

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor/in: Tobias Hammel

1. Dispersionsrelation im periodischen Potential

Gegeben sei das Potential eines optischen Gitters

$$V(x) = V_0 \frac{(1 + \cos(Gx))}{2}, \quad (1)$$

mit $V_0 \gg 1$ und $G = 2\pi/d$ (mit Spaltabstand d) als Betrag des Gittervektors des Potentials. Die zugehörige Dispersionsrelation hat die Form

$$\omega(q) = A(1 - B \cos(qd)), \quad (2)$$

mit Quasi-Implus $\tilde{p} = \hbar q$ und $0 \leq B \leq 1$.

- a) Zunächst sind die ersten drei Terme der Taylorentwicklung von ω um einen Punkt q_0 zu bestimmen. Hierbei ist der erste Term ω selbst am Punkt q_0 :

$$\omega(q_0) = \omega_0 = A(1 - B \cos(q_0 d)) \quad \checkmark \quad (3)$$

Im nächsten Term benötigen wir, wie bereits auf Übungsblatt 4 eingeführt, die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} . Diese ist definiert als

$$v_{gr}(q) = \frac{d\omega}{dq} = \frac{d}{dq}(A - AB \cos(qd)) = ABd \sin(qd). \quad \checkmark \quad (4)$$

In der Taylorreihe werden wir diese am Punkt q_0 betrachten. Im letzten Term kommt die zweite Ableitung von ω nach q vor, wir leiten also die Gruppengeschwindigkeit nochmals ab:

$$\frac{d^2\omega}{dq^2} = \frac{d}{dq}(ABd \sin(qd)) = ABd^2 \cos(qd). \quad \checkmark \quad (5)$$

Von der Aufgabenstellung ist die Taylorentwicklung nun in der Form

$$\omega(q) \approx \omega_0 + v_{gr}(q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m^*} (q - q_0)^2 \quad (6)$$

vorgegeben. ω_0 und v_{gr} können wir hier wie oben berechnet einsetzen.
Im letzten Term gilt:

$$\frac{\hbar}{m^*} \stackrel{!}{=} \frac{d^2\omega}{dq^2} = ABd^2 \cos(qd) \quad (7)$$

$$\iff m^* = \frac{\hbar}{ABd^2 \cos(qd)} \quad \checkmark \quad (8)$$

Somit ist die Taylorentwicklung:

$$\omega(q) \approx A(1 - B \cos(q_0 d)) + ABd \sin(q_0 d)(q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m^*(q_0)} (q - q_0)^2 \quad (9)$$

- b) Ebenfalls aus dem 4. Übungsblatt entnehmen wir die Dispersionrelation für eine freie Materiewelle

$$\omega(k) = \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{\hbar}{2m} k^2 \quad \checkmark \quad (10)$$

Auch bei der Dispersionsrelation in Potential schauen wir uns den Fall für $q_0 = 0$ an:

$$\omega(q) \approx A(1 - B) + \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m_0^*} q^2 \quad (11)$$

$$= A(1 - B) + \frac{\hbar}{2m_0^*} q^2 \quad (12)$$

mit

$$m_0^* = \frac{\hbar}{ABd^2}. \quad (13)$$

So ist zu erkennen, dass beide Wellen um den Punkt $q_0 = 0$ ein sehr ähnliches Verhalten aufweisen, lediglich die Definitionen der Masse m bzw. m^* unterscheiden sich.

✓
(14)

c) Im Folgenden sind $\omega(q_0)$, v_{gr} und m^* skizziert.

