Blatt 2 **1. November 2021**

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor/in: Tobias Hammel

1. Klassische Zwei-Pfad-Interferenz

a) In der komplexen Schreibweise werden harmonische Wellen wie gegeben dargestellt:

$$E(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t)\ \exp(i\varphi(\mathbf{x}, t)). \tag{1}$$

Hierbei beschreibt der Vektor $\mathbf{x}$ die Position im dreidimensionalen Raum, an dem die Welle beobachtet wird und der Skalar t die Zeit, zu der dies geschieht. Abhängig von Position und Zeit beschreibt die Funktion $a(\mathbf{x}, t)$ die Amplitude, also die Auslenkung der Welle. Die Funktion φ beschreibt das Oszillationsverhalten der Welle, diese ist definiert als

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} - \omega t \tag{2}$$

Die hier auftretende Variable ω, die Kreisfrequenz, ist bereits aus den mechanischen Schwingungen bekannt. Sie gibt die gibt die Geschwindigkeit der Schwingung selbst in der Einheit $\frac{1}{s}$, bezogen auf den pro Sekunde überstrichenen Winkel an. $\mathbf{k}$ stellt den sogenannten Wellenvektor dar, welcher die Ausbreitungsrichtung der Welle bestimmt. Er steht also senkrecht zur Wellenfront. Sein Betrag, die Wellenzahl $k = |\mathbf{k}|$, lässt sich mit der Formel

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \tag{3}$$

bestimmen, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht.

Eine weitere Bedingung, welche die in (1) gegebene Funktion erfüllen muss, um tatsächlich die Ausbreitung einer Welle im Raum beschreiben zu können, ist die Wellengleichung. In drei Raumdimensionen ist diese Definiert als

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 E(\mathbf{x}, t). \tag{4}$$

b) Gegeben seien nun zwei parallel laufende Wellen in einem Strahlteiler. Beide Wellen legen je eine Propagationsstrecke unterschiedlicher Länge zurück. Die zurückgelegte Strecke l_{46} der zweiten Welle lässt sich aus der Strecke l_{35} der ersten Welle mit

$$l_{46} = l_{35} + 1.2\,\mu\text{m} \tag{5}$$

berechnen. Für beide Wellen gilt eine Wellenlänge von $\lambda = 532\,\text{nm}$ und somit eine Wellenzahl von

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{532\,\text{nm}}. \tag{6}$$

Anhand der Wellenzahl lässt sich nun ermitteln, wie viel weiter sich die zweite Welle auf der Strecke l_{46} bewegt, als die andere:

$$y = k \cdot 1.2\,\mu\text{m} = \frac{2\pi}{532\,\text{nm}} \cdot 1.2 \cdot 10^3\,\text{nm} \tag{7}$$

$$\approx 14.17 \approx 4.51\pi. \tag{8}$$

Aufgrund der 2π-Periodizität der Welle lässt sich dieser Betrag um zwei volle Perioden auf

$$\Delta\phi = 4.51\pi - (2 \cdot 2\pi) = 0.51\pi \tag{9}$$

Kürzen. Somit sehen wir, dass die zweite Welle die Propagationsstrecke mit einer Phasenverschiebung von ca. 0.51π im Vergleich zur ersten Welle verlässt. $\Rightarrow \sim 52^\circ$

c) Nun soll die Energieerhaltung am ersten Strahlteiler des Inferometers überprüft werden. Hierzu ist die folgende Transformation durch eine unitäre Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} E_4 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & \sqrt{R}e^{i\alpha} \\ \sqrt{R}e^{i\alpha} & \sqrt{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich der Vektor

$$\begin{pmatrix} E_4 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{T}E_1 + \sqrt{R}e^{i\alpha}E_2 \\ \sqrt{R}e^{i\alpha}E_1 + \sqrt{T}E_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Nun können wir den Betrag, bzw. das Betragsquadrat der Transformierten Variablen berechnen, um die Energieerhaltung zu prüfen. Zunächst gilt:

$$E_4 = \sqrt{T}E_1 + \sqrt{R}e^{i\alpha}E_2 \tag{12}$$

Da sowohl E_1, als auch E_2 selbst komplexwertig sind, genügt es nicht, die Summe der Quadrate zu nutzen, um den Betrag zu bestimmen. Stattdessen wenden wir den Ansatz

