11. Übungsblatt zur Linearen Algebra I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

11.1 Aufgabe 1: Peer Feedback

Siehe Rückseite

11.2 Aufgabe 2

Geg.:

- Sei K ein Körper
- $\mathrm{char}(K) \neq 2$
- $n = 2m + 1 \; m \in \mathbb{N}$
- $A \in \mathrm{Mat}(n, n; K)$
- $A^T = -A$

$$\begin{aligned} \det A^T &= \det A && (1) \\ \det A &= (-1)^n \det A && (2) \\ &\iff \det A^T = (-1)^n \det A && (3) \\ &\iff \det A^T = -\det A && (4) \\ &\iff \det A = -\det A && (5) \\ &\iff 2 \det A = 0 && (6) \\ &\implies \det A = 0 && (7) \end{aligned}$$

11.3 Aufgabe 3: Vandermonde-Matrix

Geg.:

- $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $a, ..., z$ alle verschieden und $x \in K$
- $V = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^n \end{pmatrix}$

Unter elementare Zeilenoperationen bleibt die Determinante invariant, also können wir sagen:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \longrightarrow z^{1i}(-1) \tag{8}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 0 & a_1 - x & a_1^2 - x^2 & \dots & a_1^n - x^n \\ 0 & a_2 - x & a_2^2 - x^2 & \dots & a_2^n - x^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_n - x & a_n^2 - x^2 & \dots & a_n^n - x^n \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & a_1 - x & a_2 - x & \dots & a_n - x \\ x^2 & a_1^2 - x^2 & a_2^2 - x^2 & & a_n^2 - x^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x^n & a_1^n - x^n & a_2^n - x^n & \dots & a_n^n - x^n \end{vmatrix} \tag{10}$$

Falls $x = a_i$ mit $1 \leq i \leq n$, dann ist eine ganze Spalte gleich null, und dementsprechend auch die Determinante.

11.4 Aufgabe 4

a) Geg.: $f(X) = X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 - 3X + 6 \in \mathbb{R}[X]$

Nach Proposition 9.8 kann jedes Polynom als ein Produkt dargestellt werden:

$$p(X) = \left(\prod_{i=1}^{m} (X - X_i)^{v_i} \right) q(X) \tag{11}$$

Durch Raten erhalten wir die Nullstellen: $X_1 = 1$

Wir führen dann eine Polynomdivision aus:

$(X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 - 3X + 6):(X - 1) = X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$
$(X^5 - X^4)$
$-X^4 + 2X^3$
$-(-X^4 + X^3)$
$X^3 - 4X^2$
$-(X^3 - X^2)$
$-3X^2 - 3X$
$-(-3X^2 + 3X)$
$-6X + 6$
$-(6X - 1)$
0

Analog raten wir die Nullstellen $X_2 = -1$ und $X_3 = 2$. Durch Polynomdivision erhalten wir dann:

$$(X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6) : (X - 2) = X^3 + X^2 + 3X + 3 \tag{12}$$

und

$$(X^3 + X^2 + 3X + 3) : (X + 1) = X^2 + 3 \tag{13}$$

Der letztere Ausdruck hat keine Nullstellen mehr in $\mathbb{R}$, also ist schließlich unsere Faktorisierung:

$$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 - 3X + 6 = (X + 1)(X - 1)(X - 2)(X^2 + 3) \tag{14}$$