

Optische Abbildung

Physikalisches Anfängerpraktikum I

Juan Provencio

Betreuer: Colin Kühner

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Ziel des Versuches | 2 |
| 2 | Grundlagen | 2 |
| 2.1 | Reelle und virtuelle Bilder | 2 |
| 2.2 | Fermatsches Prinzip | 2 |
| 2.3 | Brechung von Licht an sphärischen Flächen | 3 |
| 2.4 | Linsen | 4 |
| 2.5 | Lupe und Mikroskop | 7 |
| 3 | Versuchsaufbau | 12 |
| 3.1 | Materialien und Geräte | 12 |
| 3.2 | Aufbau | 12 |
| 4 | Messung und Auswertung | 13 |
| 4.1 | Messprotokoll | 13 |
| 4.2 | Auswertung | 16 |
| 4.3 | Mikroskop | 23 |
| 5 | Zusammenfassung und Diskussion | 25 |
| 5.1 | Zusammenfassung | 25 |
| 5.2 | Diskussion | 25 |
| 6 | Quellen | 26 |

1 Ziel des Versuches

Optische Linsen sind ein Grundbestandteil von Instrumenten wie Mikroskope oder ganz alltäglich bei Brillen, spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung ultrakalter Atomwolken. Mit diesem Versuch wollen wir die wesentliche Funktionsweise von Linsen kennenlernen und die wichtigen Größen untersuchen. Insbesondere wie man die Brennweite einer Sammellinse bei verschiedenen Konfigurationen und mit verschiedenen Methoden bestimmt, wie es dabei zu Unschärfe im Bild wegen sphärischer Aberrationen kommt und letztendlich bauen unser eigenes rudimentäres Mikroskop und untersuchen seine Eigenschaften.

2 Grundlagen

2.1 Reelle und virtuelle Bilder

Ein optisches System vereinigt die von einem Objekt ausgehenden Strahlen in ein Bild an einem Punkt. Dabei können zwei verschiedene Arten von Bildern entstehen. Einerseits entstehen "reelle" Bilder im Schnittpunkt der aus einem gleichen Objekt ausgehenden Lichtstrahlen. Ein solches Bild kann zum Beispiel auf ein Schirm gefangen werden.

Andererseits entstehen "virtuelle" Bilder dann, wenn sich die Lichtstrahlen nicht schneiden, sondern voneinander divergieren. Wenn man diese divergenten Strahlen "ohne Knicken" zurückverfolgt, dort entsteht ein virtuelles Bild, was man nicht mit einem Schirm auffangen kann. Man kann das Bild zum Beispiel an einem Spiegel erkennen, projiziert als ob es "hinter" dem Spiegel wäre, obwohl das tatsächliche Licht dort nicht auftritt.

2.2 Fermatsches Prinzip

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht nicht unbedingt den *kürzesten* Weg nimmt, sondern den Weg, der lokal am wenigsten Zeit zum Ziel braucht. Aus diesem Gesetz folgt die Konsequenz, dass Licht beim Eintritt in ein neues Medium gebrochen wird, denn bei unterschiedlichen Medien bewegt sich Licht mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und muss dementsprechend seine Trajektorie anpassen. Aus dem Fermatschen Prinzip folgen ebenfalls wichtige, aber dem untergeordneten Gesetze für Spezialfälle. Insbesondere das Snellius'sche Brechungsgesetz, nach welchem die neue Richtung α_2 des Strahls anhand der Brechungsindizes n_i oder Geschwindigkeiten v_i und des

Einfallswinkels α_1 bestimmt werden kann. Dabei bezeichnen die Winkeln α_i den Winkel zur optischen Achse.

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

2.3 Brechung von Licht an sphärischen Flächen

2.3.1 Brennweite

Beim Eintritt einer Linse, d.h. in einem neuen Medium, wird Licht also gebrochen. Insbesondere behandeln wir Brechung an sphärischen Flächen, weil dort die interessanten Sachen passieren. Beim Übergang von einem Medium mit Brechungsindex n_1 in die Linse mit Brechungsindex n_2 können wir also Gleichung (1) anwenden. Aus Abbildung 1 können wir folgendes Verhältnis zwischen der Brennweite f , den Brechungsindexen, den Winkeln und dem Radius r zum Mittelpunkt der sphärischen Linse entnehmen:

$$h = r \cdot \sin \alpha_1 = f \cdot \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (2)$$

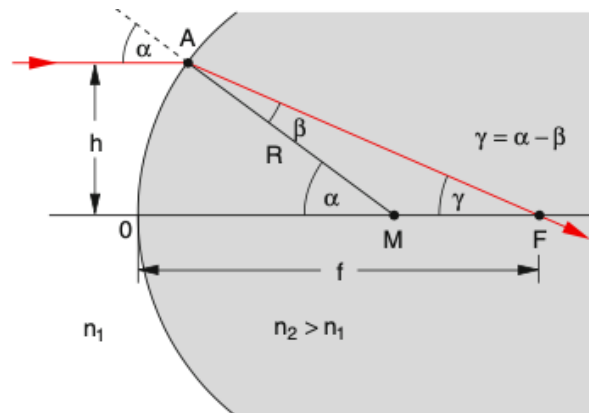


Abbildung 1: Brennweite einer sphärischen Fläche. Demtröder (1995), S. 258

Unter Annahme, dass das Licht mit einem kleinen Winkel auf die Linse einfällt, darf man aufgrund folgender Äquivalenz

$$\sin (\alpha_1 - \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \approx \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 \quad (3)$$

auch folgende Näherung für die Brennweite benutzen:

$$f = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2} \cdot r \quad (4)$$

und mithilfe von Gleichung (1)

$$f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r. \quad (5)$$

2.3.2 Konstruktion des Bildes

Um das Bild graphisch zu konstruieren sind drei spezifische Strahle von besonderer Bedeutung:

1. Mittelpunktstrahlen, diese verlaufen durch den Mittelpunkt **M** der Kreisfigur der Linse, diese behalten ihre Trajektorie und werden nicht gebrochen, da sie parallel zur Oberfläche eintreten,
2. Parallelstrahlen treffen die Linse, ja, parallel zur optischen Achse und verlaufen durch den Brennpunkt **F** und
3. Brennpunktstrahlen, diese verlaufen nicht durch den tatsächlichen Brennpunkt, sondern durch den Brennpunkt aus Sicht des Objekts **F'**. Diese werden dann zu Parallelstrahlen nach Durchgang durch die Linse.

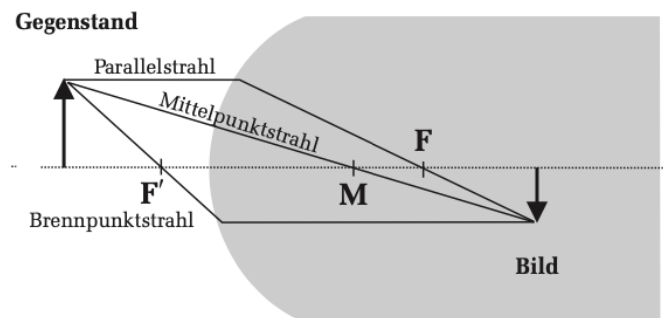


Abbildung 2: Bildkonstruktion aus drei Strahlen

Am besten bestimmt man mithilfe des Parallel- und Mittelpunktstrahls die Position, wo sich das Bild befinden wird. Ausgehend davon kann man den Brennpunktstrahl zurückverfolgen.

2.4 Linsen

Linsen sind ein berühmtes Mitglied der Leguminosen und auch ein gesundes und insbesondere proteinreiches Nahrungsmittel, weshalb sie eine Rolle in deutscher und internationaler Küche spielen. Optische Linsen sind andererseits weniger proteinreich und spielen keine Rolle in internationaler Esskultur.

Letztere bestehen aus einer meistens sphärischen, aber allgemeinen gekrümmten transparenten Fläche mit Brechungsindex n . Am häufigsten sind sie aus optischen Gläsern, d.h. Glas was spezifisch zur Verwendung von optischen Werkzeugen produziert wurde, oder aus Kunststoffen hergestellt.