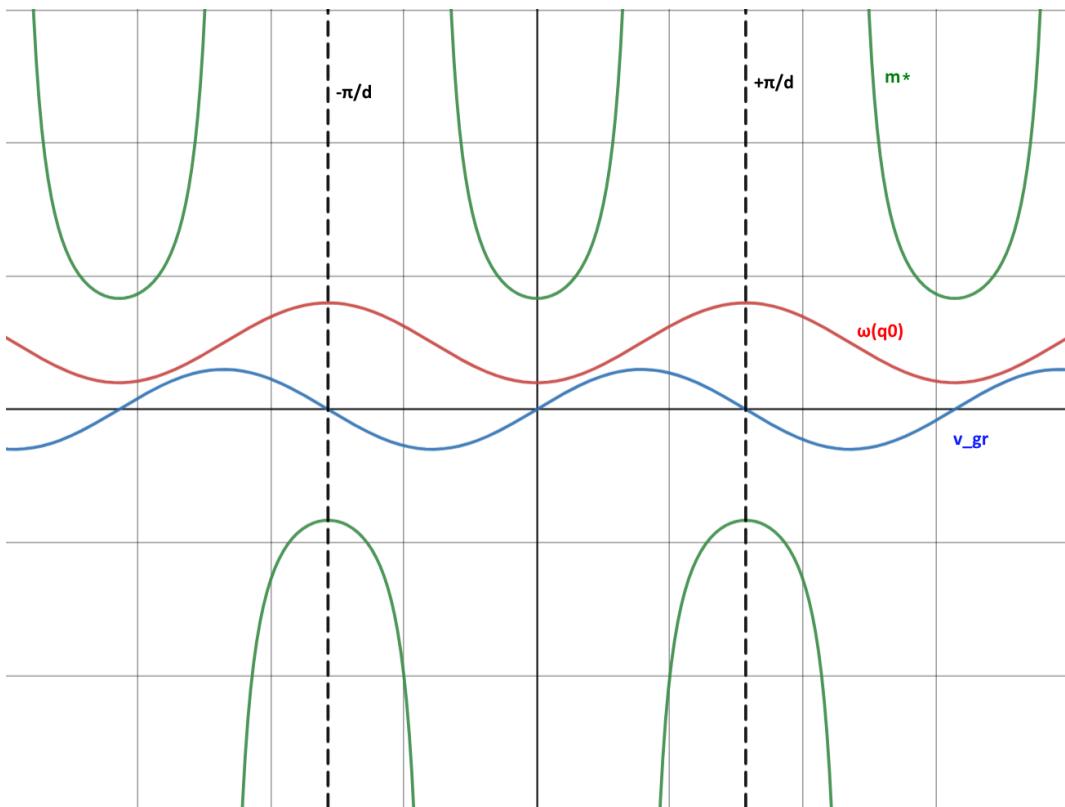


Abbildung 1: Skizzen der zuvor hergeleiteten Größen



- d) Zunächst wollen wir die Dispersionsrelationen für die verschiedenen Werte von q_0 skizzieren:

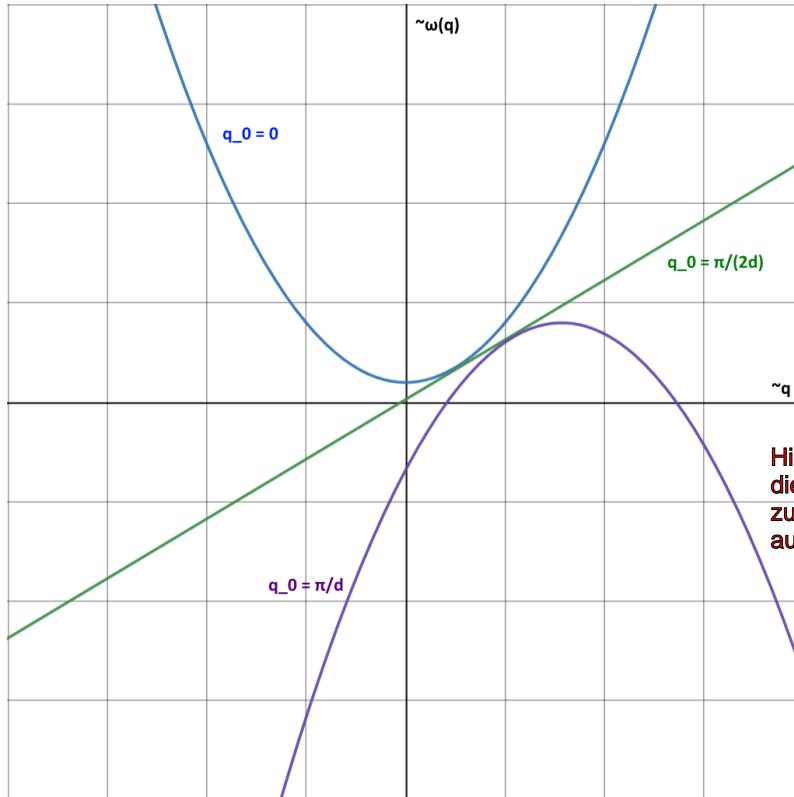


Abbildung 2: Dispersionsrelationen für unterschiedliche q_0

An der Stelle $q_0 = 0$ erhalten wir

$$\omega(0) = A(1 - B) + \frac{ABd^2}{2}q^2 \quad \checkmark \quad (15)$$

Hier verschwindet die Gruppengeschwindigkeit, weshalb die umhüllende Welle zeitlich am gleichen Ort bleibt und sich das Wellenpaket räumlich nicht verbreitet. Allerdings ist die ✓

Sie verbreitet sich nicht, aber verbreitert sich :) Die Dispersion is =/0

Für den Fall $q_0 = \frac{\pi}{d}$ erhalten wir ein ähnliches Verhältnis, jedoch ist hier die Parabel nach unten geöffnet und um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.

