

STUDY GUIDE
PHYSIK



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Theoretische Physik III

WS 21/22, Jäckel

Juan
Marius Pfeiffer

15. April 2022

Inhaltsverzeichnis

0	Extras	1
0.1	Einleitung	1
0.1.1	Disclaimer	1
0.1.2	Andere Projekte:	1
0.2	Quellen und Inspiration	1
0.2.1	Mathe	1
0.2.2	Physik	2
1	Mathe	3
1.1	Vektoranalysis	3
1.1.1	Integrale über Skalar / Vektorfelder	3
1.2	Green	5
1.2.1	Greensche Identitäten	5
1.2.2	Greensche Funktionen	8
1.3	Tensoren	12
1.3.1	Was ist ein Tensor?	12
1.3.2	Wie transformiert ein Tensor?	12
1.3.3	Metrischer Tensor	17
1.4	Koordinatenwechsel	21
1.4.1	Differentialrechnung in Tensorschreibweise	21
1.4.2	Koordinatenwechsel	22
1.5	Vollständige Funktionensysteme	23
1.5.1	Motivation	23
1.5.2	Vollständige Funktionensysteme	24
1.5.3	Legendre-Polynome	25
1.5.4	Kugelflächenfunktionen	31
2	Physik	40
2.1	Einführung	40
2.1.1	Warum Elektrodynamik cool ist	40
2.2	Einheitssysteme	40
2.3	Maxwell-Gleichungen	41
2.4	Elektrostatik	42
2.4.1	Recap	42
2.4.2	Potentiale	42
2.4.3	Methode der Spiegelladungen	44
2.5	Multipotentwicklung	47

2.5.1	Kartesische Entwicklung	47
2.5.2	Sphärische Entwicklung	52
2.6	Magnetostatik	53
2.6.1	Magnetostatik	53
2.6.2	Magnetischer Dipol	55
2.6.3	Stromverteilung aus diskreten Ladungsträgern	58
2.7	Wellenlösungen	59
2.7.1	Wellengleichungen	59
2.7.2	Wellengleichung für Potentiale	59
2.7.3	Polarisation	61
2.8	Erhaltungssätze	61
2.8.1	Kontinuitätsgleichung	61
2.8.2	Energie- und Impulsdichte des EM-Feldes	62
2.9	Spezielle Relativität	62
2.9.1	Lorentztransformationen	64
2.9.2	Längenkontraktion + Zeitdilatation	70
2.10	Kovariante / 4d Formulierung der Elektrodynamik	70
2.10.1	4-er Potential und Eichfreiheit	70
2.10.2	Maxwell-Gleichungen in 4d	75
2.10.3	Doppler-Effekt	75
2.11	Elektrodynamik als Feldtheorie	75
2.11.1	Lagrange-Mechanik	75
2.11.2	”Herleitung” der Lagrange-Dichte-Funktion der E-Dynamik	75
2.11.3	Herleitung der Maxwellgleichungen	77
2.11.4	Maxwell-Gleichungen in 4er Sprache	79
2.11.5	Elektrodynamik und Noether	79
3	Anhang	80
3.1	Koordinatenwechsel	80
3.2	Fourier	82
3.3	Green	83
	Glossar	84

0. Extras

0.1 Einleitung

0.1.1 Disclaimer

Dieses Projekt wird nicht im Namen der Universität Heidelberg erstellt, oder wird durch diese offiziell genehmigt. Es ist eine Nachbearbeitung der Vorlesung durch einen Studierenden und ist natürlich fehleranfällig. Keine Gewähr!

0.1.2 Andere Projekte:

[Theo I Guide](#)

[Theo II Guide](#)

[Ana I Zusammenfassung](#)

[Ana II Zusammenfassung](#)

[Ana III Zusammenfassung](#)

[LA I Zusammenfassung](#)

[Ex I Formelsammlung](#)

[Ex II Formelsammlung](#)

[Ex III Formelsammlung](#)

0.2 Quellen und Inspiration

0.2.1 Mathe

Green

- [SE: Beispielaufgabe](#)
- [WP: Compact support](#)
- [Green's Funktionen](#)
- [Green's Funktionen und das "distributional Laplacian"](#)

Tensoren

- [WP: Metric Tensor](#)
- [YT: The Metric Tensor Pt. 1](#)
- [YT: The Metric Tensor Pt. 2](#)
- [WP: Log-polar coordinates](#)

Koordinatenwechsel

- [Nabla in krümmlichen Koordinaten](#)

Vollständige Funktionensysteme

- [Vollständige Funktionensysteme](#)
- [WP: Spherical harmonics](#)

0.2.2 Physik**Einführung**

- [WP: Electromagnetic Tensor](#)
- [WP: Electromagnetic four potential](#)
- Bartelmann: Theoretische Physik III

Multipolentwicklung

- [BSP: Multipolentwicklung](#)

Magnetostatik

- [WP: Multipole Radiation](#)

Spezielle Relativität

- [Muonen und Zeitdilatation](#)

Pavle Premovic. Relativistic Time Dilation and the Muon Experiment. The General Science Journal, The General Science Journal, 2020. fhal-02531926f

- [Lichtkegel und beschleunigte Bewegung](#)

Kovariante Elektrodynamik

- [WP: Feldstärketensor](#)

1. Mathe

1.1 Vektoranalysis

1.1.1 Integrale über Skalar / Vektorfelder

Wegintegral

Für ein Wegintegral¹ möchten wir entlang eines Skalarfeldes f oder eines Vektorfeldes \mathbf{V} gehen, aber das wird uns wahrscheinlich etwas kosten. Je nach dem wolang wir das Feld gehen wird es unterschiedlich kosten. Um zu wissen, was es kostet müssen wir über jeden Stück integrieren, dabei ist die Herangehensweise bei skalaren und vektoriellen Feldern nur leicht unterschiedlich:

Wiederholung: Wegintegral

Skalar:

Wir integrieren über eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$ entlang eines Skalarfeldes $f(\mathbf{x})$. Dabei integrieren wir über die Bogenlänge s . Es gilt:

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b f(\gamma) \cdot |\dot{\gamma}| \, dt \quad (1.1.1)$$

Vektor:

Im Prinzip funktioniert es genauso, wir parametrisieren unser Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ durch γ und führen die richtige Substitution durch:

$$\int_{\gamma} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{V}(\gamma) \cdot \dot{\gamma} \, dt \quad (1.1.2)$$

Oberflächenintegral

Für ein Oberflächenintegral² haben wir keinen konkreten Weg mehr, aber wir haben eine Fläche. Sagen wir, wir haben einen Sonnensegel installiert, und gegen den Sonnensegel fließt natürlich der Wind. Es kostet dem Sonnensegel ein bisschen Aufwand an die Stan-

¹Für ausführlichere Herleitungen und einige Merkgel siehe Abschnitt 1.5 der Theo Guide I (0.1.2).

²Für ausführlichere Herleitungen und einige Merkgel siehe Abschnitt 1.6 der Theo Guide I (0.1.2).

gen oder wo auch immer fest zu halten, und dieser Aufwand hängt von der Größe des Sonnensegels (der Fläche) und von der Stärke des Windes (des Vektorfeldes). Um herauszufinden, wie viel es dem Sonnensegel kostet, da fest zu halten müssen wir die Fläche parametrisieren $\mathbf{A}(s, t)$, $s \in [a, b]$, $t \in [c, d]$ und das Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ darüber integrieren:

Wiederholung: Oberflächenintegral

$$\int_A \mathbf{V}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{f} \quad (1.1.3)$$

Dabei ist $d\mathbf{f}$ ein kleiner Vektor, der senkrecht zur Oberfläche steht und die Richtung der Oberfläche "angibt". Wir parametrisieren unsere Integralfläche durch \mathbf{A} und finden die angemessene Substitution, indem wir

$$d\mathbf{f} = (\partial_s \mathbf{A} \times \partial_t \mathbf{A}) \, ds \, dt \quad (1.1.4)$$

setzen. Dann ist:

$$\int_A \mathbf{V}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{f} = \int_a^b ds \int_c^d dt \, \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot (\partial_s \mathbf{A} \times \partial_t \mathbf{A}) \quad (1.1.5)$$

Volumenintegral

Analog wollen wir jetzt über ein Volumen in einem Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ integrieren³.

Wiederholung: Volumenintegral

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, dV \quad (1.1.6)$$

Dabei parametrisieren das Volumen mit $\mathbf{v}(r, s, t)$, $r \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, $t \in [e, f]$ und ersetzen das Volumenstück dV mit

$$dV = (\partial_r \mathbf{v} \times \partial_s \mathbf{v}) \cdot \partial_t \mathbf{v} \, dr \, ds \, dt \quad (1.1.7)$$

Damit ist unser Integral

$$\int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, dV = \int_a^b dr \int_c^d ds \int_e^f dt \, \mathbf{F}(\mathbf{v}(r, s, t)) \cdot (\partial_r \mathbf{v} \times \partial_s \mathbf{v}) \cdot \partial_t \mathbf{v} \quad (1.1.8)$$

³Für ausführlichere Herleitungen und einige Merkregel siehe Abschnitt 1.7 der Theo Guide I (0.1.2).

1.2 Green

1.2.1 Greensche Identitäten

Erste Identität

Seien φ, ψ zwei Funktionen. Lasst uns dann folgendes benutzen:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \partial_j (\varphi \partial_j \psi) \quad (1.2.1)$$

$$= \partial_j (\varphi) \partial_j (\psi) + \varphi \partial_j^2 (\psi) \quad (1.2.2)$$

$$= \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi \quad (1.2.3)$$

Nach Integration darüber erhalten wir

$$\int_V dV \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi = \int_V dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \varphi \nabla \psi \quad (1.2.4)$$

Ok. Cool. Das haben wir jetzt gezeigt aber was bringt uns das? Also klar, es ist schön Identitäten zu haben, so kann man ja Probleme auf unterschiedlichen Weisen lösen. Diese Identitäten spezifisch sind deswegen interessant, weil sie zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen⁴ ganz nützlich sein können. Nachdem wir die nächste Identität eingeführt haben werden wir uns die Nützlichkeit an einem Beispiel anschauen.

Zweite Identität

Lasst uns jetzt fast genau das gleiche machen, aber nur φ und ψ umbenennen. Dann haben wir

$$\int_V dV \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \psi \nabla \varphi \quad (1.2.5)$$

Voilà. Ok ne, ist doch ein bisschen spannender. Wenn wir jetzt (1.2.5) – (1.2.4) ausrechnen erhalten wir die tatsächliche Identität:

$$\int_V dV \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \quad (1.2.6)$$

Diese Gleichungen sind an einigen Stellen relevant, wo man zum Beispiel eine Green-Funktion ausrechnen möchte. Als kleines Training benutzen wir den folgenden Fall

Beispiel 1. Greensche Identitäten

Sei folgendes Integral gegeben:

$$\int_V \ln(r) \Delta f(\mathbf{r}) dV \quad | \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2.7)$$

wobei wir für V ein kreisförmiges Volumen, d.h. eine Kreisfläche mit Radius $0 < \varepsilon \leq r < R$ bzgl. des Ursprungs wählen und wir schicken $R \rightarrow \infty$. Das ε kommt

⁴Hint: Maxwell's Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen

dadurch Zustände, weil wir $r = 0$ nicht in \ln einsetzen dürfen. Außerdem habe die Funktion $f(\mathbf{r})$ "kompakten Träger" oder auf englischem "compact support". Dies ist eine stärkere Bedingung als dass es im Unendlichen verschwindet. Diese bedeutet u.a., dass die Funktion sehr sehr klein wird, je größer r wird.

Das Integral sieht ja aber aus als ein Teil der zweiten Greenschen Identität nicht wahr? Lasst uns mal das ein bisschen umformen, vielleicht ist es ein bisschen klarer:

$$\int_V \underbrace{\ln(r) \Delta f(\mathbf{r})}_{\psi \Delta \varphi} dV = \int_V \underbrace{f(\mathbf{r}) \Delta \ln(r)}_{\varphi \Delta \psi} dV \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \underbrace{(\ln(r) \nabla f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla \ln(r))}_{\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi} \\ &= \int_V f(\mathbf{r}) \Delta \ln(r) dV \quad (1.2.9) \\ &+ \underbrace{\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot (\ln(r) \nabla f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla \ln(r))}_{\text{Äußeres Rand}} \\ &+ \underbrace{\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot (\ln(r) \nabla f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla \ln(r))}_{\text{Inneres Rand}} \end{aligned}$$

Oopsi, wir hatten am Anfang ein Integral und jetzt haben wir 3 (bzw. 5). Ich muss sagen ich fühle mich ein bisschen gescammed. Aber mal gucken ob die Situation noch gerettet sein kann. Als erstes schauen wir uns den ersten Teil an, zumindest haben wir schon eins sehr schnell erledigt. Dafür brauchen wir ja die Definition des Laplace in Polarkoordinaten:

$$\Delta_{\text{Pol}} \phi = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r (\phi)) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \phi \quad (1.2.10)$$

Man merkt hier schnell, der Laplace $\Delta \ln(r) = 0$. Yeei.

Nun schauen wir uns die Integrale über den Rand. Als Erinnerung gilt

$$\int_{\partial V} d\mathbf{A} = r \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{\mathbf{n}} \quad |\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} \text{ (hier)} \quad (1.2.11)$$

Die Herleitung für $d\mathbf{A}$ haben wir ebenfalls in Theo I Guide gemacht, wobei hier wurde ergänzt, dass $d\mathbf{A} = r d\varphi \hat{\mathbf{n}}$ im 2-dimensionalen Fall. Damit machen wir weiter und wenden die Definitionen der Gradienten in Polarkoordinaten an:

$$\nabla_{\text{Pol}} = \hat{\mathbf{r}} \partial_r + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r} \partial_\varphi \quad (1.2.12)$$

$$\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \partial_r f(\mathbf{r}) \quad (1.2.13)$$

$$\nabla \ln(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r^2} \quad (1.2.14)$$

Dies setzen wir oben in (1.2.9) für die Rände ein und erhalten:

$$\text{Randterm} = \lim_{r \rightarrow 0, \infty} r \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\ln(r) \partial_r f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{r^2} \right) \quad (1.2.15)$$

Die Grenzen können wir aber für einen Moment ignorieren, wir ziehen den Limes mit rein^a und betrachten folgenden Term:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \ln r \partial_r f(\mathbf{r}) - \frac{f(\mathbf{r})}{r^2} \right) \quad (1.2.16)$$

Aufgrund der Bedingung des "compact supports" wissen wir, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} f(\mathbf{r}) = 0$ und ebenfalls $\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_r f(\mathbf{r}) = 0$. Das heißt, der Beitrag des "äußeren" Randes ist Null. Nada. Damit ist zumindest der äußere Teil des Randes behandelt worden. Es fehlt aber sozusagen der "innere" Teil des Randes, und zwar was passiert wenn wir $r \rightarrow 0$ schicken. Lasst uns mal aber kurz davor eine kurze Kaffee-Pause nehmen, ich kriege sonst ein Kopfschmerzen.

Ok, lasst uns dann weitermachen und alle verbleibenden Terme aufschreiben:

$$\int_V \ln(r) \Delta f(\mathbf{r}) = \lim_{r \rightarrow 0} r \int_0^{2\pi} d\varphi (\ln r \partial_r f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \partial_r \ln(r)) \quad (1.2.17)$$

Wie gesagt, dieser ist der verbleibende Teil des Randes, nun haben wir hier schon einiges für die Gradienten eingesetzt, was wir bei (1.2.8) noch nicht explizit hatten. Wir müssen aber jetzt mit den Schweinen spielen gehen und schmutzige Abschätzungen machen, ich werde versuchen sie zumindest so gut zu begründen wie möglich.

Betrachten wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \int_0^{2\pi} d\varphi \ln r \partial_r f(\mathbf{r}) \quad (1.2.18)$$

Wir haben die Bedingung auf unsere Testfunktion f gesetzt, dass sie "compact supported" ist^b. Eine der Bedingungen hier ist, dass diese Funktion glatt auf dem Anwendungsbereich ist, also lassen wir sie in ε keine Singularität haben. Daraus können wir schließen, dass die Ableitung durch irgendwelche magische maximale Zahl c begrenzt ist. Dafür können wir jetzt sagen:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \int_0^{2\pi} d\varphi \ln r \underbrace{\partial_r f(\mathbf{r})}_{\leq c} \leq \lim_{r \rightarrow 0} r \int_0^{2\pi} \ln r \cdot c \quad (1.2.19)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi c r \ln r \quad (1.2.20)$$

$$= 0 \quad \text{[L'hospital bestimmt]} \quad (1.2.21)$$

Ok, noch einen Term brutal todgeschlagen und ermordet. Jetzt kommen wir für den Rest seiner Familie:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \int_0^{2\pi} d\varphi f(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi f(\mathbf{r}) \quad (1.2.22)$$

$$= 2\pi f(\mathbf{0}) \quad (1.2.23)$$

Warum gilt der letzte Schritt? **Magie!!**. Das soll ein bekanntes Ergebnis sein, woher das kommt will ich jetzt nicht herleiten. Vielleicht ergänze ich diesen Abschnitt irgendwann. Aber lasst uns nicht von diesem letzten kleinen Hindernis ablenken, von dem was wir gerade geschafft haben! Guckmal:

$$\int_V \ln r \Delta f(r) dV = -2\pi f(\mathbf{0}) \quad (1.2.24)$$

Das ist ganz ehrlich ein heißes Ergebnis nach all dieser Rechnung.

Kommentar dazu:

Insbesondere, wenn man sich das "distributional Laplacian" 0.2.1 anschaut und sich diese Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \phi(\mathbf{x}) dV = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) (\Delta \phi(\mathbf{x})) dV \quad (1.2.25)$$

für $u(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})$ in mehreren Dimensionen klar macht, kann man feststellen, dass $\frac{-1}{2\pi} \Delta \ln r$ die Bedingungen einer δ -Distribution im zwei dimensional Fall erfüllt. Das Beispiel war aber dafür gedacht, ein weiteres Nutzen zu den Greenschen Identitäten zu erläutern, also ist das natürlich wichtig aber im Moment geht das weit darüber hinaus was ich einigermaßen begründen könnte.

^atun so als ob wir die Bedingungen dafür überprüft hätten

^bIch hätte diesen Teil wahrscheinlich überspringen können und einfach sagen, dass ich f aus meinem Zauberhut rausgezogen habe, wo die Funktionen alles machen was ich will.

1.2.2 Greensche Funktionen

Greensche Funktionen sind anscheinend ganz nützlich zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere welche wie die Laplace- oder Poisson-Gleichung.

Die Poisson-Gleichung habe die Form


$$\Delta \phi = f(x, y, z) \quad (1.2.26)$$

Dies ist eine inhomogene partielle Differentialgleichung (PDE). Dabei kann ja f eine beliebige Funktion sein, aber in der Regel im Kontext der Elektrodynamik werden wir oft einen Ausdruck mit einer δ -Funktion finden. Man sollte sich ein bisschen tiefer mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigen⁵, aber eine Eigenschaft von diesen, im Kontrast zu gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs) ist, dass man sogenannte "Randbedingungen" erfüllen muss.

⁵Dazu kommen wir hoffentlich dieses Semester noch

Einschub 1. Randbedingungen

Partielle Differentialgleichungen beschreiben wie sich ein System nach bestimmten Parametern ändert. Zur Lösung des Problems braucht man aber einen Aufhängepunkt den man nehmen kann und wo man sich festhalten kann. Die sogenannten Randbedingungen sind dann Bedingungen, die sich zu keinem "Zeitpunkt" beeinflussen lassen. Diese werden sich entweder aus dem Kontext ergeben, zum Beispiel bei einer geerdeten Sphäre, dass das Potential am Rand verschwinden soll, oder müssen zuerst gefunden werden.

Allerdings kann man im Kontrast zu ODEs nicht frei wählen, welchen Anfangspunkt welchem Wert man zuordnet, für eine ODE kann man ja sagen $x(0) = 1$ oder 2 oder 500 und dann findet man trotzdem eine eindeutige Lösung. Bei PDEs haben wir erstens *Randbedingungen*, das heißt im Prinzip zählen wir schon mit einer überabzählbaren Menge an Punkte, wo eine Bedingung erfüllt sein muss. Sei zum Beispiel eine PDE  Ordnung, das heißt, es gebe bis zur p -ten partielle Ableitung mit n unabhängigen Variablen gegeben. Dann muss man eine Randbedingung auf eine $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit geben, wo maximal die $p - 1$ -te Ableitung vorkommen.

Beispielsweise tauchen folgende Randbedingungen auf:

1. Dirichlet Randbedingungen:

Sei eine PDE auf einem Gebiet V definiert, so besagt diese Randbedingungen, welche Werte eine *Lösung* auf dem Rand ∂V annehmen darf. Beispielsweise bei einer Gleichung

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (1.2.27)$$

können wir fordern, dass $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ auf dem Rand ∂V .

2. Neumann Randbedingungen:

Bei einer Neumann Randbedingung wird die Voraussetzung gestellt, welche Werte die *Ableitung* auf dem Rand ∂V haben darf. Insbesondere die Ableitung in Normalrichtung zum Rand. Man schreibt dann

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (1.2.28)$$

Jetzt, dass wir Randbedingungen aus dem Weg haben versuchen wir die Greensche Funktionen ein bisschen zu motivieren, und damit meine ich nicht die Funktionen anzufeiern und Komplimente geben, sondern wollen wir kurz besprechen, weshalb man sie überhaupt braucht. Dafür muss ich leider ein bisschen Lineare Algebra miteinbeziehen, aber zumindest den schönen Teil mit Matrizen und so.

Motivation

Als Einleitung zu den Green-Funktionen nennen wir folgende Gründe:

1. Sei A eine invertierbare Matrix, v, w Vektoren. Man kann folgende Gleichung

$$Av = w \quad (1.2.29)$$

nach v umformen, indem man auf der linken Seite mit A^{-1} multipliziert

$$v = A^{-1}w. \quad (1.2.30)$$

2. Man kann eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \dots + \frac{dy}{dx} + cy = f \quad (1.2.31)$$

darstellen als

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + \dots + \frac{d}{dx} + c \right) y = f \quad (1.2.32)$$

3. Man kann sagen, dass der Ausdruck

$$\frac{d^n}{dx^n} + \dots + \frac{d}{dx} + c \quad (1.2.33)$$

ein *Differentialoperator* ist und ihn einfach \hat{D} nennen. Dann sieht (1.2.32) so aus:

$$\hat{D} y = f \quad (1.2.34)$$

4. Gleichung (1.2.34) sieht ähnlich aus wie die Matrix-Gleichung, es wäre schön, wenn differentielle Operatoren invertierbar wären. Dafür wissen wir, dass $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} = \delta_i^j$, es wäre also schön, wenn es eine Funktion G gäbe, die " $\hat{D} \cdot G = \delta_i^j$ " gibt. Dabei ist der Ausdruck in Anführungsstrichen, weil es in diesem Fall nicht das diskrete δ_i^j gemeint ist, sondern die δ -Distribution. Dann suchen wir eine Funktion G , die folgende Bedingung erfüllt:

$$\hat{D} \cdot G(x, x') = \delta(x - x') \quad (1.2.35)$$

5. Differentialoperatoren können oft durch Integration invertiert werden, also erwarten wir, dass man Gleichung (1.2.34) mit etwas der Form

$$y = \int_V G(x, x') f(x') dx' \quad (1.2.36)$$

nach y auflösen können. Damit wissen wir aber noch nicht, wie man ein solches G findet, oder ob man das Integral überhaupt lösen kann.

Greensche Funktion finden

Bei der Suche der Greenschen Funktion für ein gegebenes Problem sind verschiedene Methoden ganz effektiv. Als erstes ist Raten^a eine gute Möglichkeit bei einfachen oder bekannten Sachverhalten. Dies ist aber meistens nicht effektiv, wenn wir nicht genau wissen wo wir anfangen sollen. Wir haben zum Beispiel in der Vorlesung hergeleitet, dass

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.2.37)$$

^aOder Wikipedia fragen



Abbildung 1.1: Auf der Suche nach Green's Funktion

eine gültige Green's Funktion zum Laplace-Operator mit der Form

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad (1.2.38)$$

ist⁶. In 3 Dimensionen erfüllt diese spezifische Funktion G immer

$$\Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.39)$$

Aber je nachdem, was wir für Randbedingungen setzen, könnte uns interessieren auch einen zusätzlichen Faktor miteinzubeziehen, so dass:

$$\tilde{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad | \Delta F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (1.2.40)$$

Das heißt, wir müssen uns auch Sorgen machen, diese neue Funktion F zu finden. Diese hilft uns wie gesagt die Randbedingungen zu erfüllen, aber soll keinen Einfluss auf die Poisson-Gleichung (im Volumen) ausüben. Sie muss aber irgendwo einen Ursprung haben, woher sie kommt. Man kann sagen, wenn G zur Ladungsverteilung im Volumen gehört, dann wirkt F von Außen, von einer nicht realen Ladungsverteilung außerhalb vom Volumen, die G entgegenwirkt um die Randbedingungen zu zwingen. Diese Ladungsverteilung außerhalb existiert nicht, aber die Vorstellung, dass sie tut ist äußerst hilfreich, insbesondere wenn wir uns später die Methode der Spiegelladungen 2.4.3 anschauen.

