8. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

8.1 Implizite-Funktionen-Theorem

Geg.:

- $f(x, y, z) = x\cos(y + z) + ze^{2xy} - 1 = 0$
- $p = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$

Per dem Impliziten-Funktionen-Theorem kann man eine Funktion

$$f \in C^1 : U \subset \mathbb{R}^n \times V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \tag{1}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2}$$

nach $y = g(x) \in C^1$ in einer offenen Umgebung von $(x_0, y_0) \in U_0 \times V_0$ umformen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i.

$$f(x_0, y_0) = 0 \tag{3}$$

ii.

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}\ (x_0, y_0) \neq 0 \tag{4}$$

Gesucht sind die Variablen, nach den man die Funktion f auflösen kann und die Ableitung der Auflösungsfunktion.

a) Nach z:

Angepasst an unser Beispiel definieren wir:

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{5}$$
$$((x, y), z) \mapsto f((x, y), z) \tag{6}$$

Wir überprüfen die Bedingungen:

i.

$$f((x_0, y_0), z_0) = 1\cos 0 + 0e^{2\cdot 1\cdot 0} - 1 = 0 \tag{7}$$
$$1 - 1 = 0 \tag{8}$$

ii.

$$\det \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p = -x\sin(y + z) + e^{2xy} - 1\Big|_p \tag{9}$$
$$= -1\sin 0 + e^0 \tag{10}$$
$$= 1 \tag{11}$$

Die notwendigen Voraussetzungen um die Funktion in der Nähe von p nach z aufzulösen sind erfüllt. Das impliziert, dass es ein $g \in C^1$ existiert mit $g(x, y) = z$.

Zunächst bestimmen wir die Ableitung der Auflösungsfunktion $g'(x, y) \equiv J_g(x, y) \equiv \frac{\partial g}{\partial z}(x, y) \equiv Dg(x, y)$.

Für Punkte $\aleph \equiv (x, y)$ in unserer Teilmenge $U_0 \subset U$ gilt:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \aleph}\left(\aleph, g(\aleph)\right)) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\aleph, g(\aleph)\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(\aleph) \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(\aleph, g(\aleph)\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(\aleph) = -\frac{\partial f}{\partial \aleph}\left(\aleph, g(\aleph)\right)) \tag{13}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}\left(\aleph\right) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\left(\aleph, g(\aleph)\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \aleph}(\aleph, g(\aleph)) \tag{14}$$

Dafür rechnen wir kurz nach, was $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \aleph}$ sind:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x\sin(y+z) + e^{2xy} \tag{15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \aleph} = \begin{bmatrix} \cos(y+z) + 2yze^{2xy} \\ -x\sin(y+z) + 2xze^{2xy} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Das bedeutet für unsere Ableitung von $z = g(\aleph)$:

$$J_g(\aleph) = \frac{-1}{-x\sin(y+g(\aleph)) + e^{2xy}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(y+g(\aleph)) + 2yg(\aleph)e^{2xy} \\ -x\sin(y+g(\aleph)) + 2xg(\aleph)e^{2xy} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Dieses Ergebnis werten wir spezifisch an der Stelle $z = g(1, 0) = 0$ aus:

$$J_g(1,0) = \frac{-1}{-1\sin 0 + e^0} \cdot \begin{bmatrix} \cos 0 + 0 \\ -1\sin 0 + 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

b) Analog definieren wir für y :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \tag{20}$$

$$((x,z),y) \to f((x,z),y) \tag{21}$$

Wir überprüfen die noch nicht überprüfte Anfangebsdingung:

ii.

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_p = -x\sin(y+z) + 2xze^{2xy}\big|_p \tag{22}$$

$$= -\sin 0 + 0 \tag{23}$$

$$= 0 \tag{24}$$

In diesem Fall ist es nicht möglich nach y aufzulösen.

c) Für x definieren wir

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{25}$$

$$((y,z),x) \mapsto f((y,z),x) \tag{26}$$

Und überprüfen die zweite Bedingung:

ii.

$$\det \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p = \cos(y+z) + 2yze^{2xy}\big|_p \tag{27}$$
$$= \cos 0 + 0 \tag{28}$$
$$= 1 \tag{29}$$

Es ist doch möglich die Funktion nach x aufzulösen. Das impliziert, dass es ein $h \in C^1$ existiert mit $h(y,z) = x$.

