
Versuch 213

27. Oktober 2021

Kreisel

Physikalisches Anfängerpraktikum 2.1

Jan A. Kesting

Betreuer/in: Marcel Fischer

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 1.1 | Ziel/Motivation | 2 |
| 1.2 | Aufgaben | 2 |
| 1.3 | Versuchsaufbau | 2 |
| 1.4 | (physikalische) Grundlagen | 2 |
| 3 | Auswertung | 12 |
| 3.1 | Auswertung des Vorversuches | 12 |
| 3.2 | Bestimmung der Dämpfungskonstante | 13 |
| 3.3 | Präzession | 14 |
| 3.4 | Trägheitsmomente | 19 |
| 3.5 | Nutation | 21 |
| 4 | Zusammenfassung und Diskussion | 23 |
| 4.1 | Zusammenfassung | 23 |
| 4.2 | Diskussion | 24 |

1 Einleitung

1.1 Ziel/Motivation

Jeder kennt ihn aus seiner Kindheit: einen Kreisel. Irgendwas an seinem Verhalten hat einen schon immer fasziniert; er verhält sich nie, wie man es intuitiv erwarten würde. In diesem Versuch wird der Kreisel genauer unter die Lupe genommen und seine Eigenschaften bestimmt.

1.2 Aufgaben

1. Qualitative Untersuchung des Kreisels.
2. Bestimmung der Dämpfungskonstante des Kreisels anhand Messung der Reibungsverluste.
3. Bestimmung des Trägheitsmomentes um die Figurenachse mittels Messung der Präzessionsfrequenz.
4. Ermittlung des Trägheitsmomentes senkrecht zur Figurenachse durch Messung der Größe (und Richtung) der Umlaufgeschwindigkeit der momentanen Drehachse um die Figurenachse.
5. Bestimmung des gleichen Trägheitsmomentes aus der Nutationfrequenz.

1.3 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau des Experimentes ist im Messprotokoll in Abb. 1 zu finden.

1.4 (physikalische) Grundlagen

Ein Kreisel ist jeglicher starrer Körper, der sich um einen festen Punkt dreht. Wird er in seinem Schwerpunkt gelagert, so spricht man vom **kräftefreiem Kreisel**. D.h., dass keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken, die ein Drehmoment \vec{M} auf ihn bewirken könnten und somit Betrag und Richtung des Drehimpulses \vec{L} zeitlich konstant bleiben würden. Im Fall, dass zwei **Hauptträgheitsachsen** (in diesem Fall I_z und I_x) gleich groß sind, so kann man von einem **symmetrischen Kreisel** sprechen.

Nun müssen erstmals drei unterschiedliche charakteristische Achsen voneinander differenziert werden; die **Figurenachse** \vec{F} ist die Symmetrieachse des Kreisels. Dazu sind noch die **Drehimpulsachse** \vec{L} und die Richtung der

Drehachse $\vec{\omega}$ relevant.

Beim Kräftefreien, symmetrischen Kreisel sind all diese Achsen identisch und zeitlich und räumlich Konstant, wenn der Kreisel in Rotation versetzt wird, während die Figurenachse fixiert bleibt. Im allgemeinen Fall allerdings ist dies meist nicht so. Versetzt man dem stabil rotierendem Kreisel einen kurzen seitlichen Schlag, so setzt eine Nutationsbewegung ein; der Drehimpuls ändert sich nicht, die anderen beiden Achsen allerdings schon. Die Figurenachse fängt an, auf einem gedachten Kegelmantel mit der Nutationsfrequenz $\vec{\omega}_N$ zu rotieren, und führt dabei selbst noch eine Eigenrotation $\vec{\omega}_F$ durch. Die sich ergebende Drehimpulsachse bleibt somit auch nicht mehr konstant. Zum besseren Vorstellungsvermögen der einzelnen Bewegungen der Bewegung des Kreisels, lohnt es sich, sich mit folgender Grafik zu beschäftigen:

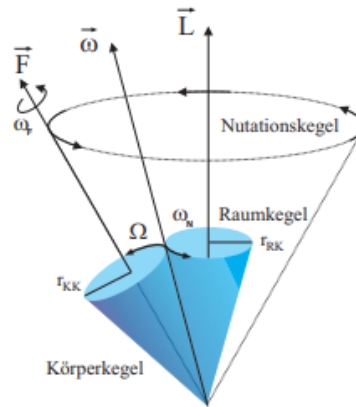


Abbildung 1: Achsen und Frequenzen des kräftefreien, symmetrischen Kreisels

Man erkennt, dass die Bewegung der einzelnen Achsen der Bewegung zweier aneinander entlangrollenden Kegeln entspricht, von denen der Raumkegel zentral bleibt. Aus dieser Ansicht heraus erschließt sich einem sofort, dass gilt:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F \quad (1)$$

Nach einigem Herumrechnen und trivialen Überlegungen kann man die Nutationsfrequenz $\vec{\omega}_N$ bei kleinen Nutationswinkeln folgendermaßen beschreiben:

$$\vec{\omega}_N \approx \frac{I_z}{I_x} \vec{\omega}_F \quad (2)$$

Als nächstes lassen sich über die Nutationsbewegung die Trägheitsmomente I_i des Kreisels bestimmen, bzw. das Trägheitsmoment der einen Achse, wenn das der anderen Achse bekannt ist. Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit Ω schaut man sich den Kreisel an und sucht sich einen festen Punkt (in der Nutationsbewegung) und kann durch anbringen einer Farbscheibe anhand der Farbwechsel während der Rotation die gesuchte Größe der Periodendauer (und somit die Winkelgeschwindigkeit) bestimmen.

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F \quad (3)$$

Weiterhin nützlich wird in der Auswertung noch:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\frac{\omega_F}{\Omega - 1}} = \frac{I_z(\Omega - 1)}{\omega_F} \quad (4)$$

Als nächstes muss noch berücksichtigt werden, dass an dem Kreisel des Versuches ein Stab befestigt ist, an dem Gewichte mit der Masse m angebracht werden können, aufgrund welcher eine Präzessionsbewegung des Kreisels möglich wird. Dieses Verhalten kann man auf ein Drehmoment zurückführen, welches über den Stab auf den Kreisel nach unten wirkt und somit der ansonsten räumlich feste Drehimpuls seine Ausrichtung über den Verlauf der Rotation ändert. Das liegt daran, dass der Schwerpunkt nun über dem Unterstützungspunkt liegt. Man spricht von einem **schweren Kreisel**. Zu Beobachten ist nun eine Kreisbewegung der Drehimpulsachse (zu beobachten als die Figurenachse). Diese kann man als eine seitlich ausweichende Bewegung der Drehimpulsachse bezüglich der Schwerkraft vorstellen. Diese Bewegung nennt man **Präzession**. Die Frequenz dieser Rotationsbewegung, die Präzessionsfrequenz $\vec{\omega}_P$, kann man folgendermaßen berechnen:

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad (5)$$

Wobei g der bekannte Ortsfaktor der Erde ist. Wichtig zu bemerken ist, dass die Präzessionsfrequenz von der räumlichen Orientierung unabhängig ist. Zuletzt kann man noch während der Präzession eine Nutation der Figurenachse erzwingen, was dazu führt, dass die beiden Bewegungen sich überlagern.

