7. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

7.1 Aufgabe 1

a) Am Teil der Kette die über dem Tisch hängt wirkt die Gravitationskraft, aber nur bezüglich des Anteils der Masse die hängt, also:

$$F_a = \frac{x(t)}{L} mg \tag{1}$$

An der anderen Seite der Kette wirkt ebenfalls eine Kraft

$$F_b = m\ddot{x}(t) \tag{2}$$

Und wir müssen die beiden Kräfte gleichsetzen:

$$\begin{align}
F_a &= F_b \tag{3}\\
\frac{x}{L} mg &= m\ddot{x} \tag{4}\\
\frac{x}{L} g &= \ddot{x} \tag{5}\\
\ddot{x} - \frac{g}{L} x &= 0 && | x \sim e^{\alpha t} \tag{6}\\
\alpha^2 e^{\alpha t} - \frac{g}{L} e^{\alpha t} &= 0 \tag{7}\\
\left(\alpha^2 - \frac{g}{L}\right) e^{\alpha t} &= 0 && | e^{\alpha t} \neq 0 \tag{8}\\
\alpha^2 - \frac{g}{L} &= 0 \tag{9}\\
\alpha^2 &= \frac{g}{L} \tag{10}\\
\alpha_1 &= \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{11}\\
\alpha_2 &= -\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{12}
\end{align}$$

Die allgemeine Lösung ist also:

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t} \tag{13}$$

Mit Anfangesbedingung: $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x} = A\sqrt{\frac{g}{L}}e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} - B\sqrt{\frac{g}{L}}e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{14}$$

$$\dot{x}_0 = 0 = A\sqrt{\frac{g}{L}} - B\sqrt{-\frac{g}{L}} \tag{15}$$

$$A\sqrt{\frac{g}{L}} = B\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{16}$$

$$A = B \tag{17}$$

Also:

$$x = Ae^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + Ae^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} \tag{18}$$

$$= A\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}\right) \tag{19}$$

Mit Anfangsbedingung: $x(0) = x_0$:

$$x_0 = A(1+1) \tag{20}$$

$$= 2A \tag{21}$$

$$A = \frac{x_0}{2} \tag{22}$$

Also:

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}}\right) \qquad |\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{23}$$

$$x = x_0 \cosh\sqrt{\frac{g}{L}}t \tag{24}$$

$$\dot{x} = x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sinh\sqrt{\frac{g}{L}}t \tag{25}$$

An dem Punkt, wo die Kette frei fällt ist $x(T) = L$, also:

$$x(T) = L = x_0 \cosh\sqrt{\frac{g}{L}}T \tag{26}$$

$$\frac{L}{x_0} = \cosh\sqrt{\frac{g}{L}}T \tag{27}$$

$$\operatorname{arcosh}\frac{L}{x_0} = \sqrt{\frac{g}{L}}T \tag{28}$$

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{arcosh}\frac{L}{x_0} \tag{29}$$

b) Die Anfangsgeschwindigkeit an dieser Stelle ist dann

$$\dot{x}(T) = x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sinh\sqrt{\frac{g}{L}}T \qquad T = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{arcosh}\frac{L}{x_0} \tag{30}$$

$$= x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{arcosh}\frac{L}{x_0}\right) \tag{31}$$

$$= x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sinh\left(\operatorname{arcosh}\frac{L}{x_0}\right) \qquad |\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \tag{32}$$

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \tag{33}$$

$$= x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\cosh^2\operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{x_0}\right) - 1} \tag{34}$$

$$= x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\left(\frac{L}{x_0}\right)^2 - 1} \tag{35}$$

c) Zusätzlich wirke eine zum auf dem Tisch liegenden Seilabschnitt proportionale Reibungskraft auf den Seil.

$$F = F_g - F_r \tag{36}$$

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{L}x - (L-x)\eta \tag{37}$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{L}x - \frac{(L-x)\eta}{m} \tag{38}$$

$$= \frac{g}{L}x - \frac{L\eta}{m} + \frac{\eta}{m}x \tag{39}$$

$$= \left(\frac{g}{L} + \frac{\eta}{m}\right)x - \frac{L\eta}{m} \qquad |L = \frac{m}{\mu} \tag{40}$$

$$= \left(\frac{g\mu}{m} + \frac{\eta}{m}\right)x - \frac{L\eta}{m} \qquad |c = \frac{g\mu + \eta}{m} \tag{41}$$

$$\ddot{x} - cx = -\frac{L\eta}{m} \tag{42}$$

Homogener Fall:

$$\ddot{x} - cx = 0 \qquad |x \sim e^{\alpha t} \tag{43}$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} - ce^{\alpha t} = 0 \tag{44}$$

