5. Übungsblatt zu Analysis 2 (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

5.1 Aufgabe 1

a)

Gegeben:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ stet. diff.bar} \tag{1}$$
$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = x_0 + tv \tag{2}$$
$$g(t) = f(\gamma(t)) \tag{3}$$

Behauptung:

$$g \text{ hat ein Extremum in } 0 \implies \boldsymbol{\nabla} f(x_0) \perp v \tag{4}$$

Die Behauptung ist **wahr**. Hat g ein Extremem in 0, so gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} g(0) = 0 \tag{5}$$

Nach der Definition von g gilt:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(\gamma(0)) && (6)\\ &= f(x_0 + 0 \cdot v) && (7)\\ &= f(x_0) && (8) \end{aligned}$$

und somit:

$$\boldsymbol{\nabla} g(0) = \boldsymbol{\nabla} f(x_0) = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Definieren wir Orthogonalität über das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$, so gilt, dass zwei Vektoren orthogonal zueinander stehen, wenn das SKP dieser 0 ergibt. In unserem Fall gilt:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \boldsymbol{\nabla} f(x_0) \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \tag{10}$$

Somit ist $\boldsymbol{\nabla} f(x_0)$ unter den gegeben Kriterien senkrecht zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Die Behauptung ist **falsch**.

i. "rot grad"

$$\forall f \in C^2(U,\mathbb{R}) : \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Satz von Schwarz. (Anwendbar, da $f \in C^2$)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

ii. "div rot"

$$\forall v \in C^2(U,\mathbb{R}^3) : \tag{14}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{15}$$

$$= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_1} \tag{16}$$

Satz von Schwarz. (Anwendbar, da $v \in C^2$)

$$= 0 \tag{17}$$

Wären f und v "nur" in C^1, so wäre der Satz von Schwarz nicht anwendbar und somit könnte keine allgemeine Aussage getroffen werden.

5.2 Aufgabe 2

Gegeben: Metrischer Raum (X, d) und die Abbildung

$$f : X \to M(n \times m, \mathbb{R})$$
$$x \mapsto (a_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Nur nutzen die Definition der Operatornorm aus der Bemerkung zu Definition 3.8:

$$\|L\| = \{|Lv| \mid |v| \leq 1\}$$

„ $\implies$ “ Gegeben: f ist stetig bzgl. der Operatornorm, also gilt

$$\forall y \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : d_X(x, y) < \delta \implies d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (18)$$

Nun setzen wir die durch Normen induzierten Metriken ein:

$$\implies \forall y \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X :$$
$$\|x - y\| < \delta \implies \sup\Big\{\underline{|(f(x) - f(y)) \cdot v|} \mid |v| \leq 1\Big\} < \varepsilon \quad (19)$$

Den unterstrichenen Teil können wir wie folgt umformen:

$$|(f(x) - f(y)) \cdot v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (f(x) - f(y))_{ij} \cdot v_j \right)^2} \quad (20)$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij}(x) - a_{ij}(y)) \cdot v_j \right)^2} \quad (21)$$

Ab diesem Punkt waren wir uns unsicher, wie weiter zu verfahren ist; daher folgt nun die...
<u>Beweisidee:</u>
$|v| \leq 1 \implies$ alle Komponenten $v_j \leq 1$.
Der Term unter der Wurzel lässt sich für eine feste Wahl von i und j und somit der Betrachtung einzelner Matrixkomponenten nach unten abschätzen. So dass wir schließlich erhalten würde:

$$\forall i_0 \in \{1 \dots n\} \ \forall j_0 \in \{1 \dots m\} \ \forall y \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ :$$
$$\|x - y\| \leq \delta \implies |a_{i_0 j_0}(x) - a_{i_0 j_0}(y)| \leq \varepsilon.$$

" $\Longleftarrow$ " Gegeben: $f : x \mapsto a_{ij}(x)$ mit a_{ij} stetig bezüglich Standardmetrik auf $\mathbb{R}$.
Zu zeigen: f ist stetig bezüglich Operatornorm.

