Zusammenfassung Analysis II

Mathe

Analysis II

SS 21, Albers

Juan

Bis Vorlesung 24

Inhaltsverzeichnis

0 Extras **1**
0.1 Einleitung . . . 1
0.1.1 Andere Projekte: . . . 1

1 Definitionen und so **2**
1.1 Topologische Grundlagen . . . 2
1.1.1 Metrische Räume . . . 2
1.1.2 Konvergenz und Stetigkeit . . . 5
1.1.3 Kompaktheit . . . 6
1.1.4 Zusammenhang . . . 7
1.2 Kurven in $\mathbb{R}^n$ . . . 7
1.2.1 Regularität und Tangetialvektor . . . 8
1.2.2 Rektifizierbarkeit und Bogenlänge . . . 8
1.3 Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen . . . 8
1.3.1 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen . . . 8
1.3.2 Differenzierbarkeit . . . 9
1.3.3 Höhere Ableitungen . . . 10
1.3.4 Vertauschen von Differentiation und Integration . . . 11
1.3.5 Lokale Extrema . . . 12
1.4 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten . . . 13
1.4.1 Banachscher Fixpunktsatz . . . 13
1.4.2 Lokale Diffeomorphismen . . . 14
1.4.3 Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten . . . 14
1.4.4 Tangentialraum und Extrema unter Nebenbedingungen . . . 16
1.5 Kurvenintegrale und konservative Vektorfelder . . . 17
1.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 19
1.6.1 Explizite Beispiele . . . 20
1.6.2 Picard-Lindelöf . . . 21
1.6.3 Flüsse, Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 21
1.6.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . 22
1.6.5 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . 22
1.6.6 Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten . . . 24

2 Bisschen mehr **26**
2.1 Was wir gelernt bzw. bewiesen haben . . . 26
2.1.1 Offenheit und andere ähnliche Begriffe . . . 26
2.1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 26

2.1.3 Differentialgleichungen 26
2.2 Differenzierbarkeit 27
2.3 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten 27
2.3.1 Das Implizite-Funktionen-Theorem 27

Kapitel 0

Extras

0.1 Einleitung

0.1.1 Andere Projekte:

Theo I Guide

Theo II Guide

Ana I Zusammenfassung

LA I Zusammenfassung

Ex I Formelsammlung

Ex II Formelsammlung

Kapitel 1

Definitionen und so

1.1 Topologische Grundlagen

1.1.1 Metrische Räume

Metrik[1]

Eine Metrik d ist eine Abbildung auf einer Menge M

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.1}$$

mit folgenden Eigenschaften $\forall x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Metrischer Raum

Das Paar (M, d) heißt metrischer Raum.

Norm[2]

Eine Norm $\|\cdot\|$ ist eine Abbildung auf einen $\mathbb{K}-$Vektorraum[3] V

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.2}$$

falls gilt $\forall x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

[1] Definition 1.1
[2] Definition 1.2
[3] $\mathbb{K}$ kann $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein

Jede Norm in einem endlich dimensionalen Vektorraum V ist auf diesem äquivalent:[a]

$$\|x\|_i \leq c \cdot \|x\|_j \tag{1.3}$$

[a]Satz 1.18

Wichtige Normen

Operator-Norm:[4]

$$\|L\| := \sup \{|Lv| \mid |v| \leq 1\} \tag{1.4}$$

Supremum-Norm:

Normierter Raum

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter (Vektor-)Raum.

Wiederholung: Topologie des $\mathbb{R}^n$[5]

Ein (offener) Ball von Radius $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ um $a \in M$ ist definiert als

$$B_r(a) := \{x \in M | d(x, a) < r\} \tag{1.5}$$

Ein Punkt $p \in Y \subset M$ heißt Randpunkt von Y, falls $\forall r > 0$ gilt:

$$B_r(p) \cap Y \neq \emptyset \neq B_r(p) \cap (M \setminus Y) \tag{1.6}$$

Eine Teilmenge Y heißt offen genau dann, wenn

$$Y \cap \partial Y = \emptyset \tag{1.7}$$

Eine Teilmenge Y heißt abgeschlossen genau dann, wenn

$$\partial Y \subset Y \tag{1.8}$$

Metrischer Raum II[6]

Für einen metrischen Raum (M, d)

1. $\emptyset$ und M sind offen
2. $U_i, i \in I$ seien offene Teilmengen von M, dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i \subset M$ offen in M
3. $U_1, ..., U_k, k \in \mathbb{N}$ seien offene Teilmengen von M, dann ist $U_1 \cap ... \cap U_k$ offen in M

[4]Bemerkung zu Satz 3.7
[5]angewandt an metrische Räume
[6]Satz 1.3

Vollständiger metrischer Raum[7]

Ein metrischer Raum (M, d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Banachraum[8]

Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, falls es bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Topologischer Raum[9]

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, O) aus einer Menge X und einem *System* O von Teilmengen von X (genannt offene Mengen), so dass gilt:

1. $\emptyset, X \in O$
2. $U_i \in O, i \in I \implies \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in O$
3. $U_1, ..., U_k \in O, k \in \mathbb{N} \implies U_1 \cap ... \cap U_k \in O$

O heißt Topologie auf X.

Umgebung[10]

Für einen topologischen Raum (X, O), $x \in X$ definieren wir eine Umgebung als eine Teilmenge $U \subset X$, falls es eine offene Menge V gibt, sodass

$$x \in V \subset U \tag{1.9}$$

U *muss* nicht offen sein.

Hausdorff-Raum[11]

Ein topologischer Raum (X, O) heißt Hausdorff-Raum falls zu allen Punkte $x \neq y \in X$ Umgebungen U, V existieren mit $U \cap V = \emptyset$. Jeder metrische Raum mit metrischer Topologie ist ein Hausdorffraum:

$$U := B_r(x);\; V := B_r(y);\; r = \frac{1}{2} d(x, y) \tag{1.10}$$

Für das Beispiel oben kriegt man zwei Bälle, die sich fast berühren, aber keinen Punkt ins gemeinsam haben.

Wiederholung: Topologie des $\mathbb{R}^n$ II[12]

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $Y \subset M$.

