
Versuch 12

15. September 2021

Trägheitsmoment

Physikalisches Anfängerpraktikum I

Juan Provencio

Betreuer: Antonia Schneider

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	2
2	Grundlagen	2
2.1	Analogie zwischen Translation und Rotation	2
2.2	Drehmoment	2
2.3	Trägheitsmoment	3
2.4	Richtmoment	4
2.5	Drehimpuls	4
2.6	Satz von Steiner	4
3	Versuchsaufbau	4
3.1	Materialen und Geräte	4
3.2	Aufbau	5
4	Messung und Auswertung	6
4.1	Messprotokoll	6
4.2	Auswertung	8
5	Zusammenfassung und Diskussion	14
5.1	Zusammenfassung	14
5.2	Diskussion	14
6	Quellen	16

1 Ziel des Versuches

Bei Rotationen spielt Trägheitsmoment eine ähnliche Rolle wie die Masse bei normalen Bewegungen. Wir wollen nun mit diesem Versuch lernen, wie man mit einem Drehpendel das Trägheitsmoment verschiedener Objekte bestimmen kann, insbesondere wenn die Geometrie die rechnerische Bestimmung davon ein zu großer Aufwand wäre. Wir wollen auch experimentell die Gültigkeit des Steinerschen Satzes beobachten.

2 Grundlagen

2.1 Analogie zwischen Translation und Rotation

Translation und Rotation, obwohl prinzipiell nur Bewegungen im Raum, werden von unterschiedlichen physikalischen Größen beschrieben, die aber wichtige Ähnlichkeiten und Parallelen zu den Translationsgrößen aufweisen. Die Sätze der Translation lassen sich leicht in die Rotation übersetzen, beispielsweise redet man in der Rotation nicht über Kräfte, die auf einen Körper wirken, sondern über Drehmomente und die Summe aller Drehmomente im System ist gleich 0, so wie bei den Kräften in der Translation. In folgender Tabelle geben wir die wichtigen Größen der Translation und ihre Äquivalenten der Rotation an:

Tabelle 1: Translation und Rotation

Translation		Rotation	
Ortsvektor	\mathbf{r}	Winkel	ϕ
Geschwindigkeit	$\dot{\mathbf{r}}$	Winkelgeschwindigkeit	ω
Beschleunigung	$\ddot{\mathbf{r}}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \dot{\omega}$
Masse	m	Trägheitstensor	J
Kraft	$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$	Drehmoment	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Impuls	$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$	Drehimpuls	$\mathbf{L} = J\omega$
Kinetische Energie	$T = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}$	Rotationsenergie	$T = \frac{\omega \cdot J\omega}{2}$

2.2 Drehmoment

Das zu einer linearen Kraft äquivalenten Drehmoment beschreibt die "Kraft", die durch eine auf eine Drehachse wirkende Kraft erzeugt wird. Das Dreh-

moment hängt linear vom Radius und von der wirkende Kraft ab.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1)$$

Beispielsweise kann man dieses Prinzip an einem Hebel erkennen. Eine Kraft F auf einem Radius r vom Drehpunkt erzeugt das gleiche Drehmoment wie eine Kraft $0,5F$ auf einem Radius $2r$.

2.3 Trägheitsmoment

Eine Änderung der Rotationsbewegung bezüglich einer Drehachse eines Körpers wird von einem Widerstand, von einer Trägheit, entgegengewirkt. Diese Trägheit kommt zustande aufgrund der Masse des Körpers, aber auch aufgrund seiner Geometrie. Gleichschwere aber anders geformte Objekte besitzen unterschiedliche Trägheitsmomente. Im vereinfachten Fall ist der Trägheitsmoment eines Massenpunktes

$$J = mr^2 \quad (2)$$

Dieses Ergebnis berücksichtigt aber nicht die Massenverteilung eines Körpers, dafür muss man mit gegebener Dichtenverteilung $\rho(\mathbf{r})$

$$J^{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} \mathbf{r}^2 - r^i r^j) dV \quad (3)$$

rechnen. Alternativ kann man das Trägheitsmoment mit dem senkrechten Radius zur Drehachse \mathbf{r}_\perp berechnen:

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_\perp^2 dV \quad (4)$$

Für einfache und homogene geometrische Objekte sind Trägheitsmomente leicht zu rechnen, beispielsweise habe eine runde Scheibe mit Masse m und Radius r das Moment

$$J = \frac{mr^2}{2}. \quad (5)$$

Experimentell können wir es auch bestimmen, indem wir mittels der folgenden Beziehung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (6)$$

das Richtmoment D und die Periodendauer des Drehpendels T misst und mit den gegebenen Werten nach J auflöst.

Trägheitsmomente sind zusätzlich eine extensive Größe eines Systems, das heißt für ein System bestehend aus mehreren Körpern, das Gesamtträgheitsmoment ist die Summe aller einzelnen Trägheitsmomenten.

2.4 Richtmoment

Das eben erwähnte Richtmoment spielt im Versuch eine ähnliche Rolle wie die Federkonstante k . Es ist eine Proportionalitätskonstante zwischen dem Drehmoment und dem ausgelenkten Winkel ϕ

$$\mathbf{M} = -D\phi \quad (7)$$

Mit dieser Größe werden wir das Trägheitsmoment bestimmen können.

2.5 Drehimpuls

Der Drehimpuls ist dadurch eine so wichtige Größe, weil es die Erhaltungsgröße einer Rotationssymmetrie darstellt. In einem geschlossenen System bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten, falls diese Symmetrie vorgegeben ist. Man kann ihn als Produkt des Radius und des Impulses oder als Produkt des Trägheitsmomentes und der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (8)$$

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (9)$$

2.6 Satz von Steiner

Nach dem Steinerschen Satz kann man mit einem bekannten Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt J_s auch leicht das Trägheitsmoment jeder beliebiger zu dieser Drehachse paralleler Achse J_a bestimmen. Es gilt

$$J_a = J_s + mr^2 \quad (10)$$

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- Drehpendel mit senkrechter Achse
- Drehgabel und Drehtisch
- Waage
- Handstoppuhr und Messschieber
- Balancierschneide

- Alu-Scheibe mit Schnurnut und Winkelteilung, runde Messingscheibe, unregelmäßige Messingscheibe, Gewichtsteller mit Zugschnur, 6 Auflagegewichte von je 40 g, Selbstklebeetikette
- Ei
- Marmelade

3.2 Aufbau

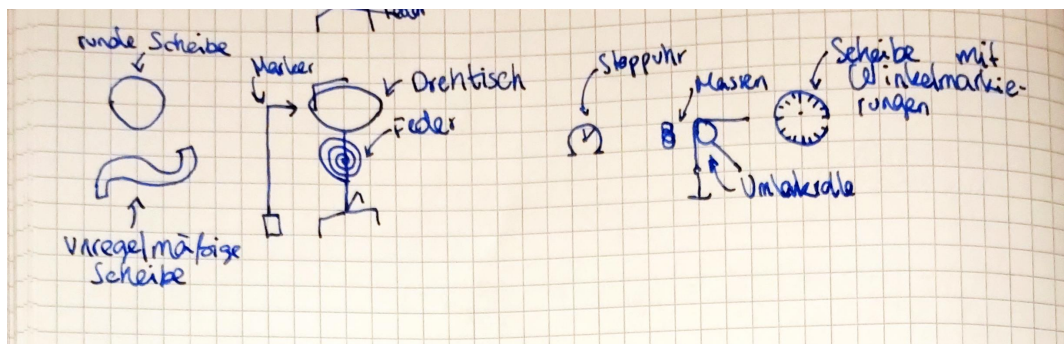


Abbildung 1: Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll V12 Trägheitsmoment
15.09.2021
Mike Brandt
Juan Provencio

Teilaufgabe 2:
Wir hängen verschiedene Gewichte an die Schnur und messen die Auslenkung des Winkels

Tabelle 1: Auslenkwinkel und Masse * Die Messungen wurden wiederholt

Nr.	Masse m [g]	Auslenkung ϕ [°]	ϕ_p [°]
1	0	0	1
2	40	40 54 43 48	1
3	80	52 94 96	1
4	120	64 142 142	1
5	160	69 160 196	1
6	200	248	2
7	240	290	2

...

