5. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ Σ___

5.1 Aufgabe 1

- Plattenabstand: $d = 3$ mm
- Fläche: $A = 100\ \text{cm}^2$
- Dicke Dielektrikum: $a = 1$ mm
- Dielektrizitätskonstante Dielektrikum: $\varepsilon_r = 2$
- $U_0 = 30$ V

a) Wir wissen, dass $U = E \cdot d$, aber hier für ein gleiches U haben wir verschiedene elektrische Felder, wir müssen also die verschiedenen Fällen einzeln betrachten:

$$E(x) = \begin{cases} E_0 & 0 \leq x \leq a \\ E_{\text{Diel}} & a < x \leq 2a \\ E_0 & 2a < x \leq 3a \end{cases} \tag{1}$$

Also ist insgesamt:

$$U_0 = 2aE_0 + aE_{\text{Diel}} \qquad |E_{Diel} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{2}$$

$$= 2aE_0 + a\frac{E_0}{\varepsilon_r} \tag{3}$$

$$= E_0\left(2a + \frac{a}{\varepsilon_r}\right) \tag{4}$$

$$E_0 = \frac{U_0}{2a + \frac{a}{\varepsilon_r}} = 12 \cdot 10^3\ \text{V m}^{-1} \tag{5}$$

$$E_{\text{Diel}} = 6 \cdot 10^3\ \text{V m}^{-1} \tag{6}$$

Die dielektrische Verschiebung ist konstant:

$$D(x) = \varepsilon_0 E_0 \approx 1,06 \cdot 10^{-7}\ \text{C m}^{-2} \tag{7}$$

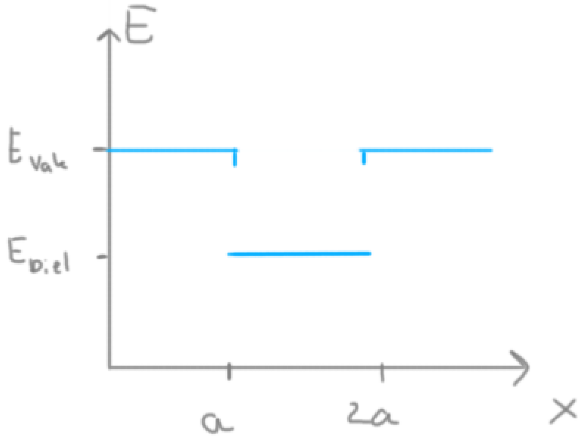

Abbildung 1: Verlauf der elektrischen Feldstärke im Kondensator mit Dielektrikum

b) Es sei $F = EQ$

In einem Plattenkondensator gilt:

$$D = \frac{Q}{A} \tag{8}$$
$$\rightarrow Q = DA \tag{9}$$

Also

$$F = E_{\text{Diel}} DA \tag{10}$$

Da die Ladungen sich innerhalb des Dielektrikums befinden, betrachten wir für das elektrische Feld E_{Diel}. Das ist die Kraft, die auf eine Seite der Glasscheibe wirkt. Insgesamt wird Kraft von beiden Seiten auf die Scheibe ausgeübt, also

$$F_{\text{ges}} = 2F \approx 1,27 \cdot 10^{-5}\ \text{N} \tag{11}$$

c) Wir können die gegebene Anordnung als eine Reihenschaltung betrachten und dann gilt:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{2}{C_0} + \frac{1}{C_{\text{Diel}}} \tag{12}$$

Diese Werte entsprechen die Kapazitäten für die einzelnen Abschnitten, analog wie wir das elektrische Feld in 1 gemacht haben. Außerdem gilt: $C = \frac{Q}{U}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{2a}{\varepsilon_0 A} + \frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \tag{13}$$
$$\rightarrow C_{\text{ges}} = 3,54 \cdot 10^{-11}\ \text{C V}^{-1} \tag{14}$$

d) Als wir die Glasscheibe mit einem leitenden Material, ein Metall ersetzen gelten aber die vorigen Überlegungen nicht genau. Jetzt gilt:

$$E(x) = \begin{cases} E_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \leq 2a \\ E_0 & 2a < x \leq 3a \end{cases} \tag{15}$$

weil sich kein elektrisches Feld innerhalb eines Leiters befinden kann. Spezifisch haben wir jetzt:

$$U_0 = 2aE_0 \tag{16}$$

$$\rightarrow E_0 = \frac{U_0}{2a} = 15 \cdot 10^3 \text{ V m}^{-1} \tag{17}$$

Die elektrische Verschiebung bleibt aber nicht mehr konstant, jetzt gilt:

$$D(x) = \begin{cases} D_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \leq 2a \\ D_0 & 2a < x \leq 3a \end{cases} \tag{18}$$