$$|E_4|^2 = E_4 \cdot E_4^* \tag{13}$$

an. Da die Konjugation auf $\mathbb{C}$ einen Körperhomomorphismus darstellt gilt:

$$\begin{aligned} E_4^* &= \left(\sqrt{T}E_1 + \sqrt{R}e^{i\alpha}E_2\right)^* && (14)\\ &= \sqrt{T}E_1^* + \sqrt{R}\left(e^{i\alpha}\right)^* E_2^* && (15)\\ &= \sqrt{T}E_1^* + \sqrt{R}e^{-i\alpha}E_2^* \quad \checkmark && (16) \end{aligned}$$

Und im Produkt:

$$\begin{aligned} |E_4|^2 &= \left(\sqrt{T}E_1 + \sqrt{R}e^{i\alpha}E_2\right)\left(\sqrt{T}E_1^* + \sqrt{R}e^{-i\alpha}E_2^*\right) && (17)\\ &= \sqrt{T}^2 E_1^* E_1 + \sqrt{T}\sqrt{R}e^{i\alpha}E_1^*E_2 && (18)\\ &\qquad + \sqrt{T}\sqrt{R}e^{-i\alpha}E_1E_2^* + \sqrt{R}^2 e^{i\alpha - i\alpha}E_2E_2^* && (19)\\ &= T|E_1|^2 + R|E_2|^2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(e^{-i\alpha}E_2^*E_1 + e^{i\alpha}E_2E_1^*\right) && (20)\\ &= T|E_1|^2 + R|E_2|^2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(\left[e^{i\alpha}E_2E_1^*\right]^* + e^{i\alpha}E_2E_1^*\right) && (21) \end{aligned}$$

Für den Teil in der hinteren Klammer gilt für eine allgemeine komplexe Zahl $z = a + bi$:

$$z + z^* = a + bi + a - bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}. \quad \checkmark \tag{22}$$

Also in unserem Fall:

$$|E_4|^2 = T|E_1|^2 + R|E_2|^2 + 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\alpha}E_2E_1^*\right\}. \quad \checkmark \tag{23}$$

Analog können wir für E_3 vorgehen. Hier erhalten wir als zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} |E_3|^2 &= \left(\sqrt{T}E_2 + \sqrt{R}e^{i\alpha}E_1\right) + \left(\sqrt{T}E_2^* + \sqrt{R}e^{-i\alpha}E_1^*\right) && (24)\\ &= T|E_2|^2 + R|E_1|^2 + \sqrt{T}\sqrt{R}\left(e^{-i\alpha}E_1^*E_2 + \left[e^{-i\alpha}E_1^*E_2\right]^*\right) && (25)\\ &= T|E_2|^2 + R|E_1|^2 + 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\alpha}E_1^*E_2\right\} \quad \checkmark && (26) \end{aligned}$$

Nun wollen wir, um die Energieerhaltung zu Überprüfen, die Summe der beiden Resultierenden Beträge, E_3 und E_4 betrachten:

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = (T+R)|E_2|^2 + (T+R)|E_1|^2 \tag{27}$$

$$+ 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\Big\{e^{-i\alpha}E_1^*E_2\Big\} + 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\Big\{e^{i\alpha}E_1^*E_2\Big\} \tag{28}$$

$$= (T+R)|E_2|^2 + (T+R)|E_1|^2 \tag{29}$$

$$+ 2\sqrt{T}\sqrt{R}\Big(\mathrm{Re}\Big\{e^{-i\alpha}E_1^*E_2\Big\} + \mathrm{Re}\Big\{e^{i\alpha}E_1^*E_2\Big\}\Big) \tag{30}$$

$$= (T+R)|E_2|^2 + (T+R)|E_1|^2 \tag{31}$$

$$+ 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\Big\{\Big(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\Big)E_1^*E_2\Big\} \quad \checkmark \tag{32}$$

Nun können wir zum einen die gegebene Eigenschaft

$$T + R = 1 \tag{33}$$

anwenden, zum anderen gilt die analytische Definition des Kosinus:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\Big) \tag{34}$$