Letztens muss noch erwähnt werden, dass man sich bisher nur einen Reibungsfreien Kreisel angeschaut hat. Da aber Reibungseffekte unweigerlich auftreten, muss man diese miteinbeziehen. Dazu führt man eine

Dämpfungskonstante δ ein, die man über folgendes Zusammenhang bestimmen kann:

$$\omega_F(t) = \omega_F \cdot e^{-\delta t} \quad (6)$$

Mit bekannter Dämpfungskonstante lässt sich dann auch die Halbwertszeit der Frequenz bestimmen:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} \quad (7)$$

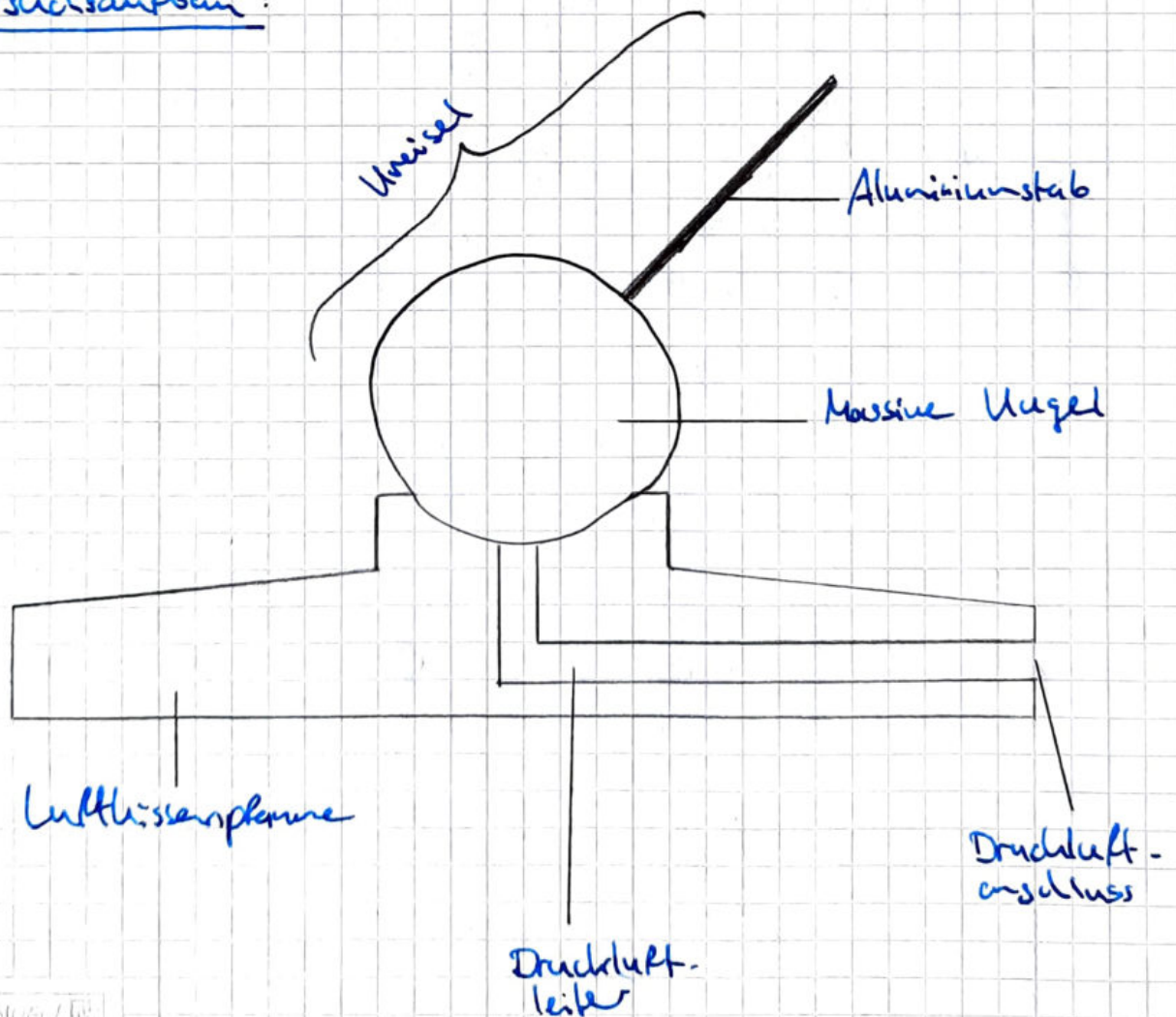
Außerdem lohnt es sich für die Auswertung noch mittels den, im Skript angegebenen, Eigenschaften der Kugel dessen Trägheitsmoment I theoretisch anhand (8) zu bestimmen, wobei die Masse des Kreisels als m und der Radius als r gegeben sind:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (8)$$

Ureisel

- Materialien:
- Stahlkugel mit Aluminiumstab als Ureisel in einer Luftkissenplanne gelagert ($m = 4,164$ inkl. Stab, $r_a = 5,08\text{cm}$)
 - Zwei Gewichte ($r_a = 0,725$, $r_i = 0,325$, $h = 1,1\text{cm}$, $m = 9,85\text{g}$)
 - Farbscheibe & Scheibe mit konzentrischen Ringen
 - Stroboskop
 - Motor mit Netzgerät
 - Stoppuhr
 - Gyroskop

Versuchsaufbau:



Durchführung

(1) Zunächst macht man sich erstmal mit der Bedienung des Weisels vertraut und beschäftigt sich mit folgenden Sachen:

- a) Die Scheibe mit Farbschaltern wird auf den Stab gesteckt, und zwar so, dass der Weisel kräftig wird. Man bringt nun den Weisel ins drehen und beobachtet die Reaktion des Weisels auf seitliches Drücken.
- b) Einstellen einer Nutationsbewegung durch Versetzen eines leichten seitlichen Stopfes. Man beobachtet die Farbscheibe. Nach Betrachtung dreht man die Farbscheibe um, versetzt den Weisel wieder in Bewegung und in eine Nutationsbewegung und beobachtet nochmals.
- c) Auf die Farbscheibe wird die Scheibe mit konzentrischen Kreisen gelegt. Man wählt die Seite dieser Scheibe, dessen Mittelpunkt der Weisel seitlich verschoben ist. Ohne Nutation sind verwandene Kreise zu sehen. Man versetzt ~~man~~ ~~drückt ein Mal~~ dreht man die Scheibe um und dreht wieder den Weisel. Durch ein seitliches Stoß werden die Kreiselecken getrennt. Man wiederholt man dies mit einem Zusatzgewicht.
- d) Man versetzt den Weisel in Drehung (2 Drehrichtungen) und verändert den Schwerpunkt des Weisels. Dies ist zu beobachten bzw. die auftretenden Effekte.