1. Das Innen einer Menge Y sei

$$\mathring{Y} := Y \setminus \partial Y = \bigcup \{U \subset M | U \text{ offen und } U \subset Y\} \tag{1.11}$$

[7] Definition 1.8
[8] Definition 1.8
[9] Definition 1.4
[10] Definition 1.5
[11] Definition 1.6
[12] angewandt an metrische Räume

Der Abschluss einer Menge Y sei

$$\overline{Y} := Y \cup \partial Y = \bigcap \{A \in M | A \text{ abgeschlossen und } Y \subset A\} \tag{1.12}$$

Der Rand einer Menge Y sei

$$\partial Y = \partial(M \setminus Y) \tag{1.13}$$

2. Y ist abgeschlossen genau dann, wenn $M \setminus Y$ offen ist

   Y ist offen genau dann, wenn $M \setminus Y$ abgeschlossen ist
3. (a) $\emptyset, M$ sind abgeschlossen
   (b) $A_i \subset M, i \in I$ ist abgeschlossen $\implies \bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen
   (c) $A_1, ..., A_k \subset M, k \in \mathbb{N}$ sind abgeschlossen $\implies A_1 \cup ... \cup A_k$ ist abgeschlossen
4. $\partial(\partial Y) \subset \partial Y$, insb. ist ∂Y abgeschlossen
5. Y ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Für alle konvergente Folgen in Y liegt auch der Grenzwert in Y

1.1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Konvergenz[13][14]

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im metrischen Raum (M, d) heißt konvergent gegen a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ d(x_n, a) < \varepsilon \tag{1.14}$$

Cauchy-Folge[15]

(x_n) heißt Cauchy-Folge, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, aber *nicht* jede Cauchy-Folge ist konvergent.

Häufungspunkt[16]

$a \in M$ heißt Häufungspunkt von (x_n), falls gilt $\forall \varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Vollständiger metrischer Raum[17]

(M, d) heißt vollständiger metrischer Raum, falls jede Cauchy-Folge in M konvergiert. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, falls es bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Stetigkeit[18]

[13] Definition 1.7
[14] Gilt analog für topologische Räume durch Ersetzung von Ball mit Umgebung
[15] Das ergibt keinen Sinn im topologischen Raum, weil ein Abstand notwendig ist
[16] Gilt analog für topologische Räume durch Ersetzung von Ball mit Umgebung
[17] Definition 1.8
[18] Definition 1.9

Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ heißt stetig in $a \in M_1$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in M_1 : \ d_1(x,a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{oder} \tag{1.15}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ f(B_g(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \tag{1.16}$$

Folgenkriterium[19]

$f : M_1 \to M_2$ ist genau dann stetig in a, wenn für alle Folgen gilt

$$(x_n) \subset M_1 \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to f(a) \tag{1.17}$$

Verkettete Funktionen[20]

Seien $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_2 \to M_3$ stetig in $a \in M_1$ bzw. in $b := f(a) \in M_2$, dann ist $g \circ f : M_1 \to M_3$ steitg in a.

Lipschitz-Stetigkeit[21]

$f : M_1 \to M_2$ ist Lipschitz-stetig, falls

$$\exists L \geq 0 : \ \forall x, y \in M_1 : \ d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y) \tag{1.18}$$

Aussagen[22]

Für zwei normierte Vektorräume $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ und eine lineare Abbildung l sind folgende Aussagen äquivalent

$$\exists C \geq 0 \ \forall v \in V : \ \|Lv\|_W \leq C \cdot \|v\|_V \tag{1.19}$$
$$\iff \text{L ist Lipschitz-stetig} \tag{1.20}$$
$$\iff \text{L ist stetig} \tag{1.21}$$

1.1.3 Kompaktheit

Kompaktheit[23][24]

1. Ein Metrischer Raum M heißt (folgen-)kompakt, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt
2. $K \subset (M, d)$ heißt kompakt, falls (K, d_K) kompakt ist

Seien $f : M_1 \to M_2$ stetig und $K \subset (M_1, d_1)$ kompakt, dann ist $f(K) \subset (M_2, d_2)$ kompakt

Sei $K \subset (M, d)$ kompakt, dann ist K abgeschlossen und beschränkt.

Äquivalenz[25][26]

[19] Satz 1.10
[20] Satz 1.11
[21] Definition 1.12
[22] Satz 1.13
[23] Definition 1.14
[24] Satz 1.15-1.16
[25] Definition 1.17
[26] Satz 1.18

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen äquivalent, wenn

$$\exists c, C > 0 \; \forall x \in V: \; c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \tag{1.22}$$

Alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V sind äquivalent.

1.1.4 Zusammenhang

Zusammenhängend[27]

1. Ein metrischer Raum heißt zusammenhängend, falls für offene $U, V \subset X$ mit

$$X = U \cup V \text{ und} \tag{1.23}$$
$$U \cap V = \emptyset \tag{1.24}$$

   So folgt, $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$

2. $Y \subset M$ heißt zusammenängend, falls (Y, d_Y) zusammenhängend ist.

$$Y \subset U \cup V \text{ und} \tag{1.25}$$
$$U \cap V = \emptyset \tag{1.26}$$

   So folgt $Y \cap U = \emptyset$ oder $Y \cap V = \emptyset$

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen[28]

Es sei $f : M_1 \to M_2$ stetig und $Y \subset M_1$ zusammenhängend. Dann ist $f(Y) \subset M_2$ zusammenhängend.

Zwischenwertsatz

Es sei $f : (M, d) \to \mathbb{R}$ stetig und $Y \subset M$ zusammenhängend. Dann nimmt f für $a, b \in Y$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

1.2 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Kurve[29]

Eine Kurve $\gamma \in \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung von einem Intervall I ins $\mathbb{R}^n$:

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \tag{1.27}$$
$$t \mapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)) \tag{1.28}$$

γ ist stetig, wenn alle γ_i stetig sind.

[27] Definition 1.20
[28] Satz 1.21
[29] Definition 2.1

1.2.1 Regularität und Tangetialvektor

Differenzierbarkeit[30]

Eine Kurve γ heißt stetig differenzierbar, wenn alle γ_i differenzierbar sind.

Tangentialvektor

Wir nennen $\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t))$ den Tangentialvektor von \an $\gamma(t)$.

Regularität

$\gamma(t)$ heißt regulär, wenn $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Geschwindigkeit

Wir nennen $v(t) := |\gamma'(t)|$ die Geschwindigkeit von γ

1.2.2 Rektifizierbarkeit und Bogenlänge

"Länge" eines Vektors

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ hat die Länge $|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.

Sei $z = (a = t_0, t_1, ..., t_k = b)$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann gilt

$$L(z, \gamma) := \sum_{i=1}^{k} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \tag{1.29}$$

Rektifizierbarkeit[31]

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar mit (Bogen-)Länge $L(\gamma)$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \text{ Zerlegungen } z : \tag{1.30}$$
$$|z| := \max_i |t_i - t_{i-1}| \implies |L(z, \gamma) - L(\gamma)| < \delta \tag{1.31}$$

Damit gilt: γ ist rektifizierbar mit Länge $L(\gamma) \iff L(\gamma) = \sup_z L(z, \gamma) < \pm\infty$

Jede Kurve $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ist rektifizierbar mit Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \tag{1.32}$$

1.3 Differenzierbarkeit in mehreren Veränderlichen

1.3.1 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

Zunächst werden Funktionen auf offenen Intervallen benutzt: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Da D offen, so folt $\exists \delta > 0 : B_{\delta|v|}(a) \subset D$. Dann gibt es $t \in (-\delta, \delta) \implies a + tv \in D$.

$$f_{a,v} : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \tag{1.33}$$

[30] Definition 2.2
[31] Definition 2.3

$$t \mapsto f(a+tv) \tag{1.34}$$

Richtungsableitung

Ist $f_{a,v}$ in $t=0$ differenzierbar, so heißt

$$D_v f(a) := f'_{a,v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \tag{1.35}$$

die Richtungsableitung von f in a in Richtung v.