Somit erhalten wir:

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = |E_2|^2 + |E_1|^2 + 2\sqrt{T}\sqrt{R}\,\mathrm{Re}\{2\cos(\alpha)E_1^*E_2\}. \tag{35}$$

Dass die Energieerhaltung gilt, muss der hintere Term verschwinden. Dies ist, unabhängig von E_1 und E_2, genau an den Nullstellen der Kosinusfunktion. Dies gilt, neben dem in der Aufgabenstellung erwähnten Wert von $\alpha = \frac{\pi}{2}$, allgemeiner für Werte

$$\alpha = \pi \cdot n - \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark \tag{36}$$

Lediglich an diesen Nullstellen gilt also

$$|E_3|^2 + |E_4|^2 = |E_2|^2 + |E_1|^2, \tag{37}$$

was zu zeigen war.

d) Gefunden werden soll nun eine Tranformationsmatrix M_3, welche die Amplituden der Signale wie folgt transformiert:

$$E_4 \rightarrow E_6 = e^{i\phi}E_4 \tag{38}$$

$$E_3 \rightarrow E_5 = E_3 \tag{39}$$

Es gelten somit die Summen

$$E_6 = 0 \cdot E_3 + e^{i\phi} \cdot E_4 \tag{40}$$
$$E_5 = 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4, \tag{41}$$

woraus sich die Matrix

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

konstruieren lässt. Wir zeigen dies noch einmal mit der expliziten Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} E_6 \\ E_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot E_3 + \mathrm{e}^{i\phi} \cdot E_4 \\ 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \end{pmatrix} \checkmark \quad \checkmark \tag{43}$$

Um zu zeigen, dass diese Matrix unitär ist, überprüfen wir die Bedingung

$$\mathbb{1} \stackrel{!}{=} M_3 M_3^\dagger \tag{44}$$
$$M_3 M_3^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 + \mathrm{e}^{i\phi} \cdot \mathrm{e}^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad \checkmark \quad \checkmark \tag{47}$$

Sehr gut !

3/3

2. Zustandsraum, Basiszerlegung

2.1 Orthonormalbasis

Gegeben sei ein orthonormales System $\{|b_i\rangle\}$, $i \in \{1,2,3\}$ und weitere Zustände

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \tag{48}$$

$$|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \tag{49}$$

$$|a_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle - |b_3\rangle) \tag{50}$$

a) Zu zeigen ist $\{|a_i\rangle\}$ ebenfalls ein orthonormales System, dass heißt:

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij} \quad ✓ \qquad \text{Kroneckerdelta} \tag{51}$$

Das kann man am einfachsten zeigen, indem man schlicht die hermiteschen Skalarprodukte nachrechnet.

kompl. Konj.

$$\langle a_1|a_2\rangle = \frac{1}{2}\left[\underbrace{|b_1\rangle}_{\langle b_1|} \overset{-}{+} \frac{i}{\sqrt{2}}(\underbrace{|b_2\rangle}_{\langle b_2|} + \underbrace{|b_3\rangle}_{\langle b_3|})\right]\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \quad ✓ \tag{52}$$

Man multipliziert das Skalarprodukt aus. Da die $|b_i\rangle$ eine Orthonormalbasis bilden, verschwinden alle Einträge der Form $\langle b_i|b_j\rangle, i \neq j$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{i^2}{2}\right) \tag{53}$$

$$= 0 \quad ✓ \tag{54}$$

$$\langle a_1|a_3\rangle = \frac{i}{2}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right][|b_2\rangle - |b_3\rangle] \tag{55}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \quad ✓ \qquad = 0 \quad ✓ \tag{56}$$

