**10. Übungsblatt zur Theoretischen Physik (WS 20/21)**

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ $\Sigma$___

---

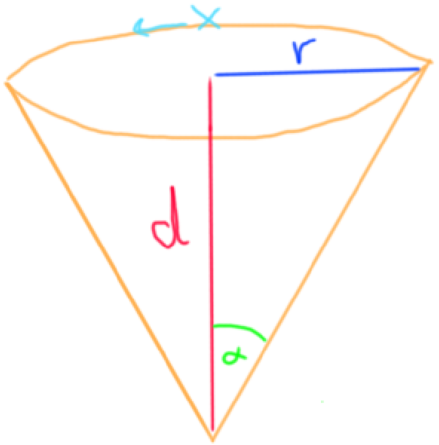
## 10.1 Aufgabe 1

Der Drehimpuls ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} && (1) \\ &= m\vec{r} \times \vec{v} && (2) \end{aligned}$$

Das Teilchen bewegt sich aber stets orthogonal zum Drehimpuls, weshalb wir den Betrag des Drehimpulses sofort bestimmen können und zwar:

$$\begin{aligned} L &= rmv && \vert\, v = \omega r && (3) \\ &= mr^2\omega && && (4) \end{aligned}$$




An der Zeichnung erkennt man:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{r}{d} && (5) \\ r &= d\tan\alpha && (6) \end{aligned}$$

Dementsprechend ist der Drehimpuls:

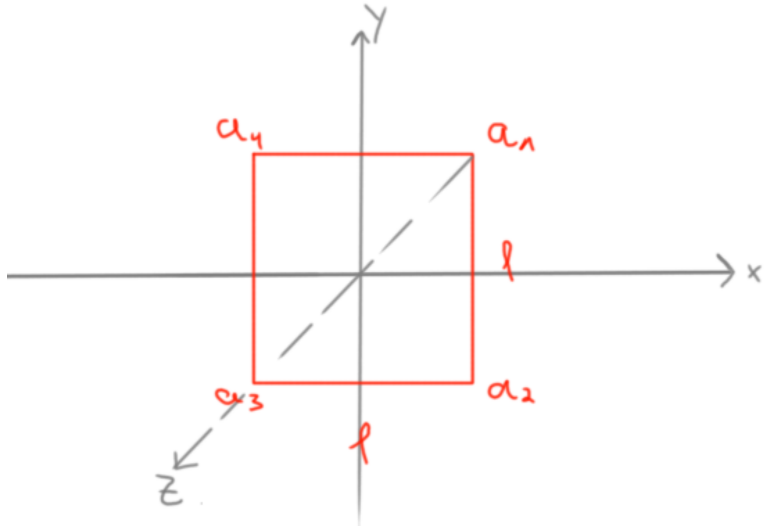
$$L = md^2\tan^2\alpha\omega \qquad (7)$$

Da der Drehimpuls konstant ist, ist seine erste Ableitung gleich 0.

## 10.2 Aufgabe 2

a) Zur Bestimmung des Trägheitstensors benutzen wir die Formel:

$$I^{ij} = \sum_a m_a(\delta^{ij}\vec{r}_a^{\,2} - (\vec{r}_a)^i(\vec{r}_a)^j) \tag{8}$$




Unsere Eckpunkte sind:

$$r_1 = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_2 = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_3 = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_4 = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Dann ist:

$$I^{11} = \sum_a m_a(\vec{r}_a^{\,2} - ((\vec{r}_a)^1)(\vec{r}_a)^1) \tag{10}$$

$$= m_1\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_2\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_3\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_4\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) \tag{11}$$

$$= m\left(\frac{l^2}{4} \cdot 4\right) \tag{12}$$

$$= ml^2 \tag{13}$$

$$I^{22} = \sum_a m_a(\vec{r}_a^{\,2} - ((\vec{r}_a)^2)(\vec{r}_a)^2) \tag{14}$$

$$= m_1\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_2\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_3\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) + m_4\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) \tag{15}$$

