**2. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)**

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio, Martin Reitenbach

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ $\Sigma$___

---

## 2.1 Aufgabe 1

a) Geg.:

- Van-der-Waals Gleichung: $\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

Sei eine "hinreichend" kleine Dichte $\frac{n}{V}$ gegeben, dann gilt:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(V\left(1 - \frac{n}{V}b\right)\right) = nRT \qquad \left| \frac{n}{V} << 1 \right.$$

$$pV \approx nRT$$

b) An einem isothermen Prozess ist die Arbeit:

$$\Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} \qquad \left| \Delta Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V \right.$$

Für ein ideales Gas ist die Arbeit

$$\Delta W_{12} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Bei einem realen Gas stellen wir die Van-der-Waals Gleichung nach dem Druck um und integrieren dann für die Arbeit:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a\frac{n^2}{V^2}$$

$$\begin{aligned}
\Delta W_{12} &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \, \mathrm{d}V \\
&= \left[\ln (V - nb)\right]_{V_1}^{V_2} + \left[\frac{an^2}{V}\right]_{V_1}^{V_2} \\
&= \ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) + an^2\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)
\end{aligned}$$

$$= \ln\left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right) + an^2\left(\frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}\right)$$

Die Arbeit eines idealen Gases ist dann größer als die eines realen Gases.

c) Geg.:

- Molekül: $CO_2$
- Kohäsionsdruck: $a = 0.365$ J m$^3$ mol$^{-2}$
- Kovolumen: $b = 4.27 \cdot 10^{-5}$ m$^3$ mol$^{-1}$
- Avogadro-Zahl: $N_A = 6.022\,147 \cdot 10^{23}$ mol$^{-1}$

Mithilfe des Kovolumens $b$ können wir das Volumen $V_A$ bestimmen:

$$b = 4N_A V_A$$
$$V_A = \frac{b}{4N_A}$$

womit wir dann auch den Radius in folgender Weise damit in Beziehung setzen können:

$$V_A = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V_A}$$
$$\approx 1.617\,49 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$
$$\rightarrow d = 2r$$
$$\approx 0.324 \text{ nm}$$

d)

$$p = \frac{nRT}{(V - nb)} - a\frac{n^2}{V^2}$$

$$n = 2.6 \text{ mol},\ T = 15\ ^\circ\text{C} = 288.15 \text{ K},$$
$$V = 14 \text{ l} = 14 \text{ dm}^3 = 0.014 \text{ m}^3$$
$$a = 0.365 \text{ Jm}^3\text{mol}^{-2}, b = 4.27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}$$

$$p = \frac{2.6 \text{ mol} \cdot R \cdot 288.15 \text{ K}}{(0.014 \text{ m}^3 - 2.6 \text{ mol} \cdot (4.27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}))} - 0.365 \text{ Jm}^3\text{mol}^{-2} \cdot \frac{(2.6 \text{ mol})^2}{(0.014 \text{ m}^3)^2}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{435904.21} \text{ Pa} = \mathbf{4.359} \text{ bar}$$

## 2.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $n(v_x) = \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cv_x^2}$
- $c = \frac{m}{2k_B T}$
- Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23}$ J K$^{-1}$

a) Gesucht ist die Pumpleitung des Gasses in einem Getter $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, wobei wir $V = A \cdot l$ setzen können, und daher ist

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A \cdot l}{\mathrm{d}t} \\ &= A\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= A \cdot v\end{aligned}$$

Bei einer konstanten Fläche interessiert uns also die Geschwindigkeit, welche wir mit einem statistischen mittleren Wert $\overline{v}$ beschreiben können. Außerdem beschränken wir die mittlere Geschwindigkeit auf die Teilen, die in positive $x-$Richtung gehen $\overline{v}_x$.

Wir bestimmen die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v_x}$:

$$\begin{aligned}\overline{v}_x &= \int_0^\infty v_x n(v_x)\ \mathrm{d}v_x \\ &= \int_0^\infty v_x \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cv_x^2}\ \mathrm{d}v_x \\ &= \sqrt{\frac{c}{\pi}} \int_0^\infty v_x e^{-cv_x^2}\ \mathrm{d}v_x && \Big| u = -cv_x^2 \\ & && \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v_x} = -2cv_x \\ & && u(0) = 0 \\ & && u(\infty) = -\infty \\ &= -\sqrt{\frac{c}{\pi}} \int_0^\infty v_x e^u \frac{\mathrm{d}u}{2cv_x} \\ &= -\sqrt{\frac{c}{4\pi c^2}} \int_0^\infty e^u\ \mathrm{d}u \\ &= -\sqrt{\frac{1}{4\pi c}} [e^u]_0^\infty \\ &= -\sqrt{\frac{1}{4\pi c}} \left[e^{-cv_x^2}\right]_0^\infty \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi c}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2k_B T}{4\pi m}} \\
&= \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}
\end{aligned}
$$

b) Geg.:

- $T = 293$ K
- $A = 10$ cm$^2$
- $m_{N_2} = 28$ u
- $m_{H_2} = 2$ u
- u $= 1,660\ 538 \cdot 10^{-27}$ kg