Beobachtungen zu (1)

- a) Kreis "wackelt" sich. Bei kurzen drücke fällt er zurück in die Ursprungslage, bei langen Wartezeitwirkung richtet er sich neu aus.
- b) Der im Skript beschriebene Punkt wird sichtbar. Die Farbe im Punkt ändert sich gemäß der Drehrichtung der Umgel, und ~~der~~ der Farb anordnung der Scheibe.
(Rot kurz!)
- c) ~~Der~~ Der Punkt bleibt nach Mutationsversetzung bei einer konstanten Farbe, ~~unter~~ bzw. auf einem Ring.

~~Der~~ Auf der Scheibe ist der konzentrische Kreis. Ich würde ein Punkt zu einem, der als Mittelpunkt eine spirale wahr-
genommen werden kann.

- *) Fall 1:
- Sp unterhalb
 - Drehung: Uhrzeigersinn
(u)
 - Präzession: Anti-Uhrzeigersinn

Fall 2:

- Sp unterhalb
- Drehung: Anti-Uhrzeigersinn
- Präzession: Uhrzeigersinn

Fall 3: Sp oberhalb

- Drehung u. Präzession: Uhrzeigersinn

Fall 4: - Sp oberhalb

- Drehung u. Präzession: Anti-Uhrzeigersinn

(2) Dämpfung des Weisels.

Es werden zwei zusätzliche Gewichte an 8 Stabenden montiert und der Weisel wird bei Senkrechter Achse mittlere des Motors auf ca. $600-700 \frac{1}{\text{min}}$ beschleunigt. Über eine Zeitraum (12 min.) werden alle 2 min die ~~Winkel~~ Drehfrequenz gemessen. Ableserfehler $\Delta f = 10 \frac{1}{\text{min}}$

Tabelle 1: Drehfrequenz des Weisels als Funktion der Zeit

| Zeit t [min] | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|--------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| f [$\frac{1}{\text{min}}$] | 634 | 586 | 542 | 500 | 463 | 428 | 397 |

(3) Präzession

Man montiert die Festscheibe auf den Weisel und überprüft die Winkelfreiheit. Danach wird ein Gewicht im Abstand $a = 0,2 \text{ m}$ zur Längsmittte auf den Stab befestigt, und der Weisel wird auf ~~500~~ $(500 \frac{1}{\text{min}})$ beschleunigt und werden die Präzessionsdauer T_p (drei versch. Winkel zur Vertikalen und dessen Umlaufzeit).

Tabelle 2: Präzessionsdauer des schweren Weisels als Funktion des Winkels zur Vertikalen.

| Winkel (ca.) [$^\circ$] | 30 | 45 | 60 |
|---------------------------|-------|-------|-------|
| T_p [s] | 67,56 | 73,39 | 71,56 |

Aufgrund Ungenauigkeit (Augenmaß und Reaktionszeit) wird ein Fehler von $\Delta T = 2 \text{ s}$ angenommen.

Als nächstes wird ~~an~~ für vier unterschiedliche Gewichtspositionen eine Messung der Präzessionsdauer bei ~~in~~ verschiedenen ~~Präzessionsdauern~~ Frequenzen durchgeführt.

Tabelle 3: Messung der Präzessionsdauern in Abhängigkeit der Drehfrequenz bei vier unterschiedlichen Gewichtslagen.

| Messung und Abstand des Gewichtes | Frequenz [$1/\text{min}$] | Präzessionsdauer [s] |
|-----------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1 1 Gewicht 15 cm | 689 | 130,89 |
| | 600 | 116,64 |
| | 446 | 87,34 |
| | 252 | 51,12 |
| 2 1 Gewicht 20 cm | 689 850 | 99,82 |
| | 601 | 87,86 |
| | 449 | 66,45 |
| | 250 | 36,92 |
| 3 2 Gewichte 15 cm | 689 681 | 66,06 |
| | 600 603 | 58,76 |
| | 448 | 43,82 |
| | 253 | 24,7 |
| 4 2 Gewichte 20 cm | 698 | 50,98 |
| | 602 | 45,07 |
| | 447 | 33,23 |
| | 251 | 18,06 |

$\Delta f \approx 10 \text{ } 1/\text{min}$

$\Delta t = 1 \text{ s}$

(4) Umlauf der momentanen Drehachse um die Figuren Achse
Der kräftefreie Weisel wird wieder in Rotation versetzt und anschließend durch einen leichten Stoß zur Nutation gebracht.

a) Die Umlaufrichtung ist mit dem Uhrzeigersinn

b) für zehn verschiedene Frequenzen werden jeweils die Zeit für 10 Umläufe der momentanen Drehachse um die Figuren Achse gemessen.

Tabelle 4: Messung des Umlaufes der momentanen Drehachse um die Figuren Achse

| $f_{\text{Fig}} \text{ [1/min]}$ | 586 600 | 537 | 496 | 477 | 444 | 419 | 402 | 375 |
|----------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $10 \cdot \tau \text{ [s]}$ | 16,15 | 17,72 | 18,95 | 19,84 | 21,17 | 22,26 | 23,67 | 25,59 |

Der Fehler der Zeitmessung liegt bei $\Delta t = 0,5 \text{ s}$

| | |
|-------|-------|
| 344 | 321 |
| 27,68 | 29,64 |

(5) Nutation

Der kräftefreie Weisel wird erneut durch leichtes Anschlagen in Nutation versetzt. Anschließend werden 10 Wertepaare für ω_n und f_{Fig} vernommen.

Tabelle 5: Messung der Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der Frequenz der Figuren Achse

| $\omega_n \text{ [1/min]}$ | 642 | 615 | 590 | 540 | 577 | 850 | 735 | 771 | 723 | 700 |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $f_{\text{Fig}} \text{ [1/min]}$ | 300 | 285 | 455 | 430 | 410 | 390 | 370 | 360 | 340 | 330 |

Der Fehler der Frequenzen liegt bei $\Delta \omega = 10 \text{ 1/min}$

ifil
27.10.21

6/

3 Auswertung

Die Berechnungen der Auswertung, und somit auch alle Ergebnisse, finden in Excel-Tabellen statt. Diese sind am Ende der Auswertungen oder Berechnungen der jeweiligen Versuchsteile eingefügt mit allen ihren Ergebnissen. Somit werden in der Auswertung nur die Rechnungen und die relevanten Endergebnisse angegeben.

