12. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

12.1 Lagrange Multiplikatoren

a) Gegeben ist die Funktion[1]

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} && (1)\\ (x, y) &\longmapsto x + 2y && (2) \end{aligned}$$

Und die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} && (3)\\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 - 5 && (4) \end{aligned}$$

Nun wollen wir, nach Satz 4.13, die Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung h bestimmen. Hierzu bestimmen wir die Gradienten der Funktionen.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} h &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} && (5)\\ \boldsymbol{\nabla} f &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} && (6) \end{aligned}$$

Nach eben genanntem Satz gilt, dass wir ein $\lambda \in \mathbb{R}$ finden, sodass gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} h(x, y) &= \lambda \cdot \boldsymbol{\nabla} f(x, y) && (7)\\ \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} && (8)\\ \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda 2x \\ \lambda 2y \end{pmatrix} && (9) \end{aligned}$$

Aus 9 folgt, dass $1 = \lambda y$, dies setzen wir in 8 ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda y &= \lambda 2x && (10)\\ y &= 2x && (11) \end{aligned}$$

Nun können wir damit zurück in unsere Nebenbedingung gehen und einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x, y(x)) = x^2 + 4x^2 - 5 &= 0 && (12)\\ 5x^5 &= 5 && (13)\\ x^2 &= 1 && (14)\\ \rightarrow x_1 &= 1 && (15) \end{aligned}$$

[1] Oder was wir als Funktion interepretieren, per Aufgabenstellung ist dies nicht klar.

$$x_2 = -1 \tag{16}$$

Diesen Werten entsprechen die Koordinaten

$$f(1, y) = 1 + y^2 - 5 = 0 \tag{17}$$
$$y^2 = 4 \tag{18}$$
$$\rightarrow y_1 = 2 \tag{19}$$
$$y_2 = -2 \tag{20}$$

Wegen des Quadrates liefert $g(-1, y)$ die exakt gleiche Lösung. Um zu gucken, welche Werte zusammen gehören, setzen wir sie in unser Gleichungssystsem mit dem Lagrange-Multiplikator ein:

$$1 = \lambda 2x_1 = \lambda 2 \tag{21}$$
$$2 = \lambda 2y_1 = \lambda 4 \tag{22}$$
$$\rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \tag{23}$$

Das Einsetzen des anderen Wertes ergäbe eine falsche Aussage:

$$1 = \lambda 2x_1 = \lambda 2 \tag{24}$$
$$2 = \lambda 2y_2 = -\lambda 4 \tag{25}$$

Das ist nicht möglich mit einem einzigen λ, also gehören logischerweise unsere x_1, y_1 und x_2, y_2 zusammen. Die möglichen Extrema sind also:

$$P_1 = (1, 2, h(1, 2)) = (1, 2, 5) \tag{26}$$
$$P_2 = (-1, -2, h(-1, -2)) = (-1, -2, -5) \tag{27}$$

b) Gegeben seien:

$$h(x, y) = xy^2 \tag{28}$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \tag{29}$$

Wir fahren analog zu Teilaufgabe a) fort und bestimmen die Gradienten der beiden Funktionen:

$$\boldsymbol{\nabla} h = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \tag{30}$$
$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \tag{31}$$

Wir benutzen Lagrange-Multiplikatoren um die möglichen Extrema zu bestimmen:

$$\boldsymbol{\nabla} h = \lambda \boldsymbol{\nabla} f \tag{32}$$
$$\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \tag{33}$$

Aus 33 folgern wir, dadurch, dass wir nicht ohne weiteres y wegkürzen sollten, dass

$$2xy - \lambda 2y = 0 \tag{34}$$

$$2y(x-\lambda)=0 \tag{35}$$

Hier gibt es nun 2 Möglichkeiten: Entweder $y=0$, oder $\lambda=x$. Falls $y=0$, dann ist $h(x,0)=0$ ein Extremum für alle x. Alternativ kann $\lambda=x$ sein, dann gilt

$$y^2=2x^2 \tag{36}$$

$$y=\sqrt{2}x \tag{37}$$

Dann liegen Extrema auf der

$$f(x,y(x))=x^2+2x^2-1=0 \tag{38}$$

$$3x^2=1 \tag{39}$$

$$x^2=\frac{1}{3} \tag{40}$$

$$\rightarrow x_3=\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{41}$$

$$x_4=-\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{42}$$

Zu diesen x-Werten gehören natürlicherweise auch eine y-Koordinate:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},y\right)=\frac{1}{3}+y^2-1=0 \tag{43}$$

