7. Übungsblatt zu Analysis I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

7.1 Aufgabe 1: Konvergenz und Grenzwerte I

a) $a_n := \dfrac{6n^2 + 3n - 1}{9n^2 - 81}$

Behauptung: a_n konvergiert gegen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{6n^2 + 3n - 1}{9n^2 - 81} && (1)\\
&= \frac{n^2(6 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2})}{n^2(9 - \frac{81}{n^2})} && (2)\\
&= \frac{\lim n^2(6 + \lim \frac{3}{n} - \lim \frac{1}{n^2})}{\lim n^2(9 - \lim \frac{81}{n^2})} && (3)\\
&= \frac{n^2(6 + 0 - 0)}{n^2(9 - 0)} && (4)\\
&= \frac{6n^2}{9n^2} && (5)\\
&= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Big|\Big| && (6)
\end{aligned}$$

b) $a_n := \dfrac{7^n + (-13)^n}{(-7)^n + 13^n}$

Behauptung: Wir können a_n in zwei Teilfolgen teilen:

- b_k mit $k = 2n$
- c_k mit $k = 2n + 1$

Darin sind alle Elemente aus a_n in entweder b_k oder c_k enthalten.

Nun zeigen wir, dass die Teilfolgen jeweils gegen einen anderen Wert konvergieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_k &= \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n} + (-13)^{2n}}{(-7)^{2n} + 13^{2n}} && (7)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n} + 13^{2n}}{7^{2n} + 13^{2n}} && (8)\\
&= 1 && (9)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{2n+1} + (-13)^{2n+1}}{(-7)^{2n+1} + 13^{2n+1}} \tag{10}$$

$$= \frac{7^{2n+1} - 13^{2n+1}}{-7^{2n+1} + 13^{2n+1}} \tag{11}$$

$$= \frac{7^{2n+1} - 13^{2n+1}}{(-1)(7^{2n+1} - 13^{2n+1})} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{(-1)(1)} = -1 \tag{13}$$

Da die Folge a_n zwei unterschiedliche Häufungspunkte besitzt, kann sie nicht konvergent sein.

c) $a_n := \binom{42n}{n^2}$

Behauptung: a_n konvergiert, denn ein Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist als 0 definiert, falls $n < k$

Betrachte das Binomialkoeffizient $\binom{42n}{n^2}$. Spezifisch ist $n^2 > 42n$ für $n > 42$.

d) $a_n := \dfrac{n^3}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n^3}{\dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!}}$

$$a_n = \frac{n^3}{\dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!}} = \frac{n^3}{\dfrac{(2n)!}{n!(n)!}} \tag{14}$$

$$= \frac{n^3}{\dfrac{n! \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} n+k}{\left(n \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} n-k\right)^2}} \tag{15}$$

$$= \frac{n^3}{\dfrac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot ... \cdot (n+n)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}} \tag{16}$$

$$= \frac{n^3}{\dfrac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot ... \cdot (n+n)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1}} \tag{17}$$

Betrachten wir $\binom{2n}{n}$, jeder Faktor im Zähler ist kleiner als jeder Faktor im Nenner. Das heißt, dass $\binom{2n}{n}$ gegen unendlich divergiert.

Nach dem Wegkürzen bleibt:

$$a_n = \frac{n!n^3}{\prod\limits_{k=1}^{n} n+k} \tag{18}$$

Es ist klar, dass

$$n \cdot n \cdot n < (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \tag{19}$$

und

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n < (n+4) \cdot (n+5) \cdot ... \cdot (n+n) \tag{20}$$

Somit lässt sich folgern, dass der untere Term im Faktor viel schneller divergiert als der Nenner. Dementsprechend ist die Folge a_n konvergent gegen 0.

