4. Übungsblatt zu Linearer Algebra 1 (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

4.1 Aufgabe 1: Komplexe Zahlen - Peer Feedback

Siehe Rückseite

4.2 Aufgabe 2: Polynome bilden Vektorraum

Geg.:

- Sei K ein Körper
- $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in K$ sei ein Polynom mit Koeffizienten in K
- K[X] sei die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in K

a) z.z.: K[X] mit der Addition und der Skalarmultiplikation sei ein Vektorraum über K:

(K[X], +) muss eine abelsche Gruppe sein und folgende 3 Axiome muss ein Vektorraum erfüllen:

- V1 Kommutativität: $\forall k, l \in K,\ v \in K[X]:$

  $k(lv) = (kl)v$
- V2 Neutrales Element 1: $1v = v\ \ \forall v \in K[X]$
- V3 Distributivität: $\forall k, l \in K,\ v, w \in K[X]:$

  $(k+l)v = kv + kv$

  $k(v+w) = kv + kw$

Lsg.:

(a) (K[X], $+_K$) ist abelsch

Sei $a = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $b = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i X^i$

$$
\begin{aligned}
a +_K b &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i +_K \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \\
&= \sum_{i=0}^{max\{n,m\}} (a_i + b_i) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{max\{n,m\}} (b_i + a_i) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i X^i +_K \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \\
&= b +_K a
\end{aligned}
$$

(b) V1

Sei $a = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $k, l \in K$

$$
\begin{aligned}
k \cdot_K (l \cdot_K a) &= k \cdot_K (l \cdot_K \sum_{i=0}^{n} a_i X^i) \\
&= k \cdot_K (\sum_{i=0}^{n} (l \cdot a_i) X^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (k \cdot (l \cdot a_i)) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} ((k \cdot l) \cdot a_i) X^i \\
&= (k \cdot l) \cdot_K \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\
&= (k \cdot l) \cdot_K a
\end{aligned}
$$

(c) V2

Sei $a = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $1 \in K$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot_K a &= 1 \cdot_K \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (1 \cdot a_i) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\
&= a
\end{aligned}
$$

(d) V3

Sei $a = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $k, l \in K$

$$\begin{aligned}(k+l) \cdot_K a &= (k+l) \cdot_K \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} ((k+l) \cdot a_i) X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} ((k \cdot a_i) + (l \cdot a_i)) X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} ((k \cdot a_i) X^i +_K \sum_{i=0}^{n} ((l \cdot a_i) X^i \\ &= (k \cdot_K \sum_{i=0}^{n} a_i X^i) +_K (l \cdot_K \sum_{i=0}^{n} \cdot a_i X^i) \\ &= (k \cdot_K a) +_K (l \cdot_K a)\end{aligned}$$

b) Ein mögliches Erzeugendensystem von K[X] ist $E = \{X^0, X^1, ..., X^n | n \to \infty\}$

4.3 Aufgabe 3: Vektorraumstruktur vererben

Geg.:

- $K := \mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$
- p ist eine Primzahl
- V sei ein K-Vektorraum
- U sei eine Untergruppe von (v, +)

Z.z.: U sei ein K-Vektorraum bezüglich der auf U eingeschränkten Addition und skalaren Multiplikation von V. Folgende drei Axiome müssen dafür erfüllt werden:

- 1 $U \neq \varnothing$
- 2 U soll bezüglich der Addition abgeschlossen sein
- 3 U soll bezüglich der skalaren Multiplikation abgeschlossen sein

Lsg.:

a) Eine Untergruppe $U \subset (V, +)$ ist per Definition eine nichtleere Teilmenge, also gilt $U \neq \varnothing$

b) Eine Untergruppe $U \subset (V, +)$ abgeschlossen bezüglich der Addition.

c) $k \in K, u \in U \implies ku \in U$

4.4 Aufgabe 4: Beispiele von Untervektorräumen

a) $zz : A \neq \emptyset$
Beweis durch Beispiel: $0 \in A$

$zz: a,b \in A \Rightarrow a+b \in A$
Direkter Beweis:

$$\forall x,y \in Z : x+y \in Z \Rightarrow \forall a,b \in A : a+b \in A$$

$zz: z \in Z, a \in A \Rightarrow z \cdot a \in A$

$$\forall a_i, z \in Z : z \cdot a_i \in Z \Rightarrow \forall z \in Z, a \in A : z \cdot a \in A$$

b) $zz: B \neq \emptyset$
Beweis durch Beispiel: $0 \in B$
$zz: a,b \in B \Rightarrow a+b \in B$
Beweis:

$$\begin{aligned} &\text{Seien } a,b,c,d \in R, a+c=e, b+d=f \\ &\text{Seien } (a,b,a,b,\ldots),(c,d,c,d,\ldots) \in B \\ \Rightarrow &(a,b,a,b,\ldots)+(c,d,c,d,\ldots) = (e,f,e,f,\ldots) \\ \Rightarrow &(a,b,a,b,\ldots)+(c,d,c,d,\ldots) \in B \end{aligned}$$

$zz: b \in B, x \in R \Rightarrow a \cdot x \in B$
Beweis:

$$\begin{aligned} &\text{Seien } a,b,x \in R, a \cdot x = c, b \cdot x = d \\ &\text{Sei } (a,b,a,b,\ldots) \in B \\ &\Rightarrow (a,b,a,b,\ldots) \cdot x = (c,d,c,d,\ldots) \\ &\Rightarrow (a,b,a,b,\ldots) \cdot x \in B \end{aligned}$$

c) $zz: C \neq \emptyset$
Beweis durch Beispiel: $0 \in C$
$zz: a,b \in C \Rightarrow a+b \in C$
Direkter Beweis:

$$\begin{aligned} &\text{Seien } a,b \in C \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} a_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0+0=0 \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = 0 \\ \Rightarrow &a+b \in C \end{aligned}$$

$zz: x \in R, c \in C \Rightarrow x \cdot c \in C$
Direkter Beweis:

$$\begin{aligned} &\text{Seien } x \in R, c \in C \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} c_i = 0 = x \cdot 0 = x \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \\ \Rightarrow &x \cdot c \in C \end{aligned}$$

d) zz : D ist kein Unterraum von R^n
Beweis:

$$\text{Seien } d \in D, x \in R \setminus 1$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = 1 \neq x \cdot 1 = x \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i$$
$$\Rightarrow x \cdot d \notin D$$