Blatt 1 **22. November 2021**

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor/in: Tobias Hammel

1. Basiszerlegung und Darstellung von Ortszuständen

a) Uns interessieren die Koeffizenten $\langle x|\psi\rangle$, $\langle k|\psi\rangle$ der Darstellungen. Wir setzen schlicht die Defintitionen ein:

$$\langle x|\psi\rangle = \left\langle x\middle|\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\,|x'\rangle\,\mathrm{d}x'\right\rangle \tag{1}$$

Da das Integral über x' läuft, kann $\langle x|$ durchgezogen werden:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\,\langle x|x'\rangle\,\mathrm{d}x' \tag{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\delta(x-x')\,\mathrm{d}x' \tag{3}$$

$$= \Psi(x) \quad \checkmark \tag{4}$$

Eine analoge Argumentation liefert:

$$\langle k|\psi\rangle = \tilde{\Psi}(k) \quad \checkmark \tag{5}$$

b) Skalarprodukt zweier Zustände:
Wir nutzen aus, dass man stets mit $\mathbb{1}$ 'multiplizieren' darf

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\,\mathbb{1}\,|\psi\rangle \tag{6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle\phi|x\rangle\,\langle x|\psi\rangle\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\phi\rangle^*\,\langle x|\psi\rangle\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)^*\Psi(x) \quad \checkmark \tag{9}$$

Wobei im letzten Schritt die Ergebnisse der obigen Rechnung angewandt werden. Entsprechend gilt für die anderen Ausdrücke:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{10}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 = 1 \quad \checkmark$$

Konvention: ~ ist im Impulsraum => k

$$\langle\tilde{\phi}|\tilde{\psi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(\overset{k}{\cancel{x}})^{*}\tilde{\Psi}(\overset{k}{\cancel{x}})\,\mathrm{d}\overset{k}{\cancel{x}} \quad \checkmark \tag{11}$$

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\overset{k}{\cancel{x}})^{*}\tilde{\Psi}(\overset{k}{\cancel{x}})\,\mathrm{d}\overset{k}{\cancel{x}} = 1 \quad \checkmark \tag{12}$$

$= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(k)|^2 = 1$

c) Koordinatenwechsel:
Nun gilt:

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \tag{13}$$

Wir nutzen nun wieder den Trick aus Teil b):

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\mathbb{1}\,|x'\rangle\,\mathrm{d}x' \tag{14}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x') \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,|k\rangle\,\langle k|x'\rangle\,\mathrm{d}x' \qquad \langle x|k\rangle = \langle k|x\rangle^{*} \tag{15}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\,\mathrm{d}k\,|k\rangle\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx'}\,\mathrm{d}x' \tag{16}$$

Nun sortieren wir um und Vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x')\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx'}\,\mathrm{d}x'\,|k\rangle\,\mathrm{d}k \quad (*) \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Das gesamte Integral ist somit $|\psi\rangle$ und der innere Teil entspricht wie man sehen kann gerade der Foriertransformation von $\Psi(x)$. Das war zu zeigen.

$(*) \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k')\,|k'\rangle\,dk'$ (Def. Aufgabenblatt)

$\rightarrow$ Koeffizientenvergleich

3/3

2. Gaußsches Wellenpaket

Sei ein Materiewellenpaket der Form

$$\phi(x) = \phi_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right) \tag{19}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Außerdem sei $s_x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\{s_x\} > 0$. Die Fourierzerlegung in Ortsfrequenzen k sei gegeben durch

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) \mathrm{e}^{ikx} \,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi_0} \exp\left(-\frac{k^2}{4s_k}\right) \mathrm{e}^{ikx} \,\mathrm{d}k \tag{20}$$

a) Die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ zu finden ist gegeben durch

$$P(x) \,\mathrm{d}x = |\phi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{21}$$

Da man das Teilchen *irgendwo* finden muss, möchten wir dies normieren zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1 \tag{22}$$

