

STUDY GUIDE  
PHYSIK

---

Theoretische Physik I

---

WS 20/21, Hebecker

Juan  
Ezz  
Mit großer Hilfe von:  
Marius Mangold

26. Februar 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathe</b>	<b>1</b>
1.1	Die Kunst des Integrierens . . . . .	1
1.1.1	Free real estate . . . . .	1
1.1.2	Integration durch u-Substitution . . . . .	1
1.1.3	Partielle Integration . . . . .	2
1.2	Taylor-Entwicklung . . . . .	4
1.3	Kronocker-Delta und Levi-Civita-Symbol . . . . .	7
1.3.1	Einsteinsche Summenkonvention . . . . .	7
1.3.2	Kronecker-Delta . . . . .	9
1.3.3	Levi-Civita-Symbol . . . . .	10
1.4	Differentialgleichungen . . . . .	14
1.4.1	Intro zu Differentialgleichungen . . . . .	14
1.4.2	Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	18
1.5	Kurvenintegrale . . . . .	33
1.6	Flächenintegrale . . . . .	38
1.7	Volumenintegrale . . . . .	41
1.8	Satz von Stokes . . . . .	44
1.9	Satz von Gauß . . . . .	52
1.10	Matrizenrechnung . . . . .	57
1.10.1	Grundwissen . . . . .	57
1.10.2	Drehmatrizen . . . . .	65
<b>2</b>	<b>Physik</b>	<b>67</b>
2.1	Harmonischer Oszillator . . . . .	67
2.1.1	Harmonischer Oszillator $[\mathbb{R}]$ . . . . .	67
2.1.2	Harmonischer Oszillator $[\mathbb{C}]$ . . . . .	68
2.2	Impulserhaltung . . . . .	74
2.3	Konservative Kraftfelder . . . . .	75
2.4	Der Euklidische Raum . . . . .	78
2.5	Galilei-Transformationen . . . . .	81
2.6	Affiner Raum . . . . .	81
2.7	Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	82
2.7.1	Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum . . . . .	82
2.7.2	Beschleunigte, nichtrotierende Bezugssysteme . . . . .	84
2.7.3	Um kleine Winkel <i>rotierte</i> Koordinatensysteme . . . . .	84
2.7.4	Rotierende Koordinatensysteme . . . . .	88
2.8	Zentralkraftproblem . . . . .	91

---

2.8.1	Zweikörperproblem . . . . .	91
2.8.2	Zentralkraftproblem . . . . .	92
2.9	Zerfalls und Stoßprozesse . . . . .	104
2.9.1	Stoßparameter und Streuwinkel . . . . .	104
2.9.2	Wirkungsquerschnitt . . . . .	108
2.9.3	Rutherford-Streuung . . . . .	111
2.9.4	Teilchenzerfall u.A. . . . .	115
2.10	Gravitation ausgedehnter Körper . . . . .	115
2.10.1	Potential einer Massenverteilung . . . . .	115
2.10.2	Gravitationspotential einer Kugelschale . . . . .	116
2.10.3	Satz von Gauß und Gravitation . . . . .	118
2.10.4	Feldgleichung für das Gravitationspotential . . . . .	121

# Kapitel 1

## Mathe

### 1.1 Die Kunst des Integrierens

#### 1.1.1 Free real estate

$$\begin{aligned}\text{i. } \int \sin ax \, dx &= \frac{-\cos ax}{a} + C \\ \text{ii. } \int e^{\frac{x}{a}} dx &= ae^{\frac{x}{a}} \\ \text{iii. } \int \sqrt{x+a} \, dx &= \frac{2\sqrt{(x+a)^3}}{3} \\ \text{iv. } \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} \, dx &= \sqrt{x^2+a} \\ \text{v. } \int \frac{x^2}{e^x} \, dx &= \frac{-(x^2+2x+2)}{e^x} \\ \text{vi. } \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx &= x - \arctan x \\ \text{vii. } \int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} \\ \text{viii. } \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{\arctan \frac{x}{a}}{a} \\ \text{ix. } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left( \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} \right) \text{ für } a < 0 \text{ und } b^2-ac > 0 \\ \text{x. } \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} &= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \left[ \ln \left( x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \right) - \ln \left( x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c} \right) \right]\end{aligned}$$

#### 1.1.2 Integration durch u-Substitution

U-Substitution ist die "Kettenregel für Integrale.

1 Wir suchen ein "u", das unser Integral einfacher macht

↪ Normalerweise die "innere Funktion" [Daher die "Kettenregel" für Integrale]

↪ Die Ableitung *muss* im Integral enthalten sein.

Alternativ: Du musst die Ableitung im Integral *suchen*

2 Wir formen von  $\int x \, dx \mapsto \int u \, du$

Es dürfen keine  $x$  mehr darin enthalten sein!

3 Wir integrieren

4 Wir setzen "u" zurück ein

### Beispiel

1.

$$\int (x^2 + 2)^{12} 2x \, dx \quad | u = x^2 + 2; \, du = 2x \, dx \quad (1.1.1)$$

$$dx = \frac{du}{2x} \quad (1.1.2)$$

$$\rightarrow \int u^{12} 2x \frac{du}{2x} = \int u^{12} du \quad (1.1.3)$$

$$= \frac{u^{13}}{13} + C \quad | u = x^2 + 2 \quad (1.1.4)$$

$$= \frac{(x^2 + 2)^{13}}{13} + C \quad (1.1.5)$$

2.

$$\int x^2 (x^3 - 4)^5 \, dx \quad | u = x^3 - 4; \, du = 3x^2 \, dx \quad (1.1.6)$$

$$dx = \frac{du}{3x^2} \quad (1.1.7)$$

$$\rightarrow \int x^2 u^5 \frac{du}{3x^2} = \int \frac{u^5}{3} \, du = \frac{1}{3} \int u^5 \, du \quad (1.1.8)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C \quad | u = x^3 - 4 \quad (1.1.9)$$

$$= \frac{(x^3 - 4)^6}{18} + C \quad (1.1.10)$$

3.

$$\int \cos x \sin x e^{\sin x} \quad | u = \sin x; \, du = \cos x \, dx \quad (1.1.11)$$

$$\rightarrow \int u e^u \, du = (x - 1)e^x + C \quad (1.1.12)$$

## 1.1.3 Partielle Integration

Partielle Integration ist die "Produktregel" für Integrale. Wieso?

1 Produktregel:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

2 Integrieren:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

3 Nach  $\int f(x)g'(x) dx$  umformen:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

4 Umbenennung zum Verständnis:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

$$\hookrightarrow u = f(x); \quad du = f'(x) dx$$

$$v = g(x); \quad dv = g'(x) dx$$

So werden wir mit der folgenden Formel arbeiten:

$$\hookrightarrow \int u dv = u v - \int v du$$

Wir wählen "u", sodass wir "v" besser integrieren können, und "u" besser ableiten können.

### Beispiel

1.

$$\int x e^x dx \quad | u = x; \quad du = 1 dx \quad [\text{besser zum Ableiten}] \quad (1.1.13)$$

$$v = \int e^x dx; \quad dv = e^x dx \quad [\text{schöner zum Integrieren}] \quad (1.1.14)$$

$$\hookrightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx \quad (1.1.15)$$

$$= x e^x - e^x + C \quad (1.1.16)$$

2.

$$\int x^3 \ln x dx \quad | u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \quad (1.1.17)$$

$$v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}; \quad dv = x^3 dx \quad (1.1.18)$$

$$\hookrightarrow \int x^3 \ln x dx = \ln(x) \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} \quad (1.1.19)$$

$$= \ln(x) \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^3}{4} dx \quad (1.1.20)$$

$$= \ln(x) \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16} + C \quad (1.1.21)$$

3.

$$\int x^2 \sin 2x \, dx \quad | u = x^2 ; \quad du = 2x dx \quad (1.1.22)$$

$$v = \int \sin 2x \, dx = \frac{-\cos 2x}{2} \quad (1.1.23)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \sin 2x \, dx = \frac{-x^2 \cos 2x}{2} - \int \frac{-\cos 2x}{2} 2x \, dx \quad (1.1.24)$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x \, dx \quad | u = x ; \quad du = dx \quad (1.1.25)$$

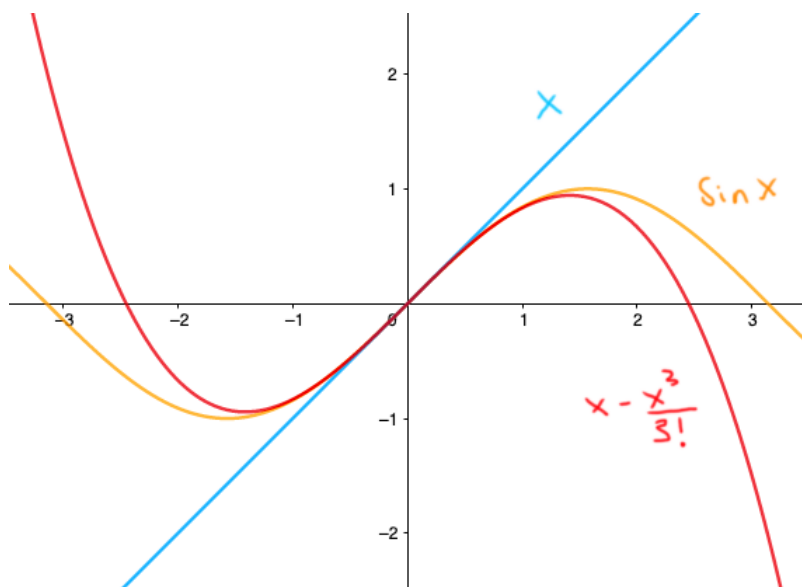
$$v = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{x} \quad (1.1.26)$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx \quad (1.1.27)$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{-\cos 2x}{2} \right) \quad (1.1.28)$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \quad (1.1.29)$$

## 1.2 Taylor-Entwicklung



Taylor-Entwicklungen helfen uns "komplizierten" Funktionen durch ganz normale Potenzreihen anzunähern.

→ Eine Potenzreihe hat die Form:

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n \quad (1.2.1)$$

Bei vielen Fällen sind unendliche Taylor-Reihen *exakt* gleich den Funktionen, die wir annähern wollen. Bei allen anderen sind sie aber eine ganz gute Näherung für "kleine" Werte  $x$ .

Man "entwickelt" eine Taylor-Reihe um eine gewünschte Stelle  $x_0$ , oft ist  $x_0 = 0$ .

→ Eine Taylor-Reihe hat die Form:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.2.2)$$

Woher kommt denn diese Formel?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots \quad \rightarrow f(0) = a_0 \quad (1.2.3)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad \rightarrow \frac{f'(0)}{1!} = a_1 \quad (1.2.4)$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \dots \quad \rightarrow \frac{f''(0)}{2!} = a_2 \quad (1.2.5)$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} = 6a_3 + 24a_4 x + \dots \quad \rightarrow \frac{f'''(0)}{3!} = a_3 \quad (1.2.6)$$

So können wir deutlich einen Muster erkennen, mit welchem wir  $a_n$  bestimmen können, und zwar:

$$\rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Für Anschaulichkeit wurde jetzt um die Stelle  $x_0 = 0$  entwickelt, aber das Muster ist gültig für jeden beliebigen  $x_0$

### Beispiel

1.

$$f(x) = \sin x \quad \text{um } x_0 = 0$$

$$| f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x \dots$$

$$(1.2.7)$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{f(0)}{0!} = 0, \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1 \quad (1.2.8)$$



$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-1}{3!} \quad (1.2.9)$$

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{5!} \dots \quad (1.2.10)$$

$$\hookrightarrow f(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1.2.11)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$1. \text{ Die Reihe } \textit{alterniert} \quad (1.2.12)$$

$$2. \text{ Die Reihe überspringt jeden nächsten } n \quad (1.2.13)$$

$$3. \text{ Beginnt mit Potenz ersten Grades} \quad (1.2.14)$$

$$\hookrightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (1.2.15)$$

2.

$$f(x) = \frac{-\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} \quad \text{um } x_0 = \frac{2\beta}{\alpha}$$

$$|f'(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\beta}{x^3} \quad (1.2.16)$$

$$f''(x) = \frac{-2\alpha}{x^3} + \frac{6\beta}{x^4} \quad (1.2.17)$$

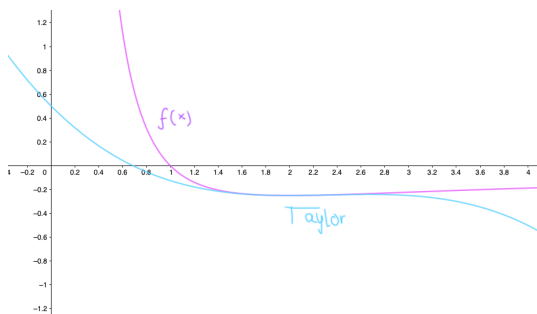
$$\hookrightarrow a_0 = \frac{f(x_0)}{0!} = \frac{-\alpha^2}{4\beta} \quad (1.2.18)$$

$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} = 0 \quad (1.2.19)$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} = \frac{\alpha^4}{16\beta^3} \quad (1.2.20)$$

$$\hookrightarrow f(x) \approx \frac{-\alpha^2}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{16\beta^3} \left(x - \frac{2\beta}{\alpha}\right)^2 + \dots \quad (1.2.21)$$

$$(1.2.22)$$



Selbst, wenn man die geschlossene Form nicht entdeckt, sind Taylor-Entwicklungen ganz gute Näherungen!

## 1.3 Kronocker-Delta und Levi-Civita-Symbol

### 1.3.1 Einsteinsche Summenkonvention

Einsteinsche Summenkonvention ist hilfreich, um ganz lange Ausdrücke mit wenigen Zeichen darzustellen. Trotzdem ist es am Anfang nicht so einfach von der verkürzten Notation zurück in die ursprüngliche Bedeutung zu übersetzen.

Diese Notation verwendet man, wenn ein Index zwei mal in einer Summe auftritt. Als Beispiel stellen wir uns zuerst eine Potenzreihe vor.

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n \quad (1.3.1)$$

In diesem Beispiel taucht innerhalb der Summe das  $n$  zwei mal vor. Für *eine* einfache Potenz ist es meistens nicht notwendig, die Einsteinsche Notation zu verwenden, aber bei komplizierteren Fällen kann ein Ausdruck dadurch viel anschaulicher werden. In diesem Fall würden wir schreiben:

$$P_m(x) = a_n x^n \quad (1.3.2)$$

Dieser Ausdruck bedeutet das gleiche wie die explizite Summe, noch ausführlicher können wir schreiben:

$$P_m(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (1.3.3)$$

Im Prozess geht aber viel Information "verloren". Zum Beispiel, von welchem  $n$  bis zu welchem  $m$  summiert man hier? Meistens, wenn es nicht aus dem Kontext klar ist, sollte ein Hinweis gegeben sein, welche Werte unser  $n$  annehmen kann.

Obwohl wir diese Notation bei einer Potenzreihe benutzt haben, ist dies aber in der Regel nicht üblich, denn die Einsteinsche Notation normalerweise bei Vektoren-, Matrizen- und Tensorenrechnung gebraucht wird. Wenn man diese Notation verwendet, sind hochgestellte Indizes nicht gleich Potenzen, sondern hängen normalerweise von der "Art" von Vektor ab.

Als nächstes Beispiel nehmen wir Matrizen, was schon in der Linearen Algebra und der Theoretischen Physik vorkamen.

Die Matrix-Multiplikation  $A \cdot B$  ist definiert, wenn  $A$  genauso viele Spalten wie  $B$  Zeilen hat. Sei dann  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $B$  eine  $n \times o$ -Matrix. Das Produkt der beiden Matrizen definieren wir als

$$(A \cdot B)_{ik} := \sum_j^n a_{ij} b_{jk} \quad (1.3.4)$$

An dieser Schreibweise möchten wir spezifisch auf zwei Sachen aufmerksam machen:

- 1  $j$  ist in diesem Fall die Variable die doppelt vorkommt, das sagt uns, das wir eine Summe über  $j$  haben
- 2 Wir wissen aus der Definition, dass  $A$   $n$  Spalten und  $B$   $n$  Zeilen hat, daher wissen wir, dass  $j$  Werte zwischen 1 und  $n$  annehmen kann.

Diese beiden Informationen helfen uns den folgenden Ausdruck besser interpretieren zu können.

$$A \cdot B = a_{ij}b_{jk} \quad (1.3.5)$$

Konkreter geht es auch:

$$(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_{jk} \quad (1.3.6)$$

$$= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (1.3.7)$$

Als erstens möchten wir hier einen Blick auf die Summe werfen: Wir können nirgendwo noch unseren  $j$  Index sehen. Hätten wir ihn anders genannt, wie z.B.  $l$  oder  $m$ , wären wir auf genau das gleiche Ergebnis gekommen. Wir nennen dann  $j$  unseren freien Index, denn wir können ihn umbenennen ohne einen Einfluss auf das Ergebnis zu bewirken. Das sieht aber nicht wirklich wie eine Matrix aus, und wir wissen, dass das Produkt zweier Matrizen wiederum eine Matrix ist. Deswegen müssen wir nochmal das *eigentliche* Ergebnis "rausinterpretieren".

$$(A \cdot B)_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (1.3.8)$$

Um auf das gewünschte Ergebnis zu kommen, müssen wir jetzt an dieser Stelle nur noch ein bisschen Schreibarbeit machen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3.10)$$

$$(A \cdot B)_{ik} = C_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3.11)$$

Um beispielsweise  $c_{11}$  zu bestimmen müssen wir nun in die oben angegebene Summe  $i = 1$  und  $k = 1$  einsetzen. Also ist  $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ .

Anschaulich ist es extrem aufwendig es für alle Elemente der Matrix zu zeigen, mit einer Summe deutlich einfacher, und mit der Einsteinschen Notation noch einfacher.

### 1.3.2 Kronecker-Delta

Ein ganz nützliches Werkzeug, was die Einsteinsche Summenkonvention verwendet ist das Kronecker-Delta. An sich ist das Symbol *keine* Summe, aber wird zusammen mit Summen verwendet. Es ist wie folgt definiert:

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Oft verwendet man ihn um den Skalarprodukt zweier Vektoren darzustellen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x^i y^i = x^i y^i = \delta^{ij} x^i y^j \quad (1.3.12)$$

Wenn man schaut, was das Kronecker-Delta macht, kann Ausdrücke sogar kompakter schreiben. Beispielsweise, wenn ein Kronecker-Delta mehrmals in einer Gleichung auftaucht:

$$\delta^{ij} \delta^{jk} \quad (1.3.13)$$

Aus dem ersten Symbol wissen wir, dass das Produkt verschwindet, wenn  $i \neq j$ , also interessiert uns nur der Fall wo  $i = j$ . So können wir die Indizes des Kronecker-Deltas *kontrahieren* und daraus ein einziges Symbol lassen

$$\delta^{ij} \delta^{jk} = \delta^{ik} \quad (1.3.14)$$

Das gilt natürlich auch für mehrmals auftretende Kronecker-Deltas!

$$\delta^{ij} \delta^{jk} \delta^{kl} = \delta^{ik} \delta^{kl} \quad | \quad \delta^{ij} \delta^{jk} = \delta^{ik} \quad (1.3.15)$$

$$= \delta^{il} \quad (1.3.16)$$

Es bleiben nur der hinterste und vorderste Index übrig.

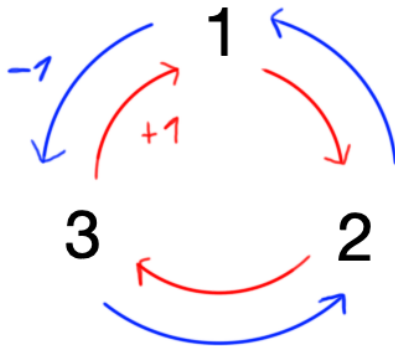
### 1.3.3 Levi-Civita-Symbol

#### Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen

Für drei Dimensionen ist das Levi-Civita-Symbol wie folgt definiert:

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & ijk = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bildlicher können wir uns als *zyklische* und *antizyklische* Permutationen vorstellen:



Zunächst ist es wichtig uns ein paar wichtige Eigenschaften des Epsilon-Symbols anzugucken:

#### 1 Zusammenhang mit Kronecker-Delta:

Die Verknüpfung zweier Epsilon-Symbole durch Multiplikation kann auch als eine Verknüpfung von Kronecker-Deltas dargestellt werden:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = \begin{cases} 2 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} \quad (1.3.17)$$

$$= 2\delta_i^l \quad (1.3.18)$$

Probieren wir jetzt durch die verschiedenen Kombination auf das Ergebnis zu kommen:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = \varepsilon_{i23}\varepsilon^{l23} + \varepsilon_{i32}\varepsilon^{l32} \quad (1.3.19)$$

$$+ \varepsilon_{i12}\varepsilon^{l12} + \varepsilon_{i21}\varepsilon^{l21} \quad (1.3.20)$$

$$+ \varepsilon_{i13}\varepsilon^{l13} + \varepsilon_{i31}\varepsilon^{l31} \quad (1.3.21)$$

Jetzt müssen wir eine Entscheidung treffen, und zwar haben wir schon *alle* Termen der Summe aufgeschrieben, nur fehlt jetzt  $i$  und  $j$  einzusetzen. Dabei sind  $i$  und  $j$  beliebig aber fest, z.B.  $i = j = 1$ . Dann haben wir

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} \quad (1.3.22)$$

$$+ \varepsilon_{112}\varepsilon^{112} + \varepsilon_{121}\varepsilon^{121} \quad (1.3.23)$$

$$+ \varepsilon_{113}\varepsilon^{113} + \varepsilon_{131}\varepsilon^{131} \quad (1.3.24)$$

$$= 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (1.3.25)$$

$$= 2 \quad (1.3.26)$$

Sei andersrum  $i = 1$  und  $j = 2$ , dann haben wir

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = \varepsilon_{123}\varepsilon^{223} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{232} \quad (1.3.27)$$

$$+ \varepsilon_{112}\varepsilon^{212} + \varepsilon_{121}\varepsilon^{221} \quad (1.3.28)$$

$$+ \varepsilon_{113}\varepsilon^{213} + \varepsilon_{131}\varepsilon^{231} \quad (1.3.29)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \quad (1.3.30)$$

$$= 0 \quad (1.3.31)$$

In anderen Worten können wir also sagen, dass

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = 2\delta_i^l \quad (1.3.32)$$

Als nächstes Beispiel haben die beiden Epsilon-Tensoren nur einen gleichnamigen Index:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l \quad (1.3.33)$$

$$(1.3.34)$$

Weggelassen werde alle Terme, die 0 ergeben, also wenn sich ein Index wiederholt. Dann haben wir folgende Möglichkeiten:

Falls  $i = l$  und  $l = m$ , dann haben wir 1, falls  $i = m$  und  $j = l$ , dann haben wir  $-1$ , da es sich um eine antizyklische Permutation handelt. Um diesen Zusammenhang mathematisch zu formulieren können wir die Kronecker-Deltas benutzen.

2 Die Multiplikation des Epsilon-Symbols mit sich selbst mit gleichnamigen Indizes:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon^{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon^{231} + \varepsilon_{213}\varepsilon^{213} + \varepsilon_{312}\varepsilon^{312} + \varepsilon_{321}\varepsilon^{321} \quad (1.3.35)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \quad (1.3.36)$$

$$= 6 = 3! \quad (1.3.37)$$

Allgemeiner können wir sagen:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = n! \quad (1.3.38)$$

**Beispiel**

In der Vorlesung sind wir beispielsweise zu folgendem Ausdruck gekommen:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad \bigg| \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad (1.3.39)$$

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \cdot \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \quad (1.3.40)$$

Mit unserem aktuellen Wissen können wir den rechten Ausdruck vereinfachen

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \cdot n! \quad (1.3.41)$$

Später werden wir die Definitionen der Determinante einer Matrix kennenlernen und wir werden zurück zu diesem Beispiel kommen.

**Levi-Civita-Symbol in mehreren Dimensionen**

Für n-dimensionale Levi-Civita-Symbole werden wir die gleiche Definition als in drei Dimensionen benutzen, nur haben wir im drei-dimensionalen Fall mit der zyklischen und antizyklischen Permutation es ein bisschen anschaulicher erklärt. Dabei konzentrieren wir uns in mehreren Dimensionen nicht auf den zyklischen Aspekt, sondern auf die Permutation.

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Anzahl an Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Anzahl an Permutationen} \\ 0 & \text{falls Wiederholung von Indizes} \end{cases}$$

Am drei-dimensionalen Epsilon-Symbol kann man sehen, dass diese Definition auch gültig ist:

Nach einer Permutation:  $123 \rightarrow 132$  (antizyklische Permutation)

Nach zwei Permutationen:  $123 \rightarrow 312$  (zyklische Permutation)

Bei Permutationen darf man nur gleichzeitig eine Zahl mit der benachbarten Zahl vertauschen.

1 2 3 4 5 6 7

1 2 3 **5** **4** 6 7      ungerade Anzahl an Permutationen

1 2 **5** **3** 4 6 7      gerade Anzahl an Permutationen

Bei mehreren Dimensionen wird es aber selbstverständlich schnell zu einer schmutzigen und langen Verknüpfung von Epsilon-Symbolen mit verschiedenen Permutationen. Deswegen benutzen wir ein neues Symbol um diese darzustellen:

Das Sigma Zeichen  $\sigma$  stellt genau diese Permutation vor:

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.3.42)$$

$$i \mapsto \sigma(i) \quad (1.3.43)$$

So bezeichnen wir zunächst die resultierende Permutation

$$\sigma := \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} \quad (1.3.44)$$

Aus dieser Definition ist aber noch nicht klar, wo genau ein Element aus unserer ursprünglichen Menge nach der Permutation gelandet ist, also müssen wir jede mögliche Kombination berücksichtigen. Ähnlich wie bei der Definition des Epsilon-Symbols, definieren wir das "Signum", oder das Vorzeichen unserer Funktion  $\sigma$ :

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$$

Um Unordnung in der Gleichung zu vermeiden wird manchmal folgende Notation verwendet:

$$\varepsilon^{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) \quad (1.3.45)$$

### Beispiel

Als Übung wiederholen wir ein Beispiel aus der Vorlesung:

Die Faktoren  $A^{ij}$  stehen für die Elemente einer Matrix.

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \cdot A^{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot A^{i_n j_n} \quad (1.3.46)$$

$$= \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_1} \dots \quad (1.3.47)$$

Es ist klar, an dieser Stelle durfte man  $A^{i_1 j_1}$  und  $A^{i_2 j_2}$  vertauschen, weil es ein Produkt ist.

$$= \varepsilon^{i_2 i_1 \dots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots \quad (1.3.48)$$

Jetzt ist es aber nicht mehr selbsterklärend, wieso wir die Indizes der Matrixkomponenten vertauschen durften. Dafür müssen wir uns an die freien Indizes erinnern:

Wir haben die Indizes nicht *vertauscht*, sondern umbenannt. Diese semantische Unterscheidung mag nicht relevant sein, aber es ist hilfreich die Bedingungen zu verstehen, unter welchen man einen solchen Trick verwenden darf.



Kehren wir zu einem vereinfachten Fall ganz schnell zurück: Wir werden uns hoffentlich einverstanden sein, dass  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3}$ , wenn man die Indizes der komplementären Elementen entsprechend benennt. Noch konkreter:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} A^{i_3 j_3} = \varepsilon^{ijk} A^{il_1} A^{jl_2} A^{kl_3} \quad (1.3.49)$$

Wir haben nur ein bisschen mit den Indizes rumgespielt, aber der linke und der rechte Ausdruck sollen immernoch äquivalent zueinander sein. Wenn wir an dieser Stelle schon  $i_1 = i$ ,  $i_2 = j$ ,  $i_3 = k$  definiert haben, so können wir auch  $i_1$  als  $i_2$  nennen und vizeversa. Es ändert nichts an der Gleichung, wenn wir jetzt  $\varepsilon^{jik} A^{jl_1} A^{il_2} A^{kl_3}$  oder  $\varepsilon^{i_2 i_1 i_3} A^{i_2 j_1} A^{i_1 j_2} A^{i_3 j_3}$ . Die Buchstaben mögen anders sein, aber der Inhalt der Gleichung ist erhalten geblieben. Es sind aber schon ganz viele Details auf die man ganz gut aufpassen muss.

Das wichtige über die Indizes ist nicht wie man sie benennt, sondern wofür sie stehen. Die "Bedeutung" der Indizes darf nur nicht bei der Vertauschung und Umbenennung verloren gehen.

Als letztes möchten wir diesen Schritt beachten:

$$\varepsilon^{i_2 i_1 \dots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots = -\varepsilon^{i_1 i_2 \dots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots \quad (1.3.50)$$

An dieser Stelle haben wir die Indizes nicht *umbenannt*, denn so hätten wir auch die Indizes über die Matrixelementen umbenennen müssen, wir haben nur eine ungerade Permutation durchgeführt, wodurch das ganze jetzt nochmal ein negatives Vorzeichen kriegt.

## 1.4 Differentialgleichungen

### 1.4.1 Intro zu Differentialgleichungen

#### Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, in welchen sich eine Funktion und *mindestens* eine ihrer Ableitungen befindet.

Als Einführungsbeispiel stellen wir uns ein Wachstumsprozess vor: Die Änderungsrate des Wachstums hängt von der bereits gegebenen Anzahl an "Elementen" ab. So können wir eine ganz einfache Differentialgleichung aufstellen:

$$y' = k \cdot y \quad (1.4.1)$$

Unser Ziel ist es, eine "Funktion" zu finden, die den entsprechenden Bedingungen erfüllt.

