.38)$$

---

<sup>7</sup>Hat nicht immer mit dem normalen "zyklisch" zu tun.

### Symmetrie unter Boosts

Okay es gibt noch eine dritte Gallilei-Transformation, die auch an der Physik bei einigen Systemen nichts ändert - die Boosts (also dem Inertialsystem eine zusätzliche konstante Geschwindigkeit  $v$  geben).

Boosts sind in manchen Systemen auch Symmetrietransformationen:

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q} + \varepsilon v \quad \Rightarrow \quad \chi = v \quad \delta\dot{q} = \varepsilon v$$

Die Erhaltungsgröße ist allgemein (ohne Herleitung):  $\mathbf{x}_{SP} - \mathbf{v}_{SP}t$

$t$ ist zyklisch	$\rightarrow$	Energieerhaltung
$q$ ist zyklisch	$\rightarrow$	Impulserhaltung in $q$ -Richtung
$\varphi$ ist zyklisch	$\rightarrow$	Drehimpulserhaltung um $\varphi$ -Achse
$\dot{q}$ ist zyklisch	$\rightarrow$	Erhaltung der Schwerpunktsbewegung in $q$ -Richtung

### 2.2.2 Noether-Theorem

Vorhin haben wir Noethers Theorem erwähnt, aber die Erklärung dann war viel zu kurz um dessen Bedeutung richtig zum Ausdruck bringen zu können. Es verbindet Eigenschaften des Systems mit seinen Erhaltungsgesetzen auf einer Weise, auf die zum Beispiel Einstein selbst gekommen ist. Wir haben gerade gesehen, dass es eine tiefe Verbindung zwischen der Zeit und der Energie gibt, und dem Raum und dem Impuls. Andererseits können wir damit, gegeben eine Symmetrie, nach der Erhaltungsgröße suchen und umgekehrt, aber den mathematischen Weg dafür interessiert uns nicht. Erstmal kümmern wir uns um die mathematische Bedeutung des Theorems. Wir reden bei Noethers Theorem um kontinuierliche Symmetrien, die können wir folgendermaßen beschreiben:

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \equiv q(t) + \varepsilon \cdot \chi(t) \quad (2.2.39)$$

Wir verändern das System  $q$  um  $\delta q$ , und dann definieren wir, dass diese Variation  $\delta q$  ganz ganz klein ist. Hier ist offensichtlich  $\delta q = \varepsilon \chi$ , weil per Definition folgt:

$$\delta q = q' - q = \varepsilon \chi \quad (2.2.40)$$

Zunächst fordern wir auch die Gleichwertigkeit der Lagrange-Funktionen bezüglich einer totalen Zeitableitung:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \cdot \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (2.2.41)$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem was wir schon vorher 2.1.1 festgestellt hatten, dass

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f \quad (2.2.42)$$

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{d}{dt} f \quad (2.2.43)$$

So sind wir uns sicher, dass die Bewegungsgleichungen gleich bleiben.

Wir gucken uns an, wie das Wirkungsfunktional dieser Transformation aussieht:

$$S[q + \varepsilon\chi(t)] = S[q] + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f dt \quad (2.2.44)$$

$$= S[q] + \varepsilon [f(q, \dot{q}, t)]_{t_1}^{t_2} \quad (2.2.45)$$

Wir brauchen aber an dieser Stelle, dass die physikalische Bedeutung des Wirkungsfunktionalen auf für  $S[q + \varepsilon\chi]$  gilt, das muss dann auch extremal sein, das heißt

$$\delta S[q + \varepsilon\chi] = 0 \quad (2.2.46)$$

Um dies zu zeigen variieren wir auch  $q + \varepsilon\chi$ , dabei erinnern wir uns, dass eine Variation in  $q$  auch eine Variation in  $\chi$  bedeutet.

$$q + \varepsilon\chi(q, \dot{q}, t) \rightarrow q + \delta q + \varepsilon\chi(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) \quad (2.2.47)$$

Nun zurück zum Wirkungsfunktional  $S$ :

$$\delta S[q + \varepsilon\chi] = S[\delta q] + \varepsilon S[\delta\chi] \quad (2.2.48)$$

$$= S[q + \delta q] - S[q] + \varepsilon [f(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - f(q, \dot{q}, t)]_{t_1}^{t_2} \quad | \delta q, \delta\dot{q} = 0 \text{ an } t_1, t_2 \quad (2.2.49)$$

$$= S[\delta q] \quad (2.2.50)$$

$$= 0 \quad (2.2.51)$$

Im letzten Schritt haben wir nur durch äquivalente Umformungen einen Ausdruck gebildet, um unser Ziel erreichen zu können. Wegen der Linearität des Wirkungsfunktionalen können wir ein  $S[q]$  hinzufügen und gleich wieder rausziehen, und ebenfalls machen wir es mit einem  $f(q, \dot{q}, t)$ . Hier müssen wir aber fordern, dass die gewählte Variation  $\delta q$  und ihre Ableitung  $\delta\dot{q}$  an den Stellen  $t_1, t_2$  verschwindet, vorher war es nur wichtig gewesen, dass  $\delta q$  diese Eigenschaft erfüllt. Die andere Eigenschaft brauchen wir aber für die Symmetrie.

Nun brauchen wir für die Erhaltungsgröße:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \quad (2.2.52)$$

Aus unserer Herleitung in 1.7.2 erkennen wir hier nochmal die ELG in der noch "primitiven" Form: und können sie für uns ein bisschen schöner machen:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \quad | \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (2.2.53)$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \quad | (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (2.2.54)$$

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \quad (2.2.55)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f \right) \quad | \delta q = \varepsilon \chi \quad (2.2.56)$$

$$0 = \varepsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \chi - f \right) \quad | \varepsilon \neq 0 \quad (2.2.57)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \chi - f \right) \quad (2.2.58)$$

So sind wir nun zum Punkt gekommen, wo wir eine Erhaltungsgröße erkennen können, wenn nämlich die Zeitableitung verschwindet, dann muss

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \chi - f = \text{const} \quad (2.2.59)$$

Zunächst besteht die Schwierigkeit darin zu bestimmen, was  $\chi$  und was  $f$  sind.

### Beispiel 9

Zeittranslation ist eine kontinuierliche Symmetrie:  $q(t) \rightarrow q(t + \varepsilon)$

Wir Taylorn das in  $\varepsilon$  am Punkt  $t$ :

$$q(t + \varepsilon) = q(t) + \dot{q}(t)(t + \varepsilon - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \approx q(t) + \dot{q}(t)\varepsilon \quad (2.2.60)$$

$$\Rightarrow q(t + \varepsilon) = q(t) + \varepsilon \dot{q}(t) = q(t) + \varepsilon \chi \quad (2.2.61)$$

$$\Rightarrow \chi = \dot{q} \quad \delta q = \varepsilon \dot{q} \quad (2.2.62)$$

Jetzt wollen wir  $\delta L$  berechnen, um  $f$  zu finden:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \quad (2.2.63)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q} \varepsilon \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varepsilon \ddot{q} \quad (2.2.64)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} \frac{d}{dt} q + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \dot{q} \quad (2.2.65)$$

$$= \varepsilon \frac{d}{dt} L = \varepsilon \frac{d}{dt} f \quad (2.2.66)$$

$$\Rightarrow f = L \quad (2.2.67)$$

Erhaltungsgröße<sup>a</sup>:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = p v - L = 2T - T + V = E \quad (2.2.68)$$

$\Rightarrow$  Zeittranslationsinvarianz führt zur Energieerhaltung

<sup>a</sup>eigentlich folgt das im Allgemeinen aus dem Satz von Euler und der Annahme, dass  $V$  nicht von  $\dot{q}$  abhängt, dann ist  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$ . Wenn  $T = \frac{1}{2}mv^2$  und  $p = mv$ , können wir es aber wie oben bestimmen. Der Satz von Euler zeigt, dass es auch für andere  $T$  und verallgemeinerte Impulse  $p$  gilt.

### 2.2.3 Mechanische Ähnlichkeit

Wir benutzen den Begriff der mechanischen Ähnlichkeit, um zwei Systeme mit ähnlichen Trajektorien, welche eine Richtung gestreckt oder gestaucht sein können, aber trotzdem eine allgemeine gemeinsame Form behalten, zu beschreiben. Somit kann man verschiedene Bahnen mit einem Potential (homogen vom Grad  $k$ ) in Relation setzen, ohne ihre Bewegungsgleichungen lösen zu müssen. Das Prinzip besagt, dass man jede Größe des Ortes  $x, x'$  und jede Größe der Zeit  $t, t'$  wie folgt skalieren darf:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1-\frac{k}{2}} \quad (2.2.69)$$

#### Beispiel 10

Wir betrachten das sehr einfache und vertraute Beispiel des freien Falls

$$V = mgz \quad (2.2.70)$$

Das Potential hängt linear mit dem Ort der Masse zusammen, also ist  $k=1$

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{x'}{x}} \quad (2.2.71)$$

$$(2.2.72)$$

Also hängt die Fallzeit mit der Wurzel der Fallhöhe zusammen.

Mit diesem Prinzip lassen sich zusätzlich auch die Geschwindigkeit, Energie und Drehimpulse vergleichen:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{k}{2}} \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{x'}{x}\right)^k \quad \frac{L'}{L} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1+\frac{k}{2}} \quad (2.2.73)$$

Und beim Einsetzen des Grades  $k$  kann man direkt die Beziehungen in einem harmonischen Oszillator, dem Kepler-Problem und dem Gravitationsgesetz erkennen.

### 2.2.4 Virialsatz

Seien  $\langle V \rangle$  und  $\langle T \rangle$  die zeitgemittelten Größen für das Potential und die kinetische Energie für eine Bewegung in einem beschränkten Gebiet mit beschränkter Geschwindigkeit, wobei

$$\langle A \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(t') dt' \quad (2.2.74)$$

so lässt sich folgende Beziehung herleiten:

$$2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle \quad (2.2.75)$$

## 2.3 Trägheitstensor

### 2.3.1 Trägheitstensor

Die Trägheit bezüglich einer Achse eines Körpers sagt uns wie schwer es für uns ist, dieses Objekt um diese Achse zu drehen, oder welchen Widerstand der Körper leistet, wenn wir versuchen den um diese Achse zu drehen. An der vereinfachten<sup>9</sup> Formel erkennen wir aber schon das Prinzip:

$$I = mr^2 \quad (2.3.1)$$

Je größer der Radius  $r$  ist, desto größer der Trägheitsmoment, und zwar nimmt es sogar quadratisch zu, also selbst mit kleineren Massen, die ein bisschen weit entfernt sind wird es schnell ganz schwierig sie um eine Achse zu drehen. Dieses Prinzip erkennen wir zum Beispiel auch bei Hebeln und so.

In Abbildung 2.2 können wir vielleicht selber nachdenken, wer größere Schwierigkeiten in einem Kampf hätte. Jemand der mit einer Achse schwingt, deren Gewicht weit vom Handgelenk auf eine kleine Umgebung konzentriert ist? Oder jemand mit einem Doppelschwert mit homogen verteilter Masse?

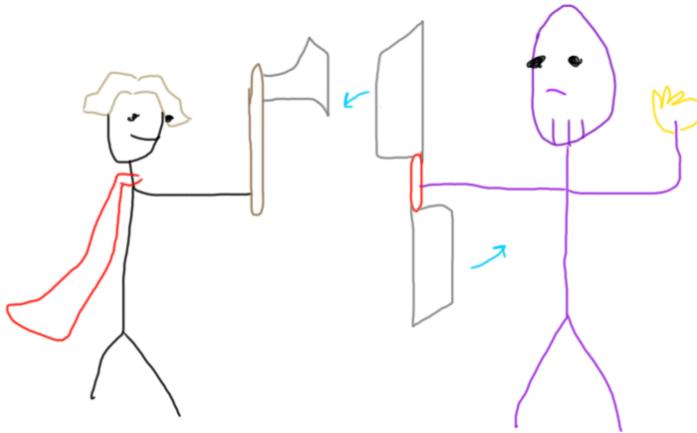


Abbildung 2.2: Person 1 vs Person 2

Dieses Semester führen wir den Trägheitstensor von festen Körpern mit kontinuierlichen Massenverteilungen ein, und das ist im Prinzip das gleiche was wir letztes Semester gemacht haben, aber jetzt müssen wir zusätzlich integrieren:

$$I = \int \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 \, dV \quad (2.3.2)$$

$$I^{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) (\delta^{ij} \mathbf{r}^2 - r^i r^j) \, dV \quad (2.3.3)$$

Für ein kartesisches Koordinatensystem ist es sehr bequem die Werte direkt aus folgender Mustermatrix abzulesen, dabei muss der Schwerpunkt unseres Körpers am Ursprung

---

<sup>9</sup>ziemlich vereinfachten

sein:

$$I = \int \rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dx dy dz \quad (2.3.4)$$

Aber jetzt haben wir eine Matrix voller Werte und wir wollen damit was anfangen. Was überhaupt bedeutet es, dass mein  $I^{13}$  Trägheitsmoment  $-xz$  ist? Zunächst werden wir zur Anschaulichung eine allgemeinere Schreibweise des Trägheitstensors betrachten:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Hier unterscheidet man manchmal zwischen "Trägheitsmomenten", die Elementen entlang der Diagonalen, und "Trägheitsprodukten", die anderen Elementen des Tensors. Die ersten beschreiben wie sich der Körper um eine Achse dreht, wenn wir einen Drehmoment um die gleiche Achse ausüben. Aber vielleicht haben wir ja einen Körper der, bei Drehung um eine Achse, auch Widerstand bezüglich einer anderen Achse zeigt. Dafür sind die "Trägheitsprodukte" da.

Im Zylinder 1 verlaufen die Symmetriearchsen entlang der Koordinatenachsen. Wenn wir uns den Querschnitt über die Perspektive der Achsen angucken, ist die Masse in allen Quadranten des Koordinatensystems gleichmäßig verteilt, sodass sich die "Trägheitsprodukte" ausgleichen.

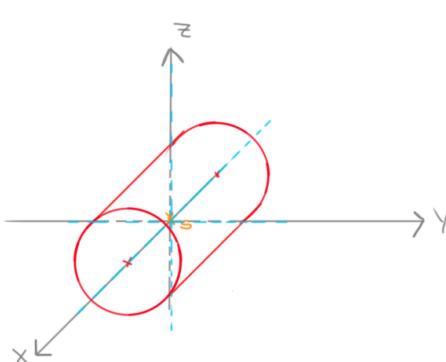


Abbildung 2.3: Zylinder 1

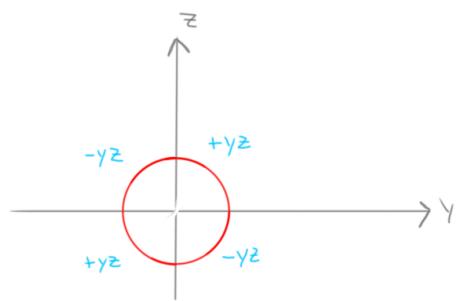


Abbildung 2.4: Querschnitt Zylinder 1:  
 $x = \infty$

In diesem Fall konzentriert sich viel mehr Masse in bestimmten Quadranten des Koordinatensystems, deswegen können wir schon von vorhersagen, dass wir in den  $I^{xy} = I^{yx}$  Elementen des Trägheitstensor einen negativen Wert haben werden.

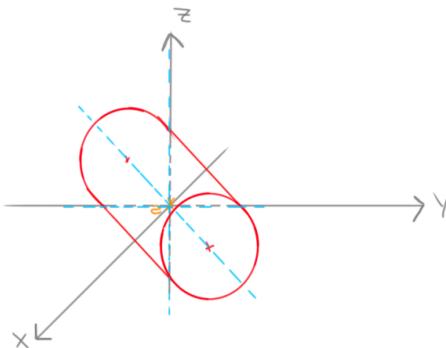


Abbildung 2.5: Zylinder 2

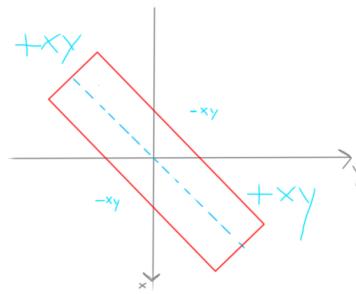


Abbildung 2.6: Querschnitt Zylinder 2:

 $z = \infty$ 

Sei so das Zylinder nicht mehr nach den Koordinatenachsen ausgerichtet, so können wir uns vorstellen, dass eine Drehung um z.B. die  $x$ -Achse nicht mehr so smooth laufen wurde. Im Gegenteil, wie bei Hebbies Experiment mit dem Buch dreht sich jetzt unser Zylinder auch ein bisschen verrückt.

### 2.3.2 Hauptträgheitsachsen

Da der Trägheitstensor, wie wir wissen ein symmetrischer Tensor ist, können wir zu jedem drei dimensionalen Körper einen diagonalen Tensor mit einem Koordinatensystem mit drei zueinander senkrechter Koordinatenachsen finden. Diese werden "Hauptträgheitsachsen" benannt. Im Fall unseres zweiten Zylinders heißt das, dass wenn wir den Tensor diagonalisieren, dann werden wir mit den Hauptträgheitsachsen das gleiche System beschreiben wie für Zylinder 1.

Im Allgemeinen gilt, dass wenn die Symmetrieachsen des Körpers entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet sind, so ist der Tensor bereits diagonalisiert. Falls nicht kann man entweder die Diagonalmatrix und die Eigenvektoren explizit berechnen, oder sich überlegen welche Einheitsvektoren man wählen muss, damit die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen übereinstimmen. Am besten soll man in komplizierteren Problemen immer das Hauptträgheitssystem bestimmen.

Zur Erinnerung wie man eine Matrix diagonalisiert siehe entweder Hebbies Skript oder die LA 1 Zusammenfassung unter [1.1.4](#). Das Rezept in absoluter Kurzfassung:

#### Matrizen diagonalisieren

[1] **Eigenwerte** der Matrix  $A$  finden. Determinante am besten mit Sarrus oder nach Zeilen/Spalten entwickeln. Für  $2 \times 2$  gibt es eine ez Formel ( $ac - bd$ )

$$\det(A - \mathbf{1}\lambda) = 0 \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (2.3.6)$$

[2] **Eigenvektoren** zu den Eigenwerten basteln. Dazu Eigenwert in (2.109) einsetzen, Matrix in Zeilenstufenform bringen und  $A_{ZSF} \cdot (x, y, z)^T = (0, 0, 0)^T$  lösen. Lösung auf Länge 1 normieren. Mit allen Eigenwerten wiederholen.

[3] Alle Eigenvektoren als Zeilenvektor untereinander in eine Matrix  $S$  schreiben und diese Matrix zu  $S^{-1}$  invertieren.

[4]  $A_{\text{diag}} = S A S^{-1}$  berechnen - zack fertich  $\Rightarrow$  Aufgaben zum Üben

### Steiner'scher Satz

Der Steiner'sche Satz besagt, dass man das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse  $A$ , die im Abstand  $a$  parallel zu einer Hauptträgheitsachse  $S$  verläuft, so bestimmen kann:

$$I_A = I_S + ma^2 \quad (2.3.7)$$

$\Rightarrow$  Das brauchen wir hier bei Aufgabe 4.2 und bei Aufgabe 5.3

### 2.3.3 Trägheitsellipsoid

Wie wir in der Vorlesung gehört haben, sind Tensoren tatsächlich anschauliche und geometrische Objekte. Tensoren können wir eine Fläche zuordnen, so ähnlich wie wir Vektoren mit einem Pfeil darstellen. Besonders mit der Gleichung

$$t^{ij}x^ix^j = 1 \quad (2.3.8)$$

Da es sich um eine Doppelsumme handelt, werden wir für einen normalen Tensor ganz viele Terme haben, aber für das was uns interessiert nehmen wir an, dass wir schon den diagonalisierten Trägheitstensor haben. Dann ist

$$I^{ij}x^ix^j = 1 \quad (2.3.9)$$

$$I_1(x^1)^2 + I_2(x^2)^2 + I_3(x^3)^2 = 1 \quad (2.3.10)$$

Diese Formel ist nun sehr ähnlich zu der Formel, die einen Ellipsoid beschreibt:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} = 1 \quad (2.3.11)$$

Es ist letztendlich egal, ob wir die Konstanten unten mit dem Quadrat stehen haben, oder oben ohne Quadrat, denn sie sind ja nur Konstanten. Mit Formel (2.3.11) würden uns die Konstanten sagen, genau wo die "Halbachsen" unseres Ellipsoids befinden, aber analog können wir für unseren Tensor schreiben:

$$\frac{(x^1)^2}{\sqrt{\frac{1}{I_1}}} + \frac{(x^2)^2}{\sqrt{\frac{1}{I_2}}} + \frac{(x^3)^2}{\sqrt{\frac{1}{I_3}}} = 1 \quad (2.3.12)$$

Dann ist  $\sqrt{\frac{1}{I_i}}$  die Länge unserer Halbachse. So merken wir, je größer  $I_i$  wird, desto weniger wird sich der Trägheitsellipsoid in der entsprechenden Richtung strecken.

In der Weise sagt uns der Tensor, wie die Masse unseres Körpers verteilt ist. Ist  $I_i$  klein, dann gibt es um die Achse viel Masse, ist  $I_i$  groß, dann gibt es wenige Masse um diese Achse. Sind alle ungefähr gleich groß, dann ist die Masse etwa gleichmäßig in allen Richtungen verteilt.