Damit diese Bedingung erfüllt ist, muss man ein geeignetes ϕ_0 wählen.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P(x) \,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)^* \phi(x) \,\mathrm{d}x && (23)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^* \phi_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right)^* \exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right) \mathrm{d}x && (24)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0|^2 \exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right)^* \exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right) \mathrm{d}x && (25)
\end{aligned}$$

Da ein Imaginärteil unter dem Bruch steht, können wir beim Konjugieren nicht einfach die Exponenten zusammen addieren, wir bringen sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_x} &= \frac{1}{s_x} \cdot \frac{s_x^*}{s_x^*} && (26)\\
&= \frac{\mathrm{Re}(s_x) - \mathrm{Im}(s_x)}{\mathrm{Re}^2(s_x) + \mathrm{Im}^2(s_x)} && (27)\\
&= \frac{\mathrm{Re}(s_x) - \mathrm{Im}(s_x)}{|s_x|^2} && (28)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{s_x^*} = \frac{1}{s_x^*} \cdot \frac{s_x}{s_x} \tag{29}$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(s_x) + \operatorname{Im}(s_x)}{\operatorname{Re}^2(s_x) + \operatorname{Im}^2(s_x)} \tag{30}$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(s_x) + \operatorname{Im}(s_x)}{|s_x|^2} \tag{31}$$

Damit können wir die Exponenten zusammen addieren:

$$\exp\left(-\frac{x^2}{4s_x^*}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\frac{2\operatorname{Re}(s_x)}{|s_x|^2}\right) \tag{32}$$

Dies setzen wir zurück in (25) ein und erhalten:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0|^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{Re}(s_x)}{|s_x|^2}\right) \mathrm{d}x \qquad \Big| u = x\sqrt{\frac{\operatorname{Re}(s_x)}{2|s_x|^2}} \tag{33}$$

$$\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(s_x)}{2|s_x|^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= |\phi_0|^2 \sqrt{\frac{2|s_x|^2}{\operatorname{Re}(s_x)}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{34}$$

$$= |\phi_0|^2 \sqrt{\frac{2|s_x|^2}{\operatorname{Re}(s_x)}}\sqrt{\pi} \tag{35}$$

$$|\phi_0|^2 = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}(s_x)}{2\pi|s_x|^2}} \tag{36}$$

$$|\phi_0| = \left(\frac{\operatorname{Re}(s_x)}{2\pi|s_x|^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{37}$$

b) Aus einer Tabelle für Fouriertransformationen erhalten wir

$$\mathcal{F}\left\{\exp\left(-\frac{bx^2}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{b}}\exp\left(-\frac{k^2}{2b}\right) \tag{38}$$

In unserem Fall ist $b = \dfrac{1}{2s_x}$ und es gilt:

$$\mathcal{F}\{\phi(x)\} = \widetilde{\phi}(k) \tag{39}$$

$$= \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2\right) \tag{40}$$

Aus einem Vergleich zwischen den Koeffizienten können wir folgende Verhältnisse erkennen:

$$\implies \widetilde{\phi_0} = \sqrt{2s_x}\phi_0, \qquad s_k = \frac{1}{4s_x} \tag{41}$$

Außerdem wollen wir überprüfen, dass $\Phi(k)$ richtig normiert ist, also rechnen wir kurz das Integral aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{\phi_0}\right|^2 \exp\left(-s_x k^2\right)^* \exp\left(-s_x k^2\right) \mathrm{d}k \tag{42}$$

$$= \left|\widetilde{\phi_0}\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\,\mathrm{Re}(s_x) k^2\right) \mathrm{d}k \tag{43}$$

$$= \left|\widetilde{\phi_0}\right|^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{Re}(s_x)}} \qquad \Big|\, \widetilde{\phi_0} = \sqrt{2s_x}\phi_0 \tag{44}$$

$$= \left|\sqrt{2s_x}\phi_0\right|^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{Re}(s_k)}} \qquad \Big|\, |\phi|^2 = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}(s_x)}{2\pi|s_x|^2}} \tag{45}$$

$$= \sqrt{2|s_x|^2} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{Re}(s_x)}{2\pi|s_x|^2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{Re}(s_x)}} \tag{46}$$

$$= 1 \tag{47}$$

Somit ist auch $\Phi(k)$ richtig normiert.