Bei $q_0 = \frac{\pi}{2d}$ verschwindet die zweite Ableitung der Entwicklung und bei $\sin \frac{\pi}{2}$ ist die Gruppengeschwindigkeit maximal. Hier entwickelt ω linear.

2. Elektroneninterferenz - Doppelspaltversuch mit Elektronen

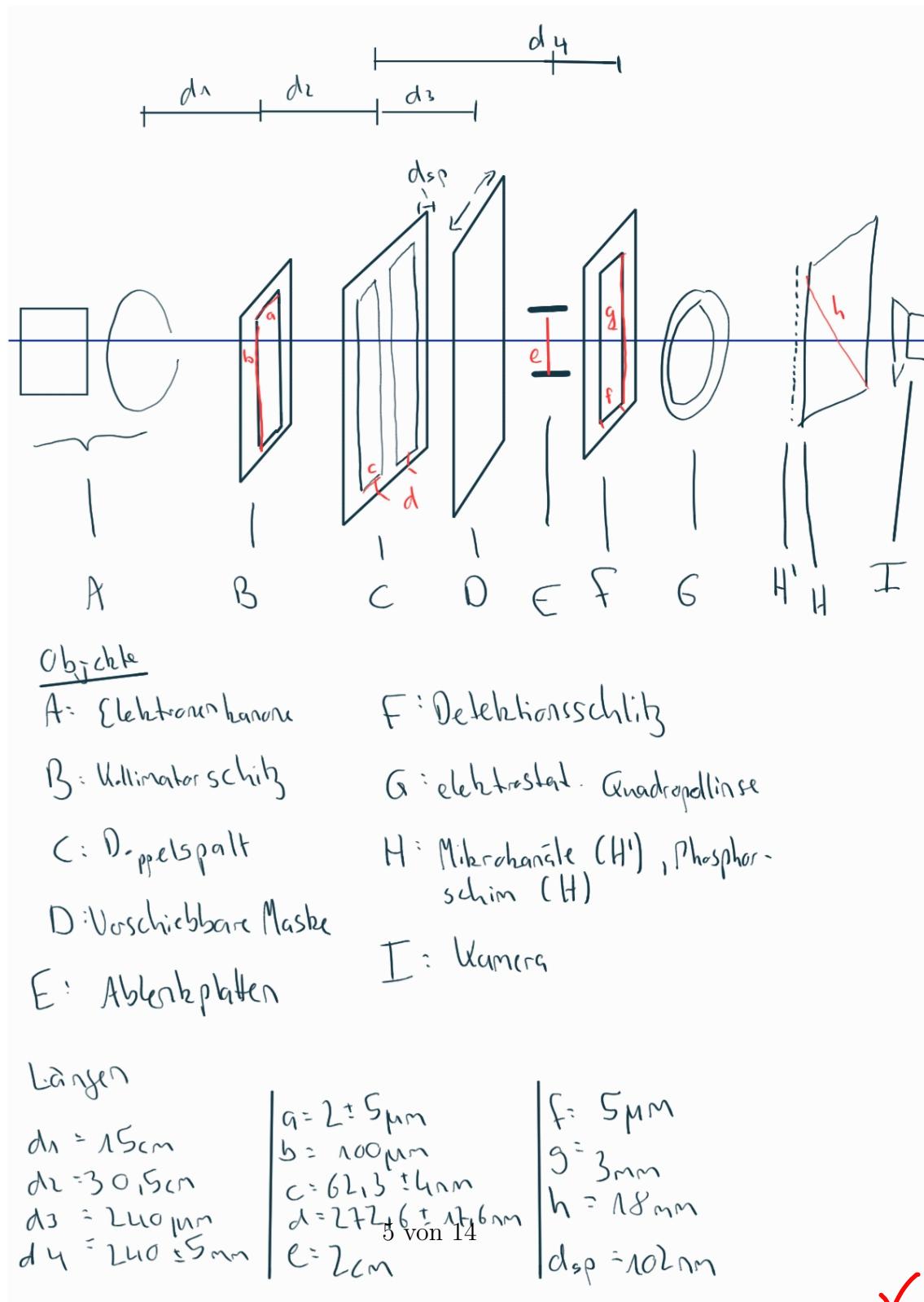


Abbildung 3: Aufbau des Experiments

a)