Existiert $D_v f(a)$, so auch $D_{\lambda v} f(a) = \lambda D_v f(a)$.

Partielle Differenzierbarkeit

f heißt partiell differenzierbar in a, falls alle Richtungsableitungen $D_{e_1} f(a), ..., D_{e_n} f(a)$ existieren, wobei e_i die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := D_{e_i} f(a) \tag{1.36}$$

Stetige Partielle Differenzierbarkeit

f heißt (stetig) partiell differenzierbar auf D, falls f in jedem Punkt von D (stetig) partiell differenzierbar ist

Vektorfeld

Ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, ist eine Abbildung $v : D \to \mathbb{R}^n$

Gradient

Der Vektor $\nabla f(a) \equiv \text{Grad } f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ heißt Gradient von f.

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes sagt uns, wie sich das Vektorfeld weg von einem oder hin zu einem Punkt bewegt: $\nabla v \equiv \text{div } v := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} (*)$

1.3.2 Differenzierbarkeit

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ gegeben.

Differenzierbarkeit[32][33][34]

f heißt in $a \in D$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.37}$$

und eine Abbildung

$$\phi : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.38}$$

[32] Definition 3.3
[33] Satz 3.4
[34] Satz 3.5

gibt mit:

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \phi(h)\ \forall h \in B_\delta(0) \tag{1.39}$$

$$\phi(0) = 0 \text{ und } \lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0 \tag{1.40}$$

$L := Df(a)$ nennen wir "Differential" von f bei a

f heißt differenzierbar, falls f in jedem $a \in D$ differenzierbar ist. Die Ableitung / Das Differential von f ist

$$Df : D \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \tag{1.41}$$

$$a \mapsto Df(a) \tag{1.42}$$

Aus Differenzierbarkeit in a folgt Stetigkeit in a.

Ist f in $a \in D$ differenzierbar, dann existieren alle Richtungsableitungen, die als der Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und der Richtung (v):

$$D_v f(a) = Df(a)v = \boldsymbol{\nabla} f(a) \cdot v \tag{1.43}$$

Jakobi-Matrix[35]

Die Jakobi-Matrix einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n$ offen und differenzierbar am Punkt $a \subset D$ ist allgemein gesagt das Differential einer Funktion f.

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Auf einer *Zeile* wird immer der gleiche Funktionsindex (f_m) nach den verschiedenen Variablen x_n abgeleitet.

Stetige Differenzierbarkeit[36]

Eine Funktion f heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist und das Differential (J_f) stetig ist. Das Differential ist stetig, wenn alle Einträge stetig sind.

1.3.3 Höhere Ableitungen

Satz von Schwarz[37]

Für eine Funktion $f \in C^2(D)$ gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{1.45}$$

[35] Satz 3.6
[36] Definition 3.8
[37] Satz 3.9

Hessesche Matrix[38]

Die Hessesche Matrix von einer Funktion $f \in C^2(D)$

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} \tag{1.46}$$

ist symmetrisch.

1.3.4 Vertauschen von Differentiation und Integration

Es sei I ein Intervall und $h \in C^0(I \times [a,b])$.

"Ausintegration"[39]

Wir können in ein Integral $I(t) := \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ den Parameter x einführen, und so wird

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t \tag{1.47}$$

stetig sein. Daraus folgt, dass ...

"Differentiation"[40]

Existieren alle partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}\ (x,t)$ für alle (x,t) und diese sind stetig, dann ist $F(x)$ differenzierbar mit

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,t)\ \mathrm{d}t \tag{1.48}$$

(Lese: du kannst manchmal zuerst nach deinem Parameter x differenzieren, dann nach t integrieren)

Satz von Fubini[41]

Die Reihenfolge der Integration macht keinen Unterschied auf das Endergebnis[42].

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x \tag{1.49}$$

Verallgemeinerung Integration

Sei $A(t)$ eine Matrix und stetig, dann gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)\ \mathrm{d}t = \left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)\ \mathrm{d}t \right)_{i=1,\dots,m\ \ j=1,\dots,n} \tag{1.50}$$

[38] Korollar zu 3.9
[39] Lemma 3.10
[40] Satz 3.11
[41] Satz 3.12
[42] gegeben die Grenzen sind nicht durch die Koordinaten selbst bestimmt

(Lese: die Integration einer Matrix ist die Matrix der Integrale über die einzelnen Einträgen)

Abschätzungen[43][44]

Es sei $v : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt

$$\left| \int_a^b v(t) \ \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |v(t)| \ \mathrm{d}t \tag{1.51}$$

Für eine Funktion f und $x \in D,\ \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+\xi] \in D$ gilt:

$$|f(x+\xi) - f(x)| \leq M|\xi| \tag{1.52}$$

mit

$$M := \max\{\|J_f(x+t\xi)\| \mid t \in [0,1]\} < \infty \tag{1.53}$$

1.3.5 Lokale Extrema

Es sei $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, der Betrag von ν sei $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n$, die Fakultät $\nu! = \nu_1! \cdot \nu_2! \cdot ... \cdot \nu_n!$ und zu $x \in \mathbb{R}^n$ sei $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdot ... \cdot x_n^{\nu_n}$. Dann ist:

$$\partial^\nu f = \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial x_1^{\nu_1}} \cdot ... \cdot \frac{\partial^{\nu_n}}{\partial x_n^{\nu_n}} f = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} ... \partial x_n^{\nu_n}} f \tag{1.54}$$

Beispiel für $\nu = (1,2)$:

$$\partial^\nu f = \frac{\partial^3}{\partial x_1^1 \partial x_2^2} f \tag{1.55}$$

Taylor-Formel[45]

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R}^n)$ und $x_0, x \in D$ mit $[x_0, x] \in D$. Dann existiert ein $\xi \in [x_0, x]$ mit

$$f(x) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu| \leq k}} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu| = k+1}} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(\xi)(x - x_0)^\nu \tag{1.56}$$

Der einzige Term der uns interessiert ist i.A. der erste, der andere ist der Rest.