Betrachtet man $|a_1\rangle$ und $|a_2\rangle$, so unterscheiden sich diese nur im Vorzeichen vor $|b_i\rangle, i \in \{1,2\}$. Aus dieser 'Symmetrie' folgt, dass gilt:

$$\langle a_2|a_3\rangle = 0 \quad ✓ \quad ✓ \tag{57}$$

Da hier ein hermitesches Skalarprodukt vorliegt gilt

$$\langle a_i|a_j\rangle = \overline{\langle a_j|a_i\rangle} \tag{58}$$

Da alle Ergebnisse hier aber reel sind, ändern sie sich nicht. Es bleibt zu zeigen

$$\langle a_i|a_i\rangle = 1 \tag{59}$$

$$\langle a_1|a_1\rangle = \frac{1}{2}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right]\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\cdot\frac{i^2}{2}\right) \tag{61}$$

ohne die kompl. Konj. steht hier ein +

$$= 1 \qquad \checkmark \tag{62}$$

$$\langle a_2|a_2\rangle = \frac{1}{2}\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right]\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \tag{63}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{i^2}{2}\right) \tag{64}$$

$$= 1 \qquad \checkmark \tag{65}$$

$$\langle a_3|a_3\rangle = \left\{\frac{i}{\sqrt{2}}[|b_2\rangle - |b_3\rangle]\right\}\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}[|b_2\rangle - |b_3\rangle]\right\} \tag{66}$$

Mittels der Eigenschaften des hermiteschen Skalarprodukts kann man die Vorfaktoren rausziehen, wobei der Faktor im 'bra' komplex konjugiert wird. Oben wurde das auch bereits mehrfach gemacht, dort gab es aber nur einen Realteil

$$= \frac{-i^2}{2}(1+1) \tag{67}$$

$$= 1 \qquad \checkmark \tag{68}$$

b) Nun wollen wir in Termen von der Basis $\{|a_k\rangle\}$ eine Zerlegung der Basis $|n_j\rangle$ finden, d.h., wir wollen die Vorfaktoren c_{jk} finden, so dass

$$|b_j\rangle = c_{jk}\,|a_k\rangle \tag{69}$$

Dafür kann man durch Überlegung die Koeffizienten c_{jk} raten, aber man kann es sinnvoller durch einen Basiswechsel machen, indem man die Methoden der Linearen Algebra anwendet. Man muss das lineare Gleichungssystem bestimmen, mit welchem (69) für alle j, k erfüllt ist:

$$|b_1\rangle = c_{1k}\,|a_k\rangle \tag{70}$$
$$|b_2\rangle = c_{2k}\,|a_k\rangle \tag{71}$$
$$|b_3\rangle = c_{3k}\,|a_k\rangle \tag{72}$$

Dies ist äquivalent zu einer Matrixgleichung, dabei will man die Basis $\{|a_k\rangle\}$ als eine Matrix darstellen und ihre Inverse bestimmen. Die Spalten der Matrix sind die Vorfaktoren der Basiselemente $|b_j\rangle$. Die Inverse kann man mithilfe des Gauß-Verfahrens machen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \qquad ✓ \tag{73}$$

Man bestimmt hier die Inverse Matrix, indem man auf das Gleichungssystem elementare Zeilenumformengen anwendet, bis die rechte Seite die Einheitsmatrix ist. Die verbleibende linke Seite ist die Inverse. Wir überspringen die explizite Ausrechnung und geben die Inverse direkt an, denn wir wollen nur die Zerlegung finden. Am Ende zeigen wir, dass die gefundene Zerlegung auch stimmt.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\dagger} \qquad c_{ij} \quad \text{Zeile} \quad \text{Spalte} \tag{74}$$

Hier sind nun die Einträgen der Matrix c_{jk} die Vorfaktoren, die wir für die Zerlegung der Basis benötigen. Wir überprüfen das ganz kurz:

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a_2\rangle \tag{75}$$
$$= \frac{1}{2}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] + \frac{1}{2}\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] \tag{76}$$
$$= \frac{1}{2}\,|b_1\rangle + \frac{1}{2}\,|b_1\rangle \tag{77}$$
$$= |b_1\rangle \qquad ✓ \tag{78}$$