b) Die Maße des Doppelspalts sind:

$$\text{Breite } b = 62,3 \pm 4 \text{ nm} \quad (16)$$

$$\text{Spaltabstand } d_{sp} = 272,6 \pm 17,6 \text{ nm} \quad (17)$$

$$\text{Höhe } h = 4\mu\text{m} \quad (18)$$

$$(19)$$

Die Platten werden mithilfe eines fokussierten Ionenstrahls bearbeitet. Dieser fräst Material aus den 100 nm dicken Siliziumnitridmembranen heraus. Anschließend werden diese nochmals mit einer 2 nm breiten Goldschicht überzogen (bzw. wahrscheinlich eher bedampft). ✓

c) de-Broglie-Wellenlänge

Wir nutzen den Energieansatz mit der Energie von 600eV:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (20)$$

$$\iff v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} \quad (21)$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \quad (22)$$

$$= \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}} \quad (23)$$

$$= 5,0 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \checkmark \quad (24)$$

Also 50 Picometer, was logischerweise auch den Ergebnissen der Forscher aus der Publikation entspricht.

d) Breite der Einzelpaltbeugung

Am Einzelpalt mit Breite b gilt folgende Bedingung für Intensitätsminima der Ordnung k:

$$b \sin \alpha_k = k\lambda \quad (25)$$

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\lambda_{dB}}{b} \quad b = 2\mu\text{m}, \quad k = 1 \quad (26)$$

$$\approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad (27)$$

Der Abstand der Maske vom Kollimatorspalt ist:

$$d = 45,50024 \text{ cm} \quad (28)$$

$$\approx 30,5 \text{ cm} \quad (29)$$

Hieraus folgt mit elementarer Trigonometrie für die Breite bei der ersten Ordnung der Minima

$$b_1 = 0,0015 \text{ cm} \quad (30)$$

$$= 15\mu\text{m} \quad \checkmark \quad (31)$$

- e) Ein Elektron aus dem Strahl trifft auf die Mikrokanalplatte. Dort stößt es mit den Kanalwänden in der Platte und löst weitere Elektronen aus. Diese wiederrum können ebenfalls mit den Wänden zusammenstoßen, weshalb es zu einer Art Elektronenkaskade kommt. Diese Elektronen bringen dann den dahinter positionierten Phosphorschirm zum Leuchten, was mit der Kamera aufgezeichnet wird.
Da die Form der Detektionen keine (sehr) genauen Rückschlüsse auf den ursprünglichen Auftreffpunkt zulässt, wird dieser mit einem 'Blob' markiert, der die Unsicherheiten berücksichtigt und eine Umgebung angibt, in der das Elektron aufgetroffen ist.

Die Bildsequenz kommt durch das Vorbeifahren der Maske zustande. Zunächst öffnet sich langsam ein Spalt um das charakteristische Interferenzmuster ergibt sich. Schließlich gelangt auch der zweite Spalt in den offenen Bereich der Maske und die Doppelspaltmuster sind zu sehen. Danach verschließt sich der zuerst offene Spalt und es ist wieder ein Einzelpspaltmuster zu erkennen. ✓

3/3

3. Absorptionsgitter für Materiewellen

- a) Die folgende Abbildung zeigt eine Skizze der Gitterstruktur, sowie das grobe Verhalten der Amplitude der Materiewelle bei $z = 0$.