Außerdem werden in dieser Auswertung alle Frequenzen mit dem Formelzeichen f angegeben, nur die Kreisfrequenzen mit dem Formelzeichen ω .

3.1 Auswertung des Vorversuches

3.1.1 Vorversuch a)

Bei seitlichem Drücken gegen die Figurenachse beim Kräftefreien, symmetrischen Kreisel, wirkt man eine Kraft gegen die ansonsten Räumlich feste Drehimpulsachse. Da letztere in dem Fall eig Konstant ist, braucht eine Veränderung dieser erstaunlich viel Kraft, und da jede Aktion eine Reaktion hat, lässt sich somit erklären, warum es schwer ist, die Achse zu bewegen.

Bei kurzer Belastung, springt dementsprechend der Kreisel auch wieder in seine ursprüngliche Rotationsbewegung zurück, verändert nur bei länger einwirkender Kraft die Drehimpulsachse.

3.1.2 Vorversuch b)

Was man beobachtet, ist die Stelle in Abb. 1, durch welche die Achse ω geht. Hier durchwandert die angebrachte Farbscheibe bzw. der beobachtete Punkt mit quasi inverser Winkelgeschwindigkeit den Punkt um den sich die Figurenachse dreht, wodurch sich die Farbe hier nur relativ langsam ändert; und zwar gemäß der Farbverteilung auf der Farbscheibe.

Den gleichen Effekt sieht man auch bei den Farbringen, nur, dass hier sichtbar wird, dass der Punkt relativ zur Figurenachse konstant bleibt, und nicht, dass im Punkt eine Art „Verlangsamung“ der Bewegung auftritt.

3.1.3 Vorversuch c)

Der Mittelpunkt der verwaschenen Kreise beschreibt deshalb die Drehimpulsachse, weil ja immernoch die Gesamtrotation des Kreisels; also Rotation um die Figurenachse und die Nutationsrotation beide um die Drehimpulsachse verlaufen und diese somit immernoch der Mittelpunkt der Bewegung darstellt. Da die konzentrischen Ringe auf der Scheibe angebracht sind, müssen

diese somit verwaschen, da das Zentrum dieser Kreise ja die Figurenachse darstellt, welche um die Drehimpulsachse kreist; ohne Nutation würde man allerdings nur noch scharfe Kreise sehen, denn dann entspricht die Figurenachse der Drehimpulsachse.

Findet nun zusätzlich eine Präzessionsbewegung statt, so ist diese daran noch erkennbar, dass das Zentrum der verwaschenen Kreise herumwandert; auch wieder auf einer Kreisbahn.

3.1.4 Vorversuch d)

Man erkennt, dass wenn der Schwerpunkt unterhalb des Lagerungspunktes ist, so ist die Präzessionsbewegung immer gegen die Richtung der Eigenrotation gerichtet. Dies ist die im Skript beschriebene „Ausweichbewegung“ des Kreisels. Wenn aber nun noch ein größeres Gewicht im Spiel ist, wodurch der Schwerpunkt auf einmal über dem Lagerungspunkt befindet, so verläuft die Präzession in dieselbe Richtung, wie die Eigenrotation des Kreisels. Dies lässt sich vermutlich darauf schieben, dass nun das Drehmoment, welches oberhalb des Schwerpunktes des Kreisels ansetzen kann, groß genug ist, so dass die Präzession mit dem Kreisel mitrotieren muss.

3.2 Bestimmung der Dämpfungskonstante

Trägt man nun die Gemessenen Werte der Tabelle 1 in ein Diagramm ein und bestimmt die Funktion des sich ergebenden Graphens, erhält man:

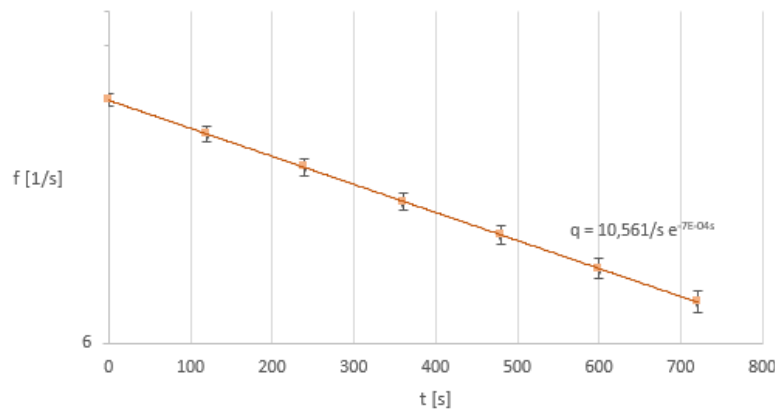


Diagramm 1: Frequenz des Kreisels als Funktion der Zeit

Der Fehler der Dämpfungskonstante $\Delta\delta$ berechnet sich nach bekanntem Sche-

ma anhand der Messwerte (Fehler der t-Achse sind vernachlässigbar gering):

$$\Delta\delta = \frac{\ln(f_1 + \Delta f_1) - \ln(f_7 - \Delta f_7)}{t_7 - t_1} - \delta \quad (9)$$

Durch einsetzen der passenden Werte und durch die Bestimmung der Steigung des Graphens durch Excel erhält man folgende Dämpfungskonstante δ :

$$\delta = (7 \pm 0,07) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s} \quad (10)$$

Zur Bestimmung der Halbwertszeit setzt man in (7) ein und erhält:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta} \quad \Delta T_{1/2} = T_{1/2} \cdot \frac{\Delta\delta}{\delta} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_{1/2} = (990 \pm 10) s}} \quad (12)$$

| | |
|---------------------------|-------------|
| Dämpfungskonstante [1/s]: | 0,0007 |
| Delta [1/s]: | 7,32505E-06 |
| Halbwertszeit t_0,5 [s] | 990,2102579 |
| Delta t_0,5 [s] | 10,36190804 |

Tabelle 6: Exceltabelle zur Berechnung der Dämpfungskonstante und die Halbwertszeit der Kreiselfrequenz

3.3 Präzession

Zuerst widmet man sich den Beobachtungen in Tabelle 2. Es fällt auf, dass die gemessenen Präzessionsdauern alle ähnlich groß sind und die Vermutung liegt nahe, dass der Winkel der Drehimpulsachse keinen Einfluss auf die Präzessionszeit T_P nimmt. Damit kann man die in der Einleitung genannte Unabhängigkeit der Präzessionsdauer von der räumlichen Position der Drehimpulsachse bestätigen.

