
Versuch 212

20. Oktober 2021

Zähigkeit von Flüssigkeiten

Physikalisches Anfängerpraktikum 2.1

Jan A. Kesting

Betreuer/in: Marcel Fischer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Ziel/Motivation	2
1.2	Aufgaben	2
1.3	Durchführung	2
1.4	Versuchsaufbau	3
1.5	(Physikalische) Grundlagen	3
3	Auswertung	8
3.1	Bestimmung der Viskosität nach Stokes	8
3.2	Bestimmung der kritischen Reynoldszahl der fallenden Kugel .	10
3.3	Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille	12
3.4	Vergleich der soeben bestimmten Werte	15
4	Zusammenfassung und Diskussion	15
4.1	Zusammenfassung	15
4.2	Diskussion	16

1 Einleitung

1.1 Ziel/Motivation

In diesem Versuch geht es um die Bestimmung der Zähigkeit (Viskosität), eine wichtige Kenngröße von Flüssigkeiten. Aus dem Alltag kennt man dies z.B. von Wasser und Honig. Letzterer ist viel anstrengender zu bewegen bzw. rühren als das Wasser, da der Honig „dickflüssiger“ ist. Was dies bedeutet und wie man dies mathematisch/physikalisch interpretiert wird in diesem Versuch genauer erläutert.

1.2 Aufgaben

1. Bestimmung der Viskosität von Polyethylenglykol (PEG) nach Stokes mithilfe eines Kugelfallviskosimeters und Überprüfung der Gültigkeitsgrenze eben jenes Gesetzes durch ermittlung des Überganges von laminarer zu turbulenter umströmung der Kugel.
2. Bestimmung der Viskosität von PEG nach Hagen-Poiseuille mit dem Kapillarviskosimeter.
3. Vergleichen der gefundenen Viskositäten der jeweiligen Bestimmungsmethoden.

1.3 Durchführung

Erstmal einen groben Überblick über den Versuch. Zuerst werden alle für die Auswertung relevanten Größen vermessen (dazu mehr in den Grundlagen).

Nach Stokes:

Danach werden Kunststoffkügelchen mit verschiedenen Dichten und Durchmessern bzw. Radien in ein Kugelfallviskosimeter (Fallrohr) getan. Diese Kugeln sinken langsam ab und anhand der Längenskala auf dem Kugelfallviskosimeter und einer Stoppuhr werden die Sinkzeiten der jeweiligen Kugeln in einem festen Längenintervall gemessen.

Nach Hagen-Poiseuille:

Zuletzt wird aus dem Behälter das PEG über ein Kapillar langsam entnommen. Nach kurzer Einlaufzeit wird mit einer Stoppuhr und einem Messbecher dann die Durchflussrate bestimmt.

1.4 Versuchsaufbau

Die einzelnen Versuchsaufbauten des Versuches sind im Messprotokoll in Abb. 1 zu finden.

1.5 (Physikalische) Grundlagen

Nach Newtons zweitem Gesetz ist für eine gleichförmige Bewegung eines Körpers Voraussetzung, dass sich der Körper im Kräftegleichgewicht befindet. In der Realität muss man, um eine konstanten Geschwindigkeit v aufrecht zu erhalten, immer eine Kraft F aufwenden. Dies ist auf Reibungseffekte zurückzuführen.

Im Falle der Bewegung in einer Flüssigkeit ist diese Reibungskraft F_R meistens nicht zu unterschätzen. Die Reibung eines Fluids ist auf zwischenmolekulare Kräfte zurückzuführen, welche dann auch wieder Stoffabhängig sind. Diese führen dazu, dass bei Bewegung des Mediums oder der sich darin befindende Körper sich das andere auch bewegt.

Betrachte man nun die Bewegung einer Kugel durch ein Fluid und stelle sich das Fluid in viele einzelne Schichten aufgeteilt vor. So bewegt sich die Kugel durch diese Schichten hindurch. Bei kleinen Geschwindigkeiten kann sich die Kugel ohne Störungen im Medium zu verursachen durch das Fluid bewegen. Die Schichten weichen quasi vor der Kugel und schließen sich hinter ihr wieder zu den Schichten zusammen. Diesen Zustand bezeichnet man als **laminare Strömung**.

Im Falle größerer Geschwindigkeiten verursacht die Kugel Störungen im System. Die Flüssigkeit kann sich nicht mehr der Kugel anpassen und die Kugel hinterlässt viele kleine Wirbel. Dieser Fall ist als **turbulente Strömung** zu bezeichnen. Bei diesen Strömungsverhältnissen steigt die auf den Körper wirkende Reibungskraft drastisch.