Es werden aber selbstverständlich viel kompliziertere Differentialgleichungen in der Physik vorkommen. Diese zu lösen erfordert unterschiedliche Aufwände und manche sind

sehr schwer zu lösen.

Aber zuerst müssen wir mit den verschiedenen Schreibweisen klar kommen:

Was heißt es, wenn ich z.B.  $y' = f(x, y)$  lese?

Daran können wir verschiedene Sachen erkennen:

- 1 Die höchste vorkommende Ableitung ist die erste.
- 2 In der Funktion  $f(x, y)$  sind, wie die Klammer suggeriert, zwei Variablen  $x$  und  $y$  enthalten, wobei wiederum  $y$  selber von  $x$  abhängt.

Diese Schreibweise sagt uns aber nichts mehr über den *Inhalt* der Differentialgleichung. Genauso gut könnte unsere Gleichung so  $y' = 3$  oder so  $y' = 3e^x + \frac{y}{x^2}$  aussehen.

Was passiert, wenn wir noch mehr Variablen und Ableitungen in die Gleichung hinzufügen?

Handelt es sich *nicht* um eine Differentialgleichung 1. Ordnung, so können wir die obige Form einfach erweitern, indem wir dem obigen Muster folgen.

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung wäre dann  $y'' = f(x, y, y')$  und könnte z.B. so aussehen:  $y'' = 2xy - x^2y'$ .

Noch allgemeiner können wir die obige Schreibweise auf Differentialgleichung der Ordnung  $n$  zurückführen:  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Sind in der Gleichung noch mehr Variablen enthalten, wie z.B. eine Gleichung  $f(x, y, z)$ , so handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung.

Partielle Differentialgleichungen werden genauso wie normale Differentialgleichungen berechnet, in dem man immer die nicht relevanten Variablen als Konstante behandelt

## Systeme von Differentialgleichungen

Manchmal hängt eine Differentialgleichung aber sogar von einer anderen Differentialgleichung ab. Wir können ganze Systeme von Differentialgleichungen haben, die voneinander abhängen. Wir müssen uns aber keine Sorgen machen, denn wir meistens ein großes Problem zurück zu mehreren kleinen Problemen zurück führen können.

Wenn wir zum Beispiel eine Differentialgleichung einer höheren Ordnung haben, so können wir daraus ein *System* von Differentialgleichungen niedriger Ordnung bilden. Durch Umbenennung der Funktionen schaffen wir das. Fangen wir mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung an:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.4.2}$$

Wir sagen jetzt zum Beispiel:

$$x_1 = y \quad (1.4.3)$$

$$x_2 = y' \quad (1.4.4)$$

Dabei wissen wir, dass

$$x_1' = y' = x_2 \quad (1.4.5)$$

$$x_2' = y'' = \frac{-b}{a}y' - \frac{c}{a}y = \frac{-b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_1 \quad (1.4.6)$$

Das sind jetzt zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

Probieren wir mal mit einem aufwendigeren Beispiel: Eine inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung

$$ay^{(4)} + by''' + cy'' + dy' + ey = f \quad (1.4.7)$$

Wie vorhin definieren wir neue Differentialgleichungen niedriger Ordnung:

$$x_1 = y \quad (1.4.8)$$

$$x_2 = y' \quad (1.4.9)$$

$$x_3 = y'' \quad (1.4.10)$$

$$x_4 = y''' \quad (1.4.11)$$

Leiten wir  $x_4$  ab und erhalten

$$x_4' = y^{(4)} = \frac{f}{a} - \left( \frac{b}{a}y''' + \frac{c}{a}y'' + \frac{d}{a}y' + \frac{e}{a}y \right) \quad (1.4.12)$$

$$= \frac{f}{a} - \left( \frac{b}{a}x_4 + \frac{c}{a}x_3 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_1 \right) \quad (1.4.13)$$

$$x_3' = x_4 \quad (1.4.14)$$

$$x_2' = x_3 \quad (1.4.15)$$

$$x_1' = x_2 \quad (1.4.16)$$

Obwohl wir zu diesem Punkt das Problem schon vereinfacht haben, wissen wir noch nicht wie man ein solches System löst. Um die Lösung zu bestimmen brauchen wir bestimmte Anfangsbedingungen. Und zwar müssen wir den Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t = t_0$  wissen, dafür brauchen wir den Wert von jeder bis zur höchsten Ableitung zu diesem Zeitpunkt, also  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_{n-1}(0)$ .

Solche Systeme lassen sich auch in einer Matrixform darstellen. Dafür definieren wir zuerst:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.4.17)$$

Zunächst definieren wir den Vektor  $\vec{x}'$ , dessen Einträge wir schon aus dem Gleichungssystem kennen. Am vorigen Beispiel hätten wir:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -\left(\frac{b}{a}x_4 + \frac{c}{a}x_3 + \frac{d}{a}x_2 + \frac{e}{a}x_1\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix} \quad (1.4.18)$$

Jetzt können wir das gleich einer Matrix setzen:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-e}{a} & \frac{-d}{a} & \frac{-c}{a} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix} \quad (1.4.19)$$

Aus Anschaulichkeit haben wir bisher nur  $a, b, c, \dots$  geschrieben, aber es ist wichtig, dass wir noch kurz vorm Ende nochmal dran erinnern, dass jede dieser Variablen eine Funktion von  $x$  darstellt.

## Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen werden bezüglich ' $y$ ' linear genannt. Unabhängig von den von  $x$  abhängigen Vorfaktoren, die jede beliebige Form annehmen dürfen, *müssen* die  $y$ -Ableitungen linear sein. Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung  $n$ -ten Grades ist

$$f_0(x)y + f_1(x)y' + \dots + y^{(n)} = f(x) \quad (1.4.20)$$

Ein Beispiel einer linearen Differentialgleichung wäre

$$\cos x = e^{2x}y + x \sin x y' - \frac{y''}{x^4} \quad (1.4.21)$$

aber *nicht*

$$y'' = 2xy^2 + \frac{1}{y'} \quad (1.4.22)$$

## Homogene und nicht-homogene Differentialgleichungen

Homogene *lineare* Differentialgleichungen sind lineare Differentialgleichungen für den Fall  $f(x) = 0$ . Ansonsten handelt es sich um eine inhomogene Differentialgleichung.

## 1.4.2 Lösung von Differentialgleichungen

### Bestimmung der allgemeinen Lösung

Um eine Differentialgleichung zu lösen, brauchen wir zuerst die *allgemeine Lösung*. Das ist eine Lösung, mit welcher wir jedes *Anfangswertproblem* lösen können.

Je nach Art unserer Differentialgleichung, können wir unterschiedliche Ansätze verwenden. In der Vorlesung sind bisher folgende Lösungsansätze behandelt worden:

#### Integration:

Der einfachste und dementsprechend nicht so oft verwendeter Ansatz ist die Integration. Wir können diesen benutzen, wenn in einer Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ ,  $f(x, y)$  nicht wirklich von  $y$  abhängt. So ist es zum Beispiel bei

#### Beispiel

$$y' = 3 \quad | \int \quad (1.4.23)$$

$$\int y' dx = \int 3 dx \quad (1.4.24)$$

$$y = 3x + C \quad (1.4.25)$$

#### Separation der Variablen:

Können wir unsere Funktion  $f(x, y)$  als ein Produkt zweier Funktionen  $g(x) \cdot h(y)$  schreiben, so möchten wir alle Ausdrücke mit  $x$  auf eine Seite bringen und alle Ausdrücke mit  $y$  auf die andere bringen.

#### Beispiel

1.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+6}{7y^2} \quad (1.4.26)$$

$$\text{Getrennt: } \frac{dy}{dx} = -(x+6) \frac{1}{7y^2} \quad (1.4.27)$$

$$7y^2 \frac{dy}{dx} = -(x+6) \quad (1.4.28)$$

$$7y^2 dy = -(x+6) dx \quad | \int \quad (1.4.29)$$

$$\int 7y^2 dy = - \int x+6 dx \quad (1.4.30)$$

$$\frac{7y^3}{3} = -\frac{x^2}{2} - 6x + C \quad (1.4.31)$$

$$y^3 = -\frac{3x^2}{14} - \frac{18x}{7} + C \quad (1.4.32)$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{3x^2}{14} - \frac{18x}{7} + C} \quad (1.4.33)$$

Wichtig! Die Konstante soll an der richtigen Stelle geschrieben werden.

2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1.4.34)$$

$$dy = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (1.4.35)$$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (1.4.36)$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (1.4.37)$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C \quad (1.4.38)$$

$$y^2 = -\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2} + C)} \quad (1.4.39)$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2} + C)}} \quad (1.4.40)$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{1+x^2} + C}} \quad (1.4.41)$$

3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{y-x}}{\cos y} (1+x^2) \quad (1.4.42)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y e^{-x}}{\cos y} (1+x^2) \quad (1.4.43)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{\cos y} \cdot \frac{1+x^2}{e^x} \quad (1.4.44)$$

$$e^{-y} \cos y \, dy = e^{-x} (1+x^2) \, dx \quad (1.4.45)$$

$$\int e^{-y} \cos y \, dy = \int e^{-x} (1+x^2) \, dx \quad (1.4.46)$$

$$e^{-y} \left( \frac{\sin y}{2} - \frac{\cos y}{2} \right) = -e^{-x} (x^2 + 2x + 3) + C \quad (1.4.47)$$

Diese Differentialgleichung können wir nicht nach  $y$  auflösen, aber das heißt nicht, dass sie uns nicht weiter helfen kann. Später werden wir bei der Bestimmung des Anfangswertproblems auf sie zurück kommen.

Integrierender Faktor:

Hier geht es um *lineare* Differentialgleichungen erster Ordnung mit folgender Form:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1.4.48)$$

Dabei merkt man, es handelt sich um eine *inhomogene* Differentialgleichung erster Ordnung, den wir ein Element  $Q(x)$  zusätzlich haben

Dafür definiert man einen *integrierenden Faktor*

$$I = e^{\int P(x)dx} \quad (1.4.49)$$

und multipliziert den ganzen Ausdruck mit dem selben.

### Beispiel

1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} \quad (1.4.50)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\ln(x)}{x^2} \quad I = e^{\int P(x)dx} \quad (1.4.51)$$

$$I = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2 \quad (1.4.52)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\ln(x)}{x^2} \quad | \cdot I \quad (1.4.53)$$

$$y'x^2 + 2xy = \ln(x) \quad (1.4.54)$$

Der Trick hier ist folgendes: man erhält auf der linken Seite der Gleichung jetzt eine Ableitung nach der Produktregel! So kann man den Term wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{d(yx^2)}{dx} = \ln(x) \quad | \int \quad (1.4.55)$$

$$yx^2 = x \ln(x) - x + C \quad (1.4.56)$$

$$y = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} \quad (1.4.57)$$

### Homogene *lineare* Differentialgleichungen

Zuerst werden wir gucken wie man eine homogene Differentialgleichung *1. Grades* löst. Dabei haben wir eine Gleichung der Form  $y' + a(x)y = 0$ . Um auf die Lösung zu kommen müssen wir wie üblich  $y$  bestimmen:

$$y' + a(x)y = 0 \quad (1.4.58)$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y \quad (1.4.59)$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x) dx \quad (1.4.60)$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx \quad (1.4.61)$$

$$\ln y = -A(x) + C \quad (1.4.62)$$

$$y = e^{-A(x)+C} \quad (1.4.63)$$

$$y = e^{-A(x)} \cdot e^C \quad (1.4.64)$$

$$e^C \text{ ist immernoch eine Konstante} \quad (1.4.65)$$

$$y = Ce^{-A(x)} \quad (1.4.66)$$

$$\text{Manchmal ist es hilfreicher, } e^C \text{ statt } C \text{ zu schreiben} \quad (1.4.67)$$

### Variation der Konstanten

Die Variation der Konstanten ist hilfreich, wenn wir schon den homogenen Fall einer Differentialgleichung gelöst haben, und wir nun den inhomogenen Fall lösen möchten. Wie wir bereits gesehen haben, die homogene Lösung einer *linearen* Differentialgleichung (1. Grades) hat die Form  $y' = Ce^{-A(x)}$ .

Für den homogenen Fall haben wir unsere Differentialgleichung gleich 0 gesetzt. Wenn dies aber nicht der Fall ist, dann können wir durch Variation der Konstanten versuchen den inhomogenen Fall zu lösen. Dies ist aber nicht immer möglich, denn die Methode setzt voraus, dass wir ein Integral lösen.

Aus der Konstante,  $C$ , die wir im homogenen Fall gefunden haben, machen wir jetzt eine von  $x$  abhängigen Funktion. So erhalten wir aus einer Funktion der Form  $y' + a(x)y = f(x)$  eine Lösung der Form  $y = C(x)e^{-A(x)}$ .

Um das zu lösen setzen wir  $y = C(x)e^{-A(x)}$  in unsere Ausgangsgleichung ein und erhalten:

$$y' + a(x)y = f(x) \quad | y = C(x)e^{-A(x)} \quad (1.4.68)$$

$$y' = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)A'(x)e^{-A(x)} \quad (1.4.69)$$

$$\text{(Produktregel)} \quad (1.4.70)$$

$$\rightarrow f(x) = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)A'(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} \quad | A'(x) = a(x) \quad (1.4.71)$$

$$f(x) = C'(x)e^{-A(x)} \quad (1.4.72)$$

$$C'(x) = f(x)e^{A(x)} \quad | C'(x) \rightarrow C(x) \quad (1.4.73)$$

$$C(x) = \int f(x)e^{A(x)} dx \quad (1.4.74)$$

$$\rightarrow y(x) = \left[ \int f(x)e^{A(x)} dx \right] e^{-A(x)} \quad (1.4.75)$$



**Beispiel**

1.

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos 3x \quad (1.4.76)$$

Homogener Fall:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \quad (1.4.77)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad (1.4.78)$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \quad (1.4.79)$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad (1.4.80)$$

$$\frac{\ln y}{2} = \ln x + C \quad (1.4.81)$$

$$\ln y = 2 \ln x + 2C \quad (1.4.82)$$

$$y = e^{2(\ln x + C)} \quad (1.4.83)$$

$$= e^{\ln x^2} e^{2C} \quad (1.4.84)$$

$$= e^{2C} x^2 \quad (1.4.85)$$

$$y = C_1 x^2 \quad (1.4.86)$$

Inhomogener Fall:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos 3x \quad | y = C_1 x^2 \quad (1.4.87)$$

$$y' = C_1' x^2 + C_1 2x \quad (1.4.88)$$

$$x^2 \cos 3x = C_1' x^2 + C_1 2x - \frac{2C_1 x^2}{x} \quad (1.4.89)$$

$$x^2 \cos 3x = C_1' x^2 \quad (1.4.90)$$

$$\cos 3x = C_1' \quad (1.4.91)$$

$$C_1 = \int \cos 3x \, dx \quad (1.4.92)$$

$$C_1 = \frac{\sin 3x}{3} + C_2 \quad (1.4.93)$$

$$\rightarrow y = \left( \frac{\sin 3x}{3} + C_2 \right) x^2 \quad (1.4.94)$$

2.

$$\cos x \, y' + \sin x \, y = 1 \quad (1.4.95)$$

Homogener Fall:

$$\cos x \, y' + \sin x \, y = 0 \quad (1.4.96)$$

$$\cos x \frac{dy}{dx} = -\sin x \, y \quad (1.4.97)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} dx \quad | u = \cos x \quad (1.4.98)$$

$$du = -\sin x \, dx \quad (1.4.99)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{du}{u} \quad (1.4.100)$$

$$\ln y = \ln u + C \quad (1.4.101)$$

$$y = e^{\ln u} + e^C \quad (1.4.102)$$

$$y = e^C u \quad (1.4.103)$$

$$y = C_1 \cos x \quad (1.4.104)$$

Inhomogener Fall:

$$1 = \cos x \, y' + \sin x \, y \quad | y = C_1 \cos x \quad (1.4.105)$$

$$y' = C_1' \cos x - C_1 \sin x \quad (1.4.106)$$

$$1 = \cos x \, C_1' \cos x - \cos x \, C_1 \sin x + \sin x \, C_1 \cos x \quad (1.4.107)$$

$$1 = C_1' \cos x \cos x \quad (1.4.108)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = C_1' \quad (1.4.109)$$

$$C_1 = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (1.4.110)$$

$$= \tan x + C_2 \quad (1.4.111)$$

$$C_1 = \frac{\sin x}{\cos x} + C_2 \quad (1.4.112)$$

$$\rightarrow y = \left( \frac{\sin x}{\cos x} + C_2 \right) \cos x \quad (1.4.113)$$

$$y = \sin x + C_2 \cos x \quad (1.4.114)$$

Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnungen ist noch nicht in der Vorlesung besprochen worden.

## Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Hier haben wir zwei Möglichkeiten von Gleichungen, die uns begegnen können:

- 1 Homogene Differentialgleichungen
- 2 Inhomogene Differentialgleichungen

### Homogene Differentialgleichungen 2.Ordnung

Das Problem wird schnell ein bisschen kompliziert aber immer noch schaffbar. Normalerweise sehen solche Gleichungen so aus:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.4.115)$$

Die Idee hier um solche Differentialgleichungen zu lösen ist die folgende: Wir nehmen an, unsere Funktion  $y$  ist proportional zu einer exponentiellen Funktion

$$y \sim e^{rx} \quad (1.4.116)$$

Daraus erhalten wir

$$\rightarrow ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad (1.4.117)$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \quad | e^{rx} \neq 0 \quad (1.4.118)$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (1.4.119)$$

und so haben wir das Problem zu einem einfachen Polynom reduziert. Aber bei der Lösung (jetzt durch die Mitternachtsformel) müssen wir 3 verschiedene Fälle untersuchen.

1. Fall:  $b^2 - 4ac > 0$

So haben wir **zwei reelle unterschiedliche Lösungen**, und die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \quad (1.4.120)$$

2. Fall:  $b^2 - 4ac = 0$

So haben wir **eine reelle Lösung**, und die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = C_1e^{rx} + xC_2e^{rx} \quad (1.4.121)$$

3. Fall:  $b^2 - 4ac < 0$

So haben wir **Komplexe Zahlen als Lösungen**. Aber uns interessieren natürlich nur die reellen Lösungen, das erfolgt aber ganz einfach durch umformen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= ay'' + by' + cy & | y \sim e^{rx} & (1.4.122) \\
0 &= e^{rx}(ar^2 + br + c) & & (1.4.123) \\
0 &= ar^2 + br + c & & (1.4.124) \\
r_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & | r_{1,2} \in \mathbb{C} & (1.4.125) \\
\rightarrow y_1 &= Ae^{r_1 x} & & (1.4.126) \\
y_2 &= Be^{r_2 x} & & (1.4.127) \\
y &= Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} & | r_1 = c_1 + ic_2, r_2 = c_1 - ic_2 & (1.4.128) \\
& & c_1 = \frac{-b}{2a} & (1.4.129) \\
&= Ae^{(c_1 + ic_2)x} + Be^{(c_1 - ic_2)x} & | e^{ix} = \cos x + i \sin x & (1.4.130) \\
&= Ae^{c_1 x}(\cos c_2 x + i \sin c_2 x) + Be^{c_1 x}(\cos c_2 x - i \sin c_2 x) & & (1.4.131) \\
&= (A + B)e^{c_1 x} \cos c_2 x + i(A - B)e^{c_1 x} \sin c_2 x & (A + B) = C, i(A - B) = D \in \mathbb{R} & (1.4.132) \\
y &= e^{c_1 x}(C \cos c_2 x + D \sin c_2 x) & & (1.4.133)
\end{aligned}$$

### Beispiel

1. Beispiel für Fall 1:

$$\begin{aligned}
y'' + y' - 6y &= 0 & | y \sim e^{rx} & (1.4.134) \\
\rightarrow (r^2 + r - 6)e^{rx} &= 0 & & (1.4.135) \\
r^2 + r - 6 &= 0 & & (1.4.136) \\
r_1 &= -3 & & (1.4.137) \\
r_2 &= 2 & & (1.4.138) \\
\rightarrow y(x) &= C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} & & (1.4.139) \\
& & & (1.4.140)
\end{aligned}$$

2. Beispiel für Fall 2:

$$\begin{aligned}
y'' + 6y' + 9y &= 0 & | y \sim e^{rx} & (1.4.141) \\
\rightarrow (r^2 + 6r + 9)e^{rx} &= 0 & & (1.4.142) \\
r^2 + 6r + 9 &= 0 & & (1.4.143) \\
r_{1,2} &= -3 & & (1.4.144) \\
\rightarrow y(x) &= C_1 e^{-3x} + x C_2 e^{-3x} & & (1.4.145) \\
& & & (1.4.146)
\end{aligned}$$

3. Beispiel für Fall 3:

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.147)$$

$$\rightarrow (r^2 - 4r + 13)e^{rx} = 0 \quad (1.4.148)$$

$$r_1 = 2 + 3i \quad (1.4.149)$$

$$r_2 = 2 - 3i \quad (1.4.150)$$

$$\rightarrow y(x) = Ae^{(2+3i)x} + Be^{(2-3i)x} \quad (1.4.151)$$

$$= Ae^{2x}e^{3ix} + Be^{2x}e^{-3ix} \quad (1.4.152)$$

$$= e^{2x}[Ae^{3ix} + Be^{-3ix}] \quad (1.4.153)$$

$$= e^{2x}[A(\cos 3x + i \sin 3x) + B(\cos 3x - i \sin 3x)] \quad (1.4.154)$$

$$= e^{2x}[(A+B)\cos 3x + i(A-B)\sin 3x] \quad | A+B = C_1, \quad (1.4.155)$$

$$i(A-B) = C_2 \quad (1.4.156)$$

$$= e^{2x}[C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)] \quad (1.4.157)$$

4. Noch ein Beispiel für Fall 3:

$$y'' + y' = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.158)$$

$$\rightarrow (r^2 + r)e^{rx} = 0 \quad (1.4.159)$$

$$r_1 = i \quad (1.4.160)$$

$$r_2 = -i \quad (1.4.161)$$

$$\rightarrow y(x) = e^{0x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x] \quad (1.4.162)$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (1.4.163)$$

### Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

Diese Gleichung haben normalerweise die folgende Form:

$$ay'' + by' + cy = r(x) \quad (1.4.164)$$

Die Methode hier ist ähnlich zu "Variation der Konstanten bei der inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung". Die Idee hier ist folgendes:

1. Finde eine Lösung der homogenen Gleichung mithilfe von was wir bis jetzt gelernt haben.
2. Finde eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.
3. Nutze die folgende Formel um die allgemeine Lösung zu finden:

$$y(x) = y_{\text{homogen}} + y_{\text{partikulär}} \quad (1.4.165)$$

Es ist nicht sehr einfach, die partikuläre Lösung zu finden weil sie normalerweise eine "Vermutung" ist. Glücklicherweise können wir uns eine kleine Tabelle merken, die uns bei unseren Vermutungen helfen kann.

$r(x)$	Vermutung $y_{part}$
$k$	$A$
$ax + b$	$Ax + B^1$
$ax^2 + bx + c$	$Ax^2 + Bx + C^2$
$ax^n + bx^{n-1} + \dots$	$Ax^n + Bx^{n-1} + \dots$
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a \cos \beta x + b \sin \beta x$	$A \cos \beta x + B \sin \beta x^3$
$ae^{\alpha x} \cos \beta x + be^{\alpha x} \sin \beta x$	$Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$
$(ax^2 + bx + c)e^{\lambda x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{\lambda x}$
$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \cos \beta x + (b_2x^2 + b_1x + b_0) \sin \beta x$	$(A_2x^2 + A_1x + A_0) \cos \beta x + (B_2x^2 + B_1x + B_0) \sin \beta x$
$(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^{\alpha x} \cos \beta x + (b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{\alpha x} \sin \beta x$	$(A_2x^2 + A_1x + A_0)e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_2x^2 + B_1x + B_0)e^{\alpha x} \sin \beta x$

Nachdem wir unsere Vermutung haben, setzen wir diese partikuläre Lösung in die Gleichung ein und lösen wir. Anhand einiger Beispielen werden wir es deutlicher zeigen:

### Beispiel

1. Beispiel:

$$y'' + 4y' + 3y = 3x \quad (1.4.166)$$

$$(1.4.167)$$

Homogene Lösung:

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.168)$$

$$\rightarrow (r^2 + 4r + 3)e^{rx} = 0 \quad (1.4.169)$$

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \quad (1.4.170)$$

$$r_1 = -3 \quad (1.4.171)$$

$$r_2 = -1 \quad (1.4.172)$$

$$\rightarrow y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} \quad (1.4.173)$$

<sup>1</sup>Unsere Vermutung soll "B" beinhalten, selbst wenn  $b = 0$

<sup>2</sup>Unsere Vermutung soll "B" und "C" beinhalten, selbst wenn  $b = 0$  und/oder  $c = 0$

<sup>3</sup>Unsere Vermutung soll auch beide Termen beinhalten, selbst wenn  $a = 0$  oder  $b = 0$

(1.4.174)

Partikuläre Lösung:

$$r(x) = 3x \quad | \text{Wir vermuten: } y_p = Ax + B \quad (1.4.175)$$

$$y_p'' + 4y_p' + 3y_p = 3x \quad | y_p' = A, y_p'' = 0 \quad (1.4.176)$$

$$\rightarrow 0 + 4A + 3(Ax + B) = 3x \quad (1.4.177)$$

$$4A + 3Ax + 3B = 3x \quad (1.4.178)$$

$$3Ax + (4A + 3B) = 3x \quad | Ax + B = Cx + D \implies Ax = Cx, B = D \quad (1.4.179)$$

$$\rightarrow 3Ax = 3x \quad (1.4.180)$$

$$4A + 3B = 0 \quad (1.4.181)$$

$$\rightarrow A = 1 \quad (1.4.182)$$

$$B = \frac{-4}{3} \quad (1.4.183)$$

$$y_p = x - \frac{4}{3} \quad (1.4.184)$$

(1.4.185)

Allgemeine Lösung:

$$y = y_h + y_p \quad (1.4.186)$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + x - \frac{4}{3} \quad (1.4.187)$$

2. Beispiel:

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} \quad (1.4.188)$$

(1.4.189)

Homogene Lösung:

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.190)$$

$$\rightarrow (r^2 - r - 2)e^{rx} = 0 \quad (1.4.191)$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad (1.4.192)$$

$$r_1 = -1 \quad (1.4.193)$$

$$r_2 = 2 \quad (1.4.194)$$

$$\rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \quad (1.4.195)$$

$$(1.4.196)$$

Partikuläre Lösung:

$$r(x) = 2e^{3x} \quad | \text{Wir vermuten: } y_p = Ae^{3x} \quad (1.4.197)$$

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 2e^{3x} \quad | y_p = Ae^{3x}, y_p' = 3Ae^{3x}, y_p'' = 9Ae^{3x} \quad (1.4.198)$$

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 2e^{3x} \quad (1.4.199)$$

$$(9A - 3A - 2A)e^{3x} = 2e^{3x} \quad (1.4.200)$$

$$4Ae^{3x} = 2e^{3x} \quad (1.4.201)$$

$$4A = 2 \quad (1.4.202)$$

$$A = 0.5 \quad (1.4.203)$$

$$\rightarrow y_p = 0.5e^{3x} \quad (1.4.204)$$

$$(1.4.205)$$

Allgemeine Lösung:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 0.5e^{3x} \quad (1.4.206)$$

3. Beispiel:

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin(t) - \cos(t) \quad (1.4.207)$$

$$(1.4.208)$$

Homogene Lösung:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad | y \sim e^{rt} \quad (1.4.209)$$

$$\rightarrow (r^2 - 4r + 4)e^{rt} = 0 \quad (1.4.210)$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad (1.4.211)$$

$$r = 2 \quad (1.4.212)$$

$$\rightarrow y_h = C_1e^{2t} + tC_2e^{2t} \quad (1.4.213)$$

Partikuläre Lösung:

$$r(t) = 7\sin t - \cos t \quad | \text{Wir vermuten: } y_p = A\sin(t) + B\cos(t) \quad (1.4.214)$$

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 7\sin t - \cos t \quad y_p = A\sin t + B\cos t \quad (1.4.215)$$



$$y_p' = A \cos t - B \sin t \quad (1.4.216)$$

$$y_p'' = -A \sin t - B \cos t \quad (1.4.217)$$

$$3A \sin t - 4A \cos t + 4B \sin t + 3B \cos t = 7 \sin t - \cos t \quad (1.4.218)$$

$$3A \sin t + 4B \sin t = 7 \sin t \quad (1.4.219)$$

$$3A + 4B = 7 \quad (1.4.220)$$

$$A = \frac{7 - 4B}{3} \quad (1.4.221)$$

$$3B \cos t - 4A \cos t = -\cos t \quad (1.4.222)$$

$$3B \cos t - \frac{(16B - 28) \cos t}{3} = -\cos t \quad (1.4.223)$$

$$9B \cos t + (16B - 28)(\cos t) = -3 \cos t \quad (1.4.224)$$

$$9B + 16B - 28 = -3 \quad (1.4.225)$$

$$\rightarrow B = 1 \quad (1.4.226)$$

$$\rightarrow A = 1 \quad (1.4.227)$$

$$y_p = \sin t + \cos t \quad (1.4.228)$$

Allgemeine Lösung:

$$\rightarrow y = \sin t + \cos t + C_1 e^{2t} + t C_2 e^{2t} \quad (1.4.229)$$

### Erweiterung zu Differentialgleichungen höherer Ordnungen

Wir haben früher gesehen wie wir Differentialgleichungen ausschließlich 1. und 2. Ordnung lösen können. Es geht aber auch für höhere Ordnungen analog zu den Methoden die wir kennen. Der Exponentialansatz ist unser bestes Werkzeug dafür. Natürlich hier gibt es auch die verschiedenen Fälle die wir betrachten müssen. Am wichtigsten müssen wir nie vergessen, dass:

Die Anzahl von Konstanten in der Lösung ist immer immer gleich der Ordnung der Polynome, die wir haben.

