
Versuch 241

6./13. Dezember 2021

Wechselstromeigenschaften von RLC-Gliedern

Physikalisches Anfängerpraktikum II

Juan Provencio Lameiras

Betreuer: Luca Blessing

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	2
2	Grundlagen	2
2.1	RC-Glieder im Zeitbereich	2
2.2	Impedanz	3
2.3	Frequenzverhalten von RC-Gliedern	4
2.4	RC-Glied als Differenziator und Integrator	7
2.5	Elektrischer Schwingkreis (RLC-Glied	8
2.6	Frequenzabhängigkeit eines Schwingkreises, Resonanz	10
2.7	Resonanzkurve eines Parallelschwingkreises	12
3	Versuchsaufbau	13
3.1	Materialien und Geräte	13
3.2	Aufbau	13
4	Messung und Auswertung	14
4.1	Messprotokoll	14
4.2	Auswertung	19
5	Zusammenfassung und Diskussion	29
5.1	Zusammenfassung	29
5.2	Diskussion	30
6	Quellen	34

1 Ziel des Versuches

RLC-Schaltungen mit Widerständen (R), Kondensatoren (C) und Spulen (L) sind elementar für viele wissenschaftliche und technische Schaltungskonzepte, zum Beispiel als Zeitbasis für elektrisch erzeugte Schwingungsabläufe wie das eines Funktionsgenerators. Filterschaltungen sind eine andere Art von RLC-Gliedern. In diesem Versuch wollen wir die verschiedenen Kombination der drei Bestandteilen untersuchen und auf einige praktische Nutzen davon eingehen.

2 Grundlagen

2.1 RC-Glieder im Zeitbereich

An einer Schaltung bestehend aus einem Widerstand und einem Kondensator sammelt sich beim Anlegen einer Gleichspannungsquelle U_E Ladung auf dem Kondensator, da diese durch den Isolator zwischen den Platten nicht durchfließen kann. Dadurch bildet sich am Kondensator eine Spannung U_C und dieser wird "aufgeladen" bis die Spannung U_C gleich groß ist wie U_E . Dieser Ladevorgang lässt sich nach den Kirchhoff'schen Regeln beschreiben gemäß

$$U_E = U_C + U_R = U_C + RI \quad (1)$$

Außerdem gilt

$$I = \dot{Q} = C\dot{U}_C \quad (2)$$

woraus wir die Differentialgleichung

$$U_E = U_C + RC \dot{U}_C := U_C + \tau \dot{U}_C \quad (3)$$

mit der Zeitkonstante $\tau = RC$ erhalten. Aus dieser Differentialgleichung erhält man die Lösung

$$U_C = U_E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4)$$

und somit für die Spannung U_R nach (7)

$$U_R = U_E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

und für den Strom nach dem Ohm'schen Gesetz

$$I = \frac{U_R}{R} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

U_C und I verhalten sich also umgekehrt zueinander. Beim Anlegen der Spannung U_E steigt die Spannung am Kondensator U_C bis es asymptotische U_E erreicht, während I schlagartig steigt und dann langsam sinkt bis es verschwindet. Beim Entladen des Kondensators sinkt die Spannung exponentiell und der Strom wechselt sein Vorzeichen und nähert sich wieder die Null an. Die Zeitkonstante τ gibt an, mit welcher Geschwindigkeit dies passiert. Ein großer τ entspricht einem langsamen Lade/Entlade-Vorgang. Die Zeitkonstante τ lässt sich durch Messung der Halbwertszeit bestimmen gemäß

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (7)$$

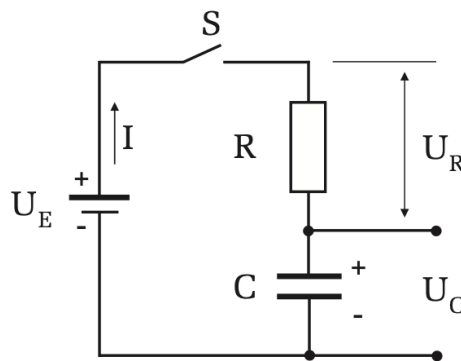


Abbildung 1: Schaltbild eines RC-Glieds

2.2 Impedanz

Wenn wir im RC-Glied eine Wechselspannung statt einer Gleichspannung anlegen, so ändert sich das Verhalten des Stroms und der Spannung dadurch, dass es ständig ein Lade/Entlade-Vorgang erfolgt. Dabei entsteht eine Impedanz $Z = \frac{U}{I}$.

Für einen einzelnen ohmschen Widerstand mit der Wechselspannung $U_E = U_0 e^{i\omega t}$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ der Eingangsspannung und dem gleichphasigen Strom $I = I_0 e^{i\omega t}$ gilt

$$Z_R = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} = R \quad (8)$$

Bei einer einzelnen Kapazität gilt

$$U_E = \frac{Q}{C} \quad | \quad \dot{U}_E = i\omega U_E = \frac{I}{C} \quad (9)$$

$$\rightarrow \frac{U_E}{I} = Z_C = -\frac{i}{\omega C} \quad (10)$$

Das ist eine "imaginäre" Impedanz oder Blindwiderstand, weil dieser keine elektrische Leistung verbraucht. In diesem Fall hängt die Impedanz von der Frequenz auf und wird im Grenzfall für $\omega \rightarrow 0$, entsprechend einem Gleichstrom, unendlich groß und verschwindet für $\omega \rightarrow \infty$. Aufgrund des Faktors $-i$ entsteht eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, nämlich ist der Strom um $\frac{\pi}{2}$ weiter als die Spannung.

Bei einer Spule erhalten wir

$$U_E = L\dot{I} = i\omega LI \quad (11)$$

$$\rightarrow \frac{U_E}{I} = Z_L = i\omega L \quad (12)$$

In diesem Fall ist die Spannung schneller als der Strom um eine Phase von $\frac{\pi}{2}$.

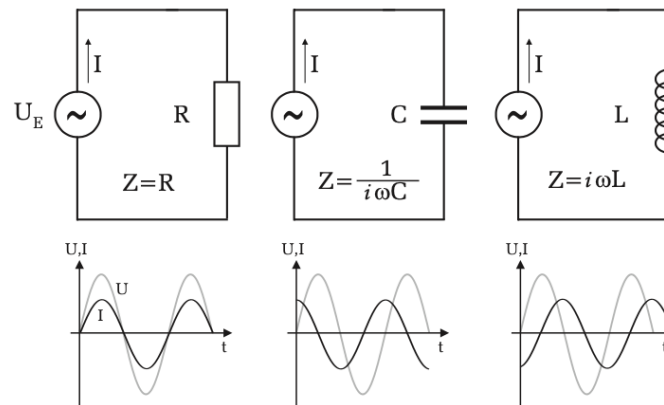


Abbildung 2: Impedanz an einem Widerstand, Kondensator und einer Spule

2.3 Frequenzverhalten von RC-Gliedern

Wir untersuchen wie sich ein RC-Glied mit einer sinusförmigen Anregung verhält. Dafür schauen wir uns als erstes den Fall zweier in Reihe angeordneter Widerständen mit einer Spannungsabmessung am zweiten gemäß Abbildung 3

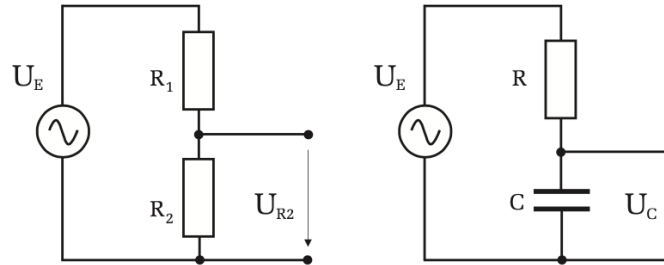


Abbildung 3: Links: Schaltung mit zwei Widerständen in Serie. Rechts: Schaltung mit einem Widerstand und einem Kondensator

Dabei gilt nach dem Ohm'schen Gesetz

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_E \quad (13)$$

also ist die Spannung am Widerstand R_2 gleichphasig und proportionall zur Eingangsspannung, aber kleiner in Amplitude. Die Amplitude ist nur von den Widerständen und nicht von der Frequenz abhängig. Im zweiten Fall ersetzen wir den zweiten Widerstand durch einen Kondensator und dementsprechend wird $R_2 \rightarrow -\frac{i}{\omega C}$:

$$U_C = \frac{Z_C}{R + Z_C} U_E = \frac{-\frac{i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}} U_0 e^{i\omega t} \quad (14)$$

mit dem Betrag und Phase

$$|U_C| = \frac{U_E}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (15)$$

$$\tan \varphi = -\omega RC \quad (16)$$

Daran erkennt man, dass die Amplitude für große Frequenzen immer kleiner wird. Das RC-Glied verhält sich dann wie ein *Tiefpassfilter*, das heißt, nur tiefe Frequenzen kommen durch und hohe Frequenzen werden stark gedämpft.

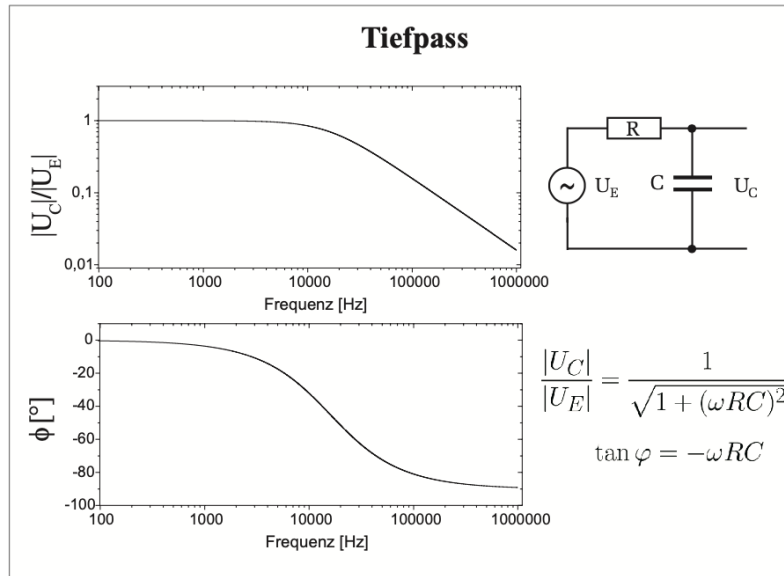


Abbildung 4: Tiefpassfilter

Beim Vertauschen des Kondensators und des Widerstands wird die Amplitude zu

$$|U_R| = \frac{|U_E|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \quad (17)$$

und die Phasenverschiebung zu

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega RC} \quad (18)$$

In diesem Fall kommen nur hohe Frequenzen durch, es handelt sich um einen Hochpassfilter.