Man kann nicht mit Sicherheit sagen, wann eine Strömung laminar oder turbulent wird, doch man kann es approximieren mithilfe der dimensionslosen **Reynoldszahl Re** . Die Reynoldszahl ist eine semiempirische Größe, die das Verhältnis zwischen der kinetischen Energie E_{kin} (zweifach) eines Volumenelements der Flüssigkeit und den Reibungsverlusten $W_{Reibung}$ beschreibt:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}} \quad (1)$$

Bei Vergrößerung der kinetischen Energie E_{kin} wird die Flüssigkeit instabiler und wird dementsprechend eher turbulent. Die innere Reibung des Mediums wirkt allerdings dämpfend auf die Strömungsverhältnisse. Es gibt also somit einen kritischen Wert für Re bei dem die Strömung von laminar auf turbulent umschlägt ($E_{kin} \gg W_{Reibung}$).

Wählt man nun ein System, bei dem sich eine geometrische Länge L bestimmen lässt, so lässt sich Re auch folgendermaßen bestimmen:

$$Re = \frac{\rho_f v L}{\eta} \quad (2)$$

hierbei beschreibt v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit (bzw. die Geschwindigkeit des sich durch die Flüssigkeit bewegenden Körpers), ρ_f die Dichte der Flüssigkeit bzw. des Mediums und η beschreibt die wichtige, stoffabhängige Größe der Viskosität (Einheit: $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$). Im Falle einer Rohrströmung ($Re = 2300$) entspricht die Länge des Rohres L , im Falle einer bewegten Kugel im Medium ($Re \approx 1$) ist L der Durchmesser der Kugel.

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Fällt nun eine Kugel durch ein Fluid in Richtung des Schwerfelds der Erde, so wirken drei Kräfte auf sie; die Gewichtskraft F_G , die Auftriebskraft F_A und die Reibungskraft F_R . Letztere wird in diesem Fall folgendermaßen bestimmt:

$$F_R = 6\pi\eta r v \quad (3)$$

Die Herleitung folgt aus dem **Newtonschen Reibungsgesetz**:

$$F_R = \eta A \frac{v}{z} \quad (4)$$

wobei A die Fläche ist, die mit dem Medium in Kontakt ist, und z der Abstand zwischen zwei gedachten Platten zwischen denen das Fluid ist. Besagte Herleitung ist in den meisten Lehrbüchern zu theoretischen Mechanik aufzufinden und wird deshalb hier nicht weiter ausgeführt. Allerdings gilt das Stokes'sche Gesetz nur für laminare Strömungen und unendlich ausgedehnten Fluiden, weswegen man noch einen Korrekturfaktor, die Ladenburg'sche Korrektur λ , später in der Auswertung bei der Reibungskraft F_R miteinbeziehen muss:

$$\lambda = (1 + 2, 1 \frac{r}{R}) \quad (5)$$

wobei r und R jeweils den Kugelradius und den Radius des Fallrohres beschreiben.

Stellt man nun die Bewegungsgleichung der Kugel auf, lässt sich die Viskosität η bestimmen. Die mit k indizierten Größen beziehen sich auf die Kugel, die mit f indizierten Größen auf die Flüssigkeit.

$$F_G + F_A + F_R = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \rho_k V_k g = \rho_f V_k g + 6\pi\eta r v_s \quad (7)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{2g(\rho_k - \rho_f)r^2}{9v_s} \quad (8)$$

V beschreibt das Volumen, g den Ortsfaktor der Erde. Durch Messung der Sinkgeschwindigkeit v_s lässt sich somit die Viskosität des Fluids bestimmen.

Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung

Bei der Ermittlung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille arbeitet man mit der Durchflussrate des Fluids durch ein Rohr mit bekannter Länge L und Radius R . Damit ein Durchfluss möglich ist, ist eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ essentiell. Diese wird hier durch einen hohen Flüssigkeitspegel (hydrostatischer Druck) ermöglicht. Die zwei herrschenden Kräfte sind demnach folgende:

1. Kraft aufgrund der Druckdifferenz F_p :

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (9)$$

2. Newtonsche Reibungskraft F_R :

$$F_R = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \quad (10)$$

Durch gleichsetzen und umformen von (9) und (10) folgt:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \quad (11)$$

Durch Integration über r erreicht man folgende Geschwindkeitsverteilung im Rohr:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (12)$$

Will man nun den Volumenstrom bestimmen, so integriert man über die gesamte Querschnittsfläche des Rohres:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L} \quad (13)$$

Kommentar: In diesem Versuch wird nur mit einem **Newtonschen Fluid** gehandhabt. D.h., dass die Viskosität der Flüssigkeit unter verschiedenen Belastungen unveränderlich ist. Wichtige **Nichtnewtonsche Fluide** (flüssigkeiten, die belastungsabhängige Viskositäten aufweisen) sind: Blut, Treibsand, Wasser mit Stärke versetzt, etc.