Das nächste Ziel ist die Bestimmung des Trägheitsmomentes I_z . Dazu werden zunächst aus den gemessenen Anfangsfrequenzen f_A , der gemessenen

Präzessionsdauern T_P und der soeben bestimmten Dämpfungskonstante δ mittels (6) die Endfrequenzen f_E der Messungen berechnet. Aufgrund der hohen Halbwertszeit des Kreisels nimmt man eine lineare Abnahme der Frequenzen über die - relativ - kleinen Präzessionsdauern an. Somit kann man dann die Durchschnittsfrequenzen berechnen, mit der dann später I_z bestimmt wird.

$$f_E = f_A \cdot e^{-\delta T_P} \quad \text{und} \quad (13)$$

$$\Delta f_E = f_E \sqrt{\left(\frac{\Delta f_A}{f_A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T_P}{T_P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \delta}{\delta}\right)^2} \quad (14)$$

Rechnet man nun die Frequenzen der einzelnen Messungen in Kreisfrequenzen um anhand der Beziehung

$$\omega = 2\pi f \quad (15)$$

lässt sich dann die durchschnittliche Kreisfrequenz $\bar{\omega}_F$ berechnen:

$$\bar{\omega}_F = \frac{\omega_A + \omega_E}{2} \quad \Delta \bar{\omega}_F = \sqrt{\left(\frac{\Delta \omega_A}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \omega_E}{2}\right)^2} \quad (16)$$

| Messung | f_A [1/min] | Delta f_A [1/min] | f_E [1/min] | Delta f_E [1/min] | Präzessionsdauer T_P [s] | Delta T_P [s] |
|---------------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------------|--------------------------|---------------|
| 1 0,15 m 1 Gewicht | 689 | 10 | 628,6774148 | 9,154961351 | 130,89 | 1 |
| | 600 | 10 | 552,9577821 | 9,236178918 | 116,64 | 1 |
| | 446 | 10 | 419,5492631 | 9,415344243 | 87,34 | 1 |
| | 252 | 10 | 243,1333571 | 9,650080398 | 51,17 | 1 |
| 2 0,2 m 1 Gewichte | 685 | 10 | 638,7702466 | 9,347503011 | 99,82 | 1 |
| | 601 | 10 | 565,1509901 | 9,418853856 | 87,86 | 1 |
| | 449 | 10 | 428,5930588 | 9,55249427 | 66,45 | 1 |
| | 250 | 10 | 243,6217744 | 9,746585736 | 36,92 | 1 |
| 3 0,15 m 2 Gewichte | 681 | 10 | 650,2262025 | 9,564128133 | 66,06 | 1 |
| | 603 | 10 | 578,6195594 | 9,607475895 | 58,96 | 1 |
| | 448 | 10 | 434,4666698 | 9,703686424 | 43,82 | 1 |
| | 253 | 10 | 248,6632294 | 9,830230316 | 24,7 | 1 |
| 4 0,2 m 2 Gewichte | 698 | 10 | 673,5303802 | 9,664217053 | 50,98 | 1 |
| | 602 | 10 | 583,3039732 | 9,699945847 | 45,07 | 1 |
| | 447 | 10 | 436,7223308 | 9,775434125 | 33,23 | 1 |
| | 251 | 10 | 247,8468312 | 9,875954188 | 18,06 | 1 |

| Messung | omega_A [1/s] | Delta omega_A [1/s] | omega_E [1/s] | Delta omega_E [1/s] | omega quer [1/s] | Delta omega quer [1/s] |
|---------------------------|---------------|---------------------|---------------|---------------------|------------------|------------------------|
| 1 0,15 m 1 Gewicht | 72,15191128 | 1,047197551 | 65,83494492 | 0,958705311 | 68,9934281 | 0,709883544 |
| | 62,83185307 | 1,047197551 | 57,90560353 | 0,967210395 | 60,3687283 | 0,712761997 |
| | 46,70501078 | 1,047197551 | 43,9350961 | 0,985972544 | 45,32005344 | 0,719160025 |
| | 26,38937829 | 1,047197551 | 25,46086562 | 1,010554056 | 25,92512195 | 0,727640401 |
| 2 0,2 m 1 Gewichte | 71,73303226 | 1,047197551 | 66,8918638 | 0,978868226 | 69,31244803 | 0,716729676 |
| | 62,93657283 | 1,047197551 | 59,18247329 | 0,986340069 | 61,05952306 | 0,719286008 |
| | 47,01917005 | 1,047197551 | 44,88216016 | 1,000334861 | 45,9506651 | 0,724101606 |
| | 26,17993878 | 1,047197551 | 25,51201256 | 1,020660071 | 25,84597567 | 0,731158275 |
| 3 0,15 m 2 Gewichte | 71,31415324 | 1,047197551 | 68,09152869 | 1,001553156 | 69,70284097 | 0,724522504 |
| | 63,14601234 | 1,047197551 | 60,59289857 | 1,006092523 | 61,86945545 | 0,72609312 |
| | 46,91445029 | 1,047197551 | 45,49724327 | 1,016167666 | 46,20584678 | 0,729592253 |
| | 26,49409805 | 1,047197551 | 26,03995249 | 1,029419311 | 26,26702527 | 0,734221838 |
| 4 0,2 m 2 Gewichte | 73,09438907 | 1,047197551 | 70,53193648 | 1,012034443 | 71,81316278 | 0,72815459 |
| | 63,04129258 | 1,047197551 | 61,08344923 | 1,015775954 | 62,06237091 | 0,729455876 |
| | 46,80973054 | 1,047197551 | 45,73345554 | 1,023681068 | 46,27159304 | 0,732213364 |
| | 26,28465854 | 1,047197551 | 25,95445947 | 1,034207504 | 26,119559 | 0,735902146 |

Tabelle 7: Exceltabelle zur bestimmung von ω_E , dessen Fehler, $\bar{\omega}$ und dessen Fehler

Als nächstes trägt man die Durchschnittskreisfrequenzen $\bar{\omega}$ der einzelnen Messungen gegen die vergangenen Präzessionsdauern auf, und lässt die Steigung der sich ergebenden Ausgleichsgerade, welche durch den Ursprung geht, errechnen. Es ergibt sich folgendes Diagramm:

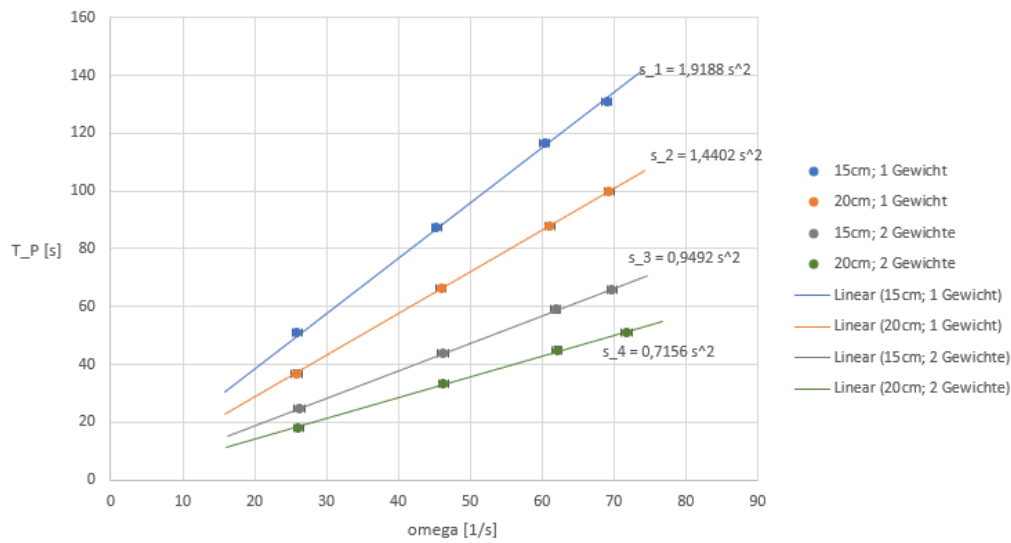


Diagramm 2: Präzessionszeiten der einzelnen Messungen als Funktionen der jeweiligen Kreisfrequenzen

Die Fehler der Steigungen berechnen sich trivialerweise als (Fehler der ω -Achse sind diesmal nicht zu vernachlässigen):

$$\Delta s_i = \frac{T_{P4_i} - \Delta T_{P4_i}}{\omega_{4_i} + \Delta \omega_{4_i}} - s_i \quad (17)$$

Als nächstes rechnet man für jede der 4 Messungen das sich ergebende Trägheitsmoment nach (5) aus und bildet daraus den Mittelwert; dieser stellt das Trägheitsmoment I_z des Kreisels dar.

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{mgl}{\omega_P \omega_F} \quad (18)$$

Mit der Erkenntnis, dass

$$s = \frac{T_P}{\omega_F} \quad \text{und} \quad \omega_P = \frac{2\pi}{T_P} \quad (19)$$

folgt daraus, dass gilt:

$$\Rightarrow I_{z_i} = \frac{mgl s_i}{2\pi} \quad \Rightarrow \Delta I_{z_i} = I_{z_i} \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s_i}{s_i}\right)^2} \quad (20)$$

Nun bestimmt man aus den vier Werten den Mittelwert und dessen Fehler. Somit erhält man das gesuchte Trägheitsmoment I_z :

$$I_z = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 I_{z_i} \quad \Delta I_z = \frac{1}{4} \sqrt{\sum_{i=1}^4 \Delta I_{z_i}^2} \quad (21)$$

Durch einsetzen erhält man folgendes Trägheitsmoment:

$$\underline{\underline{I_z = (4,41 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}} \quad (22)$$

Will man das gefundene Trägheitsmoment I_z mit einem Literaturwert vergleichen, so setzt man die bekannten Größen des Kreisels in (8) ein und erhält:

$$\underline{\underline{I_{zlit} = 4,298 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}} \quad (23)$$

Vergleicht man nun diese Werte, so sieht man:

$$\sigma = \frac{|I_{zlit} - I_z|}{\Delta I_z} = \underline{\underline{2,2}} \quad (24)$$

| s_i [s^2] | Delta s_i [s^2] | l_i [m] | Delta l_i [m] |
|-----------|-----------------|---------|---------------|
| 1,9188 | 0,012704887 | 0,15 | 0,002 |
| 1,4402 | 0,029571036 | 0,2 | 0,002 |
| 0,9492 | 0,022989544 | 0,15 | 0,002 |
| 0,7156 | 0,015637167 | 0,2 | 0,002 |

| Masse Gewichte m_G [kg] | Ortsfaktor Erde g [m/s^2] | l_z_i [kgm^2] | Delta l_z_i [kgm^2] |
|-------------------------|---------------------------|---------------|---------------------|
| 0,00985 | 9,81 | 0,004426356 | 6,58946E-05 |
| 0,00985 | 9,81 | 0,004429739 | 0,000101168 |
| 0,0197 | 9,81 | 0,004379297 | 0,000121076 |
| 0,0197 | 9,81 | 0,004402057 | 0,000105787 |

| | |
|-------------------------|-------------|
| l_z quer [kgm^2]: | 0,004409362 |
| Delta l_z quer [kgm^2]: | 5,02664E-05 |
| Radius Kugel r_m [m]: | 0,0508 |
| Masse Kugel m_k [kg] | 4,164 |
| l_literatur [kgm^2]: | 0,004298314 |
| Sigma_l_z | 2,20919506 |

Tabelle 8: Exceltabelle zur Bestimmung und Vergleich von I_z

3.4 Trägheitsmomente

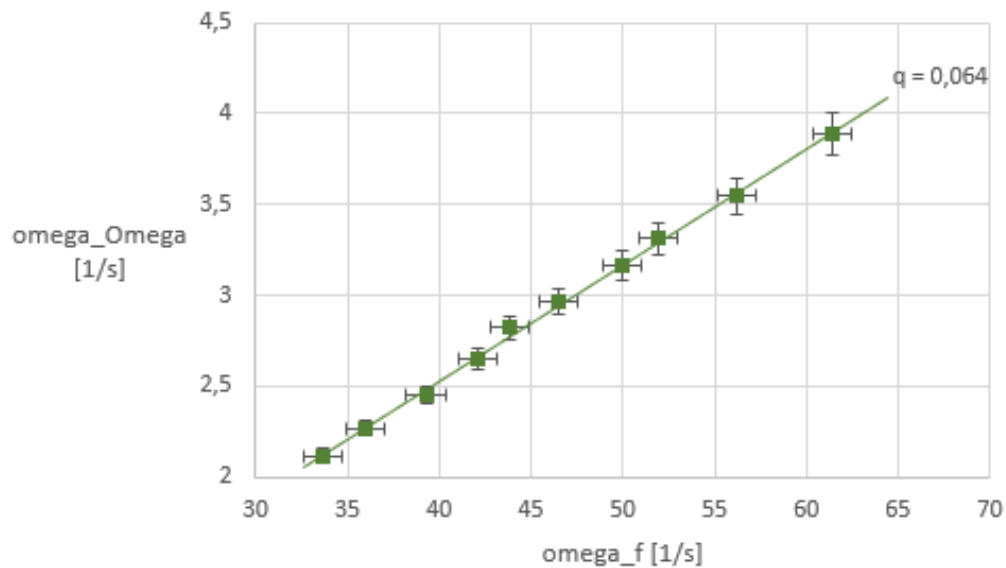
Als nächstes widmet man sich der Bestimmung des Trägheitsmomentes I_x . Dazu wird erstmals eine Vermutung über die Größe dieses Werts anhand den Beobachtungen in Tabelle 4 gemacht. Man nimmt sich (4) zu Hilfe und merkt, dass die Trägheitsmomente gleich sind, wenn gilt, dass $\Omega = 1$, da sich dann die Differenz $I_x - I_z$ zu null ergibt.