Nun berechnen wir die volle Halbwertsbreite (FWHW) der Wahrschienlichkeitsverteilung $P(x)$ in den zwei Darstellungen. Dies macht man, indem man die halbe Höhe des Maximums bestimmt und dann den x-Wert berechnet, was dieser Höhe entspricht. Unser Mittelwert ist in diesem Fall um $x = 0$ zentriert und habe die maximale Höhe $|\phi_0|^2$ nach Gleichung (19). Das heißt wir suchen nach dem x-Wert wo (19) $= \frac{\phi_0}{2}$, das ist äquivalent zu:

$$\left|\exp\left(-\frac{x^2}{4s_x}\right)\right|^2 = \frac{1}{2} \qquad |\,(32) \tag{48}$$

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{Re}(s_x)}{|s_x|^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad |\,\ln \tag{49}$$

$$-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{Re}(s_x)}{|s_x|^2} = -\ln 2 \tag{50}$$

Für die FWHM müsst ihr noch $|x_2 - x_1|$ also den Abstand der Punkte berechnen
$\Rightarrow$ FWHM $= 2 \cdot x_1$
$\Rightarrow$ Musterlösung

$$x^2 = \frac{|s_x|^2}{\mathrm{Re}(s_x)} \cdot 2\ln 2 \tag{51}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{|s_x|^2}{\mathrm{Re}(s_x)} \cdot 2\ln 2} \tag{52}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{|s_x|^2}{\mathrm{Re}(s_x)} \cdot 2\ln 2} \tag{53}$$

In der k-Darstellung gehen wir analog fort:

$$\exp\left(-2\,\mathrm{Re}(s_x)k^2\right) = \frac{1}{2} \qquad |(43) \tag{54}$$

$$-2\,\mathrm{Re}(s_x)k^2 = -\ln 2 \tag{55}$$

$$k^2 = \frac{\ln 2}{2\,\mathrm{Re}(s_x)} \tag{56}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\ln 2}{2\,\mathrm{Re}(s_x)}} \tag{57}$$

$$k_2 = -\sqrt{\frac{\ln 2}{2\,\mathrm{Re}(s_x)}} \tag{58}$$

c) In Aufgabenteil b) haben wir die Transformierte bestimmt als

$$\Phi(k,0) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_s k^2\right). \tag{59}$$

Daraus erhalten wir, wie in der Aufgabenstellung beschrieben, die Zeitentwicklung durch

$$\Phi(k,t) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2\right) \exp(-i\omega(k)t) \tag{60}$$

Die nichtrelativistische Dispersionsrelation entspricht, unter anderem nach dem letzten Übungsblatt:

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m_0}. \tag{61}$$

Somit ist

$$\Phi(k,t) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2\right) \exp\left(-i\frac{\hbar k^2}{2m_0}t\right). \tag{62}$$

Für $t = 0$ gilt hier

$$\Phi(k,0) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2\right). \tag{63}$$