Teilaufgabe 3:
Wir legen die Messingscheibe der Masse $m_m = (646,2 \pm 30,1) \text{ g}$ auf den Teller und messen 3 mal jeweils 20 Schwingungen und bestimmen daraus die Periodendauer. (Zuerst bestimmen wir die Periodendauer ohne die Scheibe)

Tabelle 2: Schwingungsdauer Tisch und Tisch + Scheibe

Nr.	Schwingungen	Tisch T_t [s]	Messing T_m [s]
1	20	21,43	32,17
2	20	22,78	34,00
3	20	22,64	34,04

Die Messingscheibe hat einen Durchmesser $d = (11,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

Teilaufgabe 5 und 6:
Nachdem der Schwerpunkt des unregelmäßigen Körpers bestimmt wurde, wiederholen wir die Messung aus 3 jeweils ein mal 20 Schwingungen im Schwerpunkt und in 5 Abständen vom SP. Der Körper wiegt $m_k = (680,0 \pm 0,1) \text{ g}$

Abbildung 2: Messprotokoll

Tabelle 3: Schwingungsdauer unregelmäßiger Körper

Abstand a [cm]	Schwingungsdauer T_k [s]	T_{T_k} [s]
Schwerpunkt	43,64	
$1,0 \pm 0,1$	44,06	
$2,0 \pm 0,1$	45,82	
$3,0 \pm 0,1$	48,34	0,5
$4,0 \pm 0,1$	50,37	
$0,5 \pm 0,1$	41,00	

14.5.21 A. Sch

Abbildung 3: Fortsetzung Messprotokoll

4.2 Auswertung

4.2.1 Bestimmung des Richtmomentes

Als erstes wollen wir das konstante Richtmoment graphisch bestimmen. Dafür müssen wir mit dem Verhältnis

$$M = Fr \quad | \quad F = mg \quad (11)$$

$$M = mgr \quad | \quad M = -D\phi \quad (12)$$

$$-D\phi = mgr \quad (13)$$

das aufgrund der Massen wirkende Drehmoment bestimmen, und die Werte davon gegen den Winkel auftragen. Mit einem Drehtisch des Durchmessers $d = (10,05 \pm 0,05)$ erhalten wir die Werte

Tabelle 2: Masse, Drehmoment und Winkelauslenkung

Masse m [g]	Drehmoment M [$10^{-2} \cdot \text{N m}$]	Winkelauslenkung [$^\circ$]
0	0	0 ± 2
40	$1,97 \pm 0,012$	48 ± 2
80	$3,94 \pm 0,024$	96 ± 2
120	$5,92 \pm 0,04$	142 ± 2
160	$7,89 \pm 0,05$	196 ± 2
200	$9,86 \pm 0,06$	248 ± 2
240	$11,83 \pm 0,07$	290 ± 2

Diese Werte tragen wir in ein Diagramm auf und lesen aus der Ausgleichsgerade eine Steigung¹ von

$$D = 2,28288 \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1} \quad (14)$$

und aus der Fehlergerade erhalten wir einen Fehler von

$$\sigma_D = 0,11 \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1} \quad (15)$$

und insgesamt ist das Richtmoment

$$D = (2,28 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1} \parallel \quad (16)$$