ZÄHIGKEIT VON FLÜSSIGKEITEN

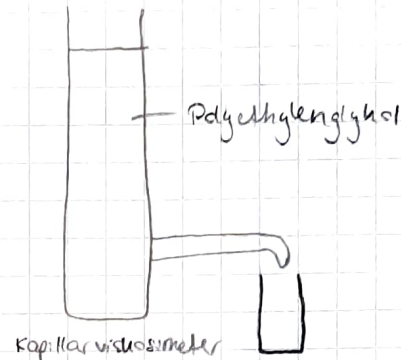
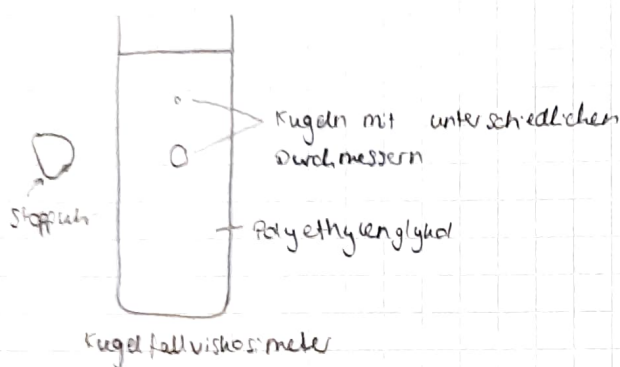


Abb. 1: Versuchsaufbau

1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes

Temperatur der Flüssigkeit: $T_f = (21,6 \pm 0,2)^\circ \text{C}$

Innendurchmesser des Fallrohrs: $D = 75 \text{ mm}$

Luftdruck: $p_L = 99 (1000 \pm 0,1) \text{ mbar}$

Tabelle 1: Messung der Fallzeiten für Kugeln mit verschiedenen Radien
(Für jeden Radius wurden 5 Messungen gemacht)

Radius [mm]	Strecke Δs [mm]	Fallzeiten Δt [s]
1,0	50	22,90 / 20,95 / 21,59 / 21,32 / 21,68
1,5	50	20,9 10,89 / 10,82 / 10,17 / 10,62 / 10,24
2,0	100	11,87 / 12,40 / 12,23 / 12,21 / 11,98
2,5	200	16,87 / 15,84 / 15,56 / 16,07 / 15,82
3,0	200	11,95 / 11,82 / 11,50 / 11,68 / 11,56
3,572	300	13,01 / 13,26 / 13,14 / 13,01 / 13,23
4,0	300	11,78 / 11,92 / 11,82 / 11,59 / 11,72
4,5	300	9,43 / 9,21 / 9,34 / 9,34 / 9,14
Fehler: $\pm 1 \text{ mm}$		Fehler: $\pm 0,1 \text{ s}$

2. Bestimmung der Viskosität nach Hagen - Poiseuille

Höhe der Flüssigkeitssäule vor der Messung: $h_A = (511 \pm 1) \text{ mm}$

Höhe der Flüssigkeitssäule nach der Messung: $h_E = (506 \pm 1) \text{ mm}$

Tabelle 2: Messung der Ausstromzeit

Flüssigkeitsmenge [ml]	Ausstromzeit [Minuten : Sekunden]
5	01 : 47 $\hat{=}$ 107 s
10	02 : 24 $\hat{=}$ 144 s 04 : 12 $\hat{=}$ 252 s
15	06 : 32 $\hat{=}$ 392 s
20	08 : 56 $\hat{=}$ 536 s
25	11 : 21 $\hat{=}$ 681 s

Raumtemperatur: $T_R = (22,5 \pm 1)^\circ \text{C}$

20.10.21
fish

3 Auswertung

Die Berechnungen der Auswertung, und somit auch alle Ergebnisse, finden in Excel-Tabellen statt. Diese sind am Ende der Auswertungen der jeweiligen Versuchsteile abgebildet mit allen ihren Ergebnissen. Somit werden in der Auswertung nur die Rechnungen und die relevanten Endergebnisse angegeben.

3.1 Bestimmung der Viskosität nach Stokes

Bevor man mit jeglicher Rechnung anfangen kann, müssen zuerst die mittleren Fallgeschwindigkeiten v_i der Kugeln i und dessen Fehler Δv_i ermittelt werden. Hierzu nutzt man die Fallzeiten und -strecken, dessen Fehler und die Standartabweichungen der jeweiligen Messungen. Die Fallgeschwindigkeit und dessen Fehlern berechnen sich also folgendermaßen:

$$\bar{v}_i = \frac{s_i}{\bar{t}_i} \quad (14)$$

$$\Delta \bar{t}_i = \sqrt{(\Delta t_{\text{Messung}})^2 + \sigma_{t_i}^2} \quad (15)$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{v}_i = \bar{v}_i \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta s_i}{s_i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(\Delta t_{\text{Messung}})^2 + \sigma_{t_i}^2}}{\bar{t}_i}\right)^2} \quad (16)$$

