3. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

3.1 Aufgabe 1

a) Leo:

- Wie unterscheidet sich gleichmäßige Stetigkeit von Stetigkeit anschaulich?

- Wie folgt der Zusammenhang einer Menge aus dem Zusammenhang von f(M) wenn f stetig ist?

- Was ist ein Beispiel für Stetigkeit, das gleichmäßige Stetigkeit nicht erfüllt?

- Wie kann ich gegebene Eigenschaften einer Kurve (Steigung in Punkt x, Lage von Extrema usw.) nutzen, um eine Kurve zu konstruieren, die diese Punkte durchläuft und die Eigenschaften erfüllt?

b) Juan:

- Wie unterscheidet sich im Allgemeinen die Beweisführung bezüglich der unterschiedlichen Arten von Stetigkeit?

- Wie folgt Lipschitz-Stetigkeit aus der Steigung einer Funktion?

- Was ist ein Beispiel für eine stetige Funktion, die an keiner Stelle differenzierbar ist?

- Wie kann ich Stetigkeit benutzen, um Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ zu ermitteln?

c) Marius:

- Wie unterscheidet sich der "Mittelwertsatz"(S 5.11) vom "Verallgemeinerten Mittelwertsatz"(S 5.18)?

- Wie folgt die Existenz von Extrema aus dem Wert der Ableitungsfunktion?

- Was ist ein Beispiel für eine Funktion, die (Punkt-)Stetig, aber nicht Lipschitz-Stetig ist?

- Wie kann ich die Stetigkeit einer Funktion mit dem Folgenkriterium widerlegen?

3.2 Aufgabe 2

a) Es sei $b > 0$, η eine Kurve $\eta : [0, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{-2t}(\cos t, \sin t)$

Zu zeigen: η ist rektifizierbar mit Länge L

Nach Satz 2.4 ist jede Kurve $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ rektifizierbar.

η liegt nämlich in C^1, die Menge der 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen im Intervall $[0, b]$ nach $\mathbb{R}^n$, weil e^{-2t} und $\cos t$ und $\sin t$ stetig differenzierbar im Intervall $[0, b]$ sind (Analysis I). Das Produkt zweier stetig differenzierbaren Funktionen in diesem Intervall ist wieder stetig differenzierbar.

Dann ist die Länge

$$L(\eta) = \int_0^b |\eta'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Dazu bestimmen wir zuerst die Ableitung η':

$$\eta' = e^{-2t}(-2\cos t - \sin t, -2\sin t + \cos t) \qquad |\text{Produktregel}$$

und den euklidischen Betrag von η':

$$\begin{aligned}
|\eta'| &= \sqrt{(e^{-2t})^2\left[(-2\cos t - \sin t)^2 + (-2\sin t + \cos t)^2\right]} \\
&= e^{-2t}\sqrt{4\cos^2 t + 4\cos t \sin t + \sin^2 t + 4\sin^2 t - 4\sin t\cos t + \cos^2 t} \\
&= e^{-2t}\sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\
&= \sqrt{5}e^{-2t}
\end{aligned}$$

Die Länge ist dann:

$$\begin{aligned}
L(\eta) &= \sqrt{5}\int_0^b e^{-2t} \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{5}\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^b \\
&= -\frac{\sqrt{5}e^{-2b}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - e^{-2b}\right)
\end{aligned}$$

b) **Wir parametrisieren** η nach Bogenlänge, indem wir die Länge nach dem Parameter b auflösen:

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - e^{-2b}\right) \\
\frac{2l}{\sqrt{5}} &= 1 - e^{-2b} \\
e^{-2b} &= 1 - \frac{2l}{\sqrt{5}} \\
-2b &= \ln\left(1 - \frac{2l}{\sqrt{5}}\right) \\
b(l) &= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2l}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}
$$