$$y^2=\frac{2}{3} \tag{44}$$

$$\rightarrow y_1=\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{45}$$

$$y_2=-\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{46}$$

Diese Werte für y erzeugen aber keinen Widerspruch, wenn wir sie in unsere Gleichung $\boldsymbol{\nabla} h=\lambda\boldsymbol{\nabla} f$ einsetzen, also sind beide Kombinationen mögliche lokale Extrema. Eine analoge Rechnung mit x_2 liefert das exakt gleiche Ergebnis. Es gibt also 4 mögliche Extrema:

$$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \tag{47}$$

$$P_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \tag{48}$$

$$P_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \tag{49}$$

$$P_4=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

c) Gegeben seien:

$$h(x,y,z)=xz \tag{52}$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{53}$$
$$i(x,y,z) = x + z + 1 = 0 \tag{54}$$

Wir fahren analog wie in den letzten Teilaufgaben, aber anders dazu haben wir nun zwei verschiedene Nebenbedingungen. Das lässt sich aber per dem gleichen Satz zu Lagrange-Multiplikatoren lösen, wir brauchen nur 2 unterschiedliche Lagrange-Multiplikatoren, sodass:

$$\boldsymbol{\nabla} h = \lambda_1 \boldsymbol{\nabla} g + \lambda_2 \boldsymbol{\nabla} i \tag{55}$$

Außerdem müssen offensichtlich die Gleichungen $g = 0$ und $i = 0$ gleichzeitig erfüllt sein.

$$\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Hier lesen wir gleich ab: $x = \lambda_2$ und $y = 0$ oder $\lambda_1 = 0$. Also für den Fall $\lambda_1 = 0$ erhalten wir

$$z = \lambda_2 \tag{57}$$
$$x = \lambda_2 \tag{58}$$
$$\rightarrow x = z \tag{59}$$

Setzen wir dies in die Nebenbedingung i ein und wir erhalten:

$$i(x,y,x) = 2x + 1 = 0 \tag{60}$$
$$x_1 = -\frac{1}{2} \tag{61}$$

Nun dieses Ergebnis in g:

$$g\left(-\frac{1}{2}, 0, y\right) = \frac{1}{4} + y^2 - 1 = 0 \tag{62}$$
$$y^2 = \frac{3}{4} \tag{63}$$
$$\rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{64}$$
$$y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{65}$$

Zunächst untersuchen wir den Fall $y = 0$. Dann gilt wegen der Nebenbedingung g:

$$x^2 - 1 = 0 \tag{66}$$
$$\rightarrow x_2 = 1 \tag{67}$$
$$x_3 = -1 \tag{68}$$

Aus diesen Werten folgt dann:

$$i(1, 0, z_2) = 1 + z_2 + 1 = 0 \tag{69}$$
$$\rightarrow z_2 = -2 \tag{70}$$

$$i(-1,0,z_3) = -1 + z_3 + 1 = 0 \tag{71}$$

$$\rightarrow z_3 = 0 \tag{72}$$

Nun haben wir 4 verschiedene mögliche Extrema:

$$P_1 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \tag{73}$$

$$P_2 = \left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \tag{74}$$

$$P_3 = (1, 0, -2, 2) \tag{75}$$

$$P_4 = (-1, 0, 0, 0) \tag{76}$$

12.2 Anwedundung: Newtonsches Abkühlgesetz

Per dem newtonschen Abkühlgesetz kann man die Temperaturänderungsrate eines Materials wie folgt beschreiben:

$$T'(t) = k(T(t) - T_a) \qquad t \in [0, \infty) \tag{77}$$

a) **Zu bestimmen** ist die nicht konstante Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$T(0) = T_0 > T_a \tag{78}$$

Hierzu verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten:

$$T(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left[T_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-A(s)} \, \mathrm{d}s \right] \tag{79}$$

Dabei sind $a(t) = k$, $A(t) = kt$ und $b(t) = -kT_a$

$$\begin{aligned} T(t) &= \mathrm{e}^{kt} \left[T_0 - \int_0^t kT_a \mathrm{e}^{-ks} \, \mathrm{d}s \right] && (80) \\ &= \mathrm{e}^{kt} \left[T_0 + kT_a \left[\frac{\mathrm{e}^{-ks}}{k} \right]_0^t \right] && (81) \\ &= T_0 \mathrm{e}^{kt} + T_a && (82) \end{aligned}$$

b) **Gesucht** ist die Zeit, nachdem meine Tasse Tee $T_a = 20°$) von $T_0 = 100°$ auf $T_f = 30°$ abkühlen wird, wenn nach $t_m = 20$ Zeiteinheiten bereits der Tee auf $T_m = 60°$ abgekühlt war. Man muss also folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} T_f &= T_0 \mathrm{e}^{kt} + T_a && (83) \\ T_f - T_a &= T_0 \mathrm{e}^{kt} && (84) \\ \mathrm{e}^{kt} &= \frac{T_f - T_a}{T_0} && (85) \\ kt &= \ln\left(\frac{T_f - T_a}{T_0} \right) && (86) \\ t &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{T_f - T_a}{T_0} \right) && (87) \end{aligned}$$

Den Parameter k können wir anhand der oben genannten Zwischenmessung bestimmen:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{t_m} \ln\left(\frac{T_m - T_a}{T_0} \right) && (88) \\ &= -\frac{1}{20} \ln \frac{5}{2} && (89) \\ &\approx -0,0458 && (90) \end{aligned}$$

Daraus folgt für unsere Tasse Tee:

$$\begin{aligned} t &= \frac{20 \ln 10}{\ln \frac{5}{2}} && (91) \\ &\approx 50,2588 && (92) \end{aligned}$$

c) Nach einer sehr langen Zeit, dann wird der Tee nicht mal gut schmecken, erreicht die Tasse die folgende Temperatur:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} T(t) &= \lim_{t\to\infty} T_0 \mathrm{e}^{kt} + T_a && |k < 0 && (93)\\
&= T_a && && (94)\\
&= 20^\circ && && (95)
\end{aligned}$$

12.3 Aufgabe 3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{96}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y) \tag{97}$$

stetig mit einer globalen Lipschitz-Bedingung mit $L \in \mathbb{R}^+$. Dies Bedeutet

$$\forall (x, y), (x, \overline{y}) \in I \times \mathbb{R}^n : |f(x, y) - f(x, \overline{y})| \leq L|y - \overline{y}|. \tag{98}$$

(a) Ich hatte noch eine Idee und formuliere sie hier mal:
Wir überlegen zunächst, worin genau sich diese Aufgabenstellung von dem in der Vorlesung bewiesenen Satz unterscheidet. Satz 6.9 wurde explizit für ein abgeschlossenes Intervall $I := [a, b]$ bewiesen. Hier jedoch liegt nur ein Intervall vor, über dessen Rand keine Informationen bekannt sind.
Wir suchen deshalb einen Weg, eine Lösung für ein gegebenes Intervall zu finden.

- Intervall $I := (a, b)$ Aus Satz 4.11 der Analysis 1 folgt, dass diese offene Menge durch eine Vereinigung von abgeschlossener Bälle dargestellt werden kann. Es gilt also

  $$I \text{ offen} \iff \forall p \in I \exists r > 0 : B_r(p) \in I$$

  In $\mathbb{R}$ sind diese Bälle aber gerade Intervalle $[p - r, p + r]$. Gemäß des Satz von Picard-Lindelöf (wie in Satz 6.9) besitzt das Anfangswertproblem für dieses Intervall eine Lösung.

  Wir betrachten nun zwei sich schneidende, „benachbarte“Intervalle, die in I liegen und die Bedingung aus Satz 4.11 erfüllen.

  $$I' := [p - r, p + r]$$
  $$I'' := [p + r - r', p + r + r']$$

  Für beide Intervalle gibt es eine Lösung gemäß Picard-Lindelöf/Satz 6.9. Da beide Intervalle sich schneiden und die Lipschitz-Bedingung global erfüllt wird, muss die Lösung bereits gleich sein. Wir können nun gemäß der Baby-Schritt-Taktik aus der Vorlesung und mit Satz 4.11 das ganze Intervall so abgehen und finden die Lösung $p(x)$, die auch das Anfangswertproblem löst.