Nun, was soll hier dieses ganze Zeug heißen, was macht eine Greensche Funktion zu einem sinnvollen physikalischen Werkzeug? Naja, wie wir schon in (1.2.36) angedeutet haben, dient G zur Ausrechnung des Potentials als:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') 4\pi\rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (1.2.41)$$

Physikalisch kann man sich diese Funktion vorstellen [HEY:erg]

Beispiel: Helmholtzgleichung

Als nächstes haben wir uns die Helmholtzgleichung angeschaut

$$(\Delta + k^2)\phi = -4\pi\rho \quad (1.2.42)$$

und uns wurde direkt eine Greensche Funktion gegeben, aber wie hätten wir sie selber finden können? Das ist schon eine schwierige Frage, weil als erstes muss man immer die Dimensionalität des Problems im Kopf haben. Wenn wir zum Beispiel an die Schlussbemerkungen von Beispiel 1 erinnern, so haben wir festgestellt, dass für Gleichung 1.2.38 in 2 Dimensionen die Greensche Funktion $G_2 = -\frac{1}{2\pi} \ln r$ ist, und in 3 Dimensionen ist es bekanntlich $G_3 = -\frac{1}{4\pi r}$. Wir werden davon ausgehen, dass die meisten GF, die wir suchen für 3 Dimensionen gedacht sind.

Eine nützliche Methode dafür ist die Transformation der Gleichung in den Fourier-konjugierten Raum, und die Rücktransformation um die Funktion zu finden. Lasst uns das mal versuchen:

⁶*Faktoren gegeben für richtige Normierung

Beispiel 2. Greensche Funktion mit Fouriertransformation

Sei unsere Gleichung

$$(\Delta + k_0^2)G = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.2.43)$$

Jetzt transformieren wir sie mithilfe der in [HEY:ref] gegebenen Gesetzen:

$$\mathcal{F}[(\Delta + k_0^2)G; \mathbf{k}] = \mathcal{F}[-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \mathbf{k}] \quad (1.2.44)$$

$$\underbrace{(-k^2 + k_0^2)}_{\text{Fourier } e), a)} \tilde{G} = -4\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (1.2.45)$$

Nach Umformen nach \tilde{G} erhalten wir:

$$\tilde{G} = \frac{4\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}}{k^2 - k_0^2} \quad (1.2.46)$$

Ebenfalls wissen wir, dass falls wir aus \tilde{G} wieder G bestimmen möchten, dass wir wieder eine Fourier Transformation durchführen können:

$$\tilde{\mathcal{F}}[\tilde{G}, \mathbf{x}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{4\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 - k_0^2} \quad (1.2.47)$$

Und mit Werkzeugen die uns noch nicht zur Verfügung stehen^a erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \frac{4\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}}{k^2 - k_0^2} = \frac{e^{\pm ik_0(|\mathbf{x}| - |\mathbf{x}'|)}}{|x|} \quad (1.2.48)$$

^aOk ich habe nicht so weit in die Zukunft gedacht, ich habe eigentlich keine Ahnung wie ich dieses Integral löse. Hier mit Magie das Ergebnis gezaubert

1.3 Tensoren

1.3.1 Was ist ein Tensor?

Was ist denn wieder ein Tensor?

”Ein Tensor ist etwas was transformiert wie ein Tensor”

- Hebbie

1.3.2 Wie transformiert ein Tensor?

Gute Frage. Ich glaube wir haben alle den Moment gehasst, wo das Wort ”Tensor” aus Hebeckers Mund rausgekommen ist. Ab dem Moment hatten wir glaube ich ein kollektives Kopfschmerzen, weil sich der Begriff Tensor in unserem Gehirn eingegraben hatte und würde nicht aufhören Löcher zu bohren, bis wir ihn endlich verstanden haben. Dafür wollen wir uns hier nochmal mit dem fiesen Ding beschäftigen, und obwohl nicht komplett mathematisch verstehen, zumindest gut genug dominieren.

Man kann Tensoren als multilineare Abbildungen mit dem Tensorprodukt einführen jada jada, aber Mathematiker können mit ihrer Tensordefinition für einen Moment zurück in den Keller. Für uns Physiker ist tatsächlich die absolut grundlegendste Definition eines Tensors, wie Hebbie das schon immer gesagt hatte, dass sie wie Tensoren transformieren!

Um das zu verstehen müssen wir zuerst einiges klären: Warum brauchen wir Tensoren und warum möchten wir sie transformieren? Diese zwei Fragen kann man meiner Meinung nach schwer voneinander trennen. Natürlich ein Argument ist, dass Tensoren existieren. Punkt. Ein weiteres Argument ist, dass Tensoren in der Physik auftauchen. Punkt. Ja vieles taucht in der Mathematik und in der Physik auf, aber nicht deswegen muss man es cool finden. Tensoren sind aber tatsächlich auch cool.

Fangen wir damit an, dass ein Tensor ein Objekt mit Indizes ist. Kann ja sein, dass es Null Indizes hat, aber das ist egal. Es kann ja auch eine ganze Menge Indizes haben. Schauen wir uns einen Tensor an mit einem Index V^a . Dies kann zum Beispiel einen Vektor darstellen. Über diesen Vektor kann man ja unterschiedliche Meinungen haben, wie man ihn nennt, welche Zahlen man in seine Komponenten-slots schreibt. Aber Jede Person, jedes Koordinatensystem muss sich an einige Sachen einigen:

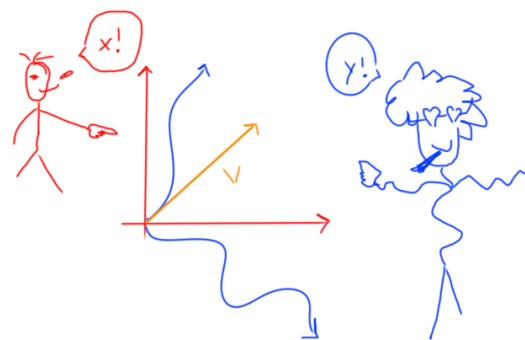


Abbildung 1.2: Darstellung eines Tensors in **normale** und **funky** Koordinaten

1. Der Vektor existiert
2. Der Vektor hat eine gewisse Länge, und zwar aus jeder Perspektive.

Um dies zu erläutern benutzen wir zwei Koordinatensysteme $\{x^i\}$ und $\{y^j\}$. Zwischen diesen zwei Koordinatensysteme entsteht eine Beziehung, sodass man von $x \rightarrow y$ gehen kann und von $y \rightarrow x$ zurück. Das heißt, die Koordinaten x^i lassen sich durch y^j schreiben und umgekehrt⁷. Der Vektor ändert sich per die Kettenregel, wie sich die Koordinaten ändern:

$$\tilde{V}^a = \frac{\partial x^a}{\partial y^b} V^b \quad (1.3.1)$$

Gleichung (1.3.1) ist aber noch wichtiger, als sie erscheint, und zwar versteckt sich dahinter was ganz wichtiges:

Ist $V = 0$, so ist JEDE Transformation von V auch Null.

⁷Notation: Wir nennen die Koordinaten y , und die Darstellung von Objekten mit y betonen wir mit einem Twiddl~. So ist zum Beispiel \tilde{V}^a der Vektor in y Koordinaten

Das macht es ziemlich praktisch wenn man später eine Gleichung mit Tensoren aufstellt, bei der man ein Koordinatensystem finden kann, wo ein Stück davon zu Null wird. Dann kann man immer immer immer den Stück gleich Null setzen. Das ist auch was wir mit 1. meinen: Auch ein Vektor der Null ist existiert, aber falls er irgendwo Null ist, so ist es überall auch Null.

Ableitung

Die Ableitung eines Tensors ist i.A. *kein* Tensor! Man kann eine Ableitung, die doch wie ein Tensor transformiert definieren, aber das brauchen wir erst in der ART.

Bevor wir weitermachen wollen wir in der folgenden Arbeit mit Tensoren die Einsteinsche-Summenkonvention auf ihrer vollen Stärke anwenden, das heißt, wir werden ko- und kontravariante Vektoren einführen. Dafür fügen wir einen kleinen Einschub zu dieser neuen Notation hinzu.

Einschub 2. Summenkonvention

Dafür ergänzen wir ein kleines Thema der Einsteinschen Summenkonvention, worauf wir die letzten zwei Semestern wenig aufgepasst haben, und zwar wann man einen Index oben schreibt und wann unten. Man unterscheidet zwischen den beiden sobald man "kovariante" und "kontravariante" Vektoren hat. Diese unterscheiden sich anhand ihrer Transformationseigenschaften, welche im Abschnitt zu Tensoren 1.3 später erläutert werden.

Einige Vektoren werden ja als "kontravariante Vektoren" betrachtet, das heißt, ihre Komponenten haben oben einen Index^a. "Kovariante Vektoren" haben unten den Index. Man kann sich in der Matrixschreibweise vorstellen, dass kovariante Vektoren "transponiert" sind, und dass kontravariante Vektoren einfach aufrecht stehen. Es gibt natürlich wie immer ein bisschen mehr als nur das, aber das ist ein erster wichtiger Stützpunkt. So kann man zum Beispiel schreiben:

$$\mathbf{v} = v^i e_i = \underbrace{[e_1 \quad \dots \quad e_n]}_{\text{Pass auf!}} \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n \quad (1.3.2)$$

Hier gibt es aber einen wichtigen Unterschied zwischen v^i und e_i : v^i ist eine Zahl, es ist die i -te Komponente von \mathbf{v} , e_i ist allerdings ein Kovektor, das heißt da oben wo man aufpassen sollte steht kein transponierter Vektor, sondern eine Matrix, dessen Spalten die Komponenten der Basisvektoren darstellen würden.

Nun ist die Frage, wie interagieren Vektoren, Kovektoren, Matrizen, usw. miteinander? Beispielsweise war die Schreibweise $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ damals intuitiv, aber jetzt ist sie betrügerisch, weil wir wissen, dass man nicht eine $1 \times n$ mit einer anderen $1 \times n$ Matrix multiplizieren kann, also was machen wir? Letztendlich ist ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ nur eine Vereinfachung der allgemeineren Schreibweise und dient ihren Zweck um uns Schreibarbeit zu sparen, aber dahinter versteckt sich das echte Skalarprodukt:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{v} \quad (1.3.3)$$

Wir sollten also auf diese Transposition aufpassen, denn damit ist hoffentlich klarer wie dieser Business in der Indexschreibweise funktioniert^b:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_i w^i \quad (1.3.4)$$

Da wir einerseits einen transponierten Vektor (Kovektor) mit unteren Indizes und andererseits einen normalen Vektor (Kontravektor), können wir beide miteinander multiplizieren indem wir komponentenweise multiplizieren und dann alle miteinander addieren. So wechseln wir zum Beispiel auch die Schreibweise für Matrixmultiplikation zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \rightarrow u^i = A^i_j v^j \quad (1.3.5)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow C^i_k = A^i_j B^j_k \quad (1.3.6)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rightarrow A^i_j = u^i v_j \quad (1.3.7)$$

Im letzten Beispiel gab es keine gleichnamige umgekehrte Indizes, also haben wir keine Summation verwendet. Dieses Tensorprodukt wurde kurz in der Theo II Guide 0.1.2 im Einschub 3: Tensorprodukt erläutert. Hier dient es aber nur einen illustrativen Zweck.

Willkürlichkeit incoming:

Ok, also theoretisch funktioniert die formelle einsteinsche Summenkonvention nur dann, wenn du einen Index unten und einen Index oben hast. So ist zum Beispiel $v_i w^i$ gut, aber $v_i w_i$ nicht gut. Das ist, wenn du ganz strikt die Regeln interpretierst, weil es keinen wirklichen Sinn hat zwei Vektoren miteinander zu kombinieren. Streng genommen ergibt der Ausdruck " $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ " keinen Sinn, weil du nicht 2 $1 \times n$ Matrizen miteinander zu einer Zahl multiplizieren kannst. Aber letztendlich ist diese extra Konvention eine Entscheidung des Autors, der einen Text verfasst hat. Ob man alles mit unteren Indizes rechnet oder den ausführlichen Regeln folgt liegt am Individuum.

Zusammenfassend:

Umgekehrte Indizes sind Kumpeln und wollen miteinander was machen, gleich gestellte Indizes verstehen sich nicht so gut und bleiben lieber alleine.

^aSo wie Hebbie es immer gemacht hat :(

^bAngenommen eine orthogonale Basis

Punkt 2. werden wir behandeln, wenn wir einen Skalarprodukt einführen.

Kovariante Indizes

Wie im Einschub 2 eingeführt, haben wir jetzt mit kovarianten und kontravarianten Indizes zu tun. Die Art davon ist bestimmt durch ihre Transformationseigenschaften. Kovariante Vektoren *kovariieren* mit der Basis. Nun ist die Frage: Wie ändert sich die Basis? Sei eine Basis $\{e_i\}$ und eine andere $\{\tilde{e}_i\}$ gegeben⁸. Diese seien nun durch irgendeinen Operator A ⁹

⁸Riesen Dank an meinen Tutor Hannes, der jedes Tutorium was neues erklärt hat.

⁹ A ist ein Automorphismus, das heißt, es ist ein Endomorphismus und es ist zusätzlich bijektiv. Wir brauchen diese Bedingung, damit es invertierbar ist. Im Theo II Guide 0.1.2 haben wir eine ähnliche Bedingung gesetzt um die Koordinatentransformation zwischen zwei Koordinatensystemen zu untersuchen,

folgendermaßen verbunden:

$$\tilde{e}_j = e_k A^k_j \quad (1.3.8)$$

Als Basis legt man gerne die Vektoren, die tangential auf die Koordinatenlinien liegen. Das heißt, an einem Ort $\mathbf{x}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ sind die Basisvektoren (ortsabhängig) definiert durch

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \quad (1.3.9)$$

ist der Vektor \mathbf{x} allerdings durch eine Koordinatentransformation bestehend aus den Koordinaten $\{y^i\}$, so folgt für die Transformation per die Kettenregel:

$$\tilde{e}_j = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k} \quad (1.3.10)$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial y^j} e_k \quad (1.3.11)$$

$$= e_k J^k_j \quad (1.3.12)$$

mit der Jacobi-Matrix $J^k_j := \frac{\partial x^k}{\partial y^j}$ haben wir erfolgreich diese Transformation $A^k_j = J^k_j$ identifiziert.

Ein kovarianter Vektor transformiert dann genau wie sich diese Basis transformiert.

Kontravariante Indizes

Ein kontravarianter Vektor, oder besser gesagt, ein kontravarianter Komponent eines Vektors verhält sich umgekehrt zur Basis, und da wir bereits herausgefunden wie sich die Basis verändert, dann können wir sofort die Gleichung (1.3.1) wieder aufschreiben:

$$\tilde{V}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j} V^j \quad (1.3.13)$$

Darauf muss man aufpassen, dass der summierte Index unten steht, im Gegensatz zum kovarianten Komponent, wo dieser oben in der partiellen Ableitung war.

Zusammenfassung

Es wird oft verwirrend sein, wenn man über Vektoren redet, dass es oft nicht einheitliche Fachsprache gibt. Wir werden oft Objekte x^i einfach Vektoren nennen, aber die sind nur eine (kontravariante) Darstellung des Vektors. Es gibt aber auch eine kovariante Darstellung x_i , die zum selben Vektor gehört. Wie man zwischen diesen zwei springt werden wir im nächsten Abschnitt zum metrischen Tensor 1.3.3 behandeln. Folgendes sollte man bis dann *unbedingt* lernen und im Kopf behalten!¹⁰

Kovariante Komponenten:

$$\tilde{V}_j = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} V_k$$

damals war es allerdings ein "Diffeomorphismus".

¹⁰Ironisch wäre es, wenn ich jetzt die Ordnung der x 's und y 's vertauscht hätte.

Kontravariante Komponenten:

$$\tilde{V}^j = \frac{\partial y^k}{\partial x_j} V^k$$

Gemischte Komponenten:

$$\tilde{T}^j_k = \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial y^k} T^m_n \quad (1.3.14)$$

1.3.3 Metrischer Tensor**Metrik**

Wir haben schon einiges über Metriken gehört. Beispielsweise wissen wir, dass der Standard Skalarprodukt eine Metrik im Euklidischen Vektorraum darstellt. Was bedeutet aber, eine Metrik zu sein? Was macht den Skalarprodukt wichtig oder besonders?

Eine **Metrik** gibt dir den "Abstand" zwischen zwei Elementen in deinem Vektorraum. Wie man diesen Abstand zu definieren mag ist eine Sache des persönlichen Geschmacks, einige mögen Geraden und einige bevorzugen es vielleicht ein bisschen gekrummt. Hauptsache ist, dass deine Metrik folgendes erfüllt:

$$\text{I.} \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (1.3.15)$$

$$\text{II.} \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (1.3.16)$$

$$\text{III.} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (1.3.17) \quad \text{Abbildung 1.3: Vergleich zweier möglichen Metriken}$$

**Metrischer Tensor**

Wir erwarten dann, dass ein **metrischer Tensor** sich wie eine Metrik verhält, also wollen wir damit eine Notion von Abstand erhalten. Diese Notion von Abstand erläutern wir anhand eines kleinen Stückchen Vektors $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} \quad (1.3.18)$$

Wir wissen bereits, der Vektor $d\mathbf{r}$ stellt eine infinitesimale Verschiebung im Raum dar, aber wir wollen jetzt nicht unbedingt mit Vektoriellen Größen handeln, also nehmen wir lieber das Quadrat daraus und haben dann eine schöne skalare Größe¹¹:

$$(ds)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.3.19)$$

$$" = " \sum_{i=1}^3 dx^i dx^i \quad (1.3.20)$$

¹¹Im Folgenden verwenden wir $(dx)^2$ und dx^2 . Wann es das Quadrat ist und wann es sich auf den Index bezieht sollte klar vom Kontext sein. Wenn nicht dann halt Pech gehabt.

$$" = " \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.3.21)$$

Schön. Jetzt wollen wir ihn in Kugelkoordinaten haben:

$$(ds)^2 = dr^2 + d\theta^2 + d\varphi^2 \quad (1.3.22)$$



Oh. Oops ok, so, (1.3.21) funktioniert nicht so gut wenn wir für $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$ nehmen. Es wäre aber schön, dass es klappen würde. Wie lösen wir also das Problem: Naja, unser erster Versuch war zugegeben ein bisschen wischi waschi, da haben wir uns nicht viel Mühe gegeben. Es gibt ja Basiswechsel und solche Sachen über die wir gar nicht gesprochen haben, als wir die neuen Koordinaten eingeführt haben. Aber die Idee ist nicht verkehrt, nur funktioniert es leider nicht mit δ_{ij} , wir brauchen etwas, was die richtigen Termen in Ruhe lässt, und den falschen Terme ein bisschen Disziplin zeigt damit sie sich gut benehmen. Hier kommt der metrische Tensor ins Spiel und hilft uns die richtigen

Abbildung 1.4: Metrischer Tensor zeigt einem armen Opfer Disziplin

Wir versuchen also den Ansatz aus (1.3.21) mit dem sogenannten metrischen Tensor und schreiben:

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.3.23)$$

Nun ist die nächste sinnvolle Frage: Wie sieht g_{ij} aus? Einiges können wir schon vermuten, und zwar wahrscheinlich gibt es dort nur diagonale Elemente, weil wir sonst in (1.3.23) auch Kreuzterme kriegen¹². Wenn man dieser Definition vertraut und die entsprechenden Ausdrücke für die unterschiedlichen Koordinatensysteme kennt, kann man einfach vergleichen welcher Term an welchem Diagonaleintrag stehen sollte und das wärs. Aber wir wollen ihn herleiten. Dafür müssen wir wissen, wie der metrische Tensor aussieht. Aber nur einen. Wir brauchen quasi ein Maßstab, nach welchem wir allgemeine metrische Tensoren ausrechnen. Dafür eignet sich ja natürlich der metrische Tensor für kartesische Koordinaten. Da wissen wir, dass folgendes gilt:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (1.3.24)$$

$$(ds)^2 = [dx \quad dy \quad dz] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (1.3.25)$$

Hier gibt es nichts anderes zu machen als die Einheitsmatrix bzw. den Kronecker-Tensor in eine andere Basis zu transformieren, wir brauchen nur die relevanten Basiswechselmatrizen

¹²In einem orthogonalen Koordinatensystem gibt es diese nicht. Wir werden fast immer mit orthogonalen Koordinatensysteme rechnen

zu kennen. Wir wissen, per Definition, dass der metrische Tensor symmetrisch ist, das heißt wir finden:

$$\tilde{G} = J^T \cdot G \cdot J \quad (1.3.26)$$

$$(1.3.27)$$

Die Basiswechselmatrix ist hier absichtlich J benannt, sie ist nämlich die Jakobi-Matrix der Koordinatentransformation¹³. Easy peasy, lässt uns dann aus den kartesischen Koordinaten den metrischen Tensor für die Kugelkoordinaten herleiten¹⁴:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\varphi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\varphi z \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\varphi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\varphi z \end{bmatrix} \quad (1.3.28)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (1.3.29)$$

Das heißt, wenn wir den infinitesimalen quadratischen Abstand $(ds)^2$ in Kugelkoordinaten wollen, müssen wir es als

$$(ds)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.3.30)$$

Ok, ist aber jetzt kein Spaß, wenn wir quasi die Kugel- und Zylinderkoordinaten auswendig können. Unter dem nächsten Abschnitt: Koordinatenwechsel 1.4 werden wir dieses an ein uns bisher unbekanntes Koordinatensystem anwenden.

Beispiel 3. Übung: Indexschreibweise der Transformation

Es war ziemlich einfach $(ds)^2$ nach (1.3.23) zu schreiben, und noch einfacher wenn man annimmt, g_{ij} und dx^i stehen schon im gewünschten Koordinatensystem. Lasst uns aber dann mal explizit die Transformation auf das Koordinatensystem $\{y^i\}$ anschauen. Wir fangen mit folgendem Wissen an:

1. dx^i transformiert kontravariant, das heißt:

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j := (J^{-1})^i_j dx^j \quad (1.3.31)$$

$$(1.3.32)$$

2. g_{kl} transformiert kovariant, das heißt:

$$\tilde{g}_{kl} = \frac{\partial x^m}{\partial y^k} \frac{\partial x^n}{\partial y^l} g_{mn} := (J^T)_k^m g_{mn} J_l^n \quad (1.3.33)$$

$$(1.3.34)$$

Manchmal ist es nützlich dran zu denken, dass diese Transformationen durch die

¹³Mehr zur Jakobi-Matrix im Theo II guide Abschnitt 1.9.2 Differentialformen 0.1.2

¹⁴Beweis: Nachrechnen

Jakobi-Matrix darstellbar sind, aber in der Regel werden wir mit der anderen Schreibweise in Kontakt kommen, weshalb wir diese in diesem Projekt bevorzugen werden

Dann lasst uns mal losrechnen:

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.3.35)$$

$$= g_{ij} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}}_{dx^i dx^j} dy^k dy^l \quad (1.3.36)$$

$$= g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} dy^k dy^l \quad (1.3.37)$$

$$= g_{ij} J^i_k J^j_l dy^k dy^l \quad (1.3.38)$$

wir ordnen diese Terme kurz um:

$$= dy^k \underbrace{J^i_k g_{ij} J^j_l}_{\tilde{g}_{kl}} dy^l \quad (1.3.39)$$

und bedenken, dass hier $J^i_j = (J^T)_j^i$ gilt:

$$= dy^k \tilde{g}_{kl} dy^l \quad (1.3.40)$$

$$= (\widetilde{ds})^2 \quad (1.3.41)$$

Hebben und sinken von Indizes

Naja, wir haben jetzt zum ersten Mal in der Vorlesung ein bisschen auf die Position der Indizes achten müssen und haben den metrischen Tensor der Speziellen Relativitätstheorie gesehen. Mathematisch war es klar, weshalb dieser eine Tensor die Indizes willkürlich heben und sinken konnte. Wir haben quasi ein Laborhergestelltes Beispiel dafür verwendet und es hat funktioniert. Diese Tatsache stimmt aber auch für allgemeinere metrische Tensoren¹⁵. Wieso?