$$
\begin{aligned}
|b_2\rangle &= -\frac{i}{2}|a_1\rangle + \frac{i}{2}|a_2\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|a_3\rangle && (79)\\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] && (80)\\
&\quad + \frac{1}{2}(|b_2\rangle - |b_3\rangle)\\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] + \frac{1}{2}(|b_2\rangle - |b_3\rangle) && (81)\\
&= \frac{1}{2}(|b_2\rangle + |b_3\rangle) + \frac{1}{2}(|b_2\rangle - |b_3\rangle) && (82)\\
&= |b_2\rangle \quad \checkmark && (83)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b_3\rangle &= -\frac{i}{2}|a_1\rangle + \frac{i}{2}|a_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|a_3\rangle && (84)\\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] + \frac{i}{2\sqrt{2}}\left[|b_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}(|b_2\rangle + |b_3\rangle)\right] && (85)\\
&\quad - \frac{1}{2}[(|b_2\rangle - |b_3\rangle)]\\
&= \frac{1}{2}(|b_2\rangle + |b_3\rangle) - \frac{1}{2}(|b_2\rangle - |b_3\rangle) && (86)\\
&= |b_3\rangle && (87)
\end{aligned}
$$

c) Wie in Teilaufgabe b) gemacht wurde, stellen wir die Basiselemente als Vektoren dar:

$$|a_1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$|a_2\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$|a_3\rangle \to \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{90}$$

Damit wollen wir zeigen, dass die Orthonormalitätsbedingung ebenfalls erfüllt ist. Dies ist erfüllt wenn die Basisvektoren 1) jeweils die Länge 1 haben und 2) wenn gilt $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$

1) Wir rechnen die Länge der Vektoren aus, indem wir die euklidische Norm des Vektors bestimmen.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}_1| &= \sqrt{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^*} && (91)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} && (92)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} && (93)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} && (94)\\
&= 1 \qquad \checkmark && (95)
\end{aligned}
$$

$\mathbf{a}_2$ ist nur komplex konjugiert zu $\mathbf{a}_1$, also hat es klarweise die gleiche Länge.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}_3| &= \sqrt{\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{i}{\sqrt{2}}} && (96)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} && (97)\\
&= 1 \qquad \checkmark && (98)
\end{aligned}
$$

Außerdem wollen wir zeigen, dass alle Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander sind. Wegen der Normalitätsbedingung ist für $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i$ nichts mehr zu zeigen. Wir überprüfen die anderen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2^* &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \checkmark && (99)\\
\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \qquad \checkmark && (100)\\
\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \qquad \checkmark && (101)
\end{aligned}
$$

hier noch $|b_j\rangle$ in der Basis $\{|a_k\rangle\}$
→ passt so!

3/3

3. Zustände und Wahrscheinlichkeiten

(b) Gegeben sei der Zustand

$$|\psi_c\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,|\uparrow\rangle + c\,|\downarrow\rangle \tag{102}$$

zusammengesetzt aus den Basiszuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ und $c \in \mathbb{C}$.

$$\tag{103}$$

(a) Zunächst soll der Faktor c unter der Normierungsbedingung

$$\langle\psi_c|\psi_c\rangle \overset{!}{=} 1 \tag{104}$$

bestimmt werden. Hierzu berechnen wir das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
\langle\psi_c|\psi_c\rangle &= \left(\left\{\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,\langle\uparrow| + c^*\,\langle\downarrow|\right\}, \left\{\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,|\uparrow\rangle + c\,|\downarrow\rangle\right\}\right) && (105)\\
&= \sqrt{\frac{1}{8}}^2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\,\langle\uparrow|\uparrow\rangle + c\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,\langle\uparrow|\downarrow\rangle && (106)\\
&\quad + c\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,\langle\downarrow|\uparrow\rangle + cc^*\,\langle\downarrow|\downarrow\rangle && (107)\\
&= \frac{1}{8}\,\langle\uparrow|\uparrow\rangle + |c|^2\,\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \frac{1}{8} + |c|^2 && (108)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\frac{1}{8} + |c|^2 = 1 \iff |c| = \sqrt{\frac{7}{8}}. \tag{109}$$

Am einfachsten können wir c mit dieser Bedingung in der Exponentialschreibweise definieren als

$$c = \sqrt{\frac{7}{8}}\mathrm{e}^{i\phi}. \tag{110}$$

Somit gilt

$$|\psi_c\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{7}{8}}\mathrm{e}^{i\phi}\,|\downarrow\rangle \tag{111}$$