In anderen Worten, wir haben genauso viele Konstanten wie die Ordnung unserer Differentialgleichung, und die müssen wir ebenfalls mit gegebenen Anfangsbedingungen bestimmen.

Jetzt fangen wir mit den verschiedenen Fällen die wir betrachten müssen und ihre allgemeine Lösung:

- 1 Wir haben **reelle und deutliche (nicht gleiche)** Lösungen dann ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x} \quad (1.4.230)$$

wobei  $n$  ist gleich die Ordnung des Polynoms.

- 2 Wir haben **reelle und nicht deutliche** (Variable wiederholt sich k-mal) Lösungen dann ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{rx} + x C_2 e^{rx} + x^2 C_3 e^{rx} + \dots + x^{k-1} C_n e^{rx} \quad (1.4.231)$$

- 3 Haben wir wir **Komplexe und deutliche** Lösungen dann müssen wir immer die Lösungen in dieser Form bringen, z.B:

$$[\alpha \pm \beta i] \text{ und } [\gamma \pm \epsilon i] \quad (1.4.232)$$

dann ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(|\beta|x) + C_2 \sin(|\beta|x)] + e^{\gamma x} [C_3 \cos(|\epsilon|x) + C_4 \sin(|\epsilon|x)] \quad (1.4.233)$$

- 4 Wir haben **Komplexe und nicht deutliche** (wiederholt sich k-mals) Lösungen dann müssen wir immer die Lösungen in dieser Form bringen, z.B:

$$[\alpha \pm \beta i] \quad (1.4.234)$$

dann ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(|\beta|x) + C_2 \sin(|\beta|x) + x C_3 \cos(|\beta|x) \quad (1.4.235)$$

$$+ x C_4 \sin(|\beta|x) + x^2 C_5 \cos(|\beta|x) + x^2 C_6 \sin(|\beta|x) \quad (1.4.236)$$

$$+ \dots + x^{k-1} C_{n-1} \cos(|\beta|x) + x^{k-1} C_n \sin(|\beta|x)] \quad (1.4.237)$$

Wir müssen aber nicht vergessen, dass die Polynomen verschiedene Typen von Lösungen haben können, deshalb können wir auch jede Lösung einzeln betrachten und die alle erst zum Schluss zusammen addieren

### Beispiel

1. Beispiel:

$$y''' + y'' + 4y + 4 = 0 \quad (1.4.238)$$

$$y''' + y'' + 4y + 4 = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.239)$$

$$\rightarrow (r^3 + r^2 + 4r + 4)e^{rx} = 0 \quad (1.4.240)$$

$$r_1 = -2i \quad (1.4.241)$$

$$r_2 = 2i \quad (1.4.242)$$

$$r_3 = -1 \quad (1.4.243)$$

Allgemeine Lösung für  $r_{1,2}$ :

$$y_{1,2} = e^{0x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] \quad (1.4.244)$$

$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (1.4.245)$$

Allgemeine Lösung für  $r_3$  :

$$y_3 = C_3 e^{-x} \quad (1.4.246)$$

Allgemeine Lösung (alles addieren):

$$y(x) = e^{0x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] + C_3 e^{-x} \quad (1.4.247)$$

2. Beispiel:

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (1.4.248)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.249)$$

$$\rightarrow (r^4 - 1)e^{rx} = 0 \quad (1.4.250)$$

$$r_{1,2} = \pm i \quad (1.4.251)$$

$$r_3 = -1 \quad (1.4.252)$$

$$r_4 = 1 \quad (1.4.253)$$

Allgemeine Lösung für  $r_{1,2}$  :

$$y_{1,2} = e^{0x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x] \quad (1.4.254)$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (1.4.255)$$

Allgemeine Lösung für  $r_3$  :

$$y_3 = C_3 e^{-x} \quad (1.4.256)$$

Allgemeine Lösung für  $r_4$  :

$$y(x) = C_4 e^x \quad (1.4.257)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 e^{-x} + C_4 e^x \quad (1.4.258)$$

3. Beispiel:

$$y^{(5)} + 12y^{(4)} + 104y''' + 408y'' + 1156y' = 0 \quad (1.4.259)$$

$$y^{(5)} + 12y^{(4)} + 104y''' + 408y'' + 1156y' = 0 \quad | y \sim e^{rx} \quad (1.4.260)$$

$$\rightarrow (r^5 + 12r^4 + 104r^3 + 408r^2 + 1156r)e^{rx} = 0 \quad (1.4.261)$$

$$r_1 = 0 \quad (1.4.262)$$

$$r_{2,3,4,5} = -3 \pm 5i \quad (1.4.263)$$

Allgemeine Lösung für  $r_1$  :

$$y_1 = C_1 + e^{0x} \quad (1.4.264)$$

$$= C_1 + 1 \quad (1.4.265)$$

Allgemeine Lösung für  $r_{2,3,4,5}$  :

$$y_{2,3,4,5} = e^{-3x} [C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x + xC_4 \cos 5x + xC_5 \sin 5x] \quad | r_{2,3} = -3 \pm 5i \quad (1.4.266)$$

$$r_{4,5} = -3 \pm 5i \quad (1.4.267)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = 1 + C_1 + e^{-3x} [C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x + xC_4 \cos 5x + xC_5 \sin 5x] \quad (1.4.268)$$

## 1.5 Kurvenintegrale

Um Kurvenintegrale<sup>4</sup> zu bestimmen muss man zwei Sachen kennen:

---

<sup>4</sup>über Vektorfelder\*

## 1 Das Kraftfeld

### 2 Die Parametrisierung(en) des Weges

Das Kraftfeld ist meistens gegeben, also müssen wir uns darüber keine Sorgen machen, andernfalls ist etwas anderes gegeben, womit wir das Kraftfeld bestimmen müssen, wie zum Beispiel das Potential.

Für die Parametrisierung des Weges müssen wir die Eigenschaften aus unserem Weg benutzen.

Allgemein ist ein Kurvenintegral

$$I = \int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (1.5.1)$$

Aber wie arbeiten wir genau damit? Was genau ist  $d\vec{x}$ ? Um  $d\vec{x}$  zu bestimmen müssen wir wissen, wie man den Weg als eine Funktion beschreibt. Manchmal gelingt dies aber nicht für den ganzen Weg, also es ist in Ordnung den Weg in kleineren Stücken zu teilen.

Zuerst suchen wir also einen Vektor  $\vec{x}(t)$ . Hier ist  $t$  ein beliebiger Parameter, mit welchem wir den Weg, ja, parametrisieren. In vielen Fällen kann dieser Parameter vielleicht ein Winkel sein, oder der Bereich in welchem wir einen Vektor laufen lassen.

Wenn wir schon unser Vektor  $\vec{x}$  haben, können wir ihn nach unserem gewählten Parameter  $t$  ableiten und damit ersetzen wir  $d\vec{x}$ .

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} \quad (1.5.2)$$

$$d\vec{x} = \dot{\vec{x}} dt \quad (1.5.3)$$

So ist nun unser Kurvenintegral jetzt

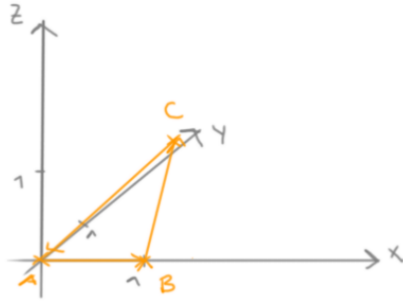
$$I = \int \vec{F}(\vec{x}) \dot{\vec{x}} dt \quad (1.5.4)$$

Am besten zeigen wir dies an ein paar Beispiele:

#### Beispiel

1. Gegeben sei ein Dreieck mit Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.5.5)$$



Und das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2z \end{pmatrix} \quad (1.5.6)$$

Nun müssen wir wissen, welche Arbeit verrichtet wird, wenn wir entlang der Kanten des Dreiecks gehen. Dafür ist es in diesem Fall nützlich unseren Weg in sinnvollen Abschnitten zu teilen. Sei das geschlossene Intervall  $I$  die Summe aus den 3 Wegintegralen  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CA}$ .

Erstens: Wie kommen wir vom Punkt  $A$  zu Punkt  $B$ ?

Wir können einen Vektor definieren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.5.7)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5.8)$$

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad (1.5.9)$$

Setzen wir dies in unser Integral ein und erhalten:

$$I_{AB} = \int_C \vec{F}(\vec{x}(t)) d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{x}) \dot{\vec{x}} dt \quad (1.5.10)$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad (1.5.11)$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt \quad (1.5.12)$$

$$= \frac{2}{3} \quad (1.5.13)$$

Wiederholen wir einige Schritte: Wir haben das Vektorfeld in Abhängigkeit von unserem Vektor  $\vec{x}(t)$  gesetzt, und dieser Vektor hatte Einträge  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , also für jeden  $x, y$  und  $z$  im Vektorfeld setzen wir die jeweiligen Werten ein.

Machen wir mit dem Weg  $B \rightarrow C$  weiter:

Eine mögliche Parametrisierung wäre:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.5.14)$$

Dann ist

$$I_{BC} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1)^2 - 3t \\ 4tt \\ 3(1)t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad (1.5.15)$$

$$= \int_0^1 4t^2 + 3t^2 dt \quad (1.5.16)$$

$$= \int_0^1 7t^2 dt \quad (1.5.17)$$

$$= \frac{7t^3}{3} \Big|_0^1 \quad (1.5.18)$$

$$= \frac{7}{3} \quad (1.5.19)$$

Und zuletzt gucken wir uns den Weg  $C \rightarrow A$  an:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad 1 \geq t \geq 0 \quad (1.5.20)$$

$$I_{BC} = \int_1^0 \begin{pmatrix} 2t^2 - 3t \\ 4tt \\ 3t^2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad (1.5.21)$$

$$= \int_1^0 2t^2 - 3t + 4t^2 + 3t^3 dt \quad (1.5.22)$$

$$= \int_1^0 3t^3 + 6t^2 - 3t dt \quad (1.5.23)$$

$$= \left. \frac{3t^4}{4} + 2t^3 - \frac{3t^2}{2} \right|_1^0 \quad (1.5.24)$$

$$= -\left(\frac{3}{4} + 2 - \frac{3}{2}\right) \quad (1.5.25)$$

$$= -\frac{5}{4} \quad (1.5.26)$$

Die Gesamtarbeit ist dann

$$I = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA} \quad (1.5.27)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{7}{3} - \frac{5}{4} \quad (1.5.28)$$

$$= \frac{7}{4} \quad (1.5.29)$$

2. Überlegen wir uns ein anderes Beispiel: Wir gehen entlang des Randes eines Zylinders  $x^2 + y^2 = 1$  auf der Ebene  $y + z = 2$ . Das Vektorfeld sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ x \\ z^2 \end{pmatrix} \quad (1.5.30)$$

und laufen eine ganze Runde da durch, bis wir zurück zum Start kommen. Die Koordinaten des Anfangs sind in diesem Fall irrelevant.

Nun ist die Frage, wie wir jetzt unser Vektor  $\vec{x}$  parametrisieren. Eine Idee ist ja, dass wir irgendwie im Kreis gehen, also kann es ja in Abhängigkeit eines Winkels  $\theta$  sein. Wir wissen auch, dass sich die Höhe  $z$  verändert, denn wir beginnen ganz unten und klettern ein bisschen hoch, und dann kommen wieder runter<sup>a</sup>. Da wir entlang der Ebene  $y + z = 2$  gehen, ist  $z = 2 - y$ . Dann überlegen wir uns: projiziert auf die  $x - y$  Ebene gehen wir in einen einfachen Kreis, also

$$\vec{x}(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \quad z = 2 - y \quad (1.5.31)$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 2 - r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.5.32)$$



(1.5.33)

Unser Vektor  $\vec{x}$  ist aber nicht abhängig von zwei Variablen, da der Radius konstant ist.

$$\frac{d\vec{x}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.5.34)$$

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \quad (1.5.35)$$

Nochmal setzen wir in das Integral ein und erhalten:

$$I = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{x}(\theta)) \cdot \dot{\vec{x}} d\theta \quad (1.5.36)$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -(r \sin \theta)^2 \\ r \cos \theta \\ (2 - r \sin \theta)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \quad (1.5.37)$$

$$= \int_0^{2\pi} [-r^3 \sin^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta - (4 - 4r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta)r \cos \theta] d\theta \quad (1.5.38)$$

$$= \int_0^{2\pi} \quad \quad \quad r = 1 \quad (1.5.39)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta + \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 4 \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (1.5.40)$$

$$= \dots \quad (1.5.41)$$

$$= \pi \quad (1.5.42)$$

An dieser Stelle müsst ihr uns glauben, dass das Ergebnis auch so stimmt, aber wichtig zu sehen ist, dass manchmal werden solche Integrale unnötigerweise kompliziert und sie zu lösen wird sehr aufwendig. Dazu lernen wir zunächst wie man Flächenintegrale statt Kurvenintegrale lösen können, und am gleichen Beispiel werden wir zeigen, dass es auch das selbe Ergebnis rauskommt.

<sup>a</sup>Für die Veranschaulichung siehe 1.8 Beispiel 1.

## 1.6 Flächenintegrale

Ähnlicherweise wie bei Kurvenintegrale, muss man für ein Flächenintegral<sup>5</sup>

<sup>5</sup>über ein Vektorfeld

$$I = \int_F \vec{V}(\vec{x}) d\vec{A} \quad (1.6.1)$$

wissen, wie man die Fläche  $\vec{A}(r, t)$  parametrisiert. Das Ergebnis ist, wie wir am Skalarprodukt im Integral sehen auch eine skalare Größe.

### Rechteckige Flächen

Für einen Rechteck zwischen 4 Punkten muss man wissen wie weit man entlang der einen Länge und wie weit man entlang der Höhe gehen muss. Beispielsweise zwischen den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.6.2)$$

Ist unsere Fläche:

$$\vec{A}(r, t) = \begin{pmatrix} 2r \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.6.3)$$

$$\partial_r \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_t \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.6.4)$$

Der Flächenvektor  $d\vec{A}$  ist der Vektor, der orthogonal zu beiden Vektoren  $\partial_r \vec{A}, \partial_t \vec{A}$  steht:

$$d\vec{A} = (\partial_r \vec{A} \times \partial_t \vec{A}) dr dt \quad (1.6.5)$$

Egal wie wir uns mit diesem Vektor bewegen, wir werden immer auf unserem Rechteck landen. Natürlich besteht immer die Schwierigkeit, die Fläche richtig zu parametrisieren. Unser Flächenintegral sieht dann so aus:

$$I = \int_0^1 dr \int_0^1 dt \vec{V}(\vec{x}) (\partial_r \vec{A} \times \partial_t \vec{A}) \quad (1.6.6)$$

### Kreisförmige Flächen

Die Fläche eines Kreises (auf der x-y-Ebene) lässt sich ebenfalls mit

$$\vec{A}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.7)$$

$$\partial_r \vec{A} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_\varphi \vec{A} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.8)$$

$$d\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\varphi \quad (1.6.9)$$

Und das Integral:

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{V}(\vec{x})(\partial_r \vec{A} \times \partial_\varphi \vec{A}) \quad (1.6.10)$$

### Sphärische Flächen

In diesem Fall brauchen wir eine Funktion in Abhängigkeit von zwei Winkeln:

$$\vec{A}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (1.6.11)$$

$$\partial_\varphi \vec{A} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -R \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \partial_\theta \vec{A} = \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6.12)$$

$$d\vec{A} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \\ R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \\ R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (1.6.13)$$

Dann wäre das Integral:

$$I = \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \vec{V}(\vec{x})(\partial_\varphi \vec{A} \times \partial_\theta \vec{A}) \quad (1.6.14)$$

### Allgemeinere Flächen

Man muss eine Parametrisierung für die Fläche finden  $\vec{r}(\vec{u})$ .

$$\vec{A}(r, t) = x(r, t)\vec{e}_x + y(r, t)\vec{e}_y + z(r, t)\vec{e}_z \quad (1.6.15)$$

## 1.7 Volumenintegrale

Nun kommen wir dazu über ein Volumen zu integrieren. Hier beschäftigen wir uns mit der spezifischen, vereinfachten Form für ein Kugelvolumen in Kugelkoordinaten, und ein bisschen mit dem allgemeineren Weg.

Wir wollen über das Volumen eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  folgendermaßen integrieren:

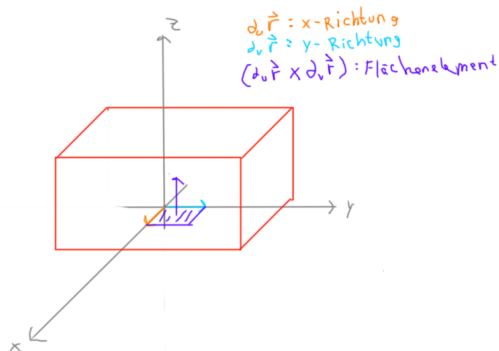
$$I = \int_V \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (1.7.1)$$

Als erstes müssen wir das Volumen  $\vec{r}(u, v, w)$  anhand drei Variablen parametrisieren und die entsprechenden Grenzen für die jeweiligen Parameter finden. Das hier ist bei komischen Volumina das schwierigste Teil, aber zum Glück brauchen wir auch hier nur ganz einfache Körper, vor allem Kugeln.

Hier müssen wir anhand unserer Parametrisierung das  $dV$  in unserem Integral mit etwas womit wir rechnen können ersetzen. Dabei ist das Spatprodukt zwischen den jeweiligen partiellen Ableitungen der Parametrisierung was wir suchen:

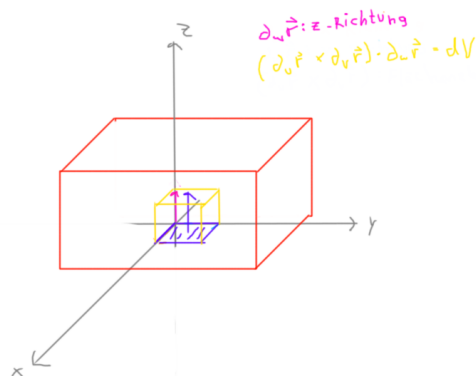
$$dV = (\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}) \cdot \partial_w \vec{r} du dv dw \quad (1.7.2)$$

Was genau bedeutet das? Gucken wir uns im Beispiel eines Quaders, (Stichwort Parallelepipede) eine kurze Herleitung an.



Der erste Teil ist das Kreuzprodukt zwischen der partiellen Ableitung von  $\vec{r}$  nach  $u$  und nach  $v$ , anschaulich stimmen die Richtung dieser Ableitungen in unserem Beispiel mit den Koordinatenachsen überein, aber das soll nicht unbedingt der Fall sein. Dieses Kreuzprodukt stellt die von diesen zwei Vektoren aufgespannte Fläche dar<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>die Skala ist natürlich nicht maßstabgetreu



Nachdem wir schon ein kleines Flächenelement  $\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$  haben, können wir ihn mit dem kleinen Vektor in  $w$ -Richtung  $\partial_w \vec{r}$  skalar multiplizieren und somit erhalten wir das kleine Volumen eines Parallelepipedes. Am Beispiel des Quaders ist dieses Volumen ein Quader, aber in anderen, allgemeineren Volumina ist das ein Parallelepipede.

Für allgemeinere Volumina summiert man in den entsprechenden Grenzen über ganz viele von diesen kleinen Parallelepipeden um das gesamte Volumen aufzudecken.

Das ist eine wirklich schöne Entwicklung zwischen den Kurven-, Flächen- und Volumenintegralen

$$I_{\text{Kurve}} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(u)) d\vec{r} \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{du} du \quad (1.7.3)$$

$$I_{\text{Fläche}} = \int_A \vec{F}(\vec{r}(u, v)) d\vec{f} \quad d\vec{f} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv \quad (1.7.4)$$

$$I_{\text{Volumen}} = \int_V \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) dV \quad dV = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} du dv dw \quad (1.7.5)$$

Im Gegensatz zum Kurven- und Flächenintegral bekommen wir bei Integration über einem Vektorfeld keine skalare Größe, sondern einen Vektor. Später werden wir aber im Satz von Gauß 1.9 über eine skalare Funktion, die Divergenz integrieren und eine skalare Größe erhalten.

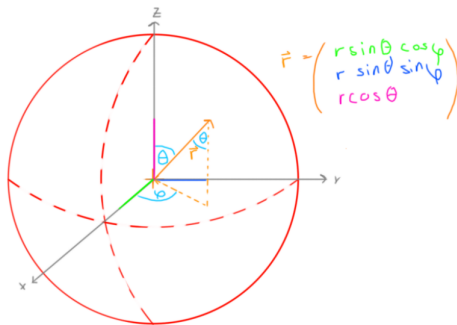
### Kugelförmige Volumina

Im Fall Kugelförmige Volumina können wir uns folgende Formel ganz schnell merken:

$$\int_V \vec{F}(\vec{r}) dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}) d\varphi \quad (1.7.6)$$

Um zu zeigen, dass die obere allgemeine Formel für  $dV$  tatsächlich stimmt leiten wir ganz kurz her:

Die Parametrisierung einer Kugel ist



$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.7.7)$$

Dann ist  $dV$ :

$$dV = (\partial_r \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r}) \cdot \partial_\varphi \vec{r} dr d\theta d\varphi \quad (1.7.8)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dr d\theta d\varphi \quad (1.7.9)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} -r \sin^2 \theta \sin \varphi - r \cos^2 \theta \sin \varphi \\ r \cos^2 \theta \cos \varphi + r \sin^2 \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dr d\theta d\varphi \quad (1.7.10)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dr d\theta d\varphi \quad (1.7.11)$$

$$= [r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta + r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta] dr d\theta d\varphi \quad (1.7.12)$$

$$= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1.7.13)$$

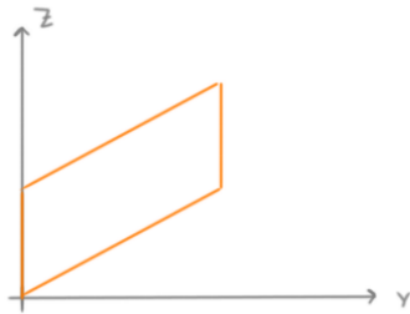
Um das Volumen einer ganzen Kugel zu integrieren muss man natürlich den Radius von 0 bis zur maximalen Länge  $R$  integrieren, den Winkel  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$ , um eine ganze Kreisfläche zu bilden, und zuletzt muss man mit dieser Kreisfläche eine halbe Drehung von 0 bis  $\pi$  durchführen um den Ball zu machen.

### "Quaderförmige" Volumina

Wir klauen uns einen kleinen Abschnitt aus 1.6, denn wir müssen nur noch der Parametrisierung einer rechteckigen Fläche eine Tiefe geben. Beispielsweise für einen Quader in mit Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.7.14)$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.7.15)$$



Hier ist das Volumen zwar immernoch einfach, aber vielleicht im ersten Blick nicht so straightforward, da wir müssen mit einer Neigung rechnen, um die Seitenfläche zu parametrisieren. Eine mögliche Parametrisierung wäre

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \frac{y}{2} \end{pmatrix} \quad 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1 \quad (1.7.16)$$

In diesem Fall wäre das Integral

$$I = \int_V \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (1.7.17)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(x, y, z)) (\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}) \partial_z \vec{r} dz \quad (1.7.18)$$

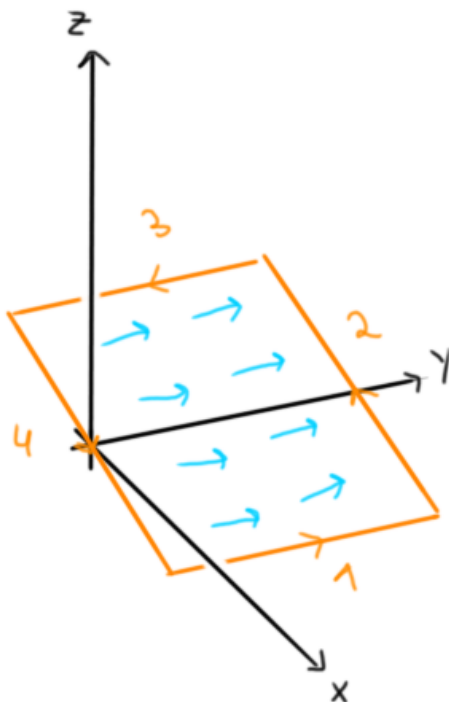
$$= \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(x, y, z)) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz \quad (1.7.19)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(x, y, z)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz \quad (1.7.20)$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(x, y, z)) dz \quad (1.7.21)$$

## 1.8 Satz von Stokes

Um den [Wert] eines geschlossenen Weges innerhalb eines Vektorfelds zu bestimmen wissen wir schon, dass wir einfach mit Kurven- oder Linienintegrale über den Weg selbst integrieren können. Dafür ist es erstmal wichtig, den Rand unserer Fläche in sinnvollen Abschnitten zu trennen.



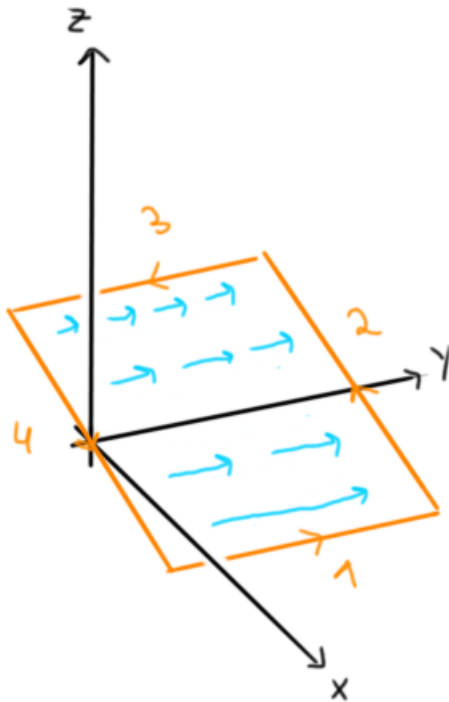
Im ersten Beispiel haben wir einen Weg durch ein Vektorfeld. Das Vektorfeld zeigt hier in nur eine Richtung.

Wenn wir über die einzelnen Teilstrecken integrieren wollten, wurden wir allgemein solche Werte bekommen:

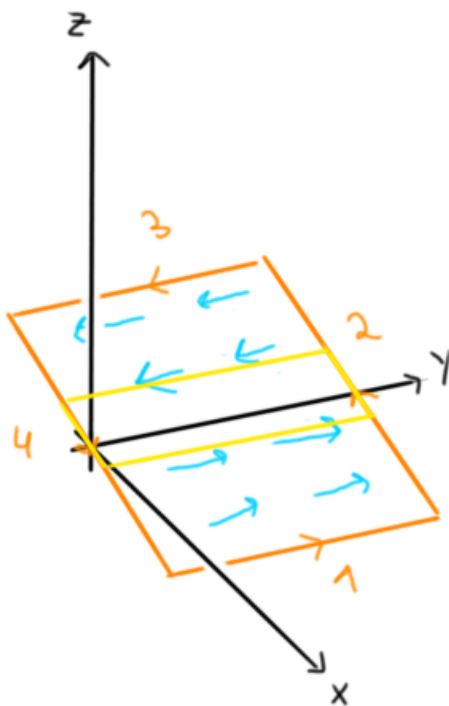
1. Einen negativen Wert, denn das Vektorfeld zeigt in die gleiche Richtung wie unser Weg.
2. 0, denn der Vektorfeld ist immer senkrecht zu unserem Weg.
3. Einen positiven Wert, denn wir entgegen des Vektorfelds laufen. Dann müssen wir also eine positive "Arbeit" verrichten.
4. 0, denn wir senkrecht zum Vektorfeld laufen

Natürlich wissen wir noch nicht genug über das Vektorfeld um den Wert der Summe aller Integralen zu bestimmen, aber wir können schon Hypothesen aufstellen:

Wenn das Vektorfeld überall gleich stark ist, dann würden sich der positive Wert aus 1. und der negative Wert aus 2. wahrscheinlich ausgleichen und wir hätten insgesamt eine Summe 0, wenn wir alle einzelne Strecken addieren würden.

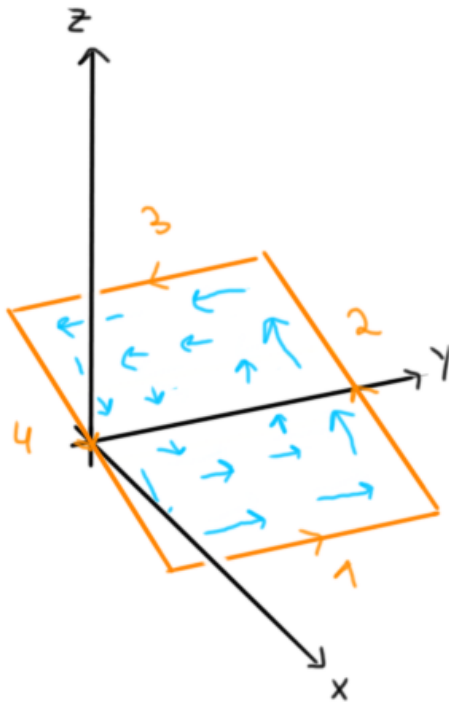


Im zweiten Beispiel haben wir versucht die Maßstäbe ein bisschen zu ändern. Wir können hoffentlich deutlich erkennen, dass das Vektorfeld entlang des 1. Weges "stärker" ist als das Vektorfeld entgegen des 3. Weges. So wäre umgangssprachlich der 1. Weg "negativer" als der 3. Weg positiv ist und wir hätten insgesamt einen negativen Wert bei der Summe.