Nach der Einsteinschen Summenkonvention benötigen wir genauso viele freie Indizes auf der linken Seite als auf der rechten Seite. Also wenn wir uns (1.3.23) anschauen und keinen Index auf der linken Seite sehen, so sollen auch alle Indizes auf der rechten Seite miteinander kontrahiert werden.

¹⁵Und nicht nur für metrische Tensoren, sondern für allgemeine Tensoren von Rang 2, aber wir benutzen den metrischen Tensor, weil er sich besonders dafür eignet.

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.3.42)$$

Wir haben gerade den einen Teil zusätzlich betont, weil wir auf eine Sache aufmerksam machen möchten und zwar: Damit auf der linken Seite kein Index mehr steht, muss **lila** einen unteren Index j haben, damit es mit dx^j kontrahiert. Dafür definieren wir dass dieses Produkt "**lila**" folgendes bedeutet:

$$g_{ij} dx^i = dx_j \quad (1.3.43)$$

Mit dieser Definition können wir jetzt zum Beispiel schreiben:

$$(ds)^2 = dx_i dx^i \quad (1.3.44)$$

Diese Vorstellung ist sehr nützlich zur Verallgemeinerung des Skalarproduktes in der Indeschreibweise, zum Beispiel beim Skalarprodukt in der Bra-Ket Notation. Wir wissen, dass die kets die normalen Vektoren sind, und die bras sind dazu dual und (komplex) transponiert. Dies stimmt genau mit unserer Indeschreibweise überein, denn x_i dual zu x^i sind.

Aber jetzt haben wir eine radikale Definition eingeführt. Warum sollte dx_i komponentenweise nicht gleich dx^i sein? Weiß ich nicht, aber ich finde eine einfachere Frage zu beantworten ist: Warum sollten sie *doch* gleich sein? Das genau ist der Grund, weshalb wir ganz gut darauf achten müssen, ob wir jetzt x^i oder x_i schreiben, denn im Allgemeinen sind sie *nicht* gleich. War ganz schön im Euklidischen Raum, dann war die Metrik einfach δ_{ij} und die Komponenten x^i waren die selben wie die von x_i , aber wir sind jetzt erwachsen, der euklidische Raum ist ein Kinderspiel¹⁶.

Ich finde es ist ein bisschen betrügerisch, wenn wir von Heben und Sinken von Indizes reden, als ob es eine fast triviale Transformation wäre, als ob wir einen Vektor einfach umkippen und transponieren. Es ist aber *nicht* trivial oder selbstverständlich. Es ist eine bequeme Konvention aber man sollte sich schon ein paar Gedanken darüber gemacht haben.

1.4 Koordinatenwechsel

Wir haben bereits gelernt, wie sich Basisvektoren als Tensoren transformieren. Dies wollen wir zunutze machen, indem wir uns wieder anschauen, wie man von einem Koordinatensystem in ein anderes transformiert, unter Berücksichtigung nicht nur von den Basisvektoren, sondern allgemein. Dafür führen wir in erster Linie was neues ein, und zwar die allgemeinere Differentialrechnung.

1.4.1 Differentialrechnung in Tensorschreibweise

Ok, jetzt rechnen wir ein paar Sachen aus mit dieser leicht neuen Schreibweise, und zwar bei Ableitungen. Wir wissen bereits, man kann den Differentialoperator ∇ auf Vektoren

Ko \leftrightarrow Kontra

Man kann zwischen Ko- und Kontravarianten Vektoren eine eindeutige Beziehung definieren durch:

$$g_{ij} V^j \equiv V_i$$

und

$$g^{ij} V_j \equiv V^i$$

¹⁶Krummilnige Koordinaten sind unser neuer bester Freund

anwenden und in kartesischen Koordinaten ist das ziemlich entspannt, da muss man zum Beispiel beim Gradient nur

$$\nabla f = e_i \partial_i f \quad (1.4.1)$$

ausrechnen, wobei $\{e_i\}$ die Standardbasis darstellt und ∂_i die [Richtungsableitung](#) in e_i Richtung ist. Nehmen wir nun an, wir haben kein kartesisches Koordinatensystem, wie kann man dies dann einfacher schreiben? Naja, wir wissen zumindest schon wie sich die Basisvektoren transformieren, also sollte es nicht so schwierig sein.

[HEY:erg]

Gradient

$$\nabla \phi = g^{ij} \tilde{e}_i \partial_j \phi \quad (1.4.2)$$

Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} A^i) \quad (1.4.3)$$

Rotation

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{klm} \tilde{e}_k \partial_l (g_{mn} A^n) \quad (1.4.4)$$

1.4.2 Koordinatenwechsel

Dazu machen wir jetzt ein Beispiel: Wie sieht der Wechsel von 2 dimensionale kartesische Koordinaten auf "log-polare" Koordinaten aus?

Beispiel 4. Log-polare Koordinaten

Wir untersuchen im zwei dimensionalen Fall die log-polaren Koordinaten, diese werden definiert durch den logarithmischen Abstand zum Ursprung ρ und den Winkel θ . Es gilt:

$$r = e^\rho \implies \rho = \ln r \quad (1.4.5)$$

Alles andere machen wir analog zu den Polarkoordinaten. Also wenn wir von kartesischen Koordinaten auf Log-polare Koordinaten wechseln müssen wir folgende Transformationen durchführen:

$$x = e^\rho \cos \theta \quad (1.4.6)$$

$$y = e^\rho \sin \theta \quad (1.4.7)$$

Hier lenken wir uns ein bisschen vom metrischen Tensor ab, weil ich das ein cooles Koordinatensystem finde und das ausführlich ausrechnen will.

Basisvektoren

Wir rechnen die neuen Basisvektoren aus als:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \quad | \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} e^\rho \cos \theta \\ e^\rho \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.4.9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -e^\rho \sin \theta \\ e^\rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.4.10)$$

Achtung, dies ist eine *orthogonale* Basis, sie ist nicht *orthonormal*, weil wir da immernoch den e^ρ Faktor drinen haben, aber das ist gut, wir wollen ihn dort haben.

Jakobi-Matrix

Jetzt ist es sehr leicht die Jakobi-Matrix auszurechnen. Nicht überraschenderweise erhalten wir:

$$J = [\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}] \quad (1.4.11)$$

$$= e^\rho \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.12)$$

Metrischer Tensor

Wie wir bereits gesehen haben, lässt sich der metrische Tensor bezüglich dieser Basis ausrechnen als

$$\tilde{g}_{ij} = J_i^k \delta_{kl} J_j^l \quad (1.4.13)$$

$$= (e^\rho)^2 \delta_{ij} \quad (1.4.14)$$

Integrale

Für ein normales Integral über das 2-dimensionale Volumen lässt sich mittels dieses Koordinatensystems

$$\int_V dx dy f(x, y) = \quad (1.4.15)$$

Differentialoperatoren

[HEY:erg]

1.5 Vollständige Funktionensysteme

1.5.1 Motivation

Manche Funktionen sind ehrlich gesagt einfach wack. Wack zum Rechnen, wack zum Integrieren, wack für alles. Die tauchen leider oft in der Physik auf. Es wäre also schön, wie

zum Beispiel bei Taylor-Reihen, wenn wir diese wacke Funktionen durch andere Funktionen, schönere Funktionen darstellen könnten. Mathematisch formuliert, suchen wir eine Menge¹⁷ von Funktionen, sodass

$$F_n(x) = \sum_n^N a_n f_n(x) \quad (1.5.1)$$

gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert. Dies fordern wir nur vom quadratischen Mittel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - F_n(x)|^2 dx = 0. \quad (1.5.2)$$

Dabei deutet das Integrationsintervall darauf hin, dass es nicht unbedingt eine Konvergenz für jeden x gewünscht ist, sondern mit einem spezifischen Intervall genügt. Falls ein Funktionensystem diese Eigenschaft erfüllt, so nennen wir ihn vollständig.

1.5.2 Vollständige Funktionensysteme

Orthonormalität

Eine der Eigenschaften bei solchen Systemen ist die der Orthogonalität bzw. Orthonormalität. Wir wollen untersuchen, ob zwei Funktionen dieses Systems "senkrecht" zueinander stehen, indem wir dafür ein Skalarprodukt definieren. Dies haben wir indirekt schon durch unsere Konvergenzforderung gemacht. Nämlich definieren wir dieses Skalarprodukt zwischen zwei Funktionen als

$$\langle g, f \rangle = \int_a^b g^*(x) f(x) dx \quad (1.5.3)$$

Also ist die Bedingung für den Konvergenzradius

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f - F_N, f - F_N \rangle = 0. \quad (1.5.4)$$

Auf diese Funktionen f_n stellt man hier zusätzlich die Bedingung, dass sie jeweils nach diesem Skalarprodukt zueinander orthogonal sind, das heißt, dass

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \quad (1.5.5)$$

Diese sind zueinander *orthonormal*, falls gilt

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1.5.6)$$

Eine solche Menge von Funktionen, eine Basis kann man zum Beispiel durch das Gram-Schmidt Verfahren der Linearen Algebra 0.1.2 finden. Diese ganze Konstruktion ist allgemein analog zur Zerlegung von Vektoren in Vektorräumen in eine Linearkombination aus der Basis, nur haben wir hier halt (oft) eine unendlich-dimensionale Basis. Wie in der linearen Algebra auch, lassen sich die Koeffizienten a_n bestimmen als

$$a_n = \langle f_n, f \rangle. \quad (1.5.7)$$

¹⁷Kann wohl sogar unendlich sein

Einschub 3. Gram-Schmidt Verfahren

Zur Aufstellung einer orthonormalen Basis lässt sich das Gram-Schmidt Verfahren leicht anwenden. Es hat den Vorteil, dass die Rechnungen selbst alle sehr elementar sind^a, aber in der Praxis ist es sehr unumständlich, denn die zu berechnenden Ausdrücke immer länger werden und die Rechnung wird einfach chaotisch.

1. Wir brauchen ein erstes Basis-Element. Im Prinzip sind wir frei ihn auszuwählen. Lasst uns mal ihn u_1 nennen. Lasst uns schon mal ganz viele u_i aussuchen, sodass wir überhaupt eine Basis für unseren Funktionen-Vektorraum haben: $\{u_i, \dots, u_n\}$.
2. Aus dieser Basis wollen wir eine orthogonale Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ bilden. Dafür nehmen wir u_2 und ziehen den Teil ab, der in Richtung u_1 zeigt. Hier gilt offensichtlich:

$$v_1 = u_1 \quad (1.5.8)$$

und

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|} v_1 \quad (1.5.9)$$

Analog führt man diese Methode für die nächsten Elementen und kommt auf

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|} v_i \quad (1.5.10)$$

3. Diese Basis normiert man zu einer orthonormalen Basis $\{w_1, \dots, w_n\}$ mit

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad (1.5.11)$$

^aEs sei denn das Skalarprodukt ist ein unschönes Integral

Funktionensysteme

Obwohl es uns noch nicht bewusst war, haben wir schon lange mit Funktionensystemen gearbeitet. Diese waren vielleicht ein bisschen anders, zum Beispiel bei Taylor-Reihen, die (in einem bestimmten Intervall) gegen eine darzustellende Funktion konvergieren. Dabei mögen die einzelnen Funktionen nicht orthonormal zueinander gewesen sein, aber dies haben wir damals auch nicht gefordert. Andererseits sind auch Fourier-Reihen Beispiele für solche vollständige Funktionensysteme.

1.5.3 Legendre-Polynome

Ein wichtiges Beispiel, was wir oft in Übungen gesehen haben sind die Legendre-Polynome. Diese Legendre-Polynome sind eine natürliche Überlegung wenn man erst anfängt, solche Funktionensysteme zu bilden. Die Gliedern der ursprünglichen Basis sind einfach die

natürlichen Exponenten von x . Es gilt also:

$$u_i = x^i \quad x \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N} \quad (1.5.12)$$

Wir definieren außerdem das Skalarprodukt:

$$\langle g, f \rangle = \int_{-1}^1 g(x)f(x) dx \quad (1.5.13)$$

und rechnen los¹⁸:

$$v_0 = 1 \quad ||1|| = 2 \quad (1.5.14)$$

$$v_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{2} \cdot 1 \quad (1.5.15)$$

$$= x \quad ||x|| = \frac{2}{3} \quad (1.5.16)$$

$$v_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{2} \cdot 1 - \frac{3 \langle x^2, x \rangle}{2} \cdot x \quad (1.5.17)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} \quad (1.5.18)$$

$$v_3 = \dots = x^3 - \frac{3}{5}x \quad (1.5.19)$$

Hier haben wir auf die Normierung nach dem Gram-Schmidt Verfahren verzichtet, weil die Legendre-Polynome mit einer anderen Normierung schöner sind. Nämlich wollen wir von diesen fordern, dass sie an der Stelle $w_i(1) \stackrel{!}{=} 1$ sind. Das heißt, wir müssen Vorfaktoren finden, sodass

$$1 \stackrel{!}{=} a_n v_i(1) \quad (1.5.20)$$

Schauen wir also kurz nach:

$$v_0 : \quad 1 = a_0 \cdot 1 \quad | a_0 = 1 \quad (1.5.21)$$

$$v_1 : \quad 1 = a_1 \cdot 1 \quad | a_1 = 1 \quad (1.5.22)$$

$$v_2 : \quad 1 = a_2 \cdot \left(1^2 - \frac{1}{3}\right) \quad | a_2 = \frac{3}{2} \quad (1.5.23)$$

$$v_3 : \quad 1 = a_3 \cdot \left(1^3 - \frac{3}{5}\right) \quad | a_3 = \frac{5}{2} \quad (1.5.24)$$

¹⁸Für die Legendre-Polynome ist Normierung in diesem Fall nicht relevant, wir begnügen uns mit einem orthogonalen System

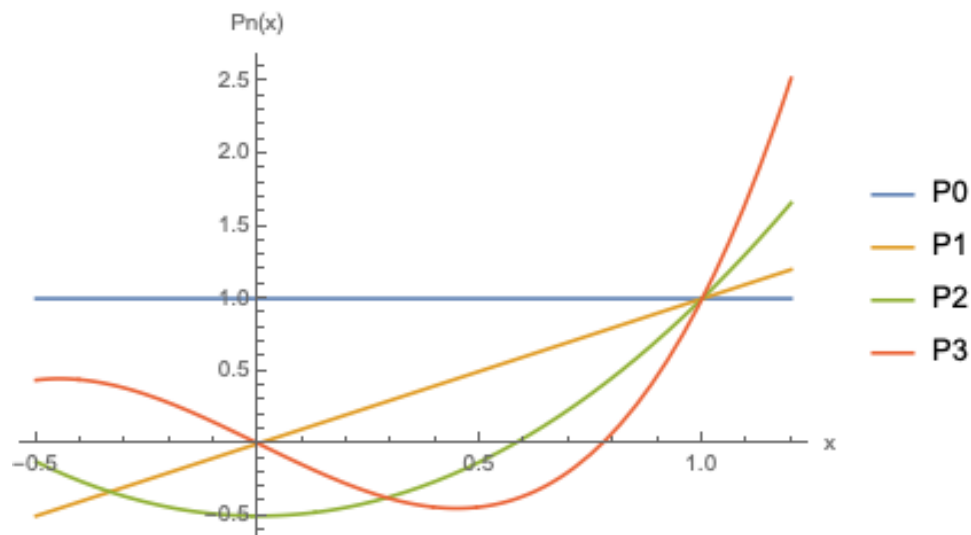


Abbildung 1.5: Einige Legendre-Polynome

Bemerkung: Dadurch, dass wir eine besondere Normierung gewählt haben, müssen wir bei den Koeffizienten a_n bei der Entwicklung einer Funktion aufpassen, dass wir diese Normierung mitberücksichtigen:

$$a_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad (1.5.25)$$

Diesen Faktor $\langle P_n, P_n \rangle$ kann man sogar vereinfachen auf:

$$\langle P_k, P_j \rangle = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj} \quad (1.5.26)$$

und daher

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle \quad (1.5.27)$$

Automatisierung des Verfahrens

Ok also, Gram-Schmidt + gewünschte Normierung ist echt anstrengend. Die Legendre-Polynome lassen sich auf viieeele verschiedene Weisen darstellen. Bereits bekannt ist für uns Rodrigues' Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (1.5.28)$$

Die kann man aber auch darstellen als Differentialgleichung

Erste Polynome

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (1.5.29)$$

oder durch eine "erzeugende Funktion"

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xx'+x'^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (1.5.30)$$

Die sind also ganz flexibel¹⁹ und jede dieser Formeln deutet auf eine wichtige Eigenschaft von diesen hin. Für uns sind tatsächlich alle diese Darstellungen relevant. Während der Nachbearbeitung werden wir mit allen arbeiten, mal gucken ob du alle finden kannst.

Relevanz

Wie bereits besprochen sind die Legendre-Polynome eine sehr natürliche Konstruktion, das macht sie dann natürlich bequem zu arbeiten. Wir haben aber schon andere Funktionensysteme gelernt, wie zum Beispiel Fourier-Reihen und Taylor-Entwicklung. Was macht es jetzt attraktiv uns die Legendre-Entwicklung anzuschauen?

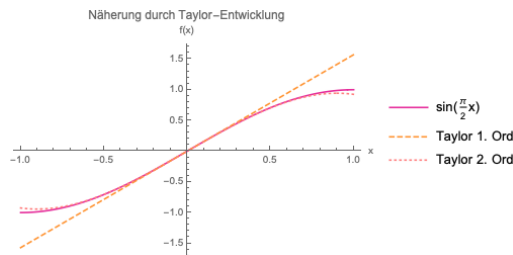


Abbildung 1.6: Taylor-Näherung von $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Also zum Beispiel können sie eine Funktion besser annähern. Vergleichen wir wieder die Funktion $\sin\frac{\pi}{2}x$, dieses Mal bis zur 2. Ordnung entwickelt durch die Legendre-Polynome:

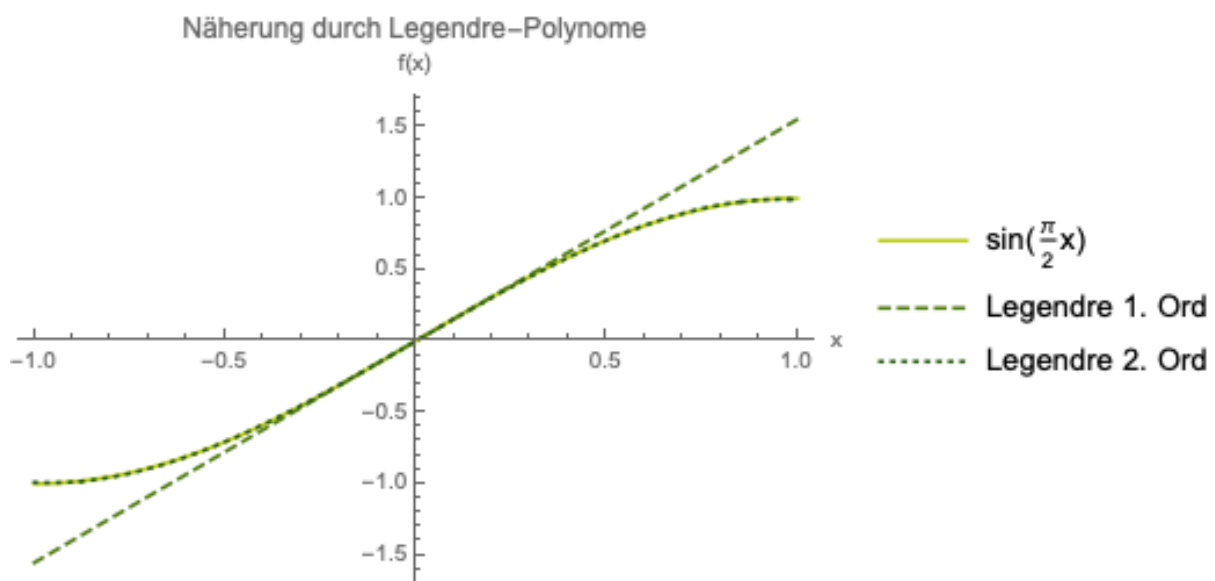


Abbildung 1.7: Näherung durch Legendre-Polynome

Uff, zumindest in diesem Intervall scheint die Legendre-Entwicklung 2. Ordnung deutlich die Taylor-Entwicklung zu besiegen. Wir haben aber nicht die ganze Geschichte erzählt, und zwar wenn wir die Funktion durch Legendre ausdrücken, dann wird's auf einmal wirklich hässlich.

$$\text{Taylor:} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \approx \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^3}{48}x^3 \quad (1.5.31)$$

¹⁹Es gibt sogar eine Integralform

Legendre:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \approx \left(\frac{-240}{\pi^2} + \frac{2520}{\pi^4}\right)x + \left(\frac{420}{\pi^2} - \frac{4200}{\pi^4}\right)x^3 \quad (1.5.32)$$

Legendre ist also manchmal ein bisschen wie das schlecht-aussehende Geschwister von Taylor, das alles besser als das andere kann, aber trotzdem immer unter dem Schatten des hübschen Taylors steht. Dadurch entwickelt es ein Inferioritätskomplex und spürt ein wachsendes Groll gegenüber Taylor bis sie als Erwachsene in einen intensen und emotiven Wortstreit kommen und kathartisch alle unterdrückte Gefühle rauslassen und sich weinend umarmend verzeihen.

Legendre ist aber besonders gut, wenn Taylor scheitert. Entwickle mit Taylor zum Beispiel folgende Funktion um die Stelle $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (1.5.33)$$

Ja, schwierig.

Dagegen kommt Legendre und sagt: $f(x)$ ist ja quadratintegabel, lasst uns sie entwickeln. Achtung, es wird nicht einfach sein, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist nicht so schön zum Integrieren, Gott sei Dank haben wir Maschinen, die das für uns machen²⁰.

Beispiel 5. Entwicklung einer Funktion mit Legendre-Polynomen

Wir beginnen mit der Berechnung der Koeffizienten nach (1.5.25):

$$a_0 = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 1 \, dx \approx 0,08907 \quad (1.5.34)$$

$$a_1 = 0 \quad (1.5.35)$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \, dx \approx 0,25165 \quad (1.5.36)$$

$$a_4 \approx 0,06710 \quad (1.5.37)$$

$$a_6 \approx -0,04776 \quad (1.5.38)$$

Nun sind uns die Legendre-Polynome schon bekannt, das heißt, wir können $f(x)$ bis zur gewünschten Ordnung entwickeln als:

$$f(x) \approx a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x) + a_4 P_4(x) + a_6 P_6(x) \quad (1.5.39)$$

$$\begin{aligned} &= 0.0890739 + 0.125822(-1 + 3x^2) + 0.00838767(3 - 30x^2 + 35x^4) \\ &\quad - 0.00298486(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6) \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

und hiermit können wir schön unsere gewünschte Funktion entwickeln:

²⁰Es ist auch sehr leicht eine Funktion auf Python oder Mathematica zu definieren, die dir automatisch die Koeffizienten gibt, probiere es selber nächstes mal, dass du etwas repetitives ausrechnen musst.