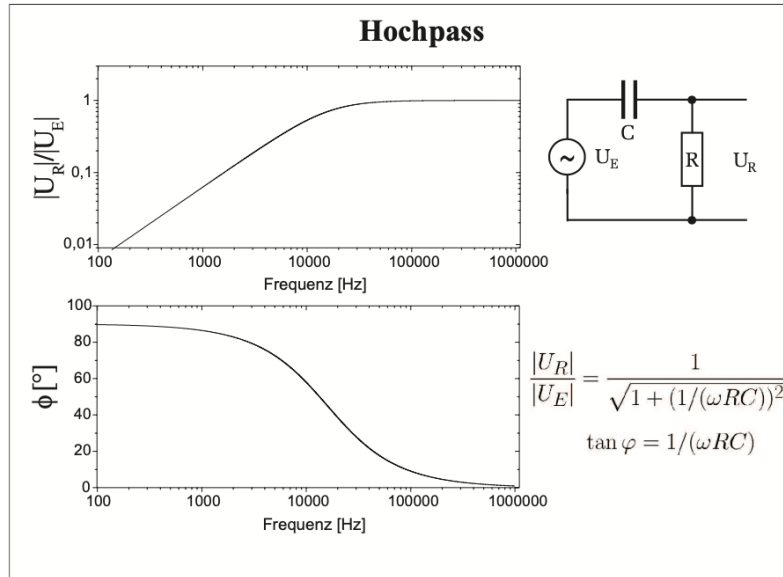


Abbildung 5: Hochpassfilter

Man definiert die Grenzfrequenz eines Filters als

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}. \quad (19)$$

An dieser Stelle ist die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache abgefallen bzw. angestiegen beim Tief- bzw. Hochpass.

2.4 RC-Glied als Differenziator und Integrator

Für gewisse Bedingungen verhält sich ein RC-Glied als das Integral bzw. das Differential des Eingangssignals. Für $\tau \gg T$ handelt es sich um einen Integrator aufgrund folgender Überlegung:

$$Q = CU_A \quad | \quad I = C\dot{U}_A = \frac{U_E - U_A}{R} \quad (20)$$

Daraus folgt:

$$\frac{dU_A}{dt} = \frac{1}{RC}(U_E - U_A) \quad (21)$$

Gilt zusätzlich $U_A \ll U_E$, so ist

$$\frac{dU_A}{dt} \approx \frac{U_E}{\tau} \quad (22)$$

$$U_A \approx \frac{1}{\tau} \int U_E dt \quad (23)$$

Dieses Verhältnis lässt sich anhand Abbildung 6 beobachten.

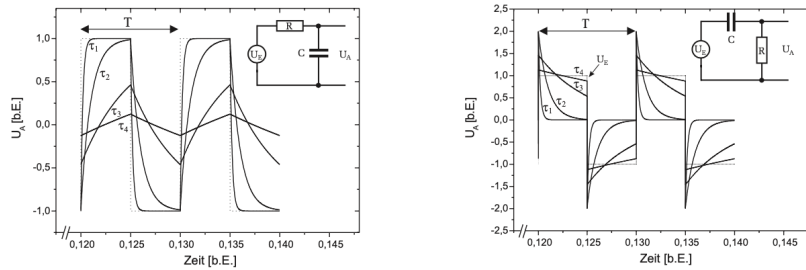


Abbildung 6: RC-Glied als Integrator (links) und Differentiator (rechts)

Tauschen wir Kondensator mit Widerstand zu einem Hochpass, so erhalten wir für den Fall $\tau \ll T$ einen Differentiator. Dabei gilt

$$U_E = U_C + U_R := U_C + U_A \quad | U_C = \frac{Q}{C}, \quad I = \dot{Q} \quad (24)$$

$$\rightarrow U_E = \frac{Q}{C} + U_A = \frac{1}{C} \int I dt + U_A \quad (25)$$

woraus für den Strom folgt

$$I = C \frac{d}{dt}(U_E - U_A) \quad (26)$$

Für kleine $U_A \ll U_E$ entspricht dies also

$$I \approx C \frac{d}{dt} U_E \quad | U_A = RI \quad (27)$$

$$U_A \approx \tau \frac{d}{dt} U_E \quad (28)$$

2.5 Elektrischer Schwingkreis (RLC-Glied)

Bei einem Schwingkreis bestehend aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator entsteht ein Zyklus, wo der Kondensator entladen wird, wodurch der Strom maximal wird und sich um die Spule ein magnetisches Feld entwickelt. Dieses magnetische Feld speichert die Energie um eine Spannung zu induzieren, welche den Kondensator wiederum auflädt. Bei einem

idealen Schwingkreis ohne Widerstand wird keine Energie verloren, aber im realen Fall handelt es sich um einen gedämpften Schwingkreis. Beim Serienschwingkreis was in Abbildung ?? abgebildet gilt

$$U_R + U_C - U_L = 0 \quad (29)$$

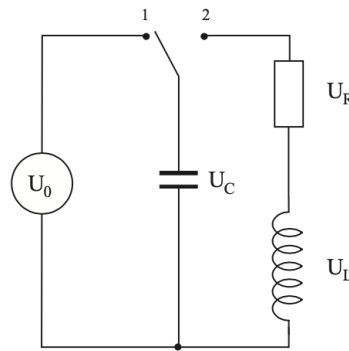


Abbildung 7: Serienschwingkreis

Für $U_R = RI$, $U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_L = -L\dot{I}$ und Differentiation nach der Zeit erhalten wir folgende Differentialgleichung

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \quad (30)$$

Im Idealfall mit $R = 0$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ reduziert sich das Problem auf einen harmonischen Oszillator

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (31)$$

mit der Lösung

$$I = I_0 e^{i(\omega_0 t + \phi)} \quad (32)$$

Unter Berücksichtigung des Widerstands erhalten wir die Lösung eines gedämpften Oszillators:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \left(c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t\right) \right) \quad (33)$$

Dabei ergeben sich ähnlich wie beim mechanischen Oszillator die drei Spezialfällen: Schwingfall, aperiodischer Grenzfall und Kriechfall. Im Schwingfall gilt

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \quad (34)$$

Damit bleibt der Ausdruck in der Exponentialfunktion imaginär und beschreibt deswegen eine Schwingung. In dem Fall ergibt sich für den Strom

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i(\omega_f t + \varphi)} \quad \omega_f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (35)$$

Die Amplitude der Schwingung sinkt mit der Dämpfungskonstante $\delta = \frac{R}{2L}$ gemäß $e^{-\delta t}$. Die Relaxationszeit oder Abklingzeit ist $\tau_r = \frac{1}{\delta}$. δ lässt sich durch das sogenannte logarithmische Dekrement ausrechnen laut

$$\Lambda = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \delta T \quad (36)$$

mit zwei benachbarten Amplituden A_n , A_{n+1} und der Periodendauer T bestimmen.

2.6 Frequenzabhängigkeit eines Schwingkreises, Resonanz

Im Fall, wo der Schwingkreis durch einen externen Sinussignal angeregt wird erhalten wir ähnlicherweise wie beim angeregten RC-Glied frequenzabhängige Impedanzen. Bei einem Serienschwingkreis kann man an den drei verschiedenen Bauelementen die Spannung abmessen, aber da diese in Serie stehen ist zumindest für die Gesamtimpedanz egal was für eine Reihenfolge gegeben ist. Die Gesamtimpedanz ist die Summe der einzelnen Impedanzen der Bauelementen

$$Z_g = Z_R + Z_C + Z_L = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (37)$$

und für den Strom gilt:

$$I = \frac{U_E}{Z_g} = \frac{1}{R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} U_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (38)$$

$$|I| := I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (39)$$

mit der Phasenverschiebung

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (40)$$

Die Amplitude des Stroms ist also frequenzabhängig. Bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (41)$$

gleicht sich die Frequenzabhängigkeit aus und wir erhalten nur

$$I_0(\omega_R) = \frac{U_0}{R} \quad (42)$$

Für die Spannung gemessen an den einzelnen Bauteilen erhalten wir

$$|U_R| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} U_0 \quad (43)$$

$$|U_C| = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} U_0 \quad (44)$$

$$|U_L| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} U_0 \quad (45)$$

Mit einem Serienschwingkreis lässt sich ein Bandpass aufbauen, wodurch nur Frequenzen in einem bestimmten Bereich durchkommen können. Dabei definiert man die Bandbreite $\Delta\omega$ zwischen $\omega_{1,2}$ auf welchen die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache des Maximalwertes abgefallen ist:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} = 2\delta \quad (46)$$

Das heißt, je größer die Dämpfung ist, desto größer ist auch die Bandbreite und der Schwingkreis lässt mehr Frequenzen durch. Man definiert dann die Güte Q des Schwingkreises als

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \quad (47)$$

beziehungsweise mit ω_C , ω_L für eine Abmessung an den anderen Bauteilen. Für diese gilt

$$\omega_C = \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2} \quad (48)$$

$$\omega_L = \sqrt{\omega_R^2 + 2\delta^2} \quad (49)$$

In diesen Fällen ist es interessant, dass die abgegriffene Spannung größer als die Eingangsspannung im Resonanzfall sein kann. Dieses Phänomen nennen wir Resonanzüberhöhung.

2.7 Resonanzkurve eines Parallelschwingkreises

Schaltet man ein RLC Schwingkreis parallel ein, so kommt man an Abbildung 8 erkennen, dass die Amplitude bei der Grenzfrequenz fast auf Null sinkt. Dieses Verhältnis lässt sich berechnen durch die Impedanz des Parallelkreises

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \quad (50)$$

$$Z_P = \left| \frac{1}{\omega L} - \frac{1}{\omega C} \right| \quad (51)$$

Für die Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ wird die Impedanz unendlich hoch und der LC-Parallelkreis wirkt wie ein Isolator. Das heißt, alle Frequenzen um ω_R werden gesperrt, und alle anderen Frequenzen kommen durch. Daher nennt man diese Schaltung auch Bandsperre.

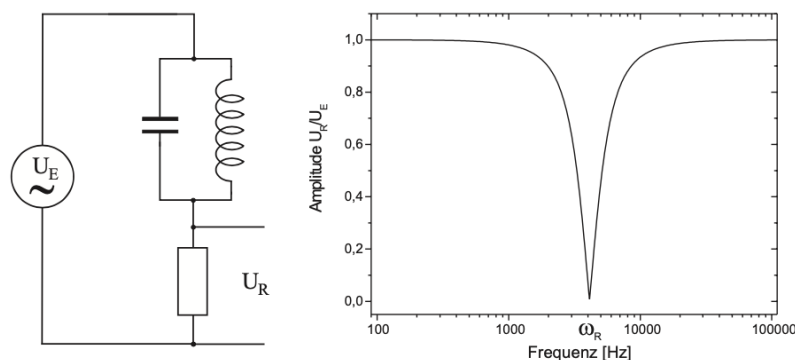


Abbildung 8: Reihenschaltung aus einem Widerstand und einem Parallelschwingkreis

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- PC-gesteuerter Funktionsgenerator
- Analog-Oszilloskop
- Diverse passive Bauteile: Widerstände, Spulen, Kondensatoren, Diode
- Steckbrett zum Aufbau von Schaltungen
- Impedanzwandler mit Netzteil
- Niederfrequenz- Verstärker mit Netzteil
- Ladungsdrahtantenne, Erdleitung
- Zwei Kopfhörer mit unterschiedlicher Impedanz
- Computer

3.2 Aufbau

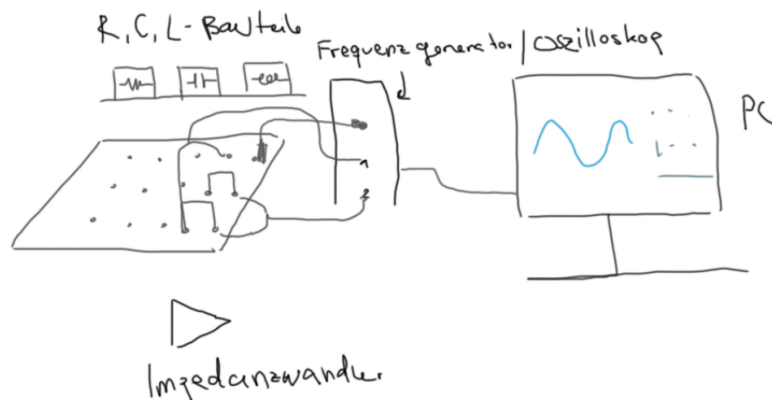


Abbildung 9: Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll Versuch 241, RLC-Glieder
6.12.21
Mikhe Brandt
Juan Provencio

Teilaufgabe 1: Zeitkonstante RC

Eingestellt ist
 $f = 150 \text{ Hz}$
 $V_{pp} = 1 \text{ V}$

Wir messen die Zeitkonstante am Kondensator

Tabelle 1: Halbwertszeit RC-Kombi

Messung	1	2	3
C [nF]	47	470	4,7
R [kΩ]	1	1	10
$T_{1/2}$ [μs]	43 ± 1	580 ± 10	42 ± 1

wir vertauschen $C = 47 \text{ nF}$ und $R = 1 \text{ kΩ}$ und messen die Halbwertszeit:

$T_{1/2} = (42 \pm 1) \mu\text{s}$

Teilaufgabe 2: Integrator und Differentiator

Es wurden verschiedene Funktionen auf ihr Verhalten als Integrator oder Differentiator untersucht bei Änderung des Widerstands in der Schaltung.