$$= m\left(\frac{l^2}{4}\cdot 4\right) \tag{16}$$
$$= ml^2 \tag{17}$$

$$I^{33} = \sum_a m_a(\vec{r}_a^2 - ((\vec{r}_a)^3)(\vec{r}_a)^3) \tag{18}$$
$$= m_1\left(\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}\right) + m_2\left(\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}\right) + m_3\left(\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}\right) + m_4\left(\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}\right) \tag{19}$$
$$= m\left(\frac{l^2}{2}\cdot 4\right) \tag{20}$$
$$= 2ml^2 \tag{21}$$

Aufgrund der Symmetrie des Quadrats haben wir für die Fälle $i \neq j$:

$$I^{ij} = \sum_a m_a(-(\vec{r}_a)^1(\vec{r}_a)^2) \tag{22}$$
$$= 0 \tag{23}$$

In Matrixdarstellung ist also das der Trägheitstensor:

$$I = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ml^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

b) Aufgrund der Symmetrie des Trägheitstensors (TT), muss der transponierte TT gleich dem TT sein, deswegen kann *ii.* kein TT sein.

Außerdem ist muss entlang der Diagonal ein positiver Wert rauskommen, denn es gilt:

$$\vec{r}^2 \geq r^i r^j \tag{25}$$

Deswegen schließen wir auch Beispiel *ii.* aus.

Beispiel *iii.* kann ein Trägheitstensor darstellen.

## 10.3 Aufgabe 3

a) Bewegungsgleichung für die Kugel die durch das Loch fällt (vertikal):

$$m\ddot{z} = ma \tag{26}$$
$$\ddot{z} = a \tag{27}$$

Diese Gleichung können wir sofort integrieren

Bewegungsgleichung für die Kugel auf der Ebene (horizontal):

$$
\begin{aligned}
m\ddot{r} &= m\omega^2 r - m(g-a) && (28)\\
\ddot{r} &= \omega^2 r - g + a && (29)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung hat noch zwei voneinander abhängige Funktionen, also können wir noch nicht integrieren.

Dahinter steckt der Drehimpulserhaltungssatz

b) Damit sich die horizontale Kugel auf einer Kreisbahn bewegen kann, muss die Zentripetalkraft gleich der Gewichtskraft sein. Dann ist

$$
\begin{aligned}
m\omega^2 r &= mg && (30)\\
\omega^2 r &= g && (31)\\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{r}} \qquad \text{und} && (32)\\
r &= \frac{g}{\omega^2} && (33)
\end{aligned}
$$

## 10.4 Aufgabe 4

Geg.:

- $\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$

a)

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= (\dot{\vec{r}} \times \vec{L})^{\cdot} - \left(\frac{\alpha}{r}\vec{r}\right)^{\cdot} && (34)\\
&= \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2}\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (35)\\
&= \ddot{\vec{r}} \times (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\alpha \dot{r}}{r^2}\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (36)
\end{aligned}
$$

Dafür überprüfen wir:

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} && (37)\\
&= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} && (38)\\
&= \frac{1}{r}(r\dot{r}\cos^2\varphi - r^2\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + r\dot{r}\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi) && (39)\\
&= \frac{1}{r}(r\dot{r}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) && (40)\\
&= \dot{r} && (41)
\end{aligned}
$$

Also:

$$\dot{\vec{A}} = m\ddot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\alpha(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})}{r^3}\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} \tag{42}$$

Da

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{43}$$
$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{-\alpha\vec{r}}{r^3} \tag{44}$$
$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-\alpha\vec{r}}{mr^3} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= \frac{-\alpha\vec{r}}{r^3} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\alpha(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})}{r^3}\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (46)\\
&= -\frac{\alpha}{r^3}[\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})] + \frac{\alpha}{r^3}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (47)\\
&= \frac{\alpha}{r^3}(r^2)\dot{\vec{r}} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (48)\\
&= \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} && (49)\\
&= 0 && (50)
\end{aligned}$$

b) Der Kreuzprodukt: $\dot{\vec{r}} \times \vec{L}$ liegt in der Bahnebene, denn es liegt stets orthogonal zur Geschwindigkeit und zum Drehimpuls. $\frac{\alpha}{r}\vec{r}$ liegt offensichtlich auch in der Bahnebene. Der Lenzsche Vektor liegt dann in der Bahnebene.