- Intervalle $(a, b]$ oder $[b, a)$
  Wir gehen zu oben vor, indem wir hier das Intervall nun als Vereinigung einer abgeschlossenen und einer offenen Menge schreiben. Mit analogen Argumenten folgt dann die Lösung.

(b)

Sind φ und ψ Lösuingen, so gilt

$$\varphi(x) = \int_a^x f(\xi, \varphi(\xi)) \mathrm{d}\xi + \varphi(a) \tag{99}$$

$$\psi(x) = \int_a^x f(\xi, \psi(\xi))\mathrm{d}\xi + \psi(a) \tag{100}$$

Ein Ansatz zum Beweis ist:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \psi(x) &= \int_a^x f(\xi, \varphi(\xi))\mathrm{d}\xi + \varphi(a) - \int_a^x f(\xi, \psi(\xi))\mathrm{d}\xi - \psi(a) && (101)\\
\iff \varphi(x) - \psi(x) &= \int_a^x [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\mathrm{d}\xi + (\varphi(a) - \psi(a)) && (102)\\
\iff |\varphi(x) - \psi(x)| &= \left| \int_a^x [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\mathrm{d}\xi + (\varphi(a) - \psi(a)) \right| && (103)\\
&\leq \left| \int_a^x [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\mathrm{d}\xi \right| + |(\varphi(a) - \psi(a))| && (104)\\
&\leq \int_a^x |[f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]|\mathrm{d}\xi + |(\varphi(a) - \psi(a))| && (105)\\
&\leq \int_a^x L|\varphi(\xi) - \psi(\xi)|\mathrm{d}\xi + |(\varphi(a) - \psi(a))| && (106)\\
&\ldots && (107)
\end{aligned}$$

Bis zu diesem Punkt sind wir gekommen.

12.4 Vektorfelder und Differentialgleichungen

Gegeben sei die Gleichung

$$\dot{x} = (1+x)x \tag{108}$$

a) Das zu dieser Gleichung zugehöriges Vektorfeld ist $v(x) = (1+x)x$

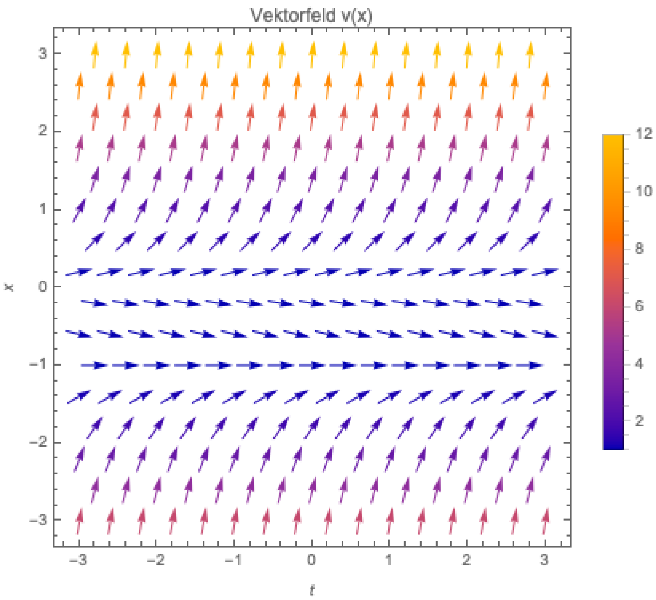

Abbildung 1: Vektorfeld $v(x)$

Die konstanten Lösungen zur gegebenen Differentialgleichung sind natürlich $x(t) = 0$, und außerdem $x(t) = -1$. Für diese Werte verschwindet die Ableitung für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) **Gesucht** sind die folgenden Grenzwerte für $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Um dies zu machen berechnen wir zuerst explizit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\dot{x} = x + x^2 \qquad \Big| z = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \tag{109}$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{x^2}\dot{x}$$

$$\dot{x} = -x^2 \dot{z} = -\frac{\dot{z}}{z^2}$$

$$-\frac{\dot{z}}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \tag{110}$$

$$-\dot{z} = z + 1 \qquad \Big|\text{Separation der Variablen} \tag{111}$$

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta + 1} = \int_0^t \mathrm{d}\xi \tag{112}$$

$$-\ln|z+1| - \ln(z_0 + 1) = t \tag{113}$$

$$-\ln|z+1| = t + \ln z_0 + 1 \tag{114}$$

$$z + 1 = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\ln(z_0+1)} \tag{115}$$

$$z = (z_0 + 1)\mathrm{e}^{-t} - 1 \tag{116}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} + 1\right)\mathrm{e}^{-t} - 1} \tag{117}$$