7.2 Aufgabe 2: Konvergenz und Grenzwerte II

a) $a_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) && (21)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k} - \frac{1}{k}\right) && (22)\\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) && (23)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=2}^{n} k-1}{\prod_{k=2}^{n} k} && (24)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} && (25)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} && (26)\\
&= 0 && (27)
\end{aligned}$$

b) $a_n := \frac{\pi n + 2\sin\alpha}{2n+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{\pi n + 2\sin\alpha}{2n+1} && (28)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\pi + \frac{2\sin\alpha}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} && (29)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\pi+0)}{n(2+0)} && (30)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{2n} && (31)\\
&= \frac{\pi}{2} && (32)
\end{aligned}$$

c) $a_n := \frac{n^n}{n!}$

Behauptung: Die Folge a_n divergiert, denn:

$n! = n \cdot (n{-}1) \cdot (n{-}2) \cdot (n{-}3)...$
$n^n = n \quad\quad \cdot n \quad\quad\quad \cdot n \quad\quad\quad \cdot n \quad ...$

Wie man sehen kann, ist jeder Faktor von n^n größer oder gleich dem entsprechenden Faktor von $n!$. Der Nenner wird dann schneller gegen unendlich laufen.

Formaler:

$$n^n = \prod^{n} n \tag{33}$$
$$= n \prod^{n-1} n \tag{34}$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \tag{35}$$
$$= n \prod_{k=1}^{n-1} k \tag{36}$$
$$= n \prod_{k=1}^{n-1} n - k \tag{37}$$

Wir können deutlich sehen, dass

$$a_n := \frac{n^n}{n!} = \frac{n \prod^{n-1} n}{n \prod_{k=1}^{n-1} n - k} \tag{38}$$
$$= \frac{\prod^{n-1} n}{\prod_{k=1}^{n-1} n - k} \tag{39}$$

divergiert.

d) $a_n := \frac{n^n}{(2n)!}$

Behauptung: Die Folge a_n konvergiert gegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n := \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} n}{\prod_{k=1}^{2n} k} \tag{40}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+n)} \tag{41}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} n}{n! \cdot \prod_{k=1}^{n} n+k} \tag{42}$$

$$= 0 \tag{43}$$

Offensichtlich steigt der Zähler schneller als der Nenner, weshalb die Folge gegen 0 konvergiert.

7.3 Aufgabe 3: Quotientenkriterium für Folgen

a) Geg.:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < 1 < 1$
- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
- $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$
- Geometrische Summe: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Z.z.: (a_n) ist eine Cauchy-Folge

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}| \tag{44}$$

$$\Longrightarrow \quad q|a_n - a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^{n-1}|a_2 - a_1| \tag{45}$$

O.B.d.A. sei $m > n$. Dann gilt:

$$\text{Anwendung der Teleskopsumme:} \tag{46}$$
$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - ... - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \tag{47}$$
$$\text{Aus der Dreicksungleichung folgt:} \tag{48}$$
$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + ... + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \tag{49}$$
$$\text{Nach Annahme gilt:} \tag{50}$$
$$|a_m - a_{m-1}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leq (q^{m-2} + q^{m-3} + q^n + q^{n-1})|a_2 - a_1| \tag{51}$$
$$\text{Klammern wir } q^{n-1} \text{ raus:} \tag{52}$$
$$= q^{n-1}(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + q^{m-n-3} + ... + q + 1)|a_2 - a_1| \tag{53}$$
$$\text{Geometrische Summe:} \tag{54}$$
$$= q^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-n-1} q^k \right) |a_2 - a_1| \tag{55}$$
$$\text{Geometrische Summe Teil 2:} \tag{56}$$
$$= q^{n-1} \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} |a_2 - a_1| < q^{n-1} \frac{1}{1-q} |a_2 - a_1| \tag{57}$$
$$= q^n \frac{1}{q - q^2} |a_2 - a_1| \tag{58}$$

Wir dürfen verwenden, dass $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. So wählen wir

$$|q_n - 0| = q^n < \varepsilon \frac{q - q^2}{|a_2 - a_1|} \tag{59}$$

und daraus folgt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_m - a_n| < q^n \frac{|a_2 - a_1|}{q - q^2} < \varepsilon \tag{60}$$

und somit ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

7.4 Aufgabe 4: Quiz zur Vorlesung

Code Juan: xjvz3y

Code Joshua: Dos4ew

Code Leo: 5J4Wpb