Lokale Extrema[46][47][48]

[43] Lemma 3.14
[44] Lemma 3.15
[45] Satz 3.17
[46] Definition 3.18
[47] Lemma 3.19
[48] Satz 3.21

Eine Funktion f hat ein lokales Maximum in $x_0 \in D$, falls es eine offene Menge U mit $x_0 \in U \subset D$ auf der gilt:

$$\forall x \in U: \ f(x) \leq f(x_0) \tag{1.57}$$

Analog für lokales Minimum.

1. Notwendiges Kriterium:

   Sei f partiell differenzierbar, und in x_0 ein lokales Extremum gibt, dann muss gelten:

   $$\boldsymbol{\nabla} f(x_0) = 0 \tag{1.58}$$

2. Hinreichendes Kriterium:

   Ist die Hessesche Matrix in x_0 positiv definit, dann besitzt die Funktion an dieser Stelle ein Minimum, negativ definit ein Maximum und indefinit ein Sattelpunkt.

   Ist die Hessesche Matrix semidefinit, dann kann nichts konkretes über die Funktion sagen, eine tiefere Untersuchung der Funktion ist nötig. Positiv semidefinit kann ein Minimum *oder* ein Sattelpunkt sein, analog für negativ semidefinit.

   (Als Erinnerung kann man die Definitheit einer Matrix anhand der Eigenwerte bestimmen, sind alle Eigenwerte positiv, dann ist die Matrix positiv definit, ist einer positiv, der andere negativ, dann ist sie indefinit, ist einer 0, dann ist sie semidefinit)

1.4 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten

1.4.1 Banachscher Fixpunktsatz

Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $\phi : M \to M$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Kontraktion[49]

Eine Abildung $\phi : M \to M$ heißt kontrahierend, falls es ein $\lambda \in [0, 1)$ gibt, mit

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x, y) \qquad \forall x, y \in M \tag{1.59}$$

Das heißt auch, dass ϕ Lipschitz-stetig ist mit $L < 1$

Banachscher Fixpunktsatz[50]

[49] Definition 4.1
[50] Satz 4.2

Es sei (M, d) ein *vollständiger* metrischer Raum und ϕ kontrahierend. Dann besitzt ϕ genau einen Fixpunkt:

$$\exists!\ z \in M :\ \phi(z) = z \tag{1.60}$$

1.4.2 Lokale Diffeomorphismen

Diffeomorphismus[51]

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt (C^1)-Diffeomorphismus, falls f bijektiv und stetig differenzierbar ist und ebenfalls f^{-1} stetig differenzierbar ist.

Es gilt:

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1} \qquad \forall x \in U \tag{1.61}$$

Lokaler Diffeomorphismus[52]

Eine Abbildung f heißt lokaler Diffeomorphismus, falls jeder Punkt in D eine offene Umgebung $U \subset D$ besitzt, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Insbesondere ist dann $J_f(x)$ invertierbar für alle $x \in D$ und $\det(J_f(x)) \neq 0\ \forall x \in D$.

Inverse-Funktionen-Theorem

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$. Ist $J_f(a)$ invertierbar, dann existiert eine offene Umgebung $U \subset D$ um a, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist[53].

Das heißt, dass wenn die Jakobi-Matrix lokal invertierbar ist, dann ist die Funktion selbst an dieser Stelle lokal invertierbar.

1.4.3 Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten

Implizite-Funktionen-Theorem[54]

Aus einer Funktion $f(x, y) = 0$ kann man nach $y = g(x)$ auflösen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Seien $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^l$ mit:

$$f : U \times V \to \mathbb{R}^k \tag{1.62}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (f_1(x, y), ..., f_k(x, y)) \tag{1.63}$$

Am Punkt $(x_0, y_0) \in U \times V$ gelte:

[51] Definition 4.3
[52] Definition 4.4
[53] Beweis is a bitch
[54] Satz 4.8

$$f(x_0, y_0) = 0 \tag{1.64}$$

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \det \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1,\dots,k} \right) \neq 0 \tag{1.65}$$

Dann existieren offene Mengen $U_0 \subset U,\ V_0 \subset V$ mit $(x_0, y_0) \in U_0 \times V_0$ und eine C^l Abbildung $g : U_0 \to V_0$ mit

$$\left\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \;\middle|\; f(x, y) = 0\right\} = \left\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \;\middle|\; y = g(x)\right\} \tag{1.66}$$

$$\text{D.h.} \qquad f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \tag{1.67}$$

(Lese: Die Menge der Nullstellen von f ist gleich dem Grpahen von y)

Außerdem:

1. $\frac{\partial f}{\partial y}$ entspricht den letzten k Spalten der Jakobi-Matrix.
2. Zu 1.65 gilt auch:

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \tag{1.68}$$

$$\implies J_f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot y = 0 \tag{1.69}$$

Insbesondere für $x \in U_0$ gilt:

$$f(x, g(x)) = 0 \tag{1.70}$$

$$\implies \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial y} = 0 \tag{1.71}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot J_g(x) = 0 \tag{1.72}$$

D.h., Auflösung nach J_g möglich

$$J_g(x) = -\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \tag{1.73}$$

Untermannigfaltigkeit

Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$, heißt n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l, falls jeder Punkt $p \in N$ eine Umgebung $U \subset R^{n+k}$ besitzt, so dass $N \cap U$ als Graph einer C^l-Funktion in n der $n + k$ kartesischen Koordinaten des R^{n+k} geschrieben werden kann.

Zum Beispiel ist die Sphäre $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^{2+1} |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Keine dieser Koordinaten kann global zu einem Graphen umgeformt werden, deswegen macht man eine Fallunterscheidung:

$$S^3 \cap \{x_i > 0\} = \text{Graph}(g_i) \tag{1.74}$$

$$g_i := \sqrt{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} x_j^2} \tag{1.75}$$

Untermannigfaltigkeiten und Implizite Funktionen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $f : D \subset \mathbb{R}^k$ eine C^l Funktion mit rang $J_f(p) = k$ für alle $p \in N := f^{-1}(0)$. Dann ist $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$.

In diesem Korollar ist das Implizite-Funktionen-Theorem versteckt, nämlich ist N die Nullstellenmenge $f^{-1}(0) := f(x, y) = 0$. Falls die Jakobi-Matrix $J_f(p)$ maximalen Rang für alle p hat.

Der Rang der Jakobi-Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen *oder* Spalten.

N ist zusätzlich kompakt, falls (nach Heine Borell) es beschränkt und abgeschlossen ist.

1.4.4 Tangentialraum und Extrema unter Nebenbedingungen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $h \in C^1(D, \mathbb{R})$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$. Sei N die Menge der Nullstellen von f, also $N := \{f = 0\}$.