Nun haben wir noch anschaulicher eine "Rotation" zum Vektorfeld eingefügt. Die Summe der Integrale über die einzelnen Wege ist jetzt eindeutig negativ.





Auch hier ist die Summe der einzelnen Wegen offensichtlich negativ, denn wir uns immer entlang des Vektorfelds bewegt haben.

Durch solche Beobachtungen hat Stokes einen Zusammenhang zwischen der Rotation eines Vektorfelds und dem Integral in einem geschlossenen Weg festgestellt. Nämlich hat er bewiesen, dass die Summe der Integrale über dem Rand des Weges gleich dem Integral über seine Rotation sein soll. Dies bietet enorme Vorteile gegenüber der Berechnung durch einzelne Teilstrecken, denn manchmal, und vor allem bei krummen Flächen lassen sich die Wege nicht einfach parametrisieren, oder es werden zu viele verschiedene Integrale.

Den Beweis werden wir hier nicht durchführen, aber hoffentlich wird es an einigen Beispielen klar.

Als kurze Erinnerung, das Linienintegral eines geschlossenen Weges ist

$$\oint \vec{F} d\vec{s} \quad (1.8.1)$$

In der Vorlesung haben wir die Herleitung unseres Flächenintegrals besprochen, aber im Moment werden wir nur eine kurze Wiederholung der enthaltenen Elemente machen:

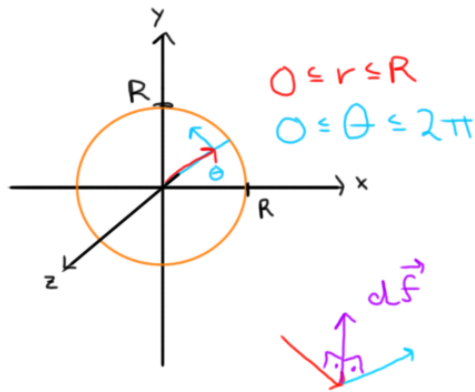
$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{f} \quad (1.8.2)$$

Dabei haben wir nicht mehr das Kraftfeld  $\vec{F}$  alleine, sondern es durch  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$  ersetzt.

Außerdem haben wir noch etwas vertauscht: Wir integrieren nicht mehr nach  $d\vec{s}$ , sondern nach  $d\vec{f}$ . Dieser  $d\vec{f}$  zeigt uns in welche Richtung unsere Fläche orientiert ist. Wenn z.B.  $d\vec{f}$  nach "oben" zeigt, dann muss man den Rand gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Die Fläche soll so zu sagen "links" vom Drehsinn sein. Wir können uns  $d\vec{f}$  als ein Vektor vorstellen, der senkrecht zur Fläche steht. Andere Definitionen des Satzes verwenden

nämlich  $d\vec{f} = df \cdot \vec{n}$ . Damit ist der Skalarprodukt zwischen dem infinitesimalen Unterschied in Fläche mit dem Normalvektor am entsprechenden Punkt der Fläche gemeint.

In Fällen, wo der Normalvektor offensichtlich ist, wie z.B. wenn die Fläche sich auf einer der Koordinaten ebenen befindet muss man nicht viel rechnen, aber für die komplizierteren Beispielen werden wir gleich sehen, wie man es bestimmt:



Hier schauen wir uns ein Beispiel an, bei dem wir intuitiv und mathematisch diesen Normalvektor  $d\vec{f}$  bestimmen möchten:

Unser Kreis befindet sich auf der x-y-Ebene, also können wir vermuten, dass der Normalvektor entlang der z-Achse zeigen soll. Wir könnten vielleicht schon naiv sagen, dass unser

Normalvektor  $d\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist. Aber das

wäre noch nicht ganz richtig, denn wir haben den *infinitesimalen* Teil des Vektors vergessen.

Unten im Bild sind der Vektor in **Radiusrichtung** und der Vektor in **Winkelrichtung** abgebildet. Der Vektor in **Normalrichtung** ist dann senkrecht zu den anderen beiden Vektoren. Zum Glück wissen wir, dass der Kreuzprodukt zweier Vektoren einen neuen Vektor ergibt, der orthogonal zu den anderen beiden ist. In diesem Fall stehen Radiusvektor und Winkelvektor schon orthogonal zu einander, aber die zwei Vektoren die wir nehmen müssen nicht unbedingt. Deswegen verallgemeinern wir das zuerst.

Wir suchen einen Vektor mit welchem wir jeden Punkt der Fläche treffen können.

Wir kennen schon den Einheitsradiusvektor

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.3)$$

mit welchem wir jeden Punkt im äußerend Rand erreichen können. Und um jeden Punkt auch innerhalb des Umfangs zu treffen können wir mit einem variablen Radius unser Problem lösen:

$$\vec{f}(r, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.4)$$

Offensichtlich müssen wir hier grenzen setzen, denn mit jedem beliebigen Radius und Winkel könnten wir alle Punkte der Ebene treffen.

Wir definieren  $r \in [0, R]$  und  $\theta \in [0, 2\pi]$

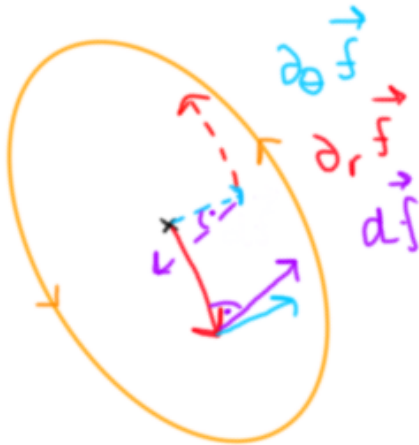
Den Normalvektor  $d\vec{f}$  erhalten wir, wenn wir die Parametrisierung der Fläche  $\vec{f}(r, \theta)$  partiell nach beiden Variablen ableiten und das Kreuzprodukt bilden. Nicht zu vergessen

sind die Variablen nach welchen wir abgeleitet haben:

$$\partial_r \vec{f} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.5)$$

$$\partial_\theta \vec{f} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8.6)$$

Achtung! Im nächsten Schritt müssen wir auf die Reihenfolge aufpassen. Wir möchten dafür sorgen, dass der Normalvektor nach "oben" zeigt. Dies ist besonders nötig, wenn wir eine geschlossene Fläche mit einem "Innen" und einen "Außen" haben, wie ein Quader oder die Fläche einer Kugel.



Wir bestimmen also

$$d\vec{f} = (\partial_r \vec{f} \times \partial_\theta \vec{f}) dr d\theta \quad (1.8.7)$$

$$= \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot 0 - 0 \cdot r \cos \theta \\ 0 \cdot (-r \sin \theta) - \cos \theta \cdot 0 \\ \cos \theta \cdot r \cos \theta - \sin \theta \cdot (-r \sin \theta) \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.10)$$

Das war es dann zum Beispiel, wir haben gezeigt, dass unser Normalvektor, wie wir schon vermutet hatten, *nur* in die z-Richtung zeigt.

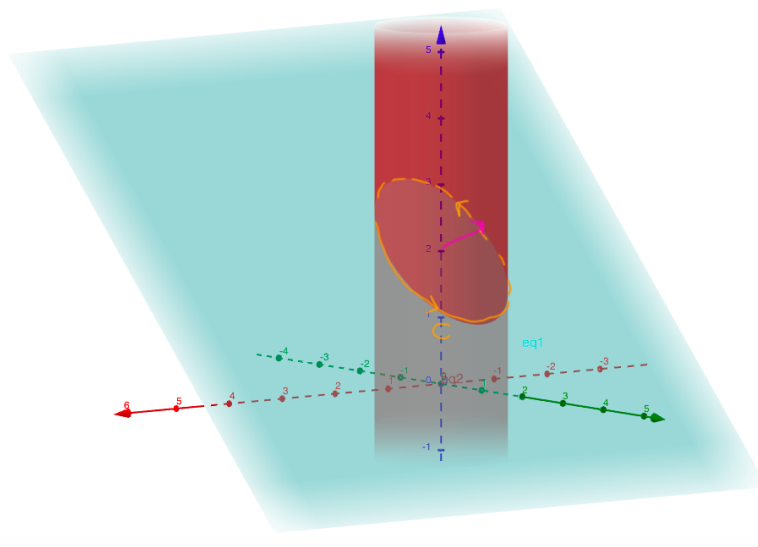
Der Aufwand beim Satz von Stokes ist jetzt nicht die Wege richtig zu parametrisieren, sondern eine Parametrisierung zu finden, mit welcher wir jeden Punkt innerhalb und keinen Außerhalb der Fläche treffen können.

Beispiel Time

### Beispiel

1. Wir betrachten den Querschnitt eines Zylinders mit einer Ebene und gehen entlang des äußeren Rands des Schnittes

- Zylinder:  $Z : x^2 + y^2 = 1$
- Ebene:  $E : y + z = 2$
- Kraftfeld:  $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y^2 \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$



Wir interessieren uns für den Wert des Integrals um diesen orange markierten geschlossenen Weg. Wir fahren folgendermaßen fort:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_A \text{rot } \vec{F} d\vec{f} \quad (1.8.11)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (1.8.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_y z^2 - \partial_z x \\ -\partial_z y^2 - \partial_x z^2 \\ \partial_x x + \partial_y y^2 \end{pmatrix} \quad (1.8.13)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + 2y \end{pmatrix} \quad (1.8.14)$$

Nun kennen wir schon den ersten Teil des Integrals, aber wie sieht es mit dem Rest aus? Wie können wir die Fläche parametrisieren? Eine Idee haben wir schon: Projiziert auf die x-y-Ebene haben wir einen ganz normalen Kreis. Genau wie bei unserem Musterbeispiel können wir also jetzt den Radiusvektor bestimmen:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \quad (1.8.15)$$

Und wir wissen, dass  $z = 2 - y$ , weil der Weg  $C$  entlang der Ebene  $E$  verläuft. Das heißt, dass wir unsere Fläche mit

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 2 - y \end{pmatrix} \quad (1.8.16)$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 2 - r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.8.17)$$

parametrisieren können.

Nehmen wir einen infinitesimalen Stück davon und erhalten

$$d\vec{f} = (\partial_r \times \partial_\theta) dr d\theta \quad (1.8.18)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -r \cos \theta \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.8.20)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.21)$$

Jetzt haben wir alles fürs integrieren vorbereitet, nur müssen wir einsetzen:

$$\int_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.22)$$

$$= \int_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+2r \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} dr d\theta \quad (1.8.23)$$

$$= \int_A r + 2r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (1.8.24)$$

Wir haben aber im Moment nur *ein* Integral und zwei Variablen nach welchen wir integrieren möchten, also brauchen wir eigentlich *zwei* Integrale, die jeweils zur entsprechenden Variable passen.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r + 2r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (1.8.25)$$

Die Grenzen haben wir so gewählt, weil das sind die Werte die jeweils der Radius und der Winkel annehmen können. Wir fangen an indem wir das "innere" Integral bestimmen:

$$\int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} + \frac{2r^3 \sin \theta}{3} \right]_0^1 d\theta \quad (1.8.26)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \theta}{3} \right) - (0) \right] d\theta \quad (1.8.27)$$

$$= \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{2 \cos \theta}{3} \right]_0^{2\pi} \quad (1.8.28)$$

$$= \left( \pi - \frac{2}{3} \right) - \left( -\frac{2}{3} \right) \quad (1.8.29)$$

$$= \pi \quad (1.8.30)$$

Wir haben die richtige Lösung! Aber das Integral hätte vielleicht ein bisschen einfacher sein können. Lasst uns kurz zurück gehen. Wenn wir nun zuerst nach dem Winkel integriert hätten, wäre unser Integral viel einfacher geworden. Dieses war ja eh nicht so schwierig, aber für die Zukunft müssen wir aufpassen, denn wir könnten unser Leben an vielen Stellen einfacher machen.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r + 2r^2 \sin \theta dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r + 2r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (1.8.31)$$

$$= \int_0^1 [r\theta - 2r^2 \cos \theta]_0^{2\pi} dr \quad (1.8.32)$$

$$= \int_0^1 [(2\pi r - 2r^2 \cos 2\pi) - (-2r^2 \cos 0)] dr \quad (1.8.33)$$

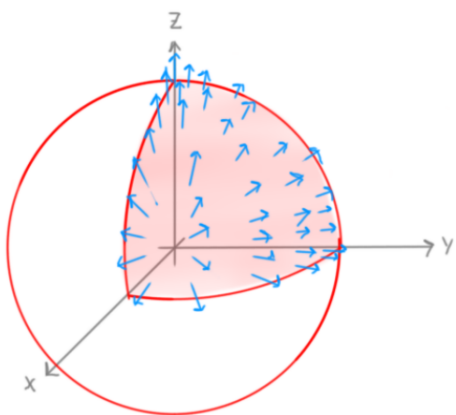
$$= \int_0^1 2\pi r dr \quad (1.8.34)$$

$$= [\pi r^2]_0^1 \quad (1.8.35)$$

$$= \pi \quad (1.8.36)$$

## 1.9 Satz von Gauß

Nun kommen wir zum dritten Kapitel in unserer Saga des Fundamentaltheorems der Analysis. Als kurze Wiederholung besagt dies, dass man den "Wert" einer Kurve (1-dimensional) mithilfe zweier Punkten (0-dimensional) bestimmen können. So haben wir diese Definition auf die nächste Ebene mit dem Satz von Stokes erweitert, der besagt, dass Information einer Fläche (2-dimensional) in ihrem Rand (1-dimensional) versteckt ist und vizeversa, und als letztes können wir analog diese Eigenschaften auf ein Volumen übersetzen. In einer Oberfläche (2-dimensional) finden wir Information eines Volumens (3-dimensional). Im Satz von Stokes haben wir mit der Rotation gearbeitet, jetzt interessieren wir uns für die Divergenz.



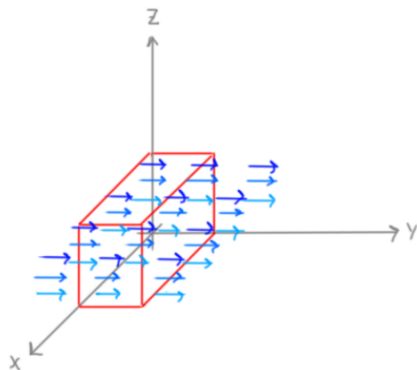
Ähnlich wie beim Satz von Stokes, können wir eine Aussage über das innere eines geschlossenen Randes, mithilfe dem Rand selbst treffen. Wir multiplizieren einen kleinen Stück  $d\vec{f}$  unserer Fläche mit dem Vektorfeld  $\vec{F}$  und summieren alle infinitesimal kleinen Stücke auf. Dann multiplizieren wir einen kleinen Stück Volumen  $dV$  und multiplizieren ihn mit der Divergenz unseres Vektorfeldes  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  und summieren entsprechend über alle infinitesimal kleinen Volumenelemente auf. Der Satz von Gauß sagt uns, dass diese beiden Aussagen äquivalent zu einander sind:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_A \vec{F} d\vec{f} \quad (1.9.1)$$

Als anschauliche Analogie stellt man sich üblicherweise die Strömung einer Flüssigkeit vor. Sei  $\vec{F}$  diese Strömung:

Der Satz besagt, dass die Summe aller "Strömungsquellen" gleich die Strömung ist, die aus der Fläche  $A$  rauskommt, bzw. reinkommt. Was genau ist aber eine "Strömungsquelle"? An der oberen Skizze können wir sehen, dass Pfeile sich weg vom Zentrum des Volumens bewegen, es ist als ob aus dem Ursprung eine Strömung nach Außen gäbe. Diese Flüssigkeit ist aber inkompressibel, also dadurch, dass aus dem Ursprung immer wieder mehr Flüssigkeit rauskommt, muss dann eine entsprechende Menge aus der Oberfläche des

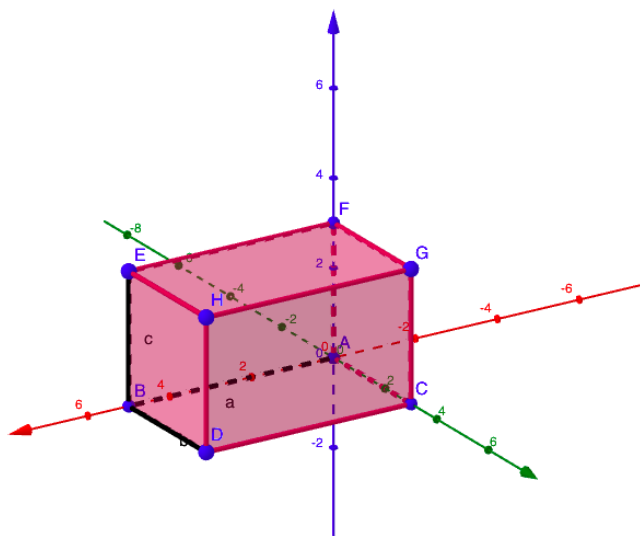
Volumens strömen. An diesem Beispiel können wir uns leicht vorstellen, dass die Quantität, die aus der Oberfläche rausströmt, gleich der Strömung innerhalb des Volumens ist.



Als Gegenbeispiel gucken wir uns die nebenstehende Skizze an: Wenn wir weiter mit der Flüssigkeit-Analogie machen, können wir uns das als ein Abschnitt eines Flusses vorstellen. Ein Teil des Wassers strömt in das Quader hinein, wir können uns dies als eine negative Strömung vorstellen, und die gleiche Menge Wasser strömt aus dem Quader heraus, das wäre eine positive Strömung. Wenn wir alles aufaddieren, kommen wir auf eine Gesamtströmung von Null. Das macht Sinn, denn es keine Wasserquelle im Quader gibt.

### Beispiel

1. Wir haben ein quaderförmiges Volumen:



Unser Volumen wird von den folgenden Ebenen eingeschlossen:

$$x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$$

Unser Vektorfeld sei

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (1.9.2)$$



Wir möchten den Fluss  $\phi$  des Vektorfeldes durch die Oberfläche des Quaders bestimmen.

Dazu haben wir die folgenden Möglichkeiten: entweder integrieren wir die Divergenz des Quaders über sein Volumen, oder das Vektorfeld über seine Fläche.

Wir fangen mal an mit dem Flächenintegral<sup>a</sup>:

(a) Parametrisierung der Oberfläche des Quaders:

Das Problem hier ist, wir brauchen 6 verschiedene Parametrisierungen, eine für jede Seite des Quaders. Dann müssen wir die 6 verschiedenen Integrale bestimmen. Man merkt schon bei einem ganz einfachen Körper, es wird eine ziemlich große Menge Arbeit sein.

$$\vec{A}(r, s)_{ABCD} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq s \leq b \quad (1.9.3)$$

$$\vec{A}(r, s)_{EFGH} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ c \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq s \leq b \quad (1.9.4)$$

$$\vec{A}(r, s)_{ABEF} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq t \leq c \quad (1.9.5)$$

$$\vec{A}(r, s)_{CDGH} = \begin{pmatrix} r \\ b \\ s \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq s \leq c \quad (1.9.6)$$

$$\vec{A}(r, s)_{ACFG} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq b, 0 \leq s \leq c \quad (1.9.7)$$

$$\vec{A}(r, s)_{BDEH} = \begin{pmatrix} a \\ r \\ s \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq b, 0 \leq s \leq c \quad (1.9.8)$$

(b) Berechnung der Integrale:

$$\phi = \int_A \vec{F} d\vec{f} \quad (1.9.9)$$

$$(1.9.10)$$

$$\phi_{ABCD} = \int_0^a dx \int_0^b dy \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.9.11)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \quad -(x^2 + y^2) \quad (1.9.12)$$

$$= - \int_0^a dx \quad bx^2 + \frac{b^3}{3} \quad (1.9.13)$$

$$= - \left( \frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} \right) \quad (1.9.14)$$

$$\phi_{EFGH} = \int_0^a dx \int_0^b dy \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.9.15)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \quad x^2 + y^2 \quad (1.9.16)$$

$$= \frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} \quad (1.9.17)$$

$$\phi_{ABEF} = \int_0^a dx \int_0^c dz \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9.18)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dz \quad -yz \quad y = 0 \text{ siehe Zeichnung} \quad (1.9.19)$$

$$= 0 \quad (1.9.20)$$

$$\phi_{CDGH} = \int_0^a dx \int_0^c dz \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9.21)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^c dz \quad yz \quad (1.9.22)$$

$$= \int_0^a dx \quad \frac{yc^2}{2} \quad y = b \text{ siehe Zeichnung} \quad (1.9.23)$$

$$= \frac{abc^2}{2} \quad (1.9.24)$$

$$\phi_{ACFG} = \int_0^b dy \int_0^c dz \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9.25)$$

$$= \int_0^b dy \int_0^c dz \quad -xz \quad x = 0 \text{ siehe Zeichnung} \quad (1.9.26)$$

$$= 0 \quad (1.9.27)$$

$$\phi_{BDEH} = \int_0^b dy \int_0^c dz \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9.28)$$

$$= \int_0^b dy \int_0^c dz \, xz \quad | \quad x = a \text{ siehe Zeichnung} \quad (1.9.29)$$

$$= \int_0^b dy \frac{ac^2}{2} \quad (1.9.30)$$

$$= \frac{abc^2}{2} \quad (1.9.31)$$

Fiuf, jetzt sind wir fast fertig, wir müssen nur noch die Summe bilden:

$$\phi = \sum_i I_i = -\frac{ba^3}{3} - \frac{ab^3}{3} + \frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} + \frac{abc^2}{2} + \frac{abc^2}{2} \quad (1.9.32)$$

$$= abc^2 \quad (1.9.33)$$

Aber guckt, es waren fast 3 Seiten plus ganz viel Kopfarbeit, nur um auf das Ergebnis zu kommen. Es geht einfacher mit dem Satz von Gauß!

(a) Parametrisierung des Volumens des Quaders:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad | \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq s \leq b, \quad 0 \leq t \leq c \quad (1.9.34)$$

$$(1.9.35)$$

(b) Berechnung der Integrale:

$$\phi = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad | \quad dV = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (1.9.36)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} = 2z \quad (1.9.37)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \, 2z \quad (1.9.38)$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \, c^2 \quad (1.9.39)$$

$$= \int_0^a dx \, bc^2 \quad (1.9.40)$$

$$= abc^2 \quad (1.9.41)$$

<sup>a</sup>Hier werden viele Schritte übersprungen, gehe zu [1.6](#) und [1.8](#) für mehr Information

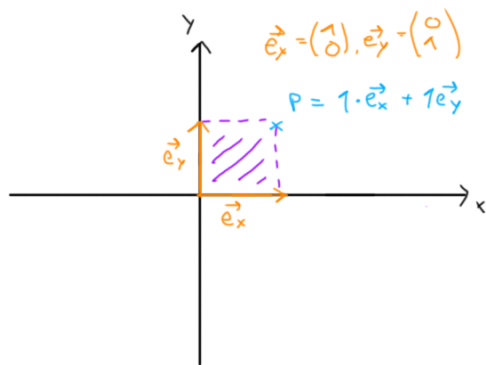
## 1.10 Matrizenrechnung

### 1.10.1 Grundwissen

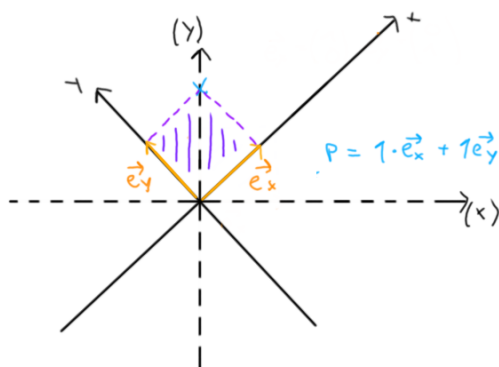
Als kurze Wiederholung werden wir hier besprechen wie man Matrizen miteinander multipliziert, die Determinante bestimmt und was eine inverse Matrix macht. Aber zuerst ist es nützlich zu verstehen, was genau es ist was Matrizen machen.

Um zu verstehen, wie man Matrizen als *Transformationen* des Raums visualisieren kann, werden wir im 2-dimensionalen Raum ein paar Beispiele einführen. Nirgendwo ist es besser erklärt als im Video zu linearen Transformationen und Matrizen und zur Determinante des Mathematikers und YouTubers [3Blue1Brown](#), aber wir werden versuchen das Wesentliche zu zeigen.

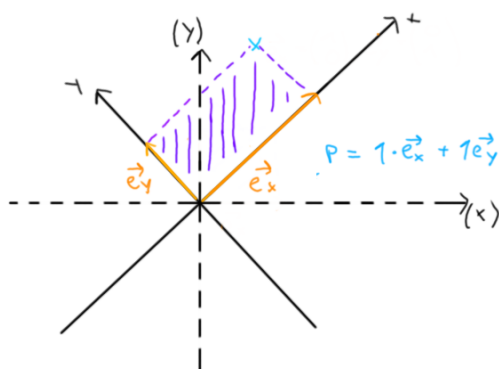
Wir sind es gewöhnt mit einem gewissen Koordinatensystem zu arbeiten. Man geht 1 Schritt nach rechts oder links und 1 nach oben oder nach unten.



Wir haben schon eine ganz gute Intuition von was passiert, wenn wir uns in  $\vec{e}_x$  oder  $\vec{e}_y$  Richtung bewegen.



Aber Koordinatensysteme müssen nicht immer dem gleichen Muster folgen. Wir haben jetzt z.B. unser Koordinatensystem rotiert. Beachte dabei, dass der Punkt P sich jetzt irgendwo anders befindet.



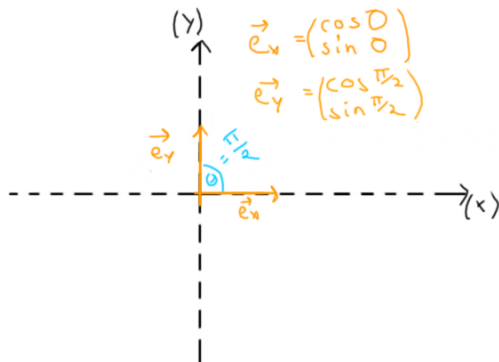
Jetzt haben wir es rotiert *und* gestreckt, im Vergleich zum ursprünglichen KS. Schauen wir uns auch die lilane Fläche an. Sie ist jetzt größer geworden. Der Raum selbst habe sich so zu sagen vergrößert. Dazu werden wir bald bei der Definition der Determinante zurück kommen.

Den Raum und somit unsere Koordinatensysteme können wir so mit Matrizen trans-

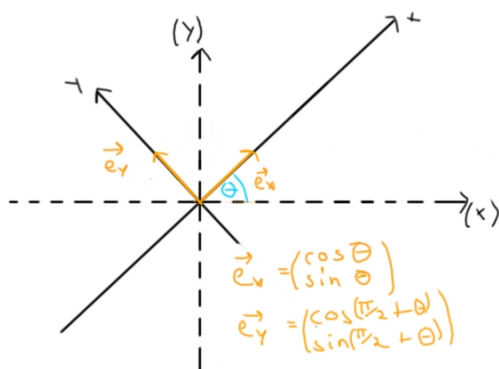
formieren.

Wir müssen nur aufpassen, was mit unseren Basisvektoren passiert und wissen dann, wie man zu jedem anderen Punkt auf dem Koordinatensystem kommt.

Bei einer Rotation können wir leicht merken, dass die Einheitsvektoren sich gemäß dem Einheitskreis verändern.



Diese Definition passt natürlich auch zu unserem ursprünglichen Koordinatensystem.



Stellen wir uns ein spezifisches Beispiel vor: Wir drehen das Koordinatensystem um  $45^\circ$ . Dabei wählen wir als Basisvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Wir könnten sicherlich mit solchen Basisvektoren arbeiten, aber noch einfacher könnten wir die Transformation dieses Raumes als eine Matrix darstellen. Wir können die beiden Basisvektoren mit einer  $2 \times 2$ -Matrix ausdrücken, in der erste Spalte wären die neuen Koordinaten des Basisvektors  $\vec{e}_x$  im Vergleich zum alten Koordinatensystem, und in der zweite Spalte wären die Koordinaten des neuen  $\vec{e}_y$  Vektors:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.10.1)$$

Durch diese Matrix werden wir jetzt jedem beliebigen "alten" Vektor, einen neuen Punkt im neuen Koordinatensystem zuordnen können. Als Beispiel und zum Überprüfen können wir unseren alten Basisvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  nehmen.

$$A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.10.2)$$

Nicht alle Matrizen "transformieren" den Raum auf eine schöne und anschauliche Weise. Manchmal kann es schwer sein sich die Transformation einer nicht quadratischen Matrix vorzustellen.

### 1 Multiplikation

Man darf zwei Matrizen  $A \cdot B$  miteinander multiplizieren, wenn  $A$  genauso viele Spalten wie  $B$  Zeilen hat. Mit der Einsteinschen Summenkonvention schreiben wir:

$$C_{ik} = (A \cdot B)_{ik} = a_{ij}b_{jk} \quad (1.10.3)$$

So lesen wir, dass die Matrix  $C$  genauso viele Zeilen wie  $A$  und Spalten wie  $B$  hat. Unter dem Abschnitt zur Einsteinschen Summenkonvention 1.3.1 haben wir diesen Prozess detaillierter erklärt. Hier werden wir einige Beispiele machen.

