7. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

7.1 Aufgabe 1: Lokale Umkehrung

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^3$ definiert.

a) **Zu zeigen** ist, dass f $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ in einer Umgebung von z invertierbar. Dazu identifizieren wir den Raum $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und wenden das Inverse-Funktionen-Theorem an:

Voraussetzung dafür ist, dass die Definitionsmenge offen ist, was stimmt da es sich um $\mathbb{R}^2$ handelt und dass f eine C^1-Abbildung ist, was auch stimmt, da die partielle Ableitungen von f stetig partiell differenzierbar sind (Vergleiche (3)). Per vorgangenen Vorlesungen und Übungsblätter ist diese Tatsache trivial und ausreichend Kriterium zur Zugehörigkeit in C^1.

Wir müssen nun per Satz 4.5. zeigen, dass die Jakobi-Matrix im Punkt $\boldsymbol{a} = (x, y) \neq (0, 0)$ invertierbar ist.

Als erstes definieren wir unsere Funktion f neu, sodass sie unserer Identifikation mit R^2 entspricht:

$$f(z) = z^3 \equiv f(x, y) = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \tag{1}$$

Dies entspricht also, wenn wir die Termen mit i als zu der zweiten Koordinaten gehörigen Termen betrachten:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Hier können wir sehr einfach die Jakobi-Matrix bestimmen:

$$J_{f(\boldsymbol{a})} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Davon ist die Determinante:

$$\det J_{f(\boldsymbol{a})} = \left(3x^2 - 3y^2\right)^2 + 36x^2y^2 \neq 0 \tag{4}$$

Da beide Ausdrücke wegen des quadratischen Exponentes positiv sind, und besonders für $(x, y) \neq (0, 0)$ ungleich 0 sind, ist unsere Bedingung erfüllt und in der Umgebung von $z \neq 0$ gibt es eine offene Umgebung U, sodass die Einschränkung $f : U \to f(U)$ bijektiv ist. In anderen Worten ist f in einer Umgebung von z invertierbar.

b) **Zu zeigen** ist, dass f in einer Umgebung von $z = 0$ nicht invertierbar ist. Wir zeigen, dass die Funktion nicht injektiv und dementsprechend nicht bijektiv und invertierbar sein kann (per Analysis I), indem wir um eine beliebige kleine Umgebung von $z = 0$ verschiedene Koordinaten finden, die auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden. Dafür gucken wir uns die Polardarstellung der komplexen Zahlen an. Wir vermuten, jede Variation des Arguments um $\frac{2\pi}{3}$ ergibt unterschiedliche Werte für (x, y) aber ergibt den gleichen Funktionswert $f(z)$. Als Beweis zeigen wir:

$$f(z) = z^3 \equiv |z|^3 e^{3i\varphi} \qquad \Big| e^{3i\varphi} = e^{i(3\varphi+2\pi)} \tag{5}$$

Um Injektivität auszuschließen zeigen wir, dass es Punkte $(x, y) \neq (u, v)$ gibt, sodass $f(x, y) = f(u, v)$. In der Polardarstellung finden wir:

$$f(z) := |z|e^{3i\varphi} = |w|e^{i(3\phi+2\pi)} =: f(w) \qquad \Big|\text{O.B.d.A. } |z| = |w| \tag{6}$$

$$e^{3i\varphi} = e^{i(3\phi+2\pi)} \tag{7}$$

$$3\varphi = 3\pi + 2\pi \tag{8}$$

$$\rightarrow \varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi \qquad \Big|\text{O.B.d.A. } \varphi = 0 \rightarrow \phi = -\frac{2}{3}\pi \tag{9}$$