Wir benennen das um für Konsistenz mit der Aufgabenstellung:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) \\
\varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)}
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, dass diese Parametrisierung die Bedingung $|\gamma'(\varphi(t))| = 1 \ \forall t \in [0, L]$ erfüllt:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \eta(\varphi(t)) \\
\gamma' &= \varphi'(t)\eta'(\varphi(t)) \\
&= \varphi' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(e^{-2\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi)\right) \\
&= \varphi'(-2e^{-2\varphi}\cos\varphi - e^{-2\varphi}\sin\varphi, -2e^{-2\varphi}\sin\varphi + e^{-2\varphi}\cos\varphi) \\
&= \varphi' e^{-2\varphi}(-2\cos\varphi - \sin\varphi, -2\sin\varphi + \cos\varphi) \\
1 &= |\gamma'| \\
&= \varphi' e^{-2\varphi}\sqrt{(-2\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + (-2\sin\varphi + \cos\varphi)^2} \\
1 &= \varphi' e^{-2\varphi}\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, dass die Funktion $\varphi(t)$ diese Bedingung erfüllt:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\sqrt{5}\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)} e^{2\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)} \sqrt{5} && (1) \\
&= \frac{1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\left(1 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)} \sqrt{5} && (2) \\
&= 1 && (3)
\end{aligned}
$$

c) Gegeben: Sei $a > 0$ und $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (0,0) & t = 0 \\ (t, t^\alpha \cos(\frac{1}{t})) & t > 0 \end{cases}$

Für den ersten Aufgabenteil sei $\alpha = 1$

(1) Stetigkeit

Für $t > 0$ ist κ stetig als Multiplikation und Komposition stetiger Funktionen. Bei $t_0 = 0$ gilt nach Punktstetigkeit:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in [0,1] : |t - t_0| < \delta &\implies |\kappa(t) - \kappa(t_0)| < \varepsilon \\ \iff |t| < \delta &\implies \left| t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Es gilt: $\cos(\frac{1}{t}) \leq 1\ \forall t \in [0,1] \implies \left| t \cos(\frac{1}{t}) \right| \leq |t|\ \forall t \in [0,1]$

$$\iff |t| < \delta \implies |t| < \varepsilon$$

Setze: $\delta = \varepsilon$

$$\begin{aligned} \iff |t| < \varepsilon &\implies |t| < \varepsilon \\ &\implies \text{stetig bei } t = 0. \end{aligned}$$

(2) Rektifizierbarkeit

Um zu zeigen, dass die Kurve nicht Rektifizierbar ist, verwenden wir eine explizite Zerlegung, für welche eine unendliche Länge erreicht würde. Zur Definition der Zerlegung nutzen wir die lokalen Extremstellen der Kosinusfunktion:

cos nimmt Maxmima bei $2n\pi$ und Minima für $\pi + 2n\pi$ an ($n \in \mathbb{N}$).
Die enstpechenden Stellen ermitteln wir also durch:

$$\frac{1}{t_{\max}} = 2\pi n \implies t_{\max(\mathrm{n})} = \frac{1}{2\pi n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{1}{t_{\min}} = \pi + 2\pi n \implies t_{\min(\mathrm{n})} = \frac{1}{\pi + 2\pi n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Zum Ermitteln der Länge definieren wir die Zerlegung Z so, dass $t_{max(n)}$ und $t_{min(n)}$ immmer abwechelnd aufeinender folgen. Wir Summieren also immer über die Abstände zwischen Maximum und Minimum. Hierzu vernachlässigen wir auch die Abstände zwischen 0 und der zweiten sowie 1 und der vorletzten Stelle der Zerlegung.
($\implies$ "$\geq$" am Anfang).

$$\begin{aligned} L(Z, \kappa) &\geq \sum_{n=1}^{k} |\kappa(t_{max(n)}) - \kappa(t_{min(n)})| \\ &= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi n) \right) - \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}, \frac{1}{\pi + 2\pi n} \cos(\pi + 2\pi n) \right) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{2\pi n}(1) \right) - \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}, \frac{1}{\pi + 2\pi n}(-1) \right) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{2\pi n} \right) + \left(-\frac{1}{\pi + 2\pi n}, \frac{1}{\pi + 2\pi n} \right) \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{\pi + 2\pi n}, \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{\pi + 2\pi n} \right) \right| \\
&\geq \sum_{n=1}^{k} \left| \left(0, \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{\pi + 2\pi n} \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left| \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{\pi + 2\pi n} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{\pi + 2\pi n} \\
&\geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2\pi n} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \xrightarrow{k \to \infty} \infty
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt also, da L nicht kleiner ∞ ist, dass κ nicht rektifizierbar ist.

d) Zusatzaufgabe
Auch für allgemeine α werden wir die Berechnung der Länge der Kurve anhand der Summendarstellung betrachten. Hierbei verwenden wir dieselbe Zerlegung wie in Aufgabenteil c).
α beziehen wir dann wie folgt mit ein:

$$
\begin{aligned}
L(Z, \kappa) &\geq \sum_{n=1}^{k} |\kappa(t_{max(n)}) - \kappa(t_{min(n)})| \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n}, \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\alpha} \cos(2\pi n) \right) - \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}, \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}\right)^{\alpha} \cos(\pi + 2\pi n) \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{\pi + 2\pi n}, \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}\right)^{\alpha} \right) \right| \\
&\geq \sum_{n=1}^{k} \left| \left(0, \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}\right)^{\alpha} \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{k} \left| \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{\pi + 2\pi n}\right)^{\alpha} \right| \\
&\geq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\alpha} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}}
\end{aligned}
$$

Nach den Konvergenzkriterien für Reihen folgt also:
$0 < \alpha < 1$: Reihe divergiert $\implies$ Kurve nicht rektifizierbar
$\alpha > 1$: Reihe konvergiert $\implies$ Kurve rektifizierbar

3.3 Aufgabe 3

a) Sei M der Raum der quadratischen Matrizen auf $\mathbb{R}$, $M(n,n,\mathbb{R})$: "$\mathbb{R}^{n\times n}$", und wir identifizieren es mit dem R^{n^2}, indem wir die $n \times n$-elementigen Matrizen auf einen $n \cdot n$ Spaltenvektor abbilden. **Gesucht** sind die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an der Einheitsmatrix E in Richtung einer beliebigen Matrix A:

i. $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ A \mapsto \text{Spur } A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{aligned}
f'_{E,A}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(E+At) - f(E)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} e_{ii} + ta_{ii} - \sum_{i=1}^{n} e_{ii}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} ta_{ii}}{t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
&= \text{Spur } A
\end{aligned}$$

ii. $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},\ A \mapsto \text{Spur } A^2 :$

Die Richtungsableitung ist:

$$\begin{aligned}
f'_{E,A}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\text{Spur}((E+At)^2) - \text{Spur } E}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\text{Spur}(E^2 + 2AEt + A^2t^2) - \text{Spur } E}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\text{Spur}(E + 2At + A^2t^2) - \text{Spur } E}{t} && |\text{Spur ist linear} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\text{Spur}(2At + A^2t^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\text{Spur}(2A + A^2t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \text{Spur}(2A + A^2t) \\
&= \text{Spur } 2A
\end{aligned}$$

b) **Gesucht** sind die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \tan(x^2 + y^2) - z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)} \qquad \left|\ \frac{d}{dt}\tan t = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad \text{(Ana I)}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

ii $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z$$

3.4 Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Zu zeigen ist, dass alle Richtungsableitungen dieser Funktion existieren aber f in $(0,0)$ nicht stetig ist. $a = (x,y)$ sei ein beliebiger Punkt in $\mathbb{R}^2$

Die Richtungsableitungen in Richtung e_1, e_2 sind:

$$\begin{aligned}
f'_{a,e_1}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_1) - f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(x+t)(y^2)}{(x+t)^2+y^4} - \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(x+t)y^2(x^2+y^4) - xy^2[(x+t)^2+y^4]}{(x^2+y^4)[(x+t)^2+y^4]}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(xy^2+ty^2)(x^2+y^4) - xy^2(x+t)^2 - xy^6}{(x^2+y^4)(x+t)^2 + x^2y^4 + y^8}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{x^3y^2 + xy^6 + tx^2y^2 + ty^6 - x^3y^2 - 2tx^2y^2 - t^2xy^2 - xy^6}{x^4 + 2tx^3 + t^2x^2 + x^2y^4 + 2txy^4 + t^2y^4 + x^2y^4 + y^8}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{-tx^2y^2 + ty^6 - t^2xy^2}{x^4 + 2tx^3 + t^2x^2 + x^2y^4 + 2txy^4 + t^2y^4 + x^2y^4 + y^8}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t(-x^2y^2 + y^6 - txy^2)}{x^4 + 2tx^3 + t^2x^2 + x^2y^4 + 2txy^4 + t^2y^4 + x^2y^4 + y^8}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-x^2y^2 + y^6 - txy^2}{x^4 + 2tx^3 + t^2x^2 + x^2y^4 + 2txy^4 + t^2y^4 + x^2y^4 + y^8} \\
&= \frac{-x^2y^2 + y^6}{x^4 + 2x^2y^4 + y^4} \\
&= \frac{-x^2y^2 + y^6}{(x^2+y^4)^2}
\end{aligned}$$

In e_2 Richtung:

$$\begin{aligned}
f'_{a,e_2}(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_2) - f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{x(y+t)^2}{x^2+(y+t)^4} - \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{x(y+t)^2(x^4+y^4) - xy^2[x^2+(y+t)^4]}{(x^2+y^4)[x^2+(y+t)^4]}}{t}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2x^5 + 2tx^5y + x^5y^2 + t^2xy^4 + 2txy^5 + xy^6 - t^4xy^2 - x^3y^2 - 4t^3xy^3 - 6t^2xy^4 - 4txy^5 \ldots}{(x^2+y^4)[x^2+(y+t)^4]}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tx(t+2y)(x-ty-y^2)(x+ty+y^2))}{(x^2+y^4)(t^4+x^2+4t^3y+6t^2y^2+4ty^3+y^4)}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{x(t+2y)(x-ty-y^2)(x+ty+y^2)}{(x^2+y^4)(t^4+x^2+4t^3y+6t^2y^2+4ty^3+y^4)}$$

$$= \frac{2xy(x-y^2)(x+y^2)}{(x^2+y^4)(x^2+y^4)}$$

$$= \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$$

Als Komposition stetiger Funktionen sind damit beide Richtungsableitungen bzw. hier die partiellen Ableitungen stetig. Daraus folgt gemäß Satz 3.5 und 3.7, dass für alle Richtungsableitungen gilt $D_v f(x,y) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y) * v$.

Es bleibt nun noch die Differenzierbarkeit in $(0,0)$ zu zeigen: Sei dafür die Richtung durch $v = (a,b)$ gegeben.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(at)(bt)^2}{(at)^2 + (bt)^4}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{ab^2t^3}{a^2t^2 + b^4t^4}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{ab^2t^2}{a^2t^2 + b^4t^4}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{ab^2}{a^2 + b^4t^2}$$
$$= \frac{ab^2}{a^2}$$
$$= \frac{b^2}{a}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist: Im Plot der Kurve ist eine Parabelform zu erkennen. Entsprechende Parametrisierung ergibt:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Setze $x = (x_n)^2, y = x_n$

$$f(x,y) = f(x_n^2, x_n)$$
$$= \frac{x_n^2 * x_n^2}{(x_n^2)^2 + x_n^4}$$

Betrachte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^4}{2x_n^4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Offensichtlich gilt $\frac{1}{2} \neq 0$. Damit ist f in (0,0) nicht stetig, da $f(0,0) = 0$