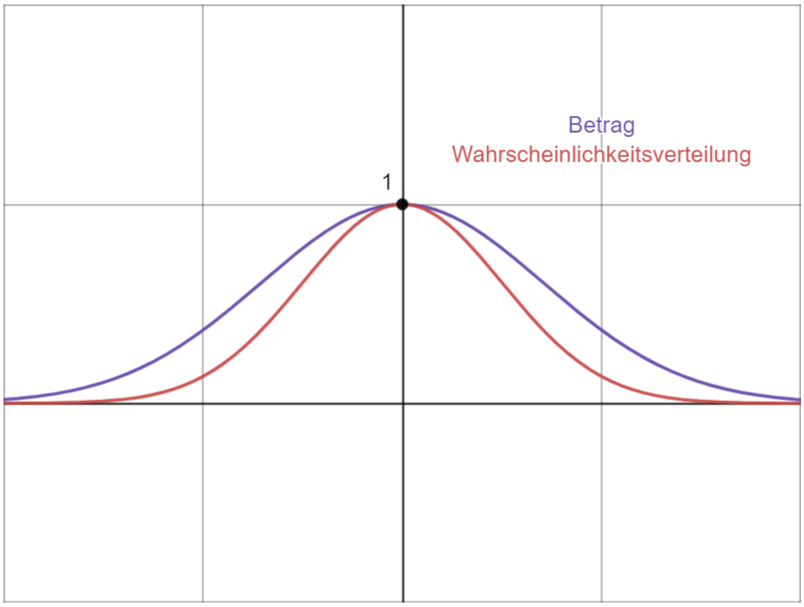
Da, nach Vorgabe der Aufgabenstellung, s_x zu dieser Zeit rein reell ist, entspricht der Betrag

$$|\Phi(k,0)| = \sqrt{2s_x}|\phi_0| \exp\Big(-s_x k^2\Big). \quad \checkmark \tag{64}$$

Allgemein entspricht die Phase der Funktion

$$\varphi(k,t) = -\frac{\hbar k^2}{2m_0}t, \quad \checkmark \tag{65}$$

bei $t = 0$ ist diese allerdings konstant 0. Für $T > 0$ erhalten wir denselben Betrag, da zwar t nicht verschwindet, sich aber die e-Funktionen in der komplexen Konjugation aufheben.



✓

Abbildung 1: Skizze zu Betrag und Wahrscheinlichkeit

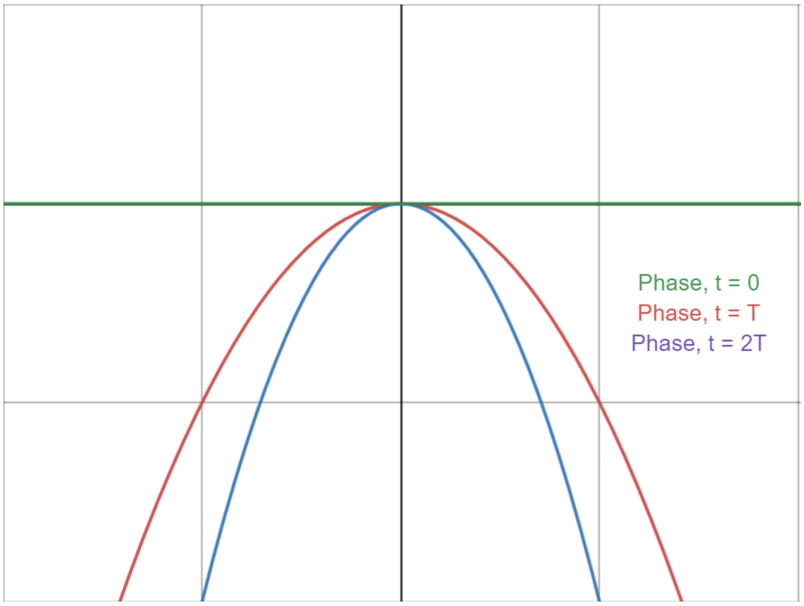


Abbildung 2: Skizze zur Phase

d) Nun soll die im vorherigen Aufgabenteil herleitete Funktion

$$\Phi(k,t) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2\right) \exp(-i\omega(k)t) \tag{66}$$

in den Ortsraum zurücktransformiert werden. Hierzu kann, wie in der Aufgabenstellung gegeben, die Identität aus Teil b) verwendet werden. Zunächst werden wir die Funktion jedoch entsprechend umformen:

$$\Phi(k,t) = \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2 - i\omega(k)t\right) \tag{67}$$

$$= \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-s_x k^2 - i\frac{\hbar k^2}{2m_0}t\right) \tag{68}$$

$$= \sqrt{2s_x}\phi_0 \exp\left(-\frac{2\left(s_x + i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)}{2}k^2\right) \tag{69}$$