Wir finden die Werte für x, y in $z = x + iy$ und u, v in $w = u + iv$:

$$x = |z| \cos\varphi = |z| \tag{10}$$

$$y = |z| \sin\varphi = 0 \tag{11}$$

$$u = |z| \cos\phi = -\frac{|z|}{2} \tag{12}$$

$$v = |z| \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}|z| \tag{13}$$

Offensichtlich gilt $x \neq u$, $u \neq v$, aber trotzdem $f(x, y) = f(u, v)$. Da wir $|z|$ beliebig klein wählen können ist für jede Umgebung um $z = 0$ die Bijektivität, notwendiges Kriterium für Invertierbarkeit, widerlegt.

c) Selbst wenn man die Funktion auf $f\big|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ einschränkt, gilt die obige Argumentation als Widerspruch zu globaler Invertierbarkeit.

d) Sei nun $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$. Analog gehen wir die vorherigen Fragen für diese Funktion durch:

(a) Die Funktion $f_{\mathbb{R}}(x) = x^3$ ist ein Polynom und deswegen auch in C^1, die Menge $\mathbb{R}$ ist offen. Die Jakobi-Matrix ist einfach die Ableitung dieser Funktion nach x, also:

$$J_{f_{\mathbb{R}(x\neq 0)}} = 3x^2 \tag{14}$$

Die Determinante ist

$$\det J_{f_{\mathbb{R}(x\neq 0)}} = 3x^2 \neq 0\ \forall x \neq 0 \tag{15}$$

Also ist x^3 für alle Umgebungen außerhalb der 0 invertierbar.

(b) In einer Umgebung von $x = 0$ ist x^3 invertierbar. Dies ist korrekt, da die Funktion sogar auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv ist. Dies ist zu beweisen. Zunächst stellen wir direkt fest, dass die Funktion eine C^∞-Abbildung ist. Wir müssen also Injektivität und Surjekivität zeigen.

i. Surjektiv:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \to \infty \tag{16}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \to -\infty \tag{17}$$

Damit folgt unter Anwendung des Zwischenwertsatzes, der genutzt werden kann, da die Funktion stetig ist, bereits die Surjektivität.

ii. Injektiv:
Die Ableitung der Funktion ist $f' = 3x^2$. Diese ist stets positiv außer in $x = 0$, wo $f'(0) = 0$ gilt. Damit ist die Funktion aber streng monoton steigend, woraus die Injektivität folgt (vgl. Ana 1).

Wir stellen fest, dass $f_{\mathbb{R}}$ eine Bijektive Funktion ist und können auch direkt ihre Umkehrung angeben:

Es gilt: $f^{-1} = x^{\frac{1}{3}}$

(c) Die Funktion $f_{\mathbb{R}}(x) = x^3$ ist sogar global invertierbar, da sie aufgrund der Bijektivität eine Umkehrabbildung besitzt (vgl. Ana I), die den ganzen Wertebereich von $f_{\mathbb{R}}$ als Definitionsbereich annehmen kann. Dies gilt auf ganz $\mathbb{R}$, nicht nur auf der Einschränkung $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

7.2 Aufgabe 2: Kugelkoordinaten

a) Gegeben sei eine Funktion auf $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}_+ \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R} \backslash \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \leq 0, \ y = 0\} \tag{18}$$

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto (r \sin\varphi, r\cos\varphi \sin\theta, r \cos\varphi\cos\theta) \tag{19}$$

Die Menge $f\left(\{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) : \ r = 1\}\right)$ beschreibt (fast) die Einheitssphäre. Durch die Einschränkung der Bildmenge von f ist die Sphäre an der Schnittkurve mit der $y = 0 \wedge z \leq 0$-Ebene offen, sodass das dieser Rand in der Bildmenge nicht enthalten ist.