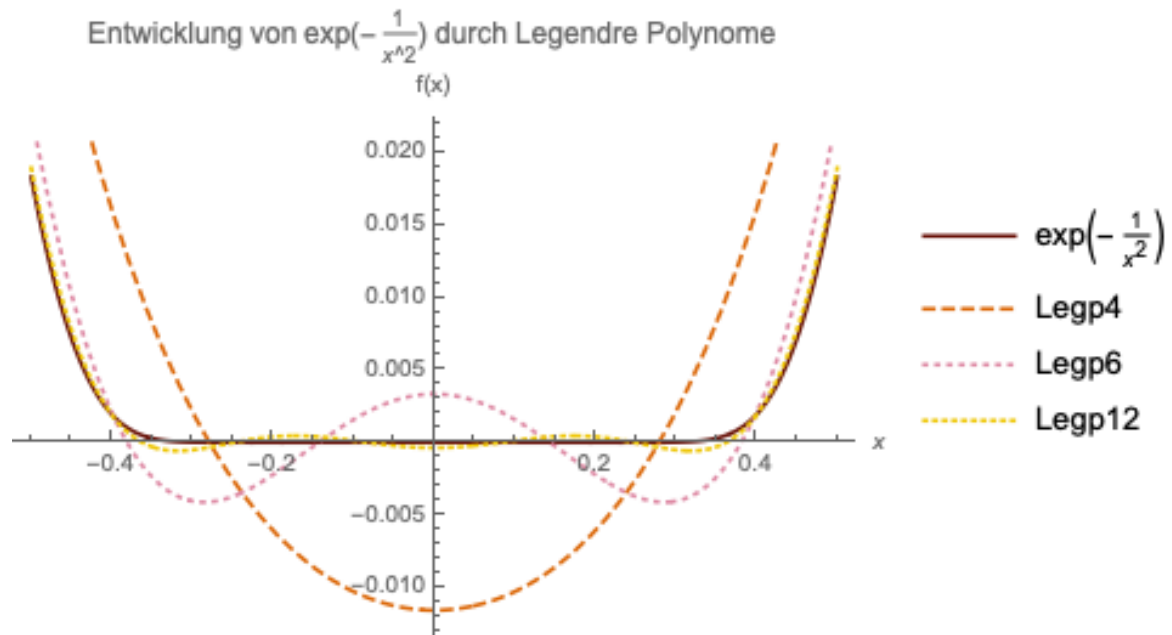


Abbildung 1.8: Entwicklung von $e^{-\frac{1}{x^2}}$ durch Legendre Polynome

Diese Arbeit wurde von Mathematica™ gesponsort:



1.5.4 Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen. Funktionen auf der Fläche von Kugeln. Warum möchten wir Funktionen auf den Flächen von Kugeln haben. Was macht Kugeln so besonders und warum interessieren wir uns für ihre Fläche. Magnete, wie funktionieren sie²¹? "Spherical harmonics" heißt es auf Englisch²². Jede Funktion, die auf der Oberfläche einer Kugel lebt, kann als Summe von diesen Kugelflächenfunktionen dargestellt werden. Hmmm, Summe aus Funktionen = Funktion. Das sollte uns an diese sogenannte vollständige Funktionensysteme²³ erinnern. Und tatsächlich bilden Kugelflächenfunktionen ein besonderes orthogonales vollständiges Funktionensystem. Dies ist nicht all zu unterschiedlich zur Entwicklung periodischer Funktionen als eine Summe von "Kreis-Rand" Funktionen. Mit "Kreis-Rand" Funktionen meine ich natürlich Funktionen, die auf dem Rand eines Kreises leben, auch bekannt als Sinus und Cosinus. Wie wir bereits wissen, hat die Entwicklung von Funktionen als andere, schönere Arten von Funktionen ganz viele Vorteile, wenn es zum Beispiel um Integration, Differentiation, usw. geht. Wir werden uns also im nächsten

²¹Magnets

²²baller Name

²³Ah was ein Zufall, wir befinden uns gerade in dem Abschnitt

Abschnitt damit befassen, diese herzuleiten²⁴.

What did JJ do?

Motivtaion

Schauen wir uns die Laplace-Gleichung nochmal an:

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.5.41)$$

Schauen wir uns insbesondere diese Gleichung in Kugelkoordinaten an:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi \quad (1.5.42)$$

$$:= \Delta_r\phi + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\phi \quad (1.5.43)$$

Hier haben wir den Laplace-Operator in seinen radialen Anteil Δ_r und einen Anteil auf der Einheitssphäre Δ_Ω . Wenn wir eins gelernt haben, bzw. noch nicht gelernt haben, ist dass partielle Differentialgleichungen a pain in the ass sind zum Lösen. Uns bleibt an dieser Stelle nichts übrig als ein verzweifelter Versuch, etwas auf die Gleichung zu werfen und dass es dran klebt.

Ansatz

Deswegen überlegen wir uns, dass es sehr schön wäre die obige Gleichung irgendwie separieren zu können durch einen Ansatz der Art:

$$\phi(\mathbf{x}(r, \theta, \varphi)) = R(r)S(\theta)T(\varphi) \quad (1.5.44)$$

Nun nach einigen Nächten harter Arbeit und Einsamkeit stellen wir fest, wir waren zu gierig und brauchen doch einen allgemeineren Ansatz:

$$\phi(\mathbf{x}(r, \theta, \varphi)) = R(r)Y(\theta, \varphi) \quad (1.5.45)$$

So reduziert sich unsere Gleichung auf das Folgende:

$$\Delta\phi \stackrel{!}{=} 0 = \Delta_r R(r)Y(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega R(r)Y(\theta, \varphi) \quad (1.5.46)$$

$$\Delta_r RY = -\frac{1}{r^2}\Delta_\Omega RY \quad | \cdot r^2 \quad (1.5.47)$$

$$r^2 Y \Delta_r R = -R \Delta_\Omega Y \quad | \cdot (RY)^{-1} \quad (1.5.48)$$

$$\frac{r^2 \Delta_r R}{R} = -\frac{\Delta_\Omega Y}{Y} \quad (1.5.49)$$

Damit die obige Gleichung für alle Werte von \mathbf{x} gilt, müssen die beiden Ausdrücke konstant sein, und insbesondere gleich mit umgekehrten Vorzeichen. Daraus folgt:

$$r^2 \Delta_r R = CR \quad (1.5.50)$$

$$\Delta_\Omega Y = -CY \quad (1.5.51)$$

²⁴Oh Gott

Rechnung

Damit haben wir effektiv unsere PDE auf zwei verschiedene Eigenwertprobleme reduziert. Lasst uns zuerst den radialen Teil (1.5.50) lösen:

$$r^2 \Delta_r R(r) = CR \quad (1.5.52)$$

$$r^2 \frac{1}{r} \partial_r^2 (rR) = CR \quad | u = rR \quad (1.5.53)$$

$$r \partial_r^2 u = C \frac{u}{r} \quad (1.5.54)$$

$$r^2 \partial_r^2 u = Cu \quad | \text{Ansatz: } u \propto r^\lambda \quad (1.5.55)$$

$$r^2 \cdot \lambda(\lambda - 1) r^{\lambda-2} = Cr^\lambda \quad (1.5.56)$$

$$0 = (\lambda^2 - \lambda - C) r^\lambda \quad | r \neq 0 \quad (1.5.57)$$

$$0 = \lambda^2 - \lambda - C \quad (1.5.58)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + C} \quad (1.5.59)$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4C} \quad (1.5.60)$$

$$u = r^\lambda \quad (1.5.61)$$

Aus Konvention definieren wir die Lösung der Differentialgleichung $u = r^{l+1}$ zu sein. Das heißt, wir setzen:

$$r^\lambda = r^{\frac{1 \pm \sqrt{1+4C}}{2}} \stackrel{!}{=} r^{l+1} \quad (1.5.62)$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+4C}}{2} = l+1 \quad (1.5.63)$$

$$\pm \sqrt{1+4C} = 2 \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad (1.5.64)$$

$$1 + 4C = 4 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (1.5.65)$$

$$4C = 4 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \quad (1.5.66)$$

$$C = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \quad (1.5.67)$$

$$C = l^2 + l = l(l+1) \quad (1.5.68)$$

Daraus folgt für unser Eigenwertproblem:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} = l(l+1)u \quad (1.5.69)$$

$$\Delta_\Omega Y = -l(l+1)Y \quad (1.5.70)$$

noch ist l eine beliebige reelle Zahl, Einschränkungen folgen später.

Da unsere Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so erwarten wir auch zwei linear unabhängige Lösungen dazu. Wir haben schon eine gefunden der Form r^{l+1} , wir können

auch gerne annehmen, dass die zweite Lösung ebenfalls eine Potenzfunktion ist: r^n . Easy peasy. Wenn wir mit diesem Ansatz weitermachen, so erhalten wir:

$$C = (n - 1)n \quad | \quad C = l(l + 1) \quad (1.5.71)$$

$$\rightarrow l(l + 1) = (n - 1)n \quad (1.5.72)$$

Hier gibt es nämlich zwei Lösungen:

$$n = -l \vee n = l + 1 \quad (1.5.73)$$

Daraus folgern wir, dass die gesuchte Funktion R von der Form

$$R_l = \frac{u}{r} = R_{1l} \frac{r^{l+1}}{r} + R_{2l} \frac{r^{-l}}{r} \quad (1.5.74)$$

$$= R_{1l} r^l + R_{2l} r^{-l-1} \quad (1.5.75)$$

ist.

[Kurze Atempause]

Machen wir weiter mit der anderen Seite: $Y(\theta, \varphi)$.

$$\Delta_\Omega Y = -CY \quad (1.5.76)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y_l) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y_l = -l(l + 1) Y_l \quad (1.5.77)$$

Wir versuchen nochmal einen Separationsansatz und nehmen an, dass $Y(\theta, \varphi)$ als Produkt zweier Funktionen $P(\cos \theta)$ und $Q(\varphi)$ dargestellt sein kann. Das wir über $\cos \theta$ statt θ reden ist eine bequeme Konvention. Dafür schreiben wir zuerst:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} [\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta (PQ)) + \partial_\varphi^2 (PQ)] = -l(l + 1) PQ \quad (1.5.78)$$

Zur Übersichtlichkeit betrachten wir die θ und φ Terme unabhängig von einander:

$$\frac{Q}{\sin^2 \theta} [\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta P(\cos \theta))] = \frac{Q}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \partial_\theta \underbrace{(-\sin^2 \theta P'(\cos \theta))}_{\text{Produktregel}} \right] \quad (1.5.79)$$

$$= \frac{Q}{\sin^2 \theta} [\sin \theta (-2 \sin \theta \cos \theta P'(\cos \theta) + \sin^2 \theta \sin \theta P''(\cos \theta))] \quad (1.5.80)$$

$$= Q [-2 \cos \theta P'(\cos \theta) + \sin^2 \theta P''(\cos \theta)] \quad | \quad y = \cos \theta \quad (1.5.81)$$

$$= Q [-2y P'(y) + (1 - y^2) P''(y)] \quad (1.5.82)$$

Jetzt auch den φ -Term:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Q(\varphi) = \text{bleibt so lol} \quad (1.5.83)$$

Zusammenfassend ergibt alles^a:

$$Q[-2yP'(y) + (1 - y^2)P''(y)] + \frac{P(Y)}{1 - y^2} Q''(\varphi) = 0 \quad (1.5.84)$$

$$\underbrace{\frac{1 - y^2}{P} [(1 - y^2)P''(y) - 2yP'(y)]}_{m^2} = - \underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{-m^2} \quad (1.5.85)$$

Hier gilt genau dieselbe Begründung aus (1.5.49), wir fügen also diese eine neue Konstante m^2 und lösen beide Gleichungen unabhängig voneinander:

$$Q'' = -m^2 Q \quad (1.5.86)$$

$$\rightarrow Q = e^{im\varphi} \quad (1.5.87)$$

Für P müssen wir eine etwas schwierigere Differentialgleichung lösen. Aus (1.5.85) ist uns bekannt:

$$(1 - y^2) [(1 - y^2)P'' - 2yP'] = m^2 P \quad (1.5.88)$$

Und dies vereinfachen wir mit folgender Äquivalenz: (Beweis ausrechnen)

$$\frac{d}{dy} \left((1 - y^2) \frac{d}{dy} P \right) = (1 - y^2) [(1 - y^2)P'' - 2yP'] \quad (1.5.89)$$

Also folgt daraus:

$$\frac{d}{dy} \left((1 - y^2) \frac{d}{dy} P \right) = \frac{m^2 P}{1 - y^2} \quad (1.5.90)$$

Dies setzen wir wieder zusammen mit unserem ursprünglichen Eigenwertproblem. In diesem letzten Schritt betonen wir auch die Abhängigkeit von P von den Konstanten l, m

$$\frac{d}{dy} \left((1 - y^2) \frac{d}{dy} P_m^l \right) - \frac{m^2 P_m^l}{1 - y^2} = -l(l + 1) P_m^l \quad (1.5.91)$$

Diese ist die sogenannte "allgemeine Legendregleichung", und die damit assoziierten Funktionen P_m^l sind die zugeordneten Legendre-Polynome. Bevor wir dazu kommen schauen wir uns den Spezialfall $m = 0$ an:

$$\frac{d}{dy} \left((1 - y^2) \frac{d}{dy} P_0^l \right) = -l(l + 1) P_0^l \quad (1.5.92)$$

Dies ist (nach einer Rückumformung äquivalent zu der aus Schritt (1.5.89)) genau die Differentialgleichung zur Bildung der "normalen" Legendre-Polynome, die wir kurz in (1.5.29) erwähnt haben! Dazu kennen wir nämlich schon die Lösung!

$$P_0^l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dy^l} (y^2 - 1)^l \quad (1.5.93)$$

Ok haha, ich habe jetzt geschummelt. Das gebe ich zu. Wir hatten uns damals nur angeschaut, dass es eine Differentialgleichung für die Legendre-Polynome gibt, aber natürlich haben wir dies nicht bewiesen, dass dies stimmt. Tun wir jetzt auch nicht^b. Die allgemeine Lösung mit dem Fall $m \neq 0$ dagegen, lösen wir auch nicht. Das ist schon genug Rechnung für heute.

Ergebnis

Das Ergebnis lautet:

$$P_m^l(y) = (-1)^m \sqrt{1-y^2}^m \frac{d^m}{dy^m} P_l(y) \quad (1.5.94)$$

$$= (-1)^m \sqrt{1-y^2}^m \frac{d^m}{dy^m} \left(\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dy^l} (y^2 - 1)^l \right) \quad (1.5.95)$$

Einige Eigenschaften von diesen Funktionen haben wir bereits in Hausaufgaben bewiesen, zum Beispiel verschwindet hier die ganze Party für alle $m > l$, und l darf nur ganzzahlige Werte annehmen, damit der Ausdruck überlebt.

Außerdem gelte:

$$P_{l,-m}(y) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_m^l(y) \quad (1.5.96)$$

^aNach meinen Notizen sollte hier auf der rechten Seite nicht 0, sondern $-l(l+1)PQ$ stehen, wo der Fehler bzw. die Begründung liegt gucke ich später nach

^bIn der Vorlesung wurde der Ansatz mithilfe der Reihenentwicklung der Polynome ausgeführt.

Kugelflächenfunktionen

Wir haben bereits die Ausdrücke für die zugeordneten Legendre-Polynome und die anderen Komponenten der Kugelflächenfunktionen hergeleitet. Nun bleibt uns eine Forderung übrig: Wir wollen, dass die Kugelflächenfunktionen ein *orthonormales* Funktionensystem bilden. Das heißt, wir nehmen unser Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int f^* g \, d\Omega \quad (1.5.97)$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \, f^* g \quad (1.5.98)$$

Hier integrieren wir über die Einheitssphäre. Damit die Kugelflächenfunktionen orthonormal zueinander sind, muss für zwei Funktionen Y_{lm} und $Y_{l'm'}$ gelten:

Erste Kugelflächenfunktionen

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{1-1} = -Y_{11}^*$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} (3 \cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta \cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2\theta e^{i2\varphi}$$

$$\int Y^*(\cos\theta, \varphi) Y(\cos\theta, \varphi) \, d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.5.99)$$

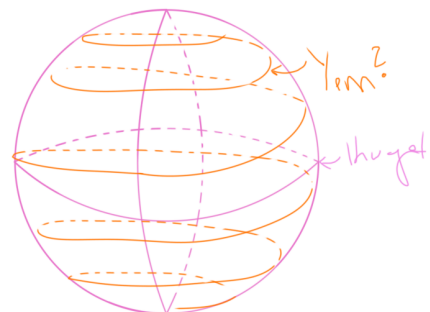
Mit dem zugehörigen Normierungsfaktor heißt es also:

$$Y_{lm}(\cos\vartheta, \varphi) = N_{lm} P_m^l(\cos\theta) Q(\varphi) \quad (1.5.100)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_m^l(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (1.5.101)$$

Nachdem wir diese Ausdrücke hergeleitet haben, können wir sogar erkennen, woher diese Terme überhaupt kommen. Und das sind die Kugelflächenfunktionen. Jetzt fragst du dich vielleicht: was sind Kugelflächenfunktionen? Tja. Gute Frage.

Damit meinen wir, was kann man sich unter einer Kugelflächenfunktion vorstellen? Wir hatten ja gesagt, die "leben" auf der Oberfläche einer Kugel. War vielleicht eine schlechte Wortwahl^a. Es ist nicht, als ob wir einfach eine Linie auf die Fläche einer Kugel auftragen würden und sie als Kugelflächenfunktion bezeichnen können. Diese sind leider ein bisschen schwieriger sich vorzustellen. Als erstes ist es schwierig, weil sie zum Teil auch imaginär sind.



^aAusrede: ich spreche kein Deutsch

Abbildung 1.10: Naiver Versuch

Das heißt, sie haben einerseits zwei Eingangsparametern θ, φ und auch gleichzeitig zwei Ausgangswerte, reell und imaginär, weshalb wir sie in unserem 3 dimensionalen Kopf sehr schwer darstellen können, dazu werden oft Farben für die Phase usw. benutzt, aber ganz

ehrlich, das ist trotzdem nicht so hilfreich. Nicht desto trotz werden wir versuchen das ein bisschen bildlicher zu machen:

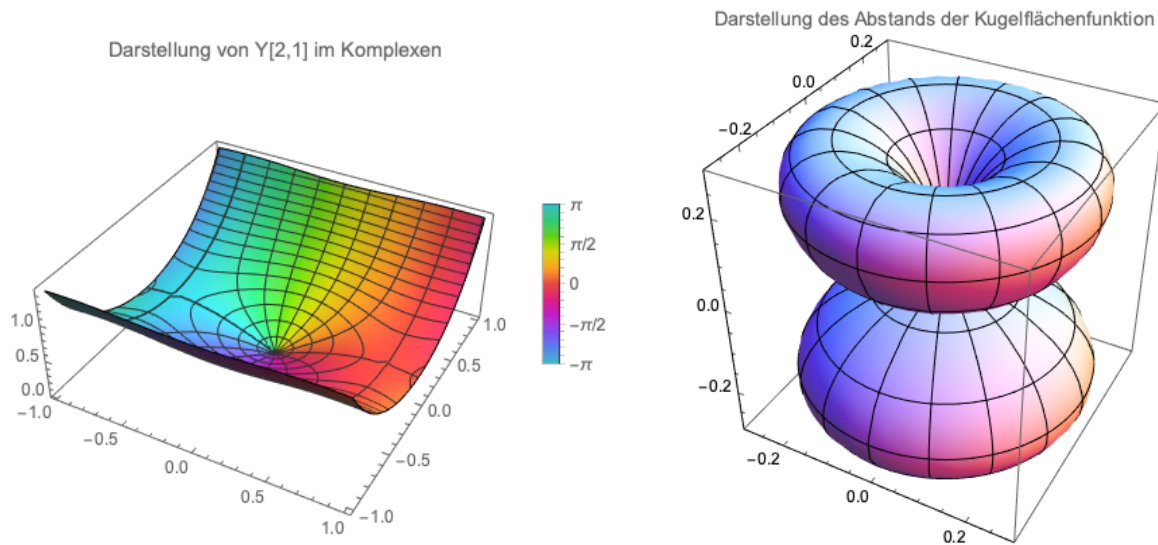


Abbildung 1.11: Darstellung mit bunten Far- Abbildung 1.12: Darstellung mit thicc curves
ben

Hier sehe ich persönlich keine Kugel.

Ok jetzt reden wir in klareren Termen, das sieht ein bisschen balliger aus.

Lasst uns dann mal in der cooleren Darstellung ein paar andere Kugelflächenfunktionen anschauen. Auf diesen Bildern wird jeweils der Betrag der Kugelflächenfunktion in θ und ϕ Richtung aufgetragen²⁵.

²⁵who am I kidding, ich weiß selber nicht was die Bilder bedeuten, die sehen aber hübsch aus

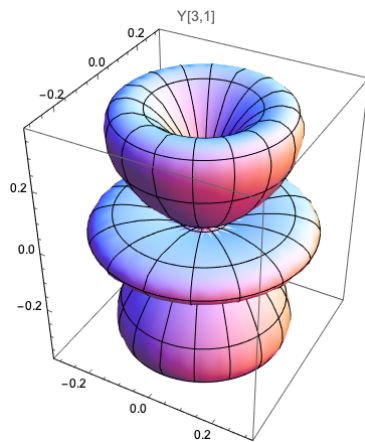


Abbildung 1.13: Selbes Spiel
für $Y_{3,1}$

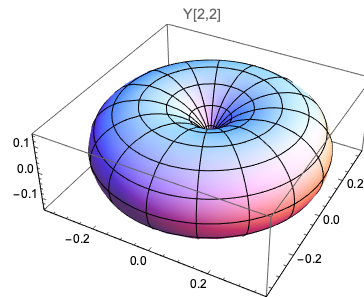


Abbildung 1.14: $Y_{3,2}$

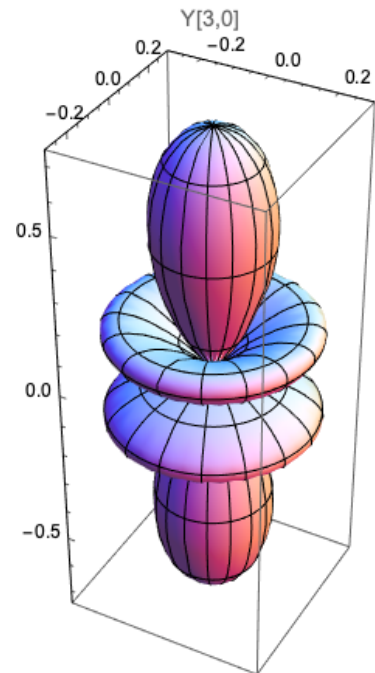


Abbildung 1.15: $Y_{3,0}$

Spoiler Alert, aber das sieht ein bisschen aus wie einige der Orbitalen des Wasserstoffatoms o.o. Heißt das, dass wir uns noch viel mehr mit Kugelflächenfunktionen beschäftigen??

2. Physik

2.1 Einführung

2.1.1 Warum Elektrodynamik cool ist

Als grundlegende Gleichung haben wir das [Wirkungsfunktional](#) S einer Funktion A eingeführt:

$$S[A] = \int d^4x \left[\frac{-1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right] \quad (2.1.1)$$

Die Aussage war, dass man aus dieser "einfachen" Gleichung die gesamten Maxwellschen Gleichungen herzuleiten sind. Obwohl wir hier so früh nicht viel spoilern möchten, werden wir zumindest erläutern was es ist, was wir gerade sehen.

Diese Funktion, die wir in das Wirkungsfunktional eingeben ist das elektromagnetische Potential. Es ist ein Vierervektor welches als erstes das elektrische Potential ϕ und als zweites (drittes und viertes) das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} . Daraus kann man das elektromagnetische Feld herleiten, was wir aber später machen werden. Dieser lustige Tensor $F_{\mu\nu}$ ist der sogenannte [Feldstärkensor](#), oder auf englisch "electromagnetic tensor". Es gibt an wie das elektrische Feld in der Raumzeit ist und lässt sich ebenfalls aus dem elektromagnetischen Potential herleiten. [HEY]. Der Tensor beinhaltet die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes.

2.2 Einheitssysteme

Im üblichen Leben ist es sehr praktisch mit den "normalen" SI-Einheiten zu rechnen. Damit kann man die uns vertraute Verhältnisse ganz gut beschreiben. Zum Beispiel haben die meisten ein Gefühl, wie weit 100 m oder wie schnell 100 km h⁻¹ sind. Aber es wird irgendwann unübersichtlich, wenn man in der Physik verschiedene Systeme beschreiben will, bei den man auf einmal ganz viele Umrechnungen durchführen muss. Was bedeutet es zum Beispiel, dass die Divergenz des elektrischen Feldes ein "epsilon-null-sten" der Ladungsdichte ist? Wofür wollen wir überhaupt ein ε_0 haben? Lasst uns das Mal an einem Beispiel mit einer Bananen-Firma erläutern.

Beispiel 6

Stellen wir uns vor, eine Bananen-Firma verkaufe Bananen für einen Preis pro Ki-

logogramm von $P = 30$ USD an einem Bananenladen in der Stadt. Lasst uns auch annehmen, dass jede Banane gleich wiegt, also habe jedes Kilogramm $N = 7$ Bananen. Jede einzelne Banane kann im freien Markt für $p = 10$ USD verkauft werden. Nun will jemand wissen, wie viel Gewinn er aus ganz vielen einzelnen Käufen machen kann. Der Verkäufer ist aber nicht so gut im Kopfrechnen, und will sich das Leben einfacher machen, indem er nur einmal von Anzahl an verkauften Bananen auf erworbenes Geld umrechnen muss, und zwar ganz am Ende des Tages wenn er nicht mehr so beschäftigt mit dem Laden ist. Unser Ziel ist es ihm zu zeigen, was er am Ende des Tages rechnen muss.