Mit der Identität gilt dann:

$$\mathcal{F}\{\Phi\} = \Phi(x,t) = \frac{\sqrt{2s_x}\phi_0}{\sqrt{2\left(s_x + i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\left(s_x + i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)}\right) \tag{70}$$

Um im späteren Verlauf die Phase skizzieren zu können, wollen wir diese zunächst in der e-Funktion freistellen. Hierzu formen wir den Bruch um.

$$-\frac{x^2}{4\left(s_x + i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)} = -\frac{x^2\left(s_x - i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)}{4\left[(s_x)^2 - \left(i\frac{\hbar}{2m_0}t\right)^2\right]} = -\frac{x^2 s_x - i\frac{x^2\hbar}{2m_0}t}{4\left[s_x^2 + \left(\frac{\hbar}{2m_0}t\right)^2\right]} \tag{71}$$

(setze $\epsilon = \frac{\hbar}{2m_0}$)

$$= -\frac{x^2 s_x}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]} + i\frac{x^2 \epsilon t}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]} \tag{72}$$

Somit ist

$$\Phi(x,t) = \frac{\sqrt{2s_x}\phi_0}{\sqrt{2(s_x + i\epsilon t)}} \exp\left(-\frac{x^2 s_x}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]} + i\frac{x^2 \epsilon t}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]}\right) \tag{73}$$

$$= \frac{\sqrt{2s_x}\phi_0}{\sqrt{2(s_x + i\epsilon t)}} \exp\left(-\frac{x^2 s_x}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]}\right) \exp\left(i\frac{x^2 \epsilon t}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]}\right) \tag{74}$$

Daraus folgt die Phase

$$\varphi(x,t) = \frac{x^2 \epsilon t}{4[s_x^2 + \epsilon^2 t^2]}. \tag{75}$$

Wir bestimmen also den Betrag der Funktion $\Phi(x,t)$. Dabei ist der Betrag der imaginären Exponentialfunktion gleich 1, und die andere Exponential ist immer größer als Null, also schauen wir uns den Vorfaktor an:

$$\widetilde{\phi_0} = \left|\frac{2\sqrt{s_x}\phi_0}{\sqrt{2(s_x + i\epsilon t)}}\right| \tag{76}$$

Hier muss ϕ_0 den Normalisierungsbedingungen erfüllen, und man kann wie in Teilaufgabe a) hergeleitet wurde den Betrag als

$$\left|\widetilde{\phi_0}\right| = \left(\frac{\mathrm{Re}(\widetilde{s_x})}{2\pi|\widetilde{s_x}|}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{77}$$

Hier wurde $\widetilde{s_x} = s_x + i\epsilon t$ gesetzt. Dann ist:

$$\left|\widetilde{\phi_0}\right| = \left(\frac{\mathrm{Re}(s_x + i\epsilon t)}{2\pi|s_x + i\epsilon t|^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{78}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{Re}(s_x)}{2\pi(s_x^2 + \epsilon^2 t^2)}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{79}$$