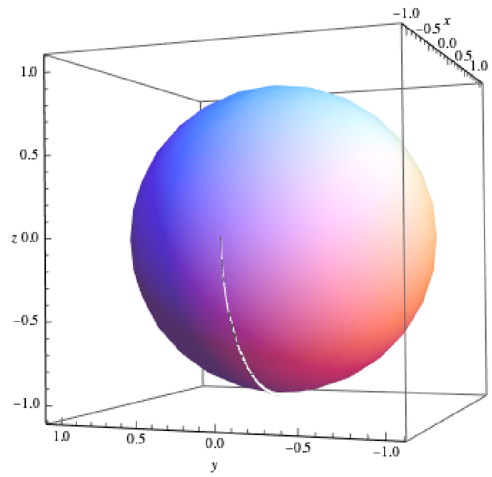


Abbildung 1: (Fast) Einheitsphäre S^2

Eine solche stetig differenzierbare, injektive Abbildung wäre

$$h(\varphi, \theta) = (1, \varphi, \theta) \tag{20}$$

Die Jakobi-Matrix davon ist:

$$J_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Diese Matrix hat 2 Spalten und ist von Rang 2, also hat für alle $\varphi, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ vollen Rang.

Noch zu zeigen: Injektiv, das heißt $h(a) = h(b) \implies a = b$ mit a, b Punkte in Kugelkoordinaten.

$$h(a) = h(b) \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}^T \tag{23}$$

Hier sehen wir aber direkt, dass aufgrund der Einschränkung der Definitionsbereiche der Winkel auf $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\theta \in (-\pi, \pi)$ Gleichheit herrschen muss.

Noch zu zeigen: Stetig Differenzierbar

Das sehen wir direkt an der Jacobi-Matrix, die alle partiellen Ableitungen der Komponenten enthält. Da die Komponenten alle stetig partiell differenzierbar sind, folgt die stetige Differenzierbarkeit von h (Satz 3.7).

b) Wir betrachten Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^4$:

$$f : \mathbb{R}_+ \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^4 \tag{24}$$

$$(r, \varphi, \phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \sin\varphi \\ r\cos\varphi \sin\phi \\ r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{25}$$

Zu zeigen ist, dass es sich um einen lokalen Diffeomorphismus handelt. Voraussetzung dafür ist, dass jeder Punkt des Definitionsbereichs eine offene Umgebung besitzt, die ein Diffeomorphismus ist, also dass f bijektiv und stetig differenzierbar und ebenfalls f^{-1} bijektiv und stetig differenzierbar sind. Wir zeigen, per dem Inversen-Funktionen-Theorem, dass die Determinante der Jakobi-Matrix ungleich 0 ist und somit dieses Kriterium erfüllt wird. Als erstes bestimmen wir alle Einträge der Jakobi-Matrix:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \sin\varphi \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \cos\varphi\sin\phi \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\phi \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = r\cos\varphi\cos\phi \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = \cos\varphi\cos\phi\sin\theta \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\phi\sin\theta \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \phi} = -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \tag{28}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial r} = \cos\varphi\cos\phi\cos\theta \qquad \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\phi\cos\theta \qquad \frac{\partial f_4}{\partial \phi} = -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta \qquad \frac{\partial f_4}{\partial \theta} = -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \tag{29}$$

Das bedeutet für die Jakobi-Matrix:

$$J_f = \begin{pmatrix} \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 & 0 \\ \cos\varphi\sin\phi & -r\sin\varphi\sin\phi & r\cos\varphi\cos\phi & 0 \\ \cos\varphi\cos\phi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\phi\sin\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{pmatrix} \tag{30}$$

Per den Laplace'schen-Entwicklungssatz aus LA I entwickeln wir um die erste Zeile der Matrix um die Determinante zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\det J_f = \sin\varphi & \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\phi & r\cos\varphi\cos\phi & 0 \\ -r\sin\varphi\cos\phi\sin\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} \\
& - r\cos\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\phi & r\cos\varphi\cos\phi & 0 \\ \cos\varphi\cos\phi\sin\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{31}$$