#### Beispiel

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 0.3 & 7 \\ 17 & 0 & -5.1 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \quad (1.10.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -11 \\ 9 & 1 & 6 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \quad (1.10.5)$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -1.3 & 18.3 & -81.2 \\ 54.4 & 115.6 & -22.7 \\ -29 & -50 & -124 \end{bmatrix} \quad (1.10.6)$$

$$c_{11} = 12 \cdot 2 + 0.3 \cdot 9 + 7 \cdot (-4) = -1.3 \quad (1.10.7)$$

$$c_{12} = 12 \cdot 5 + 0.3 \cdot 1 + 7 \cdot (-6) = 18.3 \quad (1.10.8)$$

$$c_{13} = 12 \cdot (-11) + 0.3 \cdot 6 + 7 \cdot 7 = -81.2 \quad (1.10.9)$$

$$c_{21} = 17 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + (-5.1) \cdot (-4) = 54.4 \quad (1.10.10)$$

$$c_{22} = 17 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-5.1) \cdot (-6) = 115.6 \quad (1.10.11)$$

$$\dots \quad (1.10.12)$$

Um  $c_{ik}$  zu bestimmen, multiplizieren wir den 1. Eintrag der i-ten Zeile aus  $A$  mit dem 1. Eintrag der k-ten Spalte aus  $B$ , den 2. mit dem 2. usw. und addieren sie zusammen.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & 1 \\ 1.5 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.10.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad (1.10.14)$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 104 & 12 \\ -21 & -11 & 7.5 \end{bmatrix} \quad (1.10.15)$$

$$c_{11} = 3 \cdot (-2) + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 34 \quad (1.10.16)$$

$$c_{12} = 3 \cdot 6 + 7 \cdot 11 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 7 = 104 \quad (1.10.17)$$

$$c_{13} = 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 12 \quad (1.10.18)$$

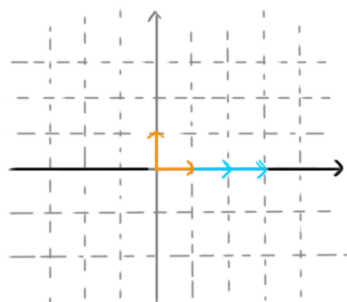
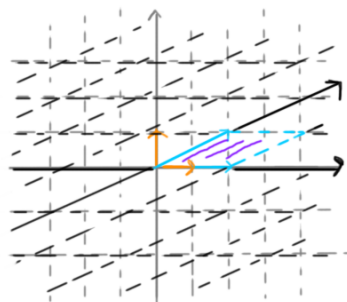
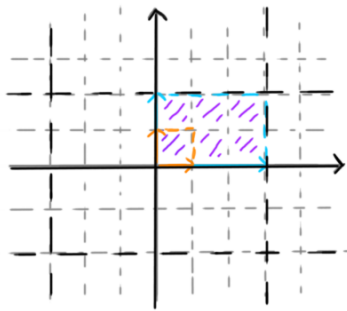
$$c_{21} = 1.5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + 8 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 = -21 \quad (1.10.19)$$

$$c_{22} = 1.5 \cdot 6 + (-3) \cdot 11 + 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = -11 \quad (1.10.20)$$

$$c_{23} = 1.5 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 7.5 \quad (1.10.21)$$

## 2 Determinante

Wir können uns die Determinante vorstellen, als der "Streckungsfaktor" unserer Matrix. Wenn wir ein Koordinatensystem transformieren und die Fläche bzw. das Volumen das zwischen den Basisvektoren eingeschlossen wird beobachten, so können wir uns eine Vorstellung über die Determinante machen.



Mit der Matrix

$$A^a = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

transformieren wir den Raum<sup>b</sup> und intuitiv können wir vielleicht schon sagen, dass der Raum jetzt "6 mal so groß" ist. Bald werden wir das auch rechnerisch beweisen.

<sup>a</sup>Den  $\vec{e}_x$  Vektor haben wir zum Punkt (3, 0) verschoben und den  $\vec{e}_y$  Vektor zum Punkt (0, 2).

<sup>b</sup>Im Hintergrund haben wir noch unser altes Koordinatensystem stehen gelassen um den Unterschied deutlicher zu machen.

Mit Matrizen können wir auch die Basisvektoren "näher" zu einander verschieben oder "weiter" voneinander entfernen, indem wir den Winkel zwischen den beiden verkleinern oder vergrößern.

Aus dem Bauchgefühl können wir denken, dass die Fläche unter dem blauen Parallelogramm 2 Flächeneinheiten entspricht. Das wurde nach unserer "Definition" bedeuten, dass die Determinante gleich 2 ist.

Bisher hatten wir Transformationen, bei welchen wir eindeutig einem "alten" Punkt einem "neuen" Punkt zuordnen konnten. Aber schauen wir uns jetzt an, was mit unserem Koordinatensystem passiert ist. Wir haben die Basisvektoren zu dicht an einander verschoben und jetzt können sie nur eine gerade, keine Ebene, bilden. Unendlich viele "alte" Punkte sind nun auf einen einzelnen Punkt auf der Gerade gelandet.

Wenn wir aus diesem Zustand wieder in unser ursprüngliches Koordinatensystem zurück kehren wollten, wüssten wir überhaupt nicht wie wir einen Punkt der Gerade wieder zu seinem ursprünglichen Platz bringen könnten, es hat ja keinen eindeutigen Platz wo er in unserem alten Koordinatensystem gehört. Wir erkennen auch sofort, dass die Basisvektoren keine "Fläche" einschließen, also ist wahrscheinlich die Determinante gleich 0.



In der Vorlesung wurde die Determinante quadratischer  $n \times n$ -Matrizen wie folgt definiert:

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (1.10.22)$$

Zuerst möchten wir die Summe, die das Levi-Civita-Symbol versteckt noch *expliziter* hinschreiben:

$$\det A = \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \quad (1.10.23)$$

Zu diesem Punkt sollte man zumindest schon die Vorteile der Einsteinschen Summenkonvention gemerkt haben, also lassen wir ab jetzt alle Summenzeichen weg.

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \quad (1.10.24)$$

Es gibt aber einen anderen Weg wie wir die Determinante jeder quadratischen Matrix bestimmen können. Wir fangen bei der ganzen Matrix an und erarbeiten uns den Weg bis wir mehrere kleinere  $2 \times 2$ -Matrizen haben:

(a)  $4 \times 4$ -Matrix:

Das werden ganz schnell ganz viele kleine Rechnungen sein, also müssen wir gut aufpassen, aber wenn wir den "Algorithmus" kennen, dann läuft es sehr einfach.

Dafür müssen wir uns an zwei Sachen erinnern: An das alternierende  $+-$  Muster und dass wir jeweils die zugehörigen Spalten und Zeilen wegstreichen müssen.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (1.10.25)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (1.10.26)$$

Wir haben jetzt erfolgreich die Bestimmung der Determinante einer  $4 \times 4$ -Matrix zu der Bestimmung  $4 \cdot 3 \times 3$ -Matrizen reduziert.

(b)  $3 \times 3$ -Matrix

Machen wir mit der gleichen Matrix weiter:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (1.10.27)$$

$$= a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (1.10.28)$$

Aus einer  $3 \times 3$ -Matrix haben wir jetzt 3  $2 \times 2$ -Matrizen. Also insgesamt müssen wir  $4 \cdot 3 = 12$   $2 \times 2$ -Matrizen berechnen.

(c)  $2 \times 2$ -Matrix

Es gilt nun auch der gleiche Ansatz wie vorhin:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad (1.10.29)$$

$$= a_{33} |a_{44}| - a_{34} |a_{43}| \quad (1.10.30)$$

$$= a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} \quad (1.10.31)$$

Allgemein ist die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1.10.32)$$

### Beispiel

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.10.33)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad (1.10.34)$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (1.10.35)$$

$$= 2[3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4] + 1[3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1] + 3[3 \cdot 4 - 3 \cdot 1] \quad (1.10.36)$$

$$= 2 \cdot (1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (9) \quad (1.10.37)$$

$$= 27 \quad (1.10.38)$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.10.39)$$

Bevor wir die Determinante rechnerisch bestimmen können wir vermuten was es sein wird. Stellen wir uns vor wie diese Matrix unseren Raum transformieren würde, wenn der eine Basisvektor in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und der andere in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  zeigt.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (1.10.40)$$

$$= 0 \cdot (-2) - 0 \cdot (1) \quad (1.10.41)$$

$$= 0 \quad (1.10.42)$$

Und als nächster Versuch werden wir uns ein paar verschiedene Vektoren vor und nach ihrer Transformation mit dieser Matrix anschauen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.10.43)$$

Nach der Transformation würden alle drei Vektoren auf den gleichen Punkt  $(0, 2)$  auf der Gerade landen. Wenn wir die Transformation jetzt rückgängig machen wollten, könnten wir diesem Punkt  $(0, 2)$ <sup>a</sup> eindeutig einem neuen Punkt zuordnen.

<sup>a</sup>und ausschließlich dem Ursprung keinem anderen Punkt

### 3 Inverse Matrix

Somit kommen wir zur Inversen Matrix, denn die Voraussetzung zum Bilden einer inverse Matrix ist, dass die Determinante unserer ursprünglichen Matrix nicht 0 ist.

Eine Inverse Matrix hilft uns nämlich, nach einer Transformation zurück zu unserem ursprünglichen Zustand zu kommen.

$$A \cdot A^{-1} = I \quad (1.10.44)$$

Hier ist  $I$  die Einheitsmatrix, die diagonal nur Einträge 1 hat

Für die explizite Berechnung siehe lieber LA lol.

## 1.10.2 Drehmatrizen

### Motivation

Drehmatrizen stellen in allen bereichen unseres studiums einen wichtigen Bestandteil dar. In der Vorlesung gab es hierzu vermehrt Fragen, daher hier eine (sehr) kleine Zusammenfassung

### Beispiele

Der einfachste Fall einer Drehmatrix findet sich im  $\mathbb{R}^2$ .

#### Beispiel

1.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{v} * R \equiv \text{Drehung um } (0,0) \text{ mit } \varphi \quad (1.10.45)$$

2.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{v} * R \equiv \text{Drehung um } (0,0) \text{ mit } -\varphi \quad (1.10.46)$$

Schwieriger wird es jedoch im  $\mathbb{R}^3$ , da wir hier die Achse, um welche gedreht wird, berücksichtigen müssen.

#### Beispiel

1.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{v} * R \equiv \text{Drehung um die x-Achse mit } \varphi \quad (1.10.47)$$

2.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{v} * R \equiv \text{Drehung um die y-Achse mit } \varphi \quad (1.10.48)$$

3.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \vec{v} * R \equiv \text{Drehung um die z-Achse mit } \varphi$$

(1.10.49)

Vielleicht fällt hier bereits ein gewisses Muster auf. Die Achse, um welche gedreht wird, ist stets in der Matrix mit dem Einheitsvektor vertreten.

# Kapitel 2

## Physik

### 2.1 Harmonischer Oszillator

#### 2.1.1 Harmonischer Oszillator $[\mathbb{R}]$

Viele Phänomene der Physik lassen sich (annähernd) als harmonische Oszillatoren beschreiben. Im einfachsten Fall ist ein harmonischer Oszillator ein Massenpunkt unter dem Einfluss einer Kraft

$$F(x) = -kx \quad (2.1.1)$$

Es ist wichtig, dass wir uns an dieser Stelle an die potentielle Energie erinnern,

$$E_{pot} = \frac{kx^2}{2} \quad (2.1.2)$$

denn so werden wir häufig die Kraft  $F(x)$  als die erste Ableitung der potentiellen Energie  $E_{pot}$  bzw. des Potentials  $V$  betrachten:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (2.1.3)$$

Der Massenpunkt ruht an Stellen wo momentan keine Kraft zugegeben oder abgenommen wird, d.h. an Stellen wo die Steigung des Potentials 0 ist. An den Stellen hat das Potential Extrempunkte. Dabei unterscheidet man zwischen labilen, neigend zu Veränderungen, Hochpunkten, und stabilen Tiefpunkten. Wir interessieren uns in der Regel für Tiefpunkten, wenn wir die Stabilität eines Massenpunktes beobachten.

Mit einem harmonischen Oszillator kann man *alle* kleine Bewegungen um stabile Ruhelagen beschreiben! Um dies zu zeigen wurde in der Vorlesung folgende Differentialgleichung gegeben:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1.4)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \left| \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right. \quad (2.1.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (2.1.6)$$

Wie üblich bei Differentialgleichungen, gibt es viele Wege diese zu lösen, ein möglicher Beispiel wäre mit dem Exponentialansatz:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \left| x \sim e^{\alpha t} \right. \quad (2.1.7)$$

$$\rightarrow (\alpha^2 + \omega^2)e^{\alpha t} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\alpha^2 = -\omega^2 \quad (2.1.9)$$

$$\alpha_1 = i\omega \quad (2.1.10)$$

$$\alpha_2 = -i\omega \quad (2.1.11)$$

$$\rightarrow x_1 = C_1 e^{i\omega t} \quad \left| e^{ix} = \cos x + i \sin x \right. \quad (2.1.12)$$

$$= C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (2.1.13)$$

$$x_2 = C_2 e^{-i\omega t} \quad (2.1.14)$$

$$= C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (2.1.15)$$

$$\rightarrow x = C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (2.1.16)$$

$$= (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t \quad \left| (C_1 + C_2) = A, i(C_1 - C_2) = B \right. \quad (2.1.17)$$

Als Lösung zum System erhalten wir also:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.1.18)$$

Bei komplizierteren Problemstellungen werden wir auch oft eine [zu der Geschwindigkeit proportionale Reibung](#) und/oder eine [zugeführte Kraft](#) im System haben:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x} + F^1 \quad (2.1.19)$$

## 2.1.2 Harmonischer Oszillator [C]

Die Frage, wieso ein mathematischer Konstrukt wie die Wurzeln aus negativen Zahlen und allgemein die komplexen Zahlen in der Physik, der Beschreibung der Natur auftauchen ist natürlich rechtfertigt. Dabei ist es wichtig zu erkennen, dass sie nicht *unbedingt* auftauchen sollten. Die Gleichungen, die wir mithilfe komplexer Zahlen lösen werden sind auch mit der realen Analysis lösbar, aber in der Regel extrem aufwendiger. Deswegen benutzen wir komplexe Zahlen um solche Problemen zu vereinfachen.

Vor allem werden wir den Fall eines harmonischen Oszillators mit Reibung betrachten, für welchen wir die folgende Differentialgleichung brauchen:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x} \quad (2.1.20)$$

---

<sup>1</sup>Das ist eine lineare Differentialgleichung!

Wir nehmen dafür an, dass  $x$  proportional zu irgendeiner exponentiellen Funktion  $e^{\alpha t}$  ist. Noch wissen wir noch nicht, was  $\alpha$  ist, aber so können wir sagen, dass

$$\alpha^2 e^{\alpha t} = -\omega^2 e^{\alpha t} - c\alpha e^{\alpha t} \quad (2.1.21)$$

und

$$\alpha^2 = -\omega^2 - c\alpha \quad (2.1.22)$$

oder

$$\alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0 \quad (2.1.23)$$

Uns interessiert diese Gleichung nach  $\alpha$  aufzulösen. Sei nun  $\omega$  vernachlässigbar klein, dann haben wir die Lösung

$$\alpha^2 + c\alpha = 0 \quad (2.1.24)$$

$$\alpha_1 = -c \quad (2.1.25)$$

$$\alpha_2 = 0 \quad (2.1.26)$$

Da  $x \sim e^{\alpha t}$  ist, erhalten wir mit 2 frei wählbaren Konstanten

$$x = Ae^{-0t} + Be^{-ct} \quad (2.1.27)$$

$$x = A + Be^{-ct} \quad (2.1.28)$$

Sei nun im Gegenteil die Reibung  $c$  vernachlässigbar klein:

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.1.29)$$

Man kann nicht alle mögliche Gleichungen mit reellen Zahlen lösen. Im komplexen Bereich gibt es aber für solche Gleichungen doch Lösungen! Dabei interessieren uns 3 verschiedene Fälle:

#### 1 Kriechfall

Bedingung dafür ist:  $\frac{c}{2} > \omega$

$$\alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0 \quad (2.1.30)$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2} \quad (2.1.31)$$

Mit dem exponentiellen Ansatz können wir dann sagen, dass



$$x = e^{\alpha t} \qquad \alpha = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2} \quad (2.1.32)$$

$$= e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}t} \quad (2.1.33)$$

$$\rightarrow x = A + B e^{-\frac{c}{2}t} \left( C e^{\sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}t} + D e^{-\sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}t} \right) \quad (2.1.34)$$

Beim Kriechfall gibt es eine gedämpfte Schwingung, die Schwingungsamplitude nähert sich asymptotisch der Ruhelage.

## 2 Schwingfall

Bedingung dafür ist:  $\frac{c}{2} < \omega$

Hier kommen die komplexen Zahlen ins Spiel, denn die Diskriminante unter der Wurzel negativ wäre.

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2} \quad (2.1.35)$$

Das Problem lösen wir, indem wir die positive Differenz in der Wurzel lassen und  $i$  aus der Wurzel nehmen.

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{-1 \left( \omega^2 - \frac{c^2}{4} \right)} \quad (2.1.36)$$

$$= -\frac{c}{2} \pm \sqrt{-1} \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \quad (2.1.37)$$

$$= -\frac{c}{2} \pm i \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \quad (2.1.38)$$

Für Anschaulichkeit benennen wir  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}}$ , also

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega} \quad (2.1.39)$$

Wir benutzen genau den gleichen Ansatz wie vorhin beim Kriechfall und erhalten

$$x = e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\tilde{\omega}t} \qquad |e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (2.1.40)$$

$$= e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \pm \tilde{\omega}t + i \sin \pm \tilde{\omega}t) \quad (2.1.41)$$

$$= e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \tilde{\omega}t \pm i \sin \tilde{\omega}t) \quad (2.1.42)$$

Die beiden reellen Lösungen zu unserem Problem sind dann

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \tilde{\omega}t \quad \text{und} \quad (2.1.43)$$

$$x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \tilde{\omega}t \quad (2.1.44)$$

Die Verwirrung an diesem Punkt kommt wahrscheinlich wegen der Reihenfolge der Lösung, es ist nicht klar, weshalb man das obige  $x$  in den jeweiligen  $x_1, x_2$  teilen darf. Wichtiges Erkenntnis ist, dass unsere allgemeine Lösung  $x$  die Summe zweier linear unabhängigen Lösungen ist. Diese Zwei linear unabhängige Lösungen sind die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  (inklusive das  $i$ , das bei den reellen Lösungen wegfällt).

### 3 Aperiodischer Grenzfall

Bedingung dafür ist:  $\frac{c}{2} = \omega$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{0} \quad (2.1.45)$$

$$= -\frac{c}{2} \quad (2.1.46)$$

Daraus folgt, dass

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \quad (2.1.47)$$

Dieses Ergebnis ist klar, denn wir nur den einfachen exponentiellen Ansatz angewendet haben. Es gibt aber ein weiteres mögliches Ergebnis. Betrachten wir nun die zwei Lösungen des Schwingfalls:

Sei die Diskriminante  $\tilde{\omega}$  nicht *gleich* 0, sondern nähere sie sich die 0 an, dann können wir vom Schwingfall aus die Taylorentwicklung des Cosinus und des Sinus anwenden, was in Übereinstimmung mit unserem ursprünglichen Ergebnis sein wird.

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \omega t \quad \cos x \approx 1 \quad (2.1.48)$$

$$= e^{-\frac{c}{2}t} \quad (2.1.49)$$

$$x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \omega t \quad \sin x \approx x \quad (2.1.50)$$

$$= e^{-\frac{c}{2}t} \omega t \quad (2.1.51)$$

### 4 Periodische treibende Kraft

Sei nun eine Kraft gegeben, die den Oszillator periodisch antreibt, dann müssen wir eine *inhomogene* Differentialgleichung lösen. Aus Bequemheit wählt man eine komplexe Kraft

$$F(t) = f e^{i\eta t} \quad (2.1.52)$$

Mit einem ähnlichen Ansatz wie vorhin sagen wir  $x = Ae^{i\eta t}$ , also

$$\ddot{x} = -A\eta^2 e^{i\omega t} \quad (2.1.53)$$

$$\dot{x} = Ai\eta e^{i\eta t} \quad (2.1.54)$$

Unsere Differentialgleichung sieht dann wie folgt aus:

$$-A\eta^2 e^{i\omega t} + cAi\eta e^{i\eta t} + \omega^2 Ae^{i\eta t} = \frac{f e^{i\eta t}}{m} \quad (2.1.55)$$

$$\left[ A(-\eta^2 + ic\eta + \omega^2) - \frac{f}{m} \right] e^{i\eta t} = 0 \quad | e^{i\eta t} \neq 0 \quad (2.1.56)$$

$$A(-\eta^2 + ic\eta + \omega^2) - \frac{f}{m} = 0 \quad (2.1.57)$$

$$A(-\eta^2 + ic\eta + \omega^2) = \frac{f}{m} \quad (2.1.58)$$

$$A = \frac{\frac{f}{m}}{-\eta^2 + ic\eta + \omega^2} \quad (2.1.59)$$

Hier erkennen wir,  $A$  ist natürlich eine komplexe Zahl und im Folgenden wird es bequem sein  $A$  wie folgt darzustellen:

$$A \equiv |A|e^{i\varphi} \quad (2.1.60)$$

Nun müssen wir aber natürlich erstmal den Betrag von  $A$  und den Winkel bestimmen.

Wir können aber nicht weitermachen, wenn wir noch nicht den Real- und den Imaginärteil unserer Zahl kennen, aber das ist nicht so schlimm, dazu kommen wir gleich:

$$A = \frac{\frac{f}{m}}{\omega^2 - \eta^2 + ic\eta} \cdot \frac{\omega^2 - \eta^2 - ic\eta}{\omega^2 - \eta^2 - ic\eta} \quad (2.1.61)$$

$$= \frac{\frac{f}{m}(\omega^2 - \eta^2 - ic\eta)}{(\omega^2 - \eta^2) + c^2\eta^2} \quad (2.1.62)$$

$$= \frac{\frac{f}{m}(\omega^2 - \eta^2)}{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2} - \frac{\frac{f}{m}c\eta}{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2}i \quad (2.1.63)$$

Das ist immernoch ein bisschen hässlich, aber es ist schon ein Schritt in die richtige Richtung, den wir haben unsere Zahl  $A$  in ihrem Real- und Imaginärteil getrennt.

Wenn wir das bestimmt haben, können wir nun leicht den Betrag und das Argument unserer Zahl bestimmen. Und zwar wissen wir, dass

$$|A| = \sqrt{\operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2} \quad (2.1.64)$$

$$= \sqrt{\left( \frac{\frac{f}{m}(\omega^2 - \eta^2)}{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2} \right)^2 + \left( \frac{\frac{f}{m}c\eta}{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2} \right)^2} \quad (2.1.65)$$

$$= \sqrt{\frac{\left( \frac{f}{m}(\omega^2 - \eta^2) \right)^2 + \left( \frac{f}{m}c\eta \right)^2}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.66)$$

$$= \sqrt{\frac{(f\omega^4 - 2f\eta^2\omega^2 + f\eta^4) + (f^2c^2\eta^2)}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.67)$$

$$= \sqrt{\frac{\left( \frac{f^2}{m^2}\omega^4 - 2\frac{f^2}{m^2}\eta^2\omega^2 + \frac{f^2}{m^2}\eta^4 \right) + \left( \frac{f^2}{m^2}c^2\eta^2 \right)}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.68)$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{f^2}{m^2}(\omega^4 - 2\eta^2\omega^2 + \eta^4) + \frac{f^2}{m^2}(c^2\eta^2)}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.69)$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{f^2}{m^2}(\omega^4 - 2\eta^2\omega^2 + \eta^4 + c^2\eta^2)}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.70)$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{f^2}{m^2}((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)^2}} \quad (2.1.71)$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{f^2}{m^2}}{((\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2)}} \quad (2.1.72)$$

$$= \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2}} \quad (2.1.73)$$

Und nun wissen wir, dass das Argument unserer Zahl gleich

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}(A)}{\operatorname{Re}(A)} \quad (2.1.74)$$

$$= \arctan \left( \frac{\frac{f}{m} c \eta}{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2 \eta^2} \right) \quad (2.1.75)$$

$$= \arctan \left( \frac{c \eta}{\eta^2 - \omega^2} \right) \quad (2.1.76)$$

Nun interessiert uns an dieser Stelle normalerweise den Realteil unserer Funktion  $x(t)$ , und jetzt da wir alles nötige ausgerechnet haben können wir dann auch später einsetzen:

$$x(t) = |A| \cos(\eta t + \varphi) \quad (2.1.77)$$

## 2.2 Impulserhaltung

### 1 Impulserhaltung in Systemen von Massenpunkten

Bei geschlossenen Systemen von Massenpunkten, d.h. es wird keine Kraft von außen in das System hineingeführt, gilt die Erhaltung des Impulses:

$$p = \sum_a m_a \dot{x}_a \quad (2.2.1)$$

und für die *Gesamtkraft* entsprechend:

$$F = \dot{p} = \sum_a m_a \ddot{x}_a = 0 \quad (2.2.2)$$

Es gibt sicherlich innere Kräfte im System, die gleichen sich aber gegenseitig aus.

Wenn wir zu mehreren Dimensionen verallgemeinern, können wir über eine *teilweise* Erhaltung des Impulses reden. Wenn eine äußere Kraft in eine Richtung nicht wirkt, so ist der Komponent des Impulses in diese Richtung erhalten. Denken wir an dem Fall mit der Sand, die *senkrecht* auf einem Waggon fällt. Es wird wegen des Gewichts der Sand eine äußere Kraft hinzugefügt, aber weil diese senkrecht zur Bewegungsrichtung fällt, bleibt der Impuls in Bewegungsrichtung erhalten.

### 2 Drehimpulserhaltung

Ähnlicherweise ist der Drehimpuls eine andere Erhaltungsgröße.

$$\vec{L} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \text{const} \quad (2.2.3)$$

Die Ableitung des Drehimpulses kennen wir als den Drehmoment

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} \quad (2.2.4)$$

Der Drehimpuls bleibt zum Beispiel erhalten, in Fällen wo die Kraft stets parallel zum Ortsvektor zeigt, das heißt, dass der Drehmoment gleich 0 sein muss.

## 2.3 Konservative Kraftfelder

Ein Konservatives Kraftfeld, wie der Name schon hindeutet, ist ein Kraftfeld wo die Energie immer *erhalten*<sup>2</sup> bleibt.

Es gibt zwei nützliche Kriterien um zu bestimmen, ob ein Kraftfeld konservativ ist.

Das erste haben wir schon im Abschnitt 2.1 erwähnt und zwar muss es ein Potential existieren, so dass die Gleichung

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad (2.3.1)$$

erfüllt ist. Der Nabla Operator bildet aus der skalaren Größe  $V$  eine vektowertige Funktion.

Die ausführliche Begründung dafür befindet sich im Skript, wir werden aber nur die letzten Schritten nochmal besprechen.

Dass Energie erhalten bleibt heißt, dass sie Konstant ist und dementsprechend sollte die Ableitung der Energie gleich 0 sein.

$$E \equiv T + V \equiv \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + V = \text{const} \quad (2.3.2)$$

$$\dot{E} \equiv \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \quad (2.3.3)$$

wobei

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\dot{\vec{x}} \quad (2.3.4)$$

Durch cleveres Umformen wurde in der Vorlesung  $dV = \frac{\partial V}{\partial x^i} dx^i = \vec{\nabla}V \dot{\vec{x}}$  definiert. Daraus folgt

$$\dot{E} = \vec{F}\dot{\vec{x}} + \vec{\nabla}V\dot{\vec{x}} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad (2.3.5)$$

$$= 0 \quad (2.3.6)$$

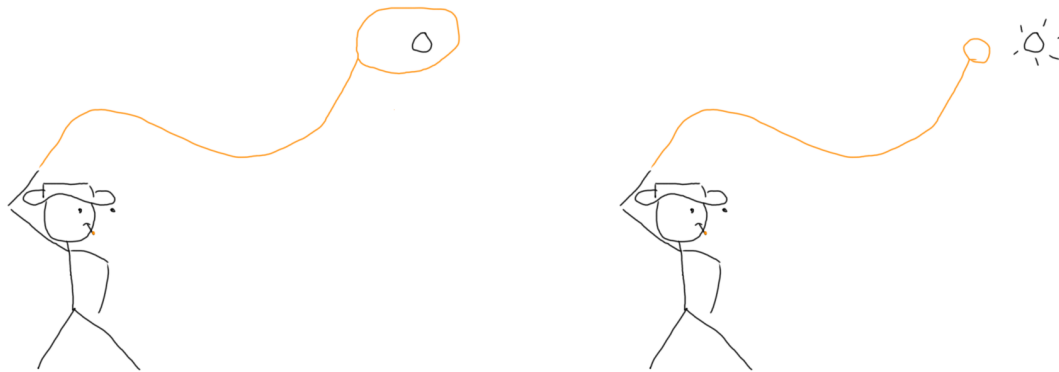
---

<sup>2</sup>konserviert

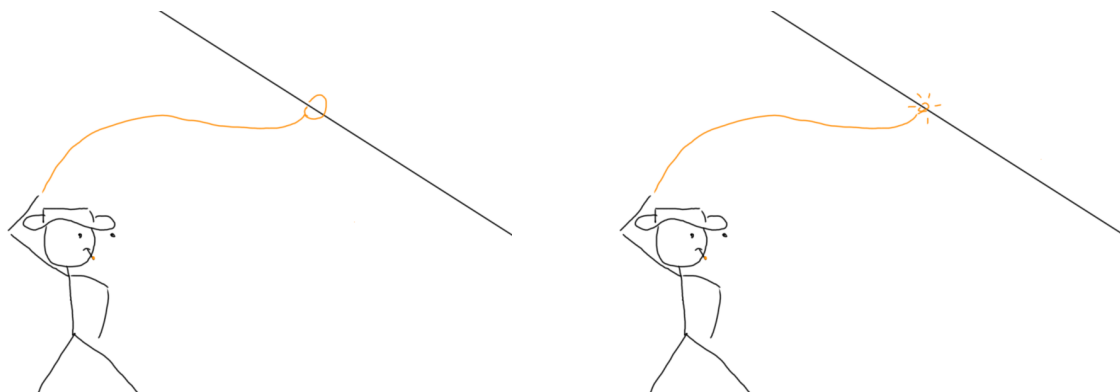
Wenn wir die Konservativität anhand dieses Kriteriums beweisen möchten, müssen wir ein Potential  $V$  finden, das unsere ursprüngliche Gleichung erfüllt.