Teilaufgabe 3: Frequenz und Phasengang

Es wird per Versuchsanleitung der Circuit Analyzer eingestellt. Am Oszilloskop sieht man mit zunehmender Frequenz. Die Grenzfrequenz wird abgelesen

$f_g = (5,21 \pm 0,10) \text{ kHz}$

Für den Hochpass Filter wird die Messung wiederholt

$f_g = (3,58 \pm 0,10) \text{ kHz}$

Abbildung 10: Messprotokoll 1

Tabelle 2: Phasengang

Frequenz f [kHz]	Δt [ms] ϕ
1	200 ± 10
2	(80 ± 10)
3	40 ± 1
4	28 ± 1
5	20 ± 1
6	130 ± 1
7	110 ± 1
8	$(9,0 \pm 0,1)$
9	$8,2 \pm 0,1$
10	$(5,1 \pm 0,1)$

Teilaufgabe 4: Frequenzgang Schwingkreis

Wir messen bei einem Serienschwingkreis die Resonanzfrequenz f_R

Tabelle 3:

Messung	R [Ω]	f_R [kHz]	Δf [kHz]	V_A [V]
1	1000	$3,93 \pm 0,10$	$4,76 \pm 0,20$	0,94
2	220	$5,75 \pm 0,10$	$1,33 \pm 0,10$	0,73
3	47	$3,73 \pm 0,10$	$0,67 \pm 0,05$	0,55

Effektivwert der ~~$U_E = 1,06$~~ Eingangsspannung

$U_{\text{eff}} \approx 1V$

Teilaufgabe 5: Dämpfungskonstante freier gedämpfter Schwingkreis

Eingestellte Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$

Abbildung 11: Messprotokoll 2

Tabelle 4: Amplitude der Peaks

Messung	Amplitude A_i [V]
1	$1,86 \pm 0,10$
2	$1,22 \pm 0,10$
3	$0,84 \pm 0,10$
4	$0,058 \pm 0,10$
5	$0,41 \pm 0,05$

Mit größerem Widerstand wird die Dämpfung schneller.

Teilaufgabe 5: Resonanzüberhöhung

Wir bestimmen die Resonanzfrequenz bei den 3 Gliedern mit $C = 47 \text{ nF}$; $R = 47 \Omega$; L_1

Tabelle 5: Resonanzfrequenz

Glied	f_R [kHz]
C (blau)	$3,78 \pm 0,10$
L (rot)	$3,98 \pm 0,10$
R (schwarz)	$3,82 \pm 0,10$

Abbildung 12: Messprotokoll 3

Vorläufige Fortsetzung Messprotokoll V241

Teilaufgabe 7: Parallelschwingkreis

Mit dem Aufbau aus Abb. 18 erhalten wir eine Resonanzfrequenz von

$$f = (3,78 \pm 0,05) \text{ kHz}$$

Teilaufgabe 8: Signalformung

Die drei stärksten Signalanteile werden analysiert

Tabelle 6: Signalanteile

Signal	Frequenz f [Hz]	Amplitude A [dBV]
1	$88,59 \pm 10$	$-2,89 \pm 0,20$
2	$(8 \pm 0,02) \cdot 10^3$	$-9,92 \pm 0,20$
3	$(6,81 \pm 0,02) \cdot 10^3$	$-22,80 \pm 0,20$

Signal	f [kHz]	Amplitude A [dBV]
1	$0,08 \pm 0,02$	$-3,0 \pm 0,2$
2	$3,60 \pm 0,05$	$-7,7 \pm 0,2$
3	$8,00 \pm 0,05$	$-8,5 \pm 0,2$

Mit dem Hochpass erhalten wir

Tabelle 7: Frequenzen nach Hochpass

Signal	Amplitude A
1	$-23,9 \pm 0,2$
2	$-10,7 \pm 0,2$
3	$-9,4 \pm 0,2$

Tabelle 8: Frequenzen nach LC-Filter

Signal	Amplitude A
1	$-7,13 \pm 0,2$
2	0 (max)
3	$-23,69 \pm 0,2$

Kantenfilter Luca: ca. $\pm 8, \pm 10$ dBV

Abbildung 13: Messprotokoll 4

Tabella 9: Bandpass filter 1 k Ω

Signal	Amplitude A [dBV]
1	-32,59 \pm 0,2
2	-8,38 \pm 0,2
3	-12,91 \pm 0,2

Tabella 10: Bandpass filter mit 17 Ω

Signal	Amplitude A [dBV]
1	-59,31 \pm 0,2
2	-17,44 \pm 0,2
3	-38,53 \pm 0,2

C. R.

Abbildung 14: Messprotokoll 5

4.2 Auswertung

Im Folgenden wird wenn nicht explizit anders im Python-Skript oder im Protokoll angegeben mit Mathematica's Werkzeugen zur Fehlerrechnung der Fehler der angegebenen Größen nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben. Es wird dabei angenommen, dass jede Variable von den anderen unabhängig ist, und dass der relative Fehler klein ist, sodass eine Näherung erster Ordnung durchgeführt werden kann. Genauere Informationen sind hier zu finden.

4.2.1 Bestimmung der Zeitkonstante des RC -Glieds

Im Versuch haben wir für verschiedene Anordnungen von Kondensatoren und Widerständen die Periodendauer abgelesen. Damit lässt sich die experimentelle Zeitkonstante τ nach Gleichung (7) bestimmen als:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (52)$$

Der theoretische Wert berechnet sich gemäß $\tau = RC$ und der Fehler berechnet sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung. Für die Fehlern der Bauteile wird gemäß Praktikumsanleitung mit 5% für die Widerstände und 10% für die Kondensatoren.

Wir tragen die Ergebnisse und die zugehörigen RC -Kombinationen auf Tabelle 11

Messung	C [10^9 F]	R [$10^3 \Omega$]	$T_{1/2}$ [10^{-6} s]	τ_{exp} [10^{-6} s]	τ_{theo} [10^{-6} s]
1	47,0(50)	1,00(0,05)	43(1)	62,0(1,4)	47(5)
2	470(50)	1,00(0,05)	580(10)	548(14)	470(50)
3	4,7(0,5)	10,0(0,5)	42(1)	60,6(1,4)	47(5)

Tabelle 11: Experimentelle und theoretische Zeitkonstante

4.2.2 RC -Glied als Integrator und Differentiator

Zur Untersuchung der Eigenschaften eines RC -Glieds als Integrator oder Differentiator werden folgende Signale graphisch diskutiert.

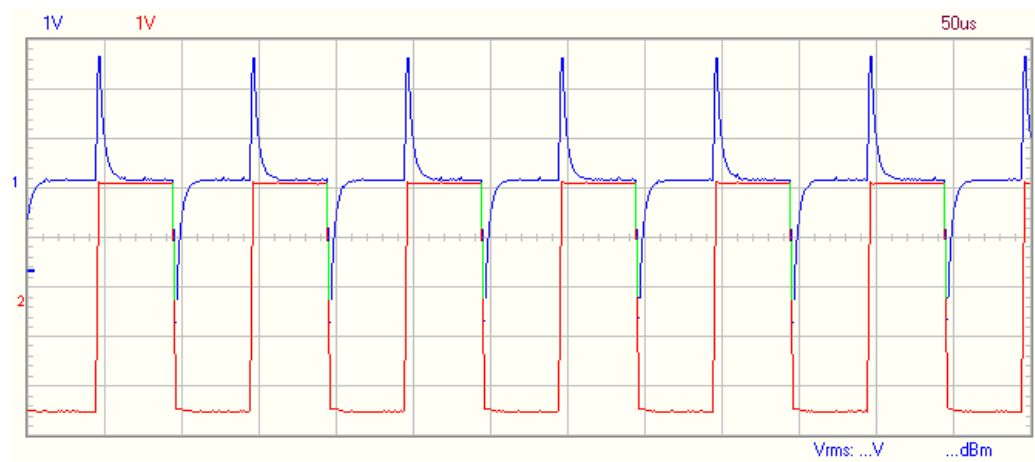


Abbildung 15: Differentiator

Mit **rot** erkennt man den Eingangssignal, ein rechteckiges Signal. Man erkennt die Eigenschaften des RC -Glieds als Differentiator am **blauen** Graph, dieser zeigt einen sehr großen Anstieg an den Wendestellen des Rechtecksignals und wird nahezu Null an den flachen Stellen des Signals.

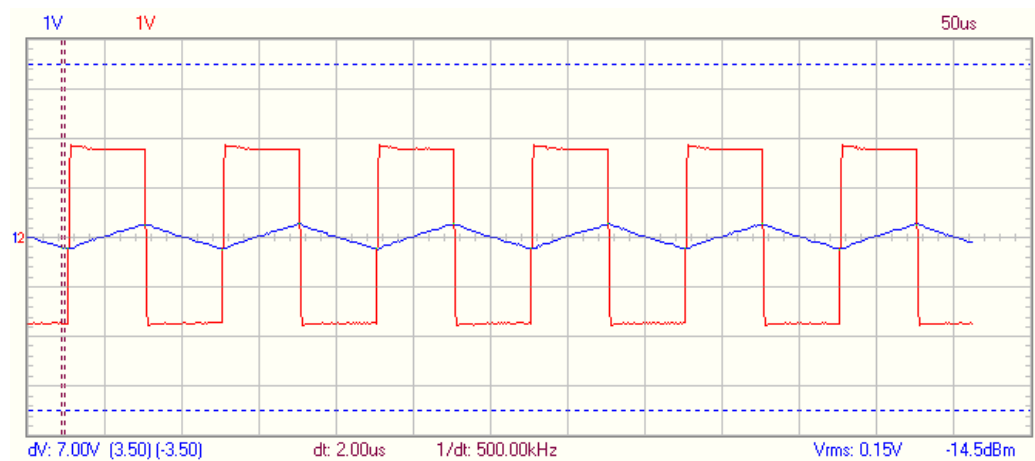


Abbildung 16: Integrator

Hier lässt sich für das Rechtecksignal das Verhältnis als Integrator erkennen, an den Konstanten Stellen ist nämlich das Ausgangssignal linear und wechselt Richtung beim Vorzeichenwechsel des Eingangssignals.