Sei$\varepsilon > 0$ und $y \in X$ gegeben. Es gilt $\mathrm{d}(x, y) < \delta \implies \mathrm{d}(a_{ij}(x), a_{ij}(y)) < \varepsilon$.

Nun kann man $f(x) - f(y)$ betrachten. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (a_{ij}(x) - a_{ij}(y))_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m} \\ &= (\varepsilon))_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m} \\ &= \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: P \end{aligned}$$

Betrachte nun die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|L\| &:= \sup\{|Lv| \mid |v| \leq 1\} \\ \|P\| &= \sup\{|Pv| \mid |v| \leq 1\} \\ &= \sup\{\left|\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} v\right| \mid |v| \leq 1\} \\ &(...) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3

a) Darstellung von Δf als Summe.

$$\Delta f = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla}(f)) \tag{22}$$
$$= \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Auch wenn es eher eine Merkhilfe als eine Definition ist, kann man div wie den Gradienten als Vektor auffassen, in dem die Operatoren für partiellen Ableitungen stehen. Somit ist $\operatorname{div}\boldsymbol{\nabla} f$ ein Skalarprodukt.

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{24}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \tag{25}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{26}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{27}$$

b) Zu zeigen: $\Delta(f \cdot g) = g\Delta f + 2\langle \boldsymbol{\nabla} f, \boldsymbol{\nabla} g\rangle + f\Delta g$
Fasse Δ als $\boldsymbol{\nabla\nabla}$ auf. Nun gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(fg)_i = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} fg)_i \qquad |i \in \{1, \ldots, n\} \tag{28}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) \qquad |\text{Produktregel in } x_i \tag{29}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} g + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + f\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad |\text{nochmal Produktregel} \tag{30}$$
$$= g\sum_{i=1}^{n} \Delta_i f + 2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + f\Delta_i g \tag{31}$$
$$= g\sum_{i=1}^{n} \Delta_i f + 2(\boldsymbol{\nabla} f_i \cdot \boldsymbol{\nabla} g_i) + f\Delta_i g \tag{32}$$
$$\Longrightarrow \quad = g\Delta f + 2\langle \boldsymbol{\nabla} f, \boldsymbol{\nabla} g\rangle + f\Delta g \tag{33}$$

c) Seien $g,\ f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ f(x,y) = x$ und $g(x,y) = \exp\{xy^2\}$

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g \tag{34}$$
$$= \exp\{xy^2\}\Delta x + 2\langle \nabla x, \nabla \exp\{xy^2\}\rangle + x\Delta \exp\{xy^2\} \tag{35}$$
$$\tag{36}$$
$$\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0 \tag{37}$$
$$\tag{38}$$
$$\Delta \exp\{xy^2\} = \frac{\partial^2 \exp\{xy^2\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \exp\{xy^2\}}{\partial y^2} \tag{39}$$
$$= y^4 \exp\{xy^2\} + 2x \exp\{xy^2\} + 4x^2y^2 \exp\{xy^2\} \tag{40}$$
$$= y^4 + 2x \exp\{xy^2\}(1 + 2yx) \tag{41}$$
$$2\langle \nabla f, \nabla g\rangle = 2\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \exp\{xy^2\}}{\partial x} \\ \frac{\partial \exp\{xy^2\}}{\partial y} \end{pmatrix}\rangle \tag{42}$$
$$= 2\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \exp\{xy^2\} \\ z \end{pmatrix}\rangle \quad |z \text{ verschwindet im Skalarprodukt.} \tag{43}$$
$$= 2y^2 \exp\{xy^2\} \tag{44}$$
$$\to g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g = 2y^2 \exp\{xy^2\} + x(y^4 \exp\{xy^2\} + 2\exp\{xy^2\}(1 + 2xy)) \tag{45}$$
$$= \exp\{xy^2\}(2y^2 + x(y^4 + 2(1 + 2xy))) \tag{46}$$

5.4 Aufgabe 4

Ziel ist es, das Integral

$$\int_0^\pi \ln\left(5 - 4\cos x\right)\,\mathrm{d}x \tag{47}$$

zu berechnen.