Das zweite Kriterium hängt mit der Rotation des Feldes und einfach zusammenhängenden Gebieten zusammen.

Ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist ein Gebiet, in welchem "jede beliebige Kurve zu einem Punkt gefasst werden kann".



Ich visualisiere es so, als ob man ein Objekt mit einem Lasso etwas befestigen wollte. Wenn es nicht möglich ist, das Objekt mit dem Lasso zu befestigen, so handelt es sich um ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Der Raum kann wohl "Löcher" haben, aber immer wieder werden wir das Lasso zurück ziehen können.



Ist unser Raum aber durchgängig "unterbrochen", oder können das Lasso auf ein Objekt festhalten, so handelt es sich nicht um ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn wir eine der Koordinatenachsen aus unserem 3 dimensional Raum nicht definieren, oder ein Punkt im 2 dimensionalen Raum fehlt.

Für einfach zusammenhängende Gebiete können wir folgendes Kriterium anwenden:

$$\vec{F} \times \vec{\nabla} = 0 \quad (2.3.7)$$

Das heißt, die Rotation des Kraftfeldes muss 0 sein.

## Gravitationspotential

Das Gravitationspotential nach Newton ist

$$V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \frac{-G_N m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (2.3.8)$$

Wenn wir die Kraft die zu diesem Potential gehört können wir dieses Potential differenzieren:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_1 V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

Dabei nehmen wir das  $\vec{\nabla}$ -Operator und wenden ihn auf den Vektor  $\vec{x}_1$  an.

Dann erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{G_N m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right) \quad (2.3.10)$$

$$= \frac{G_N m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}^3} \quad (2.3.11)$$

$$= \frac{G_N m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \frac{G_N m_1 m_2 (y_1 - y_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \frac{G_N m_1 m_2 (z_1 - z_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (2.3.14)$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{G_N m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ \frac{G_N m_1 m_2 (y_1 - y_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ \frac{G_N m_1 m_2 (z_1 - z_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$= (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (2.3.16)$$

Dann ist unsere Kraft

$$\vec{F} = -(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \quad (2.3.17)$$



## 2.4 Der Euklidische Raum

Der Euklidische Raum ist der physikalische Raum, in welchem ganz wichtige Symmetrien und Strukturen respektiert werden. Diese Symmetrien und Strukturen müssen bei *Symmetrietransformationen* erhalten werden. Wie wir im Abschnitt zu Matrizenrechnung 1.10 gelernt haben, sind Matrizen ein Weg den Raum oder unser Koordinatensystem zu transformieren. Nach einer Transformation mit der Transformationsmatrix  $R$  müssen im Euklidischen Raum folgende Strukturen erhalten bleiben:

### 1 Linearität des Raumes

$$R(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha R(\vec{x}) + \beta R(\vec{y}) \quad (2.4.1)$$

### 2 Skalarprodukt

$$R(\vec{x} \cdot \vec{y}) \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} = R(\vec{x}) \cdot R(\vec{y}) \quad (2.4.2)$$

#### Beispiel

(a) Weise nach, dass die Linearität erfüllt ist.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3 \quad (2.4.5)$$

$$R \left( 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = 2R \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 3R \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \quad (2.4.6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

$$\begin{pmatrix} -17 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

(b) Nicht jede Matrix erfüllt diese Bedingungen. Gucken wir uns das folgende Beispiel an: Weise nach, dass das Skalarprodukt existiert

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3 \quad (2.4.13)$$

$$(2.4.14)$$

$$R(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (2.4.15)$$

$$R \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = R(34) = 34 \quad (2.4.16)$$

$$R \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot R \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = 136 \quad (2.4.18)$$

Offensichtlich ist  $R(\vec{x} \cdot \vec{y}) \neq R(\vec{x}) \cdot R(\vec{y})$

(c)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.19)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.20)$$

$$R(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (2.4.21)$$

$$R \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = R(34) = 34 \quad (2.4.22)$$

$$R \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot R \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2.4.23)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 75 \quad (2.4.24)$$

Laut den Regeln der Matrizenrechnung müsste man eine Matrix mit 3 Zeilen, mit einer Matrix mit 3 Spalten multiplizieren, dafür wird üblicherweise der "Vektor" als ein Zeilenvektor dargestellt, was in unseren Beispielen nicht der Fall ist.

Nun haben wir drei verschiedene Matrizen und nur eine davon erfüllt unsere zwei Bedingungen. Anhand der ersten beiden könnte man denken, dass die Determinante dabei die einzige Rolle spielt, aber wenn wir zum Beispiel c) kommen, merken wir, dass obwohl die Determinante gleich 1 ist, das zweite Kriterium immernoch nicht erfüllt wird. Dafür hilft uns die Herleitung des Kriteriums noch einmal zu besprechen:

$$R(\vec{x}) \cdot R(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (2.4.25)$$

Wir betrachten den Vektor  $\vec{x}$  als eine 1-zeilige Matrix  $x^T$ :

$$(Rx)^T \cdot (Ry) = x^T \cdot y \quad (2.4.26)$$

Wobei:

$$(Rx)^T = x^T R^T \quad (2.4.27)$$

Also:

$$x^T R^T R y = x^T y \quad (2.4.28)$$

Damit die obige Gleichung stimmt muss der Faktor  $R^T R$  das restliche Produkt nicht beeinflussen. Das passiert nur, wenn  $R^T R$  die Einheitsmatrix ist. Daran erkennen wir,

dass 1. die Matrix  $R$  muss invertierbar sein und 2. die transponierte Matrix  $R^T$  muss gleich der inversen Matrix  $R^{-1}$  sein. In der Vorlesung wurde das zweite als eine äquivalente Forderung zu der Orthogonalität der Matrix  $R$  definiert. Eine Matrix ist orthogonal, wenn die Basisvektoren zueinander orthogonal sind *und* die Länge 1 haben. Die Basisvektoren müssen also orthonormal zueinander sein.

Matrizen, die das erste Kriterium der Linearität erfüllen gehören zu den *allgemeinen linearen Transformationen*, oder *General Linear Transformations* ( $GL(n)$ ).

Wenn zusätzlich das zweite Kriterium erfüllt ist, dann gehört die Matrix zu der Gruppe der *orthogonalen Matrizen* ( $O(n)$ ), üblicherweise  $O(3)$  in der Physik. Diese Matrizen haben eine Determinante  $+1$  oder  $-1$ . Wenn die Determinante  $+1$  ist, dann gehört die Matrix zu der Gruppe der speziellen orthogonalen Matrizen ( $SO(n)$ )

## 2.5 Galilei-Transformationen

Eine neue wichtige Symmetriegruppe in der Physik sind die Galileo-Transformationen. Dafür fügen wir die neue Dimension der Zeit ein. Unterschiedlich zum einfachen drei-dimensionalen Raum reden wir nicht mehr von *Punkten*, sondern von *Ereignissen* mit 3 Raum-Komponenten und einem Zeit-Komponent  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Dabei spielen selbstverständlich nur räumliche Vektoren  $\vec{x}$  keine Rolle mehr.

Als Erinnerung gibt es 3 wichtige Symmetrietransformationen:

- 1 Rotationen:  $(t, x) \mapsto (t, Rx)$

Hier ist  $R$  eine Matrix aus der Gruppe der orthogonalen Matrizen, die den Raum selbstverständlich rotiert.

- 2 Translationen:  $(t, x) \mapsto (t + s, x + y)$

So haben wir den Raum zu einem anderen Platz "bewegt".

- 3 Boosts:  $(t, x) \mapsto (t, x + vt)$

So bewegen wir den Raum mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in irgendeine Richtung.

Die Galilei-Gruppe  $G$  beinhaltet alle Elemente aus 1,2 und 3 und jede beliebige Verknüpfung dieser.

## 2.6 Affiner Raum

Umgangssprachlich kann man sagen, dass der affine Raum ein Vektorraum ist, bei dem wir den Ursprung verloren haben. Ursprünglich konnten wir aus dem Ursprung jeden Punkt im Vektorraum mit einem Ortsvektor beschreiben, der vom Ursprung bis zum bereits erwähnten Punkt ging. Beim affinen Raum wird die Wichtigkeit 0 abgeschafft. Dabei betrachten wir nur Punkte im Raum als Punkte, und Verbindungen zweier Punkten als Vektoren.

Dieses Verhältnis definieren wir folgendermaßen:

$$A \times A \rightarrow V \qquad (P, Q) \mapsto \vec{PQ} \qquad (2.6.1)$$

So lesen wir: Die Abbildung zwischen einem Element (Punkt) aus  $A$  und einem anderen Element ebenfalls aus  $A$  ergibt ein Element (Vektor) aus dem Vektorraum  $V$

Wesentlich im affinen Raum sind die **Zeitfunktion**: mit dieser können wir sagen in welchem zeitlichen Abstand zwei Ereignisse zu einander stehen und die **Abstandsfunktion**: mit dieser können wir sagen wie weit von einander zwei *gleichzeitige* Ereignissen voneinander sind.

Außerdem teilt die Zeitfunktion den Raum in *elementfremden Untermengen* gleichzeitiger Ereignissen. Das bedeutet, dass wir nur "Screenshots" des Raumes machen können, und Elemente dieser "Screenshots" zu anderen Elementen derselben vergleichen können. Wenn sie nicht zum gleichen Zeitpunkt geschehen, so gibt es z.B. keinen Abstand den wir messen können. Stellen wir uns als (komisches) Beispiel das folgende vor: Bei einem Spaziergang entlang der Neckarwiese musst du wegen Corona leider immer 2m Abstand halten. Doch kann hier wo du läufst nicht schonmal jemand gelaufen sein? Zum Glück lebst du in einem affinen Raum, und es ist egal wer hier an deiner Stelle vor  $x$  Stunden war, schließlich können wir Abstände nur bei einer Gleichzeitigkeit messen.

## 2.7 Wechsel des Koordinatensystems

### 2.7.1 Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum

Wir haben schon gelernt, dass wir unser altes langweiliges Koordinatensystem auch anders definieren können<sup>3</sup>. Auch wissen wir, dass wir einen Vektor als die Summe der Produkte der Komponenten mit dem jeweiligen Einheitsvektoren darstellen können.

Seien

$$\vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7.1)$$

unsere Einheitsvektoren, so ist im normalen Koordinatensystem  $\mathbb{R}^3$  ein Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \vec{e}^1 + x^2 \vec{e}^2 + x^3 \vec{e}^3 = x^i \vec{e}^i \qquad (2.7.2)$$

Achtung!  $x^i$  sind Komponenten des Vektors  $\vec{x}$ , während  $\vec{e}^i$  jeweils der Gesamtevektor  $\vec{e}^i$  ist.

---

<sup>3</sup>Siehe hierzu am besten zuerst den Abschnitt zu Matrizenrechnung 1.10 an.

Hier bilden die Vektoren  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Es gibt aber andere gültige Basen des gleichen Raums, und so können wir unendlich viele verschiedene Einheitsvektoren haben um unser Raum zu beschreiben. Wir können also eine neue Basis  $\{\vec{e}'^i\}$  aus einer Linearkombination der ursprünglichen Einheitsvektoren  $\vec{e}^i$  definieren.

Diese Definition ist entspricht der Transformation der ursprünglichen Einheitsvektoren durch eine Matrix:

$$\vec{e}'^i = R^{ik} \vec{e}^k \quad (2.7.3)$$

wobei gilt:

$$\vec{e}'^i \text{ wieder basis} \Leftrightarrow R \in GL(n) \quad (2.7.4)$$

Wir möchten aber nicht was *zu* verrücktes mit dem Koordinatensystem machen, also beschränken wir uns im Allgemeinen auf orthogonale Matrizen, damit die Einheitsvektoren paarweise orthogonal zu einander bleiben.

$$\vec{e}'^i \cdot \vec{e}'^j = (R^{ik} \vec{e}^k) \cdot (R^{jl} \vec{e}^l) \quad \text{Dies folgt nun aus der Definition der} \quad (2.7.5)$$

neuen Einheitsvektoren

$$= R^{ik} R^{jl} \vec{e}^k \cdot \vec{e}^l \quad \vec{e}^k \cdot \vec{e}^l = \delta^{kl} \quad (2.7.6)$$

$$= R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} \quad \text{Da } \delta^{kl} = 0, \text{ falls } k \neq l \quad (2.7.7)$$

muss  $k = l$  sei  $k, l = m$

$$= R^{im} R^{jm} \quad R^{jm} = (R^T)^{mj} \quad (2.7.8)$$

$$= (R^{im})(R^T)^{mj} \quad \text{Da } R \in O(n), \text{ so ist } RR^T = \delta^{ij} = \mathbb{1} \quad (2.7.9)$$

$$= \delta^{ij} \quad (2.7.10)$$

Damit haben wir gezeigt, dass die neuen Einheitsvektoren paarweise orthogonal zu einander sind.

Die Formel zur Bestimmung eines neuen Vektors lautet:

$$x'^k = R^{kj} x^j \quad (2.7.11)$$

Wir können uns merken:

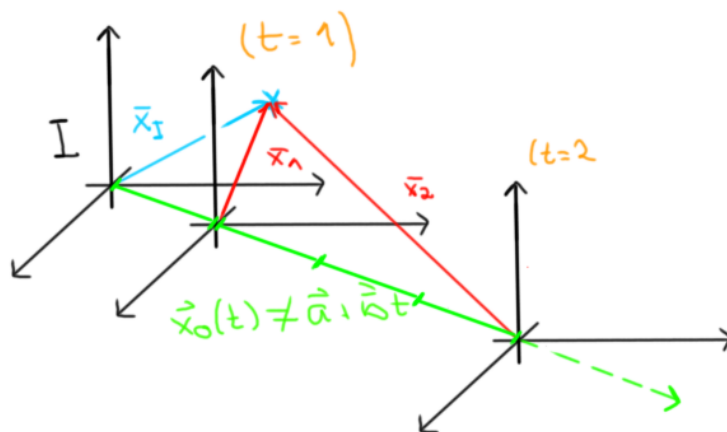
$$\{\vec{e}^i\} \xrightarrow{R^{-1}} \{\vec{e}'^i\} \quad (2.7.12)$$

$$x^i \rightarrow x'^i = R^{ij} x^j \quad (2.7.13)$$

Im neuen System sieht es so aus als, wäre ein Vektor um  $R$  gedreht, dabei haben wir den Raum um  $R^{-1}$  gedreht.

## 2.7.2 Beschleunigte, nichtrotierende Bezugssysteme

Nichtrotierende beschleunigte Bezugssysteme bringen uns nicht so viele Probleme, aber es ist wichtig sie zu klären, bevor wir mit den deutlich komplizierteren rotierenden beschleunigten Bezugssysteme fortfahren.



Wir merken, der Vektor  $\vec{x}_I = \vec{x}_0(1) + \vec{x}_1$  bzw.  $\vec{x}_I = \vec{x}_0(2) + \vec{x}_2$ . Somit gilt für die zweite Ableitung:

$$\ddot{\vec{x}}_I = \ddot{\vec{x}}_0 + \ddot{\vec{x}} \quad (2.7.14)$$

und für das 2. Newtonsche Axiom

$$m\ddot{\vec{x}}_I = m\ddot{\vec{x}}_0 + m\ddot{\vec{x}} \quad (2.7.15)$$

Wir definieren nun  $\vec{F}_s = -m\ddot{\vec{x}}_0$  und  $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}_I$  und erhalten die Gleichung:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} - \vec{F}_s \quad (2.7.16)$$

$\vec{F}_s$  ist eine Kraft die in unserem System vorhin nicht existiert hat. Wir sagen sie ist eine "Scheinkraft"

## 2.7.3 Um kleine Winkel *rotierte* Koordinatensysteme

Noch beschäftigen wir uns nicht mit Koordinatensysteme, die *aktiv* rotieren. Zuerst besprechen wir den Fall, das ein Koordinatensystem um einen ganz kleinen rotiert wurde.

Sagen wir, wir möchten eine Matrix die sich zeitabhängig rotiert  $R(t)$ <sup>4</sup>. Gucken wir

<sup>4</sup>Merke die Information, die sich hier versteckt befindet: eine Rotationsmatrix bedeutet, dass die Einheitsvektoren orthogonal zu einander bleiben, dementsprechend ist  $R(t) \in O(3)$ , und zusätzlich interessiert uns der Fall, dass die Matrix den Raum nicht "invertiert", die Determinante soll also +1 sein, somit ist  $R(t) \in SO(3)$

uns zuerst den Fall nach einer sehr kurzen Zeit  $t = \varepsilon$  und versuchen wir zu erkennen welche Bedingungen wir erfüllen müssen.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir für kleine  $\varepsilon$  die Taylorentwicklung nehmen können, aber was genau entwickeln wir über eine Matrix? Vielleicht hilft es, wenn wir die Taylorentwicklung parallel zu dieser Formel betrachten:

$$R(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon M + O(\varepsilon^2) \quad | \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots \quad (2.7.17)$$

Natürlich, zum Zeitpunkt  $t = 0$  haben wir uns noch nicht gedreht, also haben wir als erstes Element 1. Dann haben wir in der Taylorentwicklung die erste Ableitung mal unsere Variable  $x$ , analog haben wir bei der Drehung unsere Variable  $\varepsilon$  mal eine Matrix  $M$ , deren Form wir noch nicht kennen.

Wir möchte gegen keine Regeln verstoßen, also gehen wir noch die Regeln unseres Raumes durch und zwar ganz wichtig:

$$R^T R = \mathbb{1} \quad (2.7.18)$$

Daraus machen wir bei unserer Drehung also:

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} + \varepsilon M + O(\varepsilon^2))^T \cdot (\mathbb{1} + \varepsilon M + O(\varepsilon^2)) \quad (2.7.19)$$

$$= \mathbb{1} + \varepsilon M + \varepsilon M^T + O(\varepsilon^2) \quad (2.7.20)$$

Hier gab es natürlich viele mehrere andere Terme, die aber jeweils für kleine Werte  $\varepsilon$  sehr schnell gegen 0 gehen, also fassen wir alle mit dem Restglied  $O(\varepsilon^2)$  zusammen. Uns sind die ersten drei besonders interessant:

$$\mathbb{1} = \mathbb{1} + \varepsilon(M + M^T) \quad (2.7.21)$$

$$0 = \varepsilon(M + M^T) \quad (2.7.22)$$

$$0 = M + M^T \quad (2.7.23)$$

$$M = -M^T \quad (2.7.24)$$

Nun sind wir zu einem ganz interessanten Punkt gekommen, und zwar sehen wir, dass diese Matrix  $M$  antisymmetrisch sein soll. Mithilfe der Basis  $B = \{T^1, T^2, T^3\}$

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.25)$$



Es gibt viele verschiedene Basen um den Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen zu bilden, aber die Wahl dieser spezifischen Matrizen ist nicht willkürlich. Betrachten wir den Index der Basis  $T^i$ , den Index der Zeile  $j$  und den Index der Spalte  $k$ . So merken wir etwas was uns schon bekannt sein sollte: Wir können diese Basis mit dem Epsilon-Tensor  $\varepsilon^{ijk}$  beschreiben. Als Beispiel nehmen wir das erste Element der Basis,  $T^1$  besitzt also Einträge  $\varepsilon^{1jk}$ ; an der zweiten Zeile ( $j$ ) und dritte Spalte ( $k$ ) ist es also  $\varepsilon^{123} = 1$ .

Wir folgern daraus, dass

$$M = \alpha^i T^i \quad (2.7.26)$$

eine Linearkombination dieser Basis ist. Die Benennung  $\alpha$  und  $\varepsilon$  ist aber doch völlig willkürlich, also können wir sagen:

$$R(\vec{\varepsilon}) \equiv \mathbb{1} - \varepsilon^i T^i \equiv \mathbb{1} - \vec{\varepsilon} \cdot \vec{T} \quad (2.7.27)$$

Wir bezeichnen  $T$  mit einem Vektorpfeil, um darzustellen, dass es die Komponenten  $T^1, T^2, T^3$  hat, die aber eigentlich Matrizen sind. Außerdem, jetzt, dass wir  $\varepsilon$  zu einem Vektor gemacht haben, begrenzen wir uns nicht auf Drehungen um die Koordinatenachsen, sondern können wir eine eigene Achse im Koordinatenraum definieren, um welche wir das Koordinatensystem drehen möchten.

Wir überspringen das konkrete Beispiel der Vorlesung und gehen einen Schritt weiter und nehmen an, dass wir nicht *nur* um eine der Koordinatenachsen rotieren möchten, sondern sagen wir um die Winkelhalbierende der  $x^1 - x^2$ -Ebene:

### Beispiel

$$\text{Sei } \varepsilon = |\varepsilon| \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung, an dieser Stelle haben wir  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  statt 1 für die Vektorkomponenten genommen, weil es interessiert uns, dass der Betrag des Vektors gleich 1 bleibt

Für die Transformation

$$R(\varepsilon) = \mathbb{1} - \varepsilon^i T^i \quad (2.7.28)$$

brauchen wir den i-ten Komponente des Vektors  $\varepsilon$  mit dem i-ten Komponente des "Vektors"  $T$  multiplizieren, also

<sup>5</sup>Hier ist unser  $\varepsilon$  nicht das Epsilon-Tensor lol

<sup>6</sup>Das negative Vorzeichen ist eine bequeme Konvention

$$R(\varepsilon) = \mathbb{1} - \varepsilon^1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \varepsilon^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \varepsilon^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.29)$$

$$= \mathbb{1} - |\varepsilon| \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} - |\varepsilon| \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.30)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} \\ -\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} & \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7.31)$$

An dieser Stelle kriegen wir die Idee rückgängig unsere Matrix mit einer Taylor-Entwicklung zu approximieren, denn wir wissen  $\cos x \approx 1$  und  $\sin x \approx x$ . So ersetzen wir Werte wo wir ein mal 1 hatten mit  $\cos$  und  $|\varepsilon|$  mit  $\sin$ .

$$R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} \\ 0 & \cos \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} & -\sin \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} \\ -\sin \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} & \sin \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} & \cos \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.7.32)$$

Es ist aber ungünstig, wenn wir Drehungen betrachten, uns an diesem Modell zu steuern, denn es gibt keine schöne und einfache allgemeine Formeln an die wir uns steuern können, wie im Fall der Drehung um eine Koordinatenachse.

Demnächst definieren wir den Winkel um den wir drehen als der Vektor

$$\Delta\varphi \equiv \varepsilon \quad (2.7.33)$$

Wir haben noch nichts mehr gelernt, wir verwenden nur eine bequemere Notation für später:

$$R_{\Delta\varphi} = \mathbb{1} - \Delta\varphi^i T^i \quad (2.7.34)$$

$$\rightarrow (R_{\Delta\varphi})^{jk} = \delta^{jk} - (\Delta\varphi)^i \varepsilon^{ijk} \quad (2.7.35)$$

Diese Notation ist sehr bequem, weil wir bereits wissen wie jeder dieser Komponenten mit einem Vektor interagiert, so können wir dann einfach die Matrix auf einen Vektor

anwenden und erhalten<sup>7</sup>

$$(R_{\Delta\varphi})^{jk}v^k = \delta^{jk}v^k - \varepsilon^{ijk}(\Delta\varphi)^i v^k \quad (2.7.36)$$

$$= \delta^{jk}v^k + \varepsilon^{jik}(\Delta\varphi)^i v^k \quad (2.7.37)$$

$$= \vec{v} + \vec{\Delta\varphi} \times \vec{v} \quad (2.7.38)$$

Und auch noch hier als Wiederholung des Skripts, denn wir wurden gerne diese Gleichung ein bisschen weiter umformen:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{R_{\Delta\varphi} - \mathbb{1}}{\Delta t} \vec{v} \quad (2.7.39)$$

$$= \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} \times \vec{v} \quad (2.7.40)$$

Dabei wissen wir schon, die Winkelgeschwindigkeit ist die Änderung des Winkels in der Zeit, also

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (2.7.41)$$

So ist sozusagen

$$\dot{R}v = \omega \times v \quad (2.7.42)$$

## 2.7.4 Rotierende Koordinatensysteme

Für allgemeine beschleunigte Bezugssysteme gilt im Prinzip das gleiche was wir vorhin im Abschnitt 2.7.2 gelernt haben, nun mit einem kleinen Schwierigkeitsgrad mehr. Nun wissen wir, dass wir immer noch den Vektor  $x_I$  als eine Kombination des Vektors der hin zum Ursprung des neuen Koordinatensystem zeigt und der Vektor der vom neuen Koordinatensystem in den gewünschten Punkt zeigt

$$x_I = x_0 + x_N \quad (2.7.43)$$

Nun gilt aber diese Gleichung nicht, wenn wir die Vektoren mit verschiedenen Basen betrachten, und der sich rotierender Vektor  $x_N$  hat per Definition eine unterschiedliche Basis jetzt. Dafür ziehen wir in Betracht, dass

$$x_N = Rx \quad (2.7.44)$$

---

<sup>7</sup>An manchen Stellen des letzten Abschnitts haben wir die Vektorpfeile vernachlässigt, einerseits weil wir mit Matrizen arbeiten und andererseits, weil die Vektorpfeile die uns mit den gegebenen packages zu Verfügung stehen zu klein oder unübersichtlich sind. Danke für das Verständnis

$R$  ist die Matrix, die das Inertialsystem zum aktuellen Rotationsstandpunkt bringt.

Daraus folgen auch für die anderen wichtigen Gleichungen ähnliche Operationen:

$$x_I = x_0 + Rx \quad (2.7.45)$$

Also

$$m\ddot{x}_I = m\ddot{x}_0 + m(R\ddot{x}) \quad (2.7.46)$$

$$F_I = m\ddot{x}_0 + m(R\ddot{x}) \quad | F_I = RF \quad (2.7.47)$$

$$RF = m\ddot{x}_0 + m(R\ddot{x}) \quad (2.7.48)$$

Ab diesen Punkt wird in der Vorlesung die Trajektorie nicht mit dem Vektor  $x$ , sondern mit  $r$  bezeichnet.

Zunächst interessiert uns aber genau zu wissen, was die Kraft  $F$  ist, aber der Term  $(Rr)''$  steht noch ein bisschen im Weg:

$$RF = m\ddot{x}_0 + m(Rr)'' \quad (2.7.49)$$

$$\rightarrow (Rr)'' = (\dot{R}r + R\dot{r})' \quad (2.7.50)$$

Es ist klar was  $\dot{r}$  ist, aber was genau ist  $\dot{R}$ ? Zum Glück kennen wir aus den alten Zeiten eine Formel für die Bestimmung des Differentialquotienten was wir hier auch benutzen dürfen:

$$\dot{R}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (2.7.51)$$

Das ist das gleiche als die Schreibweise

$$\dot{R}(t) \equiv \frac{R_{\Delta t} \cdot R(t) - R(t)}{\Delta t} \quad (2.7.52)$$

Im nächsten Schritt interessiert uns spezifisch  $\dot{R}r$ .

$$\dot{R} = \frac{R_{\Delta t} \cdot R - R}{\Delta t} \quad (2.7.53)$$

$$= \frac{R_{\Delta t} - \mathbb{1}}{\Delta t} \cdot R \quad (2.7.54)$$

Noch haben wir nur die Gleichung ein bisschen umgeformt, damit wir mit etwas schönerem rechnen können, und zwar sehen wir an dieser Stelle schon etwas was uns bekannt kommen könnte:

Im Abschnitt 2.7.3 haben wir folgendes gesehen:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} \times \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\Delta \vec{\varphi}} - \mathbb{1}}{\Delta t} \vec{v} \quad (2.7.55)$$

Analog können wir  $R_{\Delta \vec{\varphi}}$  und  $R_{\Delta t}$ , betrachten, dann kommen wir zur Schlussfolgerung, dass

$$\dot{R}r = \frac{R_{\Delta t} - \mathbb{1}}{\Delta t} \cdot Rr = \omega_I \times Rr \quad (2.7.56)$$

Wie wir es bisher gemacht haben, kriegen wir  $\omega_I$  in dem wir  $\omega$  mit unserer Matrix transformieren,

$$\omega_I = R\omega \quad (2.7.57)$$

Daraus folgt dann die Formel:

$$\dot{R}r = R\omega \times Rr = R(\omega \times r) \quad (2.7.58)$$

Vergessen wir aber nicht was unser Ziel war, nämlich hatten wir die Formel

$$RF = m\ddot{r}_0 + m(Rr)'' \quad (2.7.59)$$

und wir wollten genau wissen, was genau in dieser Formel beinhaltet war. Bisher sind wir zum folgenden Punkt gekommen:

$$RF = m\ddot{r}_0 + m(\dot{R}r + R\dot{r}) \quad (2.7.60)$$

$$= m\ddot{r}_0 + m(R(\omega \times r) + R\dot{r}) \quad (2.7.61)$$

Wenden wir dann den Punkt der Ableitung nochmal auf die inneren Elementen ein und erhalten:

$$RF = m\ddot{r}_0 + m[(R(\omega \times r))' + (R\dot{r})] \quad (2.7.62)$$

$$= m\ddot{r}_0 + m[\dot{R}(\omega \times r) + R(\omega \times r)' + (\dot{R}\dot{r} + R\ddot{r})] \quad (2.7.63)$$

$$= m\ddot{r}_0 + m[\dot{R}(\omega \times r) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r}) + R(\omega \times \dot{r}) + R\ddot{r}] \quad (2.7.64)$$

$$= m\ddot{r}_0 + m[R(\omega \times (\omega \times r)) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r}) + R(\omega \times \dot{r}) + R\ddot{r}] \quad (2.7.65)$$

$$= m\ddot{r}_0 + mR[\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} + \omega \times \dot{r} + \ddot{r}] \quad (2.7.66)$$

$$= m\ddot{r}_0 + mR[\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times \dot{r} + \ddot{r}] \quad (2.7.67)$$

Nun sind wir sehr weit gekommen, aber es fehlen noch einige letzte Schritte, und zwar möchten wir jetzt erfahren, was  $m\ddot{r}$  ist. So werden wir zuerst diese Matrix  $R$  los indem wir mit ihrer Inversen multiplizieren:

$$F = mR^{-1}\ddot{r}_0 + m[\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times \dot{r} + \ddot{r}] \quad (2.7.68)$$

$$F = mR^{-1}\ddot{r}_0 + m[\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times \dot{r}] + m\ddot{r} \quad (2.7.69)$$

$$m\ddot{r} = F - mR^{-1}\ddot{r}_0 + m[\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times \dot{r}] \quad (2.7.70)$$

$$= F - m[\textcolor{blue}{R}^{-1}\ddot{r}_0 + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2\omega \times \dot{r}] \quad (2.7.71)$$

Jetzt merken wir auch sofort, dass die Gleichung zu der wir gewöhnt sind  $F = ma$  nicht mehr stimmt, denn wir haben zusätzlich noch ein Haufen weiterer Kräften. Insbesondere haben wir

die **Kraft durch Beschleunigung des Ursprungs**, die **Zentrifugalkraft**, die **Kraft der tangentiellen Beschleunigung** und die **Coriolis-Kraft**

## 2.8 Zentralkraftproblem

### 2.8.1 Zweikörperproblem

Das Zweikörperproblem ist die Grundlage um das allgemeinere Zentralkraftproblem zu verstehen. Zunächst werden wir eine reine Wiederholung der Vorlesung machen und später konzentrieren wir uns auf die wichtigeren Herleitungen.

Wir wissen schon, dass die Kraft zwischen zwei Punktmassen, die gegenseitig zwischen den beiden wirkt mit folgendem Potential beschreiben<sup>8</sup>:

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad (2.8.1)$$

In anderen Worten können wir sagen:

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad m_2\ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad (2.8.2)$$

Dabei ist

$$\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad (2.8.3)$$

---

<sup>8</sup>Nur als kleine Bemerkung für Klarheit, das Potential ist eine Funktion in Abhängigkeit des Radius zwischen beiden Vektoren, die Schreibweise mit dem Abstand zwischen den zwei Vektoren benutzen wir im Moment nur für die Betonung auf *Zweikörperproblem*

Und dementsprechend:

$$\ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)}{m_1} + \frac{\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)}{m_2} \quad (2.8.4)$$

$$= -\frac{\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)}{m_1} - \frac{\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)}{m_2} \quad (2.8.5)$$

$$= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \left| \frac{1}{m} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right. \quad (2.8.6)$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{m} \vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \left| \vec{x} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \right. \quad (2.8.7)$$

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V(|\vec{x}|) \quad (2.8.8)$$

Wir sind nun so zum Problem gekommen, das uns wirklich interessiert

## 2.8.2 Zentralkraftproblem

### Drehimpulserhaltung

Wir wissen, dass der Drehimpuls erhalten bleibt, und der Radius stets im gleichen Winkel dazu steht, d.h., unser Radiusvektor bewegt sich immer auf der gleichen Ebene. Damit können wir unser Problem auf nur zwei Dimensionen übersetzen. Für Bequemheit definieren wir unser Koordinatensystem so, dass der Radius sich immer in der  $x^1 - x^2$  Ebene befindet.

Es wird zunächst nützlich sein Polarkordinaten zu verwenden, denn somit können wir am einfachsten den Radius und den Winkel in die Formeln miteinbeziehen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.9)$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.10)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.8.11)$$

$$= \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \quad (2.8.12)$$

$$= m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (2.8.13)$$

$$(2.8.14)$$

Obwohl wir eigentlich schon das Problem auf zwei Dimensionen gebracht haben, arbeiten im nächsten Schritt mit auf drei Dimensionen definierter Kreuzprodukt, um zu zeigen wie wir auf den Betrag des Drehimpulses kommen.

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| \quad (2.8.15)$$

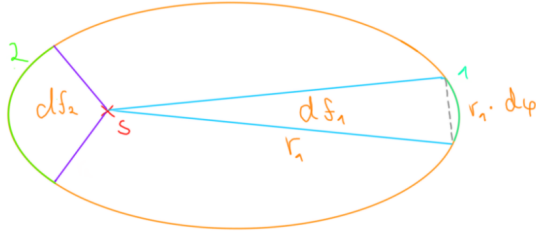
$$= m \left| \begin{pmatrix} r \sin \varphi \cdot 0 - (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) \cdot 0 \\ 0 \cdot (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) - 0 \cdot r \cos \varphi \\ r \cos \varphi \cdot (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \cdot r \sin \varphi \end{pmatrix} \right| \quad (2.8.16)$$

$$= m \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi - r \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \right| \quad (2.8.17)$$

$$= m \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \end{pmatrix} \right| \quad (2.8.18)$$

$$= mr^2 \dot{\varphi} \quad (2.8.19)$$

## 2. Keplersches Gesetz



Das Zweite Keplersche Gesetz besagt, dass die Flächengeschwindigkeit konstant ist. Das bedeutet, dass obwohl ein Objekt auf der Kreisbahn eine unterschiedliche Geschwindigkeit haben kann, wird die zurückgelegte "Fläche" unter der Trajektorie konstant bleiben.

Am Bild stellen wir uns zum Beispiel vor, das Objekt auf der Kreisbahn habe die Strecken 1 und 2 in der gleichen Zeit zurückgelegt, obwohl die Strecken offensichtlich unterschiedlich sind, die Fläche die sie "zurückgelegt" sind soll die gleiche sein. Für kleine Strecken und Flächen können wir ganz gut approximieren, indem wir die Fläche als ein Dreieck beschreiben, dann ist

$$df = \frac{r \cdot r d\varphi}{2} \quad (2.8.20)$$

$$= \frac{r^2 d\varphi}{2} \quad (2.8.21)$$

Wenn wir wissen möchten, wie sich diese Fläche in der Zeit verändert, dividieren wir durch ein infinitesimal kleines Stück der Zeit, es ist "nicht" die Ableitung.

$$\frac{df}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.8.22)$$

$$= \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2} \quad (2.8.23)$$

Diese Eigenschaft folgt aus der Drehimpulserhaltung, denn wenn

$$|\vec{L}| = mr^2 \dot{\varphi} \quad (2.8.24)$$

konstant ist, so ist nämlich auch unsere oben genannte Formel für die Flächengeschwindigkeit.



## Energieerhaltung

Der Drehimpuls ist nicht das einzige was erhalten bleibt, und zwar viel interessanter untersuchen wir jetzt die Folgen der Energieerhaltung im System.

Wir wissen schon:

$$E = E_{kin} + E_{pot} \quad (2.8.25)$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) \quad (2.8.26)$$

$$= \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} + V(r) \quad (2.8.27)$$

$$= \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + V(r) \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \quad (2.8.28)$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2 L^2}{2m^2 r^4} + V(r) \quad (2.8.29)$$

$$= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.8.30)$$

$$(2.8.31)$$

Wir nennen jetzt

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.8.32)$$

An dieser Stelle merken wir vielleicht, dass unsere Energie der Form

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U \quad (2.8.33)$$

$$E = T + U \quad (2.8.34)$$

ist. Somit sind wir effektiv von zwei Dimensionen auf ein eindimensionales Problem gesprungen.

Als Erinnerung wiederholen wir nochmal aus der Vorlesung und den Übungszetteln wie man aus dieser Gleichung die Zeit parametrisieren kann:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U \quad (2.8.35)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2(E - U)}{m} \quad (2.8.36)$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2(E - U)}{m}} \quad (2.8.37)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - U)}{m}} \quad (2.8.38)$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2(E - U)}{m}}} \quad (2.8.39)$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(E - U)}{m}}} \quad (2.8.40)$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(E - U)}{m}}} \quad (2.8.41)$$

### Kepler-Problem

Kepler interessierte sich vor allem an Potentiale  $V \sim \frac{1}{r}$ , also möchten wir in diesem Fall wissen, wie wir diesen Fall lösen könnten. Dann ist die Energie

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (2.8.42)$$

Aus dem Energieerhaltungssatz stellen wir eine Bewegungsgleichung für die Bahn  $r$ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m(\ddot{r}\dot{r} + \dot{r}\ddot{r})}{2} - \frac{2L^2\dot{r}}{2mr^3} + \frac{\alpha\dot{r}}{r^2} \quad (2.8.43)$$

$$0 = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{mr^3} + \frac{\alpha\dot{r}}{r^2} \quad (2.8.44)$$

$$= m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} \quad (2.8.45)$$

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \quad (2.8.46)$$

Spezifisch interessieren wir uns für die Ableitung nach dem Winkel, und nicht nach der Zeit. Dafür erweitern wir jetzt unsere Formel "mit 1":

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \quad \left| \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \right. \quad (2.8.47)$$

$$= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \quad (2.8.48)$$

Zunächst gucken wir dann, wie die Ableitung des Radius nach dem Winkel dann aussieht:

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (2.8.49)$$

Mit einer äquivalenten Schreibweise können wir diesen Term noch vereinfachen, und zwar:

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{-\frac{dr}{d\varphi}}{r^2} \quad (2.8.50)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (2.8.51)$$

Also setzen wir dies in unsere Ableitung ein und erhalten:

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (2.8.52)$$

Dies benutzen wir gleich in unserer Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{r} = m \frac{d\dot{r}}{dt} = m \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left( -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right) \quad (2.8.53)$$

$$= -m \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{L}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (2.8.54)$$

$$= -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (2.8.55)$$

Setzen wir die beiden äquivalenten Bewegungsgleichungen gleich und erhalten:

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \quad \Big| : \frac{-L^2}{mr^2} \quad (2.8.56)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.57)$$

Mithilfe der Substitution  $u = \frac{1}{r}$  können wir eine einfachere Differentialgleichung erhalten:

$$u'' = -u + \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.58)$$

Und mithilfe noch einer Substitution  $w = u - \frac{m\alpha}{L^2}$  können wir sie sogar einfacher machen:

$$w'' = -w \quad (2.8.59)$$

Eine Funktion, die diese Bedingung erfüllt ist die Cosinus-Funktion, also ist unsere allgemeine Lösung:

$$w = A \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (2.8.60)$$

Dabei interessiert uns  $\varphi_0$  nicht besonders viel, denn wir ihn beliebig definieren können. Für Bequemheit sagen wir  $\varphi_0 = 0$

Wenn wir jetzt  $w$  zurück einsetzen erhalten wir

$$A \cos \varphi = u - \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.61)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.62)$$

Nach auflösen nach dem Radius erhalten wir

$$A \cos \varphi = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.63)$$

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + \frac{m\alpha}{L^2} \quad (2.8.64)$$

$$r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} + A \cos \varphi} \quad (2.8.65)$$

Gleich machen wir aber diese Gleichung auch ein bisschen schöner:

$$r = \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} + A \cos \varphi} \cdot \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{\frac{L^2}{m\alpha}} \quad (2.8.66)$$

$$= \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + \frac{L^2 A}{m\alpha} \cos \varphi} \quad \left| \frac{L^2}{m\alpha} = p, \quad \frac{L^2 A}{m\alpha} = e \right. \quad (2.8.67)$$

$$= \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.8.68)$$

Um  $e$  zu bestimmen schauen wir uns nochmal die Energieformel an der Stelle wo die Geschwindigkeit 0 ist, und die Gesamtenergie unser Potential  $U$  ist. Dies passiert wenn die Ableitung des Radius  $r$  null wird: also

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (2.8.69)$$

$$0 = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (2.8.70)$$

$$\rightarrow \varphi = 0 \quad (2.8.71)$$

Dann ist die Energie

$$E = \frac{L^2}{mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (2.8.72)$$

Wenn wir jetzt die Formel für  $r$  in die Energie einsetzen, dann erhalten wir:

$$E = \frac{1}{r} \left( \frac{L^2}{m} \cdot \frac{1}{r} - \alpha \right) \quad (2.8.73)$$

$$= \frac{1+e}{p} \left( \frac{L^2}{m} \cdot \frac{1+e}{p} - \alpha \right) \quad (2.8.74)$$

$$= (1+e) \cdot \frac{m\alpha}{L^2} \left( \frac{L^2}{2m} \cdot (1+e) \cdot \frac{m\alpha}{L^2} - \alpha \right) \quad (2.8.75)$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2} \left( \frac{(1+e)\alpha}{2} - \alpha \right) \quad (2.8.76)$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{e\alpha}{2} - \alpha \right) \quad (2.8.77)$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{2} (e-1) \quad (2.8.78)$$

$$= \frac{(1+e)m\alpha^2}{2L^2} (e-1) \quad (2.8.79)$$

$$= \frac{(e+1)(e-1)m\alpha^2}{2L^2} \quad (2.8.80)$$

$$= \frac{(e^2-1)m\alpha^2}{2L^2} \quad (2.8.81)$$

$$E = \frac{e^2 m \alpha^2}{2L^2} - \frac{m \alpha^2}{2L^2} \quad (2.8.82)$$

$$E + \frac{m \alpha^2}{2L^2} = \frac{e^2 m \alpha^2}{2L^2} \quad (2.8.83)$$

$$\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1 = e^2 \quad (2.8.84)$$

$$e = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1} \quad (2.8.85)$$

Obwohl wir jetzt ganz viele Variablen nicht mehr direkt in der Formel für den Radius sehen können, ein Vorteil der neu definierten Formel, ist das diese genau dem Verlauf einer Ellipse in Polarkoordinaten darstellt.

## Trajektorie

Die Bahn in Abhängigkeit des Winkels  $r(\varphi)$  haben wir schon, jetzt wollen wir sie mit der Zeit parametrisieren.

Die Trajektorie können wir mit alten Werkzeugen bestimmen, und zwar sind wir bei der Energieerhaltung 2.8.2 zu folgender Parametrisierung der Zeit gekommen:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \quad (2.8.86)$$

$$= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - V \right)}} \quad (2.8.87)$$

$$= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{2V}{m}}} \quad \left| V = -\frac{\alpha}{r} \right. \quad (2.8.88)$$

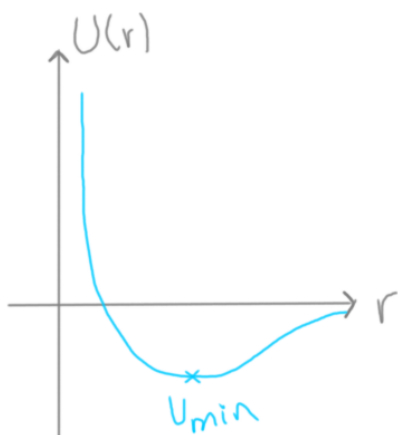
$$= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2\alpha}{mr}}} \quad \left| \cdot \frac{r}{r} \right. \quad (2.8.89)$$

$$= \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2 \left( \frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2\alpha}{mr} \right)}} \quad (2.8.90)$$

$$= \int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{2Er^2}{m} - \frac{L^2}{m^2} + \frac{2\alpha r}{m}}} \quad (2.8.91)$$

Dabei kommen wir aber nun zum Problem, dass wir wissen nicht was für ein Vorzeichen die Energie hat, dafür müssen wir die verschiedenen folgenden Fällen untersuchen:

### 1 Kreis



Es gibt diese Trajektorie, wenn die Gesamtenergie im System dem minimalen Potential  $U_{min}$  entspricht. Dies erkennt man daran, dass die Funktion des Potentials  $U$  in Abhängigkeit des Radius steht. Wir wissen schon, ein Teilchen im System könnte nicht von einem Ort (Radius) niederer Energie zu einem Ort höherer Energie kommen, wenn keine zusätzliche Energie zu Verfügung steht. Wenn die Gesamtenergie  $U_{min}$  ist, dann kann sich das Teilchen nur mit *einem* Radius bewegen, im Kreis.

### 2 Ellipse

Die Ellipse ist der andere interessante Fall wo die Kurve des Teilchens abgeschlossen ist. Dabei muss die Energie kleiner als null bleiben, denn sonst hat das Teilchen genug Energie bis ins unendlich zurück zu kehren. Wir stellen uns den Graphen

des Potentials als eine Bahn auf welcher eine Kugel rollt. Wenn das Teilchen mit Energie kleiner als null von rechts nach links rollt, dann wird sich das Teilchen in einem geschlossenen Weg hin und her bewegen.

Dann ziehen wir aus der oben angegebenen Formel einige konstanten raus:

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2Er^2}{m} - \frac{L^2}{m^2} + \frac{2\alpha r}{m}}} \quad (2.8.92)$$

$$= \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} \left( r^2 - \frac{mL^2}{2Em^2} + \frac{m\alpha r}{Em} \right)}} \quad (2.8.93)$$

$$= \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{2Em} + \frac{\alpha r}{E}}}} \quad (2.8.94)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{L^2}{2|E|m} + \frac{\alpha r}{|E|}}} \quad (2.8.95)$$

Jetzt können wir mittels der schicken Addition von null den Term unter der Wurzel verschönern. Wir sehen, dass:  $r^2$  und  $\frac{\alpha r}{|E|}$  könnten ein Teil einer binomischen Formel sein.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad | a^2 = r^2 \implies a = r \quad (2.8.96)$$

$$2ab = \frac{\alpha r}{|E|} \implies b = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (2.8.97)$$

Da müssen wir aber noch den Term  $b^2$  beachten, denn er war ursprünglich nicht ein Teil unserer Gleichung

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-\left(r - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2|E|m}}} \quad (2.8.98)$$

$$(2.8.99)$$

Im Skript wurden folgende Herleitung bei den Kegelschnitten ausgeführt:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad | p = \frac{L^2}{m\alpha}, e^2 = \frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1 \quad (2.8.100)$$

$$= \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 - \left( \frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1 \right)} \quad (2.8.101)$$

$$= \frac{1}{-2E} \quad (2.8.102)$$

$$= \frac{\alpha}{2|E|} \quad (2.8.103)$$

So sehen wir schon, es gibt etwas in unserer Formel was wir ersetzen können, aber noch besser, es gibt noch etwas was wir ersetzen können:

$$a^2 e^2 = \frac{\alpha^2}{4|E|^2} \left( \frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1 \right) \quad (2.8.104)$$

$$= -\frac{L^2}{2|E|m} + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} \quad (2.8.105)$$

Unser Integral sieht nun wie folgt aus:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} \quad (2.8.106)$$

$$(2.8.107)$$

Jetzt kommt aber eine komische Substitution, und zwar sagen wir jetzt:  $r-a \equiv s \cdot a \cdot e$ .  $s$  ist also unsere neue Variable. Wieso tun wir das?

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{(sae + r) dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (sae)^2}} \quad (2.8.108)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{(sae + a) dr}{\sqrt{a^2 e^2 (1 - s^2)}} \quad | dr = ds ae \quad (2.8.109)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{(sae + a) dsae}{ae \sqrt{(1 - s^2)}} \quad (2.8.110)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{ae \left( s + \frac{1}{e} \right) ds}{\sqrt{(1 - s^2)}} \quad (2.8.111)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \int \frac{\left( s + \frac{1}{e} \right) ds}{\sqrt{(1 - s^2)}} \quad (2.8.112)$$

---

An vielen Stellen hier erscheinen und verschwinden mal Minuszeichen, dass ist weil wir eine negative Energie haben und manchmal den Betrag der Energie mit einem Minus davor benutzen



Wir substituieren noch ein letztes Mal mit  $s \equiv -\cos \eta$ ,  $ds = \sin \eta d\eta$ , also:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \int \frac{\left(-\cos \eta + \frac{1}{e}\right) \sin \eta d\eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \eta}} \quad | \sin^2 \eta + \cos^2 \eta = 1 \quad (2.8.113)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \int \frac{\left(-\cos \eta + \frac{1}{e}\right) \sin \eta d\eta}{\sqrt{\sin^2 \eta}} \quad (2.8.114)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \int \frac{\left(-\cos \eta + \frac{1}{e}\right) \sin \eta d\eta}{\sqrt{\sin^2 \eta}} \quad (2.8.115)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \int \frac{1}{e} - \cos \eta d\eta \quad (2.8.116)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} ae \left( \frac{\eta}{e} - \sin \eta \right) \quad (2.8.117)$$

$$= \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} (\eta - \sin \eta) \quad (2.8.118)$$

Und

$$r = a(1 - e \cos \eta) \quad (2.8.119)$$

Diese Formel ist aber meiner Meinung nach ein bisschen Scheiße, weil was sollen wir überhaupt für  $\eta$  einsetzen? Es ist nicht die Zeit, ???

### 3 Hyperbel

Eigentlich sehr ähnlich zur Ellipse, nur werden an bestimmten verschiedene Substitutionen gemacht, (cosinus *hyperbolicus* z.B.). Damit kommt man auf:

$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} (\sinh \eta - \eta) \quad r = a(e \cosh \eta - 1) \quad (2.8.120)$$

### Umlaufzeit

Um die Umlaufzeit zu bestimmen werden wir überraschenderweise nochmal mit Substitutionen arbeiten. Yay.

$$T = \int_{1\text{Umlauf}} dt \quad (2.8.121)$$

Klar, die Umlaufzeit ist gleich der Summe der infinitesimalen Zeitstücken, die für einen Umlauf benötigt werden. Glücklicherweise haben wir bisher schon mit einigen Substitutionen gearbeitet, die wir auch hier verwenden können:

$$\frac{df}{dt} = \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2} \quad | \quad L = mr^2 \dot{\varphi} \quad (2.8.122)$$

$$L = 2m \frac{df}{dt} \quad (2.8.123)$$

$$dtL = 2m df \quad (2.8.124)$$

$$dt = \frac{2m df}{L} \quad (2.8.125)$$

$$T = \int_{1\text{Umlauf}} \frac{2m}{L} df \quad (2.8.126)$$

$$= \frac{2m}{L} \int_{1\text{Umlauf}} df \quad (2.8.127)$$

Nun haben wir ein Integral über die Fläche der Ellipse, was eine bekannte Formel ist:

$$T = \frac{2m}{L} F_{\text{Ellipse}} = \frac{2m}{L} \pi ab \quad (2.8.128)$$

Zusätzlich kennen wir unsere Faktoren  $a$  und  $b$ :

$$T = \frac{2m}{L} \pi ab \quad | \quad a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad (2.8.129)$$

$$= \frac{2m}{L} \pi \frac{p}{1-e^2} \cdot \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad | \quad p = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad e^2 = \frac{2|E|L^2}{m\alpha^2} + 1 \quad (2.8.130)$$

$$= \frac{2m\pi}{L} \frac{\left(\frac{L^2}{m\alpha}\right)^2}{\left(\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}\right) \sqrt{\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}}} \quad (2.8.131)$$

$$= \frac{2m\pi}{L} \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{\frac{2|E|}{\alpha} L \sqrt{\frac{2|E|}{m\alpha^2}}} \quad (2.8.132)$$

$$= \frac{2\pi}{2|E|} \sqrt{\frac{m\alpha^2}{2|E|}} \quad | \quad a = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (2.8.133)$$

$$= \frac{2\pi}{2|E|} \sqrt{m\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \quad (2.8.134)$$

$$= 2\pi a \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \quad (2.8.135)$$

$$= 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \quad (2.8.136)$$

Hier können wir auch das dritte Keplersche Gesetz sehen: es besagt, dass die Umlaufzeit proportional zu  $a^{\frac{3}{2}}$  ist.

Für Rechnungen kann man die Gleichung

$$\frac{a^3}{T} = \text{const} \quad (2.8.137)$$

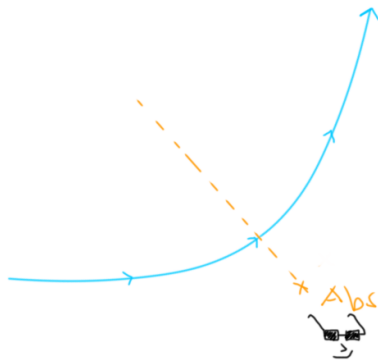
$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} \quad (2.8.138)$$

benutzen.

## 2.9 Zerfalls und Stoßprozesse

Wichtig zu verstehen, bevor wir mit diesem Thema anfangen, ist das Zentralkraftproblem, denn Stoßprozesse sind sehr ähnlich zu der Problematik, die wir dort behandelt haben. Es geht aber in diesem Fall nicht um anziehende Potentiale, sondern um *abstoßende* Potentiale. In allen Fällen, wo wir mit einem positiven Potential  $V = +\frac{\alpha}{r}$  ( $\alpha > 0$ )<sup>9</sup>, werden wir hyperbolische Bahnkurven haben.

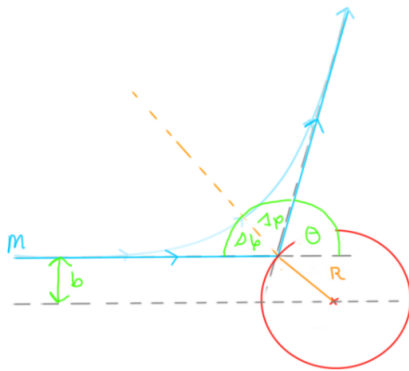
### 2.9.1 Stoßparameter und Streuwinkel



Bei einem abstoßenden Potential wird ein Teilchen von ihrer ursprünglichen Bahn abgelenkt, uns interessiert jetzt vor allem zu wissen um welchen Winkel sie abgelenkt wurde.

Dafür gibt es im Extremfall eine sehr anschauliche und geometrische Interpretation. Diese ist aber nicht im Allgemeinen gültig, aber hoffentlich hinreichend für was wir brauchen. Wir stellen uns eine reflektierende unbewegliche Kugel vor und wir beobachten den Stoß eines Teilchens mit ihrer Oberfläche:

<sup>9</sup>duh



Normalerweise wurden wir eine Hyperbelbahn erwarten, denn das Potential nimmt normalerweise mit dem Radius ab. In diesem Beispiel betrachten wir aber den Grenzfalle des Potentials:

$$V = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r \leq R \end{cases} \quad (2.9.1)$$

Geometrisch können wir den Winkel  $\theta$  bestimmen. An der oberen Zeichnung erkennen wir

$$\pi = 2\Delta\varphi + \theta \quad (2.9.2)$$

und an der Skizze links sehen wir, dass

$$\sin \Delta\varphi = \frac{b}{R} \quad (2.9.3)$$

Daraus erhalten wir

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \frac{b}{R} = 2 \arccos \frac{b}{R} \quad (2.9.4)$$

Diese geometrische Anschauung funktioniert aber nur, weil wir überhaupt einen Radius haben, dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Für allgemeinere Potentiale, die mit dem Abstand abnehmen können wir einige Werkzeuge aus dem Zentralkraftproblem nehmen:

Wir wissen schon, dass

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \quad | \quad L = \frac{d\varphi}{dt} mr^2 \quad (2.9.5)$$

$$dt = \frac{d\varphi mr^2}{L} \quad (2.9.6)$$

$$\frac{d\varphi mr^2}{L} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \quad (2.9.7)$$

$$d\varphi = \frac{L dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2.9.8)$$

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U)}} \quad | U = \frac{L^2}{2mr^2} + V \quad (2.9.9)$$

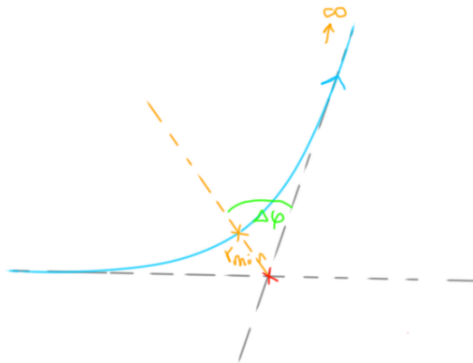
$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} - V\right)}} \quad (2.9.10)$$

$$d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (2.9.11)$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (2.9.12)$$

$$(2.9.13)$$

Der Winkel der uns interessiert ist aber nicht genau  $\varphi$ , sondern  $\Delta\varphi$ , den erhalten wir wenn wir die richtigen Integrationsgrenzen einsetzen:



Wir können sehen, der Winkel  $\Delta\varphi$  streckt sich zwischen der Gerade, die vom Zentrum des Potentials bis zum zentrumsnächsten Punkt gehen, und die gerade an die sich die Bahnkurve asymptotisch gegen Unendlich nähert, wir müssen also in den Grenzen  $r_{min}$  und  $\infty$  integrieren<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Das rote Kreuz ist eigentlich nicht unbedingt das Zentrum des Potentials, ich bin nur gerade zu faul eine neue Zeichnung zu machen

Dabei sind  $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$  und  $L = mv_\infty b$ . Wir nehmen  $v_\infty$ , weil wir den Bereich betrachten wo das Teilchen gegen unendlich geht, dann nehmen wir die Geschwindigkeit in diesem Bereich, es heißt nicht, dass die Geschwindigkeit unendlich ist. Wir nehmen  $b$  für den Drehimpuls, weil das der "Radius" zum Zentrum ist. Dann ist

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{mv_\infty b}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(\frac{mv_\infty^2}{2} - V\right) - \frac{m^2 v_\infty^2 b^2}{r^2}}} \quad (2.9.14)$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{mv_\infty b}{r^2}dr}{\sqrt{m^2 v_\infty^2 - 2mV - \frac{m^2 v_\infty^2 b^2}{r^2}}} \quad (2.9.15)$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{mv_{\infty}b}{r^2} dr}{\sqrt{m^2 v_{\infty}^2 \left(1 - \frac{2mV}{m^2 v_{\infty}^2} - \frac{b^2}{r^2}\right)}} \quad (2.9.16)$$

$$= \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{V}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (2.9.17)$$

$$(2.9.18)$$

Bei gegebenem Potential erhalten wir das Ergebnis des minimalen Radius  $r_{min}$  durch Lösung der Gleichung

$$1 - \frac{V}{E} - \frac{b^2}{r^2} = 0 \quad (2.9.19)$$

Im Abschnitt zu Kegelschnitten im Skript wurde für die Hyperbelbahnen eines Potentials  $V = -\frac{\alpha}{r}$  folgendes hergeleitet:

$$\theta = 2\varphi - \pi \quad \cos \varphi = -\frac{1}{e} \quad (2.9.20)$$

Mit der gegebenen Energie und Drehimpuls können wir also einfach einsetzen:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2} + 1}} \quad (2.9.21)$$

$$(2.9.22)$$

Außerdem wissen wir:

$$\frac{\theta}{2} = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad (2.9.23)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.9.24)$$

$$= -\sin \left( -\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.9.25)$$

$$= -\cos -\varphi \quad (2.9.26)$$

$$= -\cos \varphi \quad (2.9.27)$$

$$= \frac{1}{e} \quad (2.9.28)$$

$$\rightarrow \theta = 2 \arcsin \frac{1}{e} \quad (2.9.29)$$

$$= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{2mv_\infty^2 m^2 v_\infty^2 b^2}{2m\alpha^2} + 1}} \right) \quad (2.9.30)$$

$$= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{v_\infty^2 m^2 v_\infty^2 b^2}{\alpha^2} + 1}} \right) \quad (2.9.31)$$

$$= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4E^2 b^2}{\alpha^2} + 1}} \right) \quad (2.9.32)$$

$$= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2 + 1}} \right) \quad (2.9.33)$$

$$(2.9.34)$$

## 2.9.2 Wirkungsquerschnitt

Wenn wir aber vielleicht nicht nur ein Teilchen an unser Potential werfen, sondern eine ganze Menge Teilchen, dann gibt es andere interessante Sachen, die wir betrachten können.