¹Der Wert wurde sofort bei der Rechnung auf rad angepasst

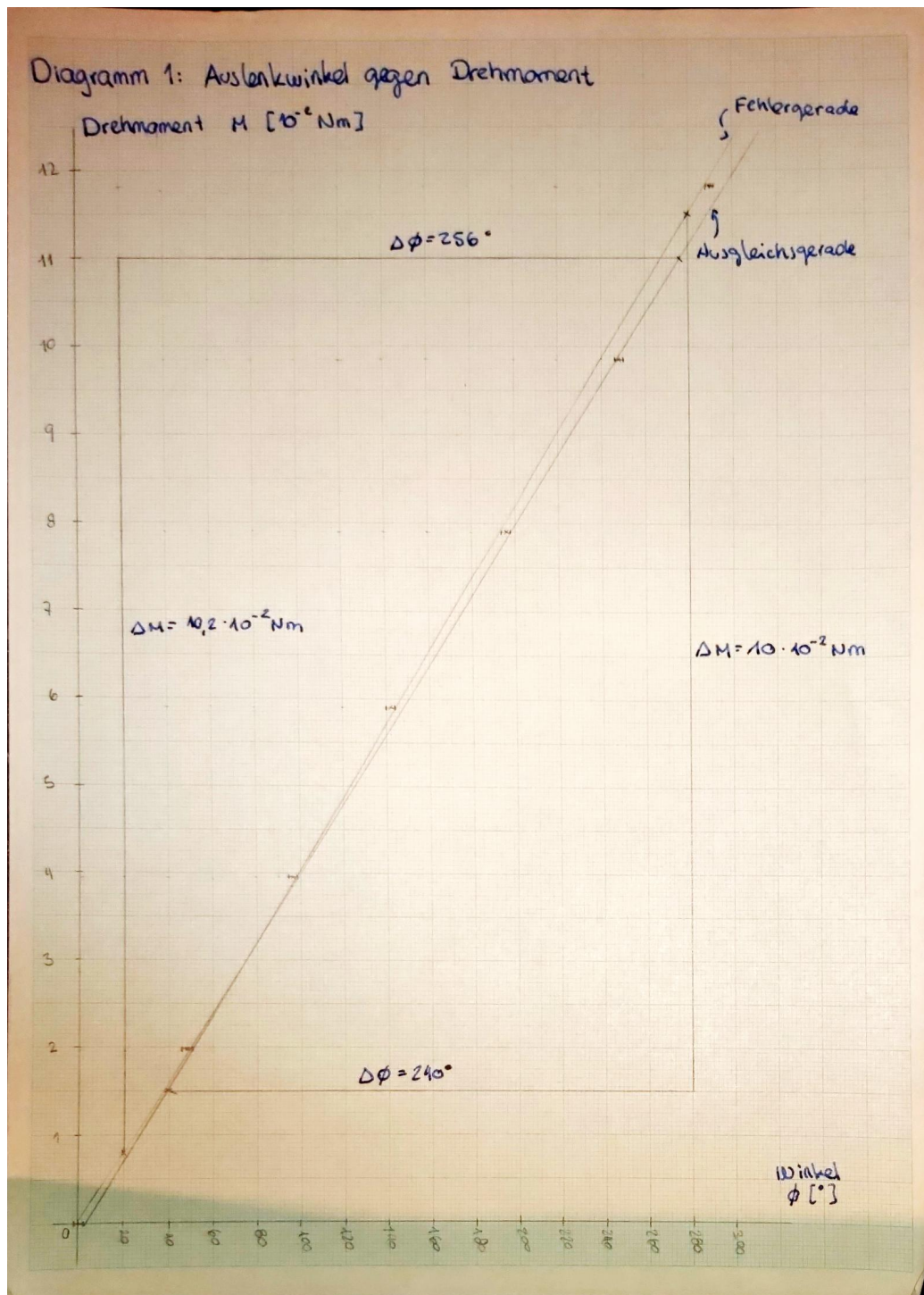


Diagramm 1: Bestimmung des Richtmoments

4.2.2 Überprüfung des Richtmomentes

Nun wollen wir das Trägheitsmoment der Messingscheibe und des Drehtisches bestimmen. Dafür benutzen wir Gleichung (5) und die von uns gemessenen Masse und Radius der Scheibe. Wir erhalten:

$$J_S = \frac{m_S r^2}{2} \quad | r = (5,74 \pm 0,003) \text{ cm}, \quad (17)$$

$$m_S = (646,2 \pm 0,1) \text{ g} \\ = (1,0645 \pm 0,0011) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (18)$$