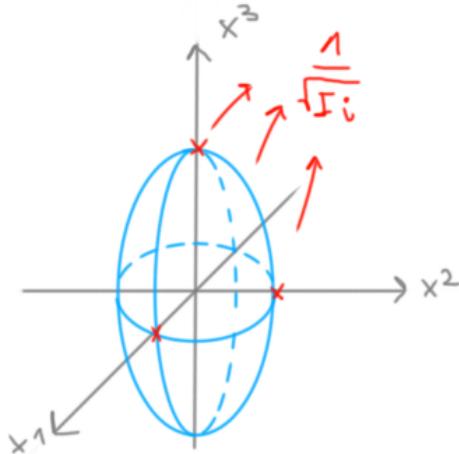


Abbildung 2.7: Trägheitsellipsoid

## 2.4 Kreisel

### 2.4.1 Euler-Gleichungen

Der Kreisel ist in der Physik ein so wichtiges Konzept, weil wir damit allgemeinere rotierende Körper<sup>10</sup> beschreiben können. Das beste Beispiel, außer den Kreiselspielzeugen, ist die Erde. Außerdem sind echte Kreiseln in der Technik wichtig, aber das ist Mabau also kein Plan.

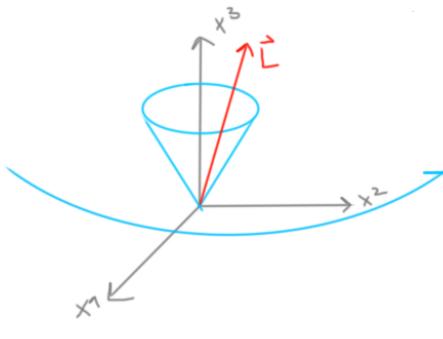
Wir können einen Kreisel aus zwei Perspektiven beschreiben, einerseits bleibt der Körper fest in einem Körperfesten System  $S$ , als ob man auf der Spitze sitze und die Welt sich drehe<sup>11</sup>. Andererseits betrachtet man den sich drehenden Kreisel von Außen aus einem Raumfesten System  $S'$ .

---

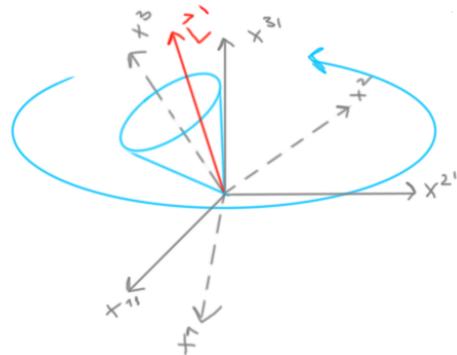
<sup>10</sup>bei welchen Verschiebungen im Raum und Deformationen nicht so wichtig sind

<sup>11</sup>nicht ungleich Studenten sobald die Kneipen öffnen

Im Körperfesten System rotieren die Koordinatenachsen mit dem Kreisel mit, also bleibt er aus Sicht des Koordinatensystems immer stehen, aber erfährt die Effekte eines bewegten Bezugssystems.

Abbildung 2.8: Körperfest  $S$ 

Im Raumfesten System sieht es aus, als ob der Kreisel mit einer Matrix  $R(t) \in SO(3)$  rotiert.

Abbildung 2.9: Raumfest  $S'$ 

Wir finden das Körperfeste<sup>12</sup> System cooler, aber wir können auch zwischen den zwei Systemen mit folgenden Äquivalenzen wechseln:

$$\mathbf{L}' = R\mathbf{L} \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} \quad (2.4.3)$$

...

$$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}' \quad (2.4.4)$$

$$\frac{dR\mathbf{L}}{dt} = \dot{R}\mathbf{L} + R\dot{\mathbf{L}} \quad (2.4.5)$$

$$= R(\omega \times \mathbf{L}) + R\dot{\mathbf{L}} \quad | \text{Guide I 2.7.2} \quad (2.4.6)$$

$$= R\mathbf{M} \quad (2.4.7)$$

$$\iff \omega \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad | \mathbf{L} = I\omega, I = \text{const} \quad (2.4.8)$$

$$\omega \times (I\omega) + I\dot{\omega} = \mathbf{M} \quad (2.4.9)$$

$$I\dot{\omega} = \mathbf{M} + (I\omega) \times \omega \quad (2.4.10)$$

Daraus lassen sich die gekoppelten Bewegungsgleichungen für  $\dot{\omega}$  herleiten. Das sind die sogenannten *Euler-Gleichungen*

$$I_1\dot{\omega}^1 = M^1 + \omega^2\omega^3(I_2 - I_3) \quad (2.4.11)$$

$$I_2\dot{\omega}^2 = M^2 + \omega^3\omega^1(I_3 - I_1) \quad (2.4.12)$$

$$I_3\dot{\omega}^3 = M^3 + \omega^1\omega^2(I_1 - I_2) \quad (2.4.13)$$

<sup>12</sup>Wir nehmen an wir haben auch das Hauptachsensystem

### 2.4.2 Freier Kreisel

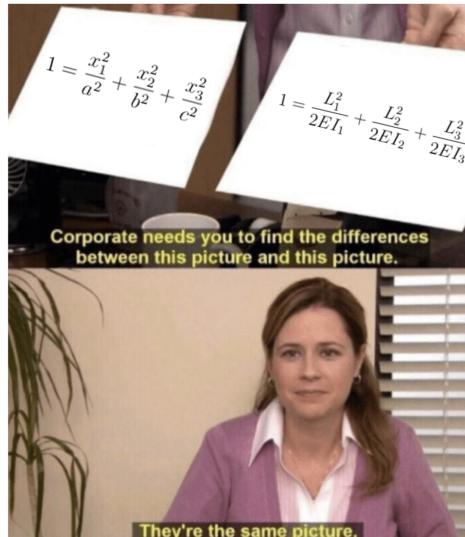
Ein freier Kreisel ist ein Kreisel ohne den Einfluss eines Potentials, also ist die Gesamtenergie nur  $E = T$ . Mit  $T = \frac{I\omega^2}{2}$  und  $L = I\omega$  gilt also:

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \quad (2.4.14)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{1}{2}\frac{L_2^2}{I_2} + \frac{1}{2}\frac{L_3^2}{I_3} \quad (2.4.15)$$

$$1 = \frac{L_1^2}{2EI_1} + \frac{L_2^2}{2EI_2} + \frac{L_3^2}{2EI_3} \quad (2.4.16)$$

Diese Gleichung (2.4.16) sieht aus wie die Gleichung für ein Ellipsoid  $\left(1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}\right)$ , nur dass halt die  $x'e$  hier  $L's$  sind.



Das heißt wir haben ein sogenanntes **Binet-Ellipsoid** aber nicht im  $\mathbb{R}^3$ , sondern im L-Raum (mit  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  als Achsen). Die Halbachsen des Binet-Ellipsoids sind dann

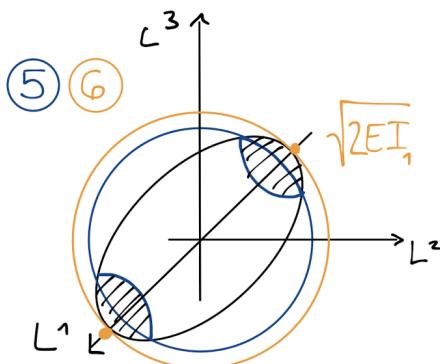
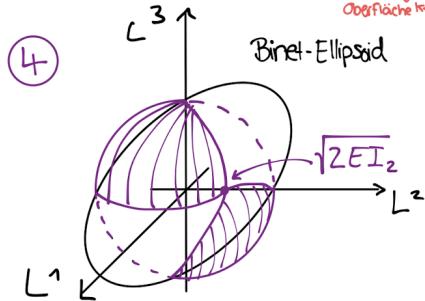
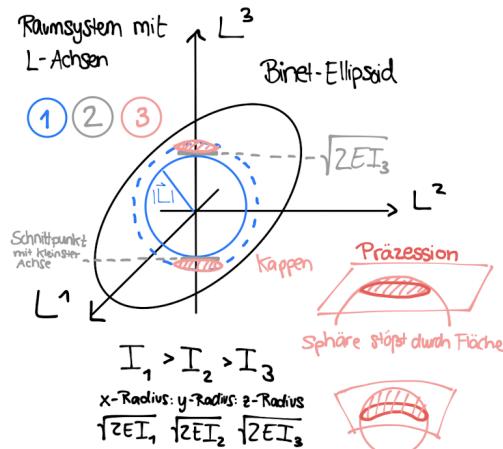
$$a = \sqrt{2EI_1} \quad b = \sqrt{2EI_2} \quad c = \sqrt{2EI_3} \quad (2.4.17)$$

Wegen der Drehimpuls-Erhaltung ist auch  $L$  erhalten, d.h. dass sich die Länge des Vektors nicht ändert:

$$|\mathbf{L}'| = \text{const} \quad (2.4.18)$$

Das beschreibt eine Kugel im L-Raum. Der L-Vektor kann sich also nur auf den Schnittgeraden von Binet-Ellipsoid und Kugel bewegen. [Hier](#) eine coole Seite mit Animation der Schnittkurven zum Ausprobieren und auch [hier](#) eine schöne Veranschaulichung.

Wie sehen diese Schnittkurven in etwa aus?



### Fallunterscheidung

$$\textcircled{1} \quad |\vec{L}| < \sqrt{2EI_3}$$

keine Lösung  $\rightarrow$  kein Schnitt  
Sphäre kleiner als kleinste Halbachse

$$\textcircled{2} \quad |\vec{L}| = \sqrt{2EI_3}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \pm (0, 0, \sqrt{2EI_3})^T$$

2 Berührungspunkte oben und unten  
 $\rightarrow$  Feste Drehachse  $\parallel \hat{e}_3$  [stabil]  
Sphäre ist in Ellipsoid eingeschrieben

$$\textcircled{3} \quad \sqrt{2EI_3} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_2}$$

2 geschlossene Schnittkurven  
 $\rightarrow$  Präzession

$$\textcircled{4} \quad |\vec{L}| = \sqrt{2EI_2}$$

$\vec{L}$  sitzt instabil an einem der Kreuzungspunkte oder bewegt sich entlang der Kurven

$$\textcircled{5} \quad \sqrt{2EI_2} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_1}, \quad 2 \text{ geschlossene Kurven}$$

$$\rightarrow \text{Präzession}$$

$$\textcircled{6} \quad |\vec{L}| = \sqrt{2EI_1}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \pm (\sqrt{2EI_1}, 0, 0)^T$$

2 Berührungspunkte vorne/hinten  
 $\rightarrow$  Feste Drehachse  $\parallel \hat{e}_1$ , [stabil]  
Ellipsoid ist in Sphäre eingeschrieben

$$\textcircled{7} \quad |\vec{L}| > \sqrt{2EI_1}$$

keine Lösung  $\rightarrow$  kein Schnitt  
Ellipsoid kleiner als Sphäre

Wir sehen also, wenn  $I_3$  die kleinste und  $I_1$  die größte Hauptträgheitsachse ist, dann ist eine Rotation um diese Achsen stabil. Eine Rotation um die mittlere Hauptträgheitsachse  $I_2$  ist immer instabil.

Wenn wir uns ein System wie die Erde (plattgedrückte Kugel) anschauen, wo  $I_1 = I_2 = I_0 < I_3$  ist, erhält man bei den Euler Gleichungen folgendes:

$$I_0 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 = (I_0 - I_3) \quad I_0 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 = (I_3 - I_0) \quad I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \omega_3 = \text{const}$$

$$\text{Mit } \alpha = -\omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) \text{ erhalten wir } \dot{\omega}_1 = -\alpha \omega_2 \quad \dot{\omega}_2 = \alpha \omega_2$$

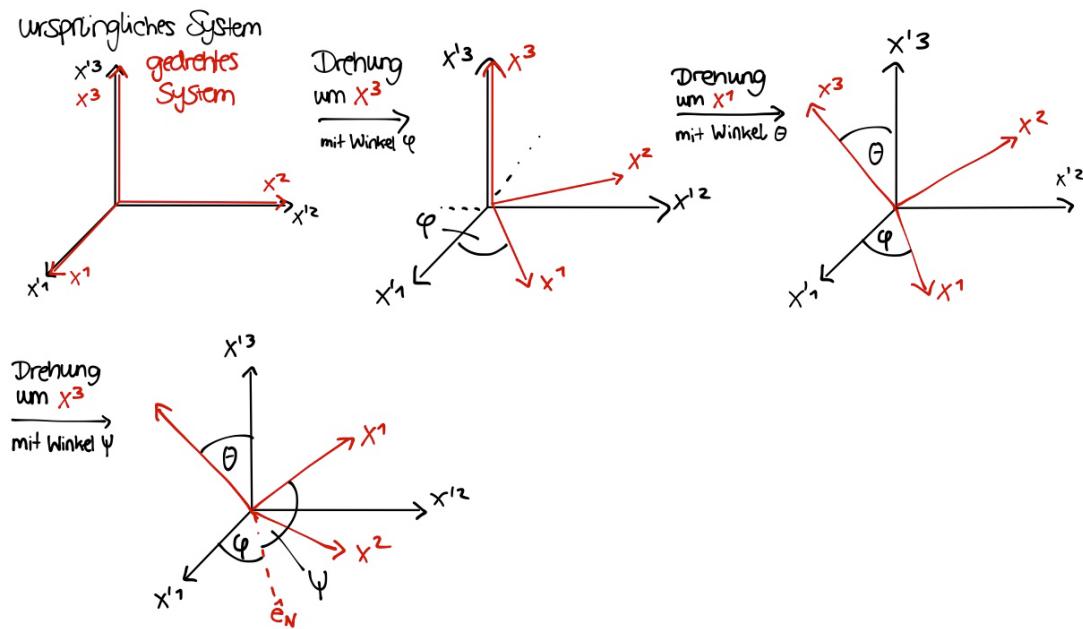
Dann ergibt sich die allgemeine Lösung für die freie Präzession mit Frequenz  $\alpha$ :

$$\omega_1 = A \cos(\alpha t) \quad \omega_2 = A \sin(\alpha t) \quad \omega_3 = \text{const}$$

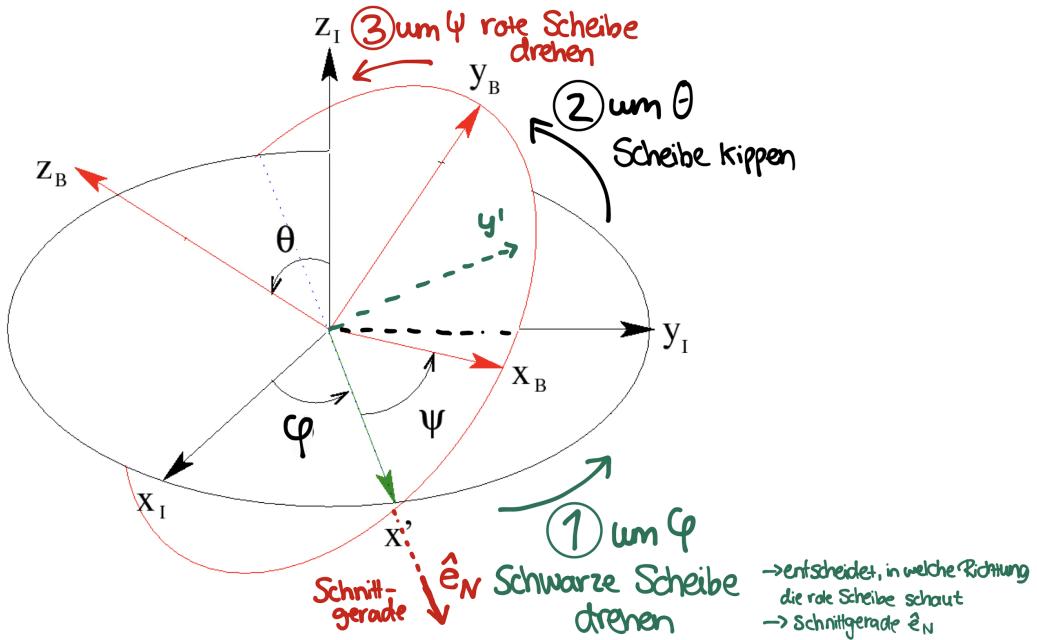
### 2.4.3 Euler-Winkel

Um Rotationen und zueinander verdrehte Koordinatensysteme ein für alle mal zu standardisieren hat Leonhard Euler<sup>13</sup> sich die **Euler-Winkel** ausgedacht. Damit hat er ganz nebenbei noch die komplette  $SO(3)$  Gruppe parametrisiert.

Die Idee: Wir drehen das ganze Koordinatensystem mit den Winkel  $\varphi$  um die  $x_3$ -Achse. Dann drehen wir mit dem Winkel  $\theta$  um die  $x_1$ -Achse, sodass die  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse gekippt werden. Danach drehen wir noch mal um die jetzt irgendwo anders liegende  $x_3$  Achse, diesmal mit dem Winkel  $\psi$ . So kann man alle Drehungen realisieren. Dasselbe Prinzip benutzt ein Gimbal, mit dem ihr euer Smartphone bzw. professionelle Filmkameras so stabilisieren könnt, dass die Videos nicht verwackeln.

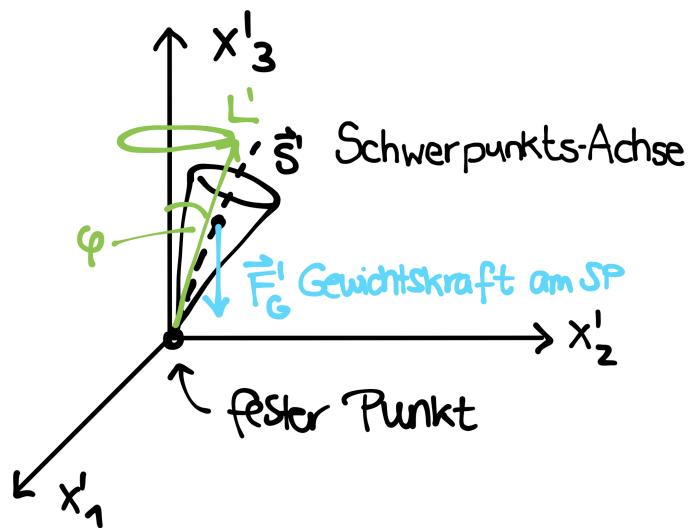


<sup>13</sup>neben den 1000 andern sachen, die der dude gerockt hat, respekt man



#### 2.4.4 Schwerer Kreisel

Beim schweren Kreisel taucht die Gravitation zack auf einmal wieder auf und wir schauen aus dem raumfesten System drauf. Wenn wir etwas schummeln, können wir sagen, dass der L-Vektor parallel zur Schwerpunktsachse verläuft:  $\mathbf{L}' \parallel \mathbf{S}'$ . Um uns das Leben leichter zu machen, sagen wir außerdem noch  $I_1 = I_2 := I_0$ .



Mit sehr vielen Näherungen und Mogeln können wir sagen, dass die Länge des L-Vektors konstant ist, denn:

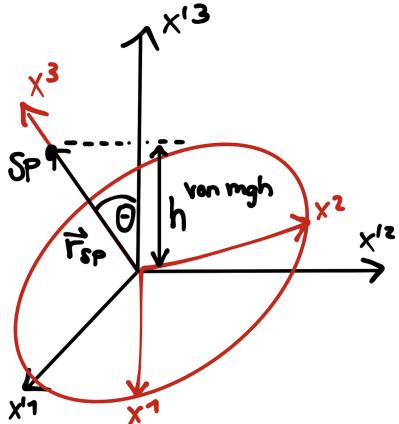
$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}'^2 = 2\mathbf{L}' \cdot \dot{\mathbf{L}}' = 2\mathbf{L}' \cdot \mathbf{M}' = 0 \quad (\mathbf{M}' \perp \mathbf{L}') \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{L}'| = \text{const}$$

Da  $\mathbf{M}'$  immer in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt, muss sich die Spitze von  $\mathbf{L}'$  auf einem Kreis (weil Länge konstant) bewegen, der in einer Ebene parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene ist. Der Kreisradius ist dann  $R = |\mathbf{L}'| \sin \varphi$  und die Geschwindigkeit  $|\mathbf{M}'|$ .