4.2.3 Frequenz- und Phasengang eines RC -Glieds

Mit dem Circuit Analyzer des wird der Frequenz- und Phasengang eines Hoch- und Tiefpassfilters untersucht. Die Tief- und Hochpässe wurden gemäß Versuchsanleitung eingestellt mit $C = 47 \text{ nF}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$.

Für den Tiefpass wird die Grenzfrequenz

$$f_{g,\text{exp, TP}} = 3,21(10) \text{ kHz} \quad (53)$$

abgelesen.

Sein Verhalten ist auf Abbildung 17 zu beobachten.

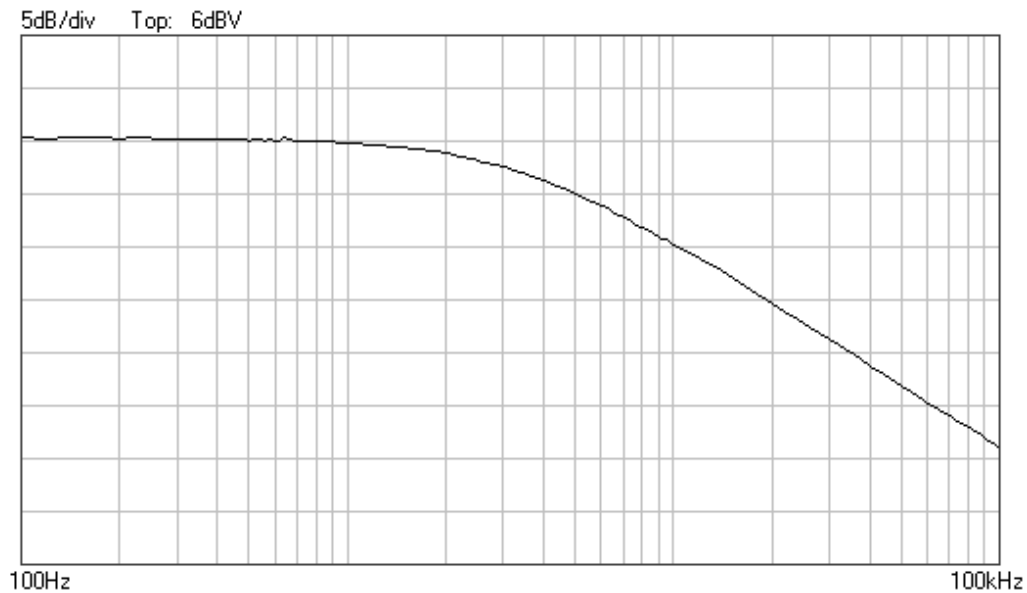


Abbildung 17: Verhalten eines Tiefpassfilters

Für den Hochpass wurde analog die Grenzfrequenz abgelesen als

$$f_{g,\text{exp, HP}} = 3,58(10) \text{ kHz.} \quad (54)$$

Der theoretische Wert der Grenzfrequenz ist gemäß Gleichung (19)

$$f_{g,\text{theo}} = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} = 3,4(5) \text{ kHz} \quad (55)$$

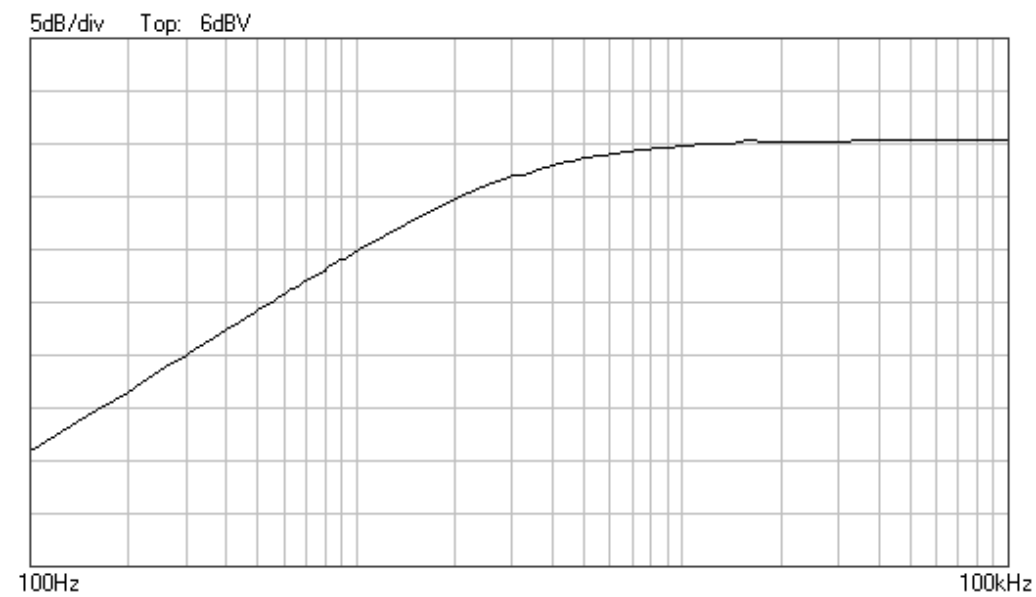


Abbildung 18: Verhalten eines Hochpassfilters

Für den Phasenübergang werden die Daten aus Tabelle 2 im Messprotokoll geplottet.

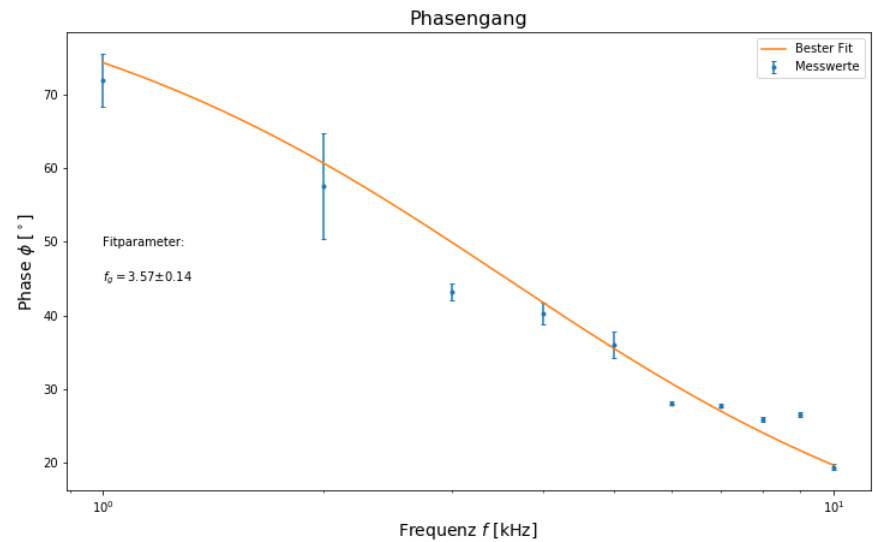


Diagramm 1: Phase gegen Frequenz

4.2.4 Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Induktivität der Spule

Als erstes wollen wir die Induktivität der Spule berechnen. Dies machen wir indem wir Gleichung (41) nach L umformen und mit bekannten Werten die Induktivität ausrechnen. Es wurden wie im vorigen Versuchsteil die Bauteilen $C = 47 \text{ nF}$ und $R = 1 \text{ k}\Omega$ verwendet. Dabei wurden insgesamt in Tabelle 4 des Messprotokolls 3 Messungen durchgeführt, und die Ergebnisse für die Induktivität sind auf Tabelle 12 aufgetragen

Messung	$R [\Omega]$	$f_R [10^3 \text{ Hz}]$	$\Delta f [10^3 \text{ Hz}]$	$L [10^{-3} \text{ H}]$
1	1000(50)	3,93(10)	4,76(20)	35(4)
2	220(11)	3,75(10)	1,33(10)	38(5)
3	47,0(2,4)	3,73(10)	0,67(5)	39(5)

Tabelle 12: Berechnung der Induktivität für verschiedene Anordnungen

Wir nehmen den Mittelwert und dementsprechend den Fehler des Mittelwertes für die endgültige Angabe der Induktivität:

$$L_1 = 0,0373(10) \text{ H} \quad (56)$$

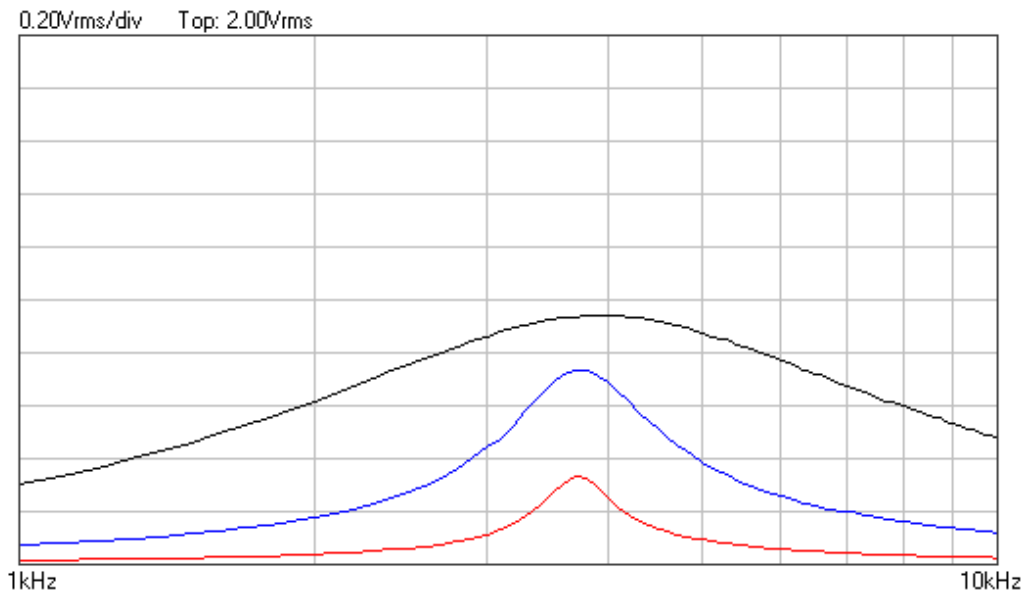


Abbildung 19: Frequenzgang des Schwingkreises für verschiedene Widerstände

Verluste im Schwingungskreis

Um die Verluste mitzuberechnen beziehen wir einen zusätzlichen Widerstand R_V in Serie geschaltet in unsere Anordnung ein. Der Gesamtwiderstand berechnet sich gemäß

$$\Delta\omega = \frac{R + R_V}{L} \quad (57)$$

$$\rightarrow R_{\text{ges}} = R + R_V = L \cdot 2\pi\Delta f \quad (58)$$

Dafür benutzen wir die in Tabelle 12 angegebene Bandbreite Δf und stellen wiederum eine Tabelle auf:

Messung	Δf [10^3 Hz]	L [10^{-3} H]	$R + R_V$ [Ω]	R_V [Ω]
1	4,76(20)	35(4)	1050(120)	50(140)
2	1,33(10)	38(4)	320(50)	100(50)
3	0,67(5)	39(4)	163(23)	116(23)

Tabelle 13: Berechnung des Verlustwiderstands durch Bandbreite und Induktivität

Außerdem berechnen wir den Wert von R_V anhand der Kirchhoffschen Regeln

$$U_A = \frac{R}{R + R_V} U_E \quad (59)$$

$$\rightarrow R_V = R \left(\frac{U_E}{U_A} - 1 \right) \quad (60)$$

Der Effektivwert der Eingangsspannung beträgt $U_E = 1$ V. Mithilfe von Tabelle 3 aus dem Messprotokoll berechnen wir dann wieder den Verlustwiderstand:

Messung	U_A [V]	R_V [Ω]
1	0,94	64(31)
2	0,73	81(11)
3	0,33	95(14)

Tabelle 14: Berechnung des Verlustwiderstands durch Eingang- und Ausgangsspannung

4.2.5 Bestimmung der Dämpfungskonstante eines freien, gedämpften Schwingkreises

Es wird gemäß der Praktikumsanleitung der Versuch aufgebaut, mit $C = 47 \text{ nF}$, $R = 47 \Omega$ und L_1 . Die Induktivität der Spule lässt sich mittels Gleichung (41) bestimmen:

$$L = 0,0387(26) \text{ H} \quad (61)$$

Das logarithmische Dekrement bestimmt man laut Gleichung (36) als

$$\Lambda = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) \quad (62)$$

Im Python-Skript wird dieser inklusive Fehler des Mittelwerts und Standardabweichung angegeben als

$$\Lambda = 0,38(0,07) \quad (63)$$

Der Gesamtwiderstand lässt sich durch Anwendung von Gleichung (46) und Einsetzen von δ nach Gleichung (36). Der Fehler wird ähnlicherweise per Gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt.

$$R_{\text{ges}} = \delta 2L \quad (64)$$

$$= \frac{\Lambda 2L}{T} \quad (65)$$

Dafür benutzen wir das bereits ausgerechnete logarithmische Dekrement, die Induktivität aus (61) und die Periodendauer geben wir mit dem zu $C = 47 \text{ nF}$ und $R = 47 \Omega$ gehörigen Wert für die Frequenz aus Tabelle 12:

$$T = \frac{1}{f_R} \quad (66)$$

Damit ergibt sich insgesamt einen Widerstand von

$$R_{\text{ges}} = 105(20) \Omega \quad (67)$$

Die Dämpfungskonstante lässt sich mittels des Gesamtwiderstands und der Induktivität berechnen gemäß (46) als

$$\delta = 1410(270) \text{ Hz} \quad (68)$$

4.2.6 Resonanzüberhöhung

Der theoretische Wert der Grenzfrequenz berechnet sich nach

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (69)$$

Wir setzen die bereits bestimmte Induktivität und die entsprechende Kapazität $C = 47 \text{ nF}$ ein. Damit erhalten wir

$$\omega_R = 23,44(2) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (70)$$

Für die Grenzfrequenz am Kondensator benutzen wir Gleichung (61):

$$\omega_C = \sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2} \quad (71)$$

$$\Delta\omega_C = \sqrt{\left(\frac{\omega_C \cdot \Delta\omega_C}{\sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2}}\right)^2 + \left(\frac{2\delta \cdot \Delta\delta}{\sqrt{\omega_R^2 - 2\delta^2}}\right)^2} \quad (72)$$

Wir erhalten

$$\omega_C = 21,81(17) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (73)$$

Analog für die Spule mit Gleichung (49) erhalten wir:

$$\omega_L = 24,96(15) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (74)$$

Die experimentellen Werten lassen sich aus dem Messprotokoll ablesen (und auf die Kreisfrequenz mit dem Faktor 2π anpassen.)

$$w_{R,\text{exp}} = 24,0(6) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (75)$$

$$w_{C,\text{exp}} = 23,8(3) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (76)$$

$$w_{L,\text{exp}} = 25,0(6) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (77)$$

4.2.7 Bandsperre

Wir bauen einen Parallelschwingkreis gemäß Abbildung 18 des Praktikums-
skripts und messen die Resonanzfrequenz. Der Verlauf ist auf Abbildung 20
abgebildet.

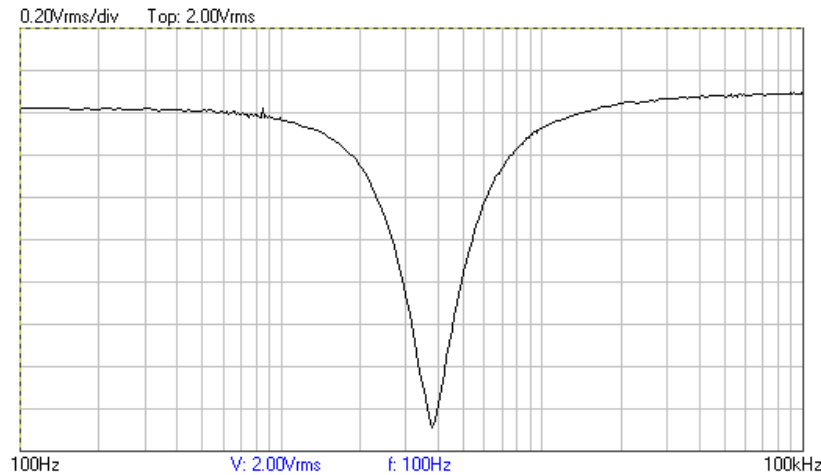


Abbildung 20: Parallelschwingkreis

Experimentell haben wir eine Resonanzfrequenz von

$$\omega_R = 23,8(3) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (78)$$

gemessen. Theoretisch hätten wir mit den gegebenen Einstellungen ($L_1 = 0,037 \text{ H}$, $C = 47 \text{ nF}$) gemäß (41) den Wert:

$$\omega_R = 23,9(4) \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad (79)$$

4.2.8 Signalförmung

Wir haben die drei stärksten Signalanteilen von der gegebenen Signal rausge-
sucht und sie allein (A), mit einem Hochpass (H), Tiefpass (T) und Bandpass
(B) mit verschiedenen Widerständen untersucht. Wir haben die Amplitude in
dBV auf verschiedene Tabellen im Messprotokoll aufgetragen. Diese wandeln
wir als nächstes in die Einheit Volt V um gemäß

$$[V] = 10^{\frac{[\text{dBV}]}{20}} \quad (80)$$

und tragen sie in Tabelle 15 auf.

f [kHz]	A [V]	H [V]	T [V]	B(1 k Ω) [V]	B(47 Ω) [V]
0,08(2)	0,708	0,064	0,440	0,024	0,001
3,60(5)	0,412	0,292	2,820	0,381	0,135
8,00(5)	0,376	0,339	0,065	0,226	0,012

Tabelle 15: Amplitude der stärksten Signalanteile unter verschiedenen Filtern

Die entsprechenden Frequenzspektren sind in folgenden Abbildungen zu beobachten.

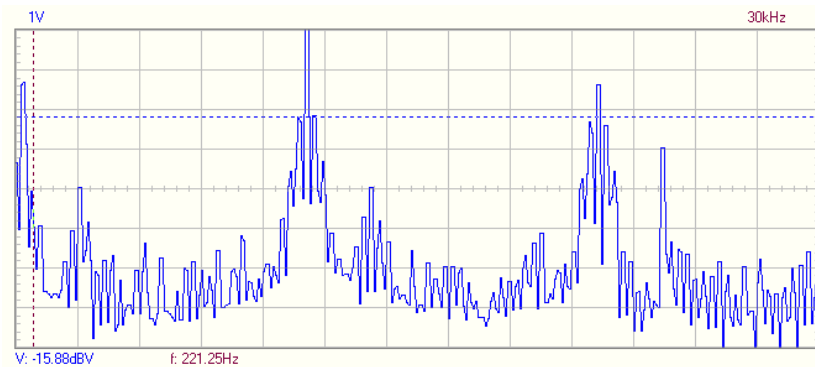


Abbildung 21: Frequenzspektrum für B(1 k Ω)

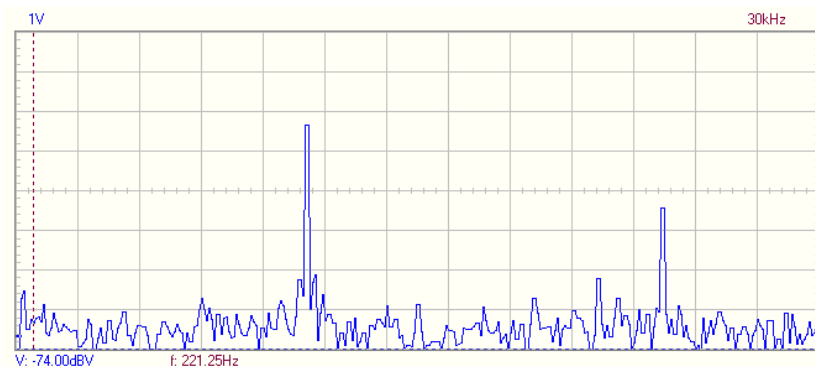


Abbildung 22: Frequenzspektrum für B(47 Ω)

Schließlich wollen wir die Dämpfung aus Aufgabe 3 durch den Hochpassfilter mit der Dämpfung des 100 Hz-Signals vergleichen. Der 100 Hz Signalanteil wurde in dieser Aufgabe auf etwa 9,02% des Originalwertes gedämpft und

mit einer abgeschätzten absoluten Dämpfung von -30 dBV in Aufgabe 3, abgelesen aus 18 erhalten wir eine Dämpfung von etwa 3,16% mit einem 1 σ -Bereich der zwischen (2,51-3,98)% liegt.

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch wurde alles rum um RLC -Aufbauten untersucht. Als erstes haben wir einen Aufbau bestehend aus einem Widerstand R und einem Kondensator C untersucht. Daraus wollten wir die Zeitkonstante τ (4.2.1) theoretisch und experimentell bestimmen, denn sich bei bestimmten Bedingungen und Verhältnissen zu dieser Konstante verhält sich der Ausgangssignal des RC -Glieds wie ein Integrator oder wie ein Differentiator (4.2.2). Wir haben diese Eigenschaften an geeigneten Beispielen untersucht und von dem Oszilloskop ausdrucken lassen (Abbildung 15, 16). Zum Abschluss des RC -Glieds haben wir sein Verhalten als Hoch- oder Tiefpass untersucht (4.2.3), indem wir die Grenzfrequenzen bestimmt haben, ab welche die Spannung über / unter das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache der Eingangsspannung liegt.

Als nächstes haben wir uns mit einem Schwingkreis bestehend aus einem Widerstand R , einem Kondensator C und einer Spule L beschäftigt. Dieser verhält sich nämlich wie ein Bandpassfilter (4.2.4), wo nur Frequenzen in einem bestimmten Bereich durchkommen. Hier haben wir die Induktivität der Spule bestimmt, das hilft uns weiter um beispielsweise die Grenzfrequenzen und die Dämpfungskonstante zu bestimmen. Bei dieser Anordnung muss man zusätzliche Verluste durch einen Verlustwiderstand miteinbeziehen, dafür haben wir bei verschiedenen Anordnungen diesen Verlustwiderstand durch eine Abmessung der Ausgangssamplitude und durch die Induktivität und der Bandbreite bestimmt.