Ihm kostet eine einzelne Banane $\frac{P}{N}$, und er verkaufe sie wieder für p , das heißt, sein Netto-Gewinn pro Banane sei also $g = p - \frac{P}{N} \approx 5,714$. Sagen wir n_i gehöre zu der Anzahl an Bananen, die ein Kunde i gekauft habe. Dann ist sein Netto-Gewinn nach jedem Kauf

$$G = \sum_{i=1} g \cdot n_i \quad (2.2.1)$$

Ja man könnte einfach das g ausklammern und damit fertig sein, aber ich improvisiere gerade also ein bisschen Geduld. Nun definieren wir die Anzahl an gekauften Bananen n_i , als $n'_i = \frac{n_i}{5,714 \text{ USD}}$, dann ist der Gewinn:

$$G = \sum_{i=1} g \cdot \frac{n_i}{5,714 \text{ USD}} = \sum_{i=1} n'_i \quad (2.2.2)$$

Das ist für den Bananenverkäufer viel einfacher im Kopf zu rechnen^a. Wenn er am Ende des Tages wieder wissen will, wie viele Dollars er gewonnen hat, dann muss er die Umrechnung wieder umgekehrt durchführen.

^aHinterfrage die Bananen-Firma nicht, es hatte mehr Sinn in meinem Kopf

Das obige ist eine vielleicht komische Motivation zu warum wir überhaupt Einheiten wieder definieren würden.

2.3 Maxwell-Gleichungen

Am dritten Tag nach dem Anknft am Sinaiberg gab's Donner und Blitze und andere elektromagnetische Phänomene. Auf dem Berg wurden James Clark Maxwell 4 Gesetze offenbart, die auf Stein inskribiert worden waren. Er kam runter und erklärte allen, "Gott habe geredet". Auf diesen Steinen waren die folgenden vier Gesetze aufgeschrieben¹:

$$\text{I. Gaußsches Gesetz} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.3.1)$$

$$\text{II. Gaußsches Gesetz (Magnetfeld)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\text{III. Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \quad (2.3.3)$$

¹Es ist Canon, Gott mag Gaußsches Einheitensystem besser

$$\text{IV. Maxwell-Ampèresches Gesetz} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \quad (2.3.4)$$

2.4 Elektrostatik

2.4.1 Recap

So, elektrisches Feld, magnetisches Feld, was soll das alles nochmal sein? Grundlegend in der Elektrostatik und Magnetostatik ist die Existenz von **Ladungen**. Elektrische Ladungen sind dafür verantwortlich, dass es zu elektrischen Feldern und dementsprechend Potentialen kommt. Die dafür relevante Physik beruht auf die Wechselwirkung geladener Teilchen und auf die Kräfte, die zwischen diesen entstehen. Zum Beispiel wird ein ungeladenes Stück Brot nicht von einem elektrischen Feld beeinflusst werden², aber ein Proton in der Anwesenheit eines Elektrons schon.

Coulomb-Kraft

Bei der Elektrostatik spielt dann die Coulomb-Kraft die zentrale Rolle in der Wechselwirkung geladener Teilchen miteinander und in elektrischen Feldern. Diese habe die Form

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.4.1)$$

2.4.2 Potentiale

Bei stationären, bzw. zeitlich konstante Problemen spricht man von der Elektro (und Magnetostatik). Unter dieser Betrachtung werden die Maxwell Gleichungen deutlich einfacher, denn wir nun alle Zeitableitungen wegmachen dürfen:

$$\text{I.} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.4.2)$$

$$\text{II.} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4.3)$$

$$\text{III.} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.4.4)$$

$$\text{IV.} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.4.5)$$

Insbesondere heißt das, dass das elektrische und magnetische Feld hier nicht voneinander abhängen, die Differentialgleichungen sind hier entkoppelt.

Einschub 4. Darstellung eines Vektorfeldes als grad und rot

Ein Vektorfeld was schnell genug auf 0 abfällt (wie r^{-2} oder schneller) kann als die Summe eines Gradients und einer Rotation dargestellt werden in folgender Form:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \underbrace{-\nabla\phi}_{\text{– ist Konvention}} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha} \quad (2.4.6)$$

²Also doch, weil das Stück Brot selbst geladene Teilchen drin hat, aber es war ja sowieso nur bildliches Sprachgebrauch.

Mit gegebenem $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ lassen sich ϕ und $\boldsymbol{\alpha}$ bestimmen als:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.4.7)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.4.8)$$

Hier stehen die gestrichenen Variablen als Konsequenz, dass wir ϕ und α in Abhängigkeit der "normalen" Variablen (\mathbf{x}) haben wollen. Wir stellen uns als Begründung vor, dass wir aus Sicht eines festen \mathbf{x} die physikalischen Phänomene betrachten, und in Abhängigkeit aller anderen möglichen Koordinaten \mathbf{x}' diese Physik auswerten, dafür müssen wir über die anderen Koordinaten \mathbf{x}' integrieren, sodass wir am Ende eine Funktion in Abhängigkeit unseres Aufenthaltsorts bekommen.

Hier fällt uns besonders schön auf den Schoß, dass jetzt das elektrische Feld rotationsfrei ist. Das heißt³, dass wir das elektrische Feld als ein Potentialfeld darstellen können. Wir könnten gerne auch den Rotationsteil miteinbeziehen, und dann sofort sehen⁴, dass dieser verschwindet. Dann gilt:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi \quad (2.4.9)$$

mit

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad |(2.4.2) \quad (2.4.10)$$

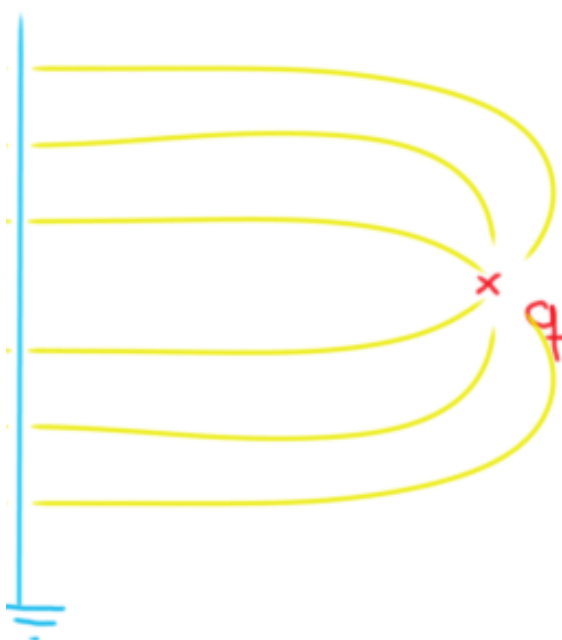
$$= \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.4.11)$$

³angenommen auch ein einfach zusammenhängendes Gebiet, aber das ist ja eine berechnete Annahme

⁴Siehe (2.4.8)

2.4.3 Methode der Spiegelladungen

Als Einstiegsbeispiel in die [Methode der Spiegelladungen](#) nimmt man gerne eine Ladung q in einem Abstand a von einer unendlich ausgedehnten, geerdeten, leitenden Fläche. Die Ladung q erzeugt ein elektrisches Feld und die Fläche dient dazu auf dieses Feld Randbedingungen zu setzen. Es soll ja gelten, dass das Potential auf der Fläche verschwindet^a. Das heißt, wir möchten unsere Fläche, unseren Rand zu einem Äquipotential machen. Wenn wir uns überlegen, wie das Problem zu lösen ist, dann kommt man als erstes zur Schlussfolgerung, dass die elektrischen Feldlinien parallel auf die Fläche treffen, nicht all zu unterschiedlich, wie wenn man sich ein Dipol vorstellt und sich die mittlere Äquipotentialebene anschaut.



^abeziehungsweise konstant ist

Abbildung 2.1: Ladung vor geerdete, leitende Fläche

Aus dieser Schlussfolgerung kann man sich dann überlegen, dass es in einem Abstand a auf der anderen Seite der Fläche eine Ladung q' entgegengesetztes Vorzeichen befindet, was dann das entsprechende Bild erzeugt.

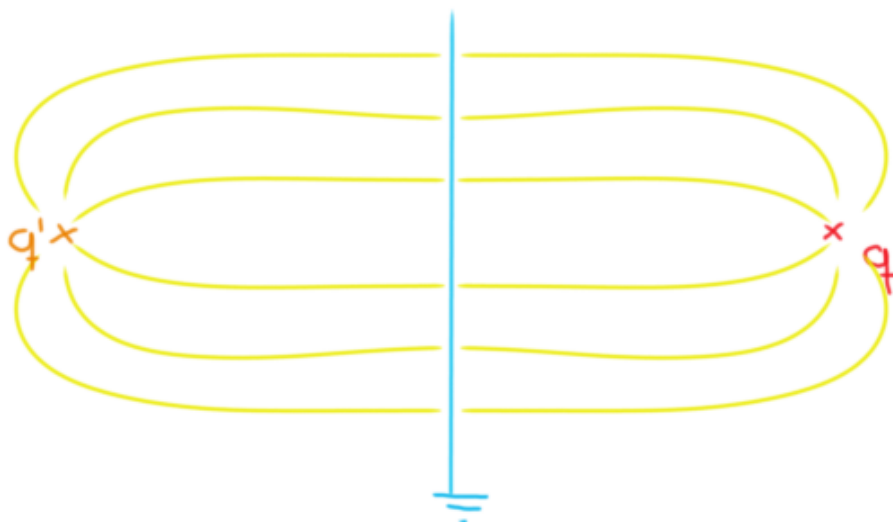


Abbildung 2.2: Spiegelladung

Wichtig ist natürlich, dass diese Ladung *nicht existiert*. Sie dient nur als Hilfsmittel um die Greensche Funktion und dann entsprechend das Potential zu finden. Dieses Beispiel haben wir aber schon öfter selber ausgerechnet und besprochen. Lasst uns mal was neues ausprobieren.

Beispiel 7

Gegeben seien zwei geerdete leitende Metallplatten, die auf einem Winkel von 60° zueinander stehen, und in diesem Bereich befindet sich irgendwo eine Ladung q .



Abbildung 2.3: Problem

So sieht also unser Problem aus. Im Prinzip ist das nicht so viel anders als bei einer unendlich ausgedehnten Platte, wir wissen schon, wir können auf einer Seite im gleichen Abstand eine andere Ladung q' legen, sodass die eine Platte zu einem Äquipotential wird. Dies lässt uns aber zwei kleine Probleme, und zwar: Wir haben noch nicht die diagonale Platte berücksichtigt und die Spiegelladung, die wir eingeführt haben wird auf der linken Seite nicht entgegengewirkt. Das heißt, wir brauchen MEHR Spiegelladungen, und zwar können wir durch Wiederholung dieses Schrittes auf folgende Überlegung kommen:

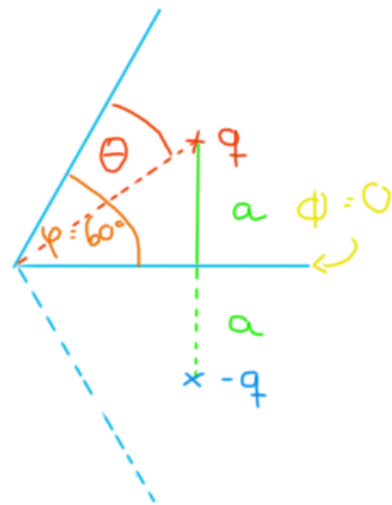


Abbildung 2.4: Erster Schritt

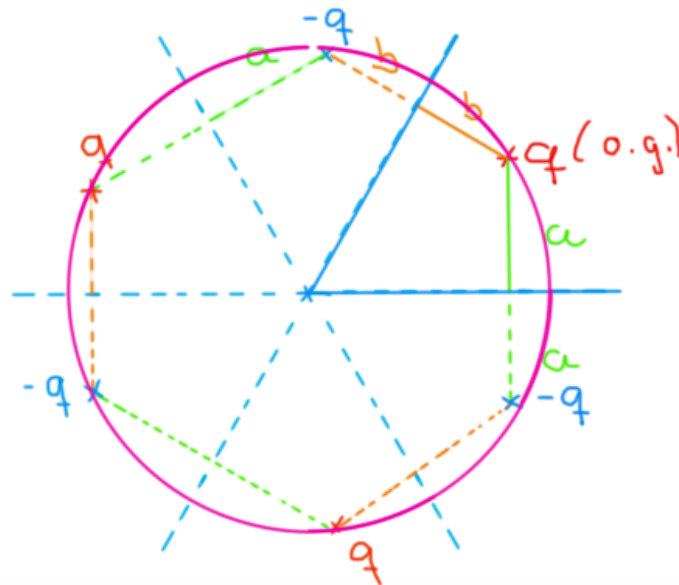


Abbildung 2.5: Skizze Lösungsansatz

Hier müssen wir einige Sachen betrachten: Jeder Punkt befindet sich auf einem Kreis um den Ursprung, die sind alle also äquidistant zum Ursprung. Außerdem, jeder Punkt befindet sich um θ Winkeln von der Achse entfernt, die senkrecht auf die Abstände b steht.

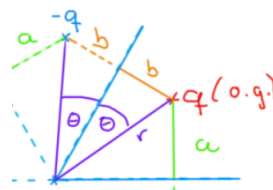


Abbildung 2.6: Winkeln

Damit können wir die Koordinaten für die einzelnen Ladungen feststellen, wir nummerieren ausgehend von der ursprünglichen Ladung im Uhrzeigersinn:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \vartheta = 60^\circ - \theta \quad (2.4.12)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} r \cos (60^\circ + \theta) \\ -r \sin (60^\circ + \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} r \cos (180^\circ + \vartheta) \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} r \cos (180^\circ + \vartheta) \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.14)$$

$$\mathbf{r}_6 = \begin{pmatrix} r \cos (240^\circ + \vartheta) \\ r \sin (240^\circ + \vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

Wie wir bereits wissen, lässt sich das elektrische Potential als eine Summe aller (in-

klusive imaginärer) Ladungen berechnen:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\sum_{i=1}^6 q_i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.4.16)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^6 \frac{q_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.4.17)$$

Frage:

Was passiert, wenn die Platten zueinander auf 50° stehen?

2.5 Multipolentwicklung

Das Potential einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.5.1)$$

$$= \int \frac{\rho(\mathbf{x}'(r', \theta', \varphi'))}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2}} dV' \quad (2.5.2)$$

$$= \int \frac{\rho(\mathbf{x}'(x', y', z'))}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dV' \quad (2.5.3)$$

Das ist einfach furchtbar zum Ausrechnen, egal wie wir es uns anschauen. Noch schlimmer natürlich, wenn unsere Ladungsverteilung ρ kompliziert aussieht. Aber Physiker sind schlau und faul. Warum sollten wir das ganze Potential ausrechnen, wenn wir das *meiste* Potential ausrechnen können? Wir können den Ausdruck natürlich entwickeeeeln. So finden wir nach jedem Detail feinere Details über unser Potential heraus, können aber statt das ganze auszurechnen das Problem auf kleinere Probleme reduzieren. Mit kartesischen Koordinaten eignet sich natürlich eine mehrdimensionale Taylor-Entwicklung⁵. Manchmal sind aber kartesische Koordinaten nicht so gut. Wie machen wir es zum Beispiel in Kugelkoordinaten? Das werden wir uns im folgenden Abschnitt nochmal anschauen.

2.5.1 Kartesische Entwicklung

Nehmen wir an, wir haben eine beschränkte Ladungsverteilung. Das heißt, sie streckt sich nicht bis ins Unendliche, sondern hört irgendwann auf. Nehmen wir an, diese Ladungsverteilung habe eine "charakteristische Ausdehnung" L . Es reicht zu denken, dass diese Größe der längste Abstand zwischen zwei Punkten der Ladungsverteilung ist.

⁵für eine Erinnerung siehe den Theo Guide II [0.1.2](#) Abschnitt 2.8 Schwingungen und Kontinua, Einschub 9.

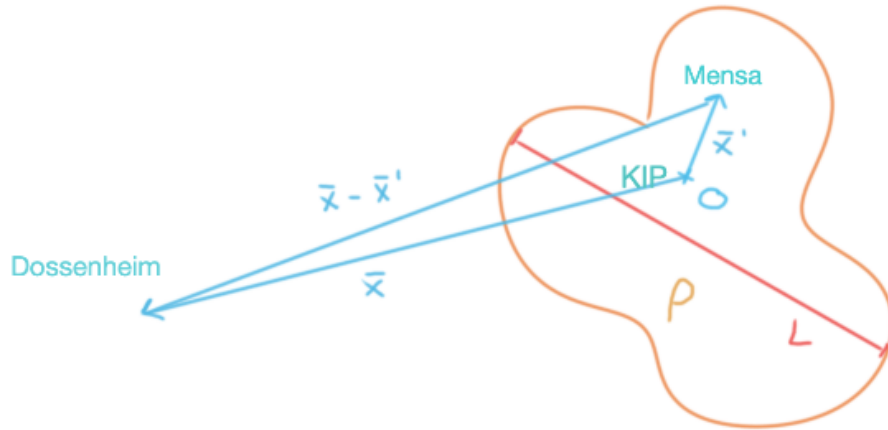


Abbildung 2.7: Anschaulichung Ladungsverteilung

Wir wollen $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ um \mathbf{x}' entwickeln, unter der Annahme, dass wir (\mathbf{x}) von ganz weit schauen und deswegen ist $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$. Dies machen wir mithilfe der uns vertrauten mehrdimensionale Taylor-Entwicklung:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \left[\exp((\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \Big|_{\mathbf{x}'} \quad (2.5.4)$$

$$\approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{x'_i x^i}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{6} \frac{(3x^i x^j - |\mathbf{x}|^2 \delta^{ij})}{|\mathbf{x}|^5} (3x'_i x'_j - |\mathbf{x}|^2 \delta_{ij}) \quad (2.5.5)$$

Soweit so gut. Dies soll man ja nur in den Potential einsetzen, und wir kriegen dann verschiedene Terme:

$$\phi(\mathbf{x}(x, y, z)) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}'(x', y', z'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.5.6)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{x}|} \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}) dV'}_{\text{Ladung } Q} \quad \mapsto \frac{Q}{|\mathbf{x}|} \quad (2.5.7)$$

$$+ \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} x^i \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') x'_i dV'}_{\text{Dipolmoment } p_i} \quad \mapsto \frac{p_i x^i}{|\mathbf{x}|^3}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{(3x^i x^j - |\mathbf{x}|^2 \delta^{ij})}{|\mathbf{x}|^5} \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') (3x'_i x'_j - |\mathbf{x}'|^2 \delta_{ij}) dV'}_{\text{Quadrupolmoment } q_{ij}} \quad \mapsto \frac{q_{ij} (3x^i x^j - |\mathbf{x}|^2 \delta^{ij})}{6|\mathbf{x}|^5}$$

+ Andere Pole

Da für jeden weiteren Term die Proportionalität zu $\frac{1}{r}$ steigt, wird es aus einem großen Abstand immer schwieriger die Effekte der einzelnen "Polen" zu beobachten. Dies ist natürlich die Natur der Taylor-Entwicklung, jeder hinzugefügte Term wird in der Umgebung des betrachteten Punktes von kleinerer Bedeutung. Aber es gibt auch etwas physikalisches dahinter.

Erste kartesische Multipole

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}') dV'$$

$$P_i = \int \rho(\mathbf{x}') x'_i dV'$$

$$q_{ij} = \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_i x'_j - |\mathbf{x}'|^2 \delta_{ij}) dV'$$

Mit Ladungen und Dipolmomente haben wir schon öfter gearbeitet. Aber was genau ist ein Quadrupolmoment, warum ist es jetzt ein Tensor? Außerdem, warum hat ein elektrisches Quadrupolmoment die Dimension einer Fläche? [HEY:erg]

Beispiel 8. Kartesische Multipolentwicklung

Gegeben sei eine Kugel mit Radius R mit der Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{x}) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta \quad (2.5.8)$$

Wir wollen mithilfe der kartesischen Entwicklung das Potential bis zur Ordnung des Quadrupolmoments bestimmen. Dafür berechnen wir das Monopol, das Dipol und das Quadrupol.

Monopol:

$$Q = \int \rho(\mathbf{x}') dV' \quad (2.5.9)$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin^2 \theta \quad (2.5.10)$$

$$= 2\pi k R \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta (R - 2r) \sin^2 \theta \quad (2.5.11)$$

$$= 2\pi^2 k R \int_0^R dr (R - 2r) \quad (2.5.12)$$

$$= 2\pi^2 k R (R^2 - R^2) \quad (2.5.13)$$

$$= 0 \quad (2.5.14)$$

Insgesamt beobachten wir also in erster Näherung keine Ladung. Machen wir mit dem Dipol weiter:

Dipol:

$$\mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' dV' \quad (2.5.15)$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{kR}{r^2} (R - 2r) \sin \theta \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.5.16)$$

$$\rightarrow P_{x,y} = 0 \text{ weil } \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos \varphi}_{\text{bzw. } \sin \varphi} d\varphi = 0 \quad (2.5.17)$$

$$P_z = 0 \text{ weil } \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (2.5.18)$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = 0 \quad (2.5.19)$$

Dann also es gibt hier auch keinen Dipol. Weiter mit dem Quadrupol^a

$$q_{ij} = \int \rho(\mathbf{x}') (3x'_i x'_j - |\mathbf{x}'|^2 \delta_{ij}) dV' \quad (2.5.20)$$

wir behaupten $q_{ij} = 0 \forall i \neq j$, dies können wir aufgrund der sphärischen Symmetrie des Problems machen. Wir rechnen exemplarisch q_{33} aus und geben die anderen als vom Computer ausgerechnet an:

$$q_{33} = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{kR}{r^2} (R - 2r) \sin \theta \cdot (3r^2 \cos^2 \theta - r^2) \quad (2.5.21)$$

$$= 2\pi kR \int_0^R r^2 (R - 2r) dr \int_0^\pi \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \quad (2.5.22)$$

$$= -\frac{2\pi kR^5}{6} \int_0^\pi \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \quad (2.5.23)$$

$$= -\frac{\pi kR^5}{3} \left[3 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta - \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.5.24)$$

Ok, wir gehen in einen kurzen Ausflug um das Integral $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ auszurechnen. Nämlich beweisen wir zunächst die Integral-Potenz-Reduktions-Formel oder wie auch immer es heißt für Sinus^b.

$$I_m = \int \sin^m x dx \quad (2.5.25)$$

$$= \int \sin x \sin^{m-1} x dx \quad D \quad I \quad (2.5.26)$$

$$\begin{aligned} &+ \sin^{m-1} x && \sin x \\ &- (m-1) \cos x \sin^{m-2} x && - \cos x \end{aligned}$$

$$I_m = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \cos^2 x \sin^{m-2} x dx \quad (2.5.27)$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)(1 - \sin^2 x) \sin^{m-2} x dx \quad (2.5.28)$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m \quad (2.5.29)$$

$$I_m(1 + (m-1)) = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1)I_{m-2} \quad (2.5.30)$$

$$I_m = \frac{-\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} I_{m-2} \quad (2.5.31)$$

Mit diesem etwas unnötigen Umweg lösen wir nun das Integral da oben:

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int_0^\pi \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx \quad (2.5.32)$$

$$= \left[\frac{x - \cos x \sin x}{2} \right]_0^\pi - \left[\frac{3}{4} \left(\frac{x - \cos x \sin x}{2} \right) - \frac{\cos x \sin^3 x}{4} \right]_0^\pi \quad (2.5.33)$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{3x}{8} \right]_0^\pi \quad (2.5.34)$$

$$= \frac{\pi}{8} \quad (2.5.35)$$

eingesetzt in das Quadrupolmoment:

$$q_{33} = -\frac{\pi k R^5}{3} \left[3 \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} \right] \quad (2.5.36)$$

$$= \frac{\pi^2 k R^5}{24} \quad (2.5.37)$$

Die anderen ergeben das folgende:

```

In[2444]:=
(*Berechnung der Quadrupole*)
rho = (k R) / (r^2 Sin[theta]);

(*Transformiere kartesische in Kugelkoordinaten*)
Kart2Kug[xi_] := TransformedField["Cartesian" -> "Spherical",
  xi, {x, y, z} -> {r, theta, phi}]

(*Definiere Quadrupol*)
Quadrupol[xi_, xj_] :=
  Integrate[
    r^2 Sin[theta] rho
    (3 Kart2Kug[xi] x Kart2Kug[xj] - r^2 KroneckerDelta[xi, xj]),
    {r, 0, R}, {phi, 0, 2 pi}, {theta, 0, pi}]

(*Rechne relevante Quadrupole aus*)
{Quadrupol[x, x], Quadrupol[y, y], Quadrupol[z, z]}

Out[2447]= {-1/48 k pi^2 R^5, -1/48 k pi^2 R^5, 1/24 k pi^2 R^5}

```

Abbildung 2.8: Ausrechnung mit Mathematica

Das heißt, das Potential ist in erster Näherung beschreibbar durch

$$\phi(\mathbf{x}(r, \theta, \varphi)) = \frac{1}{6} \frac{(3x^i x^i - r^2)}{r^5} q_{ii} \quad (2.5.38)$$

$$= \frac{-1}{6} \frac{(3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1)}{r^3} \frac{k\pi^2 R^5}{48} \quad (2.5.39)$$

$$- \frac{1}{6} \frac{(3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 1)}{r^3} \frac{k\pi^2 R^5}{48} + \frac{1}{6} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} \frac{k\pi^2 R^5}{24} \quad (2.5.40)$$

$$= \frac{k\pi R^5}{576r^3} (1 + 3 \cos 2\theta) \quad (2.5.41)$$

ehhh so grob bestimmt.