Linsen können in verschiedenen Formen vorkommen, insbesondere unterschiedlicher Krümmung an beiden Grenzflächen mit Radius r_1, r_2 . Bei dünnen Linsen, wo die Dicke der Linse sehr klein gegenüber der Krümmungsradien ist können wir folgende Formel für die Brennweite verwenden.

$$f = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \quad (6)$$

Hier gilt die gleiche Konstruktionsart wie in Abbildung 2 dargestellt.

In Abbildung 3 erkennen wir andere wichtige Größe, wie die Gegenstandsweite g und die Bildweite b . Dort sind auch die Gegenstandsgröße G und Bildgröße B abgebildet. Diese Größen setzen wir in Beziehung miteinander und definieren dabei den Abbildungsmaßstab β .

$$f = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{g} \right)^{-1} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{b}{g} = \frac{B}{G} \quad (8)$$

$$\beta = \left(\frac{g}{f} - 1 \right)^{-1} = \frac{b}{f} - 1 \quad (9)$$

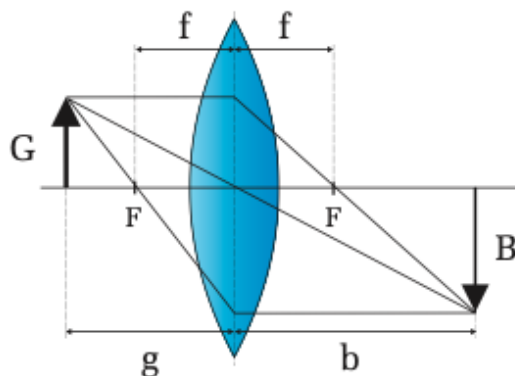


Abbildung 3: Brechung an einer bikonvexen Linse

2.4.1 Messung der Brennweite einer Linse

Gegeben die Bild- und Gegenstandsweite kann man Gleichung (7) anwenden, aber hierzu treten große Fehlerquellen vor, weshalb sich das Bessel-Verfahren besser für die Arbeit eignet. Dieser hat den Vorteil, dass es eine genauere Bestimmung der Brennweite erlaubt und auch eine Version für dicke Linsen hat. Es wird folgendermaßen durchgeführt: Man stellt in einem Abstand $L > 4f$ das Objekt und den Schirm voneinander entfernt, ja, ironisch dass wir dafür schon eine grobe Abschätzung für f brauchen, aber deswegen reicht es schon ungenau. In diesem Abstand gibt es zwei Positionen der Linse, die zu einem scharfen Bild führen. Man schiebt die Linse mehrmals hin und her und bestimmt den Abstand d zwischen den zwei Positionen. Mithilfe dieses Abstands können wir die Brennweite für dünne Linsen mit der folgenden Formel bestimmen:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad (10)$$

Diese Formel kommt aus geometrischen Überlegungen an Abbildung 3. Als erstes definiert man den Abstand L zwischen Bild und Gegenstand als

$$L = g + b \quad (11)$$

Dabei ist uns bekannt, dass der Abstand zwischen beiden Spalten

$$d = b_1 - b_2 \quad (12)$$

beträgt, wobei b_i die Abstände vom Gegenstand aus gesehen sind. Wir benutzen zunächst Gleichung (7) und schließen, dass

$$f = \frac{gb}{g+b} \quad | \cdot (g+b) \quad (13)$$

$$f \cdot (g+b) = gb \quad | g = L - b \quad (14)$$

$$f \cdot (L - b + b) = (L - b)b \quad (15)$$

$$fL = Lb - b^2 \quad | \text{pq-Formel} \quad (16)$$

$$b_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \frac{\sqrt{L^2 - 4fL}}{2} \quad (17)$$

Aus diesem Grund muss $L > 4f$ sein. Dieses Ergebnis setzen wir zurück in (12) ein.

$$d = \left(\frac{L}{2} + \frac{\sqrt{L^2 - 4fL}}{2} \right) - \left(\frac{L}{2} - \frac{\sqrt{L^2 - 4fL}}{2} \right) \quad (18)$$

$$= \sqrt{L^2 - 4fL} \quad (19)$$

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \quad (20)$$

2.4.2 Linsenfehler

Oft kommt es aber bei Linsen zu Fehlern vor, bei welchen zum Beispiel nicht alle Strahlen sich genau auf einem Punkt schneiden oder leichte farbige Ränder treten an mit weißem Licht beleuchteten Gegenständen auf. Diese sind die zwei Arten von Aberration, die wir untersuchen werden. Die erste Art nennt man sphärische Aberration, die tritt auf bei Strahlen die weit von der optischen Achse auf die Linse treffen. Die zweite Art heißt chromatische Aberration. Diese entsteht dadurch, dass Licht unterschiedlicher Wellenlänge unterschiedlich von der Linse gebrochen werden. Beide dieser Fehlern kann man beheben, aber die bei den Lösungen muss man allerdings einen Kompromiss eingehen. Beispielsweise kann man sphärische Aberrationen durch asphärische Linsen beheben, die Manufaktur dieser ist aber aufwendiger und teurer. Ansonsten kann man Loch-oder Ringblenden benutzen, damit nur achsennahe bzw. achsenferne Lichtstrahlen durch die Linse gehen, aber dies geht auf Kosten der Intensität des Bildes, da jetzt weniger Licht am Schirm ankommt. Bei chromatischen Aberrationen helfen Achromat.

2.5 Lupe und Mikroskop

Besonders nützliche Geräte, die mithilfe von Linsen konstruiert werden können sind Lupe und Mikroskope. Damit kann man künstlich den Sehwinkel vergrößern, sodass ein größeres Bild an die Netzhaut des Auges ankommt. Normalerweise machen wir das indem wir ein Objekt physikalisch näher zum Auge bringen, dies ist aber nur begrenzt möglich, denn ab einem bestimmten Abstand kann das menschliche Auge gar nicht mehr auf den Gegenstand richtig fokussieren. Diesen Abstand definiert man als die deutliche Sehweite $s_0 = 25 \text{ cm}$, ab der man für einen längeren Zeitraum ohne Anstrengung scharf sehen kann. Am Auge ist die Netzhaut das Äquivalent zu einem Schirm. An Abbildung 4 können wir dann erkennen, der maximale Sehwinkel ist bei uns durch das Verhältnis

$$\tan \alpha_0 = \frac{G}{s_0} \quad (21)$$

definiert.

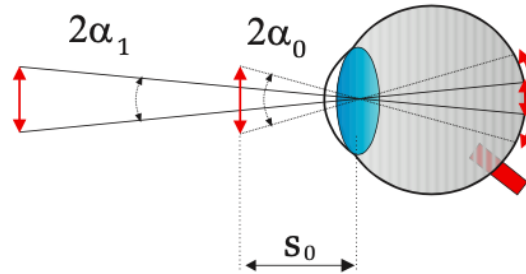


Abbildung 4: Seh winkel

2.5.1 Lupe

Eine Lupe hilft, um feinere Details von Objekten zu untersuchen. Diese besteht aus einer einfachen bikonvex Linse mittlerer Brennweite. Wenn sich ein Objekt zwischen der Lupe und der Brennweite befindet, so wird das Bild bzw. der Seh winkel vergrößert. Mit einer Lupe können wir den maximalen Seh winkel wie in Abbildung 5 erkennbar auf

$$\tan \alpha_L = \frac{G}{f} \quad (22)$$

vergrößern.