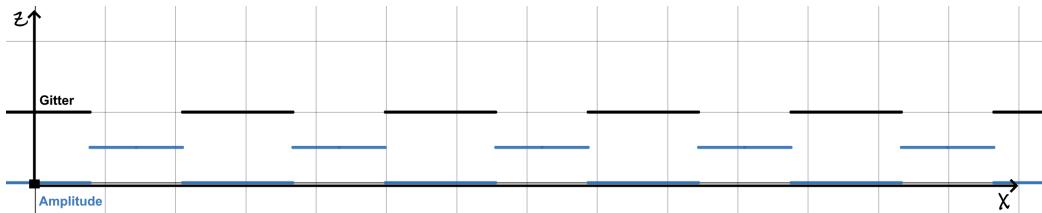


Abbildung 4: Gitter & Amplitude



- b) Wir setzen nun

$$\psi(x, z = 0^+) = T(x) \quad (32)$$

Das hier gilt nur für eine ebene einfallende Welle mit flacher Phasenfront und selbst dann ist die Normierung hier ein Problem! Es ist eher die einfallende Welle mal der Aperturfunktion.

und wollen diese Funktion in einer komplexen Fourierreihe entwickeln:

$$\psi(x, z = 0^+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inGx} \quad (33)$$



mit $G = \frac{2\pi}{d}$. Die Koeffizienten g_n lassen sich hier durch

$$g_n = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} T(x) e^{-inGx} dx \quad (34)$$

bestimmen. Durch die Definition von $T(x)$ beschränkt sich die Integration auf den in der Skizze gezeigten Bereich.

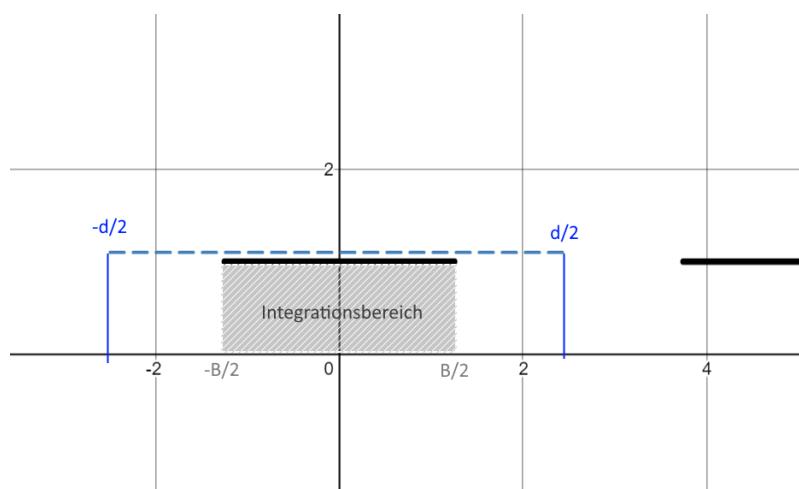


Abbildung 5: Integrationsbereich

Somit können wir $T(x)$ aus dem Integranden entfernen und lediglich die Integrationsgrenzen entsprechend anpassen.

$$g_n = \frac{1}{d} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{-inGx} dx \quad (35)$$

$$= \frac{1}{d} \left[\frac{1}{-inG} e^{-inGx} \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} = -\frac{1}{d i n G} \left[e^{-inGx} \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{d i n G} \left(\cos\left(\frac{nGB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) - \cos\left(-\frac{nGB}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{nGB}{2}\right) \right) \quad (37)$$

$$= -\frac{1}{d i n G} \left(\cos\left(\frac{nGB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) - \cos\left(\frac{nGB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) \right) \quad (38)$$

$$= \frac{2}{d n G} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) \quad | \leftarrow \left(G = \frac{2\pi}{d} \right) \quad (39)$$

$$= \frac{2 d}{d n 2 \pi} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) = \frac{1}{n \pi} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) \quad \checkmark \quad (40)$$

Zum Vergleich berechnen wir nun noch die Fouriertransformation des Einzelspaltes:

$$\tilde{T}_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{ik} e^{-ikx} \right]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \quad (41)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\cos\left(\frac{kB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{kB}{2}\right) - \cos\left(-\frac{kB}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{kB}{2}\right) \right) \quad (42)$$