c)

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{r} &= \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{r} && (51)\\
&= (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - \frac{\alpha\vec{r}^2}{r} && (52)\\
&= \vec{L}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \alpha r && (53)\\
&= \vec{L} \cdot \frac{\vec{L}}{m} - \alpha r && (54)\\
&= \frac{L^2}{m} - \alpha r && (55)
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung folgt:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{L^2}{m} - \alpha r\right)\right)^{-1} = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{m\alpha}{L^2} - \frac{1}{r} \tag{56}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u = \frac{m\alpha}{L^2} - u \qquad \Big| w = u - \frac{m\alpha}{L^2} \tag{57}$$

$$ \tag{58} $$
$$ w'' = -w \qquad |w = C\cos\varphi \tag{59} $$

Also:

$$ w = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} \tag{60} $$
$$ C\cos\varphi = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} \tag{61} $$
$$ \frac{m\alpha}{L^2} + C\cos\varphi = \frac{1}{r} \tag{62} $$
$$ r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} + C\cos\varphi} \qquad |\cdot 1 \tag{63} $$
$$ = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \frac{L^2}{m\alpha}C\cos\varphi} \qquad |p = \frac{L^2}{m\alpha}, e = \frac{L^2 C}{m\alpha} \tag{64} $$
$$ = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{65} $$
$$ \tag{66} $$

Um $e$ zu bestimmen schauen wir uns nochmal die Energieformel an der Stelle wo die Geschwindigkeit 0 ist, und die Gesamtenergie unser Potential $U$ ist. Dies passiert wenn die Ableitung des Radius $r$ null wird: also

$$ \frac{dr}{d\varphi} = \frac{pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} \tag{67} $$
$$ 0 = \frac{pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} \tag{68} $$
$$ \rightarrow \varphi = 0 \tag{69} $$

Dann ist die Energie

$$ E = \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\alpha}{r} \tag{70} $$

Wenn wir jetzt die Formel für $r$ in die Energie einsetzen, dann erhalten wir:

$$ E = \frac{1}{r}\left(\frac{L^2}{m} \cdot \frac{1}{r} - \alpha\right) \tag{71} $$
$$ = \frac{1+e}{p}\left(\frac{L^2}{m} \cdot \frac{1+e}{p} - \alpha\right) \tag{72} $$
$$ = (1+e) \cdot \frac{m\alpha}{L^2}\left(\frac{L^2}{2m} \cdot (1+e) \cdot \frac{m\alpha}{L^2} - \alpha\right) \tag{73} $$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2}\left(\frac{(1+e)\alpha}{2} - \alpha\right) \tag{74}$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{e\alpha}{2} - \alpha\right) \tag{75}$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{2}(e-1) \tag{76}$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha^2}{2L^2}(e-1) \tag{77}$$

$$= \frac{(e+1)(e-1)m\alpha^2}{2L^2} \tag{78}$$

$$= \frac{(e^2-1)m\alpha^2}{2L^2} \tag{79}$$

$$E = \frac{e^2 m\alpha^2}{2L^2} - \frac{m\alpha^2}{2L^2} \tag{80}$$

$$E + \frac{m\alpha^2}{2L^2} = \frac{e^2 m\alpha^2}{2L^2} \tag{81}$$

$$\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1 = e^2 \tag{82}$$

$$e = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1} \tag{83}$$

d) Der Betrag des Lenzschen Vektors stellt den Abstand vom Zentrum bis zum Zentrum nächsten Punkt und die Richtung zeigt vom Brennpunkt zum Perihel.