- für $x_0 \in (-1, 0)$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0}+1\right)\mathrm{e}^{-t}-1} \qquad \Big| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0 \tag{118}$$
$$= \frac{1}{0-1} \tag{119}$$
$$= -1 \tag{120}$$
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0}+1\right)\mathrm{e}^{-t}-1} \qquad \Big| \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{-t} \text{ "="} \infty \tag{121}$$
$$= 0 \tag{122}$$

- für $x_0 > 0$:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0}+1\right)\mathrm{e}^{-t}-1} \qquad \Big| \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{-t} \text{ "="} \infty \tag{123}$$
$$= 0 \tag{124}$$

- für $x_0 < -1$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0}+1\right)\mathrm{e}^{-t}-1} \qquad \Big| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0 \tag{125}$$
$$= \frac{1}{-1} \tag{126}$$
$$= -1 \tag{127}$$

c) Für $x_0 > 0$. Da die Differentialgleichung "monoton steigend" ist, d.h. $\dot{x} = (1+x)x \geq (1+x_0)x_0$, dann gibt es ein t_0 mit $x(t_0) \geq 1$ für alle $t \geq t_0$. Damit ist **zu zeigen**, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $x(t) \geq \tan(t+c)$ für alle $t \geq t_0$.

Wir beginnen mit folgender Aussage:

$$\dot{x} \geq x^2 + 1 \qquad \text{für } t \geq t_0 \tag{128}$$

Dies folgt leicht aus der Behauptung, dass $x(t_0) \geq 1$ und $x(t \geq t_0) \geq x(t_0)$

$$\dot{x} = x^2 + x \geq x^2 + 1 \tag{129}$$
$$\frac{\dot{x}}{x^2+1} \geq 1 \qquad \Big|\text{Separation der Variablen} \tag{130}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \geq \int \mathrm{d}t \qquad \Big|\text{Integral bekanntlich } \arctan x \tag{131}$$
$$\arctan x \geq t + C \tag{132}$$
$$x \geq \tan(t+C) \tag{133}$$

Wir verzichten auf das Überprüfen der Voraussetzungen und akzeptieren die berechtigte Strafe der Mathe-Polizei.

d) Nun skizzieren wir einige Lösungen zu der Differentialgleichung. In rot und pink ist $x_0 > 0$, in orange ist $x_0 = 0$, in lila ist $x_0 \in (-1, 0)$, in gelb ist $x_0 = -1$.

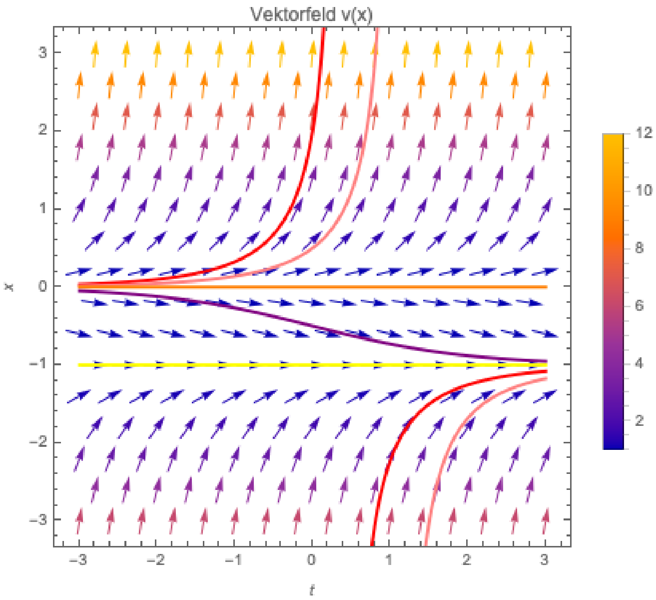

Abbildung 2: Mögliche Lösungen