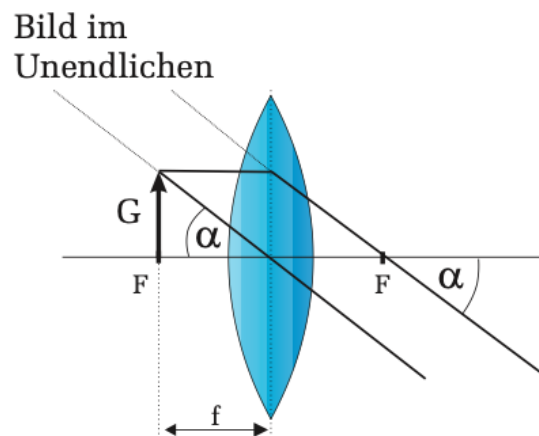


Abbildung 5: Seh winkel

Dazu interessiert uns zu sehen, um wie viel größer eine Lupe ein Objekt machen kann, wofür wir die Vergrößerung V definieren als das Quotient der

vorigen Gleichungen (21) und (22)

$$V_{\text{Lupe}} = \frac{\tan \alpha_L}{\tan \alpha_0} = \frac{s_0}{f} \quad (23)$$

Mit akzeptabler Genauigkeit sind Lupen bis auf eine 10-fache Vergrößerung geeignet, darüber hinaus verwendet man Mikroskope.

2.5.2 Mikroskope

Mikroskope bestehen aus zwei Linsen, ebenfalls bikonvex. Diese werden als Objektiv und Okular gekennzeichnet. Das Objektiv dient hauptsächlich dazu, das zu untersuchende Objekt zu vergrößern. Aus dem Objektiv tritt das Zwischenbild in das Okular auf und dieses wirkt wie eine Lupe, auf welcher wir das reelle umgedrehte Zwischenbild beobachten können. Zur Konstruktion schauen wir uns Abbildung 6 an. Knapp außerhalb der Brennweite f_1 des Objektivs wird ein Gegenstand G gelegt. Mit dem Objektiv wird im Abstand $b = f_1 + t$ ein Zwischenbild abgebildet. Dabei bezeichnet die Tubuslänge t den Abstand zwischen dem gegenstandsseitigen Brennpunkt f_1 vom Objektiv und bildseitigen Brennpunkt vom Okular f_2 . Dabei entsteht das Verhältnis

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B}{t}. \quad (24)$$

Das Auge guckt in das Okular rein mit dem Abstand f_2 mit einem Sehwinkel

$$\tan \alpha_M = \frac{B}{f_2} \quad (25)$$

Aus Gleichungen (24) und (25) folgt

$$\tan \alpha_M = \frac{G \cdot t}{f_1 \cdot f_2} \quad (26)$$

und für die Vergrößerung hier nimmt man ebenfalls das Quotient dieser Größe und des maximalen Sehwinkels aus (21):

$$V_{\text{Mikroskop}} = \frac{\tan \alpha_M}{\alpha_0} = \frac{s_0 \cdot t}{f_1 \cdot f_2} = \frac{s_0}{f} \quad (27)$$

Dazu definieren wir die jeweiligen Vergrößerungen des Objektivs v_1 und des Okulars v_2 gemäß

$$v_1 = \frac{t}{f_1} \quad (28)$$

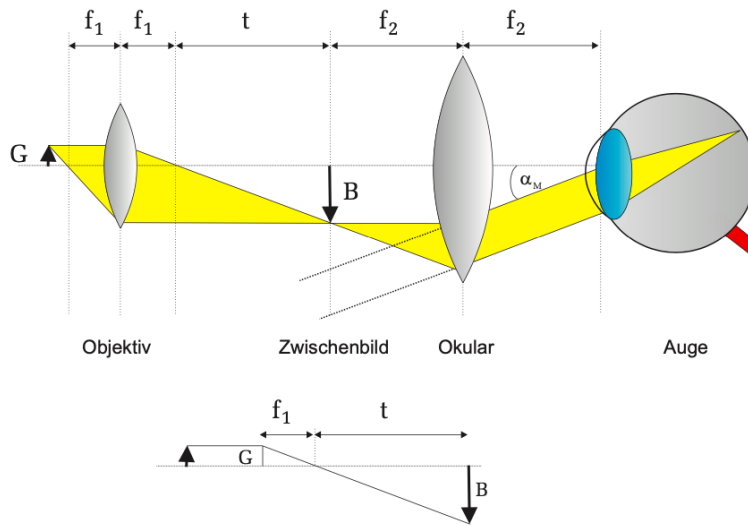


Abbildung 6: Konstruktion des Bildes auf einem Mikroskop

$$v_2 = \frac{s_0}{f_2} \quad (29)$$

damit wir die Gesamtvergrößerung bezüglich dieser zwei Größen definieren können

$$V_{\text{Mikroskop}} = v_1 \cdot v_2 \quad (30)$$

Licht hat allerdings einen Wellencharakter, weshalb man mit Phänomenen wie Beugung und Interferenz rechnen muss. Auf diesem Grund kann man die Objektivvergrößerung nicht beliebig groß machen.

2.5.3 Auflösung

Aufgrund dieses Wellencharakters entstehen also Interferenzmuster. Dabei wird aus jedem Punkt des Gegenstandes ein Interferenzmuster erzeugt mit einer Breite w des ersten Maximums von

$$w = 2,44 \frac{\lambda \cdot b}{D} \quad (31)$$

Diese Muster beeinflussen die Auflösung des Mikroskops. Man kann sich vorstellen, dass wenn zwei Punkte nah an einander sind, dann kann man gar nicht mehr richtig zwischen den Punkten unterscheiden, denn ihre Interferenzmustern zu einem verschmelzen. Dies passiert, wenn die zwei Punkte

weniger als halb mal so weit von einander entfernt sind, wie der Abstand des Hauptmaximums breit ist. Das heißt, der Mindestabstand der zwei Punkten muss

$$B_{\min} = 1,22 \frac{\lambda \cdot b}{D} \quad (32)$$

sein. Zusätzlich können wir mit (32) und (8) auch die Mindestgröße für die Gegenstandsweite

$$G_{\min} = 1,22 \frac{\lambda \cdot g}{D} \quad | f \approx g \quad (33)$$

$$= 1,22 \frac{\lambda \cdot f}{D} \quad | \frac{D}{f} = 2 \sin \alpha \quad (34)$$

Außerdem kann man mittels des halben Öffnungswinkels α der Objektivlinse und Miteinbeziehung eines Mediums mit Brechungsindex n zwischen Objektiv und Okular die obige Formel umformen zu

$$= 1,22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha} \quad (35)$$

Wir bezeichnen $n \sin \alpha = NA$ als die numerische Apertur

$$= 0,61 \frac{\lambda}{NA} \quad (36)$$

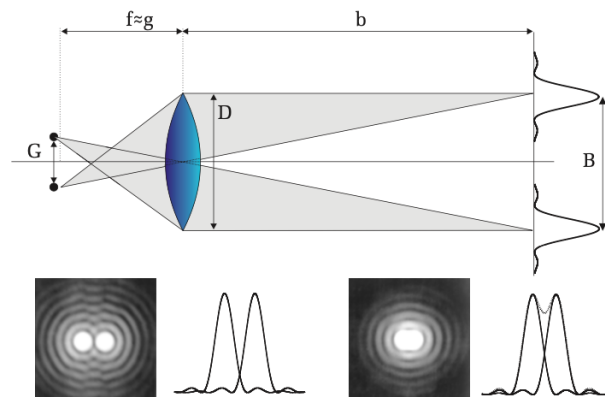


Abbildung 7: Interferenzmuster, Bildgröße und Gegenstandsgröße

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- Optische Schiene
- Lampe mit Kondensor und verschiedenen Farbfiltern
- 2 bikonvez Linsen, 1 Achromat Linse
- Loch- und Ringblende
- Fassung zur Aufnahme der Linsen und Blenden
- Schirm
- Dias mit Teststrukturen sowie ein Kreuzgitter
- Verstellbarer Messpalt
- Zwischenbild mit mm-Einteilung

3.2 Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll V31 Optische Abbildungen
06.09.2021
Mina Brandt
Juan Provencio

Aufgabenteil 2:

Wir notieren beim scharfen Bild die
Bildweite: ~~$b = 13,8$~~ $b = (56,2 \pm 0,1) \text{ cm}$
Gegenstandsweite $g = (13,8 \pm 0,1) \text{ cm}$
Daraus ergibt sich eine Brennweite von
 $f = (9,99 \pm 0,01) \text{ cm}$

Wir untersuchen die Größen Gegenstandsweite g , Geg.größe G , Bildweite b , Bildgröße B , die Art und die Richtung des Bildes und tragen sie für verschiedene Einstellungen auf folgende Tabelle auf.

Tabelle 1: Größen bei verschiedenen Einstellungen

| | $g [\text{cm}]$ | $G [\text{cm}]$ | $b [\text{cm}]$ | $B [\text{cm}]$ | Art | Richtung |
|-------------------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|-----------------|----------|-----------|
| | $21,8 \pm 0,1$ | 0,8 | $19,0 \pm 0,1$ | $0,70 \pm 0,05$ | reell | umgedreht |
| $\infty > g > 2f$ | $26,0 \pm 0,1$ | $1,0 \pm 0,05$ | $16,3 \pm 0,1$ | $1,05 \pm 0,05$ | reell | umgedreht |
| | $23,5 \pm 0,1$ | $1,90 \pm 0,05$ | $17,6 \pm 0,1$ | $1,25 \pm 0,05$ | reell | umgedreht |
| $g = 2f$ | $19,98 \pm$ | 0,8 | $19,9 \pm 0,1$ | $0,80 \pm 0,05$ | reell | umgedreht |
| | $15,0 \pm 0,1$ | 0,8 | $41,0 \pm 0,1$ | $2,6 \pm 0,1$ | reell | umgedreht |
| $2f > g > f$ | $16,0 \pm 0,1$ | 0,8 | $26,4 \pm 0,1$ | $1,2 \pm 0,1$ | reell | umgedreht |
| | $19,0 \pm 0,1$ | 0,8 | $21,5 \pm 0,1$ | $0,85 \pm 0,1$ | reell | umgedreht |
| $g = f$ | $19 \pm 0,1$ | | ∞ | | virtuell | aufrecht |
| $f > g$ | $7,0 \pm 0,1$ | | ∞ | | virtuell | aufrecht |

* b wurde erneut gemessen zu $b = 42,0 \pm 0,1$

Aufgabenteil 3:
Wir bestimmen f genauer mit dem Besselverfahren.
 $L = 55,0 \pm 0,1$

Tabelle 2: Positionen b : wo das Bild scharf ist.

| Messung | $b_1 [\text{cm}]$ | $b_2 [\text{cm}]$ | $d [\text{cm}]$ |
|---------|-------------------|-------------------|-----------------|
| 1 | $15,0 \pm 0,1$ | $41,7 \pm 0,1$ | 28,7 |
| 2 | $15,1 \pm 0,1$ | $41,6 \pm 0,1$ | 28,5 |
| 3 | $15,0 \pm 0,1$ | $41,6 \pm 0,1$ | 28,6 |

Abbildung 8: Messprotokoll

Teilauflage 4:
Im gleichen Abstand messen wir es mit blauem und roten Farbfilter.

Tabelle 3: Messungen mit rotem Filter

| Messung | b_1 [cm] | b_2 [cm] | d [cm] |
|---------|------------------|----------------|----------|
| 1 | $13,0 \pm 0,1$ | $41,4 \pm 0,1$ | 28,4 |
| 2 | $13,0 \pm 0,1$ | $41,6 \pm 0,1$ | 28,6 |
| 3 | $13,05 \pm 0,10$ | $41,7 \pm 0,1$ | 28,65 |

Tabelle 4: Messungen mit blauem Filter

| Messung | b_1 [cm] | b_2 [cm] | d [cm] |
|---------|----------------|----------------|----------|
| 1 | $13,1 \pm 0,1$ | $41,8 \pm 0,1$ | 28,7 |
| 2 | $13,1 \pm 0,1$ | $41,5 \pm 0,1$ | 28,4 |
| 3 | $13,1 \pm 0,1$ | $41,5 \pm 0,1$ | 28,4 |

Aus den obigen Tabellen bestimmen wir den Mittelwert \bar{d} und dessen Fehler $\sigma_{\bar{d}}$.

$$\bar{d}_{\text{rot}} = \frac{(28,7 + 28,5 + 28,6) \text{ cm}}{3} = 28,6 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\bar{d}_{\text{rot}}} = \frac{\sqrt{(28,7 \text{ cm} - 28,6 \text{ cm})^2 + (28,5 \text{ cm} - 28,6 \text{ cm})^2 + (28,6 \text{ cm} - 28,6 \text{ cm})^2}}{\sqrt{3}}$$

$$= 0,06 \text{ cm}$$

$$\rightarrow d_{\text{rot}} = (28,60 \pm 0,06) \text{ cm} \parallel$$

$$\bar{d}_{\text{rot}} = 28,55 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\bar{d}_{\text{rot}}} = 0,08 \text{ cm}$$

$$\rightarrow d_{\text{rot}} = (28,55 \pm 0,08) \text{ cm} \parallel$$

$$\bar{d}_{\text{blau}} = 28,5 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\bar{d}_{\text{blau}}} = 0,1 \text{ cm}$$

$$\rightarrow d_{\text{blau}} = (28,5 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Abbildung 9: Fortsetzung Messprotokoll

Teilaufgabe 5:

Beim Aufbau des Mikroskops wurde das Kreuzgitter scharf eingestellt.

Es wurden etwa $k=2$ Kästchen/mm auf dem Kreuzgitter beobachtet.

Bei den Einstellungen wurden folgende Werte gemessen:

$$b = (29,2 \pm 0,1) \text{ cm}$$

(entsprechend etwa einer angegebenen Brennweite von $f_n = 4 \text{ cm}$ und einem Tubus von etwa $t = 25 \text{ cm}$)

Der Abbildungsmaßstab β ergibt sich also

$$\beta = \frac{b}{f} - 1 = 6,3 \approx 5,25$$

Den Strichabstand beträgt

$$a = k \cdot \beta = 2 \text{ Kästchen mm}^{-1} \cdot 6,3 = 12,6 \text{ Kästchen mm}^{-1}$$

Dementsprechend beträgt der Abstand eines Kästchens

$$x = 0,0794 \text{ mm}$$

Wir messen jetzt die Spaltbreite, bei der die senkrechten Linien verschwinden

Tabelle 5: Spaltbreite

| Messung | Spaltbreite s [mm] |
|---------|----------------------|
| 1 | $0,22 \pm 0,02$ |
| 2 | $0,23 \pm 0,02$ |
| 3 | $0,22 \pm 0,02$ |

- rot größer Spalt
- blau kleiner

✓

Abbildung 10: Fortsetzung Messprotokoll

4.2 Auswertung

4.2.1 Systematischer Fehler in der Durchführung des Versuches

In der Versuchsdurchführung ist nicht beachtet worden, dass die Auftrefffläche des Schirms 2 mm weg vom Messpunkt des Schiebbestanders in Richtung der Lampe entfernt ist. Auf diesem Grund korregieren wir rückwirkend alle Messungen, die bezüglich des Schirms durchgeführt worden und verändern den Abstand um -2 mm

Tabelle 1: Korrektur Teilaufgabe 2: Bildweite und Gegenstandsweite

| Gegenstandsweite g [cm] | Bildweite b [cm] |
|---------------------------|--------------------|
| $13,8 \pm 0,1$ | $36,0 \pm 0,1$ |