Ähnlicherweise suchen wir jetzt die Ableitung $Dh(y,z) = J_h(y,z)$ aber jetzt in der Nähe von $q = (y_0, z_0) = (0,0)$. Für Punkte $\xi := (y,z) \in U_0$ gilt, das gleiche, nur eine Umbenennung der Variablen ist nötig. Wir erhalten:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\xi) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, h(\xi))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, h(\xi)) \tag{30}$$

Dabei sind $\frac{\partial f}{x}$ und $\frac{\partial f}{\xi}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y+z) + 2yze^{2xy} \tag{31}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -x\sin(y+z) + 2xze^{2xy} \\ -x\sin(y+z) + e^{2xy} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Es gilt also:

$$J_h(\xi) = -\frac{1}{\cos(y+z) + 2yze^{2xy}} \cdot \begin{bmatrix} -x\sin(y+z) + 2xze^{2xy} \\ -x\sin(y+z) + e^{2xy} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Ausgewertet an der Stelle $x = q(0,0) = 1$ ergibt dies:

$$J_h(0,0) = -\frac{1}{\cos 0 + 0} \cdot \begin{bmatrix} -1\sin 0 + 0 \\ -1\sin 0 + e^0 \end{bmatrix} \tag{34}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

8.2 Auflösen einer Gleichung

a) **Zu zeigen** ist, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + uy + e^v = 0 \tag{36}$$
$$2x + u^2 - uv = 5 \tag{37}$$

in einer Umgebung von $(x, y) = (2, 5)$ durch eine Abbildung

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) \tag{38}$$

mit $u(2, 5) = -1$ und $v(2, 5) = 0$ aufgelöst werden kann.

Beide Abbildungen sind entsprechend ihrer Zusammensetzung aus Polynomen und der e-Fkt. mindestens in C^1.

Wir definieren zurerst die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Hierzu stellen wir zusätzlich (37) zu $\cdots = 0$ um.

$$F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x^2 + uy + e^v \\ 2x + u^2 - uv - 5 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Es gilt nun, die zwei Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen zu Überprüfen.

i.) Am gegebenen Punkt muss gelten

$$F(x_0, y_0) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \tag{40}$$

Für x_0, y_0 setzen wir $x_0 = (2, 5),\ y_0 = (-1, 0)$ ein

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} F(x_0, y_0) \tag{41}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^2 + -1 \cdot 5 + e^0 \\ 2 \cdot 2 + (-1)^2 - (-1) \cdot 0 - 5 \end{pmatrix} \tag{42}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 - 5 + 1 \\ 4 + 1 - 5 \end{pmatrix} \tag{43}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \tag{44}$$

ii.) Am gegebenen Punkt muss gelten

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u, v}\right)\Bigg|_{(x_0, y_0)} \neq 0 \tag{45}$$

Wir berechnen die Jacobimatrix für die Ableitungen nach u und v.

$$\frac{\partial F}{\partial u, v} = \begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u - v & -u \end{pmatrix}, \tag{46}$$

bestimmen die Determinante

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u, v}\right) = -yu - (2u - v)e^v \tag{47}$$

und betrachten deren Wert am gegebenen Punkt $(2, 5, -1, 0)$:

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial u, v}\right)\bigg|_{(2,5,-1,0)} = -5 \cdot (-1) - (2 \cdot (-1) - 0)e^0 \tag{48}$$

$$= 7 \neq 0 \quad \checkmark \tag{49}$$

Dies erfüllt die zweite Bedingung. Somit ist nach dem Satz über Implizite Funktionen bewiesen, dass das Gleichungssystem in der gegebenen Umgebung durch die gegebene Abbildung lösbar ist. Diese Abbildung sei nun $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung (g) im Punkt $(x, y) = (2, 5)$ Nach Bemerkung 2 („Die linearisierte Gleichung “) zum Satz über Implizite Funktionen gilt:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x, y} + \frac{\partial F}{\partial u, v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u, v} \tag{50}$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial u, v} = -\left(\frac{\partial F}{\partial u, v}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x, y} \tag{51}$$

Hierzu benötigen wir nun noch die Jacobimatrix für F in den Variablen x und y

$$\frac{\partial F}{\partial x, y} = \begin{pmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

an der entsprechenden Stelle

$$\frac{\partial F}{\partial x, y}\bigg|_{(2,5,-1,0)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

und das Inverse der Matrix $\frac{\partial F}{\partial u, v}$, ebenfalls an dieser Stelle

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u, v}\bigg|_{(2,5,-1,0)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & e^0 \\ 2 \cdot (-1) - 0 & -(-1) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{54}$$

$$= \frac{1}{\det \frac{\partial F}{\partial u, v}\Big|_{(2,5,-1,0)}} \cdot \operatorname{adj}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Und somit erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial u, v}\bigg|_{(2,5)} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial u, v}\bigg|_{(2,5)} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial u, v}\bigg|_{(2,5)} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} \tag{59}$$

als Ableitung von g an der Stelle $(2, 5)$.

8.3 Extrema mit Nebenbedingung

Wir betrachten die Menge $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; g(x,y,z) := \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 - 1 = 0\right\}$

a) **Zu zeigen** ist, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

Per dem Korollar zum Impliziten-Funktionen-Theorems ist $M \subset \mathbb{R}^{2+1}$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{2+1}$ und eine Funktion $g \in C^l : D \to \mathbb{R}$ mit rang $(J_g(p)) = 1$ für alle $p \in M := f^{-1}(0)$.

Es ist klar, D ist offen, da $\mathbb{R}^3$ offen ist. $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, weil Polynome sind laut ANA I unendlich oft stetig differenzierbar. Bleibt zu zeigen, dass der Rang der Jakobi-Matrix gleich 1 ist.

Zur Klarheit multiplizieren wird die Funktion g aus:

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2+y^2} + 4 + z^2 - 1 = 0 \tag{60}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2+y^2} + 3 = 0 \tag{61}$$

Die Jakobi-Matrix ist:

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{63}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{64}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z \tag{65}$$

$$\rightarrow J_g = \begin{bmatrix} 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \end{bmatrix} \tag{66}$$

Der Rang dieser Matrix ist 1 für alle $p = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. Am Punkt $(0,0,0)$ ist die Funktion nämlich nicht definiert, aber das macht uns keine Probleme, weil es nicht in der Menge enthalten ist:

$$g(0,0,0) = 0 + 0 + 0 - 4 \cdot \sqrt{0} + 3 \neq 0 \tag{67}$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x + z$. **Gesucht** sind alle möglichen Extrema von f unter der Bedingung, dass $g(x,y,z) = 0$.

Laut dem Satz 4.13 zu Lagrange-Multiplikatoren habe eine Funktion $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ im Punkt p ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g \in C^1(D, \mathbb{R}^k) = 0$, dann existieren $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda_i \boldsymbol{\nabla} g_i(p) \tag{68}$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen zur Anwendung des Satzes: D ist offen, $f \in C^1$ ist klar, $g \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,z), \mathbb{R})$. Wir suchen dann die möglichen lokalen Extrema:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g \tag{69}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\tag{71}$$

Daraus können wir ein lineares Gleichungssystem bilden:

$$\text{I.} \qquad 1 = \lambda 2x - \frac{\lambda 4x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{72}$$

$$\text{II.} \qquad 0 = \lambda 2y - \frac{\lambda 4y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{73}$$

$$\text{III.} \qquad 1 = \lambda 2z \tag{74}$$

$$\tag{75}$$

Wir können I. und III. gleichsetzen und erhalen:

$$\lambda 2z = \lambda 2x - \frac{\lambda 4x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{76}$$

$$z = x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad |\text{Aus II. folgt } y = 0 \tag{77}$$

$$z = x - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} \tag{78}$$

$$= x - \frac{2x}{|x|} \tag{79}$$

An dieser Stelle müssen wir eine Fallunterscheidung machen für $x < 0$ und $x > 0$

$$x > 0 \tag{80}$$

$$z = x - \frac{2x}{x} \tag{81}$$

$$= x - 2 \tag{82}$$

$$x < 0 \tag{83}$$

$$z = x - \frac{2x}{-x} \tag{84}$$

$$= x + 2 \tag{85}$$

Setzen wir diese Werte in unsere Zwangsbedingung $g(x, y, z) = 0$ ein und erhalten:

$$g(x, 0, x-2) = x^2 + (x-2)^2 - 4\sqrt{x^2} + 3 = 0 \tag{86}$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 4|x| + 3 = 0 \tag{87}$$

$$2x^2 - 4x - 4|x| + 7 = 0 \qquad |x > 0 \tag{88}$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \tag{89}$$

$$x^2 - 4x^2 + \frac{7}{2} = 0 \qquad |\text{pq-Formel} \tag{90}$$
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \tag{91}$$

$$g(x, 0, x+2) = x^2 + (x+2)^2 - 4\sqrt{x^2} + 3 = 0 \tag{92}$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 4|x| + 3 = 0 \tag{93}$$
$$2x^2 + 8x + 7 = 0 \tag{94}$$
$$x^2 + 4x + \frac{7}{2} = 0 \qquad |\text{pq-Formel} \tag{95}$$
$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \tag{96}$$

Somit sind die möglichen Extrema:

$$H_1 = \left(2 + \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \tag{97}$$
$$H_2 = \left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \tag{98}$$
$$H_3 = \left(-2 + \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \tag{99}$$
$$H_4 = \left(-2 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \tag{100}$$

Die graphische Darstellung der Menge $\{f - k\}$, mit $k = 0, 1, 2, 3$ entspricht einem Ausschnitt des $\mathbb{R}^4$ bei welchem $y = 0$, Es werden in 2 Achsen die Werte x, z dargestellt und der Funktionswert in einer anderen.

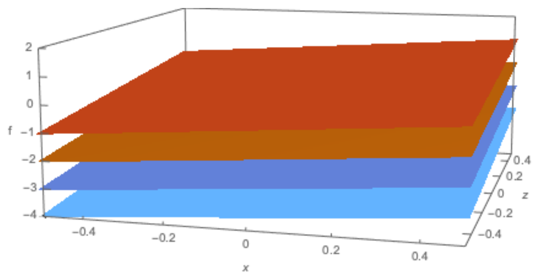

Abbildung 1: Menge $\{f - k\}$

8.4 Tangentialraum

a) Wir haben $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und betrachten

$$M \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

Insbesondere sind $x_0, y_0, z_0 > 0$. Wir stellen fest, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist:
Für die Punkte p in M gilt gerade, dass $h(p) = 1$ beziehungsweise $h(p) - 1 = 0$. Für die Jacobi-Matrix finden wir:

$$J_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \tag{101}$$

Daran liest man direkt ab, dass die Matrix für alle Punkte außer $(0, 0, 0)$ vollen Rang hat. Wir können somit das Korollar zum IFT anwenden, womit M eine Untermannigfaltigkeit ist.

Dann gilt $T_pM, p \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ist Satz 4.12 darstellbar. Hierzu müssen wir jedoch einige Voraussetzungen prüfen.

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung, für die gelten muss, dass der Definitionsbereich offen ist und dass der Rang der Jacobi-Matrix hier 1 ist.

