Blatt 8 **13. Dezember 2021**

Experimentalphysik 3

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor: Tobias Hammel

1. Reflexion und Transmission an Potentialstufe (herab)

a) Strom
Wir gehen von einer ganz allgemeinen de-Broglie-Welle aus, dann finden wir:

$$\Psi(x) = \exp\{-iEt/h\} \cdot A\exp\{ikx\} \tag{1}$$

Den Strom können wir mittels der Herleitung im Skript bestimmen per:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\boldsymbol{\nabla}\Psi - (\boldsymbol{\nabla}\Psi^*)\Psi) && (2)\\
&= \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - (\frac{\partial\Psi^*}{\partial x})\Psi\right) && (3)\\
&= \frac{\hbar}{2mi}\left(2|A|^2 ik\right) && (4)\\
\iff A &= \sqrt{\frac{jm}{\hbar k}}\exp\{i\phi\} && (5)
\end{aligned}$$

b) Nun möchten wir das Potential betrachten und eine Lösung für die 'Treppe herunter' finden. Hierzu betrachten wir die negativen und positiven Bereiche der x-Achse getrennt.

- $x < 0$
  Hier liegt ein Potential vor. Da wir aus der Vorlesung wissen, dass zeitliche und räumliche Betrachtung gewissermaßen separieren, müssen wir die Schroedingergleichung nur eindimensional räumlich lösen:

$$E\Phi_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Phi_1(x)}{\partial x^2} + V_0\Phi_1(x) \tag{6}$$

Mit einem Ansatz der Form e^{kx} lässt sich die Lösung ermittelt. Man findet:

$$\Phi_2(x) = A\exp\{ikx\} + B\exp\{-ikx\} \tag{7}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} \tag{8}$$

Streng genommen sieht unser k auf Basis des gewählten Ansatz etwas anders aus ('$\pm i$' als Vorfaktor), aber wesentlich ist der notierte Teil.

- $x \geq 0$
  Hier vereinfacht sich die Schroedingergleichung, da das Potential verschwindet. Man erhält also:

$$E\Phi_2(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Phi_2(x)}{\partial x^2} \tag{9}$$

  Die Lösung folgt wie oben

$$\Phi_2(x) = C\exp\{ik'x\} + D\exp\{-ik'x\} \tag{10}$$

$$k' = \sqrt{\frac{E2m}{\hbar^2}} \tag{11}$$

  Nun ist aber zu berücksichtigen, dass die Welle in die Unendlichkeit läuft. Sie wird also an keinem Punkt gespiegelt, es folgt also $D = 0$. Exakt!

Wir müssen nun die Lösungen für beide Bereiche vereinigen. Hier haben wir folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$A + B = C \qquad \Phi_1(0) \stackrel{!}{=} \Phi_2(0) \tag{12}$$

$$ikA - ikB = ik'C \text{ Eindeutigkeit Impuls} \tag{13}$$

$$\iff kA - kB = k'C \tag{14}$$

Einsetzen ineinander führt zu

$$B = \frac{k-k'}{k+k'}A \tag{15}$$

$$C = \frac{2Ak}{k+k'} \tag{16}$$

c) Reflexionsfaktor
Aus Aufgabenteil a) kennen wir die allgemeine Beschreibung des Stroms.

In diese setzen wir nun die gefundenen Amplituden A und B der Teilchen ein und bilden den Quotienten:

$$R = \frac{j_{ein}}{j_{ref}} \tag{17}$$

$$= \frac{|A|^2}{|B|^2} \tag{18}$$

$$= \frac{|A|^2}{\left(\frac{(k-k')A}{k+k'}\right)^2} \tag{19}$$

$$= \frac{(k+k')^2}{(k-k')^2} \tag{20}$$

d) Transmissionsfaktor
Die Rechung ist analog zu oben mit j_{aus} anstatt von j_{ref}, man findet:

$$T = \frac{(k+k')^2}{4kk'} \tag{21}$$

Der Vollständigkeit wegen ergänzen wir noch, wir hier insofern von der Lösung abweichen als dass wir R^{-1} bzw. T^{-1} bestimmt haben, wenn man die Notation der Lösung nutzt. ✓

Aufpassen! Das hier ist mehr als Notation, weil für eure R,T nicht notwendigerweise R+T=1 gelten muss, wenn ihr es aufschreibt wie in (20), (21). Die A Welle geht rein und R wird über das Verhältnis mit B und T über das Verhältnis mit C bestimmt!

3/3

2. Harmonischer Oszillator, Energiespektrum und Zeitentwicklung

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im Potential eines harmonischen Oszillators mit Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

a) Aus der Vorlesung entnehmen wir die Zeitunabhängige Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi(x) \tag{22}$$

Nun führen wir die geforderte Koordinatentransformation

$$x \longrightarrow x' = \xi := \frac{x}{a_{\text{ho}}} \tag{23}$$

durch. Um die Gleichung umzuschreiben, bestimmen wir

$$x = \xi a_{\text{ho}} \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a_{\text{ho}}}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{25}$$

Somit ist die Gleichung

$$E\psi(\xi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a_{\text{ho}}^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\psi(\xi) + \frac{m\omega^2\xi^2 a_{\text{ho}}^2}{2}\psi(\xi) \tag{26}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\psi(\xi) + \frac{m\omega^2\xi^2\hbar}{2m\omega}\psi(\xi) \tag{27}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\psi(\xi) + \frac{\omega\xi^2\hbar}{2}\psi(\xi) \tag{28}$$

$$\Longleftrightarrow \quad E\psi(\xi) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2\right)\psi(\xi) \tag{29}$$

b) Für die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung sei nun der Ansatz

$$\psi(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j \tag{30}$$

gegeben. Dessen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial \xi} = -\xi\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi^j + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j j \xi^{j-1} \tag{31}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(-\xi\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j + \sum_{j=0}^{\infty}a_j j\xi^{j-1}\right) \tag{32}$$

Da, wie in der Aufgabenstellung angegeben, die Summe nur über endlich viele Elemente läuft, können wir Additions- und Multiplikationsregeln anwenden:

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(-a_j\xi^{j+1} + a_j j\xi^{j-1}\right)\right) \tag{33}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(-\xi^{j+1} + j\xi^{j-1}\right)\right) \tag{34}$$

In der zweiten Ableitung erhalten wir dann:

$$\frac{\partial^2\psi(\xi)}{\partial\xi^2} = -\xi\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(-\xi^{j+1} + j\xi^{j-1}\right)\right) \tag{35}$$

$$+\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(-(j+1)\xi^j + j(j-1)\xi^{j-2}\right)\right) \tag{36}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\xi^{j+2} - j\xi^j\right)\right) \tag{37}$$

$$+\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(-(j+1)\xi^j + j(j-1)\xi^{j-2}\right)\right) \tag{38}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\xi^{j+2} - j\xi^j - (j+1)\xi^j + j(j-1)\xi^{j-2}\right)\right) \tag{39}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\xi^{j+2} - (2j+1)\xi^j + j(j-1)\xi^{j-2}\right)\right) \tag{40}$$

✓

$$\partial^2_\psi(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\xi^2-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j - 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\xi\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}\xi^j + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{41}$$

$$+\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}\xi^j \tag{42}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\xi^2-1)a_j\xi^j - \underbrace{2(j+1)a_{j+1}\xi^{j+1}}_{=2ja_j\xi^j} + (j+2)(j+1)a_{j+2}\xi^j\right]\right) \tag{43}$$

✓

Dies setzen wir nun in die oben hergeleitete Schrödingergleichung des Oszillators ein:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\hbar\omega}{2}\left(\xi^2 - \partial_\xi^2\right)\psi - E\psi \tag{44}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[\xi^2 a_j\xi^j - (\xi^2-1)a_j\xi^j + 2ja_j\xi^j - (j+2)(j+1)a_{j+2}\xi^j\right.\right. \tag{45}$$

$$\left.\left. - \frac{2E}{\hbar\omega}a_j\xi^j\right]\right) \tag{46}$$

Da der Gesamtausdruck gleich Null ist, muss die Summe verschwinden. Durch einen Koeffizientenvergleich können wir dann alle Ausdrück mit ξ^j gleich Null setzen:

$$0 \stackrel{!}{=} (2j+1)a_j - (j+2)(j+1)a_{j+2} - \frac{2E}{\hbar\omega}a_j \tag{47}$$

$$a_{j+2} = \frac{2j+1-\frac{2E}{\hbar\omega}}{(j+2)(j+1)}a_j \tag{48}$$

Damit diese Reihe konvergiert, muss es ein j geben, so dass die Reihe abbricht und aufhört. Dies passiert, wenn der Nenner verschwindet. Es muss also gelten:

$$2j+1 = \frac{2E}{\hbar\omega} \tag{49}$$

$$E = \hbar\omega\frac{2j+1}{2} \tag{50}$$

Da j eine natürliche Zahl ist, folgt dass für die Zustände $|n\rangle$ die Energie quantisiert ist.

c) Diese Zustände und die Beschreibung des Oszillators haben wir mit der Schrödingergleichung für die Energieeigenzustände hergeleitet. Um einen gesamten Zustand zu beschreiben, muss man folglich nur mit $\exp\{iEt/\hbar\}$ multiplizieren, wobei E durch Teilaufgabe b) bereits bestimmt ist:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\{-iE_nt/\hbar\}c_n\,|n\rangle \tag{51}$$

Setzt man nun noch E_n ein und zieht die nicht von n abhängigen Terme aus der Summe, so findet man:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\{-i\omega t/2\} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-i\omega n t\} c_n |n\rangle \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

Sehr schön:)

3/3