Tabelle 2: Korrektur Teilaufgabe 2: Größen bei verschiedenen Einstellungen

| | g [cm] | G [cm] | b [cm] | B [cm] | ... |
|-------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----|
| $\infty > g > 2f$ | $20,8 \pm 0,1$ | $0,8$ | $18,8 \pm 0,1$ | $0,70 \pm 0,05$ | |
| | $25,8 \pm 0,1$ | $1,90 \pm 0,05$ | $16,1 \pm 0,1$ | $1,05 \pm 0,05$ | |
| | $23,3 \pm 0,1$ | $1,90 \pm 0,05$ | $17,4 \pm 0,01$ | $1,25 \pm 0,05$ | |
| $g = 2f$ | $20,0 \pm [HEY]$ | $0,8$ | $19,7 \pm 0,1$ | $0,80 \pm 0,05$ | |
| $2f > g > f$ | $13,0 \pm 0,1$ | $0,8$ | $41,8 \pm 0,1$ | $2,6 \pm 0,1$ | |
| | $16,0 \pm 0,1$ | $0,8$ | $26,2 \pm 0,1$ | $1,2 \pm 0,1$ | |
| | $19,0 \pm 0,1$ | $0,8$ | $20,95 \pm 0,10$ | $0,85 \pm 0,10$ | |
| $g = f$ | $10 \pm 0,1$ | | ∞ | | |
| $f > g$ | $7,0 \pm 0,1$ | | ∞ | | |

4.2.2 Grobe Bestimmung der Brennweite

Im zweiten Aufgabenteil haben wir als erstes mithilfe der groben Abschätzung für dünne Linsen aus Gleichung (7) die Brennweite der Linse. Aus den Messungen in Tabelle 1 ergibt sich eine Brennweite und einen Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial b}(f) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial g}(f) \cdot \sigma_g\right)^2} = 0,1 \text{ cm} \quad (37)$$

von

$$f = (9,98 \pm 0,01) \text{ cm} \quad (38)$$

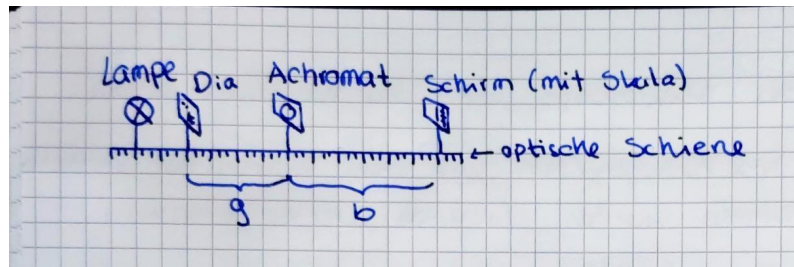


Abbildung 11: Aufbau zum Versuchsteil: Grobe Bestimmung der Brennweite

Außerdem bestimmen wir zu den Messungen den Abbildungsmaßstab β per Formel (8) in Tabelle 4

Tabelle 3: Bestimmung des Abbildungsmaßstabs β

| Nr. | g [cm] | b [cm] | Art | Richtung | β |
|-----|----------------|------------------|----------|-----------|------------------|
| I | $20,8 \pm 0,1$ | $18,8 \pm 0,1$ | reell | umgedreht | $0,90 \pm 0,7\%$ |
| | $25,8 \pm 0,1$ | $16,1 \pm 0,1$ | reell | umgedreht | $0,62 \pm 0,7\%$ |
| | $23,3 \pm 0,1$ | $17,4 \pm 0,01$ | reell | umgedreht | $0,75 \pm 0,7\%$ |
| II | $20,0 \pm 0,1$ | $19,7 \pm 0,1$ | reell | umgedreht | $0,99 \pm 0,7\%$ |
| III | $13,0 \pm 0,1$ | $41,8 \pm 0,1$ | reell | umgedreht | $3,22 \pm 0,8\%$ |
| | $16,0 \pm 0,1$ | $26,2 \pm 0,1$ | reell | umgedreht | $1,64 \pm 0,7\%$ |
| | $19,0 \pm 0,1$ | $20,95 \pm 0,10$ | reell | umgedreht | $1,10 \pm 0,7\%$ |
| IV | $10 \pm 0,1$ | ∞ | reell | aufrecht | |
| V | $7,0 \pm 0,1$ | ∞ | virtuell | aufrecht | |

Hierbei wurde der Fehler für β mit relativen Fehlern gemäß

$$\frac{d\beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{db}{b}\right)^2 + \left(\frac{dg}{g}\right)^2} \quad (39)$$

berechnet.

An der graphischen Konstruktion in Abbildungen 12 und 13 der verschiedenen Einstellungen kann man auch grob das Verhältnis des Abbildungsmaßstabes erkennen.