Extrema unter Nebenbedingungen[55]

Die Funktion h hat in $p \in N$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung $f = 0$, falls es eine Umgebung $U \subset D$ von p gibt, so dass

$$h(p) \geq h(x) \qquad \forall x \in N \cap U \tag{1.76}$$

Falls die Menge der Nebenbedingung kompakt ist, so existiert *mindestens* ein Minimum *und* ein Maximum.

Tangentialraum[56][57]

Sei $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in N$. Dann heißt

$$T_pN := \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+k} | \ \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^1} N \text{ mit } \gamma(0) = p, y'(0) = v \right\} \tag{1.77}$$

Tangentialraum von N in p. Der Tangentialraum ist eine Approximation der Untermannigfaltigkeit N am Punkt p.

[55] Definition 4.10
[56] Definition 4.11
[57] Satz 4.12

Darstellung als Graph: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, und $g : U \to V$ mit $p = (x_0, g(x_0))$ für $x_0 \in U$, so dass

$$N \cap (U \times V) = \left\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+k} | x \in U\right\} \tag{1.78}$$

Dann gilt:

$$T_pN = \left\{(u, J_g(x_0) \cdot u) \in \mathbb{R}^{n+k} | u \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{1.79}$$

Darstellung als reguläre Nullstellenmenge: Seien $f : D \to \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen mit

$$p \in N \cap D = \{(x, y) \in D | f(x, y) = 0\} \tag{1.80}$$

und

$$\text{rang } J_f(p) = k \text{ (voll)} \tag{1.81}$$

Dann gilt:

$$T_pN = \ker J_f(p) = (\text{Span}\{\nabla f_1(p), \ldots \nabla f_k(p)\})^{\perp} \tag{1.82}$$

Lagrange-Multiplikatoren[58]

Habe h in $p \in N = \{f = 0\}$ ein lokales Extremum unter Nebenbedingung $f = 0$. Seien $\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_k(p)$ linear unabhängig. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$h(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \ldots \lambda_k \nabla f_k(p) \tag{1.83}$$

1.5 Kurvenintegrale und konservative Vektorfelder

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $v : D \to \mathbb{R}^n$

Stückweise stetige Differenzierbarkeit[59]

Können wir eine Kurve in verschiedenen stetig miteinander verbundenen unabhängig differenzierbaren Teilstücken trennen, dann ist die Kurve über diese Stücke stückweise stetig differenzierbar

Wegintegral von Funktionen[60]

Das Integral einer Funktion f über eine Kurve γ nach der Bogenlänge s kann durch eine passende Parametrisierung bestimmt werden.

f stetig
$\gamma \in C^1([a, b], D)$

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \tag{1.84}$$

[58] Satz 4.13
[59] Definition 5.1
[60] Definition 5.3

Wegintegral im Vektorfeld[61]

Das Wegintegral einer Kurve durch ein Vektorfeld ist ähnlicherweise

$v \in C^0$
$\gamma \in C^1([a,b], D)$

$$\int_\gamma v(x)\ \mathrm{d}x := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\ \mathrm{d}t \tag{1.85}$$

Das Wegintegral von v entlang γ.

Gradientenvektorfeld[62][63][64]

Ein Vektorfeld heißt Gradientenvektorfeld oder Potentialfeld, falls es eine Funktion $f \in C^1 : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$v(x) = \nabla f(x) \qquad \forall x \in D \tag{1.86}$$

f heißt das Potential.

Dann gilt:

$$\int_\gamma v\ \mathrm{d}x = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{1.87}$$

Ist D zusätzlich sternformig und v "rotationsfrei", dann ist v ein Gradientenfeld.

Konservative Vektorfelder[65]

Ein Vektorfeld v heißt konservativ, falls das Integral $\int_\gamma v\ \mathrm{d}x$ nur von den Anfang und Endpunkten, nicht vom Weg abhängt.

Ist D offen und v konservativ, so ist v ein Gradientenfeld.

Rotationsfreiheit

Ist v ein Gradientfeld, so ist es auch "rotationsfrei":

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{1.88}$$

Sternförmige Teilmengen[66]

Eine Teilmenge D heißt sternformig, falls es einen Punkt $x_0 \in D$ gibt, so dass

$$[x_0, x] \in D \qquad \forall x \in D \tag{1.89}$$

[61] Definition 5.4
[62] Definition 5.6
[63] Satz 5.7
[64] Satz 5.11
[65] Definition 5.8
[66] Definition 5.10

Banenen sind nicht sternformig.

1.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lösung einer Differentialgleichung[67]

Eine Abbildung γ ist eine Integralform von v oder die Lösung der Differentialgleichung

$D \in \mathbb{R}^n$
$I \subset \mathbb{R}$ Intervall
$\gamma \in C^1(D, \mathbb{R})$

$$\dot{x} = v(x) \tag{1.90}$$

falls

$$\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t)) \qquad \forall t \in I \tag{1.91}$$

System gewöhnlicher Differentialgleichungen[68]

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Form

$D \in \mathbb{R}^{n+1}$
$= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (x, y)$
$f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$

$$y' = f(x, y) \tag{1.92}$$

Eine Lösung des Systems erfüllt

$\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

$$\text{i)} \qquad (x, \varphi(x)) \in D \qquad \forall x \in I \text{ (Der Graph}(\varphi) \text{ ist in } D) \tag{1.93}$$
$$\text{ii)} \qquad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{1.94}$$

Es handelt sich um ein Gleichungsystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $(y_1(x), \ldots y_n(x))$

Anfangswertproblem[69]

Ein Anfangswertproblem ist die Auswertung einer allgemeinen Lösung an einem bestimmten Punkt

$y' = f(x, y)$
$f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$
$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{i)} \qquad y' = f(x, y) \tag{1.95}$$
$$\text{ii)} \qquad y(x_0) = x_0 \tag{1.96}$$

[67] Definition 6.1
[68] Definition 6.2
[69] Definition 6.3

1.6.1 Explizite Beispiele

1-dimensionale lineare Dgl.

Die Gleichung

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{1.97}$$

heißt homogen, falls $b = 0$. Für die Lösung bestimmt man zuerst die Lösung des homogenen Anteils und addiert die Lösung des inhomogenen dazu.

Variation der Konstanten[70]

Durch die Variation der Konstanten kann man den homogenen und inhomogenen Teil der Differentialgleichung lösen. Die homogene Lösung lautet:

$$\varphi_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \tag{1.98}$$

Für den inhomogenen Anteil brauchen wir $c(x)$ als Funktion betrachten und diese Funktion bestimmen durch:

$$c'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \tag{1.99}$$

$$\rightarrow c(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \tag{1.100}$$

Lösung des Anfangswertproblems[71]

Die Lösung des Anfangswertproblems zu einer solchen Differentialgleichung lautet:

Überprüfen: Löst φ die Dgl.?