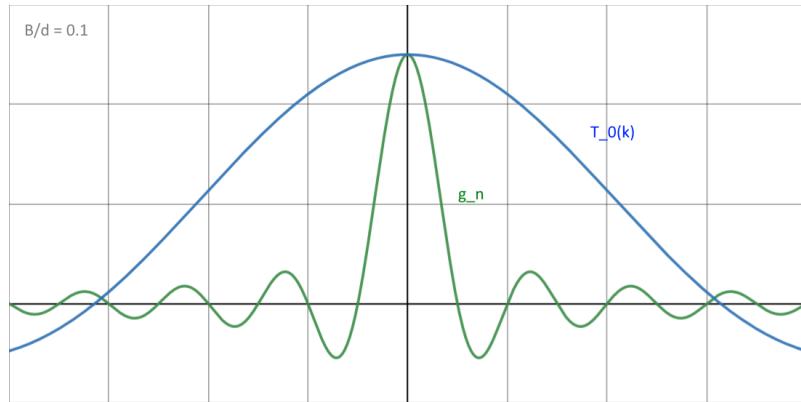
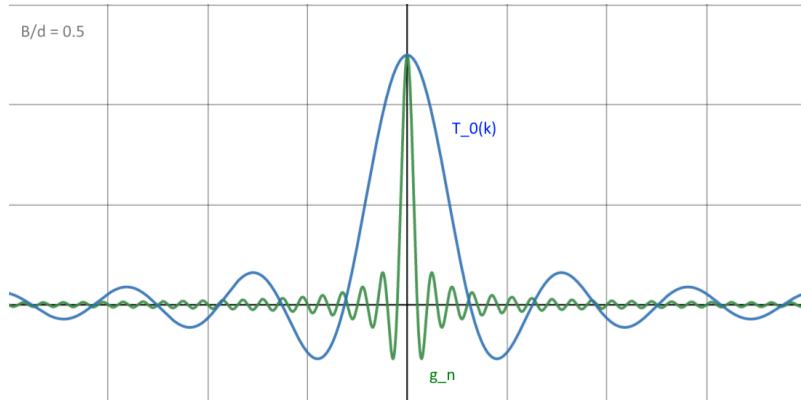
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\cos\left(\frac{kB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{kB}{2}\right) - \cos\left(\frac{kB}{2}\right) - i \sin\left(\frac{kB}{2}\right) \right) \quad (43)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi} k} \sin\left(\frac{kB}{2}\right) \quad \checkmark \quad (44)$$

Verglichen wir die beiden Funktionen g_n und $\tilde{T}_0(k)$, so unterscheiden sich diese nur geringfügig durch Faktoren. So gilt

$$\tilde{T}_0(nG) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} Gn} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) = \frac{d}{\sqrt{2\pi} \pi n} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) \quad (45)$$

$$\Rightarrow g_n = \frac{1}{n \pi} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \tilde{T}_0(nG) \quad \checkmark \quad (46)$$

Abbildung 6: g_n und $\tilde{T}_0(k)$ für $B/d = 0.1$ Abbildung 7: g_n und $\tilde{T}_0(k)$ für $B/d = 0.5$

Laut Aufgabenstellung ist hier verlangt, dass sowohl g_n für das Gitter, als auch $\tilde{T}_0(k)$ für den Einzelspalt skizziert werden. Diese beiden Funktionen unterscheiden sich, wie auch zuvor hergeleitet um einen bestimmten Faktor (u.A. in der Sinusfunktion). In der Lösung sieht es so aus, als würde hier zwei mal dieselbe Funktion skizziert, jedoch einmal als Punktfolge und einmal als kontinuierlicher Graph. Die Frage wäre nun, ob wir die Aufgabenstellung falsch verstanden haben, oder ob die Lösung die Aufgabenstellung falsch verstanden hat.

**Ihr müsst aufpassen, was jeweils auf der x-Achse steht... einmal tagt ihr gegen k auf $T(k)$ und einmal nur einzelne Werte bei $n*k_0$ mit n aus den ganzen Zahlen. Das sind Fourierkomponenten und keine glatte Funktion.
Ich schätze wenn ihr eure grüne Kurve skaliert kommt das Bild aus der Lösung raus...**

c) Der Betrag von \mathbf{k}_n berechnet sich nach

$$|\mathbf{k}^n| = \sqrt{(k_z^n)^2 + (k_x^n)^2}. \quad (47)$$

Wie in der Vorlesung hergeleitet gilt für die x -Komponente:

$$k_x^n = nG \quad \checkmark \quad (48)$$

Somit können wir k_z^n durch gleichsetzen ermitteln:

$$|\mathbf{k}^0| = |\mathbf{k}^n| \quad (49)$$

$$\iff \sqrt{(k_z^0)^2 + (k_x^0)^2} = \sqrt{(k_z^n)^2 + (k_x^n)^2} \quad (50)$$

$$\iff (k_z^0)^2 = (k_z^n)^2 + G^2 n^2 \quad (51)$$

$$\iff (k_z^n)^2 = (k_z^0)^2 - G^2 n^2 \quad (52)$$

$$\iff k_z^n = \sqrt{(k_z^0)^2 - G^2 n^2} \quad \checkmark \quad (53)$$

Mit $k_z^0 = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}$ also

$$k_z^n = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}\right)^2 - G^2 n^2} \quad (54)$$

