10. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

10.1 Kurvenintegral

a) Es sei $\gamma : [0,1] \xrightarrow{C^1} S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma'(t) \neq 0 \; \forall t \in [0,1]$, sodass $\gamma\big|_{[0,1)}$ bijektiv ist.

Gesucht ist das Integral $\int_\gamma 1 \; \mathrm{d}s$. Per Definition 5.3 können wir das Integral einer Funktion f über eine Kurve γ nach der Bogenlänge durch $\gamma(t)$ parametrisieren und entsprechend integrieren. Aufgrund der Bijektivität wird jeder Punkt des Kreises getroffen.

$$\int_\gamma f \; \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma) \cdot |\gamma'| \; \mathrm{d}t \tag{1}$$

Da die Kurve γ vom Intervall $[0,1]$ auf den Einheitskreis S^1 abbildet, können wir diese durch einen Kreis parametrisieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir als Startpunkt den Punkt $(1,0)$ wählen, sodass unsere Parametrisierung wie folgt aussieht.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \qquad |t \in [0,1] \tag{2}$$

Hier kommt der Faktor 2π dadurch zustande, dass wir im Intervall [0,1) jeden Punkt der S^1 treffen, aufgrund der Bijektivität. Dies ist genau dann der Fall bei 2π

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(2\pi)^2 \sin^2 t + (2\pi^2) \cos^t} = 2\pi \tag{4}$$

Außerdem ist in diesem Fall die Funktion $f = 1$, also müssen wir diese nicht extra durch gamma parametrisieren. Es bleibt übrig:

$$\int_\gamma 1 \; \mathrm{d}s = \int_0^1 1 \cdot 2\pi \; \mathrm{d}t \tag{5}$$

$$= [2\pi t]_0^1 = 2\pi \tag{6}$$

b) Es sei $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $v(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\big(-x_2, x_1\big)$ und für $a_0, a_1 > 0$ sei $\eta_0(t)$ eine Stückweise differenzierbare Kurve zwischen $(a_0, 0)$ und $(a_1, 0)$ entlang der x_1-Achse.

Gesucht ist das Integral $\int_{\eta_0} v \; \mathrm{d}x$. Per Definition 5.4 können wir folgendermaßen fortfahren:

$$\int_{\eta_0} v \; \mathrm{d}x = \int_a^b \langle v(\eta_0), \eta_0' \rangle \; \mathrm{d}t \tag{7}$$

Als erstes brauchen wir η_0 parametrisieren:

$$\eta_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |t \in [a_0, a_1] \tag{8}$$

$$\eta_0'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Damit können wir auch das Vektorfeld mithilfe η_0 parametrisieren:

$$v(\eta_0) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \tag{10}$$

So gilt für das Integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\eta_0} v \ \mathrm{d}x &= \int_{a_0}^{a_1} \langle v(\eta_0), \eta_0' \rangle \ \mathrm{d}t && (11)\\
&= \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{t^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \ \mathrm{d}t && (12)\\
&= \int_{a_0}^{a_1} 0 \ \mathrm{d}t && (13)\\
&= 0 && (14)
\end{aligned}$$

Das ist bei der Veranschaulichung dieses Vektorfeldes auch klar, denn jede Kurve entlang der x_1-Achse senkrecht zum Feld verläuft.

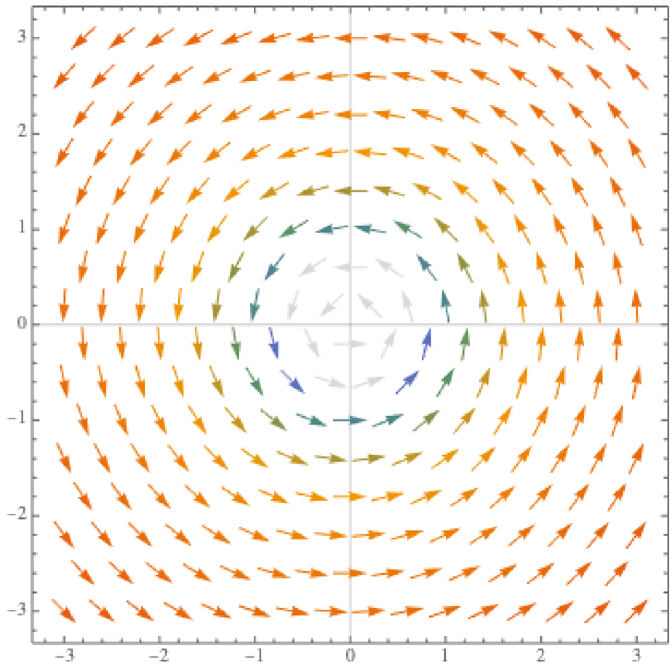

Abbildung 1: Vektorfeld v

c) Nun sei $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$ ebenfalls eine stückweise differenzierbare Kurve mit $\eta(0) = (a_0, 0)$ und $\eta(1) = (a_1, 0)$. Wir nehmen v, a_0 und a_1 aus Teilaufgabe b). **Gesucht** ist ebenfalls das Integral $\int_\eta v \ dx$.