Wir berechnen die Determinanten der zwei verbleibenden Matrizen separat, die erste nennen wir A und die zweite B:

$$\begin{aligned}
\det A &= -r\sin\varphi\sin\phi \begin{vmatrix} -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} && (32) \\
&\quad - r\cos\varphi\cos\phi \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= -r\sin\varphi\sin\phi\big(r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\big) && (33) \\
&\quad - r\cos\varphi\cos\phi\big(r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\phi\sin^2\theta + r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\phi\cos^2\theta\big) \\
&= -r\sin\varphi\sin\phi\big(r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\big) - r\cos\varphi\cos\phi\big(r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\phi\big) && (34) \\
&= -r^3\big(\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\phi\sin^2\phi + \sin\varphi\cos^2\varphi\cos\phi\cos^2\phi\big) && (35) \\
&= -r^3\big(\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\phi\big) && (36) \\
\det B &= \cos\varphi\sin\phi \begin{vmatrix} -r\cos\varphi\sin\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ -r\cos\varphi\sin\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} && (37) \\
&\quad - r\cos\varphi\cos\phi \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\phi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\phi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\phi\cos\theta & -r\cos\varphi\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\varphi\sin\phi\big(r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\big) && (38) \\
&\quad - r\cos\varphi\cos\phi\big(-r\cos^2\varphi\cos^2\phi\sin^2\theta - r\cos^2\varphi\cos^2\phi\cos^2\theta\big) \\
&= \cos\varphi\sin\phi\big(r^2\cos^2\varphi\sin\phi\cos\phi\big) + r\cos\varphi\cos\phi\big(r\cos^2\varphi\cos^2\phi\big) && (39) \\
&= r^2\cos^3\varphi\cos\phi && (40)
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Werte zurück in die Determinante der Jakobi-Matrix einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\det J_f &= \sin\varphi\big(-r^3\big(\sin\varphi\cos^2\varphi\cos\phi\big)\big) - r\cos\varphi\big(r^2\cos^3\varphi\cos\phi\big) && (41) \\
&= -r^3\cos^2\varphi\cos\phi\big(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\big) && (42) \\
&= -r^3\cos^2\varphi\cos\phi && (43)
\end{aligned}$$

Für die Definitionsbereiche $\varphi, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Cosinus-Funktion immer ungleich 0, so ist die Determinante auch stets ungleich 0. Dementsprechend ist die Funktion f ein lokaler Diffeomorphismus.

7.3 Aufgabe 3: Zylinderkoordinaten

Gegeben ist die Funktion:

$$f : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y = 0\right\} \tag{44}$$

$$(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \tag{45}$$

a) Die folgende Skizze beschreibt die Menge $f(\{r^2 + z^2 = 1\})$:

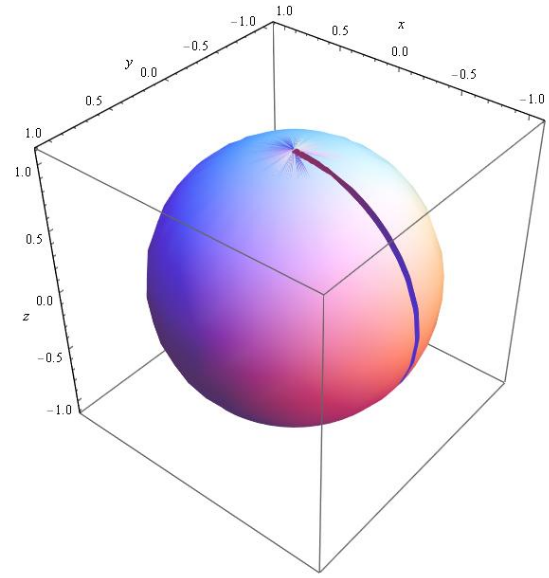


Abbildung 2: (Fast) Einheitssphäre S^2

Es handelt sich hierbei (fast) um die Einheitssphäre. Durch die Einschränkung der Bildmenge von f ist die Sphäre an der Schnittkurve mit der $y = 0 \wedge x \leq 0$-Ebene offen, sodass das dieser Rand in der Bildmenge nicht enthalten ist.