Für $|t| \neq 1$ ist:

$$\varphi(t) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2t\cos x + t^2\right)\,\mathrm{d}x \tag{48}$$

und setzen:

$$f(x,t) := \ln\left(1 - 2t\cos x + t^2\right) \tag{49}$$

a) Wir berechnen für $x \in (-\pi, \pi)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(z(x)\right) \qquad \left|\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2} = z(x)\right. \tag{50}$$

$$= \frac{1}{1+z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \qquad |\text{Ableitung arctan ANA I} \tag{51}$$

$$|\text{Kettenregel}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \tag{52}$$

$$= \frac{1+t}{2(1-t)}\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2\tan^2\frac{x}{2}} \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1+t)\sec^2\frac{x}{2}}{(1-t)+\frac{(1+t)^2}{1-t}\tan^2\frac{x}{2}} \tag{54}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+t}{(1-t)\cos^2\frac{x}{2}+\frac{(1+t)^2}{1-t}\sin^2\frac{x}{2}} \tag{55}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1-t}{1+t}\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1+t}{1-t}\sin^2\frac{x}{2}} \tag{56}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)^2\cos^2\frac{x}{2}+(1+t)^2\sin^2\frac{x}{2}} \qquad |\sin^2 y = 1-\cos^2 y \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{(1-t)^2 \cos^2 \frac{x}{2} + (1+t)^2 (1-\cos^2 \frac{x}{2})} \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{(1+t)^2 - 4t \cos^2 \frac{x}{2}} \qquad \Big| \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{59}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+2t+t^2-2t(1+\cos x)} \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1+t^2-2t\cos x} \tag{61}$$

b) Wir berücksichtigen, dass die Funktion $\tan \frac{x}{2}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ stetig ist, und dass sie an der Stelle $x_0 = \pi$ gegen $\pm\infty$ divergiert. Die Funktion $\arctan z$ ist im Intervall $(-\infty, \infty)$ stetig.

Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \to \pi$. Nach Satz 4.4 Aus Analysis I wissen wir, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist, genau dann, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$, mit $x_n \to x$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \tag{62}$$

Zu zeigen ist, dass dies für die folgende Funktion an der Stelle $x_0 = \pi$ der Fall ist.

$$\arctan\left(\frac{1+t}{1-t} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{63}$$

Sei:

$$\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1+t}{1-t} \tan \frac{a_n}{2}\right) \qquad |\text{Satz 4.4 Ana I} \tag{64}$$

$$= \arctan\left(\frac{1+t}{1-t} \tan\left(\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{2}\right)\right) \tag{65}$$

$$= \frac{\pi}{2} \tag{66}$$

Den Faktor $\frac{1+t}{1-t}$ können wir vernachlässigen, da für sehr große werte von n dies sehr klein gegen $\tan \frac{a_n}{2}$ ist. Der sorgt nur für eine Änderung des Vorzeichens falls $|t| > 1$. Da $\tan \frac{a_n}{2}$ gegen unendlich divergiert, so konvergiert $\arctan \tan \frac{a_n}{2}$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Das heißt, die Funktion ist an der Stelle an der Stelle x_0 stetig. Deswegen dürfen wir die Funktion auch auf das Intervall $[0, \pi]$ stetig fortsetzen.