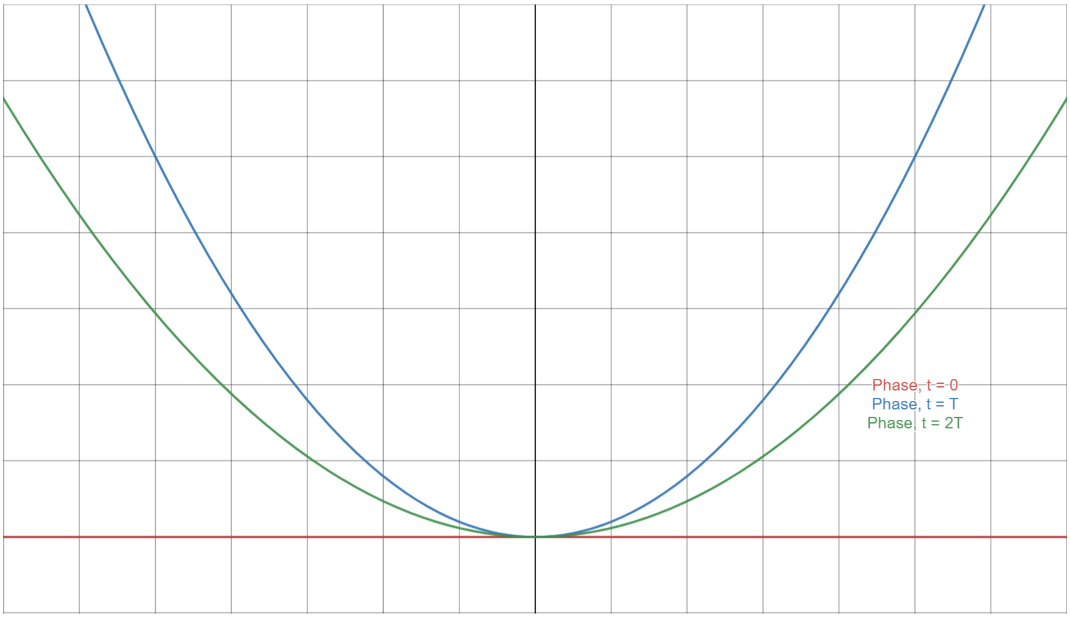


Abbildung 3: Skizze zur Phase

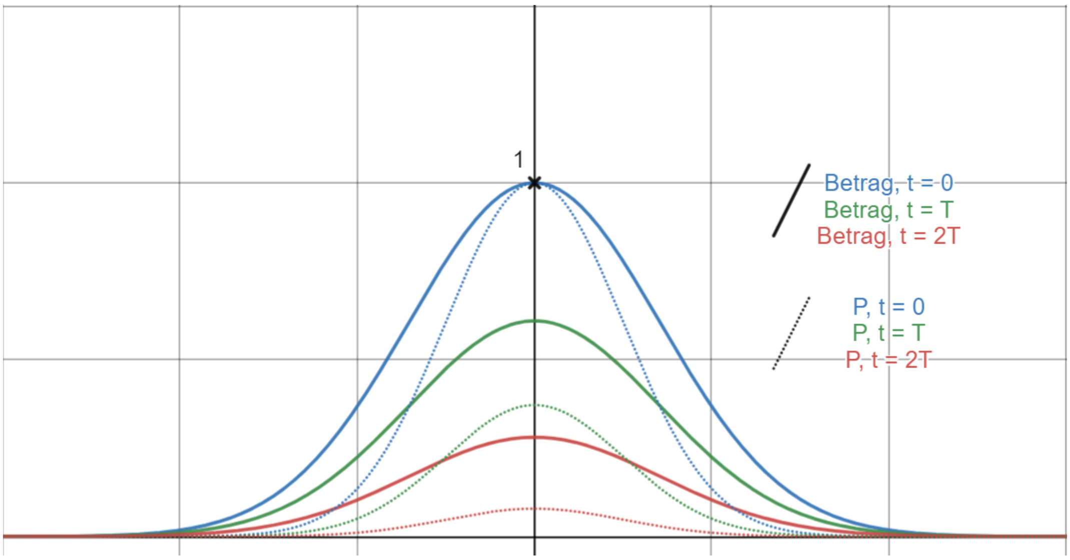


Abbildung 4: Skizze zu Betrag und Wahrscheinlichkeit

Wo sind die Teile e) und f)

Ansonsten wieder auch bei einer schwierigen Aufgabe tadellos.

4/6