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 - c) = 0 \tag{45}$$

$$\alpha^2 - c = 0 \tag{46}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= c && (47)\\
\alpha_1 &= \sqrt{c} && (48)\\
&= \sqrt{\frac{g\mu+\eta}{m}} && (49)\\
\alpha_2 &= -\sqrt{c} && (50)\\
&= -\sqrt{\frac{g\mu+\eta}{m}} && (51)\\
\rightarrow x_h &= Ae^{\sqrt{c}t} + Be^{-\sqrt{c}t} && (52)
\end{aligned}
$$

Inhomogener Fall:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} - cx &= -\frac{L\eta}{m} && |\text{Partikuläre Lösung: } x_p = C && (53)\\
& && x_p'' = 0 && (54)\\
-cC &= -\frac{L\eta}{m} && && (55)\\
-\frac{g\mu+\eta}{m}C &= -\frac{L\eta}{m} && && (56)\\
-(g\mu+\eta)C &= -L\eta && && (57)\\
C &= \frac{L\eta}{g\mu+\eta} && && (58)
\end{aligned}
$$

Allgemeine Lösung:

$$
\begin{aligned}
x &= Ae^{\sqrt{c}t} + Be^{-\sqrt{c}t} + C && (59)\\
\dot{x} &= A\sqrt{c}e^{\sqrt{c}t} - B\sqrt{c}e^{-\sqrt{c}t} && (60)
\end{aligned}
$$

Mit Anfangsbedingung: $\dot{x}(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= A\sqrt{c} - B\sqrt{c} && (61)\\
A &= B && (62)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
x &= A(e^{\sqrt{c}t} + e^{-\sqrt{c}t}) + C && (63)\\
& && (64)
\end{aligned}
$$

Mit Anfangsbedingung: $x(0) = x_0$

$$
x_0 = 2A + C \qquad (65)
$$

$$A = \frac{x_0 - C}{2} \tag{66}$$

Also:

$$\begin{aligned}
x &= (x_0 - C)\cosh\sqrt{c}t + C && (67)\\
&= \left(x_0 - \frac{L\eta}{g\mu + \eta}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{g\mu + \eta}{m}}t\right) + \frac{L\eta}{g\mu + \eta} \qquad \mu = \frac{m}{L} && (68)\\
&= \left(x_0 - \frac{L^2\eta}{gm + L\eta}\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{gm + L\eta}{Lm}}t\right) + \frac{L^2\eta}{gm + L\eta} && (69)
\end{aligned}$$

7.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
- $\gamma^2 = \omega_0^2$
- $x(t) = ae^{-\gamma t} + bte^{-\gamma t}$

Mit Anfangsbedingung: $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -a\gamma e^{-\gamma t} + [be^{-\gamma t} - bt\gamma e^{-\gamma t}] && (70)\\
&= -a\gamma e^{-\gamma t} + be^{-\gamma t}(1 - t) \qquad |\dot{x}(0) = 0 && (71)\\
0 &= -a\gamma + b && (72)\\
a &= \frac{b}{\gamma} && (73)
\end{aligned}$$

Mit Anfangsbedingung: $x(0) = x_0$

$$x_0 = a \tag{74}$$

Also:

$$b = x_0\gamma \tag{75}$$

Und

$$x = x_0 e^{-\gamma t} + x_0\gamma te^{-\gamma t} \tag{76}$$

7.3 Aufgabe 3

a)

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0 \qquad |x \sim e^{\alpha t} \tag{77}$$
$$\alpha^2 e^{\alpha t} - 5\alpha e^{\alpha t} + 6e^{\alpha t} = 0 \tag{78}$$
$$e^{\alpha t}(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0 \qquad |e^{\alpha t} \neq 0 \tag{79}$$
$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \tag{80}$$
$$\alpha_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \tag{81}$$
$$\alpha_1 = 3 \tag{82}$$
$$\alpha_2 = 2 \tag{83}$$
$$\rightarrow x_1 = Ae^{3t} \tag{84}$$
$$x_2 = Be^{2t} \tag{85}$$
$$\rightarrow x = Ae^{3t} + Be^{2t} \tag{86}$$

b)