Außerdem ist **zu zeigen**, dass

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \arctan\left(\frac{1+t}{1-t} \tan\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } |t| < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \tag{67}$$

Wie wir oben gezeigt haben, konvergiert die Funktion $\lim_{\varepsilon\to 0} \arctan \tan \frac{\pi-\varepsilon}{2}$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Dementsprechend konvergiert $\lim_{\varepsilon\to 0} \arctan\left(-\tan\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$ gegen $\frac{\pi}{2}$. Falls $|t| < 1$, dann ist $\frac{1+t}{1-t}$ positiv, sonst negativ und es gilt die Aussage in 67

c) **Zu zeigen** ist, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| < 1 \\ \frac{2\pi}{t} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} \ln\left(1 - 2t\cos x + t^2\right)\,\mathrm{d}x && |\text{Kettenregel} && (69)\\
&= \int_0^\pi \frac{2t - 2\cos x}{1 - 2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}x && |2t - 2\cos x = \frac{1}{t}\left(2t^2 - 2t\cos x\right) && (70)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^\pi \frac{2t^2 - 2t\cos x}{1 - 2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}x && \mp 0 && (71)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^\pi \frac{1 - 2t\cos x + t^2 - 1 + t^2}{1 - 2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}x && && (72)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^\pi \frac{1 - 2t\cos x + t^2}{1 - 2t\cos x + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}x && |\text{Nutze a)} && (73)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^\pi \mathrm{d}x - \frac{2}{t}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x && && (74)\\
&= \frac{1}{t}[x]_0^\pi - \frac{2}{t}\left[\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi && && (75)\\
&= \frac{\pi}{t} - \frac{2}{t}\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}\tan\frac{\pi}{2}\right) && |\text{Nutze 67} && (76)\\
&= \frac{\pi}{t} - \begin{cases} \frac{\pi}{t} & \text{für } |t| < 1 \\ -\frac{\pi}{t} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} && && (77)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } |t| < 1 \\ \frac{2\pi}{t} & \text{für } |t| > 1 \end{cases} && && (78)
\end{aligned}$$

d) Es sei

$$\varphi(t) = \begin{cases} C_1 & \text{für } |t| < 1 \\ 2\pi\log|t| + C_2 & \text{für } |t| > 1 \end{cases} \tag{79}$$

Gesucht sind die Integrationskonstanten C_1 und C_2. Für $|t| < 1$ sei:

$$\varphi(0) = \int_0^\pi \ln 1\,\mathrm{d}x \qquad \ln 1 = 0 \tag{80}$$

$$= 0 \tag{81}$$
$$\implies C_1 = 0 \tag{82}$$

Für $|t| > 0$ sei:

$$t = \frac{1}{|s|} \tag{83}$$

wobei

$$\begin{aligned}
f\left(x, \frac{1}{s}\right) &= 2\ln\frac{1}{s} + f(x,s) && (84)\\
&= 2\ln\frac{1}{s} + \ln\left(1 - 2s\cos x + s^2\right) && (85)\\
&= \ln\frac{1}{s^2} + \ln\left(1 - 2s\cos x + s^2\right) && (86)\\
&= \ln\left(\frac{1}{s^2}\cdot\left(1 - 2s\cos x + s^2\right)\right) && (87)\\
&= \ln\left(1 - \frac{2}{s}\cos x + \frac{1}{s^2}\right) && (88)\\
&= f\left(x, \frac{1}{s}\right) && (89)
\end{aligned}$$

Für $\varphi(2)$ benutzen wir dies:

$$\begin{aligned}
\varphi(2) = \varphi\left(\frac{1}{0.5}\right) &= \int_0^\pi f\left(x, \frac{1}{0.5}\right)\,\mathrm{d}x && (90)\\
&= \int_0^\pi 2\ln\frac{1}{0.5} + \ln\left(1 - \cos x + \frac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}x && (91)\\
&= \int_0^\pi \ln 4\,\mathrm{d}x + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) && |\varphi(t) = 0 \text{ für } |t| < 1 \text{ aus 79 und 82} \quad (92)\\
&= [x\ln 4]_0^\pi && (93)\\
&= \pi\ln 4 && (94)\\
&= 2\pi\ln 2 && (95)\\
\implies C_2 &= 0 && (96)
\end{aligned}$$