2. Übungsblatt zur Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

2.1 Aufgabe 1

a) Geg.:
Offene Menge $M \subset \mathbb{R}$, Diff'bare Fkt. $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0 \forall x \in M$
Behauptung:
f ist streng Monoton wachsend und injektiv.
Die Behauptung ist **falsch**. Die Definitionsmenge M ist nicht explizit zusammenhängend, es könnte somit ein Sprung im Verlauf vorkommen. So würde zwar die streng monotone Steigung beibehalten, allerdings wäre es so möglich, dass zwei verschiedene Werte der Definitionsmenge mit demselben Funktionswert belegt sind.
$\implies$ nicht injektiv.

b) Geg.:
Nichtleerer Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{O})$
Behauptung:
$\forall x \in X$ ist die Menge $\{x\}$ abgeschlossen.
Die Behauptung ist **wahr**. Zu jedem $x \in X$ existieren $y \neq x$ mit offenen Umgebungen U, für die gilt $y \in U_y$ und $x \notin U_y$. Die Vereinigung aller U_y bildet die offene Menge $U = X \setminus \{x\}$, deren Komplement, $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$, abgeschlossen ist.

2.2 Aufgabe 2

Geg.:
Mengensystem $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{Z}$.
$\mathcal{T}$ enthält $\varnothing$, $\mathbb{Z}$ und alle $U \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z} \setminus U$ endlich.

a) Zu Zeigen: $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ ist topologischer Raum

- $\varnothing, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$
  Erfüllt nach Aufgabenstellung. ✓
- $U_i \in \mathcal{T}, i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$
  Sei I eine Idexmenge und $U_i \in \mathcal{T}$. Dann gilt, nach Aufgabenstellung, dass $\mathbb{Z} \setminus U_i$ endlich ist für alle $i \in I$.
  Das Komplement über eine Vereinigung aller U_i,
  $$Z \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$$
  lässt sich umschreiben als
  $$\bigcap_{i \in I} (Z \setminus U_i)$$
  und stellt somit einen beliebigen Schnitt endlicher Mengen dar, welcher wiederum endlich ist.
  Somit gilt, dass
  $$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}. \checkmark$$
- $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}, k \in \mathbb{N} \implies U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$
  Seien $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$ für $\mathbb{N} \ni k < \infty$. Dann gilt, nach Aufgabenstellung, dass $\mathbb{Z} \setminus U_i$ endlich ist für alle $i = 1, \ldots, k$.
  Das Komplement über einen Schnitt aller U_i,
  $$\mathbb{Z} \setminus (U_1 \cap \cdots \cap U_k)$$
  lässt sich umschreiben als
  $$(\mathbb{Z} \setminus U_1) \cup \cdots \cup (\mathbb{Z} \setminus U_k)$$
  und stellt somit eine endliche Vereinigung endlicher Mengen dar, welche wiederum endlich ist.
  Somit gilt, dass
  $$U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}. \checkmark$$

b) Zu Zeigen: $\forall a \in \mathbb{Z} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = n \xrightarrow{n\to\infty} a$

Konvergenzkriterium in topologischen Räumen:

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \iff \text{Zu jeder Umgebung } U \text{ von } a \;\exists\; n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\; n \geq n_0 : a_n \in U$$

$$U \text{ heißt Umgebung von } x \text{, falls } \exists\; V \in \mathcal{T} : x \in V \subset U$$

Sei nun $a \in \mathbb{Z}$ fest gewählt, dann finden wir offene Mengen $V \in \mathcal{T}$ mit $a \in V$. Wie in a) gezeigt, sind die Mengen V und somit insbesondere die Umgebungen $U \supset V$ unendlich.
Es ist also nicht möglich, ein maximales Element in U zu definieren.
Das Konvergenzkriterium ist durch diese Eigenschaft erfüllt, da für ausreichend große n_0 somit jedes weitere Folgenglied a_n mit $n \geq n_0$ in der Umgebung U von a liegt.

c) Zu Zeigen: $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ ist kein Hausdorff-Raum und insbesondere kein metrischer Raum.

In einem Hausdorff-Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt (Def. 1.7).
In b) wurde gezeigt, dass dies nicht der Fall ist $\implies$ $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ ist kein Hausdorff-Raum.

Jeder metrische Raum [...] ist ein Hausdorff-Raum (Def. 1.6).
Da hier kein Haussdorf-Raum gegeben ist, folgt, dass dieser auch kein metrischer Raum ist.

2.3 Aufgabe 3

Wir betrachten die Menge der invertierbaren $n \times n-$Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Nach Lemma 4.25 (Ana 1) gilt für $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, f ist genau dann stetig, wenn

$$\forall U \subset \mathbb{R} \text{ offen } : \ f^{-1}(U) \text{ ist offen in D}$$

Dieser Satz ist äquivalent zur Aussage, dass die Urbilder offener Mengen offen sind

Sei die stetige Abbildung f die Determinantenabbildung:

$$f := \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i} \right)$$

Wir wissen, dass die Determinantenabbildung stetig ist, da sie eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist. Das Urbild dieser Funktion ist nämlich die Menge aller $n\times n$-Matrizen. Die Menge aller Determinanten ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, da eine invertierbare Matrix per Definition eine Determinante ungleich null hat. Das ist eine offene Menge, denn offensichtlich der Rand $\partial\mathbb{R}\backslash\{0\} = \{0\}$ ist, und $\mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \{0\} = \emptyset$. Dann ist $\mathbb{R}^{n\times n}$ auch offen.

b) Ähnlicherweise gilt nach Satz 4.26 (Ana 1), dass stetige Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind.

$$f: D \to \mathbb{R} \text{ stetig und } D \subset \mathbb{R}^n \text{ zusammenhängend.}$$
$$\text{Dann ist auch } f(D) \subset \mathbb{R} \text{ zusammenhängend}$$

Zu zeigen: Die Menge der orthogonalen Matrizen $O(n)$ ist nicht zusammenhängend.

Die Gruppe $O(n)$ erfüllt die Bedingung, dass

$$\begin{aligned}
A^T A = E_n &\iff A^T A A^{-1} = E_n A^{-1} \\
&\iff A^T = A^{-1} \\
&\implies \det A^T = \det A^{-1} \\
&\iff \det A = \frac{1}{\det A} \\
&\iff \det A = \pm 1
\end{aligned}$$

Sei die Menge der Determinanten der orthogonalen Gruppe M. Setzen wir einen offenen Ball mit Radius $r = \frac{1}{2}$ um 1 und -1. Dann gilt:

$$B_r(1) \cap M \neq \emptyset \neq B_r(-1) \cap M$$

$$M = (M \cap B_r(1)) \cup (M \cap B_r(-1))$$

$$(M \cap B_r(1)) \cap (M \cap B_r(-1)) = \emptyset$$

Daraus folgern wir, dass die Menge der Determinanten nicht zusammenhängend ist, und dementsprechend das Urbild dieser Menge, die orthogonale Gruppe auch nicht zusammenhängend ist.

Es gilt, ist eine Menge M wegzusammenhängend, so ist auch M zusammenhängend. Da wir gerade festgestllt haben, dass die orthogonale Gruppe $O(n)$ nicht zusammenhängend ist, so kann sie auch nicht wegzusammenhängend sein.

2.4 Aufgabe 4

a) Zu zeigen $f : X \to Y$ stetig $\iff$ Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ gilt $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 4.25 der Analysis-1-Vorlesung. Es gilt zudem für abgeschlossene Mengen $P \subset M$, dass $M \setminus P$ offen ist. Somit genügt es, zu zeigen, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

" $\implies$ "
f ist eine stetige Abbildung. $\iff \forall x_0 \in X \forall \varepsilon \exists \delta : f(X \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$
Sei nun $A \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(A) \subset X$.

$$A \text{ offen} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset Y \tag{1}$$
$$f \text{ stetig} \implies \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \tag{2}$$
$$\implies B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(A) \tag{3}$$
$$\tag{4}$$
$$\to f^{-1}(A) \text{ offen} \tag{5}$$

" $\impliedby$ " Nun gelte für alle offenen Mengen A in Y, dass $f^{-1}(A)$ offen ist. Zu zeigen: f ist stetig.
Seien $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$A := B_\varepsilon(f(x_0)) \subset Y \text{ offen.} \tag{6}$$
$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)) \subset X \text{ offen per Annahme.} \tag{7}$$
$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)) \tag{8}$$
$$\implies f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \tag{9}$$
$$f \text{ ist stetig.} \tag{10}$$

b) $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, X kompakt. Zu zeigen: f^{-1} ebenfalls stetig.

Sei $U \subset X$ offen $\implies$ $X \setminus U$ kompakt, da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt sind und $X \setminus U \subset X$ dies erfüllt.

$f(X \setminus U)$ kompakt, da Bilder kompakter Mengen kompakt sind.
$f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U)$ abgeschlossen,
da "kompakt" $\implies$ "abgeschlossen" (Satz 1.16).
f bijektiv $\to f(X) = Y$
$\implies Y \setminus f(U)$ abgeschlossen, da f stetig X abgeschlossen und U offen
$\implies f(U)$ offen
$f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, also f^{-1} stetig.