Dann gilt $T_pM = (\mathrm{Span}\{\boldsymbol{\nabla} h(p)\})^\perp$, wobei $p = (x_0, y_0, z_0) \in M \cap \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$ ist offen. ✓Jacobimatrix von h:

$$\implies J_h(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} h(x, y, z) = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)^T \tag{102}$$

Wir sehen, dass diese für alle $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ Rang 1 hat und damit vollen Rang. Dieser Punkt ist außerdem offensichtlich nicht in der Menge enthalten.

Die Bedingungen sind damit für alle Punkte in M erfüllt und wir können T_pM angeben wie oben.

$$T_pM = (\mathrm{Span}\{(2x_0/a^2, 2y_0/b^2, 2z_0/c^2)^T\})^\perp \tag{103}$$

Des weiteren bemerken wir, dass $\mathrm{Span}\{(2x_0/a^2, 2y_0/b^2, 2z_0/c^2)^T\}$ eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$ ist.

Dementsprechend ist die Ebene $T := p + T_pM$:

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (\mathrm{Span}\{(2x_0/a^2, 2y_0/b^2, 2z_0/c^2)^T\})^\perp \tag{104}$$

Jetzt nutzen wir aus, dass $\mathrm{Span}\{(2x_0/a^2, 2y_0/b^2, 2z_0/c^2)^T\}$ in $\mathbb{R}^3$ eine Ursprungsgerade darstellt. Wenn wir nun das orthogonale Komplement der Geraden finden möchten, suchen wir zwei Vektoren, die gemeinsam eine Ebene aufspannen und bezogen auf das Standardskalarprodukt senkrecht zur Gerade stehen. Diese können wir wie unten konstruieren, wobei wir sicherstellen, dass keine lineare Abhängigkeit besteht. Wir erhalten dann:

$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2y_0/b^2 \\ 2x_0/a^2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2z_0/c^2 \\ 2y_0/b^2 \end{pmatrix} \qquad | r, s \in \mathbb{R} \tag{105}$$

Die Umwandlung auf Koordinatenform ist bequemer zur weiteren Rechnung, deswegen benutzen wir eine aus der Schule bekannte Formel, um die gesuchte Form anzugeben:

$\mathbf{v}(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$, wobei $\mathbf{v}$ der Richtung unserer Gerade entspricht und $\mathbf{p}$ der Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ist, hier jedoch aufgefasst als Stützvektor.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0 \tag{106}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2y_0/b^2 \\ 2z_0/c^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{107}$$

Durch Ausmultiplizieren und Kürzen erhalten wir anschließend die Koordinatenform der Ebene im $\mathbb{R}^3$. Wir multiplizieren komponentenweise aus und nutzen $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\frac{x_0}{b^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \tag{108}$$

An dieser Stelle fällt uns erst viel zu spät auf, dass rechts des Gleichheitszeichen gerade wieder ein Teil der urpsrünglichen Gleichung des Ellipsoids steht.

$$\frac{x_0}{b^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1 \tag{109}$$

b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen im kartesischen Koordinatensystem. Wir wissen, dass die Schnittpunkte mit den Achsen die Form $(A, 0, 0)$, $(0, B, 0)$, $(0, 0, C)$ haben und setzen in die oben gefundene Ebene ein.

- $(A, 0, 0)$

$$\frac{x_0}{a^2}A = 1 \tag{110}$$

$$\iff A = \frac{a^2}{x_0} \tag{111}$$

$$= \frac{a^2}{x_0} \tag{112}$$

$$\implies A = (A, 0, 0) = \left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right) \tag{113}$$

- Analoge Rechnungen führen zu:

$$B = (0, B, 0) = \left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0\right) \tag{114}$$

$$C = (0, 0, C) = \left(0, 0, \frac{c^2}{z_0}\right) \tag{115}$$

c) Berechnung eines Tetraedervolumens. Wir wählen C als Höhe sowie A, B und den Ursprung als Begrenzungen und gleichzeitig Seitenlängen der Grundfläche. Dann gilt:

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{3}Gh \tag{116}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2}ABC \tag{117}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0} \tag{118}$$

Wir erhalten damit das gesuchte Ergebnis.