In diesem Fall ist

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 \approx 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ C m}^{-2} \tag{19}$$

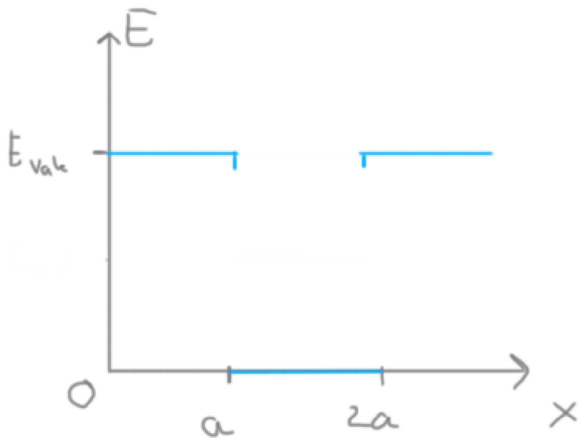

Abbildung 2: Verlauf der elektrischen Feldstärke im Kondensator mit Leiter

e) Dieser Kondensator hat eine Kapazität von

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{2a}{\varepsilon_0 A} \tag{20}$$

$$\rightarrow C_{\text{ges}} = 4,427 \cdot 10^{-11} \text{ C V}^{-1} \tag{21}$$

5.2 Aufgabe 2: Zylindrischer Trimmkondensator

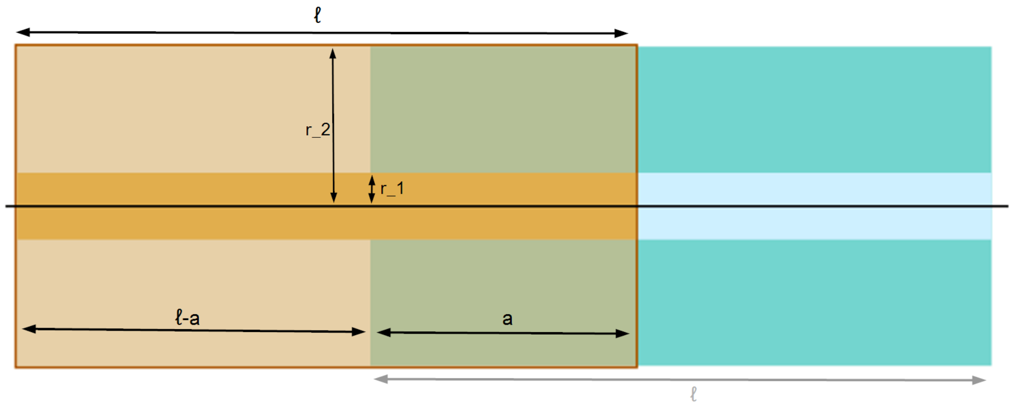

Abbildung 3: Zylinderkondesator mit Dielektrikum

a) Kapazität

Wir bestimmen die Kapazität eines allgemeinen Zylinderkondensators anhand der Formel

$$C = \frac{Q}{U} \tag{22}$$

Hierzu bestimmen wir erst mit dem Gaußschen Gesetz das elektrische Feld:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_A \boldsymbol{E}\ \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{23}$$

$$\iff Q = \varepsilon_0 |\boldsymbol{E}| \oint_A \ \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{24}$$

Wir können hier mit dem Betrag von E arbeiten, da es sich um ein symmetrisches, radiales Feld handelt, welches von der Symmetrieachse des Zylinders ausgeht. Für das Oberflächenintegral setzen wir die Mantelfläche des Zylinders ein:

$$\iff Q = \varepsilon_0 |\boldsymbol{E}| 2\pi r \ell \tag{25}$$

$$\iff |\boldsymbol{E}(r)| = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r \ell} = E(r) \tag{26}$$

Nun bestimmen wir die Spannung U mit

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\ \mathrm{d}r \tag{27}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r \ell}\ \mathrm{d}r \tag{28}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi \ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{29}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi \ell} (\ln(r_2) - \ln(r_1)) \tag{30}$$

$$= \frac{Q \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_0 2\pi \ell} \tag{31}$$

Eingesetzt in die Formel für die Kapazität erhalten wir

$$C = \frac{Q}{U} \tag{32}$$

$$= \frac{Q}{\frac{Q \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_0 2\pi\ell}} \tag{33}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{34}$$

Die Kapazität mit Dielektrikum erhalten wir durch Multiplikation mit dessen Permittivität:

$$C_r = \varepsilon_r \cdot C_0 \tag{35}$$

Ein Kondensator mit teilweise eingeschobenem Dielektrikum verhält sich wie zwei parallel geschaltete Kondensatoren; davon einer mit und einer ohne Dielektrikum. Die Gesamtkapazität ergibt sich dann aus der Summe (da parallel geschaltet).