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\ \mathrm{d}t\right] \qquad |A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\ \mathrm{d}t \tag{1.101}$$

Separation der Variablen

Die Gleichung mit $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ mit Anfangswerte $y(x_0) = y_0$

Voraussetzung:
$G(\varphi(x)) = F(x)$
$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)}$
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{1.102}$$

lässt sich durch

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\eta)}\ \mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \tag{1.103}$$

nach $y(x)$ bzw. $\varphi(x)$ auflösen.

Die Lösung des AWP ist eindeutig, falls es ein $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$ und $F(I_0) \subset G(J)$ existiert.

[70] Satz 6.4
[71] Satz 6.5

1.6.2 Picard-Lindelöf

Lipschitz-Bedingung[72]

$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$
$f : D \to \mathbb{R}^n$
$y = (y_1, \dots, y_n)$

Eine Funktion f erfüllt eine Lipschitz-Bedingung in y, falls es ein $L \geq 0$ existiert, sodass

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}| \qquad \forall (x, y),\ (x, \bar{y} \in D \tag{1.104}$$

Die Funktionswerte, bzw. der Betrag der Funktionswerte wird nicht bis auf einen konstanten Vorfaktor L größer, als der Abstand der Argumente $y, \bar{y}$. Zusätzlich erfüllt $f\big|_U$ eine *lokale* Lipschitz-Bedingung, falls jeder Punkt $(x_0, y_0) \in D$ in der Umgebung $U \subset D$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Falls f bezüglich $y = (y_1, \dots, y_n)$ stetig partiell differenzierbar ist, dann erfüllt es eine lokale Lipschitz-Bedingung.

Satz von Picard-Lindelöf[73]

$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$
$f : D \to \mathbb{R}^n$

Erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung, dann existiert in einem Bereich um (x_0, y_0) eine eindeutige Lösung $\varphi : [\omega_-, \omega_+] \to \mathbb{R}^n$ mit $\omega_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zum Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \tag{1.105}$$
$$y(x_0) = y_0 \tag{1.106}$$

Existenzsatz von Peano

Falls keine Lipschitz-Bedingung gilt, dann ist die Lösung im Allgemeinen nicht eindeutig, man kann zeigen, dass eine Lösung existiert, falls D offen ist und f stetig ist.

1.6.3 Flüsse, Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungen

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
$v : D \to \mathbb{R}^n$
$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

Sei ein Anfangswertproblem $\dot{x} = v(t, x) = v_t(x)$ mit $x(t_0) = x_0$ gegeben. v ist das Vektorfeld, was diese Differentialgleichung beschreibt. Eine Lösung ist eine Kurve γ mit $\gamma(t_0) = x_0$ und $\dot{\gamma} = v_t(\gamma)$

Fluss[74]

Der Fluss von diesem Vektorfeld wird mit der Abbildung

$$\phi_v^{t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1.107}$$

[72] Definition 6.7
[73] Satz 6.9
[74] Satz 6.10

$$x \mapsto \gamma_x(t_0) := \phi_v^{t_0}(x) \tag{1.108}$$

beschrieben. Er sagt uns, wo sich unser "Bötchen" nach der Zeit t_0 befindet.

Unter folgenden Bedingungen ist der Fluss von v definiert und das Anfangswertproblem $\dot{\gamma} = v_t(\gamma)$, mit $\gamma(0) = x$ hat eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt:

$v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ stetig
global Lipschitz- stetig
autonom

$$\phi_v^0(x) = x \tag{1.109}$$

$$\phi_v^{t+s}(x) = \phi_v^t(\phi_v^s(x)) = \phi_v^{s+t}(x) \tag{1.110}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist ϕ_v^t bijektiv und stetig. Falls $v \in C^k$, dann ist ϕ_v^t ein C^k-Diffeomorphismus.

1.6.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung schreiben wir:

$$y^{(n)} = f(x, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.111}$$

Pro Ordnung brauchen wir eine Bedingung um ein Anfangswertproblem zu bestimmen. Am liebsten den Ort und die Geschwindigkeit an einem gleichen Punkt $t = t_0$.

Systeme von Differentialgleichungen

Wir können eine (gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung in n Differentialgleichungen erster Ordnung durch geschickte "Umbenennung" der Ableitungen übersetzen:

Es sei $y^{(n)} = f(x, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$ und wir definieren $z_1 = y, z_2 = y^{(1)}, \dots, z_n = y^{(n-1)}$

$f : D \to \mathbb{R}$
$D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen
$y : I \to \mathbb{R}$

Dann erhalten wir ein System:

$$z_1' = z_2 \tag{1.112}$$

$$z_2' = z_3 \tag{1.113}$$

$$\vdots$$

$$z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \tag{1.114}$$

Das ergibt ein System von gekoppelter Differentialgleichungen. Wie man das löst sehen wir gleich.

1.6.5 Lineare Differentialgleichungssysteme

Aus dem oben erwähnten System können wir durch eine Matrix A die folgende Gleichung aufstellen:

$A : I \overset{C^0}{\to} \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$
$b : I \overset{C^0}{\to} \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + b \tag{1.115}$$

Am Beispiel mit $n = 4$:

$$\dot{x}_1' = x_2 \tag{1.116}$$
$$\dot{x}_2' = x_3 \tag{1.117}$$
$$\dot{x}_3' = x_4 \tag{1.118}$$
$$\dot{x}_4' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b \qquad |a_i, b \in C^0 \tag{1.119}$$

Dies schreiben wir zuerst in einen Vektor um:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \tag{1.120}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \tag{1.121}$$

$$\tag{1.122}$$

Eine Lösung $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ erfüllt wie erwartet $\dot{\alpha} = A\alpha + b$.

Picard-Lindelöf drauf

> Ist $A \in C^0(I, \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}))$ stetig, und $J \subset I$ kompakt, dann erfüllt $Ax + b$ eine globale Lipschitz-Bedingung

Lösungsmenge[75]

Die Lösungsmenge erhalten wir wie in der Linearen Algebra, als Ergebnis der Auflösung des LGS nach den jeweiligen x_i: $\text{Lös}(A, b)$. Falls wir den homogenen Anteil des Gleichungssystem betrachten, dann ist die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, 0)$.

Ist $\alpha \in \text{Lös}(A, b)$, dann ist

$$\text{Lös}(A, b) = \alpha + \text{Lös}(A, 0) \tag{1.123}$$

Matrix-wertige Formulierung[76]

Eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von $\text{Lös}(A, 0)$ heißt Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$. Wir schreiben:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \tag{1.124}$$

$$\dot{\Phi} = A \cdot \Phi \iff \dot{\alpha}_i = A \cdot \alpha_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{1.125}$$

Außerdem ist Φ für alle t invertierbar.

[75] Satz 6.11
[76] Definition 6.12

1.6.6 Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten

AWP: $\dot{x} = Ax$[77]

Die eindeutige Lösung des AWP

$$\dot{x} = Ax \tag{1.126}$$
$$x(0) = x_0 \tag{1.127}$$

ist

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{tA} x_0 \tag{1.128}$$

Für das Problem

$$\dot{x} = Ax + b \tag{1.129}$$

benutzt man die Variation der Konstanten, so dass

$$\alpha(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) b(\tau)\ \mathrm{d}\tau \tag{1.130}$$

eine Lösung ist.

Falls A eine Basis von Eigenvektoren besitzt, dann ist

$$\Phi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad |\alpha_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t} v_i \tag{1.131}$$

ein Fundamentalsystem.

Keine Basis[78]

Falls das System keine Basis hat, sondern vielleicht einen doppelten Eigenwert, und wir können das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerlegen

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (\lambda - \lambda_j)^{\mu_j} \tag{1.132}$$

dann sind die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{\mu_i - 1}}{(\mu_i - 1)!}\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ Lösungen. Als Beispiel ist $x = \mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t}$ eine Lösung, falls das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ ist. Diese Lösungen ergeben ein Fundamentalsystem.

Jordansche Normalform

Falls A nicht diagonalisierbar, so existiert aber eine schönere Transformation, so dass $\mathrm{e}^A = T\mathrm{e}^{T^{-1}AT}T^{-1}$ einfach berechnet sein kann. Beispielsweise existiert ein $T \in GL(n)$, so dass

$$T^{-1}AT = \mathcal{J} := \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{J}_k \end{pmatrix} \tag{1.133}$$

[77] Satz 6.13
[78] Satz 6.14

blockdiagonal ist wobei für eine Teilmatrix mit Dimension i gilt:

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.134}$$

und

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{J}_i} = \mathrm{e}^{t\lambda\mathbb{1}_i} \cdot \mathrm{e}^{tN_i} \tag{1.135}$$

Wobei

$$\mathrm{e}^{tN_i} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.136}$$

Insbesondere gilt:

$$\mathrm{e}^{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathcal{J}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\mathcal{J}_k} \end{pmatrix} \tag{1.137}$$

Kapitel 2

Bisschen mehr

2.1 Was wir gelernt bzw. bewiesen haben

2.1.1 Offenheit und andere ähnliche Begriffe

1. Urbilder offener Mengen sind offen. (same with abgeschlossen)
2. Abgeschlossene Teilmengen kompakter Teilmengen sind kompakt.
3. Die Menge der invertierbaren Matrizen ist offen[1]
4. Die Menge der orthogonalen Matrizen ist nicht zusammenhängend[2]
5. Die Menge der orthogonalen Matrizen ist eine kompakte Teilmenge der quadratischen Matrizen[3]

2.1.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig $\iff$ für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ auch $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen ist.[4]
2. Wenn $f : X \to Y$ stetig und bijektiv und X kompakt, dann ist f^{-1} stetig.
3. Polynome gehören zu den unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

2.1.3 Differentialgleichungen

1. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, für ein $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a) - \psi(a)\|$, dann gilt[5]

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \delta \mathrm{e}^{|x-a|} \tag{2.1}$$

[1] Ü2.3
[2] Ü2.3
[3] Ü9.3
[4] Ü2.4
[5] Ü12.3

2. Die eindeutige Lösung des homogenen Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ ist $x = \mathrm{e}^{At} v_0$.[6]

2.2 Differenzierbarkeit

$$\begin{tikzcd}
\text{Stetige partielle Differenzierbarkeit} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{Partielle Differenzierbarkeit} & \\
\text{Stetige Differenzierbarkeit} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Differenzierbarkeit} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Stetigkeit}
\end{tikzcd}$$

2.3 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten

2.3.1 Das Implizite-Funktionen-Theorem

Was sagt das Implizite-Funktionen-Theorem?

Klar, aus der Definition können wir ablesen, dass wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, dann existiert an einem Punkt eine Funktion, die lokal die Umgebung dieses Punktes beschreibt. Es steht ja

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \tag{2.2}$$

Können wir diese Funktion $g(x)$ finden? Ne, wahrscheinlich nicht. Was das Theorem besagt ist, dass die echte Funktion von den Gleichungen der partiellen Ableitungen "angedeutet", "impliziert" wird. Durch genug Taylor-Entwicklung könnten wir *vielleicht* einen expliziten Ausdruck für die Approximation finden, aber wir werden lernen, dass man den expliziten Ausdruck auch nicht braucht, denn das Theorem gibt uns genügend Werkzeuge um Aussagen über die Funktion zu treffen.

Was bedeuten die Voraussetzung zur Anwendbarkeit des Theorems?

Die erste Voraussetzung ist eine reine Definitionssache, wir möchten nicht die Gesamtheit einer Funktion $f(x, y)$ untersuchen, da hätten wir alleine im 2-dimensionalen Fall ein ganzes Gebirge oder irgendwas was sich in mehr als eine Richtung ausstreckt, und es wäre unmöglich nach $y = g(x)$ aufzulösen. Deswegen beschränken wir unser $f(x, y)$ auf einer spezifischen "Höhenlinie" $f(x, y) = 0$. Diese setzen wir gleich 0 aus Bequemheit. Wenn wir eine Höhenlinie die nicht 0 ist betrachten möchten, dann schieben wir einfach diese Höhe auf die linke Seite und haben nochmal gleich 0.

Die zweite Voraussetzung ist ein bisschen abstrakter, und besser im 2-dimensionalen Fall verständlich.

[6] Ü13.1

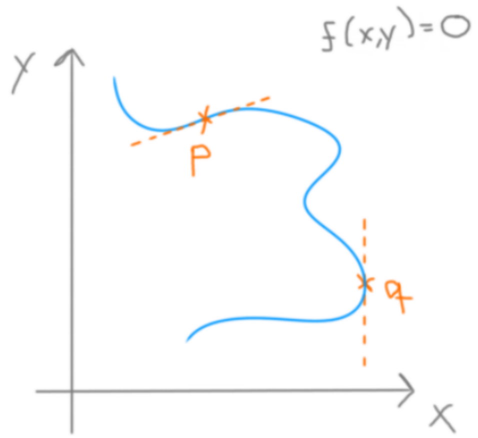

Abbildung 2.1: Höhenkurve $f(x, y) = 0$

Hier betrachten wir zunächst zwei verschiedene Punkten p, q, die offensichtlich beide die erste Bedingung erfüllen. Wir möchten nach einer Funktion $y = g(x)$ auflösen. Man muss also zeigen, dass

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{p,q} \neq 0 \tag{2.3}$$

Im 2-dimensionalen Fall ist die Bedeutung dieser Aussage klarer: die Determinante wäre eine 1×1-Matrix, also es reicht zu merken, ob die Ableitung selbst der Funktion gleich 0 ist oder nicht.

Punkt p erfüllt es auf jedem Fall, es ist schräg sowohl bezüglich der x- als auch der y-Achse. Um zu sehen, weshalb Punkt q diese Bedingung nicht erfüllt muss man den Kopf ein bisschen drehen, dadurch dass wir nach y ableiten sieht man, dass es hier zu einem "Extremum", besser gesagt zu einer Stelle ohne Änderung in y, kommt und die Ableitung doch gleich 0 ist. Es macht auch intuitiv Sinn, dass wir keine Funktion $y = g(x)$ finden können, die parallel zur y-Achse verläuft.

Außerdem erkennen wir, dass wir $y = g(x)$ am Punkt p natürlich nur in der Nähe durch eine Funktion beschreiben können, wenn wir die Umgebung erweitern stoßen wir irgendwann an einem Punkt, wo für einen gleichen Wert x zwei y-Werte rauskommen, was natürlich illegal ist.

Wie interpretiere ich die Notation?

In der Vorlesung haben wir definiert:

Satz 4.8.: Satz über implizite Funktionen

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^k$ offen und

$$f : U \times V \to \mathbb{R}^k \tag{2.4}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2.5}$$

eine C^l-Abbildung.

Am Punkt $(x_0, y_0) \subset U \times V$ gelte:

i. $$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \tag{2.6}$$

ii. $$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \det\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x_0, y_0)\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right) \neq 0 \tag{2.7}$$

Dann existieren offene Mengen $U_0 \subset U,\ V_0 \subset V$ mit $(x_0, y_0) \in U_0 \times V_0$ und eine C^l Abbildung $g : U_0 \to V_0$ mit

$$\big\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \ \big|\ f(x, y) = 0\big\} = \big\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \ \big|\ y = g(x)\big\} \tag{2.8}$$

$$\text{D.h.} \quad f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \tag{2.9}$$

Bemerkungen

1. Irgendwas nicht so wichtiges

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \implies J_f(x_0, y_0) \text{ hat vollen Rang} \tag{2.10}$$

2. "Die linearisierte Gleichung"

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \tag{2.11}$$

$$\implies J_f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y = 0 \tag{2.12}$$

eindeutig nach y auflösbar mit

$$y = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x \tag{2.13}$$

Insbesondere gilt für $x \in U_0$

$$f(x, g(x)) = 0 \tag{2.14}$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x) = 0 \tag{2.15}$$

Nun wollen wir ein bisschen mehr Sinn aus dieser Notation machen, und zwar passen wir als erstes auf ein wichtiges Detail auf, und zwar haben wir eine Funktion aus $\mathbb{R}^{n+k}$ als eine Funktion aus $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ aufgefasst. Ich verzichte momentan auf die U und V um die Dimension ein bisschen präsenter zu haben. Es ist also:

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \tag{2.16}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2.17}$$

Dabei sind $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^k$, deswegen schreiben wir:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Es ist nämlich wichtig die Funktion in dieser Form ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$) aufzuschreiben, weil so können wir immer ganz klar zwischen Variablen die zu den "Funktionseinträgen" zählen und Variablen die zu den "Funktionsargumenten" zählen. Die x_i gehören zu den Argumenten, was wir für $y = g(x)$ einsetzen, und die y_j sind die Einträgen der Funktion, die Zeilen des Funktionsvektors.

Wenn wir versuchen nach $y = g(x)$ aufzulösen oder ihre Ableitung zu bestimmen, müssen wir immer in Erinnerung haben, Variable zu y und welche zu x gehören. Deswegen finde ich es intuitiver in x_i und y_j mit $i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., k$ zu arbeiten, als zum Beispiel mit x, y, z. Dabei müssen wir beachten, unsere Funktion $y = g(x)$ muss die gleiche Dimension haben wie die Zielmenge.

Um mit dieser Notation zu arbeiten können wir ohne Beschränkung Variablen umbenennen, oder wenn es für uns klar ist, welche Variablen wohin gehören einfach so lassen. So würden wir von

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.19}$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \tag{2.20}$$

auf

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{2.21}$$
$$((x_1, x_2), y_1) \mapsto f((x_1, x_2), y_1) \tag{2.22}$$
$$:= (x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2.23}$$

wechseln, wenn wir nach der ursprünglichen z-Variable wechseln möchten. Von hier aus kann man genau die Definition aus der Vorlesung benutzen. Ohne diese Gleichungskosmetik erfordert die Rechnung ein bisschen mehr Aufmerksamkeit, dass man immer genau die Variablen nimmt, nach den man ableiten möchte usw.

Nehmen wir zum Beispiel eine Funktion der Form:

$$f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.24}$$
$$(u, v, w, x, y, z) \mapsto f(u, v, w, x, y, z) \tag{2.25}$$

Sagen wir, wir möchten untersuchen nach welchem Variablenpaar diese Funktion auflösbar ist, wir haben da mehrere Möglichkeiten aber es ist eigentlich komplett egal, da wir gerade nichtmal eine Funktionsvorschrift haben. Wir suchen uns ein beliebiges Variablenpaar aus und definieren die Funktion neu:

$$f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.26}$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) \mapsto f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) \tag{2.27}$$
$$:= (x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2.28}$$

Der Vorteil dieser Definition finde ich ist, dass man anhand der Dimensionen von f und g und x und y sofort erkennen kann, welche Form die jeweiligen Terme zur Bestimmung der Ableitung haben sollten. Zur Erinnerung gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \qquad |\text{vgl. } 2.15 \tag{2.29}$$

f ist eine Funktion, die 6 Variablen $x_i,\ y_j$ annimmt und auf 2 Funktionswerte abbildet ($\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$), also ist die gesamte Jakobi-Matrix eine 2×6 Matrix. Darunter unterscheiden wir zwischen den Spalten die Ableitungen "nach" x und die Ableitungen "nach" y.

1. Die Ableitungen nach x stellen eine 2×4 Matrix dar, weil es 4 x_i und 2 f_k gibt,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

2. die Ableitungen nach y eine 2×2 Matrix. Hier erkennt man auch, dass es wichtig ist, dass die Ableitungen nach y einer quadratischen Matrix entsprechen, weil wir diese invertieren müssen. Das kommt direkt aus der Forderung, dass y die gleiche Dimension wie der Zielraum hat.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

3. Das Ergebnis für $\frac{\partial g}{\partial y}$ ist eine 2×4 Matrix.

$$\frac{\partial g}{\partial y} = J_g = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \qquad |\text{weil} \tag{2.32}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \tag{2.33}$$