Ist nun $\Omega > 1$, so wird der Bruch negativ und somit ist I_x zwangsmäßig kleiner als I_z . Im Falle $\Omega < 1$ ist es genau andersherum.

Trägt man nun Tabelle 4 in ein Diagramm auf (die Einheiten werden vorher passend umgerechnet in Tabelle 9) entsteht folgender Graph mit passender Tabelle:

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Frequenz f [1/min] | 586 | 537 | 496 | 477 | 444 | 419 | 402 | 375 | 344 | 321 |
| Delta f [1/min] | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 10*Omega [s] | 16,15 | 17,72 | 18,95 | 19,84 | 21,17 | 22,26 | 23,67 | 25,59 | 27,68 | 29,64 |
| Delta 10*Omega [s] | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| Frequenz f [1/s] | 9,76666667 | 8,95 | 8,266667 | 7,95 | 7,4 | 6,983333 | 6,7 | 6,25 | 5,733333 | 5,35 |
| Delta f [1/s] | 0,16666667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 | 0,166667 |
| omega_f [1/s] | 61,3657765 | 56,23451 | 51,941 | 49,95132 | 46,49557 | 43,87758 | 42,09734 | 39,26991 | 36,0236 | 33,61504 |
| Delta omega_f [1/s] | 1,047197551 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 | 1,047198 |
| Omega [s] | 1,615 | 1,772 | 1,895 | 1,984 | 2,117 | 2,226 | 2,367 | 2,559 | 2,768 | 2,964 |
| Delta Omega [s] | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| omega_Omega [1/s] | 3,890517218 | 3,545816 | 3,315665 | 3,166928 | 2,967967 | 2,822635 | 2,654493 | 2,455328 | 2,269937 | 2,119833 |
| Delta omega_Omega [1/s] | 0,120449449 | 0,100051 | 0,087485 | 0,079812 | 0,070098 | 0,063402 | 0,056073 | 0,047974 | 0,041003 | 0,03576 |

Tabelle 9: Exceltabelle zur Umrechnung der gemessenen Größen

Diagramm 3: Winkelgeschwindigkeit ω_{Ω} als Funktion der Figurenwinkelgeschwindigkeit ω_f

Der Fehler berechnet sich wieder nach altbekanntem Muster (Fehler der ω_f -Achse sind nicht zu vernachlässigen):

$$\Delta q = \frac{(\omega_{\Omega_{10}} + \Delta\omega_{\Omega_1}) - (\omega_{\Omega_1} - \Delta\omega_{\Omega_{10}})}{(\omega_{f10} - \Delta\omega_{f10}) - (\omega_{f1} + \Delta\omega_{f10})} - q \quad (25)$$

Berechnet man nun I_x mittels (4), dem soeben bestimmten Trägheitsmoment I_z und der ermittelten Steigung q des Graphens aus Diagramm 3:

$$\Rightarrow I_x = \frac{I_z(\Omega - 1)}{\omega_F} + I_z = -\frac{I_z}{q - 1} \quad (26)$$

$$\Delta I_x = \sqrt{\left(\frac{\Delta I_z}{q - 1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q I_z}{(q - 1)^2}\right)^2} \quad (27)$$

Einsetzen liefert dann:

$$\underline{\underline{I_x = (4,71 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}} \quad (28)$$

Der Vergleich mit dem vorherig bestimmten Wert für I_z liefert einem:

$$\sigma = \frac{|I_x - I_z|}{\sqrt{(\Delta I_x)^2 + (\Delta I_z)^2}} = \underline{\underline{3,26}} \quad (29)$$

Dies ist schon eine signifikante Abweichung; hierzu mehr in der Diskussion.

3.5 Nutation

Zuletzt widmet man sich der Bestimmung des gleichen Trägheitsmomentes I_x wie eben, nur anhand der Nutationsfrequenz f_N . Die gemessenen Frequenzen werden nun gegeneinander aufgetragen und anhand der Steigung über (2) zu I_x verrechnet. Dazu ist der Wert I_z natürlich essentiell.

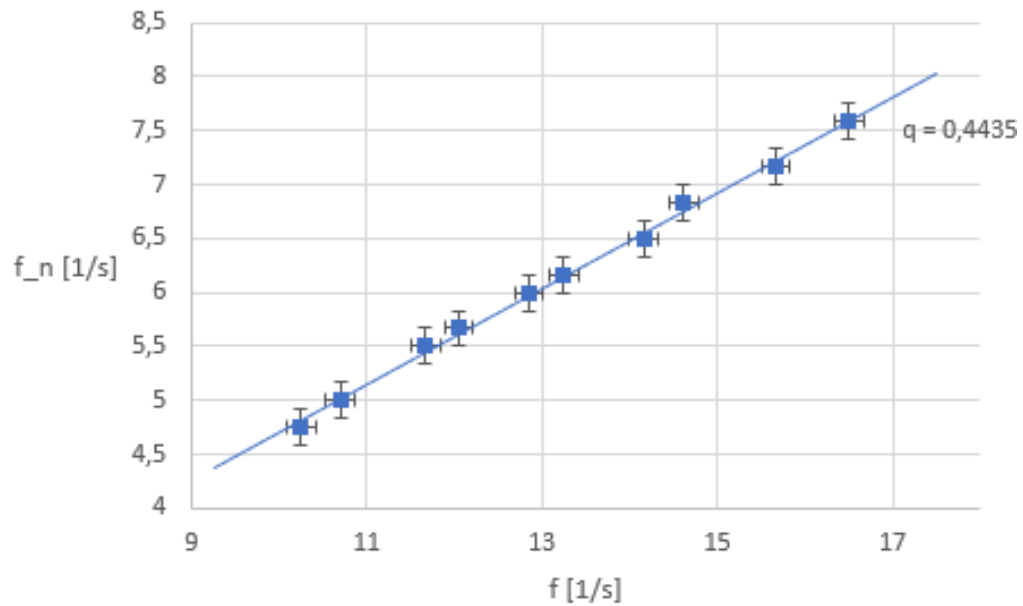


Diagramm 4: Nutationfrequenz f_N als Funktion der Eigenfrequenz f

Der Fehler Δq berechnet sich wiederum als:

$$\Delta q = \frac{(f_{N_{max}} + \Delta f_{N_{max}}) - (f_{N_{min}} - \Delta f_{N_{min}})}{(f_{max} - \Delta f_{max}) - (f_{max} + \Delta f_{max})} - q \quad (30)$$

