12. Übungsblatt zu Analysis I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

12.1 Aufgabe 1

a) Ges.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin x} && \Big|\frac{0}{0} && (1)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin 2\frac{x}{2}} && \Big|\sin 2x = 2\sin x\cos x && (2)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} && && (3)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} && && (4)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\cos\frac{x}{2}} && && (5)\\
&= \frac{1}{4} && && (6)
\end{aligned}$$

b) Ges.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x\sin x)}{\sin x + x\cos x} && \Big|\frac{0}{0} && (7)\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} && && (8)\\
&= \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} && \Big|\frac{0}{0} && (9)\\
&= \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + (\cos x - x\sin x)} && && (10)\\
&= \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x} && && (11)\\
&= \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{1}{2-0} && && (12)\\
&= \frac{0}{2} = 0 && && (13)
\end{aligned}$$

12.2 Aufgabe 2

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|r_x - a| &= \sqrt{(x - a_x)^2 + (0 - a_y)^2} && (14)\\
&= \sqrt{(x - a_x)^2 + (a_y)^2} && (15)\\
|r_y - b| &= \sqrt{(x - b_x)^2 + (0 - b_y)^2} && (16)\\
&= \sqrt{(x - b_x)^2 + (b_y)^2} && (17)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \sqrt{(x - a_x)^2 + (a_y)^2} + \sqrt{(x - b_x)^2 + (b_y)^2} && (18)\\
L'(x) = 0 &= \frac{x - a_x}{\sqrt{(x - a_x)^2 + a_y^2}} + \frac{x - b_x}{\sqrt{(x - b_x)^2 + b_y^2}} && (19)\\
&= \frac{x - a_x}{|r_x - a|} + \frac{x - b_x}{|r_x - b|} && (20)\\
&= \cos\varphi_a + \cos\varphi_b && (21)\\
-\cos\varphi_b &= \cos\varphi_a && (22)\\
\cos\varphi_b &= \cos\varphi_a && (23)\\
\rightarrow \varphi_b &= \varphi_a && (24)
\end{aligned}
$$

Es liegt ein Maximum vor, wenn die zweite Ableitung an der Stelle x_0 kleiner als 0 ist.

$$
\begin{aligned}
L''(x) &= \frac{a_y^2}{|r_x - a|((x - a_x)^2 + a_y^2)} + \frac{b_y^2}{|r_x - b|((x - b_x)^2 + b_y^2)} && (25)\\
0 &< \frac{a_y^2}{|r_x - a|((x - a_x)^2 + a_y^2)} + \frac{b_y^2}{|r_x - b|((x - b_x)^2 + b_y^2)} && (26)
\end{aligned}
$$

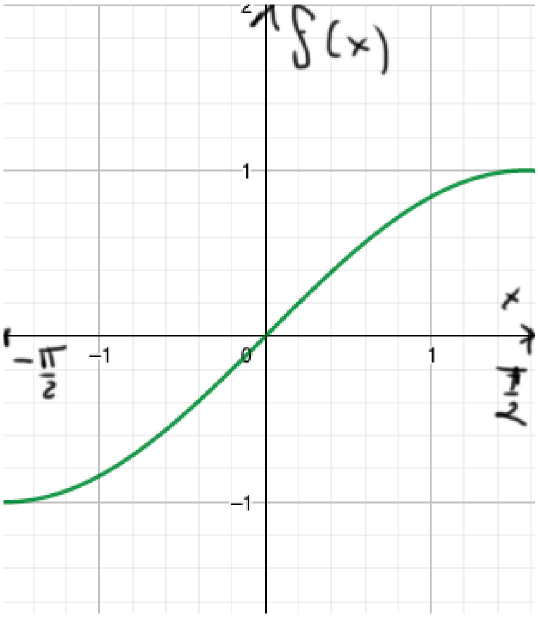
Jeder Wert ist durch entweder den Betrag oder das Quadrieren positiv, also ist die zweite Ableitung eindeutig größer als 0.