Mit den erhaltenen Werten lässt sich nun das erwünschte Diagramm 1 erstellen. Dazu wird der Quotient $\frac{\bar{v}_i}{\rho_{k_i} - \rho_f}$ mit der Variable y_i bezeichnet. Dessen Fehler berechnet sich folgendermaßen:

$$\Delta y_i = \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{v}_i}{\rho_{k_i} - \rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\bar{v}_i \Delta \rho_{k_i}}{(\rho_{k_i} - \rho_f)^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{v}_i \Delta \rho_f}{(\rho_{k_i} - \rho_f)^2}\right)^2} \quad (17)$$

und in abhängigkeit von r_i^2 gesetzt. Dazu werden die einzelnen Radien (und ihre Fehler entsprechend, wobei einem auffällt, dass diese vernachlässigbar gering sind) r_i quadriert und auf der x-Achse notiert:

$$\Delta r_i^2 = 2r_i \Delta r_i \quad (18)$$

Im Anschluss wird alles in das Diagramm 1 eingetragen, wobei sich folgende Ausgleichsgerade ergibt:

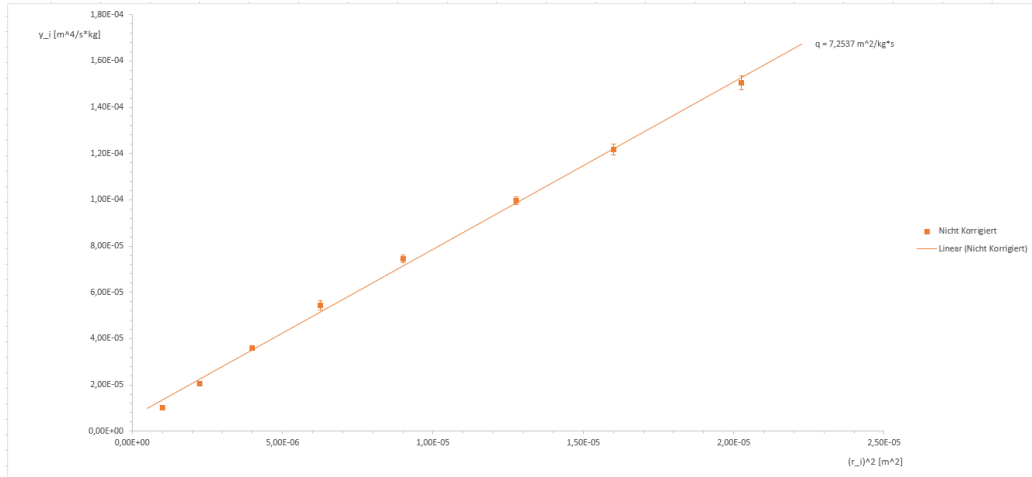


Diagramm 1: Unkorrigierte Fallgeschwindigkeiten

Da man allerdings die Versuche nicht in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit durchgeführt hat, muss man noch die Ladenburg'sche Korrektur λ berücksichtigen. Diese wird folgendermaßen bestimmt:

$$\lambda = \left(1 + 2,1 \frac{r_i}{R}\right) \quad \Delta\lambda = 2,1 \frac{\Delta r_i}{R} \quad (19)$$

Multipliziert man nun die mittlere Geschwindigkeiten \bar{v}_i mit dem Korrekturfaktor λ und trägt die erhaltenen Werte in y_i und dann in ein Diagramm ein, so findet man einen linearen Teil (eine Ursprungsgerade!), dessen Steigung zur Bestimmung der Viskosität η essentiell ist. Dazu muss aber vorher noch $y_{i_{korrr}}$ bestimmt werden. Dazu setzt man $v_{i_{korrr}}$ in y_i anstatt \bar{v}_i . Der Fehler $\Delta y_{i_{korrr}}$ berechnet sich auch gleich wie in (17), nur wird anstatt $\Delta \bar{v}_i$ $\Delta v_{i_{korrr}}$ eingesetzt:

$$\Delta v_{i_{korrr}} = v_{korrr} \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{v}_i}{\bar{v}_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2} \quad (20)$$

Das Diagramm mit den richtigen eingesetzten Werten sieht dann folgendermaßen aus:

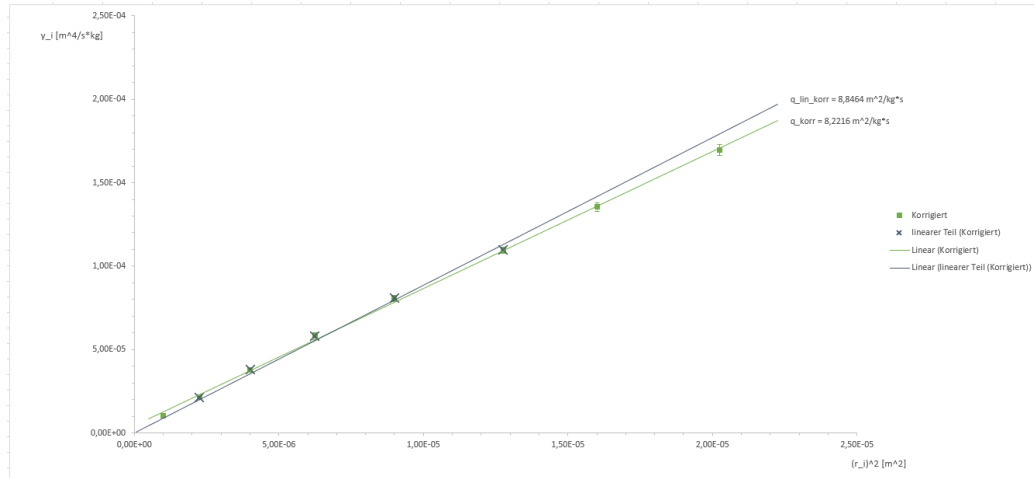


Diagramm 2: Korrigierte Fallgeschwindigkeiten

Der Fehler der Steigung berechnet sich folgendermaßen:

$$q_F = q_A - \frac{(M_2 + \Delta M_2) - (M_1 - \Delta M_2)}{x_2 - x_1} \quad (21)$$

Die Fehler der r_i^2 (x) sind vernachlässigbar klein, q_A ist eine jegliche Ausgleichsgerade und M_2 und M_1 beziehen sich auf den letzten und ersten Messwert des linearen Teils.

Mittels dem Diagramm 2 und somit der Steigung von $q_{lin_{korr}}$ lässt sich nun die Viskosität η bestimmen:

$$\eta = \frac{2 \cdot g(\rho_{k_i} - \rho_f)r_i^2}{9 \cdot v_{korr}} = \frac{2}{9}g \frac{1}{q_{lin_{korr}}} \quad \Delta\eta = \frac{2}{9}g \frac{\Delta q_{lin_{korr}}}{q_{lin_{korr}}^2} \quad (22)$$

Setzt man nun die gefundenen Werte ein, so erhält man für die Viskosität von PEG

$$\eta_S = \underline{\underline{(0,25 \pm 0,006) \text{ Pa s}}} \quad (23)$$

3.2 Bestimmung der kritischen Reynoldszahl der fallenden Kugel

Als nächstes kümmert man sich um die Strömungsverhältnisse bei dem Kugelfallviskosimeter. Dazu müssen zuerst die Fallgeschwindigkeiten, die bei

laminarer Strömung gemessen werden sollten, ermittelt werden:

$$v_{i_{lam}} = \frac{2 \cdot g(\rho_{k_i} - \rho_f)r_i^2}{9\eta} \quad (24)$$

$$\Delta v_{i_{lam}} = \left(\left(\frac{2gr_i^2\Delta\rho_{k_i}}{9\eta} \right)^2 + \left(\frac{2gr_i^2\Delta\rho_f}{9\eta} \right)^2 + \left(\frac{4g(\rho_{k_i} - \rho_f)r_i\Delta r_i}{9\eta} \right)^2 + \left(\frac{2g(\rho_{k_i} - \rho_f)r_i^2\Delta\eta}{9\eta^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Als nächstes sollen die einzelnen Reynoldszahlen Re_i berechnet werden, damit Später dagegen die Verhältnisse $\frac{v_{i_{lam}}}{v_i}$ aufgetragen werden können.

$$Re_i = \frac{\rho_f \bar{v}_i d_i}{\eta} = \frac{\rho_f \bar{v}_i 2r_i}{\eta} \quad (26)$$

Da man nur die kritische Reynoldszahl Re **abschätzen** will, werden die Fehler nicht berechnet. Trägt man nun die berechneten Werte in ein Diagramm ein, so entsteht folgender Graph:

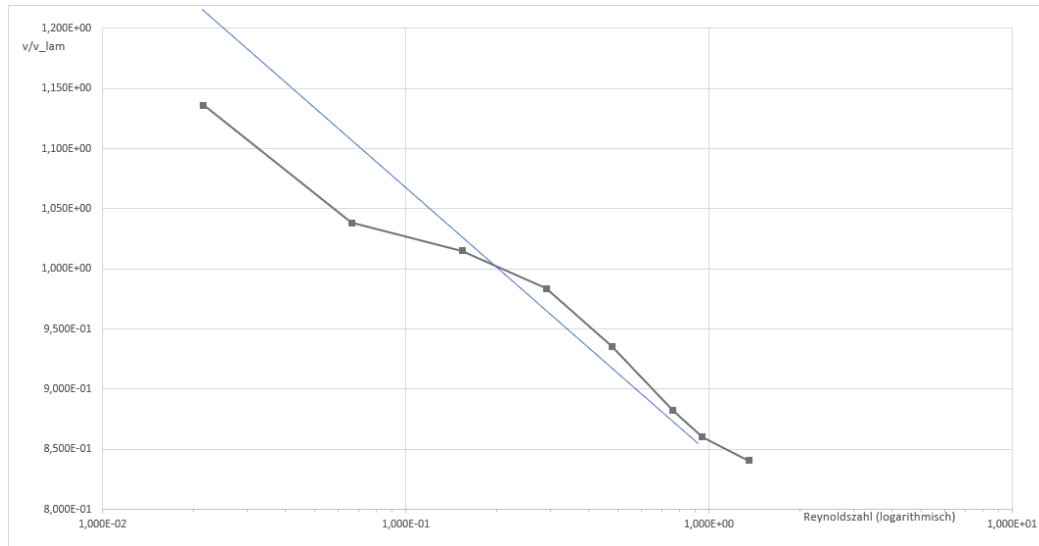


Diagramm 3: Verlauf der Reynoldszahl

In der Annahme, dass die ersten beiden Werte auf leichte Messungenauigkeiten zurückzuführen sind, lässt sich ein Knick in der Kurve bei $Re \approx 1$ feststellen.

Ortsfaktor Erde g [m/s ²]:	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00	9,810E+00
Innendurchmesser R (Fehlerlos) [m]:	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02	7,500E-02
Dichte rho_f bei T=21,6 °C [kg/m ³]:	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03	1,148E+03
Delta rho_f [kg/m ³]:	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	2,000E-01
Kugeln i	1	2	3	4	5	6	7	8
Radius r_i [m]:	1,000E-03	1,500E-03	2,000E-03	2,500E-03	3,000E-03	3,572E-03	4,000E-03	4,500E-03
Delta r_i [m]:	1,000E-06	1,500E-06	2,000E-06	2,500E-06	3,000E-06	3,572E-06	4,000E-06	4,500E-06
(r_i)^2 [m ²]:	1,000E-06	2,250E-06	4,000E-06	6,250E-06	9,000E-06	1,276E-05	1,600E-05	2,025E-05
Delta (r_i)^2 [m ²]:	2,000E-09	4,500E-09	8,000E-09	1,250E-08	1,800E-08	2,552E-08	3,200E-08	4,050E-08
Fallzeiten t_i [s]:	2,290E+01	1,089E+01	1,187E+01	1,687E+01	1,195E+01	1,301E+01	1,178E+01	9,430E+00
	2,095E+01	1,082E+01	1,240E+01	1,584E+01	1,182E+01	1,326E+01	1,192E+01	9,210E+00
	2,159E+01	1,017E+01	1,223E+01	1,556E+01	1,150E+01	1,314E+01	1,182E+01	9,340E+00
	2,132E+01	1,062E+01	1,221E+01	1,607E+01	1,168E+01	1,301E+01	1,159E+01	9,340E+00
	2,168E+01	1,024E+01	1,198E+01	1,582E+01	1,156E+01	1,323E+01	1,172E+01	9,140E+00
Delta t_i [s]:	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01	1,000E-01
Mittelwert t_i [s]:	2,169E+01	1,055E+01	1,214E+01	1,603E+01	1,170E+01	1,313E+01	1,177E+01	9,292E+00
Standardabweichung t_i [s]:	7,346E-01	3,293E-01	2,116E-01	5,021E-01	1,850E-01	1,181E-01	1,224E-01	1,156E-01
Fallstrecke s_i [m]:	5,000E-02	5,000E-02	1,000E-01	2,000E-01	2,000E-01	3,000E-01	3,000E-01	3,000E-01
Delta s_i [m]:	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03	1,000E-03
Fallgeschwindigkeiten v_i [m/s]:	2,305E-03	4,740E-03	8,239E-03	1,248E-02	1,709E-02	2,285E-02	2,550E-02	3,229E-02
Delta v_i [m/s]:	9,131E-05	1,814E-04	1,789E-04	4,032E-04	3,188E-04	2,799E-04	3,529E-04	5,420E-04
Dichte Kugeln rho_k_i [kg/m ³]:	1,378E+03	1,378E+03	1,378E+03	1,378E+03	1,378E+03	1,378E+03	1,358E+03	1,363E+03
Delta rho_k_i [kg/m ³]:	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00	2,500E+00
y_i [m ⁴ /s ³ kg]:	1,005E-05	2,066E-05	3,591E-05	5,438E-05	7,450E-05	9,960E-05	1,218E-04	1,506E-04
Delta y_i [m ⁴ /s ³ kg]:	4,129E-07	8,225E-07	8,733E-07	1,855E-06	1,611E-06	1,635E-06	2,229E-06	3,081E-06
Korrekturfaktor Lambda:	1,028E+00	1,042E+00	1,056E+00	1,070E+00	1,084E+00	1,100E+00	1,112E+00	1,126E+00
Delta Lambda:	2,800E-05	4,200E-05	5,600E-05	7,000E-05	8,400E-05	1,000E-04	1,120E-04	1,260E-04
v_i_korrigiert [m/s]:	2,370E-03	4,939E-03	8,700E-03	1,335E-02	1,853E-02	2,513E-02	2,835E-02	3,635E-02
delta v_i_korrigiert [m/s]:	9,386E-05	1,890E-04	1,890E-04	4,314E-04	3,456E-04	3,079E-04	3,924E-04	6,103E-04
y_i_korrigiert [m ⁴ /s ³ kg]:	1,033E-05	2,153E-05	3,792E-05	5,819E-05	8,076E-05	1,096E-04	1,354E-04	1,696E-04
Delta y_i_korrigiert [m ⁴ /s ³ kg]:	4,245E-07	8,570E-07	9,222E-07	1,985E-06	1,746E-06	1,799E-06	2,478E-06	3,469E-06
q_lin_korr [m ² /kg*s]:	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00	8,846E+00
Delta q_lin_korr [m ² /kg*s]:	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01	2,171E-01
Viskosität Eta_s [kg/m*s]:	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01	2,464E-01
Delta Eta_s [kg/m*s]:	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03	6,047E-03
v_i_lam [m/s]:	2,029E-03	4,566E-03	8,117E-03	1,268E-02	1,826E-02	2,589E-02	2,964E-02	3,841E-02
Delta v_i_lam [m/s]:	5,467E-05	1,230E-04	2,187E-04	3,417E-04	4,920E-04	6,976E-04	8,115E-04	1,047E-03
Re_i	2,148E-02	6,625E-02	1,535E-01	2,906E-01	4,778E-01	7,605E-01	9,503E-01	1,354E+00
v_i/v_i_lam	1,136E+00	1,038E+00	1,015E+00	9,836E-01	9,358E-01	8,824E-01	8,603E-01	8,406E-01

Tabelle 3: Exceltabelle zur Berechnung der Viskosität nach Stokes

3.3 Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille

Zur Bestimmung der Viskosität η nach der Methode nach Hagen-Poiseuille, muss zuerst der Volumenstrom $\frac{dV}{dt}$ bestimmt werden. Dazu trägt man die Messwerte des Volumens des zweiten Versuchsbeles gegen die gemessenen Zeiten auf (Tabelle 2). Anhand der Steigung der entstehenden Gerade lässt sich der Volumenstrom bestimmen:

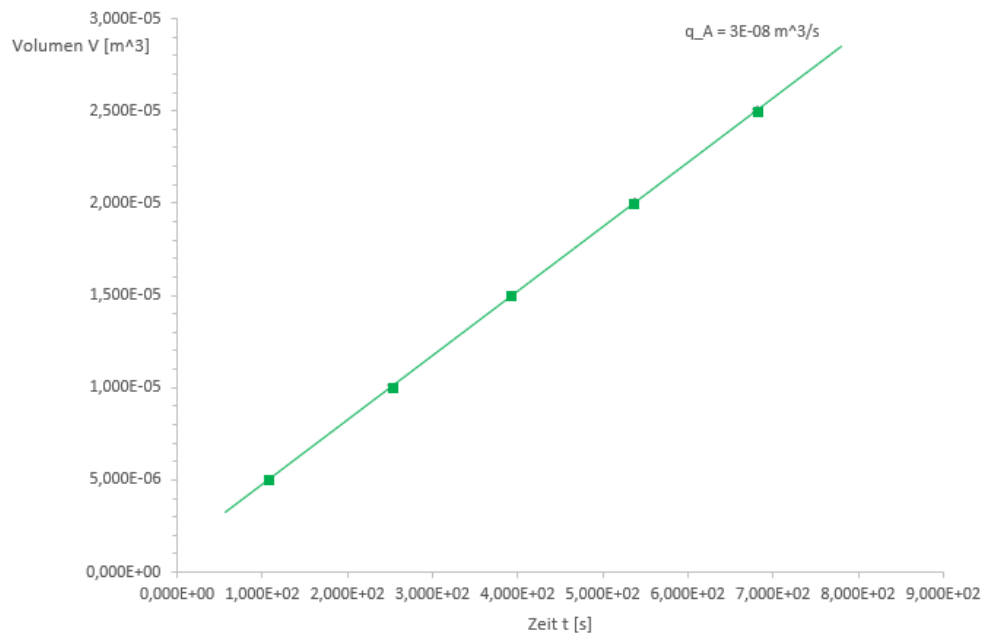


Diagramm 4: Volumen in Abhängigkeit der Zeit

Zur Bestimmung des Fehlers der Steigung geht man wieder nach (21) vor und erhält somit für $\frac{dV}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = q = (3 \pm 0,5) \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad (27)$$

Nun muss nur noch die mittlere Höhe \bar{h} des PEG in dem Rohr ermittelt werden, damit man mit (13) die Viskosität von PEG bestimmen kann.

$$\bar{h} = \frac{h_A - h_E}{2} \quad \Delta \bar{h} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h_A}{h_A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_E}{h_E}\right)^2} \quad (28)$$

Mit dem Wissen lässt sich jetzt (13) nach η umformen:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L} \quad (29)$$

$$\Rightarrow q = \frac{\pi(p_2 + \rho_f g \bar{h} - p_2)R^4}{8\eta L} \quad (30)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\pi \rho_f g \bar{h} R^4}{8 L q} \quad (31)$$

$$\Delta \eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{h}}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{4 \Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2} \quad (32)$$