Nach dem, was wir oben hergeleitet haben, ist die Pumpeleistung für Stickstoff:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= A \cdot \overline{v}_{x_{N_2}} \\
&= 0,118\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

und für Wasserstoff:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= A \cdot \overline{v}_{x_{H_2}} \\
&= 0,44\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}
$$

## 2.3 Aufgabe 3

Geg.:

- $A = 0.25$ cm$^2$
- $T_0 = 25$ °C

a) Geg.:

- Fouriersches Gesetz: $I_Q := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\lambda A \frac{\mathrm{d}T(x,t)}{\mathrm{d}x}$
- Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{A\rho c}\frac{\partial I_Q}{\partial x}$

  Wir setzen die Definition von $I_Q$ in die Kontinuitätsgleichung ein:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= -\frac{1}{A\rho c}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda A \frac{\mathrm{d}T(x,t)}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

b) Geg.:

- $T(x,t) = T_0 + Ct^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{4at}}$

Wir wollen zeigen, dass die gegebene Funktion die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Wir setzen die gegebene Funktion $T$ und leiten sie einmal nach der Zeit und zwei Mal nach dem Ort ab:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{C}{2}t^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-x^2}{4at}} + Ct^{-\frac{1}{2}}\frac{x^2}{4at^2} e^{\frac{-x^2}{4at}} \\
&= e^{\frac{-x^2}{4at}} \left[\frac{Cx^2}{4at^{\frac{5}{2}}} - \frac{C}{2t^{\frac{3}{2}}}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) &= a\frac{\partial}{\partial x}\left(Ct^{-\frac{1}{2}}\frac{-2x}{4at} e^{\frac{-x^2}{4at}}\right) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-Cx}{2at^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4at}}\right) \\
&= a\left[\frac{-C}{2at^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4at}} + \frac{Cx}{2at^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{-2x}{4at} e^{\frac{-x^2}{4at}}\right] \\
&= a\left[\frac{-C}{2at^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4at}} + \frac{Cx^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4at}}\right] \\
&= a\left[e^{\frac{-x^2}{4at}}\left[\frac{Cx^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{C}{2at^{\frac{3}{2}}}\right]\right] \\
&= e^{\frac{-x^2}{4at}}\left[\frac{Cx^2}{4at^{\frac{5}{2}}} - \frac{C}{2t^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\partial T}{\partial t}
\end{aligned}$$

c) Geg.:

- $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$
- Wärmeleitfähigkeit: $\lambda = 401 \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Spezifische Wärme: $c = 0.385 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Dichte: $\rho = 8.96 \text{ gm cm}^{-3}$
- $\Delta T = T(0,t) - T_0 = 70 \text{ K}$
- $C = \dfrac{Q}{c\rho A\sqrt{4\pi a}}$
- $x = 0$

Setzen wir $C$ in $T$ ein und lösen nach $Q$, dann erhalten wir:

$$\Delta T = T_0 + Ct^{-\frac{1}{2}} - T_0$$

$$
\begin{aligned}
Q &= \Delta T c \rho A \sqrt{4\pi a t} \\
&\approx 1787 \text{ J}
\end{aligned}
$$

d) Um die maximale Temperaturerhöhung zu bestimmen, leiten wir die Funktion $T$ nach der Zeit ab und setzen diese gleich 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= e^{\frac{-x^2}{4at}} \left[ \frac{Cx^2}{4at^{\frac{5}{2}}} - \frac{C}{2t^{\frac{3}{2}}} \right] && \Big| e^{\frac{-x^2}{4at}} \neq 0 \\
0 &= \frac{Cx^2}{4at^{\frac{5}{2}}} - \frac{C}{2t^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x^2}{4at} - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{x^2}{4at} \\
t &= \frac{x^2}{2a} && \Big| x = 10 \text{ cm} \\
&\approx 43 \text{ s}
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Zeit in die Formel für die Temperatur ein, dann erhalten wir:

$$
T(10 \text{ cm}, 60 \text{ s}) \approx 75\ ^\circ\text{C}
$$

Verglichen mit der Anfangstemperatur $T_0 = 25\ ^\circ\text{C}$ entspricht dies einer Steigerung um ca. $50\ ^\circ\text{C}$.

e) An dieser Stelle ist der Temperaturverlauf:

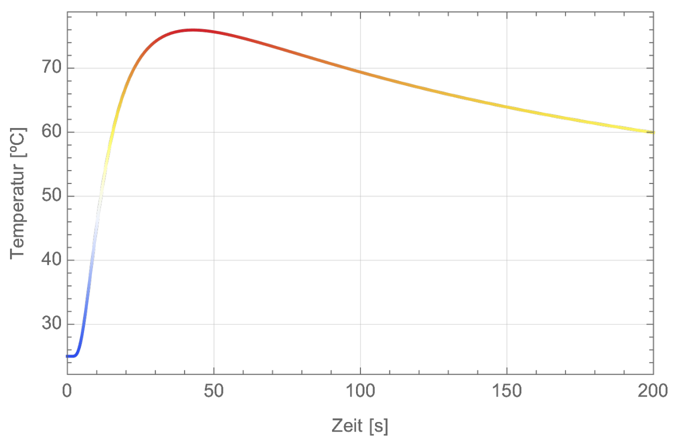


Abbildung 1: Temperaturverlauf an $x = 10$ cm