Wir können einen Teilchenstrahl beschreiben, durch die Anzahl der Teilchen, die in einer bestimmten Zeit durch eine gewisse Fläche gestrahlt werden:

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \quad (2.9.35)$$

Wenn wir diesen Strahl an ein Ziel richten, so werden vielleicht nicht alle Teilchen das Ziel erreichen, sondern wird nur ein Teil der Fläche dieses Ziels getroffen. Diese Fläche nennen wir die Querschnittsfläche  $\sigma_{tot}$ . Diese Fläche ist nicht unbedingt die Fläche des Objekts, die getroffen wird, sondern die Projektion dieser Fläche auf eine zum Strahl senkrechte Ebene. Wir *schneiden quer* durch die tatsächliche Fläche.

Die Zahl der Teilchen, die das Ziel pro Zeit erreicht ist dann

$$N = n \cdot \sigma_{tot} \quad (2.9.36)$$

Wenn wir uns auf einen kleinen Teil konzentrieren, so betrachten wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt: "die Rate  $dN$ , mit der Teilchen in einem kleinen Winkelbereich  $d\theta$  gestreut werden<sup>10</sup>".

---

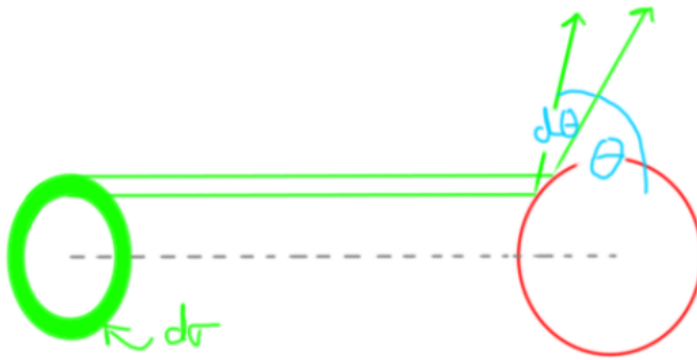
<sup>10</sup>Skript

$$dN = n \cdot \left( \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} \right) \cdot d\theta \quad (2.9.37)$$

Ein kleiner Stück Winkel ist dabei

$$|d\theta| = \left| \frac{d\theta(b)}{db} \right| \cdot |db| \quad (2.9.38)$$

Hier haben wir nur mit  $\left| \frac{db}{d\theta} \right|$  erweitert um diese Änderung besser bestimmen zu können. So haben wir also die Ableitung des Winkels  $\theta$  nach dem Stoßparameter  $b$  und die kleine Änderung dieses  $|db|$ .



Nun betrachten wir den kleinen Stück des Strahles, wessen Fläche wir mit  $d\sigma$  beschreiben. Dieser Kreisring hat eine Fläche

$$d\sigma = \pi b^2 - \pi(b - db)^2 \quad (2.9.39)$$

$$= \pi b^2 - \pi(b^2 - 2b|db| + |db|^2) \quad (2.9.40)$$

$$= 2\pi b|db| - \pi|db|^2 \quad (2.9.41)$$

$$\approx 2\pi b|db| \quad (2.9.42)$$

Der kleine Unterschied  $\pi|db|^2$  ist aber vernachlässigbar klein.

So kommen wir zur Rate  $dN$  zurück:

$$dN = n \cdot d\sigma \quad (2.9.43)$$

$$= n2\pi b|db| \quad (2.9.44)$$

$$= n2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| |d\theta| \quad (2.9.45)$$

$$= n2\pi b \left| \frac{d\sigma}{2\pi b \cdot d\theta} \right| |d\theta| \quad \left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.9.46)$$



$$= n \left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| |d\theta| \quad (2.9.47)$$

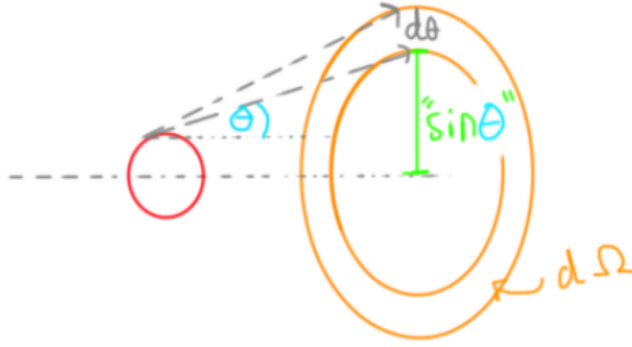
Beispielsweise hatten wir bei einer starren Kugel:

$$\left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad |b(\theta) = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.9.48)$$

$$= 2\pi b \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.9.49)$$

$$= \pi R b \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.9.50)$$

Als letztes betrachten wir den "differentiellen Raumwinkel"  $d\Omega$ . Dieser Winkel ist die Fläche eines *Einheitskreises*, und beschreibt die Fläche in der Teilchen gestreut werden:



Wir benutzen spezifisch den Einheitskreis, weil ansonsten müsste man den Abstand zwischen dem Potential und der Fläche kennen, am liebsten betrachten wir aber den Fall, wo diese Länge 1 ist, weil dann ist der Radius des kleineren Kreises einfach  $\sin \theta$ , wie wir im Bild sehen.

$$d\Omega = \pi(|d\theta| + \sin \theta)^2 - \pi \sin^2 \theta \quad (2.9.51)$$

$$= \pi(|d\theta|^2 + 2|d\theta| \sin \theta + \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \quad (2.9.52)$$

$$= \pi|d\theta|^2 + 2\pi|d\theta| \sin \theta \quad (2.9.53)$$

$$\approx 2\pi|d\theta| \sin \theta \quad (2.9.54)$$

Es scheint interessant zu sein, dass der Quotient dieses Wertes  $d\Omega$  mit der kleinen Fläche  $d\sigma$  nicht in Abhängigkeit des Stoßparameters  $b$  oder des Winkels  $\theta$  steht:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi R b |d\theta| \sin \frac{\theta}{2}}{2\pi |d\theta| \sin \theta} \quad \sin \theta = \sin \frac{2\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.9.55)$$

$$= \frac{Rb \sin \frac{\theta}{2}}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad b = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.9.56)$$

$$= \frac{R^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.57)$$

$$= \frac{R^2}{4} \quad (2.9.58)$$

Das hilft uns weiter den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot}$  zu bestimmen, denn es muss logischerweise die Summe aller infinitesimal kleinen Winkel  $d\sigma$  sein:

$$\sigma_{tot} = \int d\sigma \quad (2.9.59)$$

$$= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.9.60)$$

$$= \int \frac{R^2}{4} d\Omega \quad (2.9.61)$$

$$= \frac{R^2}{4} 4\pi \quad (2.9.62)$$

$$= \pi R^2 \quad (2.9.63)$$

Dies gilt auch für allgemeinere Kugeln, bei welchen der Winkel  $\theta(b)$  irgendwann verschwindet<sup>11</sup>:

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi \left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| d\theta \quad (2.9.64)$$

$$= \int_0^\pi 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta \quad (2.9.65)$$

$$= \int_0^R 2\pi b \cdot db \quad (2.9.66)$$

$$= \pi R^2 \quad (2.9.67)$$

Falls der Winkel  $\theta$  aber nicht verschwindet<sup>12</sup>, dann ist diese Fläche  $\sigma_{tot}$  nicht definiert, oder  $\sigma_{tot} = \infty$

### 2.9.3 Rutherford-Streuung

Besonders interessant ist die Rutherford-Streuung. Dort werden geladene Teilchen an einem Potential gestraut. Ein berühmtes Experiment dazu ist die Streuung von Alpha-Teilchen an Gold-Atomkerne. Dieses Potential kann anziehend oder abstoßend sein.

<sup>11</sup>Zum Beispiel wenn man über die reflektierende Kugel schießt, dann gibt es keinen Winkel  $\theta$

<sup>12</sup>Zum Beispiel bei Potentialen, die kleiner mit dem Radius werden, aber nie 0 werden

Dafür haben wir aber schon ganz viele Vorarbeit geleistet, da dieses Problem läuft sehr ähnlich zum Kepler-Problem. Wir müssen nur das newtonsche Gravitationspotential mit einem anderen Potential ersetzen:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \left| \alpha = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \right. \quad (2.9.68)$$

Dabei sind  $q_1, q_2$  die Ladungen der Teilchen und des Potentials, z.B. die Ladung des Atomkerns.

Wir springen bei Gleichung ?? sofort ein und erhalten:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}} \quad (2.9.69)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2b}{\alpha}\right)^2}} \quad (2.9.70)$$

Uns interessieren aber nicht die gleichen Sachen wie bei Kepler, sondern möchten wir das ganze Kram mit den Winkeln und Wirkungsquerschnitte wissen, also formen wir die Gleichungen gemäß um:

$$\left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.9.71)$$

So weit so gut, aber zunächst machen wir diese Gleichung für einen Moment ganz hässlich:

$$2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| \frac{mv^2b}{\alpha} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{mv^2b}{\alpha} \right) \right| \quad (2.9.72)$$

Dabei sind  $m, v$  und  $\alpha$  Konstanten, und wir können leicht die Äquivalenz der beiden Gleichungen nachweisen:

$$2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| \left( \frac{mv^2}{\alpha} \right)^2 b \cdot \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi \left| b \frac{db}{d\theta} \right| \quad (2.9.73)$$

Für die folgenden Rechnungen definieren wir  $x \equiv \frac{mv^2b}{\alpha}$ :

$$\left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| x \frac{dx}{d\theta} \right| \quad (2.9.74)$$

Und besonders schön ist jetzt:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2.9.75)$$

Wie setzen wir aber  $x$  in Abhängigkeit des Winkels? Das brauchen wir nämlich um es nach dem Winkel ableiten zu können. Wegen der trigonometrischen Funktion gibt es eigentlich mehrere Wege, einerseits könnten wir die Gleichung nach  $x$  auflösen, oder

wir beweisen am liebsten eine mögliche Lösung, wie im Skript steht sei:  $x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} =$

$$\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}} \quad | 1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.9.76)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}} \quad (2.9.77)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} - 1}}} \quad (2.9.78)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}} \quad (2.9.79)$$

$$= \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.9.80)$$

Da das funktioniert, können wir dann sofort die Ableitung bestimmen:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\frac{-1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (2.9.81)$$

$$= -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.82)$$

,

und schließlich:

$$\left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right| = 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| x \frac{dx}{d\theta} \right| \quad (2.9.83)$$

$$= 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \left| \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \quad (2.9.84)$$

$$= 2\pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.85)$$

Nun kommen wir mit dieser Umformung auf die Rutherford formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi |d\theta| \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}}{2\pi |d\theta| \sin \theta} \quad (2.9.86)$$

$$= \frac{\left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.87)$$

$$= \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.88)$$

$$= \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.9.89)$$

Die Rutherfordformel gibt den "differentiellen Streuquerschnitt" an. Sie beschreibt die Verteilung der gestreuten Teilchen in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$ .

### 2.9.4 Teilchenzerfall u.A.

Nah bro das ist so ein Kopfschmerzen

## 2.10 Gravitation ausgedehnter Körper

Wir sind jetzt big boys und möchten nicht für immer mit Punktmassen rechnen, obwohl sie oft gute Näherungen sind. Wie wir normalerweise bisher unsere Modelle erweitert haben, werden wir für ausgedehnte Körper uns ganz ganz viele kleinere Punktmassen vorstellen und sie zusammen addieren.

### 2.10.1 Potential einer Massenverteilung

Als erster Schritt haben wir das Beispiel zweier Punktmassen  $m_0$  und  $m_1$ , was wir schon irgendwo besprochen haben.

$$V(\vec{r}_0) = -\frac{G_N m_0 m_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} \quad \vec{F}_{01} = -\vec{\nabla}_0 V(\vec{r}_0) \quad (2.10.1)$$

Gerade interessiert uns der Fall, dass eine Masse ganz klein ist, also die Kraft die von der kleinen Masse ( $m_0$ ) auf die große Masse ( $m_1$ ) wirkt ist vernachlässigbar klein.

Auf einen bestimmt ganz guten Grund mögen wir aber jetzt nicht das Potential  $V$ , sondern das Gravitationspotential  $\phi = \frac{V}{m_0}$ . So ist nämlich die rechte Seite der Gleichung unabhängig von der Testmasse. Dann gilt für unser Potential und Kraft:

$$\phi(\vec{r}_0) = -\frac{G_N m_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} \quad \vec{F} = -m_0 \vec{\nabla} \phi(\vec{r}_0) \quad (2.10.2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}_0) \quad (2.10.3)$$

Das ist aber nur ein bisschen Foreplay, wir wollen doch nicht nur mit 2 Massen rechnen. Jetzt summieren wir über ganz viele von diesen Punktmassen:

$$\phi(\vec{r}_0) = \sum_{a=1}^N \left( -\frac{m_a G_N}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_a|} \right) \quad (2.10.4)$$

Auf einen anderen ganz guten Grund möchten wir jetzt die Masse  $m_a = \rho(\vec{r}_a) \cdot \Delta V_a$  darstellen.

$$\phi(\vec{r}_0) = \sum_{a=1}^N \left( -\frac{G_N}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_a|} \rho(\vec{r}_a) \Delta V_a \right) \quad (2.10.5)$$

Der Wechsel von Masse auf Dichte und Volumen erlaubt uns ein ganz cooles Volumenintegral zu bilden, wenn wir uns vorstellen, dass die Massenteilen infinitesimal klein sind.

$$\phi(\vec{r}_0) = -G_N \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} dV \quad (2.10.6)$$

## 2.10.2 Gravitationspotential einer Kugelschale

Im Fall einer sehr dünnen Kugelschale, können wir das Problem von einem Volumen ( $dV = d^3\vec{r}$ ) auf eine Fläche ( $dA = d^2\vec{r}$ ) vereinfachen. Dafür reden wir aber nicht von einer "Dichte"  $\rho$ , sondern von einer "Flächendichte"  $\rho_F$

$$\int \dots \rho d^3\vec{r} = \int \dots \rho_F d^2\vec{r} \quad (2.10.7)$$

Für eine nicht so dünne Kugelschale müssten das Volumen in den Grenzen des Winkels  $\varphi$ , eines Kreises, von 0 bis  $2\pi$ , dann in den Grenzen eines anderen Winkels  $\theta$ , von 0 bis  $\pi$  um eine Späre zu machen, und in den Grenzen eines Radius, von  $R$  zu  $R + \Delta R$  um der Sphäre ein Volumen zu geben. Das letztere fällt aber bei der Annahme einer sehr dünnen Kugelschale weg, weshalb wir von einem Integral

$$\int_R^{R+\Delta R} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \dots \rho(\vec{r}) \quad (2.10.8)$$

auf ein Integral

$$R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \dots \rho_F(\vec{r}) \quad (2.10.9)$$

gehen. Da wir den Radius  $r$  als konstant annehmen, "ziehen" wir einfach  $R^2$  aus dem Integral raus. An dieser Stelle ist eine wichtige Bemerkung, dass wir einen Teil des Integrals schon früher gesehen haben, und zwar bei [2.9.54](#).<sup>13</sup>

$$d\Omega = 2\pi d\theta \sin \theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.10.10)$$

Das Integral heiße jetzt nur:

$$R^2 \int_0^\pi \rho_F(\vec{r}) d\Omega \quad (2.10.11)$$

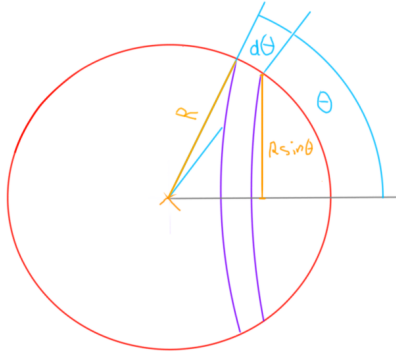
<sup>13</sup>Zugegeben wir hatten in dieser Formel  $|d\theta|$ , aber macht nichts.

Versuchen wir aber mit der physikalischen Herangehensweise unser Potential herzuleiten. Und zwar wissen wir, ein kleiner Beitrag zum Potential  $d\phi$  wird von einer kleinen Masse geleistet.<sup>14</sup>

$$d\phi = -G_N \frac{dM}{r} \quad (2.10.12)$$

Hier müssen wir aber eine Bedingung erfüllen, und zwar möchten wir nicht, dass der Radius überall hinfliegt, sondern wollen wir ihn konstant behalten. Im Fall einer Kugel wurde dann ein ganzer Ring mit Abstand  $r$  zur Testmasse diese Bedingung erfüllen, also rechnen wir mit dem Beitrag eines solchen Ringes. Außerdem gilt:

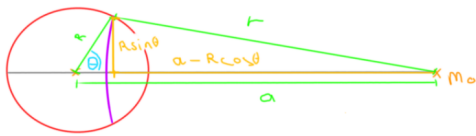
$$dM = \rho_F dA \quad (2.10.13)$$



Die Fläche  $dA$  lässt sich wie wir in der Skizze sehen können, durch ihre Breite  $Rd\theta$  und ihren Umfang  $2\pi R \sin \theta$  beschreiben, also

$$d\phi = -\frac{G_N \rho_F}{r} \cdot R d\theta \cdot 2\pi R \sin \theta \quad (2.10.14)$$

Um den Abstand zu bestimmen gucken wir uns die nächste Zeichnung an:



Wir brauchen den Abstand  $a$  zum Potentialzentrum, und bestimmen so mithilfe von Pythagoras den Radius:

$$r = \sqrt{(a - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2} \quad (2.10.15)$$

$$= \sqrt{a^2 - 2aR \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta} \quad (2.10.16)$$

$$= \sqrt{a^2 - 2aR \cos \theta + R^2} \quad (2.10.17)$$

Nun brauchen wir noch integrieren, um von  $d\phi$  auf  $\phi$  zu kommen, hier brauchen wir nicht mehr über dem Radius zu integrieren, da wir es konstant halten, und über den Winkel  $\varphi$  haben wir bereits integriert, es ist im Umfang des Ringes schon versteckt.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad (2.10.18)$$

<sup>14</sup>Hier ist  $r$  der Abstand zwischen dem kleinen Anteil an Masse, das wir betrachten und unsere Testmasse



Übrig bleibt über den Winkel  $\theta$  zu integrieren, aber durch ein paar Umbenennungen  $a^2 + R^2 = A$ ,  $2aR = B$ , und später einige Substitutionen läuft das ganz gut.

$$\phi = -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{A - B \cos \theta}} \quad | \cos \theta = u \quad (2.10.19)$$

$$du = -\sin \theta d\theta \quad (2.10.20)$$

$$u(0) = \cos 0 = 1, \quad (2.10.21)$$

$$u(\pi) = \cos \pi = -1 \quad (2.10.22)$$

$$= G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_1^{-1} \frac{du}{\sqrt{A - Bu}} \quad (2.10.23)$$

$$= G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_1^{-1} (A - Bu)^{-\frac{1}{2}} du \quad (2.10.24)$$

$$= G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \left[ -\frac{2}{B} (A - Bu)^{\frac{1}{2}} \right]_1^{-1} \quad (2.10.25)$$

$$= G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \left[ -\frac{2}{B} \sqrt{A + B} + \frac{2}{B} \sqrt{A - B} \right] \quad (2.10.26)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{B} \left[ \sqrt{A + B} - \sqrt{A - B} \right] \quad (2.10.27)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{2aR} \left[ \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR} - \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR} \right] \quad (2.10.28)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{aR} \left[ \sqrt{(a + R)^2} - \sqrt{(a - R)^2} \right] \quad (2.10.29)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{aR} [(a + R) - (a - R)] \quad (2.10.30)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{aR} (2R) \quad (2.10.31)$$

$$= -G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{a} \quad (2.10.32)$$

$$= -G_N \frac{A \rho_F}{a}. \quad (2.10.33)$$

$$= -\frac{G_N M}{a} \quad (2.10.34)$$

Das Ergebnis was diese Rechnung liefert zeigt uns, dass das *gesamte* Potential scheint im Abstand  $a$ , im Zentrum der Masse konzentriert zu sein. Daraus kann man auch interpretieren, dass innerhalb der Kugelschale keine gravitative Kraft wirkt.

### 2.10.3 Satz von Gauß und Gravitation

Für den Teil: Satz von Gauß, siehe Satz von Gauß 1.9. Für den Teil Gravitation interessiert uns die Herleitung der Masse als ein Integral über die Oberfläche. Da wir mit dem Satz von Gauß schon gezeigt haben, dass das Integral über das ganze Volumen des Körpers

gleich dem Integral über die Oberfläche ist, können wir mithilfe des Oberflächenintegral die Masse der Kugel als Punktmasse betrachten.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_A \vec{F} d\vec{f} \quad (2.10.35)$$

$$I = \int_A \vec{F} d\vec{f} \quad (2.10.36)$$

$$= \int_A \left( -\frac{G_N m M}{R^2} \vec{e}_r \right) \cdot (|df| \vec{e}_r) \quad (2.10.37)$$

$$= -\frac{G_N m M}{R^2} \int_A |df| \quad \left| \int_A |df| = \text{Fläche Kugel} = 4\pi R^2 \right. \quad (2.10.38)$$

$$= -\frac{G_N m M}{R^2} 4\pi R^2 \quad (2.10.39)$$

$$= -4\pi G_N m M \quad (2.10.40)$$

$$-\frac{I}{4\pi G_N m} = M \quad (2.10.41)$$

$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m} \int_A \vec{F} d\vec{f} \quad (2.10.42)$$

Und jetzt betrachten wir die äquivalente Aussage über das Volumen Integral<sup>15</sup>:

$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m} \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \quad \left| \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla}^2 V = -\Delta V \right. \quad (2.10.43)$$

$$= \frac{1}{4\pi G_N m} \int_V \Delta V dV \quad (2.10.44)$$

Dieses  $\Delta$  Zeichen nennen wir den Laplace-Operator, und wir definieren es als  $\Delta = \vec{\nabla}^2$ .

$$\vec{\nabla}^2 = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (2.10.45)$$

$$= \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (2.10.46)$$

Was macht er dieses  $\Delta$  dann mit unserem Potential  $V$ ?

Spezifisch für das Potential auf der Erde sei

$$V(r) = -\frac{G_N m M}{r} \quad \left| r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right. \quad (2.10.47)$$

---

<sup>15</sup>das ist vielleicht ein bisschen verwirrend, das eine  $V$  meint das Potential, das andere das Volumen, es sollte aus dem Kontext klar sein, was was ist.

Dann ist

$$\Delta V = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \cdot \left( -\frac{G_N m M}{r} \right) \quad (2.10.48)$$

$$= -\partial_x^2 \cdot \frac{G_N m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \partial_y^2 \cdot \frac{G_N m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \partial_z^2 \cdot \frac{G_N m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.10.49)$$

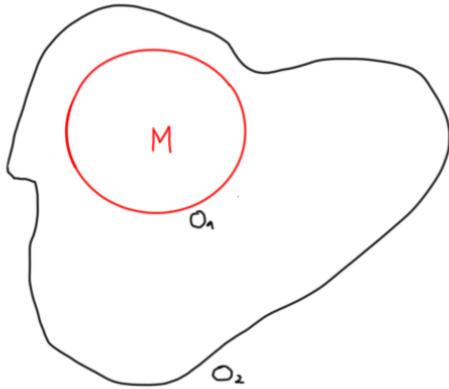
$$= -\frac{G_N m M (2x^2 - y^2 - z^2)}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{G_N m M (2y^2 - x^2 - z^2)}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{G_N m M (2z^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.10.50)$$

$$= -\frac{G_N m M}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} ((2x^2 - y^2 - z^2) + (2y^2 - x^2 - z^2) + (2z^2 - x^2 - y^2)) \quad (2.10.51)$$

$$= -\frac{G_N m M}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}} (0) \quad (2.10.52)$$

$$= 0 \quad (2.10.53)$$

Was heißt es dann, dass  $\Delta V = 0$  ist?



Dafür stellen wir uns zwei Oberflächen  $O_1, O_2$  vor, die beide unsere Masse umschließen. Wir nennen den Raum zwischen den beiden Flächen den Zwischenraum  $O_2 - O_1$ , und das entsprechende Volumen ist dann  $Vol_2 - Vol_1$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Kurze Notationsänderung

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2} \vec{F} d\vec{f} - \int_{O_1} \vec{F} d\vec{f} \quad (2.10.54)$$

Wir definieren also das neue Integral über die Fläche im Zwischenraum:

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2 - O_1} \vec{F} d\vec{f} \quad (2.10.55)$$

$$= \int_{Vol_2 - Vol_1} \text{div } \vec{F} dVol \quad (2.10.56)$$

$$= - \int_{Vol_2 - Vol_1} \Delta V dVol \quad (2.10.57)$$

Falls  $\Delta V = 0$ , dann ist

$$I_2 - I_1 = - \int_{Vol_2 - Vol_1} 0 \, dVol \quad (2.10.58)$$

$$I_2 - I_1 = 0 \quad (2.10.59)$$

$$I_2 = I_1 \quad (2.10.60)$$

Das bedeutet, dass obwohl die beiden Integrale eine unterschiedliche Fläche umschließen, ist die Masse innerhalb der beiden Flächen gleich. Es gibt also selbstverständlich keine Masse im Zwischenraum. Das ist ja von der Verständnisebene klar, jetzt haben wir das extra mathematisch gezeigt.

## 2.10.4 Feldgleichung für das Gravitationspotential

Damit wir doch zum Ende des Skripts kommen, wiederholen wir hier ganz kurz diesen letzten Abschnitt, obwohl es nicht viel neues bringt, als was schon im Skript steht.

Wir wissen

$$\int_A \vec{F} d\vec{f} = -4\pi G_N m M \quad | M = \int_{Vol} \rho \, dVol \quad (2.10.61)$$

$$\int_{Vol} \text{div } \vec{F} \, dVol = -4\pi G_N m \int_{Vol} \rho \, dVol \quad (2.10.62)$$

Da wir in beiden Fällen nach dem gleichen Volumen integrieren, so können wir das Integralzeichen wegfallen lassen und für ganz kleine Volumina gilt:

$$\text{div } \vec{F} = -4\pi G_N m \rho \quad (2.10.63)$$

$$\Delta V = -4\pi G_N m \rho \quad | \phi = \frac{V}{m} \quad (2.10.64)$$

$$\Delta \phi = -4\pi G_N \rho \quad (2.10.65)$$

Das ist eine sogenannte Poisson-Gleichung. Eine Poisson-Gleichung ist eine "elliptische partielle Differentialgleichung", ihre allgemeine Form ist  $\Delta \varphi = f$ , wobei  $\varphi$  und  $f$  Funktionen auf eine "Mannigfaltigkeit", oder eine topologische Struktur mit bestimmten Eigenschaften, wie beispielsweise eine Fläche oder ein Volumen. Es ist eine partielle Differentialgleichung, weil  $\Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ .