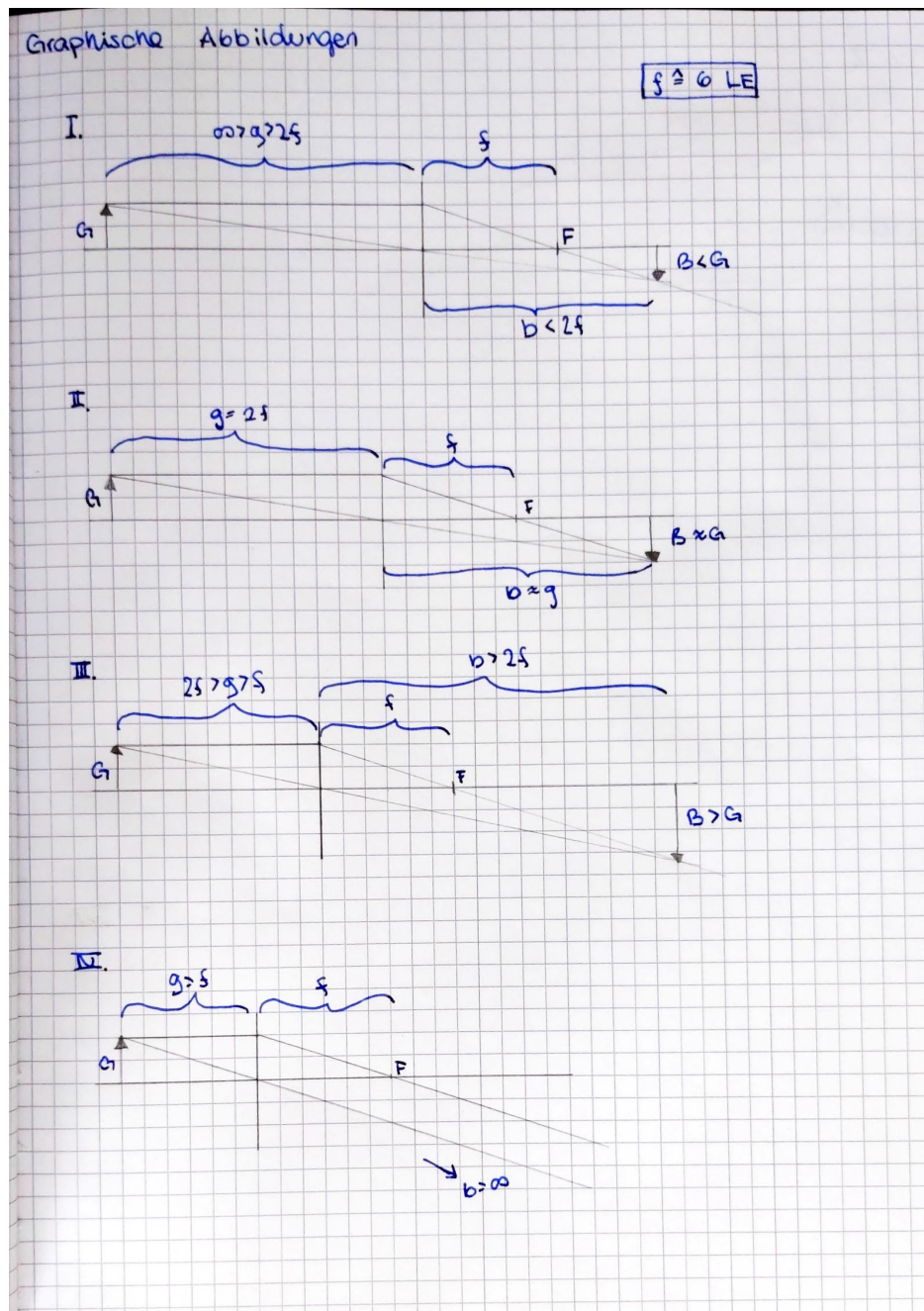


Abbildung 12: Graphische Konstruktion der Abbildung

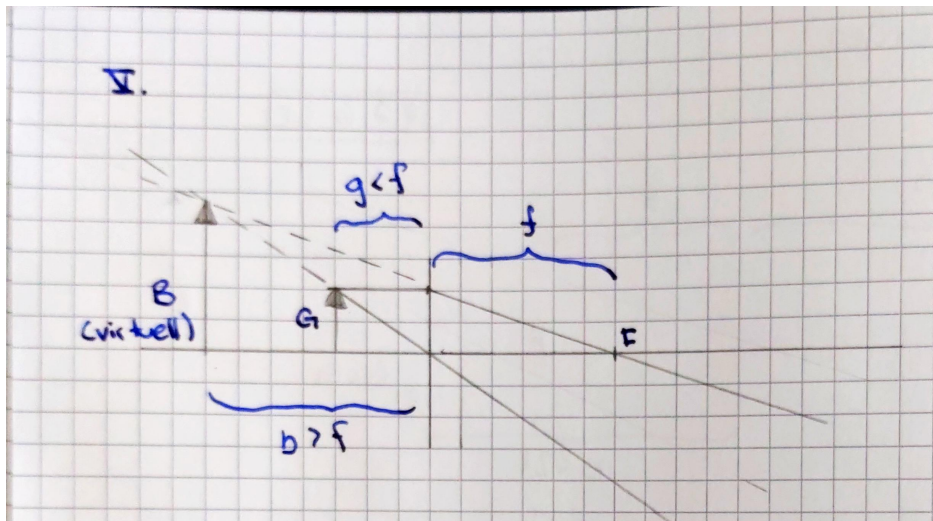


Abbildung 13: Fortsetzung Graphische Konstruktion der Abbildung

Außerdem kann man die Brennweite f auch graphisch bestimmen. Dieses Verfahren basiert auf der Verbindung der Größen b, g durch Geraden auf Millimeterpapier. Mit genauen Messungen und Zeichnungen würden sich alle diese Gerade an genau einem Punkt schneiden, jedoch gelingt dies mit den relativ großen Ablesefehlern eher ungenau. Aus Abbildung 14 entnehmen wir, dass die die Brennweite sich wahrscheinlich im Bereich

$$f = (9,9 \pm 0,3) \text{ cm} \quad (40)$$

befinden muss.

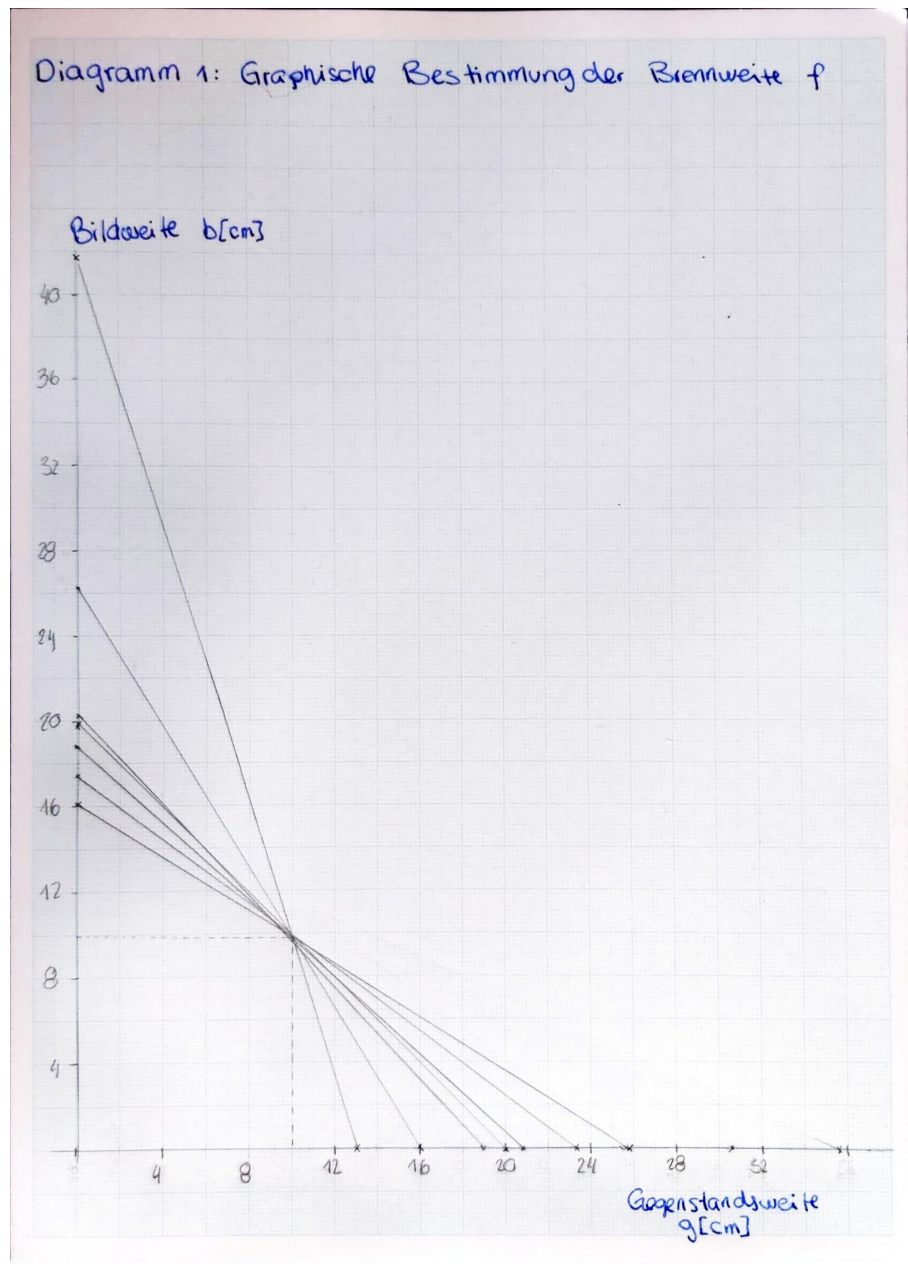


Abbildung 14: Graphische Bestimmung der Brennweite

4.2.3 Bestimmung der Brennweite mithilfe des Bessel-Verfahrens

Mit dem Bessel-Verfahren versuchen wir die Brennweite noch genauer zu untersuchen. Aus den zwei bisher verwendeten Methoden spielt der Ablesfehler eine viel wichtigere Rolle. Mit dem Bessel-Verfahren versuchen wir diesen zu

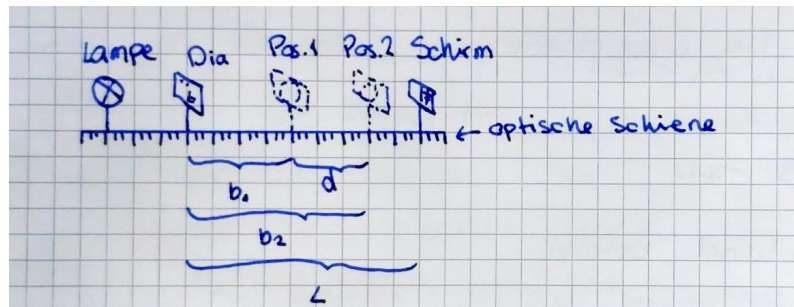


Abbildung 15: Aufbau zum Versuchsteil: Brennweite mithilfe des Bessel-Verfahrens

minimieren, da wir mehrere Messungen durchführen. Als erstes nehmen wir eine Länge¹ $L = (54,8 \pm 0,1)$ cm zwischen dem Objekt und dem Schirm und messen rücken die Linse hin und her zwischen den zwei Positionen, wo das Bild scharf ist und messen jeweils drei Mal. Diese Werte sind in Tabelle 2 des Messprotokolls aufgeschrieben. Mit Formel (10) berechnen wir drei Werte für f und geben als Endergebnis den Mittelwert dieser drei Messungen. Dabei erhalten wir

Tabelle 4: Bestimmung von Brennweite f nach Bessel-Verfahren

| Messung | Abstand d [cm] | Länge zum Schirm L [cm] | Brennweite f [cm] |
|---------|------------------|---------------------------|---------------------|
| 1 | $28,70 \pm 0,14$ | $54,8 \pm 0,1$ | $9,94 \pm 0,05$ |
| 2 | $28,50 \pm 0,14$ | $54,8 \pm 0,1$ | $9,97 \pm 0,05$ |
| 2 | $28,60 \pm 0,14$ | $54,8 \pm 0,1$ | $9,99 \pm 0,05$ |

Daraus ergibt sich einen mittleren \bar{f} von

$$\bar{f} = 9,967 \text{ cm} \quad (41)$$

und der Fehler wurde als Fehler des Mittelwerts bestimmt

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (f_i - \bar{f})^2} = 0,015 \text{ cm} \quad (42)$$

Insgesamt folgern wir daraus, dass die Brennweite

$$f = (9,967 \pm 0,015) \text{ cm} \quad (43)$$

ist.