Setzt man nun alle soeben berechneten Werte und jene aus dem Skript ein, so erhält man für die Viskosität η_{HP} nach Hagen-Poiseuille:

$$\eta_{HP} = \underline{\underline{(0,24 \pm 0,04) \text{ Pa s}}} \quad (33)$$

Zuletzt wird noch verifiziert, dass tatsächlich eine laminare Strömung in der Kapillare vorhanden war. Dazu muss gelten, dass $Re \leq 2300$:

$$Re = \frac{\rho_f v L}{\eta} \quad (34)$$

für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit überlegt man sich leicht, das gelten muss:

$$v = \frac{q}{A} = \frac{q}{\pi r^2} \quad (35)$$

Setzt man dies nun in (34) ein, so erhält man:

$$Re = \frac{\rho_f q L}{\pi r^2 \eta} \quad (36)$$

Durch einsetzen der relevanten Größen sieht man, dass mit Sicherheit laminare Strömung vorhanden war; der Fehler braucht nicht mal berechnet zu werden:

$$Re = \underline{\underline{8,2 \leq 2300}} \quad (37)$$

Kapillarradius R [m]:	7,500E-04
Delta R [m]:	1,000E-05
Kapillarlänge L [m]:	1,000E-01
Delta L [m]:	5,000E-03
h_A [m]:	5,110E-01
delta h_A [m]:	1,000E-03
h_E [m]:	5,060E-01
delta h_E [m]:	1,000E-03
Dichte rho_f bei T=22,5°C [kg/m^3]:	1,147E+03
Delta rho_f [kg/m^3]:	1,000E+00
Ortsfaktor Erde [m/s^2]:	9,810E+00
h_quer [m]:	5,085E-01
Delta h_quer [m]:	2,781E-03
q_A [m^3/s]:	3,000E-08
delta q_A [m^3/s]:	5,192E-09
Viskosität eta_hp [kg/m*s]:	2,370E-01
Delta eta_hp [kg/m*s]:	4,454E-02
Re_Kapillar:	8,217E+00

Tabelle 4: Exceltabelle zur Berechnung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille

3.4 Vergleich der soeben bestimmten Werte

Zum Vergleich der Viskositäten η_S und η_{HP} nutzt man:

$$\sigma = \frac{|\eta_S - \eta_{HP}|}{\sqrt{\Delta\eta_S^2 + \Delta\eta_{HP}^2}} = 0,21 \quad (38)$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

4.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir anhand zweier verschiedener Versuchsreihen die Viskosität von PEG und die Reynoldszahlen bei den einzelnen Strömungsverhältnissen der Versuche bestimmt. Zuerst wurden Kugeln mit verschiedenen Radien r_i in ein Fallrohr mit PEG getan und anhand dessen Fallgeschwindigkeiten v_i wurde die Viskosität η berechnet.

Danach wurde noch bestimmt, ab welcher Reynoldszahl in unserem Versuch die Kugeln nicht mehr laminar umströmt wurden.

Als nächstes wurde anhand einer geöffneten Kapillare, über die PEG abgetropft ist, der Volumenstrom q , und darüber dann die Viskosität η bestimmt. Zudem musste noch verifiziert werden, dass in diesem Versuchsteil tatsächlich in der Kapillare laminare Strömung stattfand.

4.2 Diskussion

Die errechneten Ergebnisse bzw. der Vergleich suggeriert einen gut verlaufenen Versuch. Doch es gibt eine kleine σ -Abweichung von 0,21, kann man diese sinnvoll Erklären?

Die erste Fehlerquelle, die beim Durchführen des Versuches für die Diskrepanz der Viskositäten gesorgt haben könnte, war die Fallstrecke s_i bei den Kugeln 1 und 2. Hier wurde eine Strecke von 50mm gewählt, allerdings konnte man diese nur sinnvoll am oberen Ende des Rohres ablesen, da nur hier eine 2mm-Skala vorhanden war. Weiter unten war das Fallrohr nur in 100mm-Schritten skaliert. Dies führte möglicherweise dazu, dass die Kügelchen beim Messen noch nicht ganz im Kräftegleichgewicht waren und noch Beschleunigt wurden, wodurch eine zu hohe Fallgeschwindigkeit gemessen wurde. Außerdem könnte es gut sein, dass aufgrund der geringen Größe der Kugeln und der dichten Skalierung, wiederholt eine leicht falsche Distanz betrachtet wurde.

Dies ist gut möglich, da auch in Diagramm 3 bei den ersten beiden Kugeln das Verhältnis der Geschwindigkeiten zu gering erscheint; doch unter dieser Berücksichtigung ließ sich die erwartete Reynoldszahl $Re \approx 1$ erkennen.

Eine weitere Fehlerquelle könnte beim Versuch nach Hagen-Poiseuille der Messzylinder bzw. dessen vorheriger Inhalt gewesen sein. Beim Beginn des Versuches war der Messkolben schon mit PEG gefüllt und musste dementsprechend in das Rohr entleert werden. Allerdings war es uns nicht möglich wirklich alles aus dem Messzylinder zu entfernen, wodurch ein geringes, aber schwer abzuschätzendes Startvolumen (die Skalierung fing erst bei 4,5ml an) schon im Kolben war.

Trotz diesen geringen, aber schwer zu umgehenden, Fehlerquellen, sind sowohl der Versuch als auch die Ergebnisse sehr zufriedenstellend ausgefallen.