Quick maffs und wir bekommen die Periodendauer der Präzession:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi |\mathbf{L}'| \sin \varphi}{|\mathbf{M}'|} = \frac{2\pi |\mathbf{L}'|}{mgl}$$

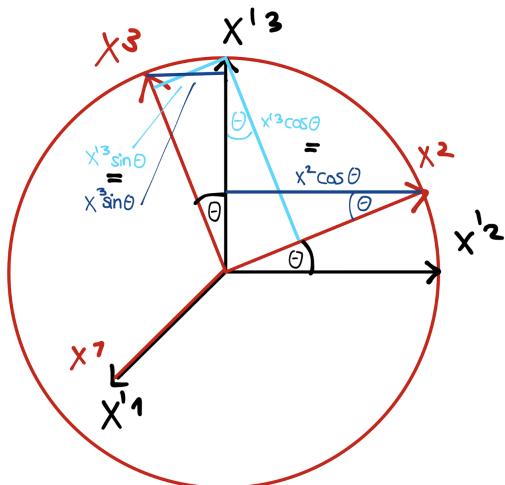
[  $l$  = Abstand fester Punkt und Schwerpunkt ]



Okay wie sieht es aus mit der Lagrange-Funktion? Sollte eigentlich nicht so schwer sein:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - mgl \cos \theta$$

Jetzt wäre es noch gut, die  $\omega_i$  in unsere Euler-Winkel umzuschreiben. Dazu hilft hoffentlich folgendes Bild:



gestrichen = vorher  
ungestrichen = nachher

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_N = \mathbf{e}_1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3' &= \mathbf{e}_3' \sin \theta + \mathbf{e}_2' \cos \theta \\ &= \mathbf{e}_3 \sin \theta + \mathbf{e}_2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_3' + \dot{\theta} \mathbf{e}_N + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 \sin \theta + \dot{\varphi} \mathbf{e}_2 \cos \theta + \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \\ &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \dot{\theta} \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \cos \theta \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad \text{okay das alles in L rein:}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta$$

Wir erkennen, dass  $\varphi$  und  $\psi$  zyklische Koordinaten sind (= nicht in  $L$  vorkommen), deshalb gilt hier die [Drehimpulserhaltung](#):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} := L'_3 = \text{const} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} := L'_3 = \text{const}$$

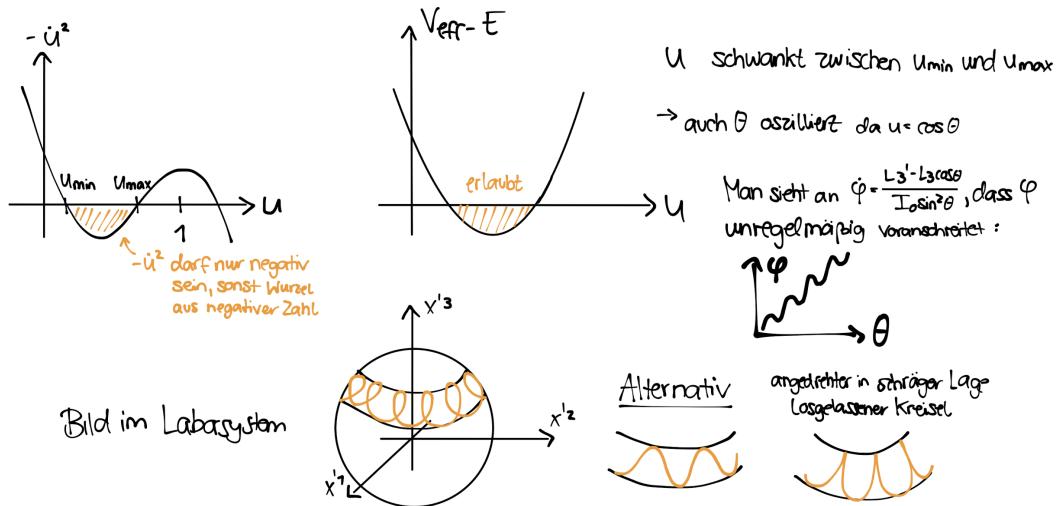
Und los geht das ewige Rumgerechne, das wir in [Aufgabe 6.1](#) machen mussten.

$$\text{Heraus kommt dabei: } \mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{(L'_3 - L_3 \cos \theta)^2}{2I_0 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} - mgl \cos \theta$$

Das kann man zu einer Energie umschreiben, indem wir statt  $\mathcal{L} = T - V$  dann  $E = T + V$  nehmen. Außerdem macht diese Substitution die ganze Sache noch einfacher:

$$u = \cos \theta \quad \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - u^2 \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{\sin^2 \theta} = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2}$$

$$E = \frac{I_0}{2} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(L'_3 - L_3 u)^2}{2I_0(1 - u^2)} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mglu = \frac{I_0}{2} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + V_{\text{eff}}$$



## 2.5 D'Alembert und Lagrange 1. und 2. Art

### 2.5.1 Zwänge

Willkommen zu unserem "10 Arten von" Special - diese Woche geht es um das Thema Zwangsbedingungen. Wir alle kennen Zwangsbedingungen aus unserem Alltag, wenn wir uns z.B. früh morgens aus dem Bett quälen, um eine tolle Physikvorlesung anzuhören. Wir als Physiker kennen - abgesehen vom Druck, die Klausur zu bestehen - noch eine ganze Reihe von anderen Zwängen.

Oft betrachten wir Systeme ohne Zwänge, wie zum Beispiel der freie Raum. Da gibt es keine Wände und keine Sachen, die Teilchen können sich überall bewegen, und ein System mit  $N$  Teilchen hat also  $3N$  Freiheitsgrade. Zwänge schränken aber diese Bewegungen ein. Wenn wir zum Beispiel ein Pendel betrachten, dann haben wir in unser System einen Zwang eingeführt, dadurch dass die Länge des Seils unsere Bewegung beschränkt.

#### 1. Holonome Zwangskräfte

Holonome Zwänge sind integrierbar, d.h. man kann sie immer mit einer nicht differenziellen Gleichung beschreiben. Wir können also für alle holonomen Zwänge eine Funktion aufstellen, die von unseren Koordinaten abhängt und Null ergibt:

$$\phi(q_1, \dots, q_m, t) = 0$$

Außerdem sind holonome Zwangskräfte immer Zwänge, bei denen die Bewegung auf eine *Mannigfaltigkeit*<sup>14</sup> eingeschränkt ist. Durch jeden holonomen Zwang wird die Zahl der *Freiheitsgrade* um 1 reduziert, man braucht also eine DGL weniger, um das System zu lösen.

<sup>14</sup>aka eine irgendwie geformte Fläche, die dem euklidischen Raum lokal ähnelt

### Beispiel 11

**Beispiel:** Schiefe Ebene

Bei einer Schiefen Ebene gilt  $y = mx + b = \tan \theta x + h_0$

Das können wir ez umschreiben, dass da "irgendwas = 0" steht:  $y - \tan \theta x - h_0 = 0$

**Beispiel:** Fadenpendel  $x^2 + y^2 - l^2 = 0$

**Beispiel:** Teilchen auf Kugeloberfläche

Bei einer Kugel gilt  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$

Das können wir auch ez umschreiben:  $R - |\mathbf{r}| = R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

## 2. Nicht holonome Zwangskräfte

Nicht holonome Zwänge sind das alles nicht. Sie sind nicht integrierbar und man kann entweder nur differenzielle Gleichungen aufschreiben oder Ungleichungen. Man kann keine nicht differenzielle Funktion  $\phi$  der Variablen finden, die Null ergibt. Die Freiheitsgrade reduzieren sich dadurch leider nicht.

### Beispiel 12

**Beispiel:** Rad auf Ebene

Wir haben ein Rad, das reibungsfrei auf einer Ebene am Punkt  $(x_1, x_2)^T$  steht. Es hat zur  $x_1$ -Achse einen Winkel  $\theta$  und der Drehwinkel vom Rad ist  $\varphi$ . Wir finden nur die differenziellen Zwangsbedingungen:

$$dx_1 = R \cos \theta d\varphi \quad dx_2 = R \sin \theta d\varphi$$

**Beispiel:** Teilchen in Kugel  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$

## 3. rheonome Zwangskräfte

Das sind Zwangskräfte, die sich zeitlich ändern - also von  $t$  abhängen.

## 4. skleronome Zwangskräfte

Das sind Zwangskräfte, die sich zeitlich konstant sind - also *nicht* von  $t$  abhängen.

## 5. ganz andere Zwangskräfte

Das sind Zwangskräfte, die sich nicht in unser Muster einordnen lassen wie z.B. Teilchen, die in einem Kasten eingesperrt sind und mit den Wänden stoßen (ja Thermodynamik ist doof).

## 2.5.2 Prinzip der virtuellen Arbeit und virtuelle Verrückungen

Wir kennen uns schon ziemlich gut mit dem 2. Newtonschen Gesetz aus, es besagt, dass

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \quad (2.5.1)$$

und das beschreibt die Bewegung eines Systems unter der Ausübung einer Kraft, oder die Bewegung eines Systems, das eine Beschleunigung erfährt. Systeme im Gleichgewicht sind aber viel cooler und angenehmer zu rechnen als Systeme ohne Gleichgewicht. Für Systeme im Ungleichgewicht können wir aber sagen hokus pokus hier ist eine Zwangskraft (englisch *constraint*, daher  $\mathbf{F}_C = -m\ddot{\mathbf{x}}$ ) aka imaginäre Kraft aka Inertialkraft, die der äußeren mechanischen Kraft entgegenwirkt, sodass wir am Ende doch im Gleichgewicht sind:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_C \quad (2.5.2)$$

Da wir mit Systemen mehrerer Teilchen arbeiten wechseln wir kurz die Notation auf

$$\mathbf{F}_a^{\text{tot}} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_a^C \quad (2.5.3)$$

mit den äußeren Kräften  $\mathbf{F}_a$ .

Aber Moment: Wie erkenne ich, was jetzt eine Zwangskraft und was eine äußere Kraft ist? Man hat sich irgendwann darauf geeinigt, dass äußere Kräfte in Größe und Richtung vorgegeben sind wie z.B. die Gravitation oder die Coulombkraft. Zwangskräfte dagegen sind je nach Zeitpunkt und System unterschiedlich. Im Prinzip sind sie nur ein imaginäres Hilfsmittel für uns Physiker, um zu erklären, warum das System das macht, was es eben macht.

Wenn z.B. etwas eine schräge Ebene herunterrollt, ist die Gravitationskraft eine äußere Kraft, die immer fest vorgegeben ist. Weil das Objekt aber nicht straight nach unten durch die Ebene durchfällt, muss es eine Zwangskraft von der Ebene geben, die dafür sorgt, dass man nicht durchfallen kann<sup>15</sup>.

Wir haben jetzt einfach so aus dem Nichts<sup>16</sup> eine Kraft erschaffen. Also müssen wir dafür sorgen, dass diese herbeigezauberte Kraft keine Arbeit verrichtet, das würde nämlich unser System kaputt machen. Problem: Bei dem Beispiel "Perle auf Draht" wird Arbeit  $dW = \mathbf{F} ds$  verrichtet wenn sich die Perle um  $ds$  entlang des Drahts bewegt. Das ist nicht cool! Aber auch hier gibt es einen schmutzigen Physiker-Trick harharhar: Wir sagen einfach wir halten die Zeit an und bewegen die Perle um  $\delta\mathbf{x}$  auf dem Draht. Das ist dann keine "echte" Bewegung mehr, sondern eine *virtuelle Verrückung*  $\delta\mathbf{x}$  und erzeugt nur noch *virtuelle Arbeit*  $\delta A$ <sup>17</sup>.

Let's just take our [system], and [put] it somewhere else.

- Patrick Stern

<sup>15</sup>sowas hätte ich auch gerne für die Klausur :(

<sup>16</sup>"weil ich es kann" - Hebbie, 2021

<sup>17</sup>das hat nichts mit onlyfans zu tun

### Prinzip der virtuellen Arbeit

Was wir möchten ist, dass unser System keine Arbeit verrichtet, wenn wir die Zwangskräfte mitberücksichtigen. Es muss also gelten:

$$\delta A = \mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{x}_a + \mathbf{F}_a^C \cdot \delta \mathbf{x}_a \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.5.4)$$

Im Gleichgewicht gilt auf jeden Fall, dass die Summe der äußeren Kräfte Null ist:

$$\sum \mathbf{F}_a = 0 \quad (2.5.5)$$

Damit die virtuelle Arbeit wirklich Null wird, muss für die Zwangskräfte gelten:

$$\text{Prinzip der virtuellen Arbeit} \quad \sum \mathbf{F}_a^C \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (2.5.6)$$

Einmal fix umgestellt bekommen wir sogar (fast) schon das D'Alembert'sche Prinzip:

$$\sum (\mathbf{F}_a - \mathbf{F}_{\text{tot}}) \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (2.5.7)$$

### 2.5.3 D'Alembertsches Prinzip in verallgemeinerte Koordinaten

Basically a bunch of WDHD?

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert mochte offenbar weder die Zwangskräfte noch seinen eigenen Namen<sup>18</sup> also hat er das Prinzip der virtuellen Arbeit genommen und umgestellt, sodass  $\mathbf{F}_C$  nicht mehr vorkommt.

$$\text{D'Alembert'sches Prinzip} \quad \sum_a (\mathbf{F}_a - m_a \ddot{\mathbf{x}}_a) \cdot \delta \mathbf{x}_a = 0 \quad (2.5.8)$$

Das ist aber nicht so schön, denn manchmal ist es sehr aufwendig, ein System mit den ganzen Koordinaten zu beschreiben, wir hätten lieber eine ähnliche Gleichung für unsere verallgemeinerte Koordinaten.

#### What did Hebbie do?

Als erstes: Wie schreiben wir denn  $\delta \mathbf{x}_a$  um?<sup>a</sup> Also der Vektor  $\mathbf{x}_a$  hängt ja von den verschiedenen verallgemeinerten Koordinaten ab, das heißt, wenn wir ihn variieren um ein  $\delta \mathbf{x}_a$  müssen wir all diese  $q_m$ 's berücksichtigen, und ähnlich wie wir in Variationsrechnung 1.7 gemacht haben, müssen wir  $\mathbf{x}_a$  nach  $q_m$  ableiten, und mit dessen

<sup>18</sup>er war eigentlich der uneheliche Sohn des Herzog von d'Arenberg und seiner Marquise, die ihn bei der Seitenkapelle St-Jean-le-Rond von Notre Dame ausgesetzt hat. Aua. Sein reicher Daddy hat ihm aber immerhin die Uni bezahlt. Trotzdem hat er das r irgendwie zu einem l gemacht und ich erspare mir hier rassistische Chinesen-Witze.

Änderung multiplizieren<sup>b</sup>.

$$\delta \mathbf{x}_a = \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \quad (2.5.9)$$

Zunächst betrachten wir den ersten Summand:

$$\mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{x}_a = \mathbf{F}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \quad (2.5.10)$$

Vorsicht, hier gibt es eigentlich eine Doppelsummation. Diesen Term (oder zumindest die ersten zwei Faktoren) definieren wir im Folgenden als die verallgemeinerte Kraft

$$Q_m \equiv \mathbf{F}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \quad (2.5.11)$$

Dann bleibt nur noch

$$\mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{x}_a = Q_m \cdot \delta q_m \quad (2.5.12)$$

Ebenfalls formen wir den zweiten Term weiter um:

$$\ddot{\mathbf{x}}_a \cdot \delta \mathbf{x}_a = \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m \quad (2.5.13)$$

Das ist doch ein bisschen schöner, weil wir einmal  $\ddot{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{x}$  irgendwie haben. Wir könnten uns sogar überlegen, es sieht fast wie ein Teil der Produktregel aus, und zwar:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \right) = \ddot{\mathbf{x}}_a \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} + \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \right) \quad (2.5.14)$$

ah fuck go back, es ist doch nicht gleich. Kein Problem wir können einfach den Rest davon wieder abziehen.

$$\ddot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m = \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \right) - \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \right) \right) \delta q_m \quad (2.5.15)$$

Jo aber why tf würden wir das machen, das sieht noch schlimmer aus? Das werden wir bald sehen, und zwar jetzt können wir alles anhand  $\mathbf{x}$  und  $\dot{\mathbf{x}}$  ausdrucken, wir suchen nur eine schönere Schreibweise dafür. Wir gehen als erstes davon aus, dass  $\mathbf{x}$  nur von  $q$  und  $t$  abhängt, also können wir mit der totalen Ableitung auch  $\dot{\mathbf{x}}$  bestimmen, (lieber ohne Indizes because) als:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (2.5.16)$$

Das ist nur die Definition der totalen Ableitung 2.1.1. Jetzt spielen wir weiter mit der Mathematik und den Definitionen und erhalten:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (2.5.17)$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial t} \quad (2.5.18)$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (2.5.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial q} \quad (2.5.20)$$

$$= \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (2.5.21)$$

Und das ist nice, weil offensichtlich sind (2.5.19) und (2.5.21) gleich:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) \quad (2.5.22)$$

Dann bleibt nur in (2.5.15) einsetzen.

$$\ddot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m = \left( \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_m} \right) \delta q_m \quad | \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_m}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial q_m}$$

$$(2.5.23)$$

$$| \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a^2}{\partial \dot{q}_m} = 2 \dot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a}{\partial \dot{q}_m} \quad (2.5.24)$$

Also können wir einsetzen:

$$= \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a^2}{\partial \dot{q}_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_a^2}{\partial q_m} \right) \delta q_m \quad (2.5.25)$$

$$= \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) \frac{\dot{\mathbf{x}}_a^2}{2} \right) \delta q_m \quad (2.5.26)$$

Wenn wir zusätzlich die Masse miteinbeziehen:

$$\sum_{a,m} m_a \ddot{\mathbf{x}}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m = \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right) \delta q_m \quad (2.5.27)$$

Und wenn wir zurück nach (2.5.8) mit der Definition in (2.5.11) gehen, dann erhalten wir den Ausdruck den wir gesucht hatten, und zwar das d'Alembertsche Prinzip in verallgemeinerte koordinaten:

$$0 = \left( Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right) \delta q_m \quad (2.5.28)$$

Das impliziert, dass

$$0 = Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \quad (2.5.29)$$

Das fassen wir auch gerne als ein Vektor auf:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} Q_1 - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) T \\ \vdots \\ Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \end{pmatrix} \quad (2.5.30)$$

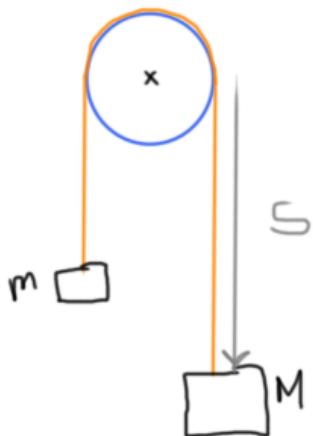
<sup>a</sup>Danke Felix!

<sup>b</sup>Hier ist es wichtig, dass wir hier wie damals nur in erster Ordnung entwickelt haben, also um kleine Veränderungen  $\delta$ , sonst geht's nicht.

Wir kommen zu diesen Werkzeugen in Lagrange-Gleichungen unter differentiellen Zwangsbedingungen 2.5.4 zurück, davor müssen wir noch einiges einführen.

Im Moment brauchen wir aber nicht mal so weit gehen, um die Nützlichkeit des d'Alembertschen Prinzips zu merken. Untersuchen wir zum Beispiel die Atwood'sche Fallmaschine unter diesem neuen Blickwinkel:

### Beispiel 13



In einer solchen Anordnung hängt der Zustand der Maschine ausschließlich von der Strecke  $s$ , die die Massen zurücklegen. Dann können wir uns überlegen, welche Arbeit die Massen verrichten, wenn ihre Position sich jeweils um eine virtuelle Verrückung  $\delta s$  geändert hat:

Abbildung 2.10: Atwood'sche Fallmaschine

$$\delta A_m = -mg\delta s \quad (2.5.31)$$

$$\delta A_M = Mg\delta s \quad (2.5.32)$$

$$\rightarrow \delta A_a = (M - m)g\delta s \quad (2.5.33)$$

Die Arbeit, die durch die Zwangskraft verrichtet wird ist:

$$\delta A^C = -m\ddot{s}\delta s - M\ddot{s}\delta s \quad (2.5.34)$$

Das kommt dadurch, dass wir eine entgegenwirkende Kraft (Beschleunigung  $-\ddot{s}$ ) auf die Massen ausüben, so dass das System in Ruhe bleibt. So gilt also für die Arbeit  $\delta A$

$$\delta A = (M - m)g\delta s - (M + m)\ddot{s}\delta s \stackrel{!}{=} 0 \quad | \text{Laut (2.5.4)} \quad (2.5.35)$$

$$\rightarrow \ddot{s} = \frac{M - m}{M + m}g \quad (2.5.36)$$

Also gerade kann ich mich nicht erinnern, wie schwer diese Aufgabe mit den anderen Methoden gewesen wäre, aber hier können wir ganz gut merken wie leicht es mit d'Alembert ist.

## 2.5.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

### Lagrange Multiplikatoren

Wenn wir uns an die Lagrange-Gleichungen 2. Art erinnern, werden wir vielleicht merken, dass wir oft in relativ freie Systeme gearbeitet haben. Lagrange-Gleichungen 1. Art sind besonders nützlich, wenn wir explizit mit Zwangsbedingungen arbeiten. Der ganze Punkt von diesen Gleichungen ist ungefähr wie man solche Bedingungen in die Lösungen miteinbezieht. Diese Art von Problemen kennt man wahrscheinlich schon aus der Schule in der Form von Optimierungsaufgaben, zum Beispiel die Berechnung des Radius und der Höhe eines Zylinders, damit die Oberfläche bei konstantem Volumen minimal wird. Ebenfalls behandeln wir hier Systeme, die durch irgendwelche Bedingungen beschränkt sind, bei welchen wir etwas maximieren (bzw.) minimieren möchten.

Am anschaulichsten kann man mit holonomen Zwangsbedingungen anfangen, und zwar machen wir für Konsistenzzwecke mit dem Gebirge-Beispiel weiter:

### Beispiel 14

Du kletterst einen Berg hoch, weil man den Sonnenuntergang von ganz oben sehr schön sehen kann und du bist ja der absolute Romantiker. Aber du guckst dir den Berg an, der von der Funktion

$$f(x, y) = \frac{20}{1 + x^2 + y^2} \quad |x \in [-3, 3], y \in [-2, 2] \quad (2.5.37)$$

beschrieben wird, und vergleichst mit der Funktion, die deinen Weg auf der Karte beschreibt:

$$g(x, y) := x - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{5} = 0 \quad (2.5.38)$$

Wenn die Sonne auf der anderen Seite des Bergs untergeht, wirst du den Sonnen-

untergang auf deinem Weg sehen können?