g_n hatten wir bereits in der vorherigen Aufgabe hergeleitet, \mathbf{k}_n setzen wir aus dieser Aufgabe ein. Somit gilt für die Reihe mit $z > 0$:

$$\psi(x, z > 0) = \sum_{n=-\sum}^{\sum} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{nGB}{2}\right) e^{i\mathbf{k}^n \cdot \mathbf{r}}, \quad (55)$$

mit

$$\mathbf{k}^n = \left(k_x^n, 0, \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}\right)^2 - G^2 n^2} \right)^\top \quad (56)$$

$$\mathbf{r} = (x, 0, z)^\top. \quad (57)$$

Die mit dem vorbereiteten Python-Skript erstellte Skizze des Talbot-Teppich ist auf der nächsten Seite zu finden.



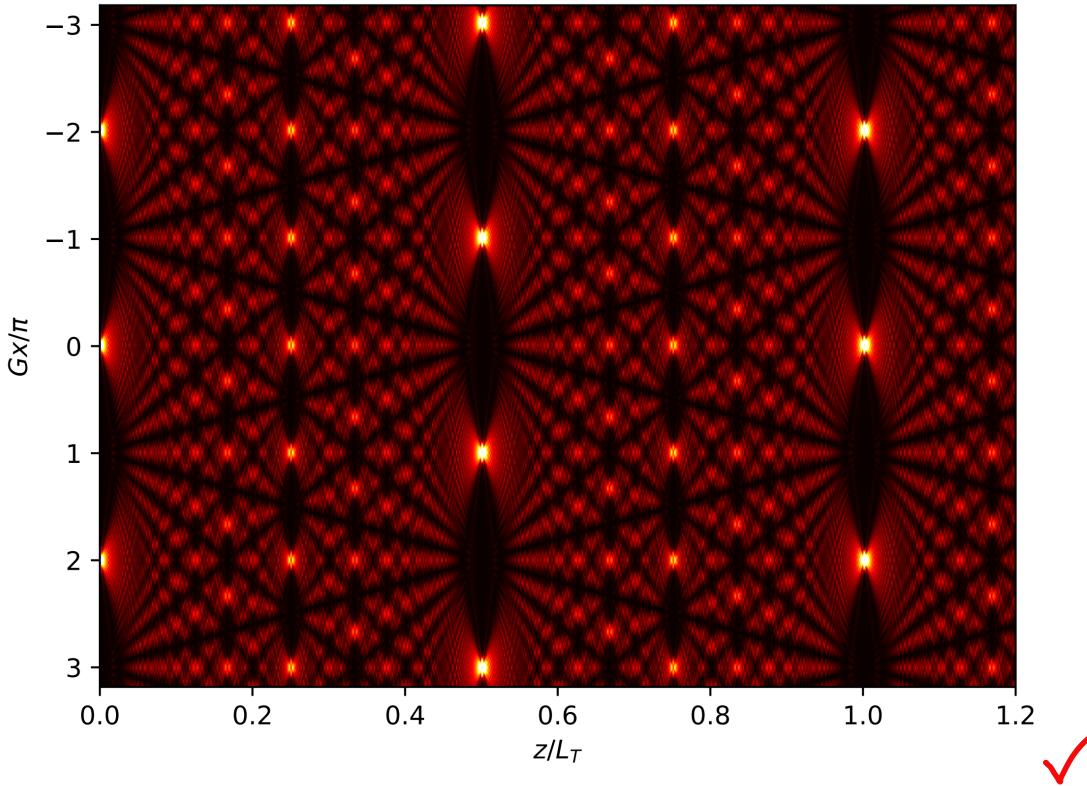


Abbildung 8: Talbot-Teppich

d) Talbot-Länge

Wir möchten erreichen, dass gilt:

$$|\psi(x, z = 0)|^2 \stackrel{!}{=} |\psi(x, z = L_T)|^2 \quad (58)$$

Das ist erfüllt, wenn für jeden einzelnen Summanden folgendes gilt:

$$\frac{\sin(nGB/2)}{\pi n} \exp\{inGX\} \stackrel{!}{=} \frac{\sin(nGB/2)}{\pi n} \exp\left\{i\left(nGX + \sqrt{k_0^2 - (nG)^2}z\right)\right\} \quad (59)$$

