6. Übungsblatt zu Analysis (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

6.1 Aufgabe 1: Peer Feedback

Siehe Rückseite

6.2 Aufgabe 2: Eigenschaften von Limiten

Geg.:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$

a) Z.z.: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ : 2a > a_n > 0$

Da (a_n) konvergiert, können sir schreiben:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ n \geq n_0\ : |a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

O.B.d.A. können wir $\varepsilon < a$ definieren, also

$$|a_n - a| < \varepsilon < a \tag{2}$$
$$|a_n - a| < a \tag{3}$$

und durch Fallunterscheidung des Betrages können wir bestimmen, dass

i. $(a_n - a) < 0$, also

$$-a_n + a < a \tag{4}$$
$$-a_n < 0 \tag{5}$$
$$a_n > 0 \tag{6}$$

ii. $(a_n - a) > 0$, also

$$a_n - a < a \tag{7}$$
$$a_n < 2a \tag{8}$$

und daraus folgt, dass

$$2a > a_n > 0 \qquad \blacksquare$$

b) Z.z.: $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ : |a_n^2 - a^2| < \varepsilon \tag{9}$$

Es gilt

$$a_n^2 - a^2 \leq |a_n^2 - a^2| \tag{10}$$

Wir betrachten $(a_n^2 - a^2)$ also Folge, die kann man schreiben als

$$(a_n^2 - a^2) = (a_n + a)(a_n - a) \tag{11}$$

Wir wissen, dass (a_n) konvergiert, also steht hier das Produkt einer beschränkten Folge mit einer Nullfolge, was wiederum eine Nullfolge ergibt.

D.h.,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ : |a_n^2 - a^2| < \varepsilon \tag{12}$$

Somit gilt dann, dass $a_n^2 \to a^2$ konvergiert

6.3 Aufgabe 3: Goldener Schnitt

Geg.:

- Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$
- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}$

a) Geg.:

- $x_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$

Ges.: x_{n+1}

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} && (13)\\
&= \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} && (14)\\
&= \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} + \frac{F_n}{F_{n+1}} && (15)\\
&= 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} && (16)\\
&= 1 + \frac{1}{x_n} && (17)
\end{aligned}$$

Z.z.:

Weil $x_n > 0$, wissen wir, dass

$$1 + \frac{1}{x_n} > 1 \tag{18}$$

und weil $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ und da jedes Glied der Folge kleiner oder gleich das letzte Glied ist, wissen wir auch, dass

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} \geq 1 \tag{19}$$

also ist

$$x_n \in [1, 2] \; \forall n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

b) Z.z.: $x_{2n} \geq x_{2n+2}$ und $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$

Wir wissen, dass

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 + \frac{1}{x_{n+1}} && (22) \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}} && (23) \\ &= 1 + \frac{x_n}{1 + x_n} && (24) \end{aligned}$$

Wir setzen $2n = m$ für Veranschaulichkeit und damit können wir zeigen, dass

$$x_{m+2} = 1 + \frac{x_m}{1 + x_m} \tag{25}$$

Mit diesem Ansatz können wir mit der vollständigen Induktion anfangen:

Induktionsanfang:

Für $n = 1$:

$$\begin{aligned} x_2 &\geq x_{2+2} && (26) \\ 2 &\geq \frac{5}{3} && (27) \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Für $n \implies n+1$:

Aus der folgenden Annahme

$$x_{2n} \geq x_{2n+2} \tag{28}$$

lässt sich folgendes schliessen:

$$1 + \frac{x_{2n}}{1+x_{2n}} \geq 1 + \frac{x_{2n+2}}{1+x_{2n+2}} \tag{29}$$
$$\frac{x_{2n}}{1+x_{2n}} \geq \frac{x_{2n+2}}{1+x_{2n+2}} \tag{30}$$

und

$$x_{2n+2} = \frac{x_{2n}}{1+x_{2n}} \geq \frac{x_{2n+2}}{1+x_{2n+2}} = x_{2n+4} \tag{31}$$

Somit gilt die Aussage beweisen.

Nun betrachten wir $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$

Für den folgenden Fall setzen wir $2n-1 = m$

Induktionsanfang:

Für $n = 1$:

$$x_1 \leq x_3 \tag{32}$$
$$1 \leq \frac{3}{2} \tag{33}$$

Induktionsschritt:

Für $n \implies n+1$

$$x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \tag{34}$$
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n-1}}} \leq 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n+1}}} \tag{35}$$
$$= \frac{x_{2n-1}}{x_{2n-1}+1} \leq \frac{x_{2n+1}}{x_{2n+1}+1} \tag{36}$$

und weil $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ monoton steigend ist, kann man den vorigen Schritt beweisen

c) in a) wurde, dass x_n sich immer im Interval $I = [1, 2]$ befindet.

   in b) wurde gleichzeitg gezeigt, dass für x_{2n} stets grösser ist als x_{2n+2}. Somit werden gerade Glieder der Folge x_{2n} immer kleiner, aber befinden sich immer noch im Intervall aus a). Sie müssen also gegen einen bestimmten Wert gehen.

   Ebenso ist x_{2n+1} stets grösser als x_{2n-1}, bleibt aber dennoch im gleichen Intervall, muss also gegen einen Wert konvergieren.

d) Wir definieren

$$\begin{aligned} y : \lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} && (37) \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}} && (38) \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} z : \lim_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_{2n}} && (39) \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}} && (40) \end{aligned}$$

   Daraus können wir sagen:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} x_{2n} && (41) \\ \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_2 n} &= \lim_{n\to\infty} x_{2n} && (42) \\ 1 + \frac{1}{x} &= x && (43) \\ x + 1 &= x^2 && (44) \\ 0 &= x^2 + x + 1 && (45) \\ \to x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} && (46) \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} && (47) \end{aligned}$$

   Da unsere Folgen sich im Intervall $I = [1, 2]$ befinden, ist

   $\phi = y = z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875$

6.4 Aufgabe 4: Komplexe Grenzwerte

Geg.:

- Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen

a) (z_n) konvergiert $\iff$ $(\mathrm{Re}(z_n))$ und $\mathrm{Im}(z_n)$ konvergieren

” $\Leftarrow$ ” Nach Lemma 3.5 gilt für zwei konvergente Folgen, dessen Addition konvergiert, und zwar gegen den Grenzwert der einzelnen Folgen addiert.

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Re}(z_n)) + \lim_{n\to\infty}(\mathrm{Im}(z_n)) = \lim_{z_n} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i = z \tag{48}$$

” $\Rightarrow$ ” Durch Kontraposition: $(A \implies B \iff \neg B \implies \neg A)$

Konvergieren $(\mathrm{Re}(z_n))$ oder $(\mathrm{Im}(z_n))$ nicht, sind also divergent, so kann man nicht davon ausgehen, dass (z_n), da s nicht gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty}((\mathrm{Re}(\mathrm{z}_n)\mathrm{Re}(\mathrm{z}_n)\mathrm{Re}(\mathrm{z}_n)\mathrm{Re}(\mathrm{z}_n)) + \mathrm{Im}(z_n)) = \lim_{n\to\infty}(z_n)(49)$$

bzw. es gibt zumindest für mindestens einen der bieden keinen Grenzwert und somit auch nicht für

$$\mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Im}(z_n)i = z \tag{50}$$

b) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

” $\Rightarrow$ ” Wie wir in a) gezeigt haben, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren, so konvergiert auch die Folge. Nach Lemma 3.5 gilt, dass $\lambda a_n \to \lambda a$

Hier ist $a_n := (\mathrm{Im}(z_n))$ und $\lambda = -1$. Somit konvergiert auch (z_n^+)

” $\Leftarrow$ ” Betrachte $(a_n) := (z_n^*)$ und betrachte a_n^*. Hier gilt das gleiche wie bei ” $\Rightarrow$ ”

c) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\implies$ $(|z_n|)$ konvergiert

Nach Lemma 3.5 und a), (z_n) konvergiert heisst, dass Real- und Imaginärteil konvergieren.

Da

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ mit $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$

Somit konvergiert aber auch $x^2 + y^2$ und damit $\sqrt{x^2 + y^2}$ gegen einen Grenzwert

d) $\exists$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die divergent sind mit konvergentem Betrag

Wir definieren

$(\mathrm{Re}(z_n)) := \begin{cases} 1 \text{wenn n ungerade} \\ -1 \text{wenn n gerade} \end{cases}$

$(\mathrm{Im}(z_n)) := \begin{cases} -1 \text{wenn n ungerade} \\ 1 \text{wenn n gerade} \end{cases}$

Mit dieser Definition von (z_n) ist die Folge ersichtlich divergent, aber für $|z_n|$ gilt immer $|z_n| = |z_{2n}| = |z_{2n+1}| = 1$