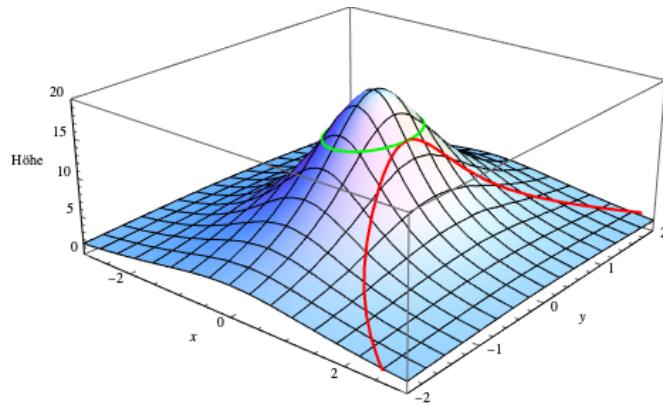


Abbildung 2.11: Dein Weg (rot) und der Berg

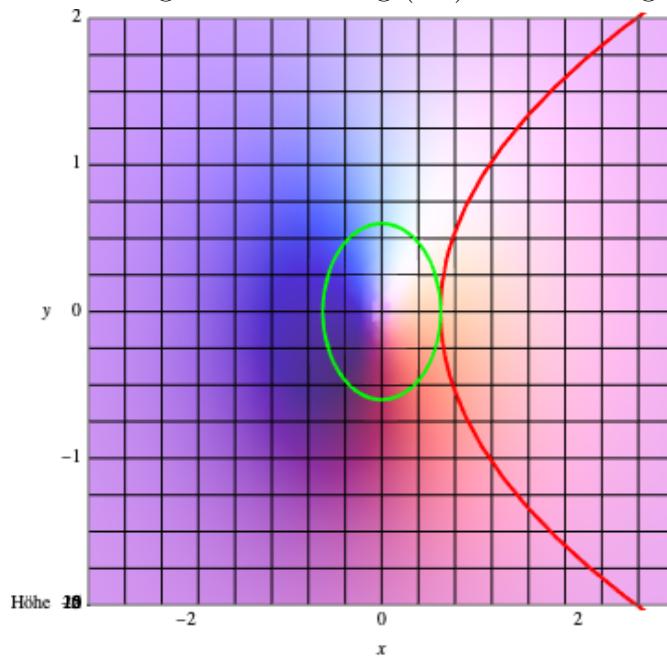


Abbildung 2.12: Dein Weg und der Berg aber von oben

Etwas scheint auf jedem Fall nicht zu stimmen, also rechnest du ganz schnell im Kopf nach, was der höchste Punkt deines Weges ist, und dann vergleichst ob man von diesem Punkt den Horizont im Westen sehen kann.

Du denkst: OK, wie berechne ich denn den höchsten Punkt? Da fällt dir ein, vielleicht kann man die Kurven zeichnen, die auf dem Berg immer die gleiche Höhe haben. Wenn du damit ein bisschen rumspielst, dann merkst du, dass es genau eine Kurve (grün) gibt, die den höchsten Punkt deiner Trajektorie nur an einer Stelle berührt. Die Höhe dieser Kurve wird also dem höchsten Punkt deiner Wanderung entsprechen. Du weißt aber nicht genau wie hoch diese Kurve ist, sonst würde es doch kein Spaß machen.

Was haben aber diese Kurven (grün und rot) jetzt gemeinsam, was dir weiter helfen könnte? Also, du überlegst dir, naja, die Tangenten an dieser Berührstelle gehen offensichtlich in die gleiche Richtung. Aber nicht nur das, sondern sie teilen auch auf diesem Grund eine Normale an dieser Stelle. Und dabei fällt dir auch ein, dass der

Gradient einer Funktion immer senkrecht zu dieser Funktion ist. Insbesondere sind die Gradienten von deinem Zwang  $g(x, y)$  und von der Höhenkurve parallel zu einander. Die müssen aber nicht unbedingt genauso groß sein.

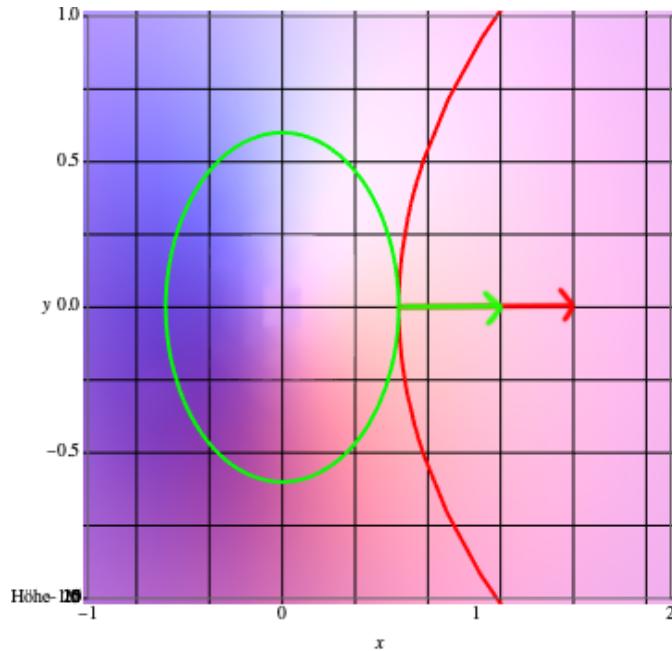


Abbildung 2.13: Close-up mit eingezeichneten Gradienten

Sie müssen sich um einen konstanten <sup>a</sup> Faktor unterscheiden, den nennen wir  $\lambda$ . Du fängst also an ganz schnell das mentale Kalkül zu machen:

$$\lambda \nabla g(x, y) = \nabla f(x, y) \quad (2.5.39)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (2.5.40)$$

Die erste Gleichung folgt aus deiner Überlegung eben gerade, und die zweite ist unser unvermeidlicher Zwang. Das muss also erfüllt sein. Jetzt, da du den Ansatz erkannt hast, kannst du loslegen und rechnen:

$$\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -y \end{array} \right. \quad (2.5.41)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{40x}{(1+x^2+y^2)^2} \end{array} \right. \quad (2.5.42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{40y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad (2.5.43)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (2.5.44)$$

Ah shit, das sieht wie ein Lineares Gleichungssystem aus, aber gut, dass du das auch im Kopf machen kannst, weil es wird nicht immer ein Taschenrechner vorhanden sein!

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \lambda &= -\frac{40x}{(1+x^2+y^2)^2} \\
 \text{II.} \quad -y\lambda &= -\frac{40y}{(1+x^2+y^2)^2} \\
 \text{III.} \quad 0 &= x - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{5} \\
 &\dots \\
 \rightarrow x &= \frac{3}{5} \\
 y &= 0 \\
 \lambda &= -\frac{3750}{289}
 \end{aligned}$$

Wenn du guckst wie hoch man auf diesem Weg kommt, dann merkst du es sind bloß nur 14,7 Meter, aber der Berg sollte ja 20 Meter hoch sein<sup>b</sup>, außerdem bist du da auf der Seite wo die Sonne nicht untergeht, also hast du dieses Mal Pech gehabt.

Also, ja, diese Werte hätte man aus unserem  $g(x, y)$  ablesen können, aber 1. die Aufgabe dient als Hilfe um das Konzept zu verstehen und 2. mir fallen nie gute Beispiele ein.<sup>c</sup>.

<sup>a</sup>In diesem Fall konstanten\*

<sup>b</sup>Bisschen klein, aber die Größe ist ja nicht das wichtigste

<sup>c</sup>Btw totally did the math on those equations eh

Wenn wir über das Beispiel denken, dann werden wir merken, dass unsere Vorstellung mit dem Gradienten auch genau dem entspricht, was in der Vorlesung gemacht wurde. Da hatten wir die folgenden 3 Gleichungen um das Problem zu lösen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) = 0 \quad (2.5.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) = 0 \quad (2.5.46)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (2.5.47)$$

Und diese Gleichungen entsprechen genau unserer Rechnung mit dem Gradienten

Dieses Lambda hat nicht nur eine mathematische Bedeutung, es sagt uns schon etwas über unsere Funktion und wie sich unser Maximalwert verändert. Dieses Verhältnis ist aber im Allgemeinen nicht für uns wichtig. Unter anderem ist der Multiplikator hilfreich um "Einheiten" zu korrigieren.

Die Verallgemeinerung auf größere Systeme erhöht den Schwierigkeitsgrad nur um die Anzahl an Gleichungen, aber macht die Gleichungen selbst nicht komplizierter. Dann müssen wir uns nur überlegen, dass jedes Element des Systems vielleicht mehreren Zwängen ( $g_k = 0$  mit  $1 \leq k \leq r$ ) unterworfen ist, und dementsprechend formulieren wir für jedes Element sein eigenes Gleichungssystem wie folgt<sup>19</sup>:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5.48)$$

<sup>19</sup>Denk dran wegen des Doppelauftretenden Index  $k$  handelt es sich um Einstein-Konvention

### Lagrange-Gleichungen unter differentiellen Zwangsbedingungen

Wir betrachten nun, dass die verallgemeinerten Koordinaten auch von  $p$  differentiellen Zwangsbedingungen beschränkt sein, diese sind bekanntlich von der Form:

$$f_m^\alpha \, dq_m + f_t^\alpha \, dt = 0 \quad (2.5.49)$$

Wie auch früher würden wir gerne diese Formel als ein Vektor auffassen, und zwar

$$\mathbf{f}^\alpha \, d\mathbf{q} + f_t^\alpha \, dt = 0 \quad (2.5.50)$$

Dabei bezeichnen wir den Vektor  $\mathbf{f}^\alpha$  als der Vektor, der die Funktionen vor den differentiellen Anteilen  $dq_m$  enthält und den Vektor  $d\mathbf{q}$  als der Vektor, der in der benutzten Reihenfolge die differentiellen Anteilen  $dq_m$  enthält. Diese Formel liest man als  $1 \leq \alpha \leq p$  Gleichungen, bei welchen jeweils eine der Zwänge  $\alpha$  einen Einfluss auf jede verallgemeinerte Koordinate haben kann. Für Hebecker ist es anscheinend bequem, diese  $p$  Gleichungen als Vektor aufzufassen und ein bisschen Lineare Algebra zu machen, aber das finde ich nicht so schön. Um diese Formel zu interpretieren finde ich es besser ein spezifisches Problem zu betrachten:

#### Beispiel 15

Gegeben seien zwei Räder mit Radius  $r$ , die durch einen Stab mit Länge  $2R$  verbunden sind. Die Gesamtmasse des Systems sei  $M$  und die Räder können unabhängig von einander drehen. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei O.B.d.A.:  $\phi(0) = 0, \theta(0) = 0$

Es gelte:

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (2.5.51)$$

$$\theta = \frac{r}{R} \cdot \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad (2.5.52)$$

Als erstes wollen wir die differentiellen Zwangsbedingungen formulieren. Mithilfe einer Zeichnung können wir das besser erkennen<sup>a</sup>:

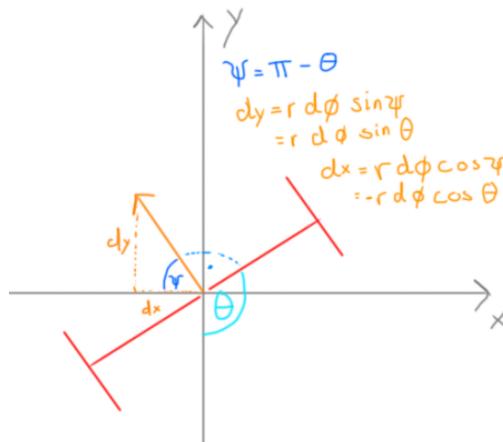


Abbildung 2.14: Bewegung  $dx, dy$

So lauten also unsere Zwangsbedingungen, sehr ähnlich zum Beispiel aus der Vor-

lesung:

$$dx = -r \, d\phi \cos \theta \quad (2.5.53)$$

$$dy = r \, d\phi \sin \theta \quad (2.5.54)$$

Unsere verallgemeinerte Koordinaten sind  $x, y, \phi$  und  $\theta$ . In diesem System haben wir keine explizite Zeitabhängigkeit. Es gilt für  $\alpha = 1$

$$f_m^1 \, dq_m = dx + r \, d\phi \cos \theta \quad (2.5.55)$$

$$\iff f_x^1 = 1 \quad (2.5.56)$$

$$f_y^1 = 0 \quad (2.5.57)$$

$$f_\phi^1 = r \cos \theta \quad (2.5.58)$$

$$f_\theta^1 = 0 \quad (2.5.59)$$

Und als Vektor aufgefasst:

$$\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.60)$$

Für  $\alpha = 2$  gilt:

$$f_m^2 \, dq_m = dy - r \, d\phi \sin \theta \quad (2.5.61)$$

$$\iff f_x^2 \, dx = 0 \quad (2.5.62)$$

$$f_y^2 \, dy = 1 \quad (2.5.63)$$

$$f_\phi^2 = -r \sin \theta \quad (2.5.64)$$

$$f_\theta^2 = 0 \quad (2.5.65)$$

Als Vektor:

$$\mathbf{f}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.66)$$

Wenn wir eine Zeitabhängigkeit hätten bräuchten wir nur einen weiteren Eintrag in unseren Vektor hinzufügen müssen.

---

<sup>a</sup>Danke Fred

Einmal, dass man die differentiellen Zwängen schon richtig formuliert hat, kann man direkt in den nächsten Schritt einen Blick werfen, und zwar möchten wir im Allgemeinen mit dieser Methode auch die Bewegungsgleichungen eines Systems bestimmen.

Wie wir bereits bei den Lagrange-Multiplikatoren gelernt haben 2.5.4, müssen wir bei der Problemstellung eines Extremums unter Nebenbedingungen zwei Sachen erfüllen.

Und zwar brauchen wir eine Nebenbedingung, die wir normalerweise als Nullstellenmenge betrachten ( $g = 0$ ), und die Lagrange-Gleichung selbst. Das heißt, wir müssen folgende Gleichungen lösen um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen:

Aus einem tatsächlich sinnvollen Grund haben wir versucht alles mögliche als Vektoren aufzufassen, als kurze Zusammenfassung schreiben wir sie zunächst alle auf, damit man nicht so weit hoch scrollen muss:

$$\delta \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}^\alpha = \begin{pmatrix} f_1^\alpha \\ \vdots \\ f_m^\alpha \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} Q_1 - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) T \\ \vdots \\ Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \end{pmatrix} \quad (2.5.67)$$

Dabei wissen wir aber per Annahme, dass folgendes gilt:

$$\mathbf{f}^\alpha \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.5.68)$$

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.5.69)$$

Dies können wir nicht ohne weiteres vergleichen und gleich setzen, denn es gilt auch sicherlich:

$$\lambda^\alpha \mathbf{f}^\alpha \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.5.70)$$

Wir können also nicht sofort davon ausgehen, dass  $\boldsymbol{\pi} + \mathbf{f}^\alpha = 0$ . Man braucht diesen Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  zum größten Teil um die Gleichung lösen zu können. Physikalisch können wir uns das kurz vorstellen als eine Konstante, die dafür sorgt, dass wir mit den richtigen Einheiten rechnen, denn die Nebenbedingungen, die Zwängen, nicht unbedingt den Einheiten unserer Funktionen  $\boldsymbol{\pi}$  entsprechen. Die Einführung dieser Proportionalitätskonstante wurde ein direkter Vergleich zwischen den beiden ermöglichen. So können wir nämlich folgendes machen:

$$(\boldsymbol{\pi} + \lambda^\alpha \mathbf{f}^\alpha) \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.5.71)$$

Und daraus folgern, dass

$$\boldsymbol{\pi} + \lambda^\alpha \mathbf{f}^\alpha = \mathbf{0} \quad (2.5.72)$$

Die Vektorschreibweise Stellt uns zur Verfügung sofort ein Gleichungssystem was wir lösen müssen.

$$Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \quad (2.5.73)$$

$$f_m^\alpha \dot{q}_m + f_t^\alpha = 0 \quad (2.5.74)$$

Was identisch gleich ist zu:

$$\boldsymbol{\pi} + \lambda^\alpha \mathbf{f}^\alpha = \mathbf{0} \quad (2.5.75)$$

$$\mathbf{f}^\alpha d\mathbf{q} + f_t^\alpha dt = 0 \quad (2.5.76)$$

Aus (2.5.75) erhalten wir  $m$  verschiedene Gleichungen, und aus (2.5.76) noch  $p$  weitere Gleichungen mit den wir die Bewegungsgleichungen bestimmen können<sup>20</sup>.

<sup>20</sup>In der obigen Formel ist übrigens  $d\mathbf{q} \equiv (dq_1, \dots, dq_m)^T$

### Lagrange-Gleichungen unter holonomen Zwangsbedingungen

Wenn wir uns an die kurze Einführung zu den Lagrange Multiplikatoren 2.5.4 erinnern, dann wissen wir, dass wir den "Anstieg" zwischen einer Funktion und einer Zwangsbedingung vergleichen können, durch diese bereits erwähnte Lagrange-Multiplikatoren. Im Fall der differentiellen Zwangsbedingungen haben wir das schon erklärt, da müssen wir uns keine Sorgen machen, wenn wir die Zwänge aufgestellt haben. Bei holonomen Zwängen ist die Herangehensweise nur ein bisschen anders.

1. Stelle Zwangsbedingungen auf:

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0 \quad (2.5.77)$$

2. Setze die Lagrange-Gleichungen auf:

Pro Koordinate müssen wir eine Lagrange-Gleichung aufstellen:

$$Q_m - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \quad (2.5.78)$$

Falls die Kräfte im System konservativ sind, ist dies äquivalent zu

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) \mathcal{L} - \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0 \quad (2.5.79)$$

Woops woops, Vorsicht hier! Wir sehen, dass wir *absichtlich* die Zwangsbedingungen und die Funktionen  $f_m^\alpha$  unterschiedlich benannt haben. Die sind tatsächlich unterschiedliche Sachen. Per die Methode der Lagrange-Multiplikatoren können wir die Gradienten der Zwangsbedingung und die der Funktion vergleichen, also steht hier eigentlich

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) \mathcal{L} = \lambda^\alpha \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q_m} = \text{Zwangskraft} \quad (2.5.80)$$

Denken wir für zwei Minuten, warum das Sinn macht: Auf einmal ist die Euler-Lagrange-Gleichung einfach die Zwangskraft? Der Grund dafür ist, dass die Zwangskraft genau unserer Bewegung entspricht! Die Zwangskraft "begleitet" unser Teilchen und sagt dem, wo es sich lang bewegen darf.

3. Löse das Gleichungssystem nach den  $\lambda^\alpha$ , sodass man eine Bewegungsgleichung für die Koordinaten erhält

#### Beispiel 16

Gucken wir uns nochmal eine Aufgabe aus letztem Semester an: Ein Teilchen auf der Spirale.

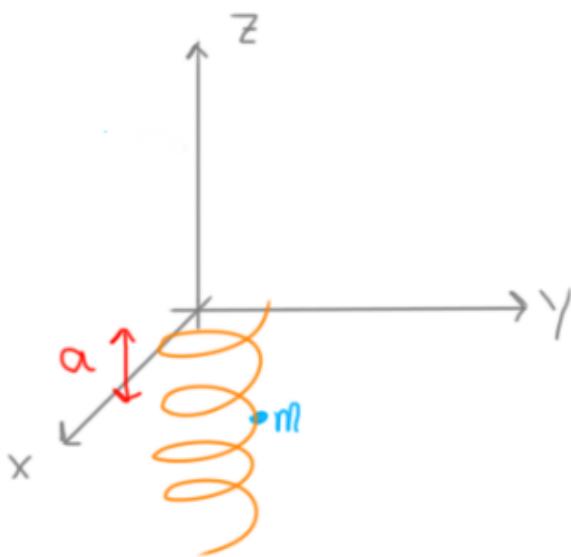


Abbildung 2.15: Teilchen auf Spirale

Wir benutzen zunächst Zylinderkoordinaten um die allgemeine Bewegung zu beschreiben<sup>a</sup>

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2.5.81)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \quad (2.5.82)$$

Damit ist die Lagrange-Funktion<sup>b</sup>

$$\mathcal{L}(r, \varphi, z) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - mgz \quad (2.5.83)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (2.5.84)$$

Ok, was jetzt. Wir wissen aus dem Konzept der Lagrange-Multiplikatoren, dass wir Extrema unter Nebenbedingung mit folgender Formel bestimmen können:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad (2.5.85)$$

bzw.

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla h + \dots \quad (2.5.86)$$

Um unsere Euler-Lagrange-Gleichung müssen wir uns keine Sorgen machen, wir können denken, das ist schon in  $\nabla f$ -Form, wegen der Extremalierungsbedingungen die wir für die Herleitung durchführen mussten. Dann müssen wir gucken: Was sind unsere Nebenbedingungen? Als erstes ist klar,

$$\phi_1 = r - R = 0 \quad (2.5.87)$$

Zweitens können wir durch "scharfes" Hingucken herleiten, die Steigung der Spirale ist  $\frac{a}{2\pi}$  und die Höhe  $z$  wird durch den Winkel  $\varphi$  abhängen:

$$\dot{\phi}_2 = z + \frac{a}{2\pi}\varphi = 0 \quad (2.5.88)$$

Jetzt sind wir bereit, ich möchte aber noch kurz begründen, weshalb wir noch einiges in der nicht vereinfachten Form gelassen haben: Dadurch, dass wir jetzt 3 Unbekannten haben: den Faktor  $\lambda^1$  was zur ersten Zwangsbedingung gehört, den Faktor  $\lambda^2$  von der zweiten, und zusätzlich noch unsere Bewegungsgleichung für  $\ddot{\varphi}$ , brauchen wir auf jeden Fall mindestens 3 Gleichungen um alle zu bestimmen. Dafür eignen sich die folgenden:

$$\text{I.} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \lambda^\alpha \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial r} \quad (2.5.89)$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\lambda^1 \quad (2.5.90)$$

$$\text{II.} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \lambda^\alpha \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \varphi} \quad (2.5.91)$$

$$mr^2\ddot{\varphi} = \frac{a}{2\pi}\lambda^2 \quad (2.5.92)$$

$$\text{III.} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \lambda^\alpha \cdot \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z} \quad (2.5.93)$$

$$m\ddot{z} + mg = \lambda^2 \quad (2.5.94)$$

Das ist jetzt ein System, was wir lösen können: Als erstes eliminieren wir  $\ddot{z}$  durch die zweite Zwangsbedingung und ersetzen es durch  $\ddot{\varphi}$ . Dann haben wir folgendes System:

$$\text{I.} \quad \lambda^1 = mr\dot{\varphi}^2 \quad (2.5.95)$$

$$\text{II.} \quad \lambda^2 = \frac{2\pi}{a}mr^2\ddot{\varphi} \quad (2.5.96)$$

$$\text{III.} \quad \lambda^2 = m\ddot{z} + mg = -m\frac{a}{2\pi}\ddot{\varphi} + mg \quad (2.5.97)$$

Hier können wir Gleichungen II. und III. nach  $\ddot{\varphi}$  auflösen und miteinander vergleichen

$$\underbrace{\lambda^2 \frac{a}{2\pi mr^2}}_{\text{II.}} = \underbrace{-\frac{2\pi}{ma}(\lambda^2 - mg)}_{\text{III.}} \quad (2.5.98)$$

$$\lambda^2 = \frac{-mg}{\frac{a^2}{4\pi^2 r^2} + 1} \quad (2.5.99)$$

Diese Gleichung können wir jetzt wieder in II. einsetzen und nach  $\ddot{\varphi}$  auflösen

$$\frac{-mg}{\frac{a^2}{4\pi^2 r^2} + 1} = \frac{2\pi}{a}mr^2\ddot{\varphi} \quad (2.5.100)$$

Nach ein bisschen Magie und Vereinfachung erhalten wir:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2ag\pi}{a^2 + 4\pi^2 r^2} \quad (2.5.101)$$

Ich werde es nicht so viel erläutern, aber siehe wie dieses Ergebnis darauf hindeutet, dass die Zwangskraft  $Q_\varphi^C = mr\dot{\varphi}^2$  explizit von der Zeit abhängt.

Alternativ: Man hätte die Freiheitsgrade des Systems schon von Anfang an reduziert haben können, dann eignen sich die 2 Zwangsbedingungen um das Gleichungssystem aufzustellen.

<sup>a</sup>Lasst uns vorstellen, dass wir noch nichts über irgendwelche Zwangsbedingungen wissen:

<sup>b</sup>Wir können schon ahnen, dass einige dieser Sachen schon vereinfacht sein können, aber zur Illustration machen wir kurz weiter damit.

## 2.6 Hamilton-Formalismus

### 2.6.1 Legendre-Transformation

Das Ziel der Legendre-Transformation ist, ohne dabei die Einheiten einer Formel zu verändern, einen alternativen Ausdruck zu finden, welches das gleiche Sachverhalt unter einem verschiedenen Blickwinkel beschreibt. Vor allem ist es ein Werkzeug um von einer Menge von Variablen in eine andere umzuwandeln. Spezifisch nennt man diese neuen Variablen die "konjugierten" Variablen, aber das ist nicht so relevant.

Die Legendre-Transformation ist definiert als:

$$g(u) = x(u) \cdot u - f(x(u)) \quad |u = f'(x) \quad (2.6.1)$$

Da soll man als erstes  $u$  bestimmen und versuchen daraus nach  $x$  in Abhängigkeit von  $u$  aufzulösen, sodass die gesamte Gleichung in Termen von  $u$  geschrieben ist.

#### Beispiel 17

Nehmen wir zum Beispiel die Legendre Transformation der Lagrange-Funktion in mehreren Variablen mit einer homogenen kinetischen Energie 2. Grades, bezüglich der Variablen  $\dot{q}_i$

Für die Lagrange Funktion in mehreren Variablen schreiben wir

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.6.2)$$

$$= \frac{1}{2}f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) \quad (2.6.3)$$

Die Legendre Transformation ist dann die Hamilton-Funktion in Abhängigkeit des Ortes, des verallgemeinerten Impulses und der Zeit:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \quad | \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i \quad (2.6.4)$$

$$= \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} \quad (2.6.5)$$

Aber  $p_i$  können wir nicht einfach so lassen, vor allem nicht weil wir immernoch eine Abhängigkeit von  $\dot{q}_i$  haben, was wir nicht möchten. Also müssen wir zuerst umformen:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.6.6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} f_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.6.7)$$

$$= \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k + \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ik} \dot{q}_j \quad (2.6.8)$$

$$= \frac{1}{2} f_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} f_{ji} \dot{q}_j \quad | f_{ij} \text{ symmetrisch} \quad (2.6.9)$$

$$= \frac{1}{2} f_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} f_{ij} \dot{q}_j \quad | \text{Umbenennung } j \rightarrow k \quad (2.6.10)$$

$$= f_{ik} \dot{q}_k \quad (2.6.11)$$

Dies eingesetzt in die obige Definition ergibt:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \dot{q}_i f_{ik} \dot{q}_k - (T - V) \quad (2.6.12)$$

$$= 2T - T + V \quad (2.6.13)$$

$$= T + V \quad (2.6.14)$$

Die Hamilton-Funktion hat also die Form der Gesamtenergie, wenn  $\mathcal{L}$  nicht explizit von  $t$  abhängt.

In mehreren Dimensionen funktioniert es analog, dann brauchen wir nur unsere Variablen vektorisieren<sup>21</sup>:

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \quad | \mathbf{u} = \nabla f(\mathbf{x}) \quad (2.6.15)$$

## 2.6.2 Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

### Hamilton-Funktion

Wie wir bereits im letzten Beispiel gesehen haben, ist der Hamiltonian die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion und falls keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt, hat die Funktion die Form

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = T + V \quad (2.6.16)$$

$$= p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (2.6.17)$$

### Kanonische Gleichungen

#### Einschub 7. Kanonisch

In Mathe, ein "kanonisches" irgendwas, ist umgangssprachlich<sup>a</sup>, die einfachste, die offensichtlichste Art ein Objekt oder ein Sachverhalt darzustellen. So wie es "kanonisch", oder offensichtlich und natürlich ist, Brüche auf ihre möglichst einfache Version zu

<sup>21</sup>  $I \rightarrow \mathbf{I}$

bringen, wir mögen ja lieber  $\frac{3}{4}$  statt  $\frac{8}{12}$  zu schreiben, so gibt es auch Repräsentanten von mathematischen Sachen, die in ihrem Feld "kanonisch" sind.

Die Formulierung der neuen Variablen  $p_i$  ist insofern "kanonisch", weil es Sinn macht, die generalisierten Impulse aus den Geschwindigkeiten herzuleiten.

*"von mir interpretiert"*

Zurück zu den Gleichungen:

Da die Lagrange-Funktion nicht von  $p_i$  abhängt, können wir die Funktion nach dieser Variable ableiten, und wir erhalten:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2.6.18)$$

Um  $p_i$  zu bestimmen brauchen wir aber schon einiges nachzurechnen. Aber die Idee besteht, wenn  $\partial_p H = \dot{q}$  ist, dann muss es ähnlich für  $p$  sein.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(p_j \dot{q}_j(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) \quad (2.6.19)$$

$$= p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \quad | \text{Verallg. Kettenregel auf } \mathcal{L} \quad (2.6.20)$$

$$| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p \quad (2.6.21)$$

$$= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad | \text{Erweitern mit } \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{d}{dt}} \quad (2.6.22)$$

$$= - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = - \dot{p}_i \quad (2.6.23)$$

Diese Gleichungen entsprechen den Bewegungsgleichungen unseres Systems, sie werden in der Regel gekoppelte Differentialgleichungen sein, aber wir wissen wie man einfache gekoppelte Differentialgleichungen löst (1.3.1), also ist das kein Problem.

Manche Sachen sind sehr bequem mit Hamilton zu rechnen, denn die Differentialgleichungen, die wir dadurch erhalten sind oft leicht entkoppelbar. Der Nachteil dabei ist, die Hamilton-Funktion ist grundsätzlich der Lagrange-Funktion unterordnet, alleine durch die Definition ist  $H$  die Legendre-Transformation von  $\mathcal{L}$ , also muss man als erstes die Lagrange-Funktion bestimmen.

## Eigenschaften der Hamilton-Funktion

1. Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (2.6.24)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (2.6.25)$$

## 2. Poisson-Klammer:

Die Poisson-Klammer ist ein extrem nützliches mathematisches Werkzeug, was uns im Hamilton-Formalismus hilft.

### Einschub 8. Poisson-Klammer

Im Hamilton-Formalismus beschreibt die Poisson-Klammer zwischen zwei Observablen<sup>a</sup>  $F(q_i, p_i, t), G(q_i, p_i, t)$  folgende Operation:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (2.6.26)$$

Die Poisson-Klammer erfüllt die folgenden 3 Eigenschaften, die sie zu einer Lie-Algebra machen:

(a) Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (2.6.27)$$

(b) Linearität:

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \quad (2.6.28)$$

(c) Jakobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (2.6.29)$$

---

<sup>a</sup>Eine Observable, wie der Name darauf hindeutet ist eine Größe, die wir messen können. Spezifisch können wir in der Mechanik den Impuls und die Position eines Systems messen. Funktionen, die also von diesen beiden Variablen  $p, q$ , egal wie sie aufgebaut sind, können wir messen und wir nennen sie Observablen

Durch die Eigenschaften der Hamilton-Funktion und der Poisson-Klammer können wir die totalen Zeitableitungen beliebiger Observablen bestimmen, warum wir das gerne für beliebige Observablen machen würden ist eine gute Frage, aber wir könnten es. Es gilt nämlich:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad | \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \quad (2.6.30)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.6.31)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, \mathcal{H}\} \quad (2.6.32)$$

Aufgrund der Antisymmetrie merken wir auch sofort: Wir können die totale Ableitung der Hamilton-Funktion selbst dadurch leicht bestimmen. Nämlich ist die Poisson-Klammer von  $H$  mit sich selbst, einfach die partielle Ableitung nach der Zeit Falls keine explizite Abhängigkeit vorhanden ist, dann ist  $\frac{dH}{dt} = 0$  und die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße. Eine allgemeine Funktion ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße, falls ihre Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion verschwindet.

### 2.6.3 Phasenraum

Der Phasenraum beschreibt das Verhältnis zwischen zwei Größen zueinander. Als Einstiegsbeispiel nimmt man gerne das Verhältnis einer Raub- und Beutetierbevölkerung. Anhand von Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen kann man immer<sup>22</sup> vorhersagen, gegeben eine Anzahl an Raubtieren, wie viele Beutetiere sich noch da befinden. Das kann man anhand des Lotka-Volterra Modells mit ein Paar von gekoppelten Differentialgleichungen, die den Verlauf dieser Bevölkerungen darstellen:

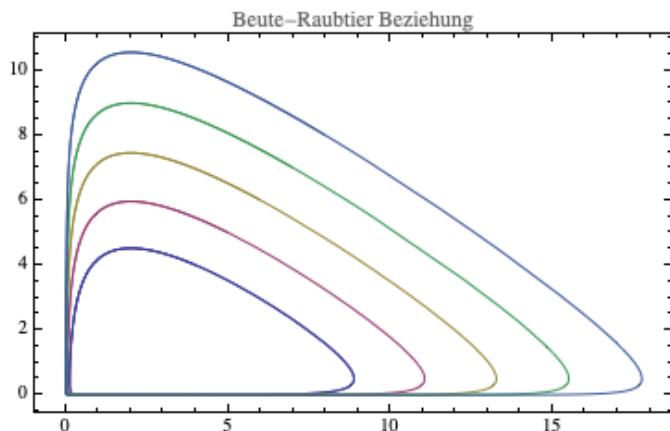


Abbildung 2.16: Beute-Raubtier-Beziehung

Wenn wir an einem Punkt der Kurve sitzen, dann wissen wir genau, wo lang wir uns zunächst bewegen können. Wir sind sozusagen auf eine Kurve im Phasenraum beschränkt. Das ist offensichtlich in diesem Beispiel keine physikalische Bewegung, aber sich das hier zu merken hilft auch zur Vorstellung des Phasenraums im Hamilton-Formalismus. Im Bild des Phasenraums dieser Beute-Raubtier Beziehung ist wichtig zu erkennen, dass die unterschiedlichen gefärbten Kurven entsprechen den unterschiedlichen Anfangswerten der gleichen Differentialgleichung.

Dadurch, dass wir für jede Dimension im Hamilton-Formalismus einen Impuls  $p$  und einen Ort  $q$  gewinnen, ist der Phasenraum jeweils  $2n$ -dimensional, was für einen Freiheitsgrad noch gut vorstellbar ist, aber ab den nächsten deutlich komplizierter.

### 2.6.4 Hamilton-Mechanik in Differentialformen

Nachdem wir die Differentialformen aus 1.9 gut genug verstanden haben, können wir auch versuchen den Hamilton-Formalismus mit diesen nützlichen Werkzeugen zu beschreiben. Dabei wissen wir aus der Vorlesung, die Hamilton-Funktion sei eine<sup>23</sup> Funktion auf dem Phasenraum, und dieser sei ein  $2n$ -dimensionaler Raum<sup>24</sup> mit einer nicht-degenerierten, geschlossenen 2 Form  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}(\xi)d\xi^i \wedge d\xi^j$ , auch symplektische Struktur benannt.

Was eine Mannigfaltigkeit ist haben wir sehr grob am Anfang des Abschnittes zu Differentialformen 1.9.2 erwähnt. Uns reicht zu wissen, dass zum Beispiel der Raum  $\mathbb{R}^{2n}$

<sup>22</sup>in dem deutlich vereinfachten Modell

<sup>23</sup>besondere

<sup>24</sup>bzw. Mannigfaltigkeit

eine Mannigfaltigkeit ist. Aus der Linearen Algebra fällt uns vielleicht der Term "nicht-ausgeartet", bzw. "nicht-degeniert" auf. Dieser Term bezieht sich auf Bilinearformen (zu welchen unsere 2-Form gehört), bei denen gilt:

$$\forall v \neq 0 \in \mathbb{V} \exists w \in \mathbb{V} : \beta(v, w) \neq 0 \quad (2.6.33)$$

In anderen Worten sagt das über unsere 2-Form  $\omega$ , dass sie nur gleich 0 wird, falls wir den Wert 0 da reingeben. Geschlossen ist nur der Begriff der uns sagt, dass die äußere Ableitung der Form verschwindet.  $d\omega = 0$ . Nun fehlt jetzt der Term der symplektischen Struktur: Das Wort "symplektisch" bedeutet schon von sich selbst "komplex"<sup>25</sup>. Was es aber in der Mathematik, die wir gerade benutzen aussagt ist, meiner Meinung nach, nur leeres Fachvokabular. Eine symplektrische Struktur, eine symplektische Mannigfaltigkeit ist einfach eine glatte Mannigfaltigkeit, verbunden mit einer geschlossenen nicht degenerierten 2-Form.

Diese so genannte symplektische Struktur hat diese Form hier:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \quad (2.6.34)$$

Stellen wir uns das so vor: Auf der Horizontalen sind alle  $q$ 's und auf der Vertikalen nach unten alle  $p$ 's aufgelistet. Wenn ich erst  $q^1$  und das passende  $p^1$  in die 2-Form reingebe, kommt genau 1 raus. Wenn ich erst  $p^5$  dann das zugehörige  $q^5$  reingebe, gibt es -1. Bei zwei  $p$ 's oder zwei  $q$ 's oder bei einem  $p$  und  $q$ , die unterschiedliche Indizes haben, kommt immer Null heraus. Damit hat die symplektische Struktur 2 jobs auf dem Phasenraum: 1. Phasenraum in  $p$ 's und  $q$ 's aufteilen und 2. Jedem  $q$  ein  $p$  zuordnen also einer Richtung den Impuls in diese Richtung.

Nur kurz bevor wir weitermachen sollten wir ein bisschen über  $\xi$  reden, wir haben ihn ja einfach in die Gleichung von  $\omega$  als Basiselement reingeschlichen. Im Prinzip ist  $\xi$  ein Werkzeug, oder vielleicht die Kiste in der wir all unsere Werkzeuge  $p$  und  $q$  reinpacken. Aber wenn wir uns die Ableitung des Vektors angucken, dann wird es ein bisschen interessanter. Natürlich leitet man jeden Eintrag des Vektors  $\dot{\xi} = \{\dot{\xi}^1, \dots, \dot{\xi}^{2n}\}$  ab, aber dadurch, dass wir den Vektor in die Form eingeben möchten, müssen diese Elementen auch eine entsprechende Basis zugeordnet werden, und diese Basis ist genau die Basis des Tangentialraums:

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}^i \partial_i \quad (2.6.35)$$

Bei der Anwendung der Form müssen wir auf dieses Detail aufpassen:

### Formulierung:

Ok, eben haben wir die Sachen die wir brauchen überprüft, und sind bereit den Hamilton-Formalismus mithilfe dieser komischen nicht degenierierten, usw. Form zu formulieren.

#### 1. Die Form:

Die Form besteht natürlich aus der Basis des Phasenraums, den unabhängigen Variablen  $p$  und  $q$ . Ja, eigentlich  $p_\alpha$  und  $q^\alpha$ , weil wir  $2n$  verschiedenen Koordinaten haben ( $\alpha = 1, \dots, n$ ). Die Form besteht also aus der Kombination der Basen:

$$\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha \quad (2.6.36)$$

---

<sup>25</sup>Passende Definition, ich finde keinen intuitiven Weg das zu beschreiben.

## 2. Die Wirkung:

Jetzt muss man sich die Frage stellen: Wie funktioniert diese Form?<sup>26</sup>. Vor allem, was machen wir mit einer 2-Form, wenn wir nur einen Vektor  $\xi = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  haben? Wäre es nicht sinnvoller die  $p$ 's und  $q$ 's von einander zu trennen und sie in die Form einzugeben? Naja, ob es Sinn machen könnte weiß ich nicht, aber man wird bald merken, dass so wie wir es definieren ziemlich elegant ist.

Nämlich nehmen wir die 2-Form  $\omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha$  und wenden sie auf  $\dot{\xi}$  ein, und lassen aber ein "Eingabefeld" für einen beliebigen Vektor frei.

$$\omega(\cdot, \dot{\xi}) = dp_\alpha(\cdot) \wedge dq^\alpha(\dot{\xi}) \quad (2.6.37)$$

Den freien Platz können wir jetzt ignorieren.

$$= dp_\alpha \wedge dq^\alpha(\xi^i \partial_i) \quad (2.6.38)$$

Hier erinnern wir uns an unsere Definition von  $\dot{\xi}$  aus (2.6.35): Nämlich war dies eine Summe über die Elementen  $\dot{\xi}^i$  und die Basiselemente  $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ . Dies können wir auffassen als  $q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$  und setzen wir ihn unsre obige Form ein:

$$= dp_\alpha \wedge dq^\alpha \left( \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2.6.39)$$

$$= dp_\alpha \wedge dq^\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} \dot{q}^i - dq^\alpha \wedge dp_\alpha \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \quad (2.6.40)$$

$$= dp_\alpha \wedge dq^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha - dq^\alpha \wedge dp_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \quad (2.6.41)$$

$$= dp_\alpha \dot{q}^\alpha - dq^\alpha \dot{p}_\alpha \quad (2.6.42)$$

Machen wir zunächst das folgende Gedankenexperiment: Was ist die äußere Ableitung der Hamilton-Funktion?

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p^\alpha} dp^\alpha \quad \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q} \right. \quad (2.6.43)$$

$$= -\dot{p}_\alpha dq^\alpha + \dot{q}_\alpha dp^\alpha \quad (2.6.44)$$

Es gilt also  $\omega(\xi) = d\mathcal{H}$

## 2.7 Kanonische Transformationen, Integrabilität, Chaos

### 2.7.1 Kanonische Transformation

Dadurch, dass wir gerade mit der fancy Beschreibung der "kanonischen" Impulse arbeiten, macht es auch Sinn, wenn wir diese Koordinaten transformieren, dass sie auch kanonisch benannt werden. Der Name lenkt aber ein bisschen ab meiner Meinung nach. Die grundlegende Eigenschaft ist aber, dass bei einer Transformation von  $q, p$  zu neuen Koordinaten

---

<sup>26</sup>Gute Frage

$Q, P$ , die Hamilton-Funktion zwar wahrscheinlich anders aussehen wird, aber die Form der kanonischen Gleichungen zwingend noch gelten muss.

Wir suchen also zwei neue Funktionen  $Q(q, p, t)$  und  $P(q, p, t)$ . Diese Funktionen existieren in einer neuen Hamilton-Funktion  $K$ . Manchmal wird diese Funktion der "Kamiltonian" benannt<sup>27</sup>.

Also jetzt haben wir zwei neue Variablen  $Q, P$  einer "neuen" Hamilton-Funktion. Wir fordern nur, dass

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (2.7.1)$$

und

$$S = S' + \int_{t_1}^{t_2} dF(q, p, Q, P, t) \quad (2.7.2)$$

also

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad | \mathcal{H} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (2.7.3)$$

Letzteres ist aber nichts neues, diese Bedingung hatten wir bereits im Lagrange-Formalismus gelernt, es dient nur als kurze Erinnerung. Dadurch, dass wir jeweils  $Q$  und  $P$  als von  $q$  und  $p$  abhängigen Funktionen definieren, sind von unseren  $F(q, p, Q, P, t)$  nur jeweils 2 verschiedene Variablen eigentlich unabhängig von einander. Welche diese Variablen sind wird uns überlassen. Das heißt, es gibt eigentlich verschiedene Funktionen  $F_i$ , die jeweils von 2 Variablen abhängig sind, die diese Bedingung erfüllen könnten. Wir nennen diese Funktionen die "erzeugenden Funktionen", und es gibt insgesamt 6 mögliche Variablenkombinationen, die uns interessieren könnten:

$$F_1(q, Q) \quad F_2(q, P) \quad F_3(p, Q) \quad (2.7.4)$$

$$F_4(p, P) \quad F_5(q, p) \quad F_6(Q, P) \quad (2.7.5)$$

Diese erzeugende Funktion kann aber im Prinzip beliebig sein, wir haben ja nur in (2.7.2) gefordert, dass sie differenzierbar ist. Aber aus (2.7.3) erkennen wir folgendes:

$$(p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) + (K - \mathcal{H}) = \frac{dF_j}{dt} \quad (2.7.6)$$

Wir wissen aber auch, dass wir mittels der Poisson-Klammer aus 8 die totale Zeitableitung bestimmen können. Hier müssen wir uns aber entscheiden, denn wir haben ja 6 mögliche  $F_i$ . Als Beispiel nehmen wir das aus der Vorlesung<sup>28</sup>:  $F_2(q, P)$ .

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.7.7)$$

Wir können nun beide unsere Definitionen für  $\frac{dF}{dt}$  vergleichen und erhalten:

$$(p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) + (K - \mathcal{H}) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.7.8)$$

---

<sup>27</sup>Und ich finde den Namen lustig also verwende ich es ebenfalls weiter.

Daraus können wir die Koeffizienten miteinander vergleichen und... Oops, da gibt es keinen offensichtlichen Term, der  $\dot{P}$  beinhaltet. Wir brauchen ihn aber unbedingt, sonst geht alles kaputt. Durch einen Trick können wir ihn aber finden, nämlich wissen wir aus der Produktregel:

$$\frac{dPQ}{dt} = \dot{P}Q + P\dot{Q} \quad (2.7.9)$$

$$P\dot{Q} = \frac{dPQ}{dt} - \dot{P}Q \quad (2.7.10)$$

Hiermit können wir schon den Rest des Koeffizientenvergleichs machen:

$$\left( p_i \dot{q}_i - \left( \frac{dP_i Q_i}{dt} - \dot{P}_i Q_i \right) \right) + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.7.11)$$

$$\rightarrow p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad (2.7.12)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (2.7.13)$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (2.7.14)$$

$$\frac{dP_i Q_i}{dt} = 0 \quad (2.7.15)$$

Neue Koordinaten zu finden kann schon ein Vorteil leisten, zum Beispiel wird dadurch die Hamilton-Funktion kompakter oder es ergeben sich zyklische Koordinaten aus der Transformation, aber ganz ehrlich glaube ich nicht, dass es sich im Allgemeinen überhaupt lohnt den Rechenaufwand zu leisten um die Transformation zu *finden*. In der Zeit hätten wir wahrscheinlich das ursprüngliche Problem gelöst.

## 2.7.2 Integrabilität

Ein System heißt integrabel, falls es genauso viele unabhängige Erhaltungsgrößen wie Dimensionen hat. Man checkt, dass zwei Erhaltungsgrößen unabhängig von einander sind bezüglich der Poisson-Klammer:

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0 \quad (2.7.16)$$

## 2.7.3 Chaos

Leichte Veränderungen können zu riesigen Fehlern in den erwarteten Ergebnisse führen. Ab einem gewissen Punkt ist es mit einem beliebig kleinen Freiheitraum unmöglich die Entwicklung eines Systems vorherzusagen. Diese Entwicklung können wir im Phasenraum beobachten, dabei wissen wir, wegen des Satzes von Liouville, dass der Phasenraum "inkompressibel" ist, das heißt, "Volumina" im Phasenraum können gestreckt oder gestaucht werden, aber das Volumen bleibt konstant.

Wir fangen mit einem sphärischen Volumen im Phasenraum an: Wir betrachten, wie es sich in der Zeit entwickelt und beobachten, dass dadurch, dass die "Kurven" unseres Phasenraums breiter auseinander getrennt werden, so wird auch unser ursprünglich sphärisches Volumen auseinander gezogen. Am Anfang war das Volumen proportional zum

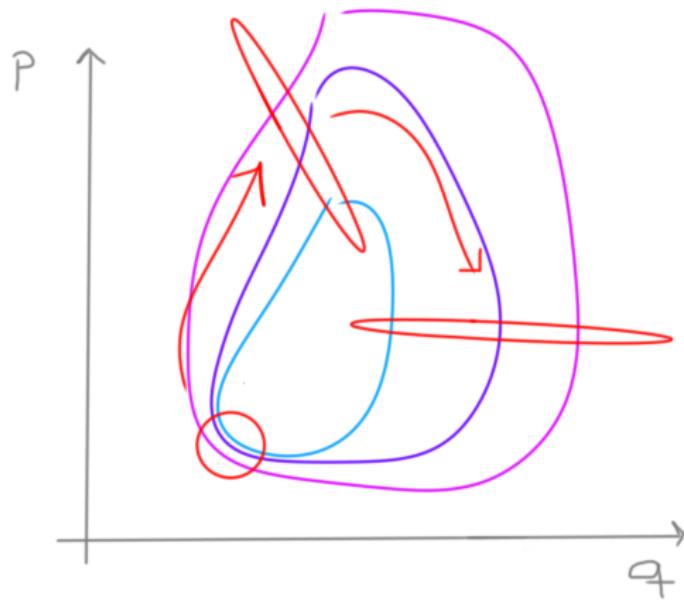


Abbildung 2.17: Volumen im Phasenraum

Radius, jetzt ist es proportional zu den Halbachsen, genauer gesagt:

$$V_{\text{Sph}} \propto r^{2n} \quad V_{\text{Ell}} \propto \prod_i a_i \quad (2.7.17)$$

Außerdem behaupten wir, dass die Halbachsen des Ellipsoids, dadurch dass es sich um Differentialgleichungen erster Ordnung handelt, sich (maximal) proportional zur Exponentialfunktion verändern können:

$$a_i(t) \propto e^{\lambda_i t} \cdot r \quad (2.7.18)$$

Außerdem gilt wegen der Inkompressibilität, dass

$$\prod_{i=1}^{2n} (e^{\lambda_i t} r) = r^{2n} \quad (2.7.19)$$

Dies ist nur möglich, falls alle  $\lambda_i = 0$  sind. Diese können wir berechnen als:

$$\lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{a_i(t)}{r} \right) \quad (2.7.20)$$

## 2.8 Schwingungen und Kontinua

Vorausgesetzt wir betrachten kleine Auslenkungen aus einer Ruhelage  $q_0$ , können wir uns das Leben deutlich einfacher machen, wenn wir aus einem System die Bewegung<sup>29</sup> bestimmen möchten. Dabei machen wir folgendes aus unserer Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) \quad |q \rightarrow q + q_0 \quad (2.8.1)$$

---

<sup>29</sup>angenähert

$$= \frac{1}{2} f_{ij}(q + q_0) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q + q_0) \quad | \text{Taylor-Entwicklung} \quad (2.8.2)$$

### Einschub 9. Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

Es wurde schon in der Vorlesung erwähnt und in einer Hausaufgabe besprochen, aber zunächst möchten wir die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung auch hier offiziell einführen. Im Prinzip ist es aber nichts Neues, wir müssen nur das eine oder andere Ding machen, was wir bei normaler Taylor-Entwicklung nicht gemacht hatten.

Die Taylor-Entwicklung sagt uns, wie wir bereits wissen, wie sich eine Funktion in der Nähe eines Punktes verhält. Im 1-dimensionalen Fall war dies sehr einfach, da mussten wir nur gucken, wie sich die Funktion in eine Richtung ändert. Für höhere Dimensionen kann sich die Funktion aber in ganz vielen Richtungen ändern. Dafür müssen wir ja auch die Reihenfolgen betrachten, eine 2-dimensionale Funktion kann sich zum Beispiel nur in  $x$ -Richtung ändern, oder zuerst in  $x$ -Richtung, dann aber in  $y$ -Richtung für die zweite Ableitung. Wir müssen also irgendwie diese Ableitungen miteinander interagieren machen. Das passiert auch genau in der Art, die wir erwarten: Pro Ableitungsgrad kommt noch multiplikativ eine beliebige Ableitung hinzu. Zunächst bezeichnet  $\mathbf{a}$  unsere Entwicklungsstelle.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (x^i - a^i) \partial_i f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} (x^i - a^i)(x^j - a^j) \partial_i \partial_j f(\mathbf{a}) \quad (2.8.3)$$

$$+ \frac{1}{3!} (x^i - a^i)(x^j - a^j)(x^k - a^k) \partial_i \partial_j \partial_k f(\mathbf{a}) + \mathcal{O}((\mathbf{x} - \mathbf{a})^4) \quad (2.8.4)$$

Als Beispiel entwickeln wir folgende Funktion bis zur 3. Ordnung um den Punkt  $(1, 1)$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \sin 3x \quad (2.8.5)$$

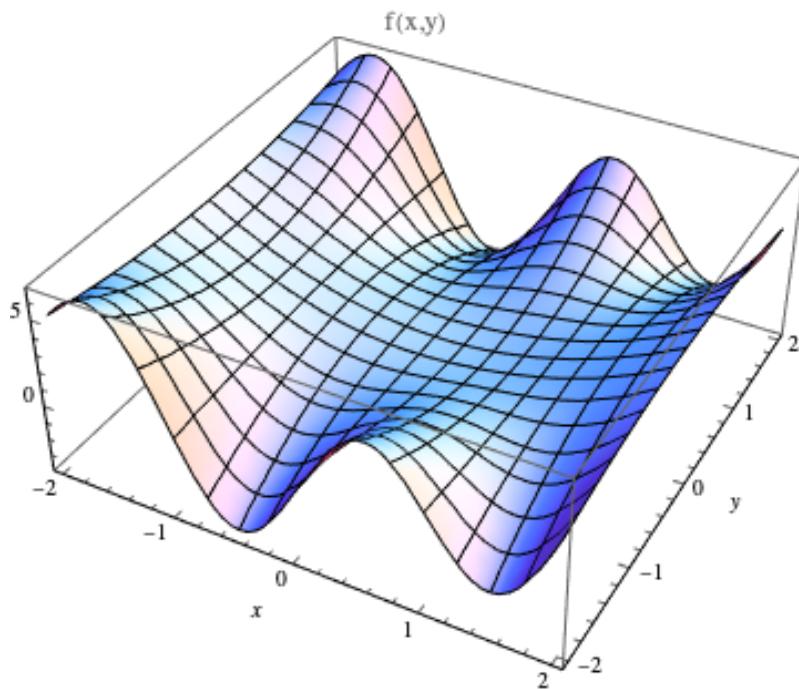


Abbildung 2.18: Funktion  $f(x, y)$ 

Dazu berechnen wir zuerst alle nötige partielle Ableitungen:

$$\partial_x f(x, y) = 2x + 3y^2 \cos 3x \quad (2.8.6)$$

$$\partial_y f(x, y) = 2y \sin 3x \quad (2.8.7)$$

$$\partial_x^2 f(x, y) = 2 - 9y^2 \cos 3x \quad (2.8.8)$$

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = 6y \cos 3x \quad (2.8.9)$$

$$\partial_y^2 f(x, y) = 2 \sin 3x \quad (2.8.10)$$

$$\partial_x^3 f(x, y) = -27y^2 \cos 3x \quad (2.8.11)$$

$$\partial_x^2 \partial_y f(x, y) = -18y \sin 3x \quad (2.8.12)$$

$$\partial_x \partial_y^2 f(x, y) = 6 \cos 3x \quad (2.8.13)$$

$$\partial_y^3 f(x, y) = 0 \quad (2.8.14)$$

Jetzt setzen wir in unseren Ableitungen schon mal die Werte unserer Entwicklungsstelle ein:

$$\partial_x f(1, 1) = 2 + 3 \cos 3 \quad (2.8.15)$$

$$\partial_y f(1, 1) = 2 \sin 3 \quad (2.8.16)$$

$$\partial_x^2 f(1, 1) = 2 - 9 \cos 3 \quad (2.8.17)$$

$$\partial_x \partial_y f(1, 1) = 6 \cos 3 \quad (2.8.18)$$

$$\partial_y^2 f(1, 1) = 2 \sin 3 \quad (2.8.19)$$

$$\partial_x^3 f(1, 1) = -27 \cos 3 \quad (2.8.20)$$

$$\partial_x^2 \partial_y f(1, 1) = -18 \sin 3 \quad (2.8.21)$$

$$\partial_x \partial_y^2 f(1, 1) = 6 \cos 3 \quad (2.8.22)$$

$$\partial_y^3 f(1, 1) = 0 \quad (2.8.23)$$

Jetzt stellen wir die Formel auf, obwohl es gleich ein bisschen messy wird.

$$f(x, y) = f(1, 1) + (x - 1)\partial_x f(1, 1) + (y - 1)\partial_y f(1, 1) \quad (2.8.24)$$

$$+ \frac{1}{2!}(x - 1)^2 \partial_x^2 f(1, 1) + (x - 1)(y - 1)\partial_x \partial_y f(1, 1) + \frac{1}{2!}(y - 1)^2 \partial_y^2 f(1, 1)$$

$$+ \frac{1}{3!}(x - 1)^3 \partial_x^3 f(1, 1) + \frac{3}{3!}(x - 1)^2(y - 1)\partial_x^2 \partial_y f(1, 1)$$

$$+ \frac{3}{3!}(x - 1)(y - 1)^2 \partial_x \partial_y^2 f(1, 1) + \frac{1}{3!}(y - 1)^3 \partial_y^3 f(1, 1) + \mathcal{O}((\mathbf{x} - \mathbf{a})^4)$$

$$= 1 + \sin 3 + (x - 1)(2 + 3 \cos 3) + (y - 1)(2 \sin 3) \quad (2.8.25)$$

$$+ \frac{1}{2!}(x - 1)^2(2 - 9 \cos 3) + (x - 1)(y - 1)(6 \cos 3) + \frac{1}{2!}(y - 1)^2(2 \sin 3)$$

$$+ \frac{1}{3!}(x - 1)^3(-27 \cos 3) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1)(-18 \sin 3)$$

$$+ \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1)^2(6 \cos 3) + \mathcal{O}((\mathbf{x} - \mathbf{a})^4) \quad (2.8.26)$$

Nach der ersten Iteration der Taylor-Formel erhalten wir so ein Ding:

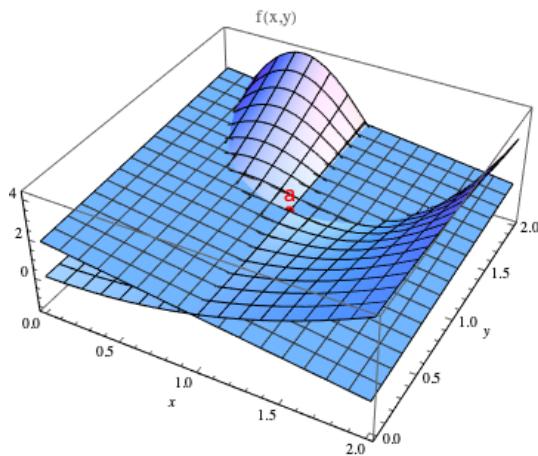


Abbildung 2.19: Funktion  $f(x, y)$ , erste Ordnung

Eine weiter sieht schon schöner aus:

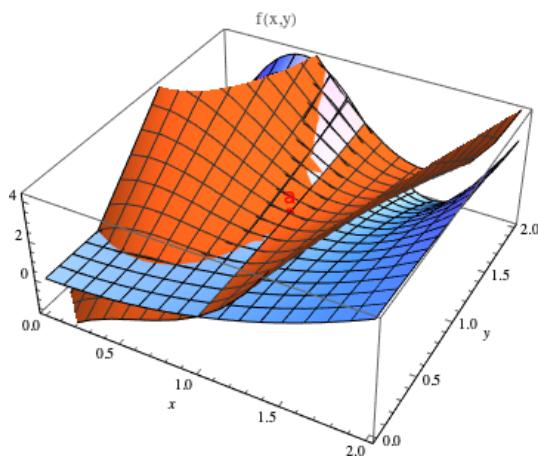


Abbildung 2.20: Funktion  $f(x, y)$ , zweite Ordnung

Aber es geht noch besser:<sup>a</sup>

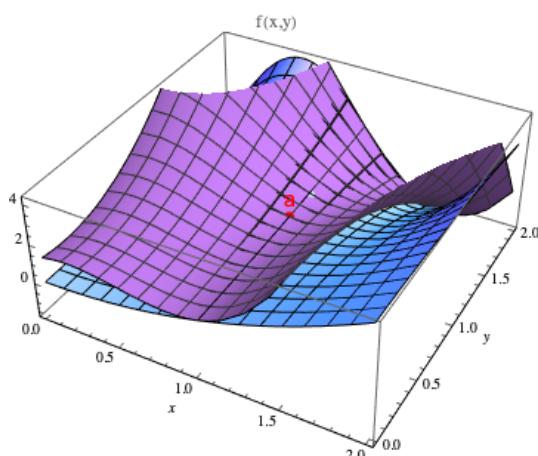


Abbildung 2.21: Funktion  $f(x, y)$ , dritte Ordnung

Eine alternative Darstellung der mehrdimensionalen Taylor-Entwicklung haben wir auf dem Übungsblatt gelernt, nämlich können wir die ganze Formel sehr kompakt

mithilfe der Exponentialreihe darstellen:

$$f(\mathbf{x}) = [e^{(\mathbf{x}-\mathbf{a})\nabla} f](\mathbf{a}) \quad (2.8.27)$$

"Warum mache ich das? Graphen sehen schön aus I guess"

Ah stimmt, die Kontinua und so. Mit diesem neuen Werkzeug können wir unsere Lagrange-Funktion aus (2.8.2) entwickeln, und wir erhalten

$$\frac{1}{2}f_{ij}(q + q_0)\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\left[f_{mn}(q_0) + (\textcolor{blue}{q_i} - q_{0i})\partial_i f_{mn}(q_0) + \frac{1}{2}(q_i - q_{0i})(q_j - q_{0j})\partial_i\partial_j f_{mn}(q_0)\right]\dot{q}_m\dot{q}_n + \mathcal{O}(q^3) \quad (2.8.28)$$

$$V(q + q_0) = \textcolor{blue}{V}(q_0) + (q_i - q_{0i})\partial_i V(q_0) + \frac{1}{2}(q_i - q_{0i})(q_j - q_{0j})\partial_i\partial_j V(q_0) + \mathcal{O}(q^3) \quad (2.8.29)$$

Wir entscheiden uns hier, alle Terme die in höherer Ordnung als  $\mathcal{O}(q^2)$  vorkommen zu vernachlässigen. Dabei zählen ab dem **linearen Term** der kinetischen Energie, weil da wird  $q \cdot q^2$  multipliziert, und wir nehmen an, für kleine Bewegungen  $q$  sind die Geschwindigkeiten ebenfalls klein. **Konstante Energien** können wir ebenfalls weglassen und außerdem, da wir per Annahme um eine Ruhelage entwickeln, ist die **Ableitung des Potentials** gleich 0. Zum Schluss wählen wir nun unser Koordinatensystem so, dass diese Ruhelage genau im Punkt  $q_0 = 0$  liegt. Es bleibt nur:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f_{ij}(0)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j V(0)q_iq_j + \mathcal{O}(q^3) + \dot{q}^2\mathcal{O}(q) \quad (2.8.30)$$

Nur noch ein bisschen Kosmetik noch: Wir benennen die Hessesche Matrix des Potentials  $\partial_i\partial_j V$  zu  $V_{ij}$  um:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}f_{ij}(0)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}V_{ij}q_iq_j \quad (2.8.31)$$

## 2.8.1 Harmonisierung einer Lagrange-Funktion

Jetzt wollen wir aus diesem System noch etwas viel schöneres machen, und zwar suchen wir nach dem wunderschönen harmonischen Oszillatoren. Das ist ein bisschen rechenaufwendig, aber bestimmt super nützlich in einem Kontext außerhalb der Übungsblättern.

Wir behaupten, dadurch dass  $f_{ij}$  und  $V_{ij}$  symmetrisch sind, gibt es Diagonalmatrizen, mit welchen wir das System "entkoppeln" können. Entkoppeln ist vielleicht das falsche Wort, wir finden aber neue Koordinaten, die immernoch von einer Mischung unserer alten Koordinaten abhängen, aber die entkoppelt aussehen. Das geht folgendermaßen:

1. Diagonalisiere  $f$  mit  $R \cdot f \cdot R^T$ ,  $R \in SO(n)$ . Definiere die alten  $q$ 's durch  $q_i \equiv (R_{ij}^T)q'_j$ . Dann können wir  $\mathcal{L}$  äquivalenterweise umformen zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}'_i R_{ij} f_{jk} R_{kl}^T \dot{q}'_l - \frac{1}{2}q'_i R_{ij} V_{jk} R_{kl}^T q'_l \quad (2.8.32)$$

Da die kinetische Energie schon eine Diagonalmatrix ist, brauchen wir für den Term nur die Diagonalelemente  $a_i$ . Außerdem benennen wir die Matrix  $RVR^T = M$  um.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum a_i(\dot{q}'_i)^2 - \frac{1}{2}q'_i M_{ij} q'_j \quad (2.8.33)$$

2. Definiere die neuen Variablen so, dass die kinetische Energie die Form der Einheitsmatrix hat, d.h. die  $a_i$  müssen irgendwie alle auf 1 gekürzt werden. Dies geschieht durch die Definition:  $q'_i = \frac{q''_i}{\sqrt{a_i}}$ . Dann bleibt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i a_i \left( \frac{\dot{q}''_i}{\sqrt{a_i}} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q''_i}{\sqrt{a_i}} M_{ij} \frac{q''_j}{\sqrt{a_j}} \quad (2.8.34)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i (\dot{q}''_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} q''_i \frac{M_{ij}}{\sqrt{a_i a_j}} q''_j \quad |K_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{a_i a_j}} \quad (2.8.35)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i (\dot{q}''_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} q''_i K_{ij} q''_j \quad (2.8.36)$$

3. Diagonalisiere  $K$  mit einer neuen Matrix  $\tilde{R}$ :  $D = \tilde{R} \cdot K \cdot \tilde{R}^T$  und definiere  $q''' \equiv \tilde{R}^T q'''$ . Hebbie wechselt gerade auf Matrix-Notation, weil sonst gibt es viiiiel zu viele Indizes.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \tilde{R}^T \dot{q}''' \right)^T \left( \tilde{R}^T \dot{q}''' \right) - \frac{1}{2} \left( \tilde{R}^T q''' \right)^T K \left( \tilde{R}^T q''' \right) \quad (2.8.37)$$

Hier stoppen noch mal kurz und überzeugen uns, dass diese Gleichung wirklich äquivalent zu (2.8.36) ist. Ok, dann machen wir weiter:

$$= \frac{1}{2} \dot{q}'''^T \dot{q}''' - \frac{1}{2} q'''^T D q''' \quad (2.8.38)$$

Jetzt benennen wir ein letztes Mal um  $q''' \rightarrow q$ , aber wir erinnern uns, eigentlich sind die neuen  $q'''$  nur irgendwelche komische Labormischungen aus den ursprünglichen  $q$ . Die genaueren Details interessieren uns aber nicht wirklich. Wir mögen nur das schöne Ergebnis:

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} d_i q_i^2 \quad (2.8.39)$$

## 2.8.2 Lagrnoschian

Die normale Lagrange-Funktion ist ziemlich cool und alles, aber sie ist durch einen sehr wichtigen Faktor beschränkt: Die verallgemeinerten Koordinaten. Nicht nur ist es manchmal ein großer pain in the ass sie zu bestimmen, aber manchmal gibt es auch mehr Koordinaten mit den man irgendwann auf ganz lange und unschöne Rechnungen kommt. Außerdem haben diese Koordinaten manchmal anschaulich wenig miteinander zu tun und es führt einfach zu komplizierten Verhältnissen.

Wir wollen das Konzept verallgemeinern zu einem Fall, wo wir ein "kontinuierlich veränderliches" Objekt betrachten. Etwas was nicht mehr starr eine Ebene runter rollen kann, oder sich drehen kann oder was auch immer, sondern etwas viel flexibler, mit vielen Freiheitsgraden und mögliche Zustände. Als Beispiel hatten wir in der Vorlesung eine Kette. Wenn wir uns überlegen wollten, was die ganzen verallgemeinerten Koordinaten sind, dann müssten wir überall auf der Kette ganz kleine  $q_i$ 's dran hängen. Und wenn sie klein genug sind dann werden wir unvermeidbar einen Grenzprozess und eine Integration durchführen müssen.

Nach der Herleitung<sup>30</sup> kommt man auf den folgenden Ausdruck für die Lagrange-Funktion, jetzt unabhängig von den individuellen verallgemeinerten Koordinaten:

$$\mathcal{L} = \int \left( \frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{b}{2} q'^2 \right) dx \quad (2.8.40)$$

Dabei benutzen wir die konstanten Größen  $b = k \cdot \Delta x$  des Kompressionsmoduls und die Dichte  $\rho = \frac{m}{\Delta x}$ .

Dabei fällt die Klammer besonders auf, analog zu  $M = \int \rho dV$ , ist die Lagrange-Funktion das Integral über die *Lagrange-Dichte* oder *Lagrangian* im Raum. So können wir die Klammer mit einer Dichte  $\mathcal{L}$  identifizieren und sagen, dass

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L} dx \quad (2.8.41)$$

Dabei ändert sich aber nichts über die Physik, das Prinzip der stationären Wirkung bleibt gültig, und wenn wir ihn darauf anwenden erhalten wir die sogenannte Wellengleichung

$$0 = \ddot{q} - c^2 q'' \quad (2.8.42)$$

Wichtiger als die Herleitung finde ich, ist die Relevanz der Lagrange-Dichte über die Lagrange-Funktion in der Zukunft. Als wir zu komplexeren Systemen übergehen, in den verschiedenen Feld-Theorien werden wir gar nicht mehr mit den uns bekannten räumlichen Koordinaten  $x$  oder  $q$  oder sowas rechnen, sondern mit Feldern  $\phi$ , die zu jedem Punkt in Zeit und Raum einen Wert haben. Dann muss man die Werte dieser Punkte überall im Raum betrachten, also braucht man in einer gewissen Art gucken, wie die "Werte dieser Felder verteilt" sind, und das macht man natürlich durch eine Dichte. Dann integriert man über diese Dichte um den konkreten Wert eines Systems zu bekommen.

## 2.9 Ideale Hydrodynamik

### 2.9.1 Materialableitung

Ähnlich, wie wir die Änderung der Bewegung eines Teilchens durch die totale Ableitung bestimmen können, können wir uns ebenfalls die Entwicklung eines "Volumens" in einer Strömung angucken. Mathematisch wird diese durch die gleiche Formel angegeben, die "totale Ableitung". Der wichtige Unterschied ist aber die Anwendung. Wir wenden die Materialableitung auf eine Größe irgendeines Objektes, der unter dem Einfluss einer "Strömung" steht. Im Prinzip sieht es genauso aus wie die totale Zeitableitung:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.9.1)$$

$$= \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.9.2)$$

Der Unterschied liegt aber an unserer Definition der vorhandenen Größen. Wir betrachten ja die Geschwindigkeit unserer Flüssigkeit  $\mathbf{v}$ , und die Elemente der Geschwindigkeit

---

<sup>30</sup>im Skript

sind genau die Zeitableitungen des Vektors  $\mathbf{x}$ . Für eine Materiableitung schreiben wir dann

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.9.3)$$

$$(2.9.4)$$

## 2.9.2 Euler-, Kontinuitäts-, Zustands- und Bernoulli-Gleichung

Die Gesamtkraft auf so ein Volumen ist Kombination von äußereren Kräften und Druckkraft:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{äuß}} + \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_{\text{äuß}} - \int_V \nabla p dV \quad (2.9.5)$$

Mit der Materialableitung zusammen erhalten wir:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{\mathbf{F}_{\text{äuß}}}{V_z} \quad \text{V ist Gravitaion und wirkt nur in z-Richtung} \quad (2.9.6)$$

Es ergeben sich insgesamt 3 wichtige Gleichungen:

**Euler-Gleichung**<sup>31</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{F}_{\text{äuß}}}{\rho V_z} \quad (2.9.7)$$

**Kontinuitäts-Gleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.9.8)$$

**Zustands-Gleichung**  $p = p(\rho)$  (hat keine Nummer verdient)

Sagen wir jetzt, die Flüssigkeit ist **inkompressibel**  $\rho = \text{const}$  und die Strömung ist **stationär**  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ , dann erhalten wir die Bernoulli-Gleichung:

**Bernoulli-Gleichung**

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + V = \text{const} \quad (2.9.9)$$

## 2.9.3 Navier-Stokes-Gleichungen

Wir ignorieren jetzt das "ideal" bei ideale Hydrodynamik und schauen uns Flüssigkeiten aus einer etwas realistischeren Perspektive an. D.h. wir ignorieren nicht mehr die Tatsache, dass es sowas wie innere Reibung, *Viskosität*  $\eta$  gibt. Nutella<sup>32</sup> würde niemals so

---

<sup>31</sup>junge wie viele Gleichungen heißen so das ist jetzt schon nummer 400

<sup>32</sup>egal ob "das" oder "die"

leckerschmecker geschmeidig sein, wenn es keine Viskosität geben würde. Los geht's mit der idealen Hydrodynamik, die wir jetzt von ihren Idealen befreien<sup>33</sup>:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p \quad (2.9.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij} + \rho v_i v_j) = 0 \quad (2.9.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij} = 0 \quad (2.9.12)$$

Wir haben hier ein  $\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$  eingeführt, das ist ein Tensor, der den Impulsfluss in  $i$ -Richtung durch die Fläche orthogonal zu  $j$  beschreibt. Okay das Nicht-Ideale kommt jetzt: Wir sagen, dass der Impuls-Fluss-Tensor allgemeiner so lautet:

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij} + \rho v_i v_j \quad (2.9.13)$$

Der erste Teil heißt Spannungstensor - den kennen wir von [hier](#). Oben haben wir nur den Druck-Anteil  $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$ . Das heißt, dass ein Druck nur senkrecht auf eine Fläche - also in Richtung dieser Fläche wirken kann, also nur wenn  $i = j$ . Der Tensor hat nur mit Druck also nur Diagonalelemente. Jetzt lassen wir zusätzlich Scherkräfte zu, also Kräfte, die z.B. zur Fläche senkrecht zur x-Achse angreifen, aber nicht in x-Richtung "drücken", sondern diese Fläche in y-Richtung "ziehen" aka "scheren":  $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$  mit Diagonalelementen  $p_{ii}$  und restlichen Matrixelementen aka innere Reibung aka Scherspannungen  $\sigma'_{ij}$ .

Es hat sich gezeigt, dass  $\sigma'$  in führender Ordnung so aussieht:

$$\sigma'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.9.14)$$

Wenn wir jetzt sagen, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, fällt die Divergenz weg. Divergenz würde nämlich heißen, dass sich die Teilchen im Vektorfeld näher kommen oder entfernen würden, was die Teilchendichte ändern würde. Inkompressibel heißt nichts Anderes, als dass wir das ganze nicht zusammendrücken können, also die Dichte gleich bleibt (bzw. nicht kleiner wird).

Und zack - da ist die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (2.9.15)$$

## 2.10 Statistische Mechanik

Disclaimer: In diesem Abschnitt paraphrasiere ich nur den Skript so, dass ich es einigermaßen verstehe.

Betrachten wir nochmal den Phasenraum als der Raum der möglichen Zuständen  $q, p$ , aber dieses Mal als der Raum der Zuständen eines Teilchens. Für ein Teilchen haben wir schon die Intuition entwickelt, sie kann einen Impuls  $\mathbf{p}$  und eine Koordinate  $\mathbf{q}$  haben,

---

<sup>33</sup>so wie die Grünen, wenn sie eine Koalition mit der CDU eingehen

also ist der Phasenraum ein 6-dimensionaler Raum. Nun gehen wir einen Schritt<sup>34</sup> und untersuchen den Phasenraums eines Systems von Teilchen, und zwar nicht mehr ein paar Teilchen, sondern so viele Teilchen, wie möglicherweise in einer Kiste passen. Das sind ganz viele Teilchen. Und je nachdem ob wir unsere Kiste mal geschüttelt haben, oder fallen gelassen haben, oder erhitzt oder was auch immer, möchten wir gucken, wie unsere Teilchen verteilt sind. Aber nicht genau *wo* die Teilchen in der Kiste verteilt sind, sondern wie die Eigenschaften der Teilchen verteilt sind.

Wie kann man aber diese Verteilung finden, veranschaulichen? Sagen wir, wir betrachten eine Bevölkerung und interessieren uns für wie viele Leute in einer bestimmten Altersgruppe sind. Es ist unwahrscheinlich, dass aus unserer beschränkten Anzahl an Personen, zum Zeitpunkt der Messung eine Person *genau* der gesuchten Alter entsprechen wird, es ist also besser wenn wir uns ein bisschen Freiraum geben, und Leute *um* eine Altersgruppe  $a + \Delta a$  suchen. Dann gucken wir uns die Verteilungsfunktion  $f(a)$  und überlegen uns, die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person "a Jahre" alt ist, entspricht dem Produkt der beiden hier eingeführten "Größen"  $w = f(a)\Delta a$ . Wenn wir genau wissen möchten wie viele Personen in dieser Altersgruppe sind, dann können wir einfach die Gesamtzahl der Bevölkerung in die Gleichung miteinbeziehen:

$$\Delta N = N g(a) \Delta a \quad (2.10.1)$$

Wenn wir die Unterschiede  $\Delta a$  aber möglichst gering halten möchten, dann lassen wir sie gegen 0 gehen und untersuchen dann das Integral dieser Größe:

$$\int dN = N \int g(a) da \quad (2.10.2)$$

$$N = N \int g(a) da \quad (2.10.3)$$

Daraus folgt aber, nach dieser Definition, dass

$$\int g(a) da \doteq 1 \quad (2.10.4)$$

Wir nehmen diese Definition und fügen aber noch ein eigenes Detail dazu, und zwar, dadurch dass  $N$  ziemlich groß ist, definieren wir *unsere* Verteilungsfunktion als die normierte Version:  $f = \frac{g}{N}$ . Mit dieser Definition einer allgemeineren Verteilungsfunktion können wir uns für unseren Fall auch überlegen, dass wir eine Verteilung von Impulsen und Orte haben  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , die sich möglicherweise zeitlich verändern kann. Dann betrachten wir aber ein Volumen im Phasenraum  $\Delta q^3 \cdot \Delta p^3$ , und die Anzahl an Teilchen, die einem kleinen eingeschlossenen Volumen entspricht ist

$$\Delta N = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \cdot \left( \lim_{\Delta q^3, \Delta p^3 \rightarrow 0} \right) \Delta q^3 \Delta p^3 \quad (2.10.5)$$

Und wenn wir alle möglichen Zustände miteinbeziehen, und über die ganze Kiste integrieren ist die Teilchenzahl

$$N = \int_V d^3\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \cdot f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (2.10.6)$$

---

<sup>34</sup>more like 100 000 000 000 000 000 000 Schritte weiter

Beim Ort integrieren wir über das Volumen der Kiste  $V$  und beim Impuls über *alle* mögliche Impulse. Ob einige physikalisch unwahrscheinlich sind stört uns ja nicht, weil die Verteilungsfunktion wird dafür sorgen müssen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass diese auftauchen gegen 0 wird. Eine andere wichtige Größe ist die Teilchendichte an einem bestimmten Ort:

$$n(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} \cdot f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (2.10.7)$$

Nun ist die nächste Frage, die wir uns stellen: Wie ändert sich die Verteilung in der Zeit? Wenn wir bei  $f$  eine Abhängigkeit von  $t$  zugelassen haben, dann müssen wir das auch untersuchen. Dabei erinnern wir uns, durch den Satz von Liouville ist der Phasenraum wie eine inkompressible Flüssigkeit, genau das was wir in Kapitel zur idealen Hydrodynamik behandelt haben, also können wir die Materialableitung auch darauf anwenden.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (2.10.8)$$

” $\mathbf{v}$ ” hat eigentlich sowohl Komponente des Impulses als auch des Ortes, also ist es anschaulicher zu schreiben

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla_q f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_p f \quad (2.10.9)$$

Aha, hier kommen Hamilton und Newton ins Spiel: Aus den Hamilton-Gleichungen wissen wir was  $\dot{q}$  ist, und aus der Newtonschen Mechanik was  $\dot{p}$  ist:

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_q f + \mathbf{F} \cdot \nabla_p f \quad (2.10.10)$$

Diese Ausdrücke sind aber auch besonders physikalisch interessant: Betrachten wir nur im allgemeinen, wie sich die Funktion von einem Moment in das andere verändert und lösen nach  $\frac{\partial f}{\partial t}$  auf:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_q f - \mathbf{F} \cdot \nabla_p f \quad (2.10.11)$$

Wir können auch an den Termen einigermaßen erkennen, dass sie die Funktion auf eine besondere Art beeinflussen: Der Term  $\mathbf{F} \cdot \nabla_p f$  verändert  $f$  durch die Anwesenheit einer äußeren Kraft  $\mathbf{F}$  und durch die Änderung der Funktion nach dem Impuls  $\nabla_p$ , also können wir uns vorstellen, dass dieser Term genau von einer äußeren Kraft beeinflusst wird. Den Term  $\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_q f$  können wir mit der Diffusion identifizieren, weil wir die Ableitung der Funktion an einem Ort betrachten. Dies entspricht genau einer Vorstellung von Diffusion<sup>35</sup>. Insbesondere können wir uns vorstellen, dass dieser Term dafür sorgt, dass sich Teilchen von einem Ort höher Konzentration zu einem Ort niedriger Konzentration bewegen. Am Ende bleibt nur noch ein Term übrig:  $\frac{df}{dt}$ . Die verbleibende Art, wie sich die Verteilung verändern könnten ist, wenn Teilchen so miteinander interagieren könnten, dass sie miteinander stoßen und sich gegenseitig aus ihren kleinen Volumina vertreiben,

---

<sup>35</sup>Danke, Johann!

oder in die Volumina eines anderen Teilchens gelangen<sup>36</sup>. So beschreiben wir dann die Änderung von  $f$  als:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Collision}} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Diffusion}} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{äußere Kraft}} \quad (2.10.12)$$

Besonders interessant ist es, wenn wir diese Stöße tatsächlich zulassen<sup>37</sup>. Dabei können wir nicht willkürlich Stöße zulassen, weil dann die Berechnung der Stoßanzahl zu kompliziert wird, sondern möchten wir, dass 1. Stöße nur zwischen zwei Teilchen stattfinden<sup>38</sup>, 2. die Stoßzahl proportional zum Produkt der zwei Verteilungsfunktionen ist:

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1, t) \cdot f(\mathbf{q}, \mathbf{p}_2, t) \quad (2.10.13)$$

Sehr sehr viel hässliches Rumgerechne mit Funktionalen und Delta-Funktionen bringt uns zu dem Punkt, wo wir sagen können, dass unsere Verteilungsfunktion ohne äußere Kräfte (also hängt  $f$  nicht mehr von  $\mathbf{q}$  ab) so aussehen muss:

$$f(\mathbf{p}) = C \cdot e^{-A(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2} \quad \text{mit Konstanten } A, C \text{ und dem mittleren Impuls } \mathbf{p}_0 \quad (2.10.14)$$

Ok aber wie bestimmt man noch mal den **Mittelwert** also was ist  $\mathbf{p}_0$ ?

## 2.10.1 Mittelwert

Allgemein kann man sagen, der Mittelwert ist das:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(i) \quad (2.10.15)$$

Im Phasenraum ist der Mittelwert so definiert:

Def **Mittelwert im Phasenraum**

$$\langle F \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) \quad (2.10.16)$$

$i$  = Anzahl Teilchen / verschiedene  $q-p$ -Vektoren, über die der Mittelwert gebildet wird

Dabei ist  $F$  irgendeine Observable, also eine Funktion, die von  $\mathbf{q}$  und/oder  $\mathbf{p}$  abhängt. Z.B. ist auch  $q$  eine stabile Observable und  $\langle q_1 \rangle$  gibt uns dann den "durchschnittlichen" Ort der Teilchen bezogen auf die 1-Achse an. Das ist eine ziemlich schlechte Definition - Was ist denn ein durchschnittlicher Ort? Naja im Prinzip ist das auch eher der Durchschnitt aller Ortsvektoren der Teilchen. Schauen wir uns z.B. einen Würfel an, in dem alle Teilchen gleich verteilt sind, dann schaut der "durchschnittliche Ortsvektor" genau in die Mitte

---

<sup>36</sup>Danke, Joris!

<sup>37</sup>Restrictions apply\*

<sup>38</sup>NO BESO DE TRES

davon und  $\langle q_1 \rangle$  ist die  $x$ -Komponente davon. Wenn wir in der Elektrodynamik unterwegs sind und wir sagen, die Teilchen im Würfel (irgendein Material) sind Elektronen, dann können wir es schaffen, dass sie durch ein äußeres E-Feld mehr in eine Richtung gezogen werden als in eine andere. Dann würde der "durchschnittliche Ortsvektor"  $\{\langle q_1 \rangle, \langle q_2 \rangle, \langle q_3 \rangle\}$  mehr in diese Richtung schauen.

Dasselbe geht auch mit dem Impulsvektor, der auch eine anständige Observable ist. Der "durchschnittliche Impulsvektor" ist im Gleichgewicht Null, weil alle Teilchen gleichverteilt in alle Richtungen "fliegen". Wenn wir äußere Kräfte zulassen und z.B. gegen die linke Wand des Würfels klopfen, würde der "durchschnittliche Impulsvektor"  $\{\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_3 \rangle\}$  nach rechts zeigen. und die Teilchen sich mehr in diese Richtung bewegen. Einzelne Teilchen können dabei immer noch lustig umherschwirren und nach oben unten oder sogar nach links fliegen, aber alles in allem bewegt sich das Gas dann eher nach rechts.

Man kann noch andere wilde Observablen anschauen z.B. die Varianz des Orts  $\langle q^2 \rangle$  oder die Varianz des Impulses  $\langle p^2 \rangle$  oder die Hamilton-Funktion  $\langle H \rangle$ , die in einem abgeschlossenen System natürlich konstant ist (kein Energieverlust").

Mittelwerte bilden geht aber auch im Kontinuierlichen, wenn man eine Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  gegeben hat.

Def **kontinuierlicher Mittelwert**

$$\langle F \rangle = \frac{\int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q}}{\int f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{q}} \quad (2.10.17)$$

Dieses Monster ist ein Integral über  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  und zwar für alle N Teilchen ( $\mathbf{p}$  = Vektor, der für jedes Teilchen 3 Impuls-Komponenten hat). Das sind so etwa  $10^{23}$  Stück. WTF sowas kann doch niemand berechnen?? Korrekt. Deshalb machen wir ja auch Statistik.

## 2.10.2 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Ok wir berechnen den Mittelwert der kinetischen Energie<sup>39</sup>

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{4Am} \quad (2.10.18)$$

Damit haben wir schon fast die **Temperatur** definiert:

Def **Temperatur**

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{\langle E \rangle}{\text{Freiheitsgrade}} = \frac{1}{4Am} \quad (2.10.19)$$

Daraus folgt die erste Konstante  $A = \frac{1}{2mk_B T}$  und eingesetzt in, das was wir schon für  $f$  haben, erhalten wir

$$f(\mathbf{p}) = C e^{-E/(k_B T)} \quad (2.10.20)$$

---

<sup>39</sup>E = T hier, da wir keine äußeren Kräfte zulassen also kein Potenzial V

und finden  $C$  durch

$$N = V \int f(\mathbf{p}) d^3 p \quad (2.10.21)$$

$$C = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10.22)$$

### Boltzmann-Verteilung ohne äußere Kräfte

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} e^{-E/(k_B T)} \quad (2.10.23)$$

### Boltzmann-Verteilung mit konservativen äußeren Kräften

Die Verteilungsfunktion ist definiert durch

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = C \cdot e^{-E/k_B T} \quad E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \quad (2.10.24)$$

und  $C$  kann man bestimmen durch

$$N = \int_V d^3 \mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{p} f \quad (2.10.25)$$

## 2.11 Thermodynamische Ensembles

Okay lassen wir das mit den Gleichungen und der ganzen Mathematik die hat uns Hebbie eh nicht gut genug erklärt und wen das wirklich interessiert, der kann ja Hydromechanik oder Umweltphysik oder sowas hören.

Also gut bleiben wir bei Intuition und Anschauung.

### 2.11.1 Der My-Raum

Wir haben die Boltzmann-Verteilung davor im sogenannten  $\mu$ -Raum bestimmt. Das ist ein Phasenraum, der aussieht wie der  $\mathbb{R}^n$ , nur dass die Dimensionen in 2 Kategorien geteilt werden können - nämlich  $p$ 's und  $q$ 's, wobei jedes  $p$  zu einem  $q$  "gehört". z.B.:  $q_1$  ist die 1-Richtung in kartesischen Koordinaten einfach  $x$ -Richtung, in Kugelkoordinaten die  $r$ -Richtung usw. Dazu gehört ein Impuls in genau diese Richtung nämlich  $p_1$ . Der Impuls in die  $y$ -Richtung  $p_2$  hat z.B. rein gar nichts mit der  $z$ -Richtung  $p_3$  zutun. Dass man das so aufteilen kann, liegt an der **symplektischen Struktur** des Phasenraums. Da wir im wahren Leben in 3 Dimensionen leben hat der Phasenraum also 6 Dimensionen - 3 Ortsdimensionen  $q_1, q_2$  und  $q_3$  und 3 Impulsdimensionen  $p_1, p_2$  und  $p_3$ , weil man sich ja in jede Richtung bewegen kann.

Jetzt schauen wir uns aber nicht ein Teilchen an sondern richtig richtig viele. Die Welt besteht aus richtig richtig vielen Teilchen. Das ist leider die Wahrheit und wir können uns nicht immer den einsamen Massenpunkt im leeren Raum anschauen. Jedes Teilchen hat einen Ort, wo es gerade ist - beschrieben durch  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . Jedes Teilchen hat aber auch einen Impuls  $\{p_1, p_2, p_3\}$ , also es bewegt sich in irgendeine Richtung.

Wir sagen jetzt in diesem 6-dimensionalen Phasenraum bekommt jedes Teilchen einen eigenen Vektor, der genau zu diesen Eigenschaften zeigt. Der Vektor ist basically nur eine Liste mit 6 Einträgen oder in einem 6D-Koordinatensystem eben ein 6-dimensionaler "Pfeil"<sup>40</sup> vom Ursprung zu dem Punkt im Phasenraum, der den aktuellen Zustand des Teilchens beschreibt. Der  $\mu$ -Raum ist also dieser Raum voll mit Vektoren - für jedes Teilchen einen. Das sind wie gesagt richtig richtig viele. Einzelne Teilchen zu verfolgen, wäre eine idiotische Idee, das rechnet kein Supercomputer der Welt. Die mikrokopische Sicht ist aber auch viel genauer, als wir es eigentlich brauchen, um die interessanten Fragen zu beantworten, also schauen wir uns lieber statistische Kennwerte wie den Mittelwert oder die Varianz an. Wir gehen über zu einer makroskopischen Sicht und schauen auf das ganze System. Jetzt juckt uns die Trajektorie eines einzelnen Teilchens überhaupt nicht mehr, wir wollen lieber Eigenschaften des Systems wie Temperatur, Druck und soweas herausfinden.

Diese Erkenntnis kauft uns quasi schon die Eintrittskarte in den sogenannten  $\Gamma$ -Raum.

## 2.11.2 Der Gamma-Raum

Wir scheissen auf die einzelnen Teilchen und sagen das ganze System wird nur noch durch einen Punkt bzw. einen Vektor im  $\Gamma$ -Raum beschrieben. Das geht sogar gar nicht so schwer. Statt einem 6-dimensionalen Koordinatensystem mit N Vektoren für N Teilchen schauen wir uns einfach ein  $6N$ -dimensionales Koordinatensystem an. Ok wow, sind das nicht bisschen viele Dimensionen? Da wird die String-Theoretikerin in mir ganz wuselig. Um die Frage zu beantworten - ja das sind bisschen viele Dimensionen - N war ja ungefähr soweas wie  $10^{23}$ . Aber prinzipiell ist es keine große Sache, das ganze aus dieser Sicht anzuschauen.

Ok Beispiel: Sagen wir, wir haben 3 Teilchen. Jedes Teilchen hat 3 Orts- und 3 Impulskoordinaten, also insgesamt 18 Koordinaten zu vergeben. Wenn wir von den Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  ein Foto machen und die Impulse messen<sup>41</sup>, dann gibt es 18 Werte, die wir herausfinden können = eine Liste mit 18 Zahlen = ein 18D Vektor. Dieser Punkt im 18-dimensionalen Raum beschreibt also unser 3-Teilchen-System zu einem bestimmten Zeitpunkt. Lassen wir die Zeit wieder weiterlaufen, bewegen sich die Teilchen woanders hin und ändern ihre Impulse. Die 18 Werte verändern sich - und schwuppsdiwupps haben wir aus 3 Teilchen nur noch 1 gemacht, das im 18D-Raum durch die gegend fliegt. Dieselbe Idee geht auch mit viel viel mehr Teilchen. Dabei verlieren wir zwar Infos über die einzelnen Teilchen, das ganze System beschreiben wir aber immer noch ganz gut.

## 2.11.3 Das mikrokanonische Ensemble

Wir haben zu viel Fruitninja gespielt und aus Versehen den  $\Gamma$ -Raum in viele kleine (Volumen-)Schnipsel zerhackt - whupsi. So ein Stückchen Phasenraumvolumen aus dem Gamma-Raum entspricht irgendwie ähnlichen Orten und irgendwie ähnlichen Impulsen.

Das mikrokanonische Ensemble ist jetzt ein System von N Teilchen, bei dem wir sagen

---

<sup>40</sup>ich weiß, das kann man sich nicht wirklich vorstellen, aber versuch dir mal vorzustellen:  $10^{23}$  von diesen Pfeilen in ein Koordinatensystem reingeklatscht, das ist einfach proppevoll das Ding

<sup>41</sup>I know, Heisenberg sagt das geht nicht aber wir schauen makroskopisch, da sind Impuls und Ort sowieso ungenau

die Teilchenzahl, das Volumen  $V$  und die Gesamtenergie  $E$  sind konstant - also basically ein Gas im Kasten eingesperrt. Die **Gleichwahrscheinlichkeitsannahme** gewinnt uns nicht nur jede Scrabble-Partie, sondern sagt auch, dass jeder Schnipsel mit gleicher Energie - nennen wir ihn  $\Omega_\Gamma$  - von unserem Phasenraum gleich wahrscheinlich ist. D.h. dass das System nicht "lieber" einen bestimmten Zustand mit Energie  $E$  annimmt als einen anderen möglichen Zustand, der auch Energie  $E$  hat. Das ergibt auch Sinn. Wenn ich z.B. nur von 2 Teilchen und den Impuls vertauschen könnte, dann hätte ich an der Energie des Gesamtsystems nichts geändert (that's basically die Idee von elastischen Stößen), hätte aber trotzdem einen anderen Punkt im Gamma-Raum. Trotzdem wird der eine Zustand dem anderen nicht bevorzugt, warum auch?

Wir würden am liebsten die Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Gamma-Raum, also wie Wahrscheinlich welches Volumenschnipsel  $\Omega_\Gamma$  ist. Das ist ganz einfach zu bestimmen -  $1/\text{Anzahl der } \Omega_\Gamma$  für eine Energie  $E$ . Dafür müssen wir aber wissen, wie viele  $\Omega_\Gamma$  es für eine Energie gibt. Schauen wir kurz zurück auf den My-Raum. Hier können wir mit der Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sagen, wie viele Teilchen sich in einem Phasenraumvolumen aufhalten. Das kann man mit bisschen Rechnerei auf den Gamma-Raum übertragen und erhält dann eine Funktion, die exakt so aussieht, wie die Maxwell-Boltzmann-Verteilung nur diesmal aus einer komplett anderen Perspektive hergeleitet.

#### 2.11.4 Das kanonische Ensemble

Das kanonische Ensemble ist ein System von  $N$  Teilchen, das zwar konstante Teilchenzahl  $N$  und konstantes Volumen  $V$  hat (= keine Diffusion, keine Kompression / äußere Kräfte), aber mit einem anderen Teilsystem aka Wärmebad Wärme  $\Delta Q$  austauschen darf. Jetzt ist  $E$  nicht mehr konstant, aber die Temperatur  $T$  schon. Wir können mit wildem Delta-Funktion Jonglieren herausfinden, dass der Mittelwert einer Observablen jetzt so berechnet wird:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z} \int d^{3N} \bar{\mathbf{p}} \int_V d^{3N} \bar{\mathbf{q}} \cdot F(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \cdot e^{-H(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}})/kT}$$

Und  $Z$  ist die sogenannte **Zustandssumme**. Sie sagt uns wie viele Zustände es für so ein kanonisches Ensemble gibt - also wie viele Zustände das System annehmen kann, wenn wir die Teilchenzahl  $N$ , das Volumen  $V$  und die Energie bzw. Temperatur gegeben haben. Die **mikrokanonische Zustandssumme** nimmt  $E, V$  und  $N$  und die **kanonische Zustandssumme** nimmt  $T, V$  und  $N$ .

**kanonische Zustandssumme**  $Z(T, V) = \int d^{3N} \mathbf{p} \int_V d^{3N} \mathbf{q} \cdot e^{-H(\mathbf{q}, \mathbf{p})/k_B T}$

$H = E$  (Hamiltonfunktion)

### 2.12 Statistische Mechanik: Rechnen

#### Energie eines Systems

1. Anzahl an Elementen, die eine bestimmte Energie besitzen:

Seien  $n$  verschiedene Zustände gegeben, die ein System annehmen kann und zu jedem dieser Zustände eine bestimmte Energie  $\varepsilon_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  zugeordnet. Dann ist die Gesamtenergie die Summe der Teilchen, die ein System belegen multipliziert mit der zugehörigen Energie:

$$E = N_i \varepsilon_i \quad (2.12.1)$$

## Mikrozustände

1. Anzahl Mikrozustände:

$$\Omega[f] = \omega^N \cdot \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_k!} \quad | \omega = \Delta q^3 \Delta p^3 \quad (2.12.2)$$

2. Wahrscheinlichkeit von  $f$ <sup>42</sup>

$$P[f] = \frac{\Omega[f]}{\Omega_\Gamma} \quad (2.12.3)$$

3. Wahrscheinlichste Verteilung  $f \Rightarrow \underline{\text{Boltzmann-Verteilung}}$

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = C e^{-\frac{E}{kT}} \quad | E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \quad (2.12.4)$$

$C$  bestimbar durch

$$C = \frac{N}{\int_V d^3\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{p} e^{-\frac{E}{kT}}} \quad | A = \frac{1}{2mkT} \quad (2.12.5)$$

$$\rightarrow C = n \sqrt{\frac{A^3}{\pi}} \quad (2.12.6)$$

## Entropie

1. Entropie:

$$S = k_B \ln \Omega \approx k_B \ln \Sigma \approx k_B \ln \Gamma \quad (2.12.7)$$

2. Sachen mit Entropie:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E, V)}{\partial E} \quad (2.12.8)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E} dE + \frac{\partial S}{\partial V} dV = \frac{dE}{T} + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (2.12.9)$$

$$dE = \frac{\partial E}{\partial S} dS + \frac{\partial E}{\partial V} dV = T dS - T \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (2.12.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \quad (2.12.11)$$

$$dQ = T dS \quad (2.12.12)$$

$$\langle \partial_V H \rangle = -p = -T \frac{\partial S}{\partial V} \quad (2.12.13)$$

---

<sup>42</sup> $\Omega_\Gamma$ : Gesamtvolumen des  $\Gamma$ -Raumes, welches zur (konstanten) Energie  $E$  gehört.

# Anhang

## Trigonometrische Formeln

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\sin \varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$\tan \varphi = \cot\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$$

$$\text{Additionstheoreme: } \sin(\varphi \pm \psi) = \sin \varphi \cos \psi \pm \sin \psi \cos \varphi$$

$$\cos(\varphi \pm \psi) = \cos \varphi \cos \psi \mp \sin \psi \sin \varphi$$

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \quad \sin \varphi - \sin \psi = 2 \cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$\cos \varphi + \cos \psi = 2 \cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) \quad \cos \varphi - \cos \psi = -2 \sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

$$\sin \varphi \sin \psi = \frac{1}{2} (\cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi + \psi)) \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi)$$

$$\cos \varphi \cos \psi = \frac{1}{2} (\cos(\varphi - \psi) + \cos(\varphi + \psi)) \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi)$$

$$\sin \varphi \cos \psi = \frac{1}{2} (\sin(\varphi - \psi) + \sin(\varphi + \psi)) \quad \tan^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{1 + \cos(2\varphi)}$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} \quad \cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

## Reihendarstellung von $\sin x$ und $\cos x$

$$\sin x = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

### Komplexe e-Funktion

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x & e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

### Differentiation

Lagrange-Notation: Erste Ableitung  $f'$    Zweite Ableitung  $f''$    n-te Ableitung  $f^{(n)}$

Newton-Notation: Erste Ableitung  $\dot{x}$    Zweite Ableitung  $\ddot{x}$    usw.

Leibnitz-Notation: Erste Ableitung  $\frac{d}{dx} f$    Zweite Ableitung  $\frac{d^2}{dx^2} f$     Ableitung  $\frac{d^n}{dx^n} f$

Euler-Notation: Erste Ableitung  $D_x f$    Zweite Ableitung  $D_x^2 f$     Ableitung  $D_x^n f$

Produktregel       $\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Quotientenregel       $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Kettenregel       $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} (f \circ g)(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Umkehrregel       $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = g(f(y)) = g(x)$

### Mehrdimensionale Ableitungen

**Mehrdimensionale Kettenregel**       $\frac{df(x_1(t), \dots, x_n(t), t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial f}{\partial t}$

**Satz von Schwarz**       $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$       (Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist egal)

**Jacobi-Matrix** für mehrdimensionale Funktionen mehrerer Variablen

Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$        $(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_1, \dots, x_m)^T$

$$J_f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\nabla \otimes \mathbf{f})^T$$

*Beispiel*

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy + \sin(z) \\ zx^3 - z \sin(x) \end{pmatrix} \quad J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y & 3x & \cos(z) \\ 3zx^2 - z \cos(x) & 0 & x^3 - \sin(x) \end{pmatrix}$$

Für  $m = 1$  ist die Jacobi-Matrix (T) der Gradient:  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T = \nabla f$

Die Jacobi-Matrix braucht man hauptsächlich für Koordinatentransformationen oder die Transformation des Nabla- und Laplace-Vektors, sowie Taylor mehrdimensional.

**Hesse Matrix** zweite Ableitung für eindimensionale Funktionen mehrerer Variablen

Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$      $(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x)$

$$H_f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{wegen Satz von Schwarz symmetrisch})$$

*Beispiel*

$$f(x, y, z) = 3x^4z^3 - y^2z + x \sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3z^3 + \sin(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2yz + x \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 9x^4z^2 - y^2$$

$$H_f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 36x^2z^3 & \cos(y) & 36x^3z^2 \\ \cos(y) & -2 - x \sin(y) & -2y \\ 36x^3z^2 & -2y & 18x^4z \end{pmatrix}$$

**nice to know:** Der Laplace Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  ist die Spur der Hesse-Matrix

(Spur = alle Diagonalelemente addieren)

Die **mehrdimensionale Taylorentwickelung** kann man mit der Hesse-Matrix und der Jacobi-Matrix darstellen:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$\text{äußere Ableitung} \quad df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$\text{mit Verkettung} \quad df(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} dt$$

**totale Zeitableitung**

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow$  das ist basically die äußere Ableitung durch  $dt$  teilen und dasselbe wie die mehrdimensionale Kettenregel

**Richtungsableitung**  $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla f(x) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(x)$

$\Rightarrow$  Totale Zeitableitung + wir definieren  $(\dot{x}, \dot{y})^T := \mathbf{v}$ .

WICHTIG: Das Mal ist hier ein Skalarprodukt.

**Materialableitung**  $\frac{d}{dt} f(x(t), t) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$

## Spezielle Ableitungen

Konstanten  $\frac{d}{dx} a = 0$

Faktorregel  $\frac{d}{dx} \lambda \cdot f(x) = \lambda f'(x)$

Summenregel  $\frac{d}{dx} f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} a x^n = n a x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\frac{1}{nx \sqrt[n]{x}}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{d}{dx} \frac{1}{\tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x)^{g(x)} = \frac{d}{dx} e^{\ln f(x) \cdot g(x)} = \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \ln f(x) \cdot g'(x) \right) f(x)^{g(x)}$$

## Integration

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

**Riemann Summe**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i \Delta x \cdot f(x_i) = \int f(x) dx$

Partielle Integration  $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = \left[ f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$

Substitution  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(u)) \frac{d\varphi(u)}{du} du = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \frac{dx}{du} du$

Bsp.  $\int x \sqrt{x+1}^3 dx$  Subst.  $u = \sqrt{x+1}$  mit  $x = \varphi(u) = u^2 - 1 \Rightarrow \frac{d\varphi(u)}{du} = 2u$   
 $\Rightarrow \int x \sqrt{x+1}^3 dx = \int (u^2 - 1) u^3 \cdot 2u du = \int 2u^6 - 2u^4 du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5 + C$   
 $= \frac{2}{7}\sqrt{x+1}^7 + \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5 + C$

## Spezielle Stammfunktionen

Konstanten  $\int a dx = ax$

Faktorregel  $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$

Summenregel  $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad \int a x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$$

To be continued

## Koordinatenwechsel auf einen Blick

### Karthesisch » Zylinder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad z = z$$

$$\text{Einheitsvektoren: } \mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^T$$

### Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

### Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

### Divergenz in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

### Laplace in Zylinderkoordinaten

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### Infinitesimale Verschiebung in Zylinderkoordinaten

$$ds = \mathbf{e}_r dr + r \cdot \mathbf{e}_\varphi d\varphi + \mathbf{e}_z dz$$

### Infinitesimales Flächenenelement in Zylinderkoordinaten

$$d\mathbf{A} = r \cdot \mathbf{e}_r d\varphi dz + \mathbf{e}_\varphi dr dz + r \cdot \mathbf{e}_z dr d\varphi$$

### Infinitesimales Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$dV = r \cdot dr d\varphi dz = \det \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right) dr d\varphi dz \quad (\text{Jacobi-Determinante})$$

### Karthesisch » Kugel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad \varphi = \arctan \left( \frac{x}{y} \right)$$

Einheitsvektoren:  $\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T$

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)^T$$

$$\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T$$

### Gradient in Kugelkoordinaten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

### Rotation in Kugelkoordinaten

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta f_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

### Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta f_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}$$

### Laplace in Kugelkoordinaten

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

### Infinitesimale Verschiebung in Kugelkoordinaten

$$ds = \mathbf{e}_r dr + r \cdot \mathbf{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi d\varphi$$

### Infinitesimales Flächenenelement in Kugelkoordinaten

$$d\mathbf{A} = r^2 \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r d\theta d\varphi + r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta dr d\varphi + r \cdot \mathbf{e}_\varphi dr d\theta$$

### Infinitesimales Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$dV = r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi = \det \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) dr d\theta d\varphi \quad (\text{Jacobi-Determinante})$$

### Zylinder » Karthesisch

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

### Zylinder » Kugel

$$r_{\text{sph}} = \sqrt{r_{\text{cyl}}^2 + z^2} \quad \theta = \arctan \left( \frac{r_{\text{cyl}}}{z} \right) \quad \varphi = \varphi$$

### Kugel » Karthesisch

$$x = r \cos \varphi \sin \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

### Kugel » Zylinder

$$r_{\text{cyl}} = r_{\text{sph}} \sin \theta \quad \varphi = \varphi \quad z = r_{\text{sph}} \cos \theta$$

⇒ mehr dazu und alle Jacobi-Matrizen bei [Wikipedia](#)