^aHier gibt es anscheinend Vereinfachungen die dazu führen, nur einen Quadrupolmoment zu brauchen, die hatten wir allerdings nicht in der Vorlesung und ich weiß nicht genau wann das gilt.

^bnicht unbedingt weil wir sie jetzt brauchen, aber es wird uns allen gut tun nochmal über ihre Existenz bescheid zu wissen. Sagen wir die Herleitung ist ein kleiner Preis für diejenigen die hier aufgepasst haben

2.5.2 Sphärische Entwicklung

Aha! Ich hatte dir gesagt, dass wir uns alle der erwähnten Darstellungen der Legendre-Polynome anschauen werden. Und jetzt kommen wir zur letzten: Die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (2.5.42)$$

und durch eine einfache Umformung kommen wir auf

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2}} \quad |r = |\mathbf{x}|, \theta = \angle\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\} \quad (2.5.43)$$

$$= \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad (2.5.44)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^n \quad (2.5.45)$$

Hier benutzen wir eine Tatsache, die wir nicht beweisen werden⁶, aber uns mit dieser Geschichte mit den Multipolmomenten weiterhilft. Und zwar haben wir uns die Kugelflächenfunktionen nicht aus Spaß hergeleitet, wir wollen sie ja natürlich verwenden! Und was ein besserer Anlass als für die Entwicklung der Multipolmomente. Es gilt:

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{x}'(\theta', \varphi')) Y_{lm}(\mathbf{x}(\theta, \varphi)) = P_l(\cos(\angle\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\})) \quad (2.5.46)$$

⁶anscheinend braucht man dafür diesen "Poisson Kernel" und / oder Beweise, die ich im Internet nicht gefunden habe

also können wir Gleichung (2.5.45) ersetzen durch⁷:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.5.47)$$

Damit ist das Potential gegeben durch:

$$\phi(\mathbf{x}(r, \theta, \varphi)) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}'(r', \theta', \varphi'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.5.48)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \underbrace{\int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV'}_{Q_{lm}} \quad (2.5.49)$$

Uns bleibt dann nur noch das Ausrechnen dieser Terme, aber was kann man jetzt dagegen

[HEY:Bsp]

Beispiel 9

2.6 Magnetostatik

2.6.1 Magnetostatik

Schon wieder fangen wir mit den statischen Maxwell-Gleichungen aus. In diesem Fall haben wir ein zeitlich konstantes Magnetfeld \mathbf{B} . Dies reduziert die relevanten Maxwell-Gleichungen auf

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.6.2)$$

Für unser Magnetfeld bedeutet das, dass es nur dort eine Rotation kann, wo es eine Stromdichte \mathbf{j} gibt. Machen wir analog zu unserer Ladungsverteilung aus der Multipolentwicklung in Abbildung 2.7. Nun sei das jetzt eine Stromverteilung. Dann wissen wir, dass $\mathbf{j}(\mathbf{x}') = 0$ für alle $|\mathbf{x}| > L$. In diesen Bereichen gilt

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.6.3)$$

und das Magnetfeld lässt sich dann durch ein Potential darstellen. Dafür benutzen wir unsere Tricks aus dem Einschub 4 zur Darstellung von Vektorfeldern als Gradient und Rotation, und benutzen jetzt die Tatsache, dass Magnetfelder divergenzfrei sind, also können wir es rein durch eine Rotation darstellen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \boldsymbol{\alpha} \quad (2.6.4)$$

⁷Achtung, θ aus (2.5.45) ist nicht gleich dem θ aus (2.5.47)

Zur Übereinstimmung mit Konvention nennen wir dieses Potential $\alpha \rightarrow \mathbf{A}$. Wir bemerken außerdem, dass die Rotation eines Gradienten verschwindet, also lässt sich dieses magnetische Potential \mathbf{A} als die Summe aus sich selbst und einem beliebigen Gradienten darstellen:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.6.5)$$

Diese Transformation lässt natürlich das magnetische Feld im statischen Fall gleich. Wie das im Fall der Elektro- und Magnetodynamik aussieht untersuchen wir später.

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.6.6)$$

Dies ist was wir als Eichfreiheit bezeichnen.

Einschub 5. Eichfreiheit

Diese Eichfreiheit bedeutet, dass wir mehrere Repräsentanten für eine Funktion, in diesem Fall das Vektorpotential \mathbf{A} finden können, die die selbe Physik beschreiben. Das ist ein mächtiges Werkzeug, weil wir können somit unsere Funktionen so wählen, dass sie die Lösbarkeit einer Gleichung oder die Integration vereinfachen.

Coulomb-Eichung

In der Magnetostatik genügt es, ein Magnetisches Potential um einen Gradienten zu verändern:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.6.7)$$

Bei den Maxwellgleichungen wird man später fordern, dass das Vektorpotential \mathbf{A} auch divergenzfrei ist. Dies lässt sich machen, indem wir eine geeignete Funktion χ wählen.

Der Coulomb-Eichung genügt es die Divergenzfreiheit des Potentials zu fordern, also:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.6.8)$$

Lorenz-Eichung

Mit der Lorenz-Eichung erlauben wir eine andere Art von Transformation, eine die vielleicht ein bisschen beschränkter ist als die Coulomb-Eichung, denn wir zusätzlich auf das elektrische Potential aufpassen müssen. Immernoch definieren wir

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.6.9)$$

Aber berücksichtigen zusätzlich

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \chi \quad (2.6.10)$$

Dies folgt dadurch, dass wir \mathbf{E} invariant lassen wollen. Mit der Lorenz-Eichung können wir sagen:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.6.11)$$

Wenn wir unser magnetisches Feld \mathbf{B} gefunden haben, so lässt sich dann auch für den Teil innerhalb der Stromverteilung schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.6.12)$$

und wir benutzen die Identität (3.1.6) und schreiben:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (2.6.13)$$

Hier wäre es sehr schön, wenn wir den einen oder den anderen Term verschwinden lassen könnten, und mit der Eichfreiheit ist es nun möglich, die Divergenzfreiheit von \mathbf{A} zu fordern. Wir fügen also einen $\nabla\chi$ ein:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\chi) = 0 \quad (2.6.14)$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = -\Delta\chi \quad (2.6.15)$$

$$(2.6.16)$$

Das ist nur die Poisson-Gleichung mit extra Schritten! Das können wir ja lösen. Insbesondere kennen wir schon eine Lösung, aus unserer Zeit mit den Greenschen Funktionen kennen wir eine besondere Funktion, die uns hier helfen wird:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.6.17)$$

Außerdem, wegen der Divergenzfreiheit folgt auch für das magnetische Potential

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.6.18)$$

Anscheinend, bei der Programmierung dieses Abschnitts des Universum war der unter Schlafmangel leidender Alien nicht mehr kreativ genug, und hat sich entschieden aus dem letzten Paragraph eine Stelle Code abzuschreiben, und deswegen haben wir schon wieder eine Poisson-Gleichung, oder besser gesagt 3 davon. Für jeden Vektorkomponent eine. Zum Glück haben wir ja über Greensche Funktionen gelernt nicht wahr?

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.6.19)$$

2.6.2 Magnetischer Dipol

Der magnetische Dipol ist besonders interessant, weil im Gegensatz zur Elektrodynamik, die Magnetodynamik keine Monopole besitzt. Es gibt keinen analogen Begriff zur Ladung. Das Spielfeld ist im wesentlichen andes, weil wir magnetische Strukturen nicht mehr mit schönen Lego's wie bei der Elektrizität bauen können, sondern haben wir jetzt als Bausteine eine nervige Kiste "K'nex".

Wenn man das magnetische Potential entwickelt, ähnlich wie beim elektrischen Potential, tauchen ganz viele Terme steigender Ordnung in r^{-n} , diese sind dann äquivalent zu einem magnetischen Monopol, Dipol, Quadrupol, usw.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (2.6.20)$$

$$\approx \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') dV' + \frac{1}{c|\mathbf{x}|^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') dV' \quad (2.6.21)$$

What did JJ do?

Wir wissen schon, dass das Monopol verschwinden muss, aber es hilft uns als Übung dies auch durch einige Tricks herzuleiten.

Nehmen wir einen beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a}^a . Dabei gilt:

$$\nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}) = \partial_i [(a_j x^j) j^i] \quad (2.6.22)$$

$$= a_j \partial_i (x^j) j^i + a_j x^j \partial_i (j^i) \quad | \text{Produktregel} \quad (2.6.23)$$

$$= a_j \delta_i^j j^i + 0 \quad | \partial_i j^i = 0 \quad (2.6.24)$$

$$= a_j j^j \quad (2.6.25)$$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \quad (2.6.26)$$

Daraus folgt:

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}') dV' = \int_V \nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}) dV' \quad | \text{Satz von Gauß} \quad (2.6.27)$$

$$= \int_{\partial V} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}' \quad (2.6.28)$$

$$= 0 \quad | \text{mit geeignetem } V \quad (2.6.29)$$

Diesen letzten Schritt durften wir machen, indem wir annehmen, dass sich unser Volumen V die gesamte Ladungsverteilung umschließt, also befindet sich auf seinem Rand keine Stromdichte. Wir haben also $|\mathbf{x}'| > L$ gewählt. Insbesondere ist dies nützlich, weil dadurch, dass \mathbf{a} beliebig ist, folgt dass

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{x}') dV' = 0 \quad (2.6.30)$$

Das heißt, das Monopol verschwindet, wie erwartet.

Gehen wir nun auf das nächste auf unserer Einkaufsliste: Das Dipol. Nach unserer Multipolentwicklung haben wir hier den Ausdruck

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c|\mathbf{x}|^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') dV' \quad (2.6.31)$$

Den inneren Teil betrachten wir zunächst wie in der Vorlesung in Komponentenschreibweise:

$$[(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x})\mathbf{j}]_l = x^k \underbrace{x'_k j_l}_{T_{kl}} \quad (2.6.32)$$

Lasst euch von der Notation nicht verwirren lassen, hier reden wir über keine Tensoren. Ich wollte eher auf eine andere Eigenschaft hinweisen und zwar: Man kann jede quadratische Matrix in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen, laut:

$$T_{kl} = \frac{1}{2}(T_{kl} + T_{lk}) + \frac{1}{2}(T_{kl} - T_{lk}) \quad (2.6.33)$$

Das selbe machen wir jetzt mit unserem Ausdruck $x^k j_l$:

$$x'_k j_l = \frac{1}{2} \underbrace{(x'_k j_l + x'_l j_k)}_{\text{symmetrisch}} + \frac{1}{2} \underbrace{(x'_k j_l - x'_l j_k)}_{\text{antisymmetrisch}} \quad (2.6.34)$$

Als nächstes ignorieren wir den symmetrischen Teil und schauen uns den antisymmetrischen Teil. Es ist leicht zu sehen, dass dieser wie der Ausdruck eines Kreuzprodukts aussieht, und es lässt sich auch leicht zeigen:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \varepsilon^{ijm} x'_i j_j = \frac{1}{2} (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_k^j \delta_l^i) x'_i j_j \quad (2.6.35)$$

$$= \frac{1}{2} (x'_k j_l - x'_l j_k) \quad (2.6.36)$$

Zurück zum symmetrischen Teil unseres Dipols. Wir wollen zeigen, dass dieser verschwindet:

$$\int (x'_k j_l + x'_l j_k) dV' = 0 \quad (2.6.37)$$

Dafür gehen wir wie folgt weiter:

$$\int x'_k j_l dV' = \int x'_k \partial_m (j^m x'_l) dV' \quad (2.6.38)$$

Letzteres gilt wegen

$$\partial_m (j^m x'_l) = x'_l \underbrace{\partial_m j^m}_{=0} + j^m \underbrace{\partial_m x'_l}_{\delta_{ml}} \quad (2.6.39)$$

Back to the show: Wir integrieren (2.6.38) partiell (integrieren die Ableitung und leiten x ab). Der Integrationsteil beinhaltet ja die Divergenz eines Vektors, also benutzen wir den Satz von Gauß und integrieren $j^m x'_l$ über den Rand, mit einem Rand groß genug ist dieser Ausdruck Null. So haben wir:

$$\int x'_k \partial_m (j^m x'_l) dV' = x'_k j^m x'_l|_{\partial V} - \int \partial_m (x'_k) j^m x'_l dV' \quad (2.6.40)$$

$$= - \int \delta_{mk} j^m x'_l dV' \quad (2.6.41)$$

$$= - \int j_k x'_l dV' \quad (2.6.42)$$

Eine Zahl, die gleichzeitig ihre Negative ist??? Das klingt verdächtigerweise nach Null. Ist auch in der Tat Null. Damit verschwindet der symmetrische Teil:

$$\int (x'_k j_l + x'_l j_k) dV' = 0 \quad (2.6.43)$$

Das heißt, der magnetische Dipol lässt sich schreiben als:

$$(A_1)_l = \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \varepsilon_{klm} x^k \int \frac{\varepsilon^{ijm} x'_i j_j}{2c} dV' \quad (2.6.44)$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_1 = - \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \times \underbrace{\int \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{2c} dV'}_{\text{Mag. Dipolmoment: } \mathbf{m}} \quad (2.6.45)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (2.6.46)$$

^aSo ganz kurz als Kommentar, ich versuche ein bisschen öfter mit Indizen in der ausführlicheren Einsteinschen Summenkonvention zu arbeiten, das heißt natürlich, man muss die Stellung der Indizes beachten. Dafür muss man in der Regel mehrere Sachen in Betracht ziehen, aber hier können wir ein bisschen OBdA Indizes hoch und runterstellen, weil wir mit der kartesischen Metrik δ_{ij} arbeiten.

Nachdem wir das magnetische Potential \mathbf{A} in zweiter Näherung hergeleitet haben, können wir ebenfalls das Magnetfeld darstellen als

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - |\mathbf{x}|^2 \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^5} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (2.6.47)$$

Hertzscher Dipol

Nehmen wir ein Dipol mit Dipolmoment \mathbf{p} , welches wir aus der Multipolentwicklung kennen. Passenderweise ist auch das Hertzsche Dipol im Englischen auch durch die "Multipole Radiation" bekannt.

2.6.3 Stromverteilung aus diskreten Ladungsträgern

Nehmen wir an, es existieren diskrete Ladungsträgern i an den Orten \mathbf{x}_i mit

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.6.48)$$

Dann reduziert sich das magnetische Dipolmoment auf

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}') = \int \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{2c} dV' \quad (2.6.49)$$

$$= \sum_{i=1}^N q_i \int \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{v}(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{2c} dV' \quad (2.6.50)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \quad \mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} \quad (2.6.51)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2cm_i} \mathbf{L}_i \quad (2.6.52)$$

Das Drehmoment \mathbf{L} ist eine extensive Größe und somit additiv. Sind alle Massen und Ladungen gleich, so kann man dann schreiben:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2cm} \mathbf{L} \quad (2.6.53)$$

2.7 Wellenlösungen

2.7.1 Wellengleichungen

Über Wellengleichungen haben wir ausführlicher in anderen Vorlesungen geredet, also falls jemand hier was ergänzen will dann gerne. Sonst schaue ich irgendwann ob ich Zeit dafür habe.

2.7.2 Wellengleichung für Potentiale

Betrachten wir als nächstes die homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = 0. \quad (2.7.2)$$

Mit dem Potentialansatz vereinfacht sich das zu

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2.7.3)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) = 0 \quad (2.7.4)$$

Das erste ist automatisch erfüllt durch unseren Potentialansatz. Das zweite sagt uns, dass der Term innerhalb der Klammer sich ebenfalls als ein Gradient darstellen lässt:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \phi \quad (2.7.5)$$

Wellengleichung

Wir identifizieren das D'Alembert Operator \square mit dem Differentialoperator der Wellengleichung:

$$\square := \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

Für die Wellengleichung

$$\square \phi = 0$$

kommt man durch einen Ansatz mit der Fouriertransformation auf das Ergebnis:

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \phi = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{\omega}{c}$$

Dies ist was man als eine Dispersionsrelation bezeichnet.

Mit diesem Ansatz können wir eine Eichfreiheit ausnutzen, und zwar können wir natürlich $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$ benutzen. Hier müssen wir aber ψ auch transformieren, wie genau das

gelingt werden wir herausfinden, im Moment schreiben wir nur $\psi \rightarrow \psi'$, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$ Aus dieser Transformation folgt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}' \quad (2.7.6)$$

$$= -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{A} + \nabla\chi) = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} \quad (2.7.7)$$

$$\rightarrow -\nabla\left(\phi' + \frac{\chi}{c}\right) \stackrel{!}{=} -\nabla\phi \quad (2.7.8)$$

und daraus folgt

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi \quad (2.7.9)$$

Die Verbindung dieser zwei Gleichungen fällt unter der Lorenz-Eichung. Insbesondere gilt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi = 0 \quad (2.7.10)$$

Dies verwenden wir in einer analogen Weise wie bei der Coulomb-Eichung und schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E} \quad (2.7.11)$$

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}_{(3.1.6)} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{1}{c}\nabla(\partial_t\phi) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} \quad (2.7.12)$$

Durch ein bisschen Umformen und Einsetzen der erwähnten Identität kommen wir auf

$$\square\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \underbrace{\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\partial_t\phi\right)}_{=0} \quad (2.7.13)$$

Was unsere Wellengleichung vereinfacht auf

$$\square\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (2.7.14)$$

Außerdem kommen wir kurz zurück zur inhomogenen Maxwell Gleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} \right) \quad (2.7.15)$$

$$= -\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A}}_{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c}\partial_t\phi} \quad (2.7.16)$$

$$= -\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi \quad (2.7.17)$$

$$= \square\phi = 4\pi\rho \quad (2.7.18)$$

Fassen wir beide Potentiale zusammen als $A^\mu = (\phi \quad \mathbf{A})^T$ und die Dichten als $j^\mu = (\rho c \quad \mathbf{j})$, so können wir den noch allgemeineren Fall schreiben:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (2.7.19)$$

In dieser Sprache des Vierervektors ist die Lorenz-Eichung (2.7.10) knapp formuliert als $\partial_\mu A^\mu = 0$.

2.7.3 Polarisation

2.8 Erhaltungssätze

Zunächst wollen wir die Party der Erhaltungssätze nur mit unseren altbekannten Freunden Maxwell und Lorenz starten. Noether und die Symmetrie werden später joinen.

2.8.1 Kontinuitätsgleichung


Falls sich jemand an die Kontinuitätsgleichung erinnert, diese hat uns in Theo II in die Nachklausur gekegelt. Hier betritt sie erneut die Bildfläche und bringt auch die altbekannte Ladungserhaltung mit sich.

Beginnen wollen wir mit einem Ausschnitt der Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (2.8.1)$$

Durch Anwendung der Divergenz auf diese Gleichung erhalten wir

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \quad (2.8.2)$$

Auf der Left Hand Side () erhalten wir 0, wie bekannt für die Divergenz eines Rotationsfeldes. Auf der rechten Seite der Gleichung wirkt die Divergenz auf die beiden Vektorfelder \mathbf{j} und \mathbf{E} :

$$0 = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (2.8.3)$$

Hier läuft uns mit der Divergenz des \mathbf{E} -Feldes wieder eine der Maxwellgleichungen über den Weg. Diese setzen wir ein und erhalten so

$$0 = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (4\pi\rho) \quad (2.8.4)$$

$$\iff 0 = \frac{4\pi}{c} \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (2.8.5)$$

Aus diesem Ausdruck ergibt sich, dass

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.8.6)$$

und somit die Kontinuitätsgleichung. Diese wird uns im späteren Verlauf der Vorlesung in Bezug auf die 4-Stromdichte noch [einmal begegnen](#).

2.8.2 Energie- und Impulsdichte des EM-Feldes

Energie ist gespeicherte Arbeit und Arbeit ist Kraft längs des Weges und Kraft haben wir alle keine mehr, mach dass es aufhört.

Wir betrachten eine Ladung q , welche mit einem Elektromagnetischen Feld wechselwirkt

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.8.7)$$

Da dies ein freies Land ist, darf sich die Ladung nach eigenem Willen entlang eines Weges bewegen. Ein infinitesimales Stück dieses Weges bezeichnen wir mit $d\mathbf{r}$. Durch vollkommen wohldefinierte Mathematik lässt sich dies umformen zu

$$d\mathbf{r} = \mathbf{dr} \frac{dt}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt \quad (2.8.8)$$

Mit diesem differentiellen Wegelement lässt sich auch die längs des Weges geleistete Arbeit definieren:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.8.9)$$

$$= q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.8.10)$$

$$= q \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v} \right) dt \quad (2.8.11)$$

Mit etwas Kreuzprodukt-Magic („Multilinear“) können wir sowohl den Faktor $\frac{1}{c}$ herausziehen. Weiter können die Faktoren Zyklisch vertauscht werden, so erhalten wir

$$\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} \quad (2.8.12)$$

Weiter ist das Kreuzprodukt alternierend, somit ist

$$\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{0}) \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8.13)$$

Zurück zur Arbeit (lol):

$$dW = q \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \overbrace{\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{v}}^{=0} \right) dt \quad (2.8.14)$$

$$\iff dW = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) dt \quad (2.8.15)$$

2.9 Spezielle Relativität

Gott war das ein krasser Sprung. Kaum gestern hatten wir uns noch mit der kleinen Elektro- und Magnetostatik beschäftigt und jetzt sind wir bei der speziellen Relativitätstheorie??

Parkour.

-Michael Scott

Wir machen den folgenden Gedankenexperiment, um zu begründen, weshalb es absolut notwendig ist uns die spezielle Relativität anzuschauen, bevor wir überhaupt mit Elektro- und Magnetozeug weiterkommen möchten.

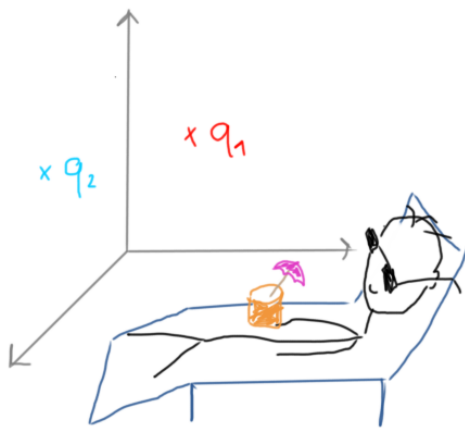


Abbildung 2.9: Chillin mit deinen stationären Ladungen

Nach der Newtonschen Physik sind Inertialsysteme alle Äquivalent zueinander. Das heißt, ich kann irgendwo mit meinen besten Kumpeln Ladung $q_{1,2}$ chillen, komplett stationär sein und ich werde eine Physik beobachten. Aber was passiert, wenn ein blödes Kind auf seinen Hoverboard mit konstanter Geschwindigkeit auf dich und deine Kumpeln rübercruist? Aus seiner Perspektive steht er natürlich still, und es sind die Ladungen, die die sich bewegen. Aber wir haben ja mal gelernt, dass bewegte Ladungen ein magnetisches Feld induzieren! Das würde bedeuten, dass es aus seiner Perspektive ein magnetisches Feld gibt, aber aus meiner nicht. Was soll das heißen?