¹Hier wurde ebenfalls der systematische Fehler korrigiert.

4.2.4 Linsenfehler

Während der Durchführung des Versuchs wurden die verschiedenen Linsenfehlern beobachtet.

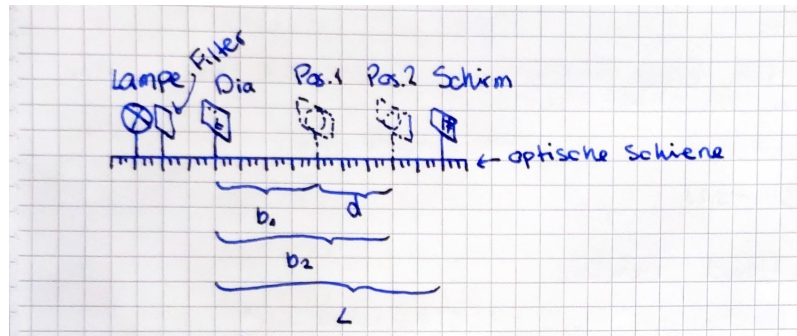


Abbildung 16: Aufbau zum Versuchsteil: Linsenfehler

Als erstes haben wir die chromatische Aberration untersucht indem wir nochmal jeweils drei Messungen des Abstands d durchgeführt haben, dieses Mal allerdings mit dem Rot- und Blaufilter. Bei diesem Fehler erkennt man insbesondere mit der Ringblende, wie sich in den Rändern des Objekts ein leicht lilanes bis blaues Spektrum von Farben bildet. Die Werte für d sind in Tabellen 3 und 4 des Messprotokolls aufgeschrieben. Dabei besitzen die einzelnen Werte d_i einen Fehler von etwa 0,14 cm. Aus der Bildung des Mittelwerts und des Fehlers des Mittelwerts analog zur Rechnung mit der Brennweite erhalten wir für den roten Filter

$$d_{\text{rot}} = (28,55 \pm 0,08) \text{ cm} \quad (44)$$

$$f_{\text{rot}} = (9,98 \pm 0,05) \text{ cm} \quad (45)$$

und für den blauen Filter

$$d_{\text{blau}} = (28,50 \pm 0,10) \text{ cm} \quad (46)$$

$$f_{\text{blau}} = (9,99 \pm 0,05) \quad (47)$$

Als Vergleich erhält man für weißes Licht mit den Messungen aus der Bestimmung der Brennweite einen Wert von

$$d_{\text{weiß}} = (28,60 \pm 0,06) \text{ cm} \quad (48)$$

Dieses Ergebnis scheint unseren Erwartungen zu widersprechen, wir werden in mehr Detail in der Diskussion darauf eingehen.

Zunächst wollen wir die sphärische Aberration untersuchen. Als erstes ist uns aufgefallen, dass die Verwendung der Lochblende den Abstand d zwischen beiden scharfen Punkten verringert. Anhand Gleichung (10) ist daran zu erkennen, dass f damit größer wird. Mit der Ringblende vergrößert sich dagegen der Abstand d , weshalb f damit ein bisschen kleiner würde.

4.3 Mikroskop

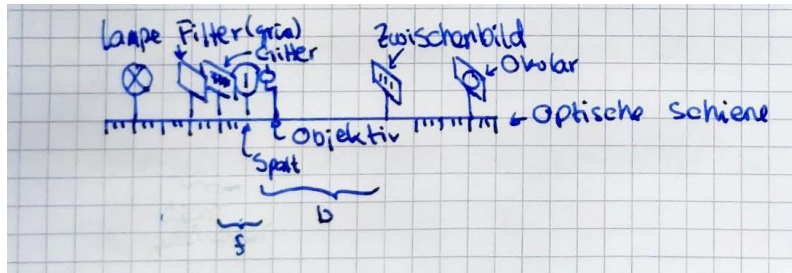


Abbildung 17: Aufbau zum Versuchsteil: Mikroskop

Mithilfe eines optischen Systems wie in Abbildung 6 gezeigt wird haben wir ein Mikroskop gebaut und ein Objekt mit einem sehr feinen Gitter untersucht. Wir wollen nun bestimmen, was die Gitterkonstante G , d.h. wie groß ein Kästchen ist. Dafür beobachten wir die Projektion des Kreuzgitters auf dem Okular des Mikroskops. Diese Projektion trifft auf ein durchsichtiges Objekt mit einer Längenskala, woran wir die Kästchen pro Längeneinheit k ablesen können. Diese messen wir als $k = (2 \pm 0,1)$ Kästchen pro Millimeter. Für die Bestimmung der Gitterkonstante eignet sich einerseits Gleichung (24), für welche wir gegebenen Größen haben.

$$G = \frac{B \cdot f_1}{t} \quad (49)$$

Auf dem Objektiv ist eine Brennweite f_1 ohne Fehlerangabe gegeben, und für die Tubuslänge benutzen wir $t = b - f_1$. Dies entspricht per Praktikumsanleitung $t = 25$ cm. Jedoch haben wir bei Scharfeinstellung bei b etwa $b = 29,2 \pm 0,1$ gemessen. Für die Bildweite B benutzen wir den gemessenen Wert k und folgern daraus, dass $B = (0,5 \pm 0,1)$ mm beträgt. Aus dieser Formel ergibt sich eine Gitterkonstante von

$$G = (0,080 \pm 0,011) \text{ cm} \quad (50)$$

Der Fehler wurde gemäß der gaußschen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{f_1}{t} \cdot \sigma_B\right)^2 + \left(\frac{B \cdot f_1}{t^2} \cdot \sigma_t\right)^2} = 0,011 \text{ cm} \quad (51)$$

Andererseits lässt sich diese bestätigen, indem wir mittels des Abbildungsmaßstab die Originalgröße aus der abgelesenen rekonstruieren. Dafür benutzen wir Formel (9) und benutzen die gefundenen Werten:

$$\beta = \frac{b}{f} - 1 = \quad (52)$$

Zusätzlich interessiert uns die Auflösung des Mikroskops, das heißt, wir suchen den Mindestabstand G_{\min} bei dem man noch zwischen zwei Objekten unterscheiden kann. Dies machen wir, indem wir den Abstand D der Hauptinterferenzmaxima zweier Objekten bestimmen und per Gleichung (34).

$$G_{\min} = 1,22 \frac{\lambda \cdot f_1}{D} \quad (53)$$

Dabei entspricht D dem Mittelwert der in Tabelle 5 des Messprotokolls aufgeschriebene Spaltbreite. Diese beträgt

$$D = (0,223 \pm 0,003) \text{ mm}. \quad (54)$$

Der Fehler wurde als Fehler des Mittelwerts angegeben.

Per Versuchsanleitungen wird für die Wellenlänge ein Wert von $\lambda = 550 \text{ nm}$ verwendet. Dann ist die Auflösung

$$G_{\min} = (0,120 \pm 0,015) \text{ mm} \quad (55)$$

Bei der Versuchsdurchführung war auch zu beobachten, dass eine Änderung des Filters, mit welchem man die Lampe deckt diesen Wert ändert. Mit blauem Filter wird der Spaltabstand kleiner und mit dem roten wird er größer.

Außerdem können wir anhand Gleichung (35) das Auflösungsvermögen G_{\min} anhand trigonometrischer Beziehung bestimmen. Dafür ist die Wellenlänge $\lambda = 550 \text{ nm}$ einzusetzen und für den Winkel $\sin \alpha$ wurde die graphische Konstruktion verwendet. Dafür nutzen wir die Tatsache aus, dass der Winkel $\alpha \ll 1^\circ$ ist und können damit $\sin \alpha \approx \alpha$ annähern. Ebenfalls aufgrund dieser Annäherung gilt $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ und $\tan \alpha = \frac{D}{2f}$. Daraus ergibt sich,

$$\alpha = (0,00279 \pm 0,00004) = (0,1597 \pm 0,0021)^\circ \quad (56)$$

Der Fehler wurde mit dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz wie bereits bisher in der Ausarbeitung angegeben. Damit bekommen wir eine Gitterkonstante von

$$G_{\min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{2\alpha} = (0,1204 \pm 0,0016) \text{ mm} \quad (57)$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch wurde die wesentliche Funktion von optischen Linsen erklärt und ihre Anwendung bei Werkzeugen wie Lupen und Mikroskopen untersucht. Dafür haben wir zuerst gelernt, wie man aus verschiedenen Methoden die Brennweite einer Linse bestimmt und welche sich als genauer erweisen. Einerseits konnte man durch eine Näherung der Linse als dünne Linse mithilfe einer einfachen Messung der Bild- und Gegenstandsweite benutzen. Auch wurde mit einer genaueren Messung das Bessel-Verfahren benutzt und als ungenaueste zeigte sich die graphische Bestimmung der Brennweite.

Wir haben dabei auch über Effekte wie Brechung und Beugung von Licht gelernt und Fehler untersucht, die sich bei den verwendeten Linsen ergeben. Unter anderem sind solche die chromatischen Aberrationen, bei welchen Licht unterschiedlicher Wellenlänge anders stark von Linsen gebrochen wird. Der andere Fehler den wir untersucht haben ist die sphärische Aberration. Dabei kann das Bild nicht genau fokussiert werden, weil Licht weiter von der optischen Achse entfernt stärker gebrochen wird. Außerdem haben wir in unserer Recherche gelernt, wie man solchen Fehlern entgegenwirken kann.

Zunächst haben wir ein Mikroskop konstruiert, mit welchem wir die Gitterkonstante eines Kreuzgitters und dann auch die maximale Auflösung des Mikroskop bestimmt haben.

5.2 Diskussion

Per Angaben des Tutors beträgt die Brennweite der verwendeten Linse $f = 10$ cm ohne Angaben eines Fehlers ist es schwierig einzuschätzen inwiefern dieser Wert stimmt. Wir werden aber für die Bestimmung der Abweichung unserer Brennweite annehmen, dass dieser Wert exakt ist. Durch die Näherung als dünne Linse erhalten wir eine Abweichung von

$$k = \frac{|f_{\text{dünn}} - f|}{\sigma_{f_{\text{dünn}}}} = 2 \quad (58)$$

2 σ -Abweichungen vom Erwartungswert. Dies ist ein gutes Ergebnis, insbesondere weil wir davon ausgegangen sind, dass die Näherung mit großen Fehlern behaftet war. Eine graphische Bestimmung der Brennweite ergibt mit der gleichen Rechnung eine Abweichung von $0,33 \sigma$, was sich durch die großzügige Abschätzung des Fehlers erklären lässt. Der absolute Fehler war aber hier am größten von den drei untersuchten Methoden. Zuletzt gucken

wir uns das Bessel-Verfahren an. Überraschenderweise erhalten wir hiermit eine größere σ -Abweichung von 2,2. Dies liegt daran, dass wir riguröser mit der Fehlermessung dieses Verfahrens waren. Diese riguröse Durchführung ist aussagekräftiger als die vergleichsmäßig größere Abweichung.

Im nächsten Versuchsteil wurden die Linsenfehler untersucht und bei der chromatischen Aberration sind wir zu einem unerwarteten Ergebnis gekommen. Dadurch, dass Licht längerer Wellenlänge stärker gebrochen sein müsste als Licht kürzerer Wellenlänge. Das heißt, der Abstand zwischen den zwei Scharfpositionen d hätte bei rotem Licht kleiner sein sollen als der bei blauem Licht. Diese Diskrepanz liegt vermutlich an Ablesefehlern, insbesondere bei der Bestimmung der zweiten scharfen Position. Wir erkennen an den Tabellen 3 und 4 des Messprotokolls 9, dass diese eine größere Abweichung gegenüber der ersten Position besitzen. Das liegt daran, dass dort die Verkleinerung des Bildes beobachtet wurde, und trotz Versuche dies vorsichtig genug zu machen, durch zum Beispiel Ausschaltung der Lichte im Raum, ist es nicht so gut gelungen. Das Bild war zu klein um die Position fein einstellen zu können.

Zuletzt bleibt die Aufgabe der Gitterkonstante und des Auflösungsvermögens des Mikroskops. Nach den Erwartungen sind zwei Objekte nicht mehr von einander unterscheidbar, wenn der Abstand zwischen den beiden Hauptinterferenzmaximums kleiner als G_{\min} ist. Dennoch haben wir festgestellt, dass die Gitterkonstante G etwa 66% so groß ist wie G_{\min} , und selbst bei Ausstreckung der Fehlerbereiche gibt es hier keine Überlappung. Die Rechnung für diesen Wert wurde sogar durch zwei Wege durchgeführt und sehr ähnliche Werte für die Konstante bekommen. Diese unterscheiden sich um 0,026 σ -Bereiche, was ziemlich gut ist.

Der Versuch war höchst interessant, aber auch sehr anspruchsvoll. Insbesondere fiel mir als nicht Muttersprachler schwer, den Versuchsskript zu verstehen. Es war meiner Meinung nach oft unübersichtlich formuliert und es hat zusätzlich eine sehr breite Menge an Themen eingeführt, weshalb ich erst nach extrem langer Bearbeitung verstehen konnte, was zu machen war. Zugegeben, ich habe auch eine Tendenz längere Absätze zu schreiben (siehe diese Ausarbeitung), aber ich konnte dem Skript oft nicht folgen.

6 Quellen

Demtröder, W. (1995). Experimentalphysik 2 (7. Auflage). Springer Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-55790-7>

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP1 für Studierende der Physik B.Sc., 55-60.

Walcher W, et. al. (1967). Praktikum der Physik (8. Auflage).
<https://doi.org/10.1007/978-3-322-94128-2>

Wikipedia-Autoren. (2006, 10. April). Bessel-Verfahren. Wikipedia.
<https://de.wikipedia.org/wiki/Bessel-Verfahren>

Glossar

Abbildungsmaßstab Der Abbildungsmaßstab β gibt das Verhältnis der durch eine Linse beobachteten Bildgröße zur tatsächlichen Größe des Objekts. Es ist ein Maß für die Skalierung des Bildes im Bezug auf das Objekt. 5

Aberration Abweichung von der Norm. In diesem Kontext Abweichung von der erwarteten optischen Abbildung. 7

Achromat Linse, die optische Aberrationen korrigiert, normalerweise durch Vereinigung blaues und rotes Lichtes an einem Punkt. 7

Objektiv Linse, die ein vergrößertes, reelles und umgekehrtes Bild erzeugt. 9

Okular Fasst das vom Objektiv erzeugten Zwischenbild auf und vergrößert und kehrt ihn noch einmal um. Dabei entsteht ein virtuelles Bild wie bei einer Lupe. 9

optisches System Ein optisches System umfasst alle Werkzeuge, die zur Erzeugung eines Bildes gebraucht werden. Zum Beispiel schließt es die Linsen, Spiegeln und Prismen ein. 2

Vergrößerung Die Vergrößerung V gibt an um wie viel eine Linse ein Objekt bezüglich des maximalen Seh winkels vergrößert. 8