Die Abbildung

$$h : (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \tag{46}$$

leiten wir uns aus der Umkehrabbilfundung der Funktion

$$r^2 + z^2 = 1 \tag{47}$$

bezüglich der Variable r her:

$$r^2 + z^2 = 1 \tag{48}$$

$$\iff r^2 = 1 - z^2 \tag{49}$$

$$\iff r = \sqrt{1 - z^2} \tag{50}$$

Dann können wir h definieren als:

$$h : (\varphi, z) \mapsto (\sqrt{1 - z^2}, \varphi, z) \tag{51}$$

Diese Abbildung ist stetig im gegebenen Definitionsbereich, denn mit der Einschränkung $z \in (-1, 1)$ und da $r^2 + z^2 \stackrel{!}{=} 1$, ist die Wurzel immer positiv. Ebenfalls ist die Wurzel auf der betrachteten Menge immer differenzierbar, per Kenntnisse und Schlussfolgerungen aus Ana I.

Die Jacobimatrix zu dieser Funktion ist:

$$f_1(\varphi, z) = \sqrt{1 - z^2} \qquad f_2(\varphi, z) = \varphi \qquad f_3(\varphi, z) = z \tag{52}$$

$$J_h(\varphi, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Die Zeile 1 und 3 der Matrix sind linear Abhängig. Durch eine Zeilentransformation erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Es gilt somit

$$\operatorname{rang}(J_h) = 2 \tag{55}$$

Vollen Rang hat eine $n \times m$-Matrix A genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A) = \min\{n, m\}$. Da J_h eine 2×3-Matrix ist, ist dies hier der Fall:

$$\operatorname{rang}(J_h) = 2 = \min\{2, 3\}. \tag{56}$$

Nun zeigen wir noch, dass die definierte Abbildung injektiv ist.
Sei $h(a) = h(b),\ a, b \in (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$, genauer $a = (\varphi_1, z_1),\ b = (\varphi_2, z_2)$, zu zeigen ist, dass dann folgt $a = b$

$$h(a) = h(b) \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_1^2} \\ \varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z_2^2} \\ \varphi_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Hieraus erkennen wir direkt, dass gelten muss

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{59}$$

$$z_1 = z_2 \tag{60}$$

Wegen der vorgenommenen Einschränkung vom Definitionsbereich des Winkels $((-\pi, \pi))$ gilt auch, dass diese übereinstimmen müssen, wenn $f(a) = f(b)$ Wir sehen also, dass mit den gewählten Definitionsbereichen gilt

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

Die Abbildung ist injektiv.

Zu zeigen: Stetig differenzierbar
Wir betrachten die Jacobi-Matrix und stellen fest, dass alle partiellen Ableitungen aller Komponenten auf den festgelegten Definitionsbereichen stetige Funktionen sind. Daraus schließen wir direkt, dass die Abbildung stetig differenzierbar ist (Satz 3.7).

b) Die Menge $f(\{(r-\delta)^2 + z^2 = 1\})$ beschreibt einen Torus. δ beschreibt den Abstand vom Zentrum des Torus zum Zentrum des Rohres. Wegen der Einschränkung unseres Definitionsbereiches ist der Torus für alle $\varphi = \pm\pi$ offen.

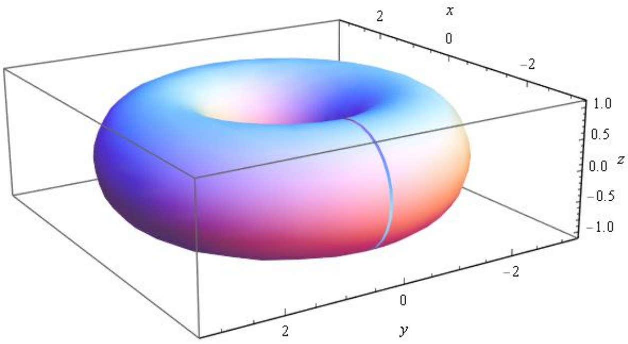


Abbildung 3: Torus mit $\delta = 2$

Außerdem gilt:

$$(r-\delta)^2 + z^2 = 1 \tag{61}$$

$$\rightarrow z = \sqrt{1-(r-\delta)^2} \tag{62}$$

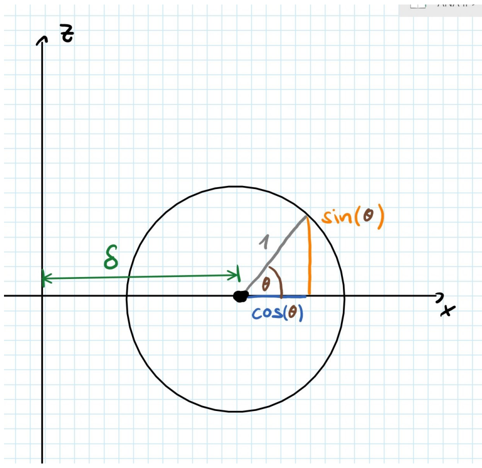
Daraus folgt, dass

$$(r-\delta)^2 \leq 1 \tag{63}$$

also

$$|r-\delta| \leq 1 \tag{64}$$

Die Abbildung h leiten wir anhand geometrischer Konstruktion am Querschnitt des Torus her:



Somit gilt

$$\begin{aligned} h : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) &\to \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} && (65) \\ (\varphi, \theta) &\mapsto (\cos(\theta) + \delta, \varphi, \sin(\theta)) && (66) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die gegebene Gleichung

$$(r - \delta)^2 + z^2 = 1 \tag{67}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + \delta - \delta)^2 + \sin(\theta)^2 &= 1 && (68) \\ \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 &= 1 && (69) \\ 1 &= 1 \qquad \checkmark && (70) \end{aligned}$$

Die Jacobimatrix zu dieser Funktion ist:

$$f_1(\varphi, \theta) = \cos(\theta) + \delta \qquad f_2(\varphi, \theta) = \varphi \qquad f_3(\varphi, \theta) = \sin(\theta) \tag{71}$$

$$J_h(\varphi, z) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\theta) \\ 1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{72}$$

Nun können wir die erste Zeile der Matrix mit $\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ multiplizieren, diese dann zur untersten Zeile addieren und erhalten somit die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{73}$$

Wie in Aufgabenteil a) erkennen wir daran, dass J_h Rang 2 und somit vollen Rang hat.

An der Jacobi-Matrix erkennen wir zudem direkt, dass die Abbildung stetig differenzierbar ist, da alle partiellen Ableitungen der Komponenten ebenfalls stetig sind. Somit folgt die stetige Differenzierbarkeit (Satz 3.7).

Injektivität:
Zu zeigen $h(a) = h(b) \implies a = b$ mit $a,\ b$ in der Form $a, b = (\varphi_i, \theta_i),\ i \in \{1, 2\}$

$$h(a) = h(b) \tag{74}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 + \delta \\ \varphi_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 + \delta \\ \varphi_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\implies \theta_1 = \theta_2 \qquad \sin(.) \text{ bijektiv auf } (-\pi, \pi) \tag{76}$$

$$\implies \varphi_1 = \varphi_2 \qquad \varphi \in (-\pi, \pi) \text{ eindeutig} \tag{77}$$

$$\implies a = b \tag{78}$$

h ist injektiv.