Der Fehler hier wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

Zunächst wollen wir überprüfen, dass wir ein etwa richtiges Richtmoment in der letzten Teilaufgabe bestimmt haben. Dieses berechnen wir mithilfe von Gleichung (6) und den Messungen der Periode. Als erstes bestimmen wir die mittlere Schwingungsdauer des Tisches als

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{20} \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 T_i}{3} = 1,114 \quad (19)$$

und seinen Fehler als

$$\sigma_{\bar{T}_1} = \frac{1}{20} \sqrt{\frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^3 (T_i - \bar{T}_1)^2 \right)} = 0,022 \quad (20)$$

Der Faktor $\frac{1}{20}$ kommt dadurch, dass wir die Zeit über 20 Schwingungen gemessen haben. Wir erhalten insgesamt eine Periodendauer von

$$\bar{T}_1 = (1,114 \pm 0,022) \text{ s} \quad (21)$$

Analog bestimmen wir die mittlere Periodendauer des Tisches mit der Messingscheibe \bar{T}_2

$$\bar{T}_2 = (1,670 \pm 0,022) \text{ s} \quad (22)$$

Aus Gleichung (6) können wir mit den zwei verschiedenen Messungen für T_1 und T_2 nach D umformen. Dabei wollen wir das Trägheitsmoment J_T aber eliminieren und nur mit bekannten und einfachen Werten weiterrechnen:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{D}} \quad | J_T = \frac{T_1^2}{4\pi^2} D \quad (23)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_S}{D}} \quad (24)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{T_1^2}{4\pi^2}D\right) + J_S}{D}} \quad (25)$$

$$\frac{T_2^2}{4\pi^2} = \frac{\frac{T_1^2}{4\pi^2}D + J_S}{D} \quad (26)$$

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{4\pi^2} = \frac{J_S}{D} \quad (27)$$

$$D = \frac{J_S 4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (28)$$

Mit den gegebenen Werten erhalten wir hiermit ein Richtmoment von

$$D = 2,71 \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1}. \quad (29)$$

Der Fehler lässt sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnen als:

$$\sigma_D = \sqrt{(\partial_{J_S}(D) \cdot \sigma_{J_S})^2 + (\partial_{T_1}(D) \cdot \sigma_{T_1})^2 + (\partial_{T_2}(D) \cdot \sigma_{T_2})^2} \quad (30)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{J_S} \cdot 4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2}\right)^2 + \left(\frac{J_S 4\pi^2 \cdot 2T_1 \sigma_{T_1}}{(T_2^2 - T_1^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{J_S 4\pi^2 \cdot 2T_2 \sigma_{T_2}}{(T_2^2 - T_1^2)^2}\right)^2} \quad (31)$$

$$= 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1} \quad (32)$$

Also erhalten wir insgesamt

$$D = (2,71 \pm 0,15) \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1} \quad (33)$$

Dieser Wert und der graphisch bestimmte stimmen in ihrem Fehlerbereich gar nicht überein. Beide Ergebnisse weichen um 2,3 σ -Bereiche von einander. Obwohl dies theoretisch noch im akzeptablen Bereich liegt, ist ein Fehler von fast 20% zwischen beiden Werten zu groß. Der Grund für diesen riesigen Fehler lässt sich momentan nicht erklären. In der Diskussion wird darauf tiefer eingegangen.

4.2.3 Trägheitsmoment unregelmäßige Scheibe

Im Folgenden werden wir das Trägheitsmoment J_P der unregelmäßigen Platte bestimmen. Dafür wurde in der Durchführung der Schwerpunkt dieser Platte bestimmt und es wurde damit einmal 20 Schwingungen gemessen. Hierfür ist keine Mittlung der Periodendauer nötig, wir können sie sofort angeben als

$$T_3 = \frac{1}{20}(43,6 \pm 0,5) \text{ s} = (2,18 \pm 0,03) \text{ s} \quad (34)$$

Wir benutzen nochmal Gleichung (6) und setzen dieses Mal T_3 für die Zeit ein und als Trägheitsmoment geben wir das Trägheitsmoment des Tisches und das der Platte an:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T + J_P}{D}} \quad (35)$$

Um die Fehlerrechnung ein bisschen zu vereinfachen eliminieren wir J_T nicht, sondern geben ihn per das Nebenkomentar zur Gleichung (23) an:

$$J_T = (8,5 \pm 0,6) \cdot 10^{-4} \text{ N m s}^2 \quad (36)$$

Der Fehler wurde laut Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet. Somit erhalten wir

$$J_P = \frac{T_3^2}{4\pi^2} D - J_T \quad (37)$$

$$= 2,41402 \cdot 10^{-3} \text{ N m s}^2 \quad (38)$$

Der Fehler lässt sich berechnen als

$$\sigma_{J_P} = \sqrt{\left(\frac{2T_3 \cdot \sigma_{T_3}}{4\pi^2} D\right)^2 + \left(\frac{T_3^2}{4\pi^2} \cdot \sigma_D\right)^2 + (\sigma_{J_T})^2} = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ N m s}^2 \quad (39)$$

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$J_P = (2,41 \pm 0,21) \cdot 10^{-3} \text{ N m s}^2 \quad (40)$$

4.2.4 Anwendung des Steinerschen Satzes

Mit dem Trägheitsmoment im Schwerpunkt können wir das Trägheitsmoment jeder beliebiger zum Schwerpunkt paralleler Achse bestimmen. Dafür haben wir in der Durchführung die Periodendauer in 5 verschiedenen Abständen gemessen. Zunächst vergleichen wir die Gültigkeit des Steinerschen Satzes

$$J_i = J_P + ma_i^2 \quad (41)$$

mit den von uns experimentell bestimmten Werten nach Gleichung (6). Zuerst tragen wir sie in Tabelle 3 auf und dann vergleichen wir sie graphisch.

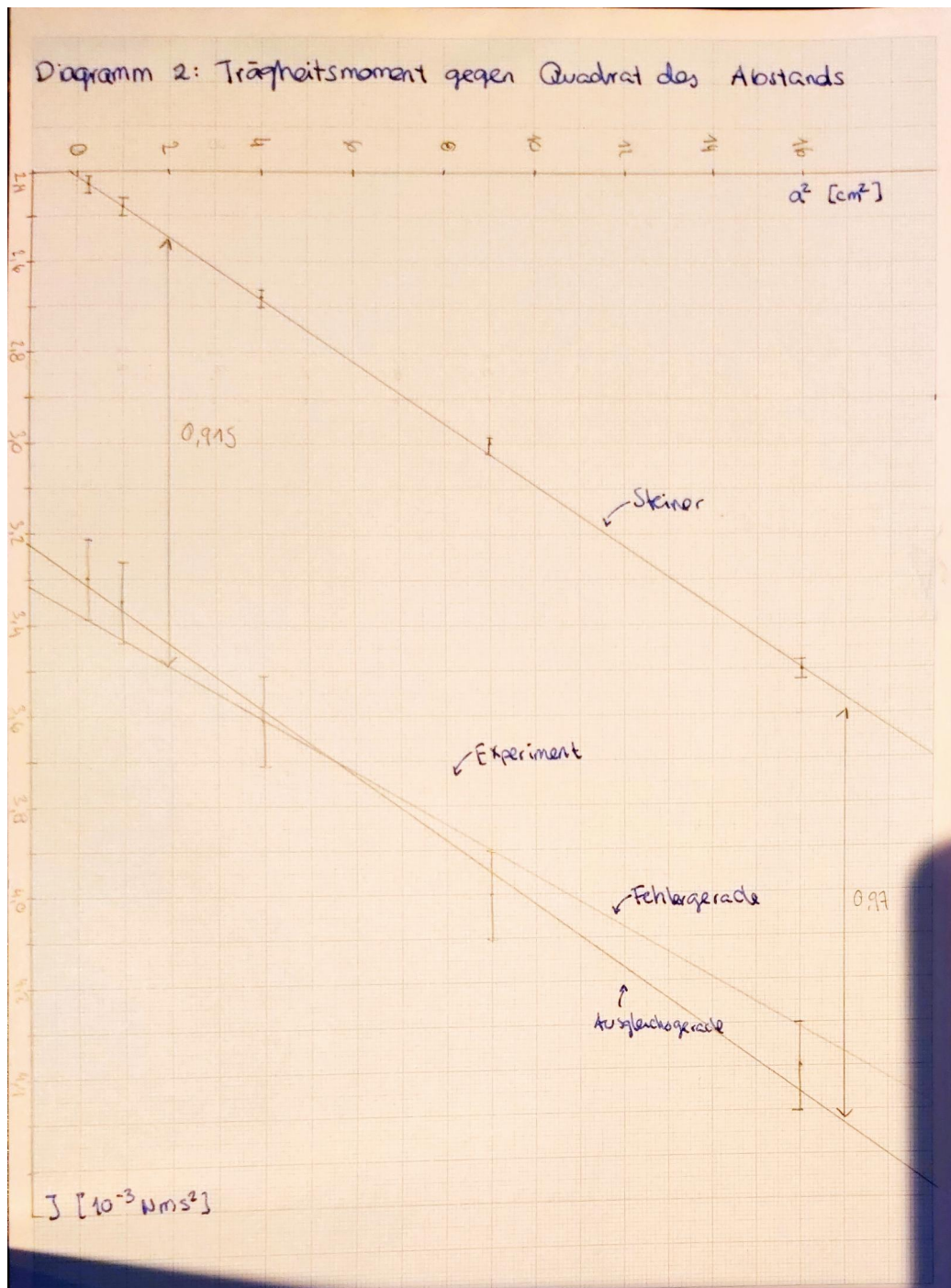


Diagramm 2: Steiner vs Experiment

Tabelle 3: Trägheitsmoment Steiner vs Experimentation



Messung	Abstand a [cm]	Periodendauer T_i [s]	Steiner $J_{i,S}$ [10^{-3} N m s ²]	Experiment $J_{i,E}$ [10^{-3} N m s ²]	σ
1	$1 \pm 0,1$	$2,21 \pm 0,03$	$2,48 \pm 0,21$	$3,35 \pm 0,09$	3,8
2	$2 \pm 0,1$	$2,29 \pm 0,03$	$2,68 \pm 0,21$	$3,61 \pm 0,09$	4
3	$3 \pm 0,1$	$2,42 \pm 0,03$	$3,02 \pm 0,21$	$4,0 \pm 0,1$	4,2
4	$4 \pm 0,1$	$2,52 \pm 0,03$	$3,50 \pm 0,22$	$4,4 \pm 0,1$	3,7
5	$0,5 \pm 0,1$	$2,20 \pm 0,03$	$2,43 \pm 0,21$	$3,33 \pm 0,09$	3,9

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir Trägheitsmomente von verschiedenen Objekten, erstens von dem Auflagetisch und einer regelmäßigen runden Scheibe und zweitens von einer unregelmäßigen Platte bestimmt. Dazu haben wir ein Drehpendel mit einer Feder benutzt, um die Periodendauer auf dem Tisch montierten Körpern zu bestimmen. Dazu war zuerst die Berechnung des Richtmomentes D erforderlich. Zum Schluss haben wir mithilfe des Satzes von Steiner das Trägheitsmoment in Abhängigkeit vorhergesagt und mit den experimentellen Messungen verglichen.

5.2 Diskussion

Die Ergebnisse des Versuches zeigen eine große Diskrepanz zu den Erwartungen. Als erstes fehlt auf, dass das graphisch bestimmte Richtmoment $D_{\text{graph}} = (2,28 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1}$ und das rechnerisch bestimmte $D_{\text{mathe}} = (2,71 \pm 0,15) \cdot 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1}$ in ihren Fehlerbereichen nicht übereinstimmen. Sie weichen voneinander um

$$\frac{|D_{\text{graph}} - D_{\text{mathe}}|}{\sqrt{(\sigma_{D_{\text{graph}}})^2 + (\sigma_{D_{\text{mathe}}})^2}} = 2,4 \quad (42)$$

2,4 σ -Bereiche ab. Obwohl dies kein erschütterndes Ergebnis ist, ist es trotzdem sehr signifikant für die weiterführende Messungen. Insbesondere musste man für die weiteren Rechnungen einen dieser beiden Werte nehmen. Die Wahl, den rechnerisch bestimmten zu benutzen haben wir getroffen mit dem Gedanken, dass hinter der Bestimmung des Drehmomentes M in Abhängigkeit des Winkels eine größere Anfälligkeit auf Menschenfehler steckt-

te. Beispielsweise könnte die Scheibe mit Winkeln nicht angemessen positioniert gewesen sein.

Der Versuch hilft auch dazu, die Trägheitsmoment der zwei unterschiedlichen Formen zu vergleichen. Obwohl beide Objekte sich in Masse wenig unterscheiden (die unregelmäßige Platte war etwa 5% schwerer als die runde Scheibe), besitzt die unregelmäßige Scheibe ein Trägheitsmoment was 20 Mal so groß ist wie das der runden Scheibe. Dieses Effekt konnte man beispielsweise beim Drehen des Drehpendels bei den unterschiedlichen Körpern wahrnehmen. Die Drehung mit der runden Scheibe war selbstverständlich viel flüssiger als die Drehung mit dem unregelmäßigen Körper. Die relativen Fehlern bei der Größen lassen sich schwer vergleichen. Als erstes zeigt die runde Scheibe einen relativen Fehler von 1%, dies liegt daran, dass man sowohl die Masse als auch den Radius dieser mit großer Genauigkeit bestimmen konnte. Die Bestimmung des Trägheitsmoments der unregelmäßigen Platte gelingt jedoch bei der einmaligen Zeitmessung von 20 Schwingungen. Dabei kommen zusätzlich weitere stark fehlerbehaftete Größen wie das Richtmoment ins Spiel. Insgesamt erweist sich für diese Platte einen relativen Fehler von 9%. Diesen Fehler hätte man durch eine genauere Durchführung des Versuchs deutlich verringern können.

Zuletzt wollen wir die möglichen Abweichungen zwischen der Theorie des Satzes von Steiners und den experimentellen Werten untersuchen. Die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment sind in Tabelle ?? aufgelistet, dabei ist bemerkenswert, dass keine der einzigen Messungen in einem akzeptablen Fehlerbereich liegt. Wenn wir uns die beiden Graphen auf Diagramm 2 angucken, so sehen die Gerade der Theorie und die Gerade des Experiments nahezu parallel aus, aber verschoben um etwa $0.9 \cdot 10^{-3} \text{ N m s}^{-2}$. Eine Rechnung mit dem graphisch bestimmten Wert führt allerdings zu keinen besseren Ergebnissen. Dabei ist die minimale Abweichung der Theorie und des Experiments 3,1 σ -Bereiche und die maximale 4,2. Ein möglicher Grund für die fehlerhaften Rechnungen liegt vielleicht daran, dass der Schwerpunkt nicht präzise bestimmt worden ist. Dadurch, dass man die Platte nur fast balancieren konnte, man musste sie zum Punkt bringen, wo eine leichte Änderung die Fallrichtung wechselte, war der Massenschwerpunkt wahrscheinlich leicht vom vorhergesagten verschoben.

Vermutlich ist in der Durchführung des Versuchs ein systematischer Fehler entstanden, wofür wir nicht gerechnet haben.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP1 für Studierende der Physik B.Sc., 37-39.