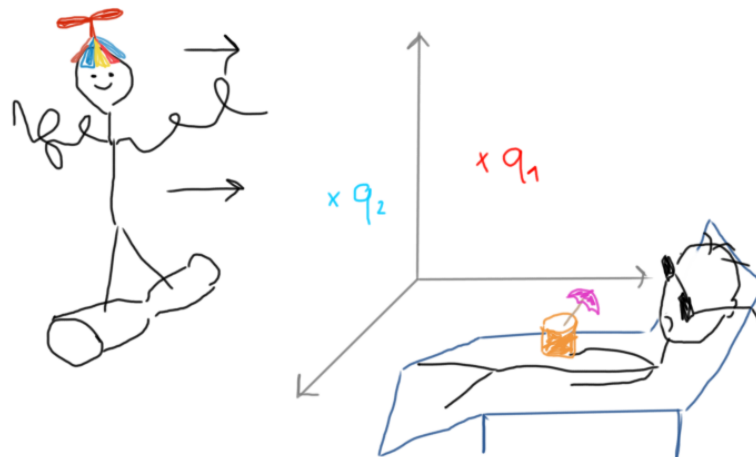


Abbildung 2.10: Kind mit anderem Inertialsystem

Daraus folgern wir, dass die Maxwell-Gleichungen falsch sind. Lasst uns einpacken, wir haben Jahrhunderte Theorie mit zwei kleinen Skizzen widerlegt, es gibt nichts was uns noch die Uni beibringen kann.

Nachdem wir ganz viel Zeit zum Überlegen hatten, weil uns niemand einen Job als Physiker mit unseren aktuellen Kenntnissen und Fähigkeiten⁸ geben würde, kommen wir in die Universität zurück⁹. Vielleicht müssen wir doch noch was lernen. Aber wenn die Elektrodynamik nicht mit Newton kompatibel ist? Was sollen wir sonst machen? Wir suchen uns neue Freunde. Unser neuer bester Freund heißt jetzt Lorentz und er kann uns coole Boosts¹⁰ geben.

2.9.1 Lorentztransformationen

Lorentztransformationen kommen in der speziellen Relativität vor und übernehmen die Rolle der Galilei-Transformationen aus der klassischen Mechanik. Daher reden wir in der Elektrodynamik allgemeiner von einer Lorentz-Invarianz, statt von einer Galilei-Invarianz von Inertialsystemen.

Viele der Beweise und Verhältnisse zwischen Zeit und Raum (wie z.B. Zeitdilatation oder Längenkontraktion) lassen sich durch diese Transformationen herleiten, deswegen wollen wir als erstes kurz motivieren, was sie für eine physikalische Signifikanz haben und ihre Gültigkeit auch intuitiv überprüfen.

Warum muss die Galilei-Invarianz weg?

Newton formulierte seine Invarianzregeln zwischen Inertialsystemen unter der Annahme, dass es einen absoluten Raum und eine absolute Zeit gibt. Das heißt, insbesondere für die Zeit, dass sie unabhängig von Phänomenen des Universums uniform und konstant fließt. Allerdings haben immer mehr und mehr theoretische und experimentelle Beobachtungen gezeigt, dass Zeit nicht für alle Beobachter gleich ist. Insbesondere vergeht Zeit langsamer, je schneller man sich bewegt.

Ein ganz illustratives Beispiel, wo wir dieses Verhältnis tatsächlich bewiesen haben ist die Zeitdilatation bei schnell bewegten Muonen. Ohne jetzt gerade in der Einführung zur speziellen Relativität ins Detail zu gehen, fangen wir mit der Aussage, dass Muonen eine Halbwertszeit von Δs haben. Diese Halbwertszeit ist ziemlich klein. Ganz ganz klein. Wenn hochenergetische Strahlen aus dem Weltall in die Atmosphäre gelangen, so stoßen sie gegen die Partikeln in der "Luft" und verschiedene Teilchen, unter anderem Muonen werden erzeugt. Da Muonen nur so kurz leben, würde man erwarten, dass sie sofort in den oberen Schichten der Atmosphäre verschwinden, und das kaum noch welche es bis zum Boden schaffen. Allerdings hat man trotzdem eine Menge Muonen auf dem Boden beobachtet, die man unter klassischen Annahmen gar nicht erwartet hätte. Woran kann das denn liegen? Naja, Lorentz und Einstein sind der Meinung, dass für die Muonen weniger Zeit vergangen ist, also wenn sie es bis zum Boden schaffen, glauben sie noch ziemlich jung und fit zu sein, und sind noch nicht bereit zu zerfallen. Dieses Experiment lässt sich allerdings wissenschaftlicher überprüfen. Nehme ein Muon mit der Halbwertszeit Δs und bevor er in deinen Händen stirbt, platziere ihn so schnell wie möglich in eine Kreisbahn, wo er bis zu relativistischen Geschwindigkeiten beschleunigt wird. Auf der Kreisbahn merkt man plötzlich, dass Muonen deutlich länger leben, als sie es sollten¹¹.

⁸oder überhaupt

⁹no front

¹⁰Falls euch jemand auf der Straße einen "Boost" anbietet, sag vorsichtshalber nein

¹¹Wir haben hier wieder geschummelt, nämlich wird ein Leser hier bemerken, dass eine Kreisbahn kein Inertialsystem ist, weil es immer eine Beschleunigung hin zum Zentrum stattfindet. Dieses Experiment

Warum ist Lorentz-Invarianz die richtige?

Lorentz-Invarianz folgt aus dem **Postulat** der Allgemeinen Relativitätstheorie, dass Lichtgeschwindigkeit konstant in allen Inertialsystemen ist. Ohne diese Annahme lässt sich Lorentz-Invarianz (u.A.) nicht formulieren, ähnlich wie Galilei-Invarianz nicht ohne die Annahme einer absoluten Raumzeit formulieren lässt. Wir haben eben das Wort "Postulat" betont, und zwar auf zwei anscheinend widersprechenden Gründen: 1) Ein Postulat ist eine schwache Aussage im Sinne, dass man sie als wahr nimmt ohne Beweise dafür vorlegen zu müssen. Hätte man nicht angenommen, dass Lichtgeschwindigkeit konstant ist, so würde die ganze Argumentation ineinander einstürzen. 2) Das Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit ist ziemlich stark. Aus all dem was wir bisher messen können, sind wir uns ziemlich sicher, dass Lichtgeschwindigkeit konstant ist. Aus dieser Annahme lässt sich geometrisch auf die Lorentz-Invarianz kommen, siehe zum Beispiel die "bewegte Licht-Uhr" oder ähnliches. Es mag vielleicht ein bisschen unbefriedigend sein, aber zur Frage: Warum ist Lorentz-Invarianz die richtige? Ist die Antwort: Weil wir es so möchten, oder so annehmen. Es hilft natürlich, dass experimentelle Beweise diese Annahme unterstützen, aber es ist letztendlich immernoch eine Annahme, und zwar eine verdammt gute bisher.

Lorentztransformationen

Wenn man sich überzeugt hat, dass Lorentztransformationen in unserem Fall die richtigen sind, dann können wir sie gerne definieren. Diese Transformationen, ähnlich zu den Galilei-Transformationen, gehören zu einer Gruppe, bekannt als die Lorentz-Gruppe, beschrieben als $SO(3, 1)$ ¹². Das heißt insbesondere, sie erfüllen folgende Bedingungen,

1. Assoziativität:

Seien zwei Transformationen Λ_1, Λ_2 , so ist $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ ebenfalls ein Element der Gruppe, und insbesondere ist für $\Lambda_{1,2,3}$:

$$\Lambda_1 \cdot (\Lambda_2 \cdot \Lambda_3) = (\Lambda_1 \cdot \Lambda_2) \cdot \Lambda_3 \quad (2.9.1)$$

2. Neutrales Element:

Die Transformation eines System in das gleiche System (E) ist ebenfalls eine Transformation der Gruppe.

3. Inverses Element:

Zu jeder Transformation Λ existiert eine inverse Transformation (Λ^{-1}), so dass

$$\Lambda \cdot \Lambda^{-1} = E. \quad (2.9.2)$$

4. Die Lorentz-Gruppe ist **nicht** abelsch! Das heißt, zwei Transformationen kommutieren i.A. nicht.

Diese Transformationen werden durch Matrizen dargestellt, und werden in verschiedene Kategorien unterteilt. Man kann Systeme bezüglich voneinander rotieren, wie es schon

unterstützt trotzdem die Idee der relativen Zeit, nach welcher Galileo's Invarianzregeln nicht mehr gültig sind

¹²bzw. $O(3, 1)$, aber im physikalischen Fall betrachten wir $SO(3, 1)$

bei der klassischen Mechanik möglich war, und man kann Systeme mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit bewegen. Letztere sind als Lorentz-Boosts bekannt.

Bei Lorentz-Boosts nimmt man ein Koordinatensystem und bewegt ihn gleichmäßig entlang einer beliebigen Achse. In der Regel nimmt man an, dass diese Bewegung entlang der x -Achse erfolgt, weil man für jeden anderen Fall das Koordinatensystem so definieren könnte, dass die Bewegung dann doch entlang der x -Achse ist. Dann definieren wir die Transformation als:

Lorentz-Boost

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \beta \frac{x}{c}) & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \beta = \frac{v}{c} \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Wir machen einen kurzen Ausflug in die Notation, die wir im folgenden Abschnitt benutzen werden.

Einschub 6. 4er-Notation der Relativität

Da wir uns jetzt im 4-dimensionalen Raum befinden, müssen wir einen bisschen Platz^a für die Zeit machen. Aus Konvention packt man die Zeit-Komponente jetzt in den 0-ten Eintrag eines Vektors x^μ mit $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Aus Konvention schon wieder benutzt man griechische Buchstaben für 4-er Vektoren und normale Buchstaben für normale 3-er Raumvektoren. Also wenn man einen Ausdruck der Art x^i , A^i sieht, dann kann man davon ausgehen, dass es sich um die Raumkomponenten der Vektoren x, A handelt. Um zu betonen, dass Zeit sich in grundlegender Weise vom Raum unterscheidet, definieren wir die folgende Metrik auf der Raum-Zeit:

$$\eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9.3)$$

$\eta_{\mu\nu}$ wird als "Minkowski" Metrik bekannt. Wir verwenden die Notation aus der Vorlesung und schreiben immer $g_{\mu\nu}$. Wie wir im Abschnitt zum metrischen Tensor [1.3.3](#) gelernt haben, lässt sich die kovariante Darstellung eines Vektors durch den metrischen

Tensor bestimmen. Anwendung der Minkowski liefert dann:

$$g_{\mu\nu}x^\nu = x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (2.9.4)$$

Diese Beziehung gilt natürlich für alle Vektoren, und insbesondere auch für Tensoren mit mehreren Indizes durch mehrfache Anwendung der Metrik.

Außerdem kann man leicht zeigen, dass die inverse Metrik $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ist, und es gilt:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = g_\mu{}^\rho = \delta_\mu{}^\rho \quad (2.9.5)$$

^aRaum, haha

Betrachten wir wieder den Fall eines Lorentz-Boosts und lasst uns ihn dieses Mal durch eine Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.9.6)$$

Mithilfe der **Rapidity** $\eta = \operatorname{artanh} \frac{v}{c}$ lässt sich die obige Matrix in eine etwas schönere Form bringen. Wat?? Was soll genau das heißen? Rapidity, wie der Name darauf hinweist, ist eine Art "Geschwindigkeit". Insbesondere merken wir, ist eine Art "Geschwindigkeit", die auf die Lichtgeschwindigkeit normiert ist. Um dies zu erläutern gehen wir schon wieder in einen unnötigerweise langen Ausflug, um ein Verständnis für die Rapidity zu entwickeln, obwohl das seitdem nie wieder erwähnt worden ist.

Einschub 7. Rapidity

Hyperbolische Funktionen

Wenn wir bereits gesehen haben, dass η aus einer hyperbolischen Funktion entsteht, so wollen wir vielleicht unser Kenntnis über hyperbolische Funktionen auffrischen. Dies machen wir ganz schnell anhand einer Skizze: Analog zu wie wir die trigonometrischen Funktionen anhand des Einheitskreises definiert haben, welcher sich darstellen lässt durch die implizite Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, so definieren wir die hyperbolischen Funktionen anhand der Einheitshyperbel, welche durch $x^2 - y^2 = 1$ ^a beschrieben werden.

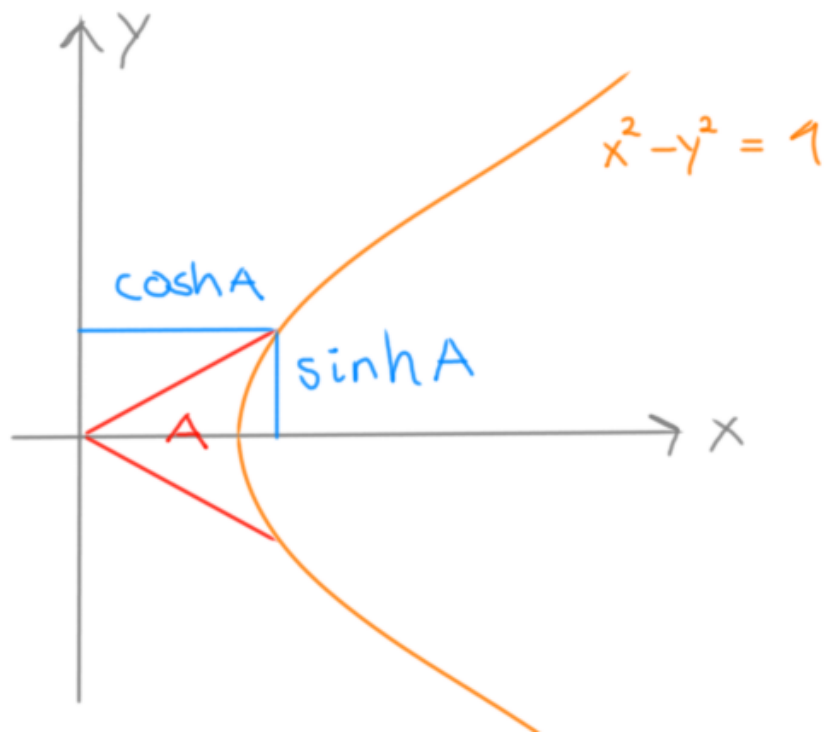


Abbildung 2.11: Einheitshyperbel und hyperbolische Funktionen

Lasst uns ein paar ästhetische Modifikationen auf unser Bild da oben machen, ein kleines Makeover.

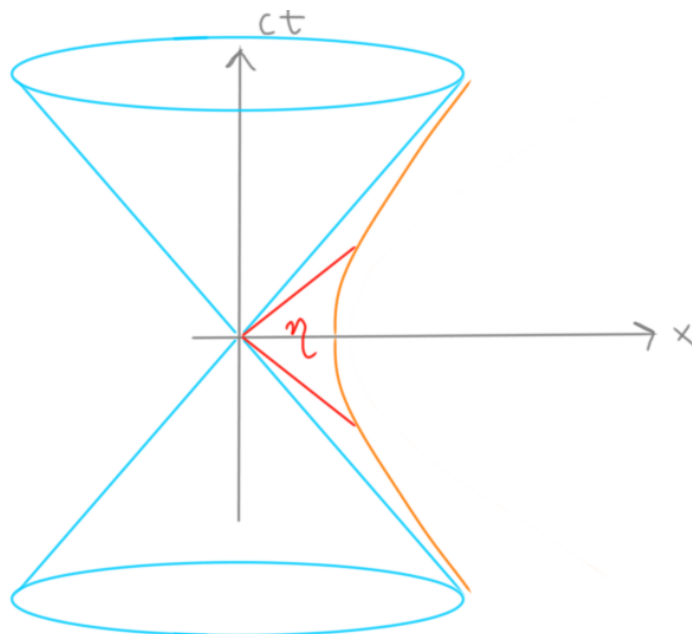


Abbildung 2.12: Lichtkegel amen

Nun macht es jetzt ein bisschen mehr Sinn, wenn wir uns das Bild rechts anschauen.

Denken wir dran, dass wir bei einer bewegten Bewegung sowas wie $x = vt$ schreiben können, lässt uns mal das insbesondere $x = vt_c^x$ nennen. Somit können wir nämlich den obigen Ausdruck umformen zu

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \quad (2.9.7)$$

und insbesondere lässt sich dann die Steigung der hyperbolischen Funktion als

$$\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = \tanh \eta \quad (2.9.8)$$

schreiben. Aber, bei bewegter Bewegung ist (2.9.7) auch die Steigung. Hmmm, was wäre wenn wir... beide gleich setzen O.O.

$$\tanh \eta = \frac{v}{c} \quad (2.9.9)$$

Was genau diese Hyperbolische Kurve beschreibt, hat etwas mit *gleichmäßig beschleunigten* Bewegung zu tun [HEY:quote]. Aber darauf will ich momentan nicht eingehen, das wichtige ist, dass diese Rapidity auch einen sinnvollen Zweck hat, und es ist nicht nur ein mathematischer Trick.

^arings a bell??

Mithilfe der Rapidity, wie ich schon sagte, lässt sich ein Boost beschreiben durch

$$ct' = \cosh \eta ct - \sinh \eta x \quad (2.9.10)$$

$$x' = -\sinh \eta ct + \cosh \eta x \quad (2.9.11)$$

und völlig ausgeschrieben in der Matrixform:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & & \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.9.12)$$

ganz analog wie eine Rotation im konventionellen Sinne beschrieben wird, das heißt, η spielt die Rolle einer "Geschwindigkeit", aber auch von einem "Winkel" aus einer gewissen Perspektive.

Dies lässt sich in Indexschreibweise durch unsere Lorentz-Transformation (LT) schreiben als:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (2.9.13)$$

Diese Schreibweise ist sehr suggestiv, man wird feststellen, dass die Lorentz-Transformationen die Rolle der Transformation von Tensoren spielen, so dass:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (2.9.14)$$

Ein weiterer wichtiger Aspekt von den Lorentz-Transformationen ist, dass das Skalarprodukt nach einer Transformation invariant bleibt. Das heißt:

$$x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = x^2 \quad (2.9.15)$$

Daraus definieren wir die Bedingung für eine Lorentz-Transformation. Wir fordern:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma} \quad (2.9.16)$$

Hier benutzen wir schon wieder unsere Tricks aus 1.3 und schreiben den obigen Ausdruck um:

$$(\Lambda^T)_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (2.9.17)$$

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.9.18)$$

Dies ist, schon wieder, analog zur Rotation in 3D.

2.9.2 Längenkontraktion + Zeitdilatation

Verrücktes Zeug passiert bei relativistischen Geschwindigkeiten.

2.10 Kovariante / 4d Formulierung der Elektrodynamik

Wir haben uns ja schon die Mühe gegeben mit der speziellen Relativität dieses neue / erweiterte Notationssystem mit den 4-er Vektoren und andere Tensoren einzuführen, dies wollen wir nun in die Elektrodynamik miteingliedern und werden dabei viel elegantere Ausdrücke finden.

2.10.1 4-er Potential und Eichfreiheit

Als wir das Potential ϕ und \mathbf{A} eingeführt haben, haben wir für beide eine Eichfreiheit zugelassen:

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \chi \quad (2.10.1)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (2.10.2)$$

Wenn wir versuchen, diese beiden miteinander in ein 4-er Vektor miteinander zu mischen ist dann:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial_\chi^\mu \quad (2.10.3)$$

In Lorenzzeichnung (Einschub 5) fordern wir, dieses Mal formuliert in 4-er Notation:

$$\partial_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.10.4)$$

Feldstärketensor

War schon cool, dass wir unsere Potentiale in einen schönen 4-er Vektor reinpacken konnten, dies erwies sich als natürlich aufgrund der Analogien zwischen den beiden, aber wir kommen nun zu größeren Problemen wenn wir die elektrischen und magnetischen Felder betrachten, weil die können wir *nicht* übereinander in einen 4-er Vektor packen. Wenn dann in einem 6-er Vektor, aber das geht ja gerade nicht. Man kann die Existenz eines einzelnen mathematischen Objektes, was diese beiden Feldern enthält durch verschiedene Überlegungen begründen.

1. Vorlesungsstyle
2. Wikipedia-Style

Beide diese Begründungen sind gültig, welche von diesen man bevorzugt ist eine Sache des persönlichen Geschmacks. Zunächst werden wir die Existenz dieses Objektes Vorlesungsstyle und anschließend Wikipedia-Style begründen.

Einschub 8. Feldstärketensor

Vorlesungsstyle

Es gibt ein Objekt, was die Informationen über die elektrischen und magnetischen Feldern trägt, was folgende Bedingungen erfüllt:

1. **E** und **B** bleiben eichinvariant.
2. **E** und **B** haben *insgesamt* 6 Komponenten

Wir wissen: ein Antisymmetrischer 4-er Tensor 2. Stufe hat insgesamt 6 unabhängige Komponenten, also ist es nicht verkehrt zu raten, dass das Objekt was **E** und **B** enthält ist ein solches.

Wir wissen: die elektrischen und magnetischen Felder lassen sich durch ihre Potentiale erzeugen, spezifisch durch Ableitungen ihrer Potentiale, also raten wir:

$$F^{\mu\nu} = \underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{\text{antisymmetrisch}} \quad (2.10.5)$$

Dieses Objekt ist insbesondere eichinvariant, denn:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) \quad (2.10.6)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \underbrace{\partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi}_{=0 \text{ Schwarz}} \quad (2.10.7)$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.10.8)$$

Eine Zuordnung der Indizes liefert uns:

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i \quad (2.10.9)$$

$$F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k \quad (2.10.10)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.11)$$

Wikipedia-Style

Lustig, wir haben noch nicht über Kräfte auf geladene Teilchen besprochen, aber eine ausführlichere Herleitung / Begründung des Feldstärketensors basiert auf der uns vertrauten Lorentz-Kraft. Wir gehen von der Lorentz-Kraft aus:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.10.12)$$

Außerdem ist uns bekannt:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \quad (2.10.13)$$

also

$$\dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad | \cdot dt \quad (2.10.14)$$

$$d(\mathbf{p}) = q(\mathbf{E} dt + \mathbf{v} dt \times \mathbf{B}) \quad (2.10.15)$$

Aus dieser Vektorgleichung erhält man folgende Gleichungen:

$$d(p_x) = q(E_x dt + v_y B_z dt - v_z B_y dt) \quad (2.10.16)$$

$$d(p_y) = q(E_y dt + v_z B_x dt - v_x B_z dt) \quad (2.10.17)$$

$$d(p_z) = q(E_z dt + v_x B_y dt - v_y B_x dt) \quad (2.10.18)$$

In Worten der speziellen Relativität ist außerdem $c dt = dx^0$, $v_i dt = dx^i$, also:

$$d(p_x) = q(E_x dx^0 + B_z dx^2 - B_y dx^3) \quad (2.10.19)$$

$$d(p_y) = q(E_y dx^0 + B_x dx^3 - B_z dx^1) \quad (2.10.20)$$

$$d(p_z) = q(E_z dx^0 + B_y dx^1 - B_x dx^2) \quad (2.10.21)$$

Wir führen eine weitere Größe ein, und zwar das differentielle Arbeitselement dW . Auf das Teilchen wird nur vom elektrischen Feld eine Arbeit aufgerichtet.

$$dW = q\mathbf{E} d\mathbf{x} = q(E_x dx^1 + E_y dx^2 + E_z dx^3) \quad (2.10.22)$$

Mit der Arbeit $W = mc^2$ haben wir also eine Menge von 4 differentiellen Gleichungen, die dem 4-er Impuls (ehem, was wir ebenfalls noch nicht besprochen haben) entsprechen. Wir definieren den 4-er Impuls anders wie in Wikipedia, sondern wie später in der Vorlesung:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (2.10.23)$$

Außerdem drehen wir die Indizes der Orts-Impulse um durch $p_i = -p^i$ und haben dort stehen:

$$d(mc^2) = dcp^0 = q\mathbf{E} \, d\mathbf{x} = q(E_x dx^1 + E_y dx^2 + E_z dx^3) \quad (2.10.24)$$

$$d(p^x) = q(-E_x dx^0 - B_z dx^2 + B_y dx^3) \quad (2.10.25)$$

$$d(p^y) = q(-E_y dx^0 - B_x dx^3 + B_z dx^1) \quad (2.10.26)$$

$$d(p^z) = q(-E_z dx^0 - B_y dx^1 + B_x dx^2) \quad (2.10.27)$$

Als vorletzter Schritt machen wir ein bisschen Ergebniskosmetik:

$$\begin{pmatrix} dp^0 \\ dp^x \\ dp^y \\ dp^z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \\ & E_x dx^1 & +E_y dx^2 & +E_z dx^3 \\ -E_x dx^0 & & -B_z dx^2 & +B_y dx^3 \\ -E_y dx^0 & +B_z dx^2 & & -B_x dx^3 \\ -E_z dx^0 & -B_y dx^1 & +B_x dx^2 & \end{pmatrix} \quad (2.10.28)$$

$$= q \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \quad (2.10.29)$$

Dies motiviert die Definition eines Tensors, was die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes enthält, was folgendes^a erfüllt:

$$dp^\mu = -qF^{\mu\nu} dx_\nu \quad (2.10.30)$$

^aoder ähnliches mit anderem Vorzeichen, falls ich Zeit habe schaue ich mir das nochmal an. D.h., geh selber über die Vorzeichen als Übungsaufgabe