Mit der Einschränkung von $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$ ist die Menge sternförmig, denn wir zu jedem Punkt auf der positiven x-Achse auch $[x_0, x] \in \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$.

Per Definition 5.8 Bemerkung 1 ist dieses Feld rotationsfrei, und per Definition 5.11 sind diese 2 Bedingungen hinreichend für Konservativität. Das bedeutet, dass der Wegintegral über das Vektorfeld unabhängig vom Pfad ist, und wir können aus dem Ergebnis von Teilaufgabe b) ablesen, dass hier 0 rauskommen muss.

d) Es sei $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]) \times \{0\}$ stückweise differenzierbar mit $\kappa(0) = (a_0, b_0)$ und $\kappa(1) = (a_1, b_1)$. **Gesucht** ist nochmal $\int_\kappa v \; \mathrm{d}x$. Wir behaupten, ähnlicherweise wie bei Teilaufgabe c), dass dies ein konservatives Kraftfeld ist, und das Integral nur von den Anfangs und Endpunkten abhängen soll. Mit dieser Argumentation parametrisieren wir κ als 2 Geraden Geraden zwischen Punkt $\kappa(0)$ und $\kappa(1)$. Die erste verläuft parallel zur x_1-Achse zwischen $x_1 = a_0$ und $x_1 = a_1$, und die zweite parallel zur x_2-Achse zwischen $x_2 = b_0$ und $x_2 = b_1$.

$$\kappa_1(s) = \begin{pmatrix} s \\ b_0 \end{pmatrix} \qquad | s \in [a_0, a_1] \tag{15}$$
$$\kappa_1'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

und

$$\kappa_2(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix} \qquad | t \in [b_0, b_1] \tag{17}$$
$$\kappa_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

An der Stelle $s = a_1$, $t = b_0$ ist diese Parametrisierung stetig.

$$\tag{19}$$

Dann gilt:

$$\int_\kappa v \; \mathrm{d}x = \int_{\kappa_1} v \; \mathrm{d}x + \int_{\kappa_2} v \; \mathrm{d}x \tag{20}$$
$$= \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{s^2 + b_0^2} \left\langle \begin{pmatrix} -b_0 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \; \mathrm{d}s + \int_{b_0}^{b_1} \frac{1}{a_1^2 + t^2} \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \; \mathrm{d}t \tag{21}$$
$$= \int_{a_0}^{a_1} \frac{-b_0}{s^2 + b_0^2} \; \mathrm{d}s + \int_{b_0}^{b_1} \frac{a_1^2}{a_1^2 + t^2} \; \mathrm{d}t \tag{22}$$
$$= -b_0 \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{b_0^2 \left(\frac{s^2}{b_0^2} + 1 \right)} \; \mathrm{d}s + a_1 \int_{b_0}^{b_1} \frac{1}{a_1^2 \left(\frac{t^2}{a_1^2} + 1 \right)} \; \mathrm{d}t \tag{23}$$

Wir substituhieren mit $u = \frac{s}{b_0}, \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}s}{b_0}$ bzw. $w = \frac{t}{a_1}, \quad \mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{a_1}$

$$= -\frac{1}{b_0} \int_{u(a_0)}^{u(a_1)} \frac{b_0}{u^2 + 1} \; \mathrm{d}u + \frac{1}{a_1} \int_{w(b_0)}^{w(b_1)} \frac{a_1}{w^2 + 1} \tag{24}$$
$$= -\int_{u(a_0)}^{u(a_1)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} + \int_{w(b_0)}^{w(b_1)} \frac{1}{w^2 + 1} \tag{25}$$

Bekanntlich ist dies das Integral das Arcus Tangens

$$= [-\arctan u]_{u(a_0)}^{u(a_1)} + [\arctan w]_{w(b_0)}^{w(b_1)} \tag{26}$$

$$= -\arctan\left(\frac{a_1}{b_0}\right) + \arctan\left(\frac{a_0}{b_0}\right) + \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \arctan\left(\frac{b_0}{a_1}\right) \tag{27}$$

Für diesen Wert erkennt man, dass für einen geschlossenen Weg $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ genau 0 rauskommen würde, wie wir es für ein konservatives Vektorfeld erwarten.

e) Für eine geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\int_\gamma v \; \mathrm{d}x \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{28}$$

Für den Fall, dass der Ursprung nicht in dieser Kurve eingechlossen wird, ist nichts zu zeigen. Dann ist $\int_\gamma v \; \mathrm{d}x = 0 = 2\pi \cdot 0$. Wie wir bereits bei Teilaufgabe d) gezeigt haben. Wir betrachten nun die Fälle, wo der Ursprung von dieser Kurve eingeschlossen wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[1] wählen wir eine Kreiskurve um den Ursprung, die wir wie folgt parametrisieren können.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi nt \\ \sin 2\pi nt \end{pmatrix} \qquad |n \in \mathbb{Z} \tag{29}$$

$$\gamma'(t) = 2\pi n \begin{pmatrix} -\sin 2\pi nt \\ \cos 2\pi nt \end{pmatrix} \tag{30}$$

Dann gilt:

$$\int_\gamma v \; \mathrm{d}x = \int_0^1 \langle v(\gamma), \gamma' \rangle \; \mathrm{d}t \tag{31}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\cos^2 2\pi nt + \sin^2 2\pi nt} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin 2\pi nt \\ \cos 2\pi nt \end{pmatrix}, 2\pi n \begin{pmatrix} -\sin 2\pi nt \\ \cos 2\pi nt \end{pmatrix} \right\rangle \; \mathrm{d}t \tag{32}$$

$$= \int_0^1 2\pi n \; \mathrm{d}t \tag{33}$$

$$= 2\pi n \tag{34}$$

[1] ÜA.

10.2 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)$$

. Im Folgenden sollen nun entsprechende Lösungen für die gebenen Funktionen gefunden werden.

a)

$$a(x) := 2,\ b(x) := x^2 e^{-2x},\ x_0 = 0,\ y_0 = \frac{1}{32} \tag{35}$$

$$\implies y'(x) = 2y(x) + x^2 e^{-2x} \tag{36}$$

$$y_h(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \tag{37}$$

$$= e^{\int_0^x 2\mathrm{d}t} \tag{38}$$

$$= e^{\left[2t\right|_0^x} \tag{39}$$

$$= e^{2x} \tag{40}$$

$$\implies A(x) = 2x \tag{41}$$

Variation der Konstanten:

$$y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t\right]e^{A(x)} \tag{42}$$

$$= \left[\frac{1}{32} + \int_0^x \left(t^2 e^{-2t}\right)e^{-2t}\mathrm{d}t\right]e^{2x} \tag{43}$$

$$= \left[\frac{1}{32} + \int_0^x t^2 e^{-4t}\mathrm{d}t\right]e^{2x} \tag{44}$$

Wir betrachten das Integral gesondert.

$$I = \int_0^x \overset{:=f'(t)}{e^{-4t}} \cdot \overset{:=g(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t \tag{45}$$

(Partielle Integration)

$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t^2\right|_0^x - \int_0^x -\frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \cdot 2t\ \mathrm{d}t \tag{46}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t^2\right|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x -e^{-4t} \cdot t\ \mathrm{d}t \tag{47}$$

(Partielle Integration)

$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t^2\right|_0^x + \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t\right|_0^x - \int_0^x -\frac{1}{4} \cdot e^{-4t}\ \mathrm{d}t\right) \tag{48}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t^2\right|_0^x + \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t\right|_0^x + \frac{1}{4}\int_0^x e^{-4t}\ \mathrm{d}t\right) \tag{49}$$

$$= \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t^2\right|_0^x + \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \cdot t\right|_0^x + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right|_0^x\right) \tag{50}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} \cdot x^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x} \cdot x + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}e^0\right]\right) \tag{51}$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} \cdot x^2 + \left(-\frac{1}{8}e^{-4x} \cdot x + \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x} + \frac{1}{4}e^0\right]\right) \tag{52}$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} \cdot x^2 + \left(-\frac{1}{8}e^{-4x} \cdot x + \left[-\frac{1}{32}e^{-4x} + \frac{1}{32}\right]\right) \tag{53}$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-4x} \cdot x^2 - \frac{1}{8}e^{-4x} \cdot x - \frac{1}{32}e^{-4x} + \frac{1}{32} \tag{54}$$
$$= -\frac{e^{-4x}}{32}\left(8x^2 + 4x + 1\right) + \frac{1}{32} \tag{55}$$

Nun können wir dies wieder in unsere Lösung einsetzen

$$y(x) = \left[\frac{1}{32} - \frac{e^{-4x}}{32}\left(8x^2 + 4x + 1\right) + \frac{1}{32}\right]e^{2x} \tag{56}$$
$$= \left[\frac{2}{32} - \frac{e^{-4x}}{32}\left(8x^2 + 4x + 1\right)\right]e^{2x} \tag{57}$$
$$= \frac{2e^{2x}}{32} - \frac{e^{-4x+2x}}{32}\left(8x^2 + 4x + 1\right) \tag{58}$$
$$= \frac{2e^{2x}}{32} - \frac{e^{-2x}}{32}\left(8x^2 + 4x + 1\right) \tag{59}$$
$$= -\frac{e^{-2x}}{32}\left(8x^2 + 4x - 2e^{4x} + 1\right) \tag{60}$$

Überprüfen

$$y(0) = -\frac{e^0}{32}\left(8 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 2e^0 + 1\right) \tag{61}$$
$$= -\frac{1}{32}(0 + 0 - 2 + 1) \tag{62}$$
$$= -\frac{1}{32}(-1) \tag{63}$$
$$= \frac{1}{32} = y_0 \qquad \checkmark \tag{64}$$
$$\tag{65}$$

b)

$$a(x) := \frac{2x}{x^2+1},\ b(x) := (x^2+1)^2\cos(x),\ x_0 = \pi,\ y_0 = 0 \tag{66}$$
$$\Longrightarrow\ y'(x) = \frac{2x}{x^2+1}y(x) + (x^2+1)^2\cos(x) \tag{67}$$

$$y_h(x) = e^{A(x)} \tag{68}$$

mit

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t \tag{69}$$
$$= \int_{\pi}^{x} \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t \tag{70}$$

Sub.: $t^2+1=u \iff 2t\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u \iff \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{2t}$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\pi^2+1}^{x^2+1} \frac{2t}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2t} && (71)\\
&= \int_{\pi^2+1}^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} && (72)\\
&= \Big[\ln(t)\Big|_{\pi^2+1}^{x^2+1} && (73)\\
&= \ln\big(x^2+1\big)-\ln\big(\pi^2+1\big) && (74)
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
y_h(x) &= e^{(\ \ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(\pi^2+1\right))} && (75)\\
&= \frac{e^{\ln\left(x^2+1\right)}}{e^{\ln(\pi^2+1)}} && (76)\\
&= \frac{x^2+1}{\pi^2+1} && (77)
\end{aligned}
$$

Variation der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left[y_0+\int_{x_0}^{x} b(t)\cdot e^{-A(t)}\right]\cdot e^{A(x)} && (78)\\
&= \left[0+\int_{\pi}^{x}(t^2+1)^2\cos(t)e^{\ln\left(\pi^2+1\right)-\ln\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} && (79)\\
&= \left[\int_{\pi}^{x}(t^2+1)^2\cos(t)\frac{\pi^2+1}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} && (80)\\
&= \left[\int_{\pi}^{x}(t^2+1)\cos(t)(\pi^2+1)\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} && (81)\\
&= \left[(\pi^2+1)\int_{\pi}^{x}(t^2+1)\cos(t)\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} && (82)
\end{aligned}
$$

Auch hier betrachten wir das Integral getrennt:

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{\pi}^{x}(t^2+1)\cos(t)\mathrm{d}t && (83)\\
&= \int_{\pi}^{x} t^2\cos(t)\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{x}\cos(t)\mathrm{d}t && (84)\\
&=: J+K. && (85)\\
K &= \int_{\pi}^{x}\cos(t)\mathrm{d}t && (86)\\
&= \Big[\sin(t)\Big|_{\pi}^{x} && (87)\\
&= \sin(x). && (88)\\
& && (89)\\
J &= \int_{\pi}^{x}\cos(t)t^2\mathrm{d}t && (90)
\end{aligned}
$$

(Partielle Integration)

$$= \left[\sin(t)\cdot t^2\right|_\pi^x - \int_\pi^x \sin(t)\cdot 2t \text{ d}t \tag{91}$$
$$= \left[\sin(t)\cdot t^2\right|_\pi^x - 2\int_\pi^x \sin(t)\cdot t \text{ d}t \tag{92}$$

(Partielle Integration)

$$= \left[\sin(t)\cdot t^2\right|_\pi^x - 2\left(\left[-\cos(t)\cdot t\right|_\pi^x - \int_\pi^x -\cos(t) \text{ d}t\right) \tag{93}$$
$$= \left[\sin(t)\cdot t^2\right|_\pi^x - 2\left(\left[-\cos(t)\cdot t\right|_\pi^x + \int_\pi^x \cos(t) \text{ d}t\right) \tag{94}$$
$$= \left[\sin(t)\cdot t^2\right|_\pi^x - 2\left(\left[-\cos(t)\cdot t\right|_\pi^x + \left[\sin(t)\right|_\pi^x\right) \tag{95}$$
$$= \sin(x)\cdot x^2 - \sin(\pi)\cdot\pi^2 - 2(-\cos(x)\cdot x + \cos(\pi)\cdot\pi + (\sin(x) - \sin(\pi))) \tag{96}$$
$$= \sin(x)\cdot x^2 - 2(-\cos(x)\cdot x - \pi + \sin(x)) \tag{97}$$
$$= \sin(x)x^2 + 2x\cos(x) + 2\pi - 2\sin(x) \tag{98}$$

Einsetzen

$$I = J + K \tag{99}$$
$$= \sin(x)x^2 + 2x\cos(x) + 2\pi - 2\sin(x) + \sin(x) \tag{100}$$
$$= \sin(x)x^2 + 2x\cos(x) + 2\pi - \sin(x) \tag{101}$$
$$= (x^2-1)\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\pi \tag{102}$$

Und nochmal einsetzen

$$y(x) = \left[(\pi^2+1)\cdot I\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} \tag{103}$$
$$= \left[(\pi^2+1)\cdot((x^2-1)\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\pi)\right]\cdot\frac{x^2+1}{\pi^2+1} \tag{104}$$
$$= \left[((x^2-1)\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\pi)\right]\cdot(x^2+1) \tag{105}$$
$$= (x^2+1)((x^2-1)\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\pi) \tag{106}$$

Überprüfen

$$y(x_0) = y(\pi) \tag{107}$$
$$= (\pi^2+1)((\pi^2-1)\sin(\pi) + 2\pi\cos(\pi) + 2\pi) \tag{108}$$
$$= (\pi^2+1)((\pi^2-1)\cdot 0 + 2\pi\cdot(-1) + 2\pi) \tag{109}$$
$$= (\pi^2+1)(0 - 2\pi + 2\pi) \tag{110}$$
$$= (\pi^2+1)\cdot(0) \tag{111}$$
$$= 0 = y_0 \qquad \checkmark \tag{112}$$

10.3 Mannigfaltigkeiten und Tangentialraum

a) Gegben ist die Menge

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | ze^x = 2 + x + \sin(y-z)\right\} \tag{113}$$

1.) M ist eine Untermannigfaltigkeit

Aus der Einschränkung der Menge können wir die folgende Funktion entnehmen:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \tag{114}$$
$$(x,y,z) \longmapsto 2 + x + \sin(y-z) - ze^x. \tag{115}$$

Sodass im weiteren Verlauf gelten wird:

$$M = f^{-1}(0) \tag{116}$$

Dies entspricht dem Vorgehen nach dem Korrolar zum IFT (Satz 4.8). Um zu bestätigen, dass es sich bei M tatsächlich um eine Untermannigfaltigkeit handelt, müssen zunächst die Bedingungen des Korrolars überprüft werden

(i) $\mathbb{R}^3$ ist offen ✓

(ii) $f \in C^\infty$ (poly. Fkt. + Trig. Fkt. + e-Fkt.) ✓

(iii) rank $J_f(p) = 1 \;\forall\; p := (x,y,z) \in M$.

Die Jacobimatrix von f entspricht genau dem Gradienten:

$$J_f(p) = \boldsymbol{\nabla} f\Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{117}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - ze^x \\ \cos(y-z) \\ -\cos(y-z) - e^x \end{pmatrix} \tag{118}$$

Rang 1 hat dieser Vektor, wenn immer mindestens eine Komponente ungleich 0 ist. Hierzu genügt es, in diesem Fall, lediglich die 2. und 3. Komponente zu betrachten.

$$\cos(y-z) = 0 \iff (y-z) \in \left\{\pi n - \frac{\pi}{2} | n \in \mathbb{Z}\right\} \tag{119}$$
$$e^x > 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R} \tag{120}$$

Es gilt also

$$\cos(y-z) = 0 \implies -\cos(y-z) - e^x \neq 0 \tag{121}$$
$$\wedge -\cos(y-z) - e^x = 0 \implies \cos(y-z) \neq 0 \tag{122}$$

Somit hat $J_f(p)$ für alle möglichen Werten von x, y, z vollen Rang. Da so alle von Satz 4.8 vorgegebenen Bedingungen erfüllt sind, ist M eine Untermannigfaltigkeit.

Gemäß der Definition von f handelt es sich hierbei um eine <u>2-dimensionale</u> Untermannigfaltigkeit.

Um den Tangentialraum am gegebenen Punkt zu bestimmen, wenden wir Satz 4.12 an. Die Voraussetzungen sind bereits durch bereits gezeigten Eigenschaften von M als Untermannigfaltigkeit bestätigt.

$$\begin{aligned} T_pM &= \left(\operatorname{span}\left\{ \nabla f\Big|_p \right\}\right)^{\perp} && (123)\\ &= \left(\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot e^0 \\ \cos(2-2) \\ -\cos(2-2) - e^0 \end{pmatrix} \right\}\right)^{\perp} && (124)\\ &= \left(\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}\right)^{\perp} && (125) \end{aligned}$$

Der Span ist 1-Dimensional, somit wird der Tagentialraum als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ eine Ebene sein, welche von zwei Vektoren aufgespannt wird. Den ersten Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ finden wir als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} && (126)\\ &= -1u_1 + 1u_2 - 2u_3 && (127) \end{aligned}$$

Mögliche Lsg.: $u = (1, 1, 0)^T$

$$\begin{aligned} &= -1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 0 && (128)\\ &= 0 && (129) \end{aligned}$$

Den zweiten Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ erhalten wir aus dem Kreuzprodukt

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ -2-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (130)$$

u und v sind ebenfalls orthogonal zueinander:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} && (131)\\ &= 1\cdot 2 - 1\cdot 2 - 2\cdot 0 && (132)\\ &= 0 && (133) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \qquad (134)$$

b) Zu zeigen: N ist Untermannigfaltigkeit Gegeben:

$$N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 = 4 \text{ und } x + 4y - z = 6\} \tag{135}$$

Wir wenden abermals das Korollar zum IFT an. Hierfür definieren wir zunächst zwei Funktionen, die N beschreiben:

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + z^2 - 4 \tag{136}$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x + 4y - z - 6 \tag{137}$$

Hieraus definieren wir eine vektorwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 f = (f1, f2) \tag{138}$$
$$\tag{139}$$

Wir prüfen nun die Voraussetzungen zum Korolar zum IFT:

- $\mathbb{R}^3$ ist offen ✓
- f besteht aus Funktionen bestehend aus Polynomen. Also $f \in C^\infty$ ✓
- Maximaler Rang von $J_f(p)$

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \tag{140}$$
$$\tag{141}$$

Dies hat stets Rang zwei für alle $(x, y, z) \in N$, denn nur im Fall $x = z = 0$ ist der Rang 1, dies ist aber per Definition von N ausgeschlossen. N ist somit eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$

Zu bestimmen: $T_{(0,2,2)}N$
Wir gehen gemäß Satz 4.12 vor. Dessen Voraussetzungen haben wir gerade beim Beweis der Untermannigfaltigkeit gezeigt. Dann gilt:

$$T_pN = (\text{span}\{\nabla f_1, \nabla f_2\})^\perp \tag{142}$$
$$= (\text{span}\{(2x, 0, 2z), (1, 4, -1)\})^\perp \qquad p = (0, 2, 2) \tag{143}$$
$$= (\text{span}\{(0, 0, 4), (1, 4, -1)\})^\perp \tag{144}$$

Dies ist eine Ebene im $\mathbb{R}^2$, woraus folgt, dass ihr orthogonales Komplement eine Gerade sein muss. Deren Richtung v erhalten wir mit dem Kreuzprodukt

$$v = (0, 0, 4) \times (1, 4, -1) \tag{145}$$
$$= (-16, 4, 0) \tag{146}$$

Da nur die Richtung interessiert, gilt:

$$\hat{v} = (-4, 1, 0) \tag{147}$$
$$\implies T_pN = \text{span}(\hat{v}) \tag{148}$$

10.4 Exponentialfunktion für Matrizen

Es sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die Operatornorm auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ und $p(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\ c_k \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

a) Es sei $\|\cdot\|_{\text{op}} < r$. **Zu zeigen** ist, dass die Folge $p_l(A) := \sum_{k=0}^{l} c_k A^k$ eine Cauchy-Folge in $(M(n \times n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{op}})$ ist. Wir identifizieren den Raum der $(n \times n)$-Matrizen mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ als ein endlich dimensionaler Vektorraum, das heißt, dass alle Normen äquivalent sind. Da eine

Falls p_l eine Cauchy-Folge ist, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, l \geq n_0 :\ d(p_l, p_k) < \varepsilon \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon \exists N : \forall m, n > N : d(p_m(A), p_n(A) < \epsilon : && (150)\\
\left\| \sum_{k=0}^{m} c_k A^k - \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \right\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k A^k \right\| && (151)\\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \left\| c_k A^k \right\| \qquad |\text{Dreiecksugl} && (152)\\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_k| \left\| A^k \right\| \qquad |\text{Homogentität der Norm} && (153)\\
& && (154)
\end{aligned}$$

Wir nutzen aus, dass die Matrix A in der Operatornorm kleiner als der Konvergenzradius r ist. Da die Reihe die Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ hat, können wir als Entwicklungspunkt A_0 schlicht 0 annehmen. Da dann gilt

$$\|A - A_0\| = \|A\| < r$$

konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig. Da die Reihe konvergiert, muss dies auch für die Folge p_l gelten. Wir wissen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, also auch p_l.

b) In einem vollständigen Raum konvergieren per Definition alle Cauchy-Folgen (Def. 1.8). Wir müssen also zeigen, dass $(M(n,n,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{op}})$ ein vollständiger Raum ist.

Hierbei halten wir zunächst fest, dass wir den Raum dieser Matrizen mit dem R^{n^2} identifizieren können. Somit sind alle Normen äquivalent.

Wie auf einem vergangenen Übungsblatt für beliebige Matrizen gezeigt, ist Konvergenz im R^p (p, da hier n bereits belegt ist) äquivalent zu Konvergenz der einzelnen Komponenten eines Vektors (in $\mathbb{R}$ bezüglich Betrag).

Wir rechnen nun die Konvergenz einer beliebigen Cauchy-Folge bezüglich der 2-Norm und damit aller Normen im R^p nach: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

$$\forall\epsilon > 0 \exists N : \forall m,n \in \mathbb{N} : \|x_m - x_n\|_2 < \epsilon \tag{155}$$
$$\implies |x_{m,i} - x_{n,i}| \leq \|x_m - x_n\|_2 < \epsilon \quad i \in \{1,...,k\} \tag{156}$$
$$\implies \lim_{k\to\infty} x_k = (\lim_{k\to\infty} x_{k,1}, ..., \lim_{k\to\infty} x_{k,p})^T = (a_{k,1}, ..., a_{k,p})^T \qquad \lim_{k\to\infty} x_{k,i} =: a_{k,i} \tag{157}$$

Das bedeutet, dass $\mathbb{R}^p$ vollständig ist, da wir die Konvergenz einer beliebigen Cauchy-Folge x_k im $\mathbb{R}^p$ auf die Konvergenz der Komponenten-Cauchyfolgen zurückgeführt haben. Da in $\mathbb{R}$ alle Cauchy-Folgen konvergent sind, beendet dies den Beweis. $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.
Hieraus folgt direkt die Konvergenz der Folge aus Teilaufgabe a), da diese eine Cauchyfolge auf dem vollständigen Raum R^{n^2} ist.

c) Sei $C \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, sodass $\|A\|_{\text{op}},\ \|CAC^{-1}\|_{\text{op}} < r$. **Zu Beweisen** ist, dass

$$p(CAC^{-1}) = Cp(A)C^{-1}. \tag{158}$$

Wir setzen zunächst in die Definition von p ein

$$p(CAC^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (CAC^{-1})^k \tag{159}$$

Schauen wir uns die Potenz gesondert an, sehen wir, dass

$$(CAC^{-1})^k = \overset{k\text{-mal}\rightarrow}{CAC^{-1}CAC^{-1}CAC^{-1}CAC^{-1}\ldots} \tag{160}$$
$$= \overset{k\text{-mal}\rightarrow}{(CAC^{-1})(CAC^{-1})(CAC^{-1})(CAC^{-1})\ldots} \tag{161}$$
$$= \overset{k\text{-mal}\rightarrow}{CA(C^{-1}C)A(C^{-1}C)A(C^{-1}C)AC^{-1}\ldots} \tag{162}$$
$$= \overset{k\text{-mal}\rightarrow}{CA\mathbb{1}A\mathbb{1}A\mathbb{1}A\ldots C^{-1}} \tag{163}$$
$$= \overset{k\text{-mal}\rightarrow}{CAAAA\ldots C^{-1}} \tag{164}$$
$$= CA^kC^{-1} \tag{165}$$

Somit gilt, zurück in p:

$$p(CAC^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (CAC^{-1})^k \tag{166}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k CA^kC^{-1} \tag{167}$$

Da C und C^{-1} nun nicht mehr von k abhängen, können diese aus der Summe gezogen werden:

$$= C\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k\right)C^{-1} \tag{168}$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht genau $p(A)$.

$$\iff p(CAC^{-1}) = Cp(A)C^{-1} \tag{169}$$

d) Sei nun

$$p(x) := \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

i.) Gegeben ist eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Seien $d_{ii} \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ die Diagonalelemente der Matrix, sodass gilt

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{170}$$

Für die q-Fache Potenz einer solchen Matrix mit $k \in \mathbb{N}$ gilt (mit „$\times$“als Operator für die Matrixmultiplikaion, nicht das Kreuzprodukt.)

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{171}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} \times \cdots \times d_{11} & & & & \\ & d_{22} \times \cdots \times d_{22} & & & \\ & & d_{33} \times \cdots \times d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \times \cdots \times d_{nn} \end{pmatrix} \tag{172}$$

$$= \begin{pmatrix} (d_{11})^k & & & & \\ & (d_{22})^k & & & \\ & & (d_{33})^k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (d_{nn})^k \end{pmatrix}. \tag{173}$$

Die skalare Multiplitkaion und Addition sind bekanntermaßen als teil der Vektorraumstruktur „implementiert“. Somit können wir die Abbildung p umschreiben:

$$p(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \tag{174}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (d_{11})^k & & \\ & \ddots & \\ & & (d_{nn})^k \end{pmatrix} \tag{175}$$

Skalare Multiplikation komponentenweise

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(d_{11})^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{(d_{nn})^k}{k!} \end{pmatrix} \tag{176}$$

Matrixaddition komponentenweise

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d_{11})^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d_{nn})^k}{k!} \end{pmatrix} \tag{177}$$

Definition von p einsetzen

$$= \begin{pmatrix} p(d_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(d_{nn}) \end{pmatrix} \tag{178}$$

$$\tag{179}$$

ii.) Gegeben ist nun eine Matrix M der Form

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{180}$$

Hierbei handelt es sich um eine sogenannte *Nilpotente Matrix* (vgl. LA1, 2). Dies bedeutet, es existiert ein $q \in \mathbb{N}$, sodass

$$M^q = 0 \tag{181}$$

Wir stellen fest, dass dies bei der gegebenen $m \times m$-Matrix jeweils nach genau m Schritten der Fall ist; mit jeder weiteren Multiplikation verschiebt sich die Diagonale mit den einsen jeweils um eine Stelle nach oben bis nach m Schritten die Matrix 0 ist.
Dies bedeutet, dass für den Grenzwert auch nur die Summe bis m anstatt ∞ interessiert.

$$\exp\{M\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \tag{182}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!} \tag{183}$$

$$= c_0 \mathbb{1} + c_1 D + c_2 D^2 + ... c_m D^m \tag{184}$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass dies gerade eine obere Dreiecksmatrix ergibt, für die dann gilt:

$$\exp\{D\} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & c_0 & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{pmatrix} \qquad |c_k := \frac{1}{k!},\ k \in \{1, ..., m\} \tag{185}$$

Also c_0 auf der Hauptdiagonalen, c_1 auf der ersten Nebendiagonalen über der Hauptdiagonalen, c_2 auf der zweiten Nebendiagonalen usw. bis c_m an der Stelle $\exp(M)_{1m}$

e) Es seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $AB = BA$. **Zu zeigen** ist, dass $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$. Die Tatsache, dass $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ wurde in Satz 6.11 der Analysis I bewiesen. Analog lässt sich daraus folgern, dass da für unseren Fall A und B kommutieren, so folgt auch $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$. Dies zeigen wir durch analoge Wiederholung des Beweises mit A und B.

Per Satz 6.10 der Ana I ist das Cauchy-Produkt von $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$, da sie kommutieren:

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad |c_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{B^{k-n}}{(k-n)!} \tag{186}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} A^n B^{k-n} \qquad \left|\frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}\right. \tag{187}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{k}{n} A^n B^{k-n} \qquad |(u+v)^k = \binom{k}{n} u^n v^{k-n} \tag{188}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \tag{189}$$

$$= \mathrm{e}^{A+B} \tag{190}$$

Somit gilt die gesuchte Aussage gezeigt,

f) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine beliebige diagonalisierbare Matrix. Wie kann vorgegangen werden, um $\exp(A)$ möglichst einfach zu berechnen?
Ist A Diagonalisierbar, so existeriert eine Diagonalmatrix D, und Matrizen $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, sodass

$$D = TAT^{-1}. \tag{191}$$

Hierbei sind T, T^{-1} die Basiswechselmatrix gebildet aus den Eigenvektoren von A und ihr Inverses. Die obige Gleichung können wir umschreiben, zu

$$D = TAT^{-1} \tag{192}$$

$$\iff T^{-1}DT = T^{-1}TAT^{-1}T \tag{193}$$

$$\iff T^{-1}DT = A \tag{194}$$

Für das Produkt $T^{-1}DT$ gilt unter Potenzen das gleiche Vorgehen, wie auch schon in Teil c) gezeigt wurde:

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} : (T^{-1}DT)^k &= (T^{-1}DT)(T^{-1}DT)(T^{-1}DT)\dots && (195)\\
&= T^{-1}D(TT^{-1})D(TT^{-1})D\dots T && (196)\\
&= T^{-1}D\mathbb{1}D\mathbb{1}D\dots T && (197)\\
&= T^{-1}D^kT. && (198)
\end{aligned}$$

Für die Exponentialfunktion gilt also:

$$\begin{aligned}
\exp\bigl(T^{-1}DT\bigr) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k && (199)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (T^{-1}DT)^k && (200)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{-1}D^kT && (201)\\
&= T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k\right)T && (202)\\
&= T^{-1}\exp(D)T. && (203)
\end{aligned}$$

Also können wir wie folgt vorgehen:

$$\exp(A) = \exp\bigl(T^{-1}DT\bigr) \tag{204}$$

c) + Bemerkung oben

$$= T^{-1}\exp(D)T \tag{205}$$

D ist diagonal mit Diagonalelementen $d_{ii} \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$, also können wir b) (i.) anwenden

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(d_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(d_{nn}) \end{pmatrix} \tag{206}$$

Somit gilt für die Gleichung

$$\exp(A) = T^{-1}\exp(D)T = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \exp(d_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(d_{nn}) \end{pmatrix} \cdot T \tag{207}$$