12.3 Aufgabe 3

12.4 Aufgabe 4

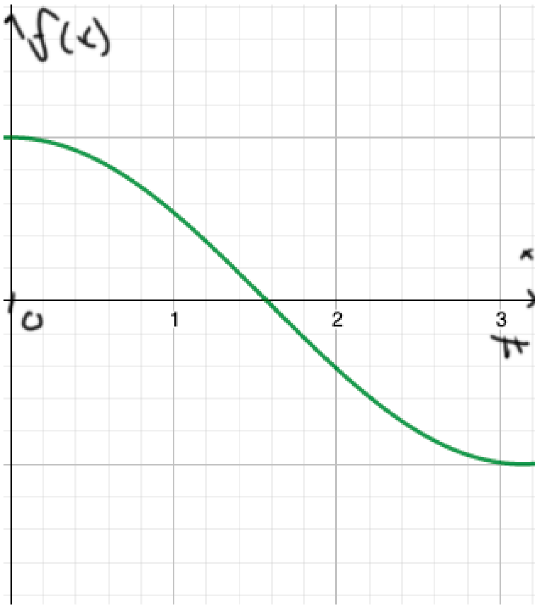
a) Skizzen

(a) $f(x) = \sin x$



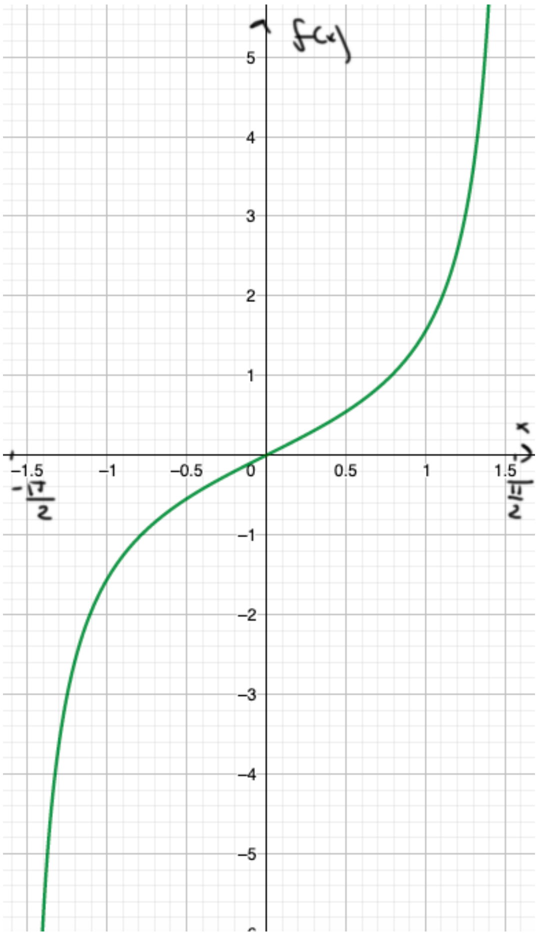
Das Bild dieser Funktion ist $N = [-1, 1]$

(b) $f(x) = \cos x$



Das Bild dieser Funktion ist $N = [-1, 1]$

(c) $f(x) = \tan x$



Das Bild dieser Funktion ist $M = (-\infty, +\infty)$

b) Die Funktionen sind in den gewählten Intervallen bijektiv \streng monoton, also können wir auf diese Bildmenge eine Umkehrfunktion definieren.

c) Die Ableitung der Tangentenfunktion $f(x) = \tan x$ ist

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} && |\text{Quotientenregel} \quad (27)\\
&= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} && |\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (28)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x} && (29)\\
& && (30)
\end{aligned}
$$

d) $f(x) = \arcsin x$ ist im inneren ihres Definitionsbereichs differenzierbar, weil der sinus im gewählten Intervall streng monoton und stetig ist. Für die Ableitung gilt:

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{31}$$

Also:

$$\sin(\arcsin x = x \qquad |\frac{d}{dx} \tag{32}$$

$$\cos(\arcsin x)\arcsin' x = 1 \tag{33}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad \Big| \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{34}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \tag{35}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{37}$$

$f(x) = \arccos x$ ist im inneren ihres Definitionsbereiches differenzierbar wegen der gleichen Gründen wie für den Sinus.

Die Ableitung ist:

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \Big| \frac{d}{dx} \tag{38}$$

$$-\sin(\arccos x)\arccos' x = 1 \tag{39}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \qquad \Big| \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \tag{40}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \tag{41}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{42}$$

$f(x) = \arctan x$ ist im gewählten Definitionsbereich ebenfalls differenzierbar wegen der oben genannten Gründen.

Die Ableitung ist:

$$\tan(\arctan x) = x \qquad \Big| \frac{d}{dx} \tag{43}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \arctan x} \arctan' x = 1 \tag{44}$$

$$\arctan' x = \cos^2 \arctan x \qquad \Big| \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{45}$$

$$\cos^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = 1 \tag{46}$$

$$\cos^2 x + \tan^2 x \cos^2 x = 1 \tag{47}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{48}$$

$$\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x \tag{49}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \tag{50}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \tag{51}$$