So haben wir nun unser schönes Feldstärketensor¹³ definiert, hier noch einmal für die Redundanz und mit zwei ganz wichtigen Verhältnisse für praktische Rechnungen:

¹³Ursprünglicherweise wurde mit den Definitionen der Feldstärketensor aus dem Übungsblatt gerechnet, diese entsprechen aber nicht dem CGS-System. Es wurde einfach der Faktor c^{-1} entfernt, ohne Berücksichtigung auf die Kontinuität der Gleichungen.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.31)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.32)$$

$$F_{0i} = E_i \quad (2.10.33)$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k \quad (2.10.34)$$

Da es sich um einen *Tensor* handelt, transformiert er auch wie ein Tensor, insbesondere ist:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E'^1 & -E'^2 & -E'^3 \\ E'^1 & 0 & -B'^3 & B'^2 \\ E'^2 & B'^3 & 0 & -B'^1 \\ E'^3 & -B'^2 & B'^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.35)$$

Betrachten wir zum Beispiel ein Boost in die x -Richtung. Dann gilt:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \quad (2.10.36)$$

Als Erinnerung, wie wir diesen Ausdruck durch Matrizen darstellen können: Wir brauchen, dass die benachbarten Indizes übereinstimmen! Die Ausdrücke in der Indexschreibweise können wir ohne Einschränkungen bewegen, denn es sich um Zahlen handelt:

$$= \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} \Lambda^\nu_\sigma \quad (2.10.37)$$

Ok, also wir haben jetzt auf der linken Seite schöne Indizes, auf der rechten Seite aber nicht. Wir erinnern uns an die Arbeit, die wir bei Tensoren ([section 1.3](#)) gemacht haben, und "transponieren" den Tensor mit einem T und transponieren ihn zurück durch Vertauschung der Reihenfolge der Indizes.

$$= \Lambda^\mu_\rho F^{\rho\sigma} (\Lambda^T)_\sigma^\nu \quad (2.10.38)$$

$$= (\Lambda \cdot F \cdot \Lambda^T)^{\mu\nu} \quad (2.10.39)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \gamma^2 E_1 - \gamma^2 E_1 & \beta B_3 \gamma - \gamma E_2 & -\beta B_2 \gamma - \gamma E_3 \\ \gamma^2 E_1 - \beta^2 \gamma^2 E_1 & 0 & \beta \gamma E_2 - B_3 \gamma & B_2 \gamma + \beta \gamma E_3 \\ \gamma E_2 - \beta B_3 \gamma & B_3 \gamma - \beta \gamma E_2 & 0 & -B_1 \\ \beta B_2 \gamma + \gamma E_3 & -B_2 \gamma - \beta \gamma E_3 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.40)$$

Daran erkennen wir, wie sich die jeweiligen Komponenten verändern:

$$E_1 \rightarrow E_1 \quad B_1 \rightarrow B_1 \quad (2.10.41)$$

$$E_2 \rightarrow \gamma(E_2 - \beta B_3) \quad B_2 \rightarrow \gamma(B_2 + \beta E_3) \quad (2.10.42)$$

$$E_3 \rightarrow \gamma(E_3 + \beta B_2) \quad B_3 \rightarrow \gamma(B_3 - \beta E_2) \quad (2.10.43)$$

Dieses Ergebnis zeigt weiter, wie elektrische und magnetische Felder schließlich zwei Seiten der selben Münze sind, und wir erkennen wie sich bei relativistischen Geschwindigkeiten, diese in so direkter Form voneinander abhängen. Allgemein bei Boosts in Richtung $\boldsymbol{\beta}$ kann man folgendes sagen:

$$\mathbf{E}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{B}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{B}_{\parallel} \quad (2.10.44)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} \rightarrow \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{B}_{\perp} \rightarrow \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \quad (2.10.45)$$

2.10.2 Maxwell-Gleichungen in 4d

2.10.3 Doppler-Effekt

2.11 Elektrodynamik als Feldtheorie

Eine **Feldtheorie** beschäftigt sich ganz grob gesagt mit **Feldern**. ein **Feld** ist eine Anordnung von Werten im Raum, das heißt, eine Verteilung von einer Größe im Raum. Damit kann man zwischen skalaren, vektoriellen und tensoriellen Feldern unterscheiden, wobei die ersten zwei Spezialfälle vom dritten sind. Bekannt ist natürlich die Quantenfeldtheorie unter anderem, aber die Elektrodynamik wurde noch vor der Existenz der Quantentheorie als eine Feldtheorie betrachtet.

2.11.1 Lagrange-Mechanik

Allerzentralste Begriff einer Feldtheorie ist die Wirkung, welche wir aus der Theo II 0.1.2 kennen als

$$S[q(t)] = \int dt L(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.11.1)$$

und damit das Hamiltonsche Prinzip, was besagt dass die Variation dieser Wirkung verschwinden muss. Dabei haben wir die Euler-Lagrange Gleichung eingeführt als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.11.2)$$

Weiter haben wir auch gelernt, dass man für kontinuierliche Systeme (cough cough wie Felder) man die Lagrange-Dichte benutzen kann, weshalb das Wirkungsfunctional zu

$$S[A^\mu] = \int d^4x \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu) \quad (2.11.3)$$

2.11.2 "Herleitung" der Lagrange-Dichte-Funktion der E-Dynamik

Nun, mit der Mechanik war irgendwie verständlich, wie man auf die Lagrange-Funktion bzw. die Lagrange-Dichte kam. Was müssen wir denn für die E-Dynamik machen? Als erstes müssen wir zuerst festlegen, wie Teilchen mit den Feldern interagieren, wechselwirken. Naja, der erste Teil der Antwort dazu ist: Man muss raten. Unser Ziel ist, dass

aus der Euler-Lagrange-Gleichung, was die Bewegungsgleichung eines Teilchens rausgibt, die Bewegungsgleichung eines Teilchens in der Elektrodynamik rauskommt. Die Maxwell-Gleichungen sind nämlich genau das! Die sind die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik. Also ein Ansatz ist sicherlich: Rate Mal und gucke ob es funktioniert. Wir wollen als nächstes ein paar Überlegungen machen, die uns dieses "Raten" vereinfachen werden. Wir fordern zwei Sachen hier:

1. \mathcal{L} soll eichinvariant sein
2. \mathcal{L} soll Lorentzinvariant sein

Ausgehend vom ursprünglichen Prinzip $L = T - V$ wollen wir unsere potentielle Energie wie folgt motivieren: Durch ein elektrisches Feld wird Arbeit auf ein geladenes Teilchen verrichtet, also trägt dieses zum Teil zur Energie bei:

$$-\nabla V = \mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad | \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.11.4)$$

$$-\nabla V = -q\nabla\phi \quad (2.11.5)$$

$$V = q\phi \quad (2.11.6)$$

Also ohne noch die Bewegung des Teilchens miteinzubeziehen, kennen wir einen Beitrag zur Lagrange-Funktion:

$$L = T - q\phi \quad (2.11.7)$$

Die nächste Frage ist: Was machen wir mit dem anderen Potential? Betrachten wir also den stationären Fall ohne "kinetische Energie":

$$S_{\text{stat}}[A^\mu] = \alpha \int A_\mu dx^\mu \quad | \quad dx^\mu = u^\mu d\tau = \frac{u^\mu dt}{\gamma} \quad (2.11.8)$$

$$= \alpha \int A_\mu \frac{u^\mu dt}{\gamma} \quad (2.11.9)$$

Hier hätten wir schon die Lagrange-Funktion gegeben als:

$$L_{\text{stat}} = \frac{\alpha}{\gamma} A_\mu u^\mu \quad (2.11.10)$$

Und ein Vergleich mit (2.11.7) würde uns $\alpha = q/c$ liefern, aber wir sind ja in die *Lagrange-Dichte* interessiert, dies ist aber nicht schlimm, denn wir können ja die Ladung als das Integral über die Dichte darstellen:

$$q = \int d^3x \rho \quad (2.11.11)$$

Und das bringen wir zurück in die Wirkung:

$$S_{\text{stat}}[A^\mu] = \int d^3x' dx^\mu \rho A_\mu \quad (2.11.12)$$

$$= \int d^3x' \frac{dx'^0}{c dt} dx^\mu \rho A_\mu \quad (2.11.13)$$

$$= \frac{1}{c} \int d^4x' \rho \frac{dx'^\mu}{dt} A_\mu \quad | \quad \rho \frac{dx^\mu}{dt} = (\rho c \quad \rho \mathbf{v}) = j^\mu \quad (2.11.14)$$

$$= \frac{1}{c} \int d^4x' j^\mu A_\mu \quad (2.11.15)$$

Wunderbar, nun wollen wir untersuchen, ob dieser Ausdruck Lorentz- und eichinvariant ist. Beep boop beep boop beeeep. Analyse fertig, dieser Ausdruck ist Lorentz- und eichinvariant.

Ein weiterer Einfluss kommt natürlich durch die elektrischen und magnetischen Feldern. Man kann schauen, welche Kombination dazu führt, dass die Wirkung eich- und Lorentzinvariant bleibt, und außerdem, welche Kombination überhaupt einen Einfluss auf die schließliche Bewegungsgleichungen ausübt. Dabei ist der beste Versuch die Kombination:

$$S_{\text{elmag}}[A^\mu] = \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.11.16)$$

Beide Ausdrücke zusammen¹⁴ ergeben was wir als die Wirkung der Elektrodynamik kennen:

$$S[A^\mu] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} j_\mu A^\mu \right] \quad (2.11.17)$$

Dazu kommt, um den T -Teil der Lagrange-Funktion zu beseitigen auch die Überlegung, dass sich ein Teilchen im Raum frei bewegen kann, weshalb die uns vertraute mechanische Bewegung auch eine Rolle spielen mag, mit einem Beitrag

$$S_{\text{kin}} = - \int mc^2 d\tau \quad (2.11.18)$$

2.11.3 Herleitung der Maxwellgleichungen

Wir benutzen das Wort "Herleitung" schon wieder ziemlich freizügig, denn zu einem erfindenen axiomatischen Ausdruck wie die Wirkung der Elektrodynamik wollen wir jetzt rückwirkend die Maxwell-Gleichungen zuordnen, obwohl wir die Wirkung genau so definiert haben, sodass die Maxwell-Gleichungen am Ende rauskommen. Wir wollen uns nur vergewissern, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Dazu wissen wir folgendes aus der Mechanik: Durch die Euler-Lagrange-Gleichungen, angewandt auf unsere Lagrange-Funktion, erhalten wir die Bewegungsgleichungen unseres Systems. Dies ist nun genau analog bei elektrischen und magnetischen Feldern, die Bewegungsgleichungen, in diesem Sinne, sind die Maxwell-Gleichungen! In der 4-er Sprache kann man die Euler-Lagrange Gleichung schreiben als

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (2.11.19)$$

¹⁴Unter Berücksichtigung der angemessenen Konstanten

Diese wenden wir auf unsere Lagrange-Dichte an:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}j_\mu A^\mu \quad (2.11.20)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left(-\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \frac{4\pi}{c}j_\rho A^\sigma \right) \right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left(-\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - \frac{4\pi}{c}j_\rho A^\sigma \right) \quad (2.11.21)$$

Wir werfen schon im Voraus ein paar Sachen aus dem Fenster: A^μ hängt nicht direkt von $\partial_\mu A_\nu$ ab, so wie in der Mechanik x nicht direkt von \dot{x} abhängt. Aber warum können wir beim zweiten Term die Ausdrücke $F^{\mu\nu}$ sofort verwerfen? hängen sie nicht von $\partial^\mu A^\nu$ und dementsprechend von A_ν ab? Jain. Natürlich hängt eine Ableitung von der Funktion selbst ab, aber wir betrachten hier strikt die partielle Ableitung, das heißt, wir suchen nur eine perfekte Übereinstimmung mit der Variable (Funktion) nach der wir ableiten. Wir erhalten somit

$$0 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4}\partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right]}_{\text{Produktregel}} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial A_\nu} (j_\mu A^\mu) \quad (2.11.22)$$

$$= -\frac{1}{4}\partial_\mu \left[F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F_{\rho\sigma} \right] + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial A_\nu} (j_\rho A^\rho) \quad (2.11.23)$$

Aufgrund der Symmetrie erhalten wir im ersten Term zwei Mal den selben Ausdruck, wir müssen also nur einmal die Ableitung ausrechnen:

$$0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu \left[F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \right] + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial A_\nu} (j_\rho A^\rho) \quad (2.11.24)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu [F^{\rho\sigma} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu)] + \frac{4\pi}{c} j_\rho \frac{\partial}{\partial A_\nu} A^\rho \quad (2.11.25)$$

Wir benutzen wieder die Antisymmetrie des Feldstärketensors und werden das eine Vorzeichen weg:

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu [F^{\rho\sigma} \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + F^{\sigma\rho} \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu] + \frac{4\pi}{c} j_\rho \delta^{\nu\rho} \quad (2.11.26)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu [F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}] + \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.11.27)$$

$$= -\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.11.28)$$

Dies ist die perfekte Überleitung um das nächste wichtige Thema einzuführen.

Übung

Sagen wir, wir hätten doch beide Terme ausgerechnet. Was machen wir mit etwas der Form

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu B_\nu} (A^\rho B^\sigma)$$

Jap, wir müssen kontrahieren:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial A_\mu B_\nu} (g^{\rho\lambda} g^{\sigma\tau} A_\lambda B_\tau) \\ &= g^{\rho\lambda} g^{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial A_\mu B_\nu} (A_\lambda B_\tau) \\ &= g^{\rho\lambda} g^{\sigma\tau} \delta_\lambda^\mu \delta_\tau^\nu \\ &= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

2.11.4 Maxwell-Gleichungen in 4er Sprache

Aus der Wirkung der Elektrodynamik haben wir einen Ausdruck, welchen wir als die "Bewegungsgleichung" der Materie identifiziert haben, und was den Maxwell-Gleichungen entspricht. Diese haben die oben hergeleitete Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.11.29)$$

2.11.5 Elektrodynamik und Noether

' "Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße"

- Emmy Noether'
- Hebbie

Recap: Mechanik

In der Mechanik haben wir über Erhaltungsgrößen wie Energie, Drehimpuls, Impuls, usw. gesprochen. Diese Erhaltungsgrößen waren durch Noether eng mit einer kontinuierlichen Koordinatentransformation

$$q \rightarrow q + \delta q \quad (2.11.30)$$

verbunden. Eine solche Transformation war erlaubt, wenn die Bewegungsgleichung vorausgesagt durch die Lagrange-Funktion nach der Transformation invariant blieb, das heißt, die Lagrange-Funktion durfte sich um eine totale Ableitung von der ursprünglichen Lagrange-Funktion

$$L \rightarrow L + \delta L = L + \frac{df}{dt} \quad (2.11.31)$$

Noether für Felder

In der Felder-Sprache lassen sich diese zwei Bedingungen ebenfalls darstellen:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \delta A^\mu \quad (2.11.32)$$

Eine "totale" Ableitung in der 4-er Sprache wird dieses Mal nicht durch die totale Zeitableitung dargestellt. Dieses Mal betrachten wir ja die Lagrange-Dichte und integrieren über die ganzen 4 Dimensionen, also sollte unsere totale Ableitung eine 4-er Ableitung sein. Wir nennen jetzt die Bedingung

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L} + \partial_\mu \mathcal{F}^\mu \quad (2.11.33)$$

Energie-Impuls-Tensor

Offensichtlich ist auch bei der Elektrodynamik eine Translation im Raum und in der Zeit eine gültige Symmetrietransformation, aus der wir die Erhaltung einer Größe wie die Energie und des Impulses erwarten dürfen.

3. Anhang

3.1 Koordinatenwechsel

Kartesische Koordinaten

Vektor	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Operator	$\nabla = \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \partial_i$
Gradient	$\nabla \phi = \hat{\mathbf{x}}_i \partial_i (\phi)$
Divergenz	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_i F_i$
Rotation	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \varepsilon^{ijk} \hat{\mathbf{x}}_i \partial_j F_k$
Laplace	$\Delta \phi = \partial_i \partial_i \phi$
Metrik	$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabelle 3.1: Kartesische Koordinaten

Kugelkoordinaten

Siehe Theo II Guide [0.1.2](#) Abschnitt 1.4.1 Nabla Operator in Kugelkoordinaten für eine ausführlichere Herleitung

Vektor	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$
Operator	$\nabla_{\text{Kug}} = \hat{\mathbf{r}} \partial_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial_\theta}{r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial_\varphi}{r \sin \theta}$
Gradient	$\nabla \phi = \hat{\mathbf{r}} \partial_r \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial_\theta \phi}{r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial_\varphi \phi}{r \sin \theta}$
Divergenz	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi F_\varphi$
Rotation	$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial_\theta (\sin \theta F_\varphi) - \partial_\varphi F_\theta}{r \sin \theta} \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial_\varphi F_r}{r \sin \theta} - \frac{\partial_r (r F_\varphi)}{r} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left(\frac{\partial_r (r F_\theta) - \partial_\theta F_r}{r} \right)$
Laplace	$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi$
Metrik	$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$

Tabelle 3.2: Kugelkoordinaten

Zylinderkoordinaten

Vektor	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$
Nabla	$\nabla_{\text{Zyl}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \partial_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial_\varphi}{\rho} + \hat{\mathbf{z}} \partial_z$
Gradient	$\nabla \phi = \hat{\boldsymbol{\rho}} \partial_\rho \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial_\varphi \phi}{\rho} + \hat{\mathbf{z}} \partial_z \phi$
Divergenz	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial_\rho (\rho F_\rho)}{\rho} + \frac{\partial_\varphi F_\varphi}{\rho} + \partial_z F_z$
Rotation	$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial_\varphi F_z}{\rho} - \partial_z F_\varphi \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial_\rho (\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_r}{\rho} \right)$
Laplace	$\Delta \phi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \phi + \partial_z^2 \phi$
Metrik	$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabelle 3.3: Zylinderkoordinaten

Allgemeine Koordinaten

Vektor	$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_n) = x^i \hat{\mathbf{e}}_i$
Basis	$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}; \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{ \mathbf{b}_i }$
Nabla	$\nabla =$
Gradient	$\nabla \phi = \partial_i(\phi) g^{ij} \hat{\mathbf{e}}_j$
Divergenz	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} F^i)$
Rotation	$(\nabla \times \mathbf{F}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \partial_j F_k$
Laplace	$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \phi)$
Metrik	$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$

Tabelle 3.4: Zylinderkoordinaten

Rechenregeln

Produktregel für Laplace:

$$\Delta \varphi \cdot \psi = \psi \Delta \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi \quad (3.1.1)$$

Identitäten

$$\nabla(\phi \cdot \psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \cdot (\phi \cdot \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \psi \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \times \phi \mathbf{A} = \phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \times \mathbf{A} \quad (3.1.4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.1.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (3.1.6)$$

3.2 Fourier

Fourier Transformation

$$\text{Fourier Transform:} \quad \tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (3.2.1)$$

$$\text{Inverse Fourier Transform:} \quad f(x) = \tilde{\mathcal{F}}[\tilde{f}(k), x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{f}(k) \quad (3.2.2)$$

Eigenschaften

$$\text{a) } \mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha \mathcal{F}[f(x); k] + \beta \mathcal{F}[g(x); k]$$

$$\text{b) } \mathcal{F}[f(x - a); k] = e^{-ika} \mathcal{F}[f(x); k]$$

c) $\mathcal{F}[f(ax); k] = \frac{1}{a} \mathcal{F}[f(x); \frac{k}{a}]$ für $a > 0$

d) $\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k]$

e) $\mathcal{F}[\frac{d}{dx}f(x); k] = ik\mathcal{F}[f(x); k]$

Dies gilt auch iterativ und insbesondere in mehr Dimensionen! Zum Beispiel ist:

$$\mathcal{F}[\Delta f(\mathbf{x}); \mathbf{k}] = (-i\mathbf{k})^2 \mathcal{F}[f(\mathbf{x}); \mathbf{k}] = -k^2 \mathcal{F}[f(\mathbf{x}); \mathbf{k}]$$

f) $\mathcal{F}[xf(x); k] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}[f(x); k]$

g) $\mathcal{F}[f(x); -k] = \mathcal{F}[f(x); k]^*$

3.3 Green

Greensche Identitäten

Erste Identität

$$\int_V dV \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi = \int_V dV \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \varphi \nabla \psi \quad (3.3.1)$$

Zweite Identität

$$\int_V dV \psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \quad (3.3.2)$$

Glossar

Feld Verteilung einer physikalischen Größe im Raum. Beispiele davon sind skalare Felder, anders bekannt als Funktionen, Vektorfeld, wie zum Beispiel die Kraft im Raum oder tensorielle Felder, wie der Druck oder der Energie-Impuls-Tensor. [75](#)

Feldstärkentensor Ausführliche Erklärung später. [40](#)

Feldtheorie Theorie welche physikalische Felder untersucht. [75](#)

kontravariant *Kontravariant* entspricht einer Änderung *gegen*. Ein kontravarianter Tensor transformiert *gegen* die Transformation der Basis. [14](#)

kovariant *Kovariant* entspricht einer Änderung *mit*. Im Kontext mit Tensoren heißt das, dass sie sich ändern bzw. transformieren *mit* der Transformation der Basis. [14](#)

Ladung Die Ladung ist eine physikalische Eigenschaft, welche bestimmt wie Materie mit elektrischen und magnetischen Felder interagiert.. [42](#)

Lorentztransformation Lorentztransformationen sind eine Menge linearer Abbildungen im Zeitraum, die zwei Systeme die sich zueinander mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Diese müssen einige Bedingungen erfüllen. [64](#)

Methode der Spiegelladungen Methode zur Bestimmung des elektrischen Feldes, mit welchem man durch geometrische Überlegung / Herleitung eine virtuelle Ladung im Raum stellt. Die "Existenz" dieser Ladung hilft dann das Potential herzuleiten. [44](#)

Metrik Eine Metrik ist ein Konzept des Abstands zwischen Punkten einer Menge. Eine Menge zusammen mit einer Metrik heißt ein metrischer Raum. [17](#)

metrischer Tensor Der metrische Tensor ist ein mathematisches Werkzeug, welches die Geometrie eines Räumes beschreibt. Er wird aus den Koordinatenlinien (i.e. Basisvektoren) gebaut, und mit ihm lassen sich unter Anderem Abstände und allgemein "Größen" in einem Raum. [17](#)

ODE Ordinary Differential Equations sind Differentialgleichungen, bei welchen es eine unabhängige Variable gibt, nach der es abgeleitet wird. Beispielsweise ist in der Physik oft die Zeit als unabhängige Variable gegeben. [8](#)

PDE Partial Differential Equations sind Differentialgleichungen, bei welchen es nach mehreren voneinander unabhängigen Variablen abgeleitet wird. Beispielsweise beim Hitze-Transfer in einem Körper spielt der Ort im Körper und die Zeit eine Rolle,

es gibt also schon zwei unabhängige Variablen. Hier müssen Randbedingungen oder "boundary conditions" gegeben, oder muss danach gelöst werden um sie zu lösen. [8](#)

Postulat Ein Postulat suggeriert oder nimmt eine Aussage als wahr. Dies wird angenommen, selbst wenn kein Beweis vorliegt. Aus dieser Aussage leitet man weitere Argumente her. Beispielsweise sind in der euklidischen Geometrie eine Sorte Postulate formuliert. Diese Postulate sind leider nicht mehr gültig, wenn man, ehem, *nicht-euklidische* Geometrie, wie eine gekrümmte Raumzeit annimmt. [65](#)

Rapidity In der Relativitätstheorie verwendeter Begriff, um Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit zu beschreiben. Bietet den Vorteil über normale Geschwindigkeit, dass Rapiditäten einfach addiert sein können, wobei man bei Geschwindigkeiten das nicht machen kann. [67](#)

Richtungsableitung Änderungsrate einer Funktion in eine vorgegebene Richtung

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^1, \dots, x^i + h, \dots, x^n) - f(x)}{h}$$

. [22](#)

Wirkungsfunktional Die Wirkung ist eine skalare Größe, die beschreibt welchen "Aufwand" ein physikalisches System über die Zeit hervorbringen sollte. Es wird die Lagrange-Funktion (Energie) über die Zeit integriert, also hat es die Einheit Energie mal Zeit. Das Wirkungsfunktional nimmt eine Bahn oder Trajektorie und ordnet ihr eine Zahl zu. Physikalische Bahnen entsprechen einem Sattelpunkt im Wirkungsfunktional. [40](#)

[toctitle=Glossar]