11. Übungsblatt zu Analysis I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

11.1 Aufgabe 1: Differenzierbarkeit

Geg.:

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

a) Sei $k = 1$, $x_0 = 0$

Z.z.: f_1 stetig aber nicht differenzierbar an x_0.

Stetigkeit:

Mit dem Sandwich Lemma können wir zeigen:

$$|0| \leq |x \sin\frac{1}{x}| \leq |x| \tag{2}$$
$$\lim_{x\to 0} |0| = 0 \tag{3}$$
$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 \tag{4}$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} |x \sin\frac{1}{x}| \leq 0 \tag{5}$$
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f_1(0) \tag{6}$$

Daraus folgt, dass die Funktion f_1 stetig an der Stelle x_0 ist.

Differenzierbarkeit:

Nach L'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \tag{7}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \tag{8}$$
$$= \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} \tag{9}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f_1 an x_0 nicht differenzierbar.

b) Sei $k = 2$

Nach dem Quotientenkriterium gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} && (10)\\
&= \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} && (11)\\
&= 0 && (12)
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, also ist f_2 an x_0 differenzierbar.

Stetigkeit:

Für die Stetigkeit müssen wir also die Ableitung überprüfen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} && (13)\\
&= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} && (14)
\end{aligned}$$

Wir überprüfen ob der Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = -\cos \frac{1}{x} \qquad (15)$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f_2 an x_0 nicht stetig.

c) Sei $k = 3$

Nach dem Quotientenkriterium gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} &= \lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} && (16)\\
&= 0 && (17)
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, jetzt überprüfen wir die Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x^3 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} && (18)\\
&= 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} && (19)\\
\lim_{x\to 0} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} &= 0 && (20)
\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert, also ist f_3 einmal differenzierbar.

$$f''(x) = 6x \sin\frac{1}{x} - 3\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = -4\cos\frac{1}{x} + \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} \tag{22}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f_3 nicht zwei mal differenzierbar

11.2 Aufgabe 4

Code Juan Provencio: FDhKKY

Code LeoKnapp: LJmqP3