6. Übungsblatt zu [] (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

6.1 Aufgabe 1: Peer Feedback

ii. Z.z.: $f : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3, x \mapsto x^3$ ist $\mathbb{F}_3$-linear

$\mathbb{F}_3$ hat folgende Elemente: $\{[0], [1], [2]\}$

Bedingung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Anhand jedes mögliche Beispiel:

$$f([0] + [0]) = f([0]) = [0]^3 = [0] = [0]^3 + [0]^3 = f([0]) + f([0]) \tag{1}$$
$$f([0] + [1]) = f([1]) = [1]^3 = [1] = [0]^3 + [1]^3 = f([0]) + f([1]) \tag{2}$$
$$f([1] + [1]) = f([2]) = [2]^3 = [2] = [1]^3 + [1]^3 = f([1]) + f([1]) \tag{3}$$
$$f([1] + [2]) = f([0]) = [0]^3 = [0] = [1]^3 + [2]^3 = f([1]) + f([2]) \tag{4}$$
$$f([2] + [2]) = f([1]) = [1]^3 = [1] = [2]^3 + [2]^3 = f([2]) + f([2]) \tag{5}$$
$$f([2] + [0]) = f([2]) = [2]^3 = [2] = [2]^3 + [0]^3 = f([2]) + f([0]) \tag{6}$$

Die Abbildung f ist $\mathbb{F}_3$-linear

6.2 Aufgabe 2: Endomorphismus von Abb$(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Geg.: $\mathbb{R}$-Vektorraum $V :=$ Abb$(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und eine Abbildung $F : V \to V,\ F(f) := g$ wobei $g(n) = f(n + 1)\ \forall n \in \mathbb{N}$

a) Z.z.: F ist linear:

Für Anschaulichkeit werden wir f(n) unter folgender Darstellung betrachten:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ n+2 \\ n+3 \\ ... \end{pmatrix} \tag{7}$$

Wenn man die Abbildung F auf f anwendet, dann erhält man ein neuer Vektor g, dessen n-te Komponente gleich den n+1-ten Komponenten des f Vektors sind.

Also

$$g_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix} \tag{8}$$

Nun müssen wir zeigen, dass

$$\boxed{1} \quad F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$$

$$F\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \\ ... \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ ... \end{pmatrix}\right) \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ ... \end{pmatrix} \tag{10}$$

und

$$\boxed{2} \quad F(k \cdot f) = k \cdot F(f) \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

$$F(k \cdot f) = F\left(k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix}\right) \tag{11}$$

$$= F\left(\begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ kc_1 \\ kd_1 \\ ... \end{pmatrix}\right) \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} kb_1 \\ kc_1 \\ kd_1 \\ ... \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$= k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ ... \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$= k \cdot F(f) \tag{15}$$

Z.z.: F ist surjektiv:

Da F linear ist, gilt $\mathrm{im}(F) = V$ mit $\mathrm{im}(F) = F(f) = g$.

Nun muss gezeigt werden, dass $g = V$

Da $F(f(n+1)) = g(n)$ ist, also es für alle Vektoren $f, g \in V$ der Komponenten $f(n+1) = g(n)$, gilt V und g haben den selben Inhalt als $V = g$. Daraus folgt, dass $F(f) = V$ und $\mathrm{im}(f) = V$ und damit ist F surjektiv.

b) Der Kern von F ist definiert als der Untervektorraum $\mathrm{Ker}(F) = f^{-1}\{e_f\} \subset V$. Da $f : V \to V$, ist das Neutralelement des Bildes der Nullvektor und gesucht ist das Neutralelement des Urbilds von $F : F^{-1}(f)$

$$F^{-1}(e_f) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{17}$$

Also ist

$$\ker(F) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \tag{18}$$

6.3 Aufgabe 3: Zur Dimensionsformel

Geg.:

- $n \geq 2$
- $\dim(V) = n$
- $W_1 \neq W_2$
- $\dim(W_1) = \dim(W_2) = n - 1$

a) Wir wissen, dass

$$\dim(\mathcal{L}\{W_1\}) = n - 1 \tag{19}$$

D.h., die Lineare Hülle von W_1 kann mit einem Element zu einer linearen Hülle von V ergänzt werden.

Da $W_1 \neq W_2$, sind auch ihre Lineare Hüllen unabhängig von einander. D.h., dass $\mathcal{L}(W_2)$ mindestens ein Element enthält, das linear unabhängig von den Elementen in $\mathcal{L}(W_1)$ ist. Wenn wir nun die beiden addieren, dann haben wir eine n-dimensionale lineare Hülle, mit welcher wir einen n-dimensionalen Vektorraum V aufspannen können.

Daraus folgt, das

$$W_1 + W_2 = V \tag{20}$$

b) Z.z.: $W_1 \cap W_2 = \{0\} \iff n = 2$

" $\Rightarrow$ " Mit der Dimensionsformel:

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \tag{21}$$

Dabei ist

$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim\{0\} = 0$,

$\dim(W_1) = \dim(W_2) = n - 1$ und

$\dim(W_1 + W_2) = \dim(V) = n$

Also

$$0 = n - 1 + n - 1 - n \tag{22}$$
$$= n - 2 \tag{23}$$
$$n = 2 \tag{24}$$

" $\Leftarrow$ " Ebenso mit der Dimensionsformel

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 1 + 1 - 2 \tag{25}$$
$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0 \tag{26}$$
$$0 = 0 \tag{27}$$