Somit hat man jetzt alle nötigen Werte bzw. Größen zur Bestimmung von I_x . Aus (2) folgt bei ausreichend geringen Nutationswinkeln:

$$f_N = \frac{I_z}{I_x} f_F \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{f_N}{f} I_z \quad (31)$$

Mit $q = \frac{f_N}{f}$ gilt also:

$$I_x = \frac{I_z}{q} \quad \Delta I_x = I_x \sqrt{\left(\frac{\Delta I_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2} \quad (32)$$

Einsetzen mit den passenden Werten liefert folgendes, offensichtlich 2-fach zu großes Ergebnis:

$$I_x = (9,9 \pm 2,1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (33)$$

Woran dies liegt wird in der Diskussion aufgegriffen; Fakt ist, dass die Steigung verdoppelt werden muss bzw. das Ergebnis aus (32) halbiert werden muss. Also folgt für I_x :

$$\underline{\underline{I_x = (5,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}} \quad (34)$$

Vergleicht man diesen Wert nun mit dem aus der Präzession bestimmten Wert, so erhält man:

$$\sigma = \frac{|I_{x_P} - I_{x_N}|}{\sqrt{(I_{x_P})^2 + (I_{x_N})^2}} = 0,25 \quad (35)$$

| | |
|--------------------|-----------|
| q | 0,4435 |
| delta q | 0,0917113 |
| I_z | 0,0044094 |
| delta I_z | 0,0001239 |
| I_x | 0,0099422 |
| Delta I_x | 0,0020748 |
| I_x halbiert | 0,0049711 |
| Delta I_x halbiert | 0,0010374 |
| | |
| sigma I_x | 0,2484783 |

Tabelle 10: Exceltabelle zur Berechnung und zum Vergleich von I_{x_N}

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir mit einem Kreisel experimentiert und sind seinem Verhalten auf den Grund gegangen. Dabei haben wir besonders das Dämpfungsverhalten, das Präzessionsverhalten und die Nutation untersucht. Zuerst haben wir uns mit dem Kreisel ganz allgemein auseinandergesetzt und

sind mit ihm vertraut geworden, damit wir im Anschluss die Experimente möglichst Reibungsfrei durchführen können. In der Auswertung ist man dann nach Analyse des Dämpfungsverhalten des Kreisels auf das Präzessionsverhalten gekommen und hat dadurch dann das Trägheitsmoment I_z des Kreisels bestimmt. Die weiteren beiden Berechnungen waren der Ermittlung von I_x gewidmet. Dieses Trägheitsmoment sollte I_z entsprechen (leicht größer wegen dem Stab), da in unserem Fall der Kiesel eine Kugel war. Aus dieser Erkenntnis kann man dann sogar einen Literaturwert zum Vergleich von I_z ziehen.

4.2 Diskussion

Über die ersten Teile des Versuches ist nicht viel zu sagen, außer, dass die Ergebnisse ziemlich plausibel wirken bzw. mit den gemachten Erfahrungen übereinstimmen könnten; man hat keinen Vergleichswert.

Eine ziemlich große Abweichung ist in Tabelle 2 zu erkennen. Zwar liegen die Werte relativ dicht bei einander, aber sind doch etwas zu weit voneinander entfernt um wirklich aussagekräftig sein zu können. Dieser generelle Fehler der gemessenen Präzessionsdauer könnte daran liegen, dass man keinen festen Beobachtungspunkt wählen konnte, von dem man eine volle Umrundung gut wahrnehmen konnte, denn eine leichte Bewegung des Beobachters führt zu unterschiedlich gemessenen Zeiten, nur wegen des Aufbaus des Experimentes.

Beim nächsten Teil, bei dem man das Trägheitsmoment über die Präzessionszeit bestimmt hat, haben wir eine nicht signifikante Abweichung von $\sigma = 2,2$. Dennoch ist diese etwas ärgerlich. Woran könnte sie liegen? Zum Einen wäre eine Möglichkeit, dass die Eigenfrequenz eigentlich geringer war, als der angegebene Messwert, denn nach der Messung verging noch eine geringe Zeit bis zur Einstellung des Präzessionswinkels. Außerdem kann es hierbei sein, dass wir beim Ausrichten des Stabes diesen direkt berührt haben (anstatt des Kugellagers bzw. nur teilweise) und somit durch Reibungseffekte unabsichtlich eine noch kleinere Frequenz als gemessen eingestellt haben. Hinzu kommt noch die vorherig angesprochene mögliche Fehlerquelle der Fehlmessung der Präzessionszeit.

Als nächstes widmet man sich der signifikanten Abweichung $\sigma = 3,26$ bei der Berechnung des Trägheitsmomentes I_x . Der erste Fehler ist überhaupt der Vergleich mit dem Trägheitsmoment I_z , weil sich diese intrinsisch voneinander unterscheiden, da wir beim Experiment eine Kugel mit Stab haben, und

somit nicht alle Trägheitsachsen gleich sein können. Ansonsten könnte wieder eine Abweichung der gemessenen Frequenzen, aufgrund ähnlicher Effekte wie eben besprochen, teilweise verantwortlich zu machen, da zum Einstellen einer Nutationsbewegung der Stab direkt berührt werden musste.

Das aber letztere Sache einen eher geringeren Faktor darstellt, lässt sich am Vergleich der beiden Trägheitsmomente I_x festmachen, denn diese beiden jeweiligen Ergebnisse liegen dicht aneinander und haben eine sigma-Abweichung von nur $\sigma = 0,25$.

Allerdings ist uns bei der Messung des letzten Falls ein großer, aber leicht zu korrigierender Fehler unterlaufen: Die Nutationsfrequenz wurde halb so groß gemessen, wie sie eigentlich war. Bei dem Stroboskop ist es bei hohen Frequenzen nur schwer zu erkennen, ob man eine Umdrehung aussetzt oder nicht. Sprich: man kann nur jede zweite Umdrehung beleuchten, es aber aufgrund der hohen Nutationsfrequenz mit bloßen Auge aber nicht erkennen. Fängt man also bei einer zu geringen Blitzfrequenz an, so wird nur ein vielfache Umdrehung gemessen, wodurch somit immer eine deutlich geringere Frequenz vermessen wird.

Mit der Erkenntnis, dass unsere einzige signifikante σ -Abweichung vermutlich einem Fehlvergleich zugrunde liegt, lässt sich sagen, dass uns der Versuch gut gelungen ist; alle zu zeigenden Effekte und Phänomene wurden erfolgreich demonstriert.