Also können wir auch den Vorfaktor ignorieren und betrachten nur die Exponentialfunktion. Hierbei berücksichtigen wird, dass es sich um eine periodische Funktion handelt

$$\exp\{inGX\} \stackrel{!}{=} \exp\left\{i\left(nGX + \sqrt{k_0^2 - (nG)^2}z\right)\right\} \quad (60)$$

Wir suchen also einen Wert z , um hier die Periodizität auszunutzen, damit sich die Wahrscheinlichkeit reproduziert. Es muss also gelten:

$$\sqrt{k_0^2 - (nG)^2} z = 2m\pi \quad \checkmark \quad (61)$$

Wir ziehen k_0 aus der Wurzel und nutzen den aus, dass $G/k_0 \ll 1$, was für eine Entwicklung in k_0 spricht

$$k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{nG}{k_0}\right)^2} \cancel{=} 2m\pi \quad (62)$$

$$k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{nG}{k_0}\right)^2\right) = 2m\pi \quad (63)$$

Fürs Verständnis: $\rightarrow \frac{k_0}{2} \left(\frac{nG}{k_0}\right)^2 L_T = 2m\pi \quad (64)$

Ist euch dieser Schritt klar? $\iff L_T = \frac{d^2 m}{n^2 2 \lambda_{db}} \quad (65)$

Also bei passenden m zur Ordnung n

$$L_T = \frac{d^2}{2\lambda_{db}} \quad (66)$$



- e) Auf wundersame, nahezu gar magische Weise hat das soeben in Aufgabenteil c) angewandte Python-Skript auch die folgende nicht minder beeindruckende Skizze ausgeworfen:

Crazy O.O

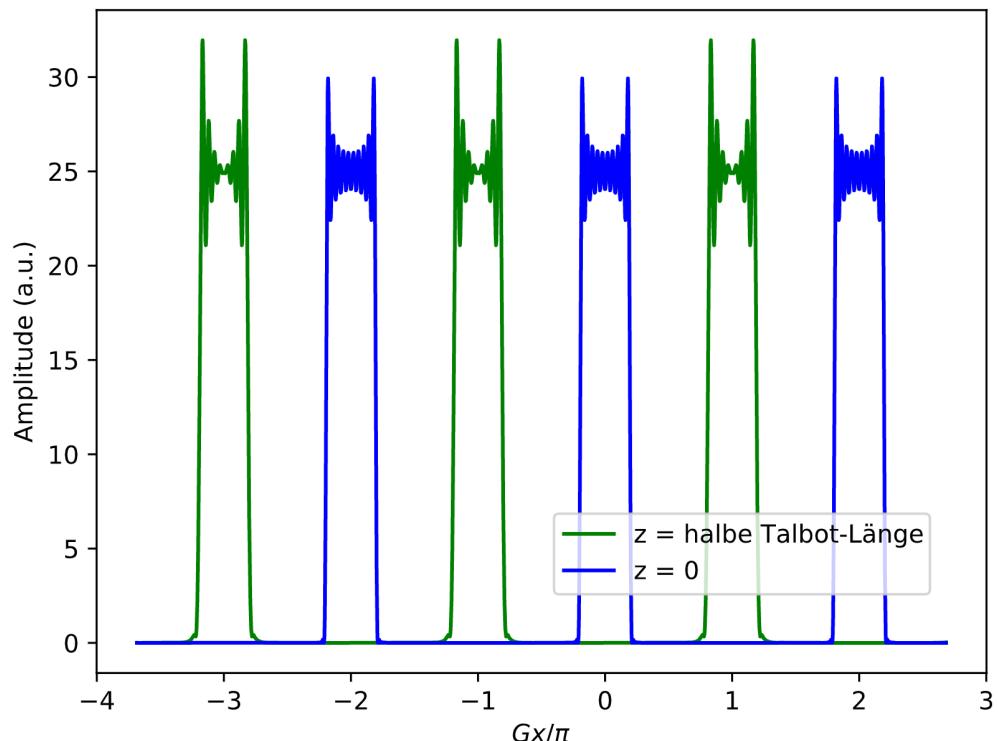


Abbildung 9: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten



3/3