7.4 Aufgabe 4: Banachscher Fixpunktsatz

Es sei $0 < a < 1$ und $b \in \mathbb{R}$, $\phi_{a,b}$ definiert durch:

$$\phi_{a,b} : \left(C^0([0,1]), \|\cdot\|\right) \to \left(C^0([0,1]), \|\cdot\|\right) \tag{79}$$

$$f \mapsto \left[x \mapsto a \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + b\right] \tag{80}$$

a) **Zu zeigen** ist, dass $\phi_{a,b}$ eine Kontraktion ist. Es muss gelten:

$$\|\phi_{a,b}(f) - \phi_{a,b}(g)\| = \left\|a \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + b - \left(a \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t + b\right)\right\| \tag{81}$$

$$= \left\|a \int_0^x f(t) - g(t)\ \mathrm{d}t\right\| \qquad |\text{Integral ist linear.} \tag{82}$$

$$= |a| \left\|\int_0^x f(t) - g(t)\ \mathrm{d}t\right\| \tag{83}$$

$$\leq a \int_0^x \|f(t) - g(t)\|\ \mathrm{d}t \qquad |\text{Lemma 3.14} \tag{84}$$

$$\leq a \cdot |x| \cdot \|f(t) - g(t)\| \qquad |\text{Ana I} \tag{85}$$

$$\leq a \cdot \|f(x) - g(x)\| \tag{86}$$

b) Man darf den Banachschen Fixpunktsatz auf $\phi_{a,b}$, wenn die Menge und die Metrik, in diesem Fall $(C^0[0,1], \|\cdot\|)$ einen vollständigen metrischen Raum bilden. Per Definition 1.8 heißt ein metrischer Raum vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in der Menge konvergiert.

Dieser metrische Raum wurde in Vorlesung 1, Definition 1.8 als vollständig bewiesen.

c) Wir wissen, dass gilt: $f_* \overset{!}{=} \Phi_{a.b}(f_*)$. Somit folgt:

$$f_*(x) = \Phi_{a.b}(f_*) \tag{87}$$

$$f_*(x) = a \int_0^x f_*(t)\ \mathrm{d}t + b \tag{88}$$

$$f_*(x)' = a \frac{\partial \int_0^x f_*(t)\ \mathrm{d}t}{\partial x} \qquad |\text{b fällt bei Ableitung raus} \tag{89}$$

Integrieren und Ableiten sind gegensätzliche Operationen. Zudem vertauschen diese gemäß Satz 3.11, da alle betrachteten Abbildungen hier C^0 oder höher sind.

$$\implies f_*(x)' = a f_*(x) \tag{90}$$

Bleibt zu zeigen, dass $f_*(0) = b$

$$f_*(x) = \Phi_{a.b}(f_*) \tag{91}$$

$$f_*(x) = a \int_0^x f_*(t)\ \mathrm{d}t + b \tag{92}$$
$$f_*(0) = a \int_0^0 f_*(t)\ \mathrm{d}t + b \tag{93}$$
$$f_*(0) = b \tag{94}$$

d) Bestimmung von f_*:

Wir benutzen die bereits aus der theoretischen Physik und dem Tutorium bekannte Separation der Variablen. Dafür nehmen wir zunächst eine Umbenennung vor: $y \equiv f_*(x)$

$$y' \stackrel{!}{=} ay \qquad |p \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' \tag{95}$$
$$|\text{Trennung der Variablen} \tag{96}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a\ \mathrm{d}x \qquad |\int \tag{97}$$
$$\ln y = ax + c \qquad |c \in \mathbb{R} \tag{98}$$
$$y = e^{ax+c} \tag{99}$$
$$y = C \cdot e^{ax} \qquad |C \equiv e^c \tag{100}$$
$$\Longrightarrow\ f_*(x) = C \cdot e^{ax} \tag{101}$$

Wir müssen abschließend unsere Nebenbedingung $f_*(0) = b$ berücksichtigen. Hierfür setzen wir 0 ein.

$$b = C \cdot e^0 \tag{102}$$
$$b = C \tag{103}$$

Nun soll gelten

$$f_*' = af_* \tag{104}$$
$$abe^{ax} = abe^{ax} \qquad |\text{Wahre Aussage} \tag{105}$$

Unsere Funktion lautet somit $f_*(x) = be^{ax}$.