(b) Nun sollen die Wahrscheinlichkeiten des Systems, bestimmte Zustände anzunehmen, berechnet werden. Hierzu wenden wir die Formel

$$P_{\alpha_i} = |\langle\alpha_i|\psi_c\rangle|^2 \tag{112}$$

an.

i.) $|\alpha_1\rangle = |\uparrow\rangle$

$$P_{\alpha_1} = |\langle\uparrow|\psi_c\rangle|^2 \tag{113}$$

$$\langle\uparrow|\psi_c\rangle = \langle\uparrow|\left\{\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{7}{8}}\mathrm{e}^{i\phi}|\downarrow\rangle\right\} \tag{114}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \tag{115}$$

$$|\langle\uparrow|\psi_c\rangle|^2 = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{8} \tag{116}$$

ii.) $|\alpha_2\rangle = |\downarrow\rangle$

$$P_{\alpha_2} = |\langle\downarrow|\psi_c\rangle|^2 \tag{117}$$

$$\langle\downarrow|\psi_c\rangle = \langle\downarrow|\left\{\sqrt{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{7}{8}}\mathrm{e}^{i\phi}|\downarrow\rangle\right\} \tag{118}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{8}}\mathrm{e}^{i\phi} \tag{119}$$

$$|\langle\downarrow|\psi_c\rangle|^2 = \frac{7}{8}\mathrm{e}^{i\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}_{\phi-\phi}} = \frac{7}{8}. \tag{120}$$

iii.) $|\alpha_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$

$$P_{\alpha_3} = \left|\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| + \langle\downarrow|)\right\}|\psi_c\rangle\right|^2 \tag{121}$$

$$\langle\alpha_3|\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\psi_c\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\downarrow|\psi_c\rangle \tag{122}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{7}{16}}\mathrm{e}^{i\phi} \tag{123}$$

$$|\langle\alpha_3|\psi_c\rangle|^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{16}}e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{7}{16}}e^{i\phi}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{16}}e^{-i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{7}{16}}e^{-i\phi}\right) \tag{124}$$

$$= \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{7}{256}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}\right) + \frac{7}{16} \tag{125}$$

$$= \frac{8}{16} + \sqrt{\frac{7}{256}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \tag{126}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{8} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}_{=\sin(\phi)} \tag{127}$$

iv.) $|\alpha_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$

$$P_{\alpha_4} = \left|\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle\uparrow| - \langle\downarrow|)\right\}|\psi_c\rangle\right|^2 \tag{128}$$

$$\langle\alpha_3|\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|\psi_c\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\downarrow|\psi_c\rangle \tag{129}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}}e^{i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{7}{16}}e^{i\phi} \tag{130}$$

$$|\langle\alpha_3|\psi_c\rangle|^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{16}}e^{i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{7}{16}}e^{i\phi}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{16}}e^{-i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{7}{16}}e^{-i\phi}\right) \tag{131}$$

$$= \frac{1}{16} - \sqrt{\frac{7}{256}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}\right) + \frac{7}{16} \tag{132}$$

$$= \frac{8}{16} - \sqrt{\frac{7}{256}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right). \tag{134}$$

(c) Nun soll noch für die in b) gegebenen Zustände

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \tag{135}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \tag{136}$$

die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung überprüft werden. Zuerst die Orthogonalität:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha_3|\alpha_4\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \right\rangle & (137)\\
&= \frac{1}{2}(\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle) & (138)\\
&= \frac{1}{2}(1-0+0-1) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \quad \checkmark & (139)
\end{aligned}$$

✓

Normiertheit

$$\begin{aligned}
\langle\alpha_3|\alpha_3\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \right\rangle & (140)\\
&= \frac{1}{2}(\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle + \langle\uparrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\downarrow\rangle) & (141)\\
&= \frac{1}{2}(1+0+0+1) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \quad \checkmark & (142)\\
\langle\alpha_4|\alpha_4\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle \right\rangle & (143)\\
&= \frac{1}{2}(\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\downarrow\rangle) & (144)\\
&= \frac{1}{2}(1-0-0+1) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \quad \checkmark & (145)
\end{aligned}$$

✓ ✓

Wieder eine sehr schöne Abgabe! Freut mich!

3/3