In unserem Beispiel beeinflusst unter anderem die Variable a die Kapazität der "beiden" Kondensatoren.

$$C(a) = C_0(a) + C_r(a) \tag{36}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell - a)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} + \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 2\pi a}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{37}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell - a) + \varepsilon_r \varepsilon_0 2\pi a}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{38}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 2\pi((\ell - a) + \varepsilon_r a)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

Also erhalten wir als Kapazität des gesamten Kondensators mit dem um a eingeschobenen Dielektrikum:

$$C(a) = \frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{41}$$

b) Spannung

Für das Verhältnis Kapazität/Spannung (C/U) *zu* mit/ohne Dielektrikum $(\circ_D/\circ_0)$ gilt:

$$\frac{C_0}{C_D} = \frac{U_D}{U_0} \tag{42}$$

$$\iff \frac{C_0}{C_D} U_0 = U_D \tag{43}$$

In unserem Fall können wir dies wie folgt ausdrücken:

$$U(a) = U_0 \frac{C(0)}{C(a)} \tag{44}$$

$$= U_0 \frac{\frac{\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}{\frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}} \tag{45}$$

$$= U_0 \frac{\varepsilon_0 2\pi\ell}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\varepsilon_0 2\pi(\ell + a(\varepsilon_r - 1))} \tag{46}$$

Gekürzt erhalten wir, dass

$$U(a) = U_0 \frac{\ell}{\ell + a(\varepsilon_r - 1)}. \tag{47}$$

So erhalten wir auch die erwarteten Werte für die Fälle, dass das Dielektrikum gar nicht, bzw. voll eingeschoben ist:

$[a = 0]$

$$U(0) = U_0 \frac{\ell}{\ell + 0(\varepsilon_r - 1)} \tag{48}$$

$$U(0) = U_0 \frac{\ell}{\ell} \tag{49}$$

$$U(0) = U_0 \tag{50}$$

$[a = \ell]$

$$U(\ell) = U_0 \frac{\ell}{\ell + \ell(\varepsilon_r - 1)} \tag{51}$$

$$U(\ell) = U_0 \frac{\ell}{\ell + \ell\varepsilon_r - \ell} \tag{52}$$

$$U(\ell) = U_0 \frac{\ell}{\ell\varepsilon_r} \tag{53}$$

$$U(\ell) = U_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \tag{54}$$

c) Kraft auf den Glaskolben

Wir bestimmen zuerst die elektrische Feldenergie mit der Formel:

$$
\begin{aligned}
W_e(a) &= \frac{1}{2} \cdot C(a) \cdot U(a)^2 && (55)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \left(U_0 \frac{\ell}{\ell + a(\varepsilon_r - 1)}\right)^2 && (56)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 2\pi(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{U_0^2 \ell^2}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))^2} && (57)\\
&= \frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{1}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))} && (58)
\end{aligned}
$$

Daraus können wir auch schließen, dass gilt:

$$
\begin{aligned}
W_e(0) &> W_e(h) && (59)\\
\frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{1}{(\ell + 0(\varepsilon_r - 1))} &> \frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{1}{(\ell + \ell(\varepsilon_r - 1))} && (60)\\
\frac{\ell^2}{\ell + 0(\varepsilon_r - 1)} &> \frac{\ell^2}{(\ell + \ell(\varepsilon_r - 1))} && (61)\\
\frac{\ell^2}{\ell} &> \frac{\ell^2}{\ell + \ell\varepsilon_r - \ell} && (62)\\
\frac{\ell^2}{\ell} &> \frac{\ell^2}{\ell\varepsilon_r} && (63)\\
\ell &> \frac{\ell}{\varepsilon_r} \quad \checkmark && (64)
\end{aligned}
$$

Die Kraft erhalten wir aus dem Gradienten bzw. hier der Ableitung nach a.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(a) = -\boldsymbol{\nabla} W_e(a) = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial a}\right) &= -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{1}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{a}} && (65)\\
&= -\frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{a}} && (66)\\
&= -\frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \left(-\frac{(\varepsilon_r - 1)}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))^2}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{a}} && (67)\\
&= \frac{\varepsilon_0 \pi U_0^2 \ell^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{(\ell + a(\varepsilon_r - 1))^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{a}} && (68)
\end{aligned}
$$

Die Kraft wird in Richtung der Position mit der geringeren Energie gerichtet sein (vgl. Potential("-gebirge")). Nach (59) wissen wir, dass dies in Einschubrichtung ist. Der Glaskolben wird also in den Zylinder hineingezogen. Man müsste Arbeit aufwenden, um ihn wieder herauszuziehen.

5.3 Aufgabe 3

Geg.:

- Strom Blitz: $I = 100\text{kA}$
- Spezifischer Widerstand Boden: $\rho = 100\ \Omega\ \text{m}$
- Abstand: $r = 100\ \text{m}$

a) Potentialdifferenz $\Delta\Phi$ zwischen Füßen von Mann ($\Delta r = 0,5m$) und Kuh ($\Delta r = 1,5m$).
Es gelten folgende Gleichungen:

$$\Delta\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad \text{Alle gemäß Skript.} \tag{69}$$

$$\boldsymbol{E} = \rho\boldsymbol{j} \tag{70}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{I}{A} \tag{71}$$

Hier können wir die Fläche A als Halbkugel annehmen. Somit gilt

$$\boldsymbol{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \tag{72}$$

Einsetzen führt dann zu

$$E = \rho j = \rho\frac{I}{2\pi r^2} \tag{73}$$

$$\implies \Delta\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \rho\frac{I}{2\pi r^2}\mathrm{d}r \tag{74}$$

$$= \frac{\rho I}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\ \mathrm{d}r \tag{75}$$

$$\implies \Delta\Phi = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad |I = 100\text{kA}, \rho = 100\Omega\ \text{m} \tag{76}$$

Einsetzen von $r_1 = 100$ m und $r_2 = 100,5$ m (bzw. $r_2 = 101,5$ m) ergibt für den Menschen: $\Delta\Phi_M = 79,18$ V und für die Kuh $\Delta\Phi_K = 235,2$ V.

b) Geg.:

- Körperwiderstand: $R = 4 \cdot 10^3\ \Omega$

Gesucht ist die Stromstärke, die nach dem Blitz durch Mann und Kuh fließt. Aus $R = \dfrac{U}{I}$ folgt durch Umstellen und Einsetzen:

$$I_M = \frac{U}{R} = \frac{\Delta\Phi_M}{R} = \frac{79,18\ \text{V}}{4000\Omega} = 20\text{mA} \qquad |\text{Mensch} \tag{77}$$

$$I_K = \frac{U}{R} = \frac{\Delta\Phi_K}{R} = \frac{235,2\ \text{V}}{4000\Omega} = 59\text{mA} \qquad |\text{Kuh} \tag{78}$$

c) Geg.:

- Spezifischer Widerstand: $\rho = 100\ \Omega$ m
- $r_2 = r_1 + \Delta r$
- $\Delta r = 0.5$ m

Gesucht ist der Abstand, ab welchem die Stromstärke I'$\geq$ 50 mA durch den Körper fließt.

Löse Gleichung:

$$I' = \frac{U}{R} = \frac{\frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{R} \quad |\text{Vereinfachen der Brüche und Umstellen} \tag{79}$$

$$\implies \frac{\rho I}{4\pi R I'} = r_1(r_1 + \Delta r) \tag{80}$$

$$\implies 0 = r_1^2 + \Delta r \cdot r_1 - \frac{\rho I}{4\pi R I'} \quad |\text{abc-Formel} \tag{81}$$

$$r_1 \approx 63 \text{ m} \tag{82}$$

d)
- Gleichstrom: Es gilt $U = \frac{R}{I}$ und damit $U = 1000\Omega \cdot 120\text{mA} = 120V$
- Wechselstrom: Annahme: $I(t) = \hat{I} \sin \omega t$ ($\hat{I}$ als maximale Stromstärke). Gleichzeitig gilt $I(t) = \frac{U(t)}{R}$. Daraus folgt:

$$\hat{I} \sin \omega t = \frac{U(t)}{R} \tag{83}$$

$$\implies \hat{U} = R\hat{I} \tag{84}$$

Nimmt man also an, dass 50mA die maximale Stromstärke ist, so ergibt sich für $R = 1000\Omega$ eine Spannung von 50 Volt.
Die erhöhte Gefahr durch Wechselstrom ist hierbei unter anderem durch ständig neue Reize aufgrund der wechselnden Richtung des Stroms begründet, wohingegen durch Gleichstrom ein kontinuierlicher Reiz auf Nerven und Muskeln entsteht.