Die gedämpfte Schwingung des Schwingkreises (4.2.5) haben wir uns auch tiefer angeschaut und wieder die Induktivität der Spule und das sogenannte logarithmische Dekrement bestimmt. Dadurch ließ sich schon wieder der Gesamtwiderstand der spezifischen Anordnung berechnen und letztendlich die Dämpfungskonstante.

In den folgenden Teilaufgaben haben wir für den Fall der Resonanzüberhöhung (4.2.6) die Grenzfrequenz an den drei verschiedenen Bauteilen abgelesen und auch theoretisch ausgerechnet. Bei der Bandsperre haben wir einen Parallelschwingkreis (4.2.7) untersucht, welcher sich gegenseitig zum Bandpassfilter verhält, indem er Frequenzen in einem bestimmten Bereich stark dämpft.

Dafür haben wir die Resonanzfrequenz abgelesen und theoretisch ausgerechnet.

Als letztes haben wir 3 Signalanteile aus einer gegebenen Signal des Funktionsgenerators untersucht. Diese waren unterschiedlich stark und wir konnten sie durch die vorhin erworbenen Kenntnisse über Hoch-, Tief und Bandpässe herausfiltern.

5.2 Diskussion

Abschließend wollen wir alle unsere Ergebnisse zusammenfassen und auf bewerten. Dafür fangen wir chronologisch an mit der Bestimmung der Zeitkonstante der verschiedenen RC -Anordnungen (4.2.1).

Tabelle 16: Vergleich zwischen Experimentellen und theoretischen Werten: RC -Zeikonstante

Messung	$\tau_{\text{exp}} [10^{-6} \text{ s}]$	$\tau_{\text{theo}} [10^{-6} \text{ s}]$	$\frac{\Delta\tau_{\text{exp}}}{\tau_{\text{exp}}} [\%]$	$\frac{\Delta\tau_{\text{theo}}}{\tau_{\text{theo}}} [\%]$	σ
1	62,0(1,4)	47(5)	2,3	10,7	2,9
2	548(14)	470(50)	2,6	10,7	1,5
3	60,6(1,4)	47(5)	2,3	10,7	2,6

Hier erkennt man einige Sachen. Als erstes liegen keine Werte innerhalb der Fehlerbereiche von einander. Dies kann möglicherweise daran liegen, dass die experimentellen Fehler unterschätzt wurden. Weiter bemerken wir, dass alle σ -Abweichungen innerhalb eines für uns akzeptablen 3σ -Bereichs liegen, weshalb die Messungen zufriedenstellend sein sollten. Allerdings liegt das an den sehr großzügig abgeschätzten Fehlers des theoretischen Wertes, welcher über 10% des Erwartungswertes beträgt. Als letztes bemerken wir, dass alle experimentell bestimmte Werte über den theoretischen Werten liegen. Obwohl dies zufällig sein kann, denn wir nicht viele Vergleichsmessungen haben, nur 3, deutet das darauf hin, dass es vielleicht ein systematischer Fehler vorliegt, weshalb der experimentelle Wert konsistent höher ist als die Theorie. Möglicherweise ist der Widerstand mit der Zeit größer als angegeben, und außerdem wurden Widerstände durch die Kabeln und den weiteren Aufbau nicht berücksichtigt.

In der zweiten Aufgabe (4.2.2) haben wir qualitativ beobachtet, wie sich ein RC -Glied als Integrator und Differentiator verhält. Auf Abbildung 15 und 16 ließ sich dieses Verhältnis beobachten. Hier nicht abgebildet sind

die mehreren Signalen die auch untersucht wurden, aber zum Verständnis beigetragen haben.

Als nächstes haben wir den Frequenz und Phasengang des RC -Glieds (4.2.3) mit dem Circuit-Analyzer beobachtet und die Grenzfrequenz vom Tiefpass und Hochpass bestimmt. Dafür haben wir einen Vergleich mit dem theoretisch zu erhaltender Wert

Tabelle 17: Vergleich zwischen Experimentellen und theoretischen Werten: Grenzfrequenz Hoch- und Tiefpass

	$f_{g,\text{exp}}$ [kHz]	$f_{g,\text{theo}}$ [kHz]	$\frac{\Delta f_{g,\text{exp}}}{f_{g,\text{exp}}}$ [%]	$\frac{\Delta f_{g,\text{theo}}}{f_{g,\text{theo}}}$ [%]	σ	$\sigma_{\text{HP, TP}}$
HP	3,58(10)	3,4(5)	2,8	14,8	0,35	2,61
TP	3,21(10)	3,4(5)	3,1	14,8	0,37	

Die Abweichungen zwischen den theoretischen und experimentellen Werten ist deutlich kleiner als 1σ , und die experimentellen Werten liegen beide innerhalb des Fehlerbereichs der theoretischen Werten, andersrum ist aber bei keinem der Fall. Dies liegt daran, dass der Fehler der theoretischen Grenzfrequenz von den großen Fehlern der Widerstände und Kapazitäten abhängt, weshalb der relative Fehler verhältnismäßig zu den Experimenten so immens ist. Außerdem stimmen die Grenzfrequenzen für Hoch und Tiefpassfilter nicht in ihren Fehlerbereiche überein, aber weichen um einen akzeptablen $2,61\text{-}\sigma$ Bereich voneinander ab, was für eine angemessene Durchführung des Experiments spricht, obwohl es noch Verbesserungsmöglichkeiten gibt.

Für den Phasenübergang der selben Aufgabe wurden die Werte geplottet und eine trigonometrische Kurve (\arctan) angepasst. Allerdings zeigt sich dieser Fit im Python-Code nach einer χ^2 -Analyse ungeeignet zu sein, mit einer Fitwahrscheinlichkeit von 0%. Trotzdem liegt die vom Fit vorausgesagte Grenzfrequenz nur 0,05 vom Hochpass und $2,1\sigma$ -Bereiche vom Tiefpass entfernt.

Als nächstes haben wir beim Frequenzgang eines Serienschwingkreises (4.2.4) die Induktivität der Spule L_1 bestimmt, indem wir verschiedene Widerstände eingebaut haben und mit der gemessenen Bandbreite verschiedene Induktivitäten berechnet, woraus wir einen Mittelwert bilden konnten. Diesen Wert vergleichen wir mit der in weiteren Abschnitten berechneten Induktivität. Zu dieser Aufgabe haben wir zusätzlich die Verluste des Schwingkreises analysiert. Hierzu haben wir den Verlustwiderstand durch die Messung der Band-

breite und der Induktivität berechnet und durch eine Überlegung über die Kirchhoffsche Regeln.

Tabelle 18: Vergleich zwischen Experimentellen und theoretischen Werten: Verlustwiderstand

Messung	$R_{V,\text{exp}} [\Omega]$	$R_{V,\text{theo}} [\Omega]$	$\frac{\Delta R_{V,\text{exp}}}{R_{V,\text{exp}}} [\%]$	$\frac{\Delta R_{V,\text{theo}}}{R_{V,\text{theo}}} [\%]$	σ
1	50(140)	64(31)	280	48	0,1
2	100(50)	81(11)	50	13,4	0,37
3	116(23)	95(14)	20	15	0,78

Insbesondere die ersten Messungen mit einem großen Anfangswiderstand liefern gewaltige relative Fehlern, weil man zur Bestimmung des Verlustwiderstands den Fehler des Gesamtwiderstands und den des eingebauten Widerstands mitberücksichtigen muss, was zu überproportionalen Fehlern führt. Auf diesem Grund zeigen sich hier ganz kleine σ -Abweichungen. Genauere Bauteile hätten diese riesige Fehler kleiner machen können.

Zusammen mit der Bestimmung der Dämpfungskonstante eines freien, gedämpften Schwingkreises 4.2.5 wurde wieder die Induktivität bestimmt. Diesen Wert vergleichen wir mit dem aus Abschnitt 4.2.4.

Tabelle 19: Vergleich zwischen zwei Messungen: Frequenzgang und Dämpfungskonstante

	Frequenzgang	Dämpfungskonstante	σ
$L_1 [\text{H}]$	0,0373(10)	0,0387(26)	0,5
$R_{\text{ges}} [\Omega]$	163(23)	105(20)	1,9
	142(15)		1,5

Bei der Messung der Induktivitäten stehen die relativen Fehler nicht hervor, die befinden sich noch im einstelligen Bereich. Außerdem ist die σ -Abweichung ganz in Ordnung und die Fehlerbereiche der beiden Messungen überschneiden sich, es lässt sich in diesem Fall auf keine große Fehlerquellen hindeuten. Bei den Gesamtwiderständen finden wir immernoch eine kleine Abweichung innerhalb des akzeptablen Bereichs. Auf die relativen Fehlern wurde schon in der vorigen Aufgabe eingegangen. Es lassen sich keine signifikante Fehlerquellen besprechen.

Bei der Resonanzüberhöhung 4.2.6 stehen die theoretisch und experimentell bestimmten Grenzfrequenzen, abgegriffen Am Kondensator (C), Spule (L) und Widerstand (R) zu Verfügung.

Tabelle 20: Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Werten: Grenzfrequenz

	Experimentell	Theoretisch	Rel. Fehler (exp) [%]	Rel. Fehler (theo) [%]	σ
$\omega_C [10^3 \text{ s}^{-1}]$	23,8(3)	21,81(17)	1,2	0,77	5,7
$\omega_L [10^3 \text{ s}^{-1}]$	25,0(6)	24,96(15)	2,4	0,6	0,06
$\omega_R [10^3 \text{ s}^{-1}]$	24,0(6)	23,44(2)	2,5	0,09	0,93

In diesem Fall lässt sich ausnahmsweise eine inakzeptable Abweichung von über 5 σ -Bereiche zwischen dem experimentellen und dem theoretischen Wert der Grenzfrequenz am Kondensator. An den relativen Fehlern fällt aber bei dieser Messung nichts besonderes auf. Man kann womöglich vermuten, dass der Fehler zu klein abgeschätzt wurde, aber dies würde dann in Widerspruch zu den weiteren zwei Messungen stehen, denn mit ähnlichen oder deutlich kleineren Fehlern hat man trotzdem gute Ergebnisse erzielt. Die einzige Messung, bei der die Werten völlig innerhalb der Fehlerbereiche der anderen liegen ist die Abmessung der Grenzfrequenz an der Spule. Dies zeigt entsprechend auch die kleinste Abweichung. Eine mögliche Erklärung liegt allerdings an der Messung der Grenzfrequenz am Widerstand, denn letztendlich basieren die anderen zwei auf diese, und diese liegt in der Mitte der Genauigkeit zwischen Spule und Kondensator. Dadurch, dass die Grenzfrequenz (C, L) antisymmetrisch bezüglich der Dämpfungskonstante sind, beeinflusst die Über- oder Unterschätzung der Grenzfrequenz (R) überproportional eine der beiden Messungen. Wir können davon ausgehen, dass die theoretische Grenzfrequenz (R) unterschätzt wurde, denn die absolute Differenz zwischen experimentellen und theoretischen Werten beim Kondensator fast 50 Mal größer ist als die absolute Differenz bei der Spule.