$$0 = \dddot{x} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x \qquad |x \sim e^{\alpha t} \tag{87}$$
$$= \alpha^3 e^{\alpha t} + \alpha^2 e^{\alpha t} + 4\alpha e^{\alpha t} + 4e^{\alpha t} \tag{88}$$
$$= e^{\alpha t}(\alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4) \qquad |e^{\alpha t} \neq 0 \tag{89}$$
$$= \alpha^3 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 \tag{90}$$
$$= (\alpha + 1)(\alpha^2 + 4) \tag{91}$$
$$\alpha_1 = -1 \tag{92}$$
$$\alpha_{2,3} = \sqrt{-4} \tag{93}$$
$$\alpha_2 = +2i \tag{94}$$
$$\alpha_3 = -2i \tag{95}$$
$$\rightarrow x_1 = Ae^{-t} \tag{96}$$
$$x_2 = Be^{2it} \tag{97}$$
$$x_3 = Ce^{-2it} \tag{98}$$
$$\rightarrow x = Ae^{-t} + Be^{2it} + Ce^{-2it} \tag{99}$$
$$= Ae^{-t} + B(\cos 2t + i \sin 2t) \tag{100}$$
$$+ C(\cos 2t - i \sin 2t) \tag{101}$$
$$= Ae^{-t} + (B + C)\cos 2t + i(B - C)\sin 2t \qquad |B + C = D, i(B - C) = E \tag{102}$$
$$= Ae^{-t} + D\cos 2t + E\sin 2t \tag{103}$$

c)

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0 \qquad |x \sim e^{\alpha t} \tag{104}$$
$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 6\alpha e^{\alpha t} + 25e^{\alpha t} = 0 \tag{105}$$
$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 6\alpha + 25) = 0 \qquad |e^{\alpha t} \neq 0 \tag{106}$$
$$\alpha^2 + 6\alpha + 25 = 0 \tag{107}$$
$$\alpha_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 25} \tag{108}$$
$$= -3 \pm 4i \tag{109}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -3 + 4i && (110)\\
\alpha_2 &= -3 - 4i && (111)\\
\rightarrow x_1 &= Ae^{(-3+4i)t} && |e^{bi} = \cos b + i \sin b \quad (112)\\
&= A(e^{-3t}\cos 4t + ie^{-3t}\sin 4t) && (113)\\
x_2 &= Be^{(-3-4i)t} && (114)\\
&= B(e^{-3t}\cos 4t - ie^{-3t}\sin 4t) && (115)\\
\rightarrow x &= A(e^{-3t}\cos 4t + ie^{-3t}\sin 4t) && (116)\\
&+ B(e^{-3t}\cos 4t - ie^{-3t}\sin 4t) && (117)\\
&= (A+B)e^{-3t}\cos 4t && (118)\\
&+ i(A-B)e^{-3t}\sin 4t && |A + B = C, i(A-B) = D \quad (119)\\
&= Ce^{-3t}\cos 4t + De^{-3t}\sin 4t && (120)\\
&= e^{-3t}(C\cos 4t + D\sin 4t) && (121)
\end{aligned}
$$

Mit Anfangsbedingung: $x(0) = 5$

$$
\begin{aligned}
5 &= C\cos 0 + D\sin 0 && (122)\\
5 &= C && (123)
\end{aligned}
$$

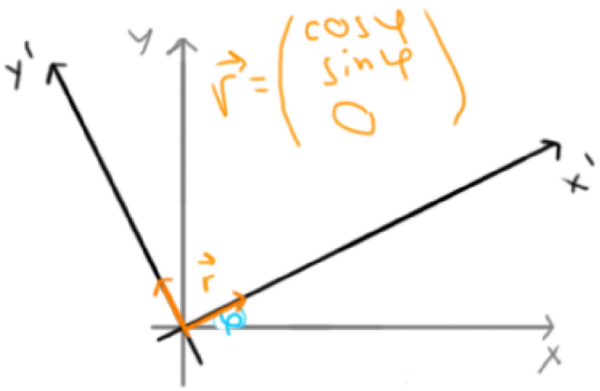
Mit Anfangsbedingung: $\dot{x}(0) = -3$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= [-3Ce^{-3t}\cos 4t - 4Ce^{-3t}\sin 4t] && (124)\\
&+ [-3De^{-3t}\sin 4t + 4De^{-3t}\cos 4t] && |\dot{x}(0) = -3 \quad (125)\\
-3 &= [-3C\cos 0 - 4C\sin 0] + [-3D\sin 0 + 4D\cos 0] && (126)\\
&= -15 + 4D && (127)\\
12 &= 4D && (128)\\
3 &= D && (129)
\end{aligned}
$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$
x = e^{-3t}(5\cos 4t + 3\sin 4t) \tag{130}
$$

7.4 Aufgabe 4



Wenn wir unser Koordinatensystem um einen Winkel φ rotieren, so verschieben wir die Einheitsvektoren der entsprechenden Achsen entlang des Einheitskreises.

a) Der Einheitskreis um die z-Achse kann durch einen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

beschrieben werden. Mit diesem Vektor können wir unsere beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ mit der entsprechenden Phasenverschiebung darstellen. Bei einer Rotation um die z-Achse ist also

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{132}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{133}$$

Eine 3×3-Matrix können wir als eine Aneinanderreihung der drei Einheitsvektoren darstellen.

Dementsprechend können wir die Matrix, die unseren Raum um die z-Achse dreht wie folgt darstellen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{134}$$

Der z-Komponent ändert sich dabei nicht.

Außerdem ist

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{135}$$

und alle Spalten der Matrix sind linear unabhängig von einander. Die Matrix gehört also zu der Gruppe O(n) und sogar zur Gruppe SO(n), weshalb die transponierte Matrix gleichzeitig die Inverse der Matrix ist.

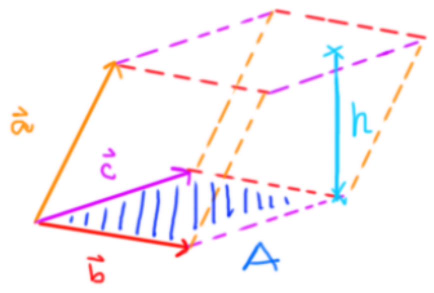
$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{136}$$

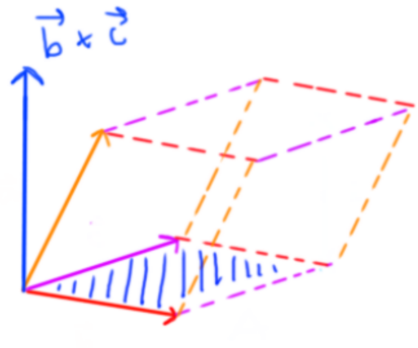
b) Für eine Drehung um die y-Achse sieht die Matrix folgenderweise aus:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{137}$$

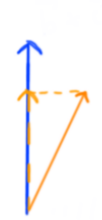
7.5 Aufgabe 5

a) Der Volumen eines Parallelipeds ist die Grundfläche mal seine Höhe $A \cdot h = V$.





Dabei ist der Kreuzprodukt zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Vektor, dessen Länge gleich der Fläche zwischen den beiden aufeinander aufgespannten Vektoren ist. Somit haben wir $A = |\vec{b} \times \vec{c}|$



Anschaulich, wenn wir zwei Vektoren mit einander skalar multiplizieren, so "projezieren" wir einen Vektor auf den anderen, und multiplizieren wir die Länge dieser Projektion mit der Länge des Vektors, auf welches es projeziert wurde. In anderen Worten, ist die Länge dieser Projektion gleich die Höhe unseres Parallelipeds.

So ist also $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = V$

b) Z.z.: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \delta^{ij} a^i (\vec{b} \times \vec{c})^j \tag{138}$$

$$= \delta^{ij} a^i \varepsilon^{jmn} b^m c^n \qquad \Big| \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{139}$$

$$\text{umbenennen } i, j = l \tag{140}$$

$$= \varepsilon^{lmn} a^l b^m c^n \qquad \Big| a^l = A^{l1}, b^m = A^{m2}, c^n = A^{n3} \tag{141}$$

$$= \varepsilon^{lmn} A^{l1} A^{m2} A^{n3} = \det A^T = \det A \tag{142}$$

Unter Vertauschung zweier Vektoren ändert sich die Determinante nicht, denn wie wir im vorigen Beispiel gezeigt haben, kommen wir auf ein Produkt welches die drei Vektoren beinhaltet. Das Produkt ändert sich nicht wenn die Reihenfolge der Faktoren sich ändert.

c) Geg.:

- $A = (\vec{a}_{i_1}, ..., \vec{a}_{i_m})$

Z.z.: $\vec{a}_i = \alpha \vec{a}_j \implies \det A = 0$

Laut unserer Definition von Determinante

$$\det A = \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_n} A^{i_1 j_1} \cdot A^{i_2 j_2} \cdot ... \cdot A^{i_m j_n} \tag{143}$$

Wobei die Faktoren A die Spaltenvektoren darstellen, ist bei Wiederholung eines Indizes das gesamte Produkt 0. Also wenn zwei Spaltenvektoren linear unabhängig sind, dann können wir sagen:

$$\vec{a}_i = \alpha \vec{a}_j \implies A^{i_1 j} = \alpha A^{i_2 j} \tag{144}$$

Bei der Wiederholung dieses Indizes j ist dann das Produkt gleich 0.