Bei der Bandsperre (4.2.7) wurde nur eine Grenzfrequenz gemessen und theoretisch bestimmt. Beide Werte weichen um 0,2 σ -Bereiche voneinander ab, und besitzen einstellige relative Fehlern. Außerdem befinden sich beide Werte innerhalb der Fehlerbereichen des anderen und es lässt sich auf keine systematischen Fehlern zurückschließen.

Schließlich wurden 3 Signaleanteile unter dem Einfluss von verschiedenen Filtern untersucht. Dies wollen wir qualitativ besprechen. Man kann beob-

achten, dass beim Hochpassfilter die Amplitude der niedrigen Signalen um einen Faktor 10^{-1} und etwa $1/2$ reduziert wurde, wobei der hochfrequente Signalanteil fast unbeeinflusst wurde. Über den Tiefpass lässt sich sehr klar bemerken, dass die hohen Frequenzen rausgefiltert wurden. Über die mittlere Frequenzen lassen sich keine Schlussfolgerungen ziehen, da bei der Messung nicht angemessen abgelesen wurde. Als Kommentar wurde vom Tutor "ca. + 8, + 10 dBV" geschrieben, weshalb bei der Anpassung auf Volts eine deutlich höhere Amplitude als die Eingangsamplitude erscheint. Wir begnügen uns an dieser Stelle auf die zwei Extremen zu diskutieren. Die niederen Frequenzen wurden trotzdem stark gedämpft, aber nur um einen Faktor von etwa $1/2$. Beim Bandpassfilter ($1\text{ k}\Omega$) lässt sich erkennen, dass die Randfrequenzen stark gedämpft wurden, aber beim Bandpass mit 47Ω sind diese kaum noch zu erkennen. Diese Verhältnisse lassen sich am besten anhand der normierten Verhältnissen der Amplituden mit dem 4kHz-Signalanteil als Referenz. Diese sind im Anhang im Python-Skript zu finden.

Insgesamt lässt sich über eine gute Durchführung des Versuchs reden, denn die meisten Vergleiche nur wenig voneinander abweichen. Die großen relativen Fehlern liegen außerdem an den zu Verfügung gestellten Bauteilen, woran wir nur wenig Einfluss haben. Es konnte mit den verschiedenen Teilaufgaben sehr gut die Funktionsweise von verschiedenen Filtern, Geräten und elektrische Anordnungen lernen.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik B.Sc..

Anhang

IX: Auswertung

In [2]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2
```

1 Bestimmung der Zeitkonstante des RC-Glieds

In [3]:

```
# Tabelle 1
C_1 = np.array([47, 470, 4.7]) # 10^-9 F
sig_C_1 = 0.1 * C_1
R_1 = np.array([1, 1, 10]) # 10^3 Ohm
sig_R_1 = 0.05 * R_1
T_12_1 = np.array([43, 380, 42]) # 10^-6 s
sig_T_12_1 = np.array([1, 10, 1]) # 10^-6 s

T_12_vert = 42 # 10^-6 s
sig_T_12_vert = 1

# Experimentelle Zeitkonstante:
tau_1 = T_12_1 / log(2)
sig_tau_1 = sig_T_12_1 / log(2)

# Theoretische Zeitkonstante:
tau_theo_1 = C_1 * R_1
sig_tau_theo_1 = sqrt( (sig_C_1 * R_1) ** 2 + (C_1 * sig_R_1) ** 2)

print('Experimentelle Zeitkonstante:')
print('tau_exp =', np.round(tau_1,1))
print('      +/-', np.round(sig_tau_1,1))
print('Theoretische Zeitkonstante:')
print('tau_theo =', tau_theo_1)
print('      +/-', np.round(sig_tau_theo_1,0))
```

```
Experimentelle Zeitkonstante:
tau_exp = [ 62.  548.2  60.6]
      +/- [ 1.4 14.4  1.4]
Theoretische Zeitkonstante:
tau_theo = [ 47. 470.  47.]
      +/- [ 5. 53.  5.]
```

3 Frequenz- und Phasengang eines RC-Glieds

In [4]:

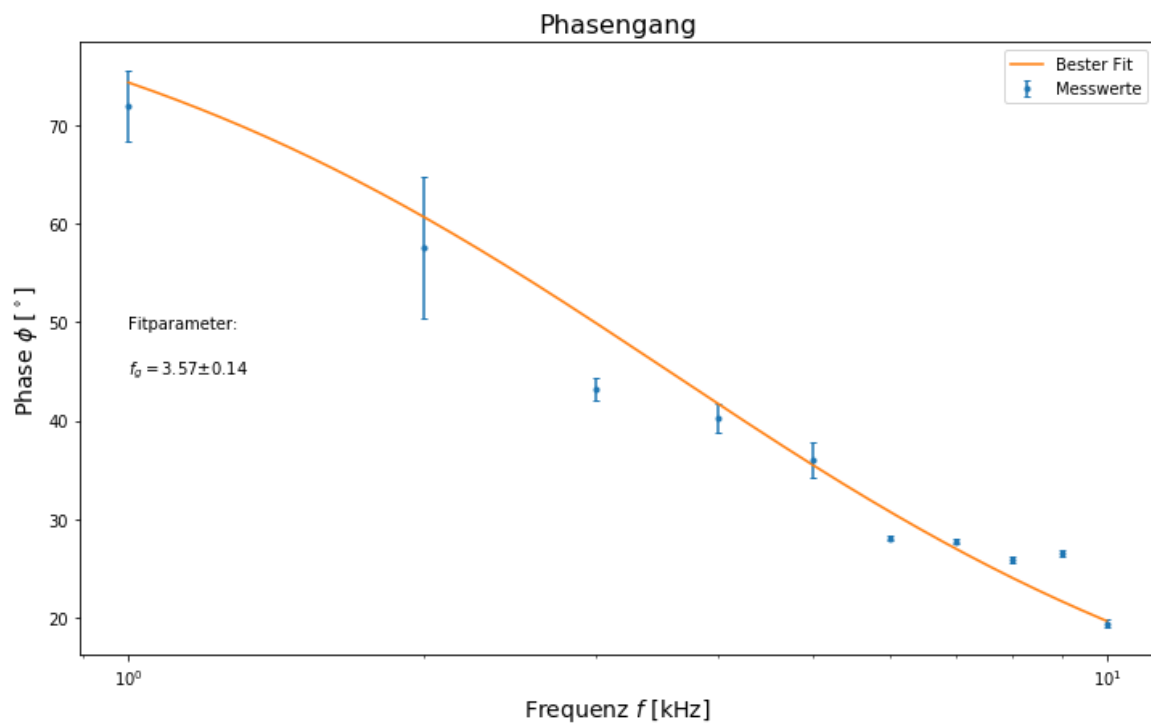
```
# Tabelle 2
f_2 = np.arange(1,11,1) # 10^3 Hz
D_t_2 = np.array([200, 80, 40, 28, 20, 13, 11, 9, 8.2, 5.4])
sig_D_t_2 = np.array([10, 10, 1, 1, 1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1])
phi_2 = 360 * f_2 * D_t_2 / 1000
sig_phi_2 = 360 * f_2 * sig_D_t_2 / 1000

# Fit
def arctan(f, f_g):
    return np.arctan(f_g / f) * (360 / (2 * np.pi)) # f_g ist Grenzfrequenz

popt, pcov = curve_fit(arctan, f_2, phi_2, sigma = sig_phi_2)
x = np.arange(1,10,0.01)

# Plot
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.errorbar(f_2, phi_2, yerr = sig_phi_2, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messwerte')
plt.plot(x, arctan(x, *popt), label = 'Bester Fit')
plt.title('Phasengang', size = 16)
plt.xlabel('Frequenz $f$ [kHz]', size = 14)
plt.ylabel('Phase $\phi$ [$^\circ$]', size = 14)
plt.text(1, exp(3.9), 'Fitparameter:')
plt.text(1, exp(3.8), '$f_g = $' + str(np.round(popt[0],2))
        + '$\pm$' + str(np.round(sqrt(pcov[0,0]),2)))
plt.xscale('log')

plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('images/241/V241Diagramm1.png')
plt.show()
```



In [5]:

```
fg = pop[0]
sig_fg = sqrt(pcov[0,0])
print('Grenzfrequenz f_g =', np.round(fg,2), '+/-', np.round(sig_fg,2))
```

Grenzfrequenz $f_g = 3.57 \pm 0.14$

In [6]:

```
# Güte des Fits
chi2_ = np.sum((arctan(f_2, *popt) - phi_2) ** 2 / sig_phi_2 ** 2)
dof = len(phi_2) - 1 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red = chi2_/dof

print("chi2 =", chi2_)
print("chi2_red =", chi2_red)

prob = np.round(1 - chi2.cdf(chi2_,dof),2) * 100
print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%")
```

```
chi2 = 475.8161605269691
chi2_red = 52.868462280774345
Wahrscheinlichkeit = 0.0 %
```

In [7]:

```
# Güte des Fits Muster
#chi2_ = np.sum((fit_func(x, *popt) - y) ** 2 / sig_y ** 2)
#dof = len(y) - n #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
#chi2_red = chi2_/dof

#print("chi2 =", chi2_)
#print("chi2_red =", chi2_red)

#prob = np.round(1 - chi2.cdf(chi2_,dof),2) * 100
#print("Wahrscheinlichkeit =", prob, "%")
```

4 Frequenzgang eines Serienschwingkreises

Induktivität

In [8]:

```
R_4 = np.array([1000, 220, 47]) # Ohm
sig_R_4 = 0.05 * R_4
f_R_4 = np.array([3.93, 3.75, 3.73]) # kHz
sig_f_R_4 = 0.1 * np.ones(3)
Delta_f = np.array([4.76, 1.33, 0.67]) # kHz
sig_Delta_f = np.array([0.2, 0.1, 0.05])
C_4 = 47 # nF
sig_C_4 = 5

L = 1e3 / ((2 * np.pi * f_R_4) ** 2 * C_4) # H
sig_L = 1e3 / (2 * np.pi) ** 2 * sqrt((sig_f_R_4 / (f_R_4 ** 3 * C_4)) ** 2
                                       + (sig_C_4 / (f_R_4 ** 2 * C_4 ** 2)) ** 2)

L_mean = np.mean(L)
sig_L_mean = 1 / sqrt(3) * np.std(L)

print('Induktivität:')
print('L =', np.round(L,3))
print(' +/-', np.round(sig_L,3))
print('L_mean =', np.round(L_mean,9), ' +/-', np.round(sig_L_mean,9))
```

```
Induktivität:
L = [0.035 0.038 0.039]
+/- [0.004 0.004 0.004]
L_mean = 0.037318738 +/- 0.000994435
```

Verlustwiderstand

In [9]:

```
# Mit Bandbreite und Induktivität
RR_V = 2 * np.pi * Delta_f * L * 1e3 # Ohm
R_V = RR_V - R_4
sig_RR_V = sqrt( (2 * np.pi * sig_Delta_f * L) ** 2
                 + (2 * np.pi * Delta_f * sig_L) ** 2 ) * 1e3
sig_R_V = sqrt(sig_RR_V ** 2 + sig_R_4 ** 2)

print('Gesamtwiderstand:')
print('R + R_V =', np.round(RR_V,0))
print('      +/-', np.round(sig_RR_V,0))
print('Verlustwiderstand:')
print('R_V =', np.round(R_V,-1))
print('      +/-', np.round(sig_R_V,-1))
```

```
Gesamtwiderstand:
R + R_V = [1044.  320.  163.]
          +/- [122.  43.  22.]
Verlustwiderstand:
R_V = [ 40. 100. 120.]
      +/- [130.  40.  20.]
```


In [10]:

```
# Mit Eingang- und Ausgangsspannung
U_A = np.array([0.94, 0.73, 0.33]) # V
U_E = 1 # V

R_V_2 = R_4 * (U_E / U_A - 1)
sig_R_V_2 = sqrt( (sig_R_4 * (U_E / U_A - 1)) ** 2 )
print('Verlustwiderstand:')
print('R_V =', np.round(R_V_2,0))
print(' +/-', np.round(sig_R_V_2,0))
```

```
Verlustwiderstand:
R_V = [64. 81. 95.]
      +/- [3. 4. 5.]
```

5 Bestimmung der Dämpfungskonstante

In [11]:

```
# Induktivität
C_5 = 47 #nF
sig_C_5 = 5
w_R = 2 * np.pi * f_R_4[2] # Grenzfrequenz aus 4
sig_w_R = 2 * np.pi * sig_f_R_4[2]

L_5 = 1 / (w_R ** 2 * C_5) * 1e3
sig_L_5 = 1e3 * sqrt( (2 * sig_w_R / ((w_R ** 3) * C_5)) ** 2 + (sig_C_5 / (w_R **
2 * C_5 ** 2)) ** 2 )
print('Die Induktivität der Spule beträgt')
print('L =', np.round(L_5,4), '+/-', np.round(sig_L_5,4)) # 10^3 H
```

```
Die Induktivität der Spule beträgt
L = 0.0387 +/- 0.0046
```

In [12]:

```
# Werte Tabelle 4
A = np.array([1.86, 1.22, 0.84, 0.58, 0.41])
sig_A = np.array([.1, .1, .1, .1, .05])
D_A = np.array([1.86 - 1.22, 1.22 - 0.84, 0.84 - 0.58, 0.58 - 0.41])

# Logarithmisches Dekrement
Lambda_list = np.array([])
sig_Lambda = np.array([])
for i in range(4):
    Lambda_list = np.append(Lambda_list, log(A[i] / A[i+1]))
    sig_Lambda_list = np.append(sig_Lambda, sqrt((sig_A[i] / A[i]) ** 2
                                                  + (sig_A[i+1] / A[i+1]) ** 2))

# Sag hallo, falls du dir das eigentlich antust und den code liest lol
Lambda = np.mean(Lambda_list)
sig_Lambda = 1 / 3 * sqrt(np.sum(sig_Lambda_list ** 2)) # Gauss
std_Lambda = np.std(Lambda) / np.sqrt(len(Lambda_list)) # Standardabweichung
Lambda_err = sqrt(sig_Lambda ** 2 + std_Lambda ** 2) # Gesamtfehler
print('Das logarithmische Dekrement beträgt:')
print('Lambda = ' + str(np.round(Lambda,2)) + ' +/- '
      + str(np.round(sig_Lambda,2)))
```

Das logarithmische Dekrement beträgt:
Lambda = 0.38 +/- 0.07

In [13]:

```
# Gesamtwiderstand
R_5 = 47 # Ohm
sig_R_5 = 2.4
R_ges = 2 * Lambda * L_5 * f_R_4[2] * 1e3 # Ohm
sig_R_ges = sqrt((2 * Lambda_err * L_5 * f_R_4[2]) ** 2
                 + (2 * Lambda * sig_L_5) ** 2) * 1e3
R_V_5 = R_ges - R_5
sig_R_V_5 = sqrt(sig_R_ges ** 2 + sig_R_5 ** 2)

print('Gesamtwiderstand:')
print('R_ges =', np.round(R_ges, 0), '+/-', np.round(sig_R_ges, 0))
print('Verlustwiderstand:')
print('R_V =', np.round(R_V_5, 0), '+/-', np.round(sig_R_V_5, 0))
```

Gesamtwiderstand:
R_ges = 109.0 +/- 21.0
Verlustwiderstand:
R_V = 62.0 +/- 21.0

In [14]:

```
# Dämpfungskonstante
delta = R_ges / (2 * L_5) # Hz
sig_delta = sqrt( (sig_R_ges / (2 * L_5)) ** 2
                  + (R_ges * sig_L_5 / (2 * L_5) ) ** 2)

print('Dämpfungskonstante:')
print('delta = ', np.round(delta,-1), '+/-' , np.round(sig_delta,-1))
```

Dämpfungskonstante:
delta = 1410.0 +/- 270.0

6 Resonanzüberhöhung

In [34]:

```
# omega_R
omega_R_theo = 1 / sqrt(L_5 * C_5) * 1e3 * sqrt(10) * 10e-3 #sqrt(H nF)^-1 = 10^3 s
qrt(10) Hz

sig_omega_R_theo = omega_R_theo * sqrt((0.5 * sig_C_5 / C_5) ** 2
                                       + (0.5 * sig_L_5 / L_5) ** 2) * 10e-3

# omega_C
delta_C = R_4[2] / (2 * L_5) * 10e-3
sig_delta_C = sqrt( (sig_R_4[2] / (2 * L_5)) ** 2
                   + (R_4[2] * sig_L_5 / (2 * L_5) ) ** 2) * 10e-3

omega_C_theo = sqrt(omega_R_theo ** 2 - 2 * delta_C ** 2)
sig_omega_C_theo = 1 / sqrt(omega_R_theo ** 2 - 2 * delta_C ** 2) * sqrt(
    (omega_R_theo * sig_omega_R_theo) ** 2
    + (2 * delta_C * sig_delta_C) ** 2)

# omega_L
omega_L_theo = sqrt(omega_R_theo ** 2 + 2 * delta_C ** 2)
sig_omega_L_theo = 1 / sqrt(omega_R_theo ** 2 + 2 * delta_C ** 2) * sqrt(
    (omega_R_theo * sig_omega_R_theo) ** 2
    + (2 * delta_C * sig_delta_C) ** 2)

print('Theoretische Kreisgrenzfrequenz:')
print('omega_R_theo =', np.round(omega_R_theo,2), '+/-' ,
      np.round(sig_omega_R_theo,2))
print('omega_C_theo =', np.round(omega_C_theo,2), '+/-' ,
      np.round(sig_omega_C_theo,2))
print('omega_L_theo =', np.round(omega_L_theo,2), '+/-' ,
      np.round(sig_omega_L_theo,2))
```

Theoretische Kreisgrenzfrequenz:
omega_R_theo = 23.44 +/- 0.02
omega_C_theo = 21.81 +/- 0.17
omega_L_theo = 24.96 +/- 0.15

7 Bandsperre

In [20]:

```
# omega_bs
omega_bs_theo = 2 * np.pi * f_R_4.mean() * 100
sig_omega_bs_theo = 2 * np.pi * sqrt( (1 / sqrt(3) * np.std(f_R_4)) ** 2
                                         + (1 / 3 * sig_f_R_4.mean()) ** 2) * 100

print('Kreisfrequenz Bandsperre:')
print('omega_bs_theo =', np.round(omega_bs_theo,-1), '+/-',
      np.round(sig_omega_bs_theo,-1))
```

Kreisfrequenz Bandsperre:
omega_bs_theo = 2390.0 +/- 40.0

8 Signalförmung

In [17]:

```
# Umrechnung von dBV in V
#U[V] = 1V * 10 ** (L_U[dBV] / 20)

# Frequenzen entsprechend Signal 1, 2, 3
f_8 = np.array([0.08, 3.60, 8]) # kHz
sig_f_8 = np.array([.02, .02, .05])

# Werte Tabelle 6 (reines Signal), angepasst
A_1 = 10 ** (1 / 20 * np.array([-3, -7.7, -8.5]))

# Werte Tabelle 7 (Hochpass), angepasst
A_2 = 10 ** (1 / 20 * np.array([-23.9, -10.7, -9.4]))

# Werte Tabelle 8 (Tiefpass / LC), angepasst
A_3 = 10 ** (1 / 20 * np.array([-7.13, 9, -23.69])) # mittlerer Wert fehlt, ca +8,
+10 dBV nach Angaben des Tutors

# Werte Tabelle 9 (Bandpass), angepasst
A_4 = 10 ** (1 / 20 * np.array([-32.59, -8.38, -12.91]))

# Werte Tabelle 10, Bandpass mit R = 47 Ohm
A_5 = 10 ** (1 / 20 * np.array([-59.31, -17.44, -38.53]))

# Verhältnis zum reinen Signal
V_2 = A_2 / A_1
V_3 = A_3 / A_1
V_4 = A_4 / A_1
V_5 = A_5 / A_1

print("Verhältnisse zum reinen Signal:")
print(V_2, 'H')
print(V_3, 'T')
print(V_4, 'B (1kOhm)')
print(V_5, 'B (47Ohm)')
print()

#Zum Vergleich der Schaltungen werden alle Verhältnisse so "normiert", dass das 4kHz-Signal ungedämpft erscheint
V_2_n = V_2 / V_2[1]
V_3_n = V_3 / V_3[1]
V_4_n = V_4 / V_4[1]
V_5_n = V_5 / V_5[1]

print('"Normierte" Verhältnisse zum reinen Signal:')
print(V_2_n, 'H')
print(V_3_n, 'T')
print(V_4_n, 'B (1kOhm)')
print(V_5_n, 'B (47Ohm)')
```

Verhältnisse zum reinen Signal:

```
[0.09015711 0.70794578 0.90157114] H
[0.62158425 6.83911647 0.17398027] T
[0.03315126 0.92469817 0.60186626] B (1kOhm)
[0.00152933 0.3258367 0.03151374] B (470hm)
```

"Normierte" Verhältnisse zum reinen Signal:

```
[0.12735031 1. 1.27350308] H
[0.09088663 1. 0.025439 ] T
[0.03585089 1. 0.65087861] B (1kOhm)
[0.00469353 1. 0.09671637] B (470hm)
```

In [45]:

```
# Vergleich zwischen 100 Hz Signal und Aufgabe 3
print("100Hz-Signal nach Dämpfung durch Hochpass: "+str(round(100 * V_2[0],2))+"%."
)

# Schätze Dämpfung durch Zählung der Kästchen in Abbildung 17 (-30(2) dBV)
v_A3 = 10 ** (-30 / 20)
print("Dämpfung durch Hochpass in Aufgabe 3 für 100Hz-Signale "+str(round(100*v_A3,
2))+"%.")

# Vergleich
# 1-sigma Intervall
V_A3_1 = 10 ** (-32 / 20)
V_A3_2 = 10 ** (-28 / 20)
print("Das 1 Sigma Intervall geht von " + str(round(100*V_A3_1,2)) + "% bis "+str(r
ound(100 * V_A3_2,2)) + "%.")
```

100Hz-Signal nach Dämpfung durch Hochpass: 9.02%.

Dämpfung durch Hochpass in Aufgabe 3 für 100Hz-Signale 3.16%.

Das 1 Sigma Intervall geht von 2.51% bis 3.98%.

In []: