6. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

6.1 Aufgabe 1

Gegeben sei:

$$f(x,y) := x^3 - y^3 + 3\alpha xy \tag{1}$$

Gesucht sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{\nabla} f = 0$ in Abhängigkeit von α.

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3\alpha y \\ -3y^2 + 3\alpha x \end{pmatrix} \tag{2}$$

Für $\boldsymbol{\nabla} f = 0$ gilt also:

$$x^2 = -\alpha y \tag{3}$$
$$y^2 = \alpha x \tag{4}$$

Zuerst benutzen wir $x = \dfrac{y^2}{\alpha}$ in 3

$$\rightarrow \left(\frac{y^2}{\alpha}\right)^2 = -\alpha y \tag{5}$$
$$\frac{y^3}{\alpha^2} = -\alpha \tag{6}$$
$$y^3 = -\alpha^3 \tag{7}$$
$$y = -\alpha \tag{8}$$

Und für x benutzen wir $y = \sqrt{\alpha x}$ ebenfalls in 3

$$\rightarrow x^2 = -\alpha\sqrt{\alpha x} \tag{9}$$
$$x^4 = \alpha^2 \alpha x \tag{10}$$
$$x^3 = \alpha^3 \tag{11}$$
$$x = \alpha \tag{12}$$

Der Gradient ist also in den Punkten $(\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^2$ gleich 0. Wir untersuchen diese Punkte nach Extrema. Die Hessesche Matrix lautet:

$$H_{f(\alpha,-\alpha)} = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix} \qquad |(x,y) = (\alpha, -\alpha) \tag{13}$$

$$= \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix} \tag{14}$$

Aus Lineare Algebra I (und dem Tutorium) ist bekannt, dass bei einer 2×2 Matrix, wenn beide Eigenwerte positiv sind, dann ist die Matrix positiv definit, analog für negativ definit, und falls Vorzeichen vorhanden sind, dann indefinit.

Die Eigenwerte dieser Matrix kann man leicht bestimmen, sie sind:

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \det(H - \lambda \mathbb{1}) &= (6\alpha - \lambda)^2 - 9\alpha^2 && (15)\\
&= 27\alpha^2 - 12\alpha\lambda + \lambda^2 && (16)\\
\rightarrow \lambda_{1,2} &= 6\alpha \pm \sqrt{36\alpha^2 - 27\alpha^2} && (17)\\
&= 6\alpha \pm 3\alpha && (18)\\
\lambda_1 &= 3\alpha && (19)\\
\lambda_2 &= 9\alpha && (20)
\end{aligned}$$

Für den Fall $\alpha > 0$ ist also die Matrix positiv definit, und es liegt ein Minimum vor, und bei $\alpha < 0$ ist die Matrix negativ definitv und es liegt ein Maximum vor. Für den Fall $\alpha = 0$ lässt sich anhand der Hesseschen Matrix keine Aussage über die Extrema treffen, dafür analysieren wir die Funktion an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$:

Halten wir $y = 0$ fest, und gucken uns die Umgebung an: Dann haben wir $f(x, y) = x^3$, eine monoton steigende Funktion die bei $x = 0$ kein Maximum, sondern einen Sattelpunkt besitzt. Ebenfalls wenn wir $x = 0$ festhalten und die Umgebung in Richtung y betrachten. Wegen der Monotonie der Funktion können wir einen Extrempunkt ausschließen.

6.2 Aufgabe 2

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x, y) := e^{-x^2}\left(4y^5 - 5y^4 + 3\right) \tag{21}$$

a) **Gesucht** sind die lokalen Extrema der Funktion f in $(-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$:

Wir überprüfen das notwendige Kriterium per Lemma 3.19:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f &= \begin{pmatrix} -2xe^{-x^2}(4y^5 - 5y^4 + 3) \\ e^{-x^2}(20y^4 - 20y^3) \end{pmatrix} && (22) \\ &= \begin{pmatrix} -2xe^{-x^2}(4y^5 - 5y^4 + 3) \\ 20e^{-x^2}(y^4 - y^3) \end{pmatrix} && (23) \end{aligned}$$

Damit dies gleich 0 wird muss gelten:

$$-2xe^{-x^2}\left(4y^5 - 5y^4 + 3\right) = 0 \tag{24}$$

und

$$y^4 - y^3 = 0 \tag{25}$$

Da $e^{-x^2} \neq 0 \ \forall x$, muss gelten $(x, y) = (0, 0)$ oder $(x, y) = (0, 1)$, damit beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden. Aber der Punkt $(0, 1)$ liegt nicht im offenen Intervall was wir betrachten.

Nun untersuchen wir die Hessesche Matrix um konkretere Aussagen über den Punkt $(0, 0)$ treffen zu können:

$$\begin{aligned} H_{f(0,0)} &= \begin{pmatrix} e^{-x^2}(4y^5 - 5y^4 + 3)(-2 + 4x^2) & -2xe^{-x^2}(20y^4 - 20y^3) \\ -2xe^{-x^2}(20y^4 - 20y^3) & e^{-x^2}(80y^3 - 60y^2) \end{pmatrix} \quad |(x, y) = (0, 0) && (26) \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && (27) \end{aligned}$$

Aus der Hesseschen Matrix können wir keine Aussage über ein Extremum an dieser Stelle treffen, deswegen untersuchen wir die Funktion in der Umgebung von $(0, 0)$. Wir wählen O.B.d.A. einen offenen Ball mit $B_r(0, 0)$ mit $r = 1$ sodass der Punkt (ε, δ) im Ball liegt.

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, \delta) &= e^{-\varepsilon^2}\left(4\delta^5 - 5\delta^4 + 3\right) && (28) \\ &\leq 4\delta^5 - 5\delta^4 + 3 && (29) \\ &= \delta^4(4\delta - 5) + 3 \qquad |4\delta - 5 < 0 \ \forall \delta < r && (30) \\ &< 3 && (31) \end{aligned}$$

b) **Gesucht** sind jetzt alle globalen Extrema von f in $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Wie in a) gezeigt, besitzt die Stelle $(0,0)$ einen lokalen Maximum im Intervall $(-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Das heißt, jedes globale Maximum muss sich im Rand dieses Intervalls befinden. Da die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$ maximal für $x = 0$ wird, müssen sich die Extrema entlang $(0,y)$ befinden. Wir untersuchen nun die zwei verbleibende Stellen: $(0,-1)$ und $(0,1)$:

$$\begin{aligned} f(0,-1) &= 4 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-1)^4 + 3 &\quad (32)\\ &= -6 &\quad (33)\\ f(0,1) &= 2 &\quad (34) \end{aligned}$$

Da diese zwei Werte kleiner als 3 sind, ist das globale Extremum im Intervall $[-1,1]^2$ auch das lokale Extremum an der Stelle $(0,0)$.

An der Stelle $(0,1)$ verschwindet der Gradient, allerdings ist die Hesse-Matrix hier weder positiv noch negativ definit.

An der Stelle $(0,-1)$ nimmt f mit -6 einen globalen minimalen Wert im gegebenen Intervall an, da:

Es gilt:

$$e^{-x^2} \leq e^0 = 1 \ \forall x \in [-1,1] \qquad |\text{gleich bei } x = 0 \qquad (35)$$

und

$$4y^5 - 5y^4 + 3 \geq 4(-1^5) - 5(1)^4 + 3 = -6 \ \forall y \in [-1,1] \qquad |\text{gleich bei } y = -1 \qquad (36)$$

Daraus folgt, dass

$$f(0,-1) = -6 \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \qquad (37)$$

c) **Gesucht** sind alle globalen Extrema von f auf $\mathbb{R}^2$:

Ähnlicherweise müssen sich die globalen Extrema an der Stelle $x = 0$ befinden, denn für größere Werte x die Funktionswerte betragsmäßig kleiner werden.

Wir untersuchen die Funktion in ihrem Verhalten im Unendlichen, dabei stellen wir fest, dass:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x,y) &= e^{-x^2}\left(4y^5 - 5y^4 + 3\right) &\quad (38)\\ &= 0 &\quad (39) \end{aligned}$$

weil e^{-x^2} schneller gegen 0 geht als der Rest.

Diese Punkte sind aber nicht besonders interessant, denn wir wissen, dass es globale Extrema gibt, die jeweils kleiner und größer als 0 sind.

Dann interessieren wir uns für das Verhalten von y im Unendlichen. Für große x wird die Funktion gegen null gehen, und für $x = 0$ bleibt nur der Term in der Klammer.

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} f(0,y) &= \lim_{y\to\infty} 4y^5 - 5y^4 + 3 && (40)\\
&= \infty && (41)\\
\lim_{y\to-\infty} f(0,y) &= \lim_{y\to-\infty} 4y^5 - 5y^4 + 3 && (42)\\
&= -\infty && (43)
\end{aligned}$$

Die Funktion hat keine globale Extrema auf $\mathbb{R}^2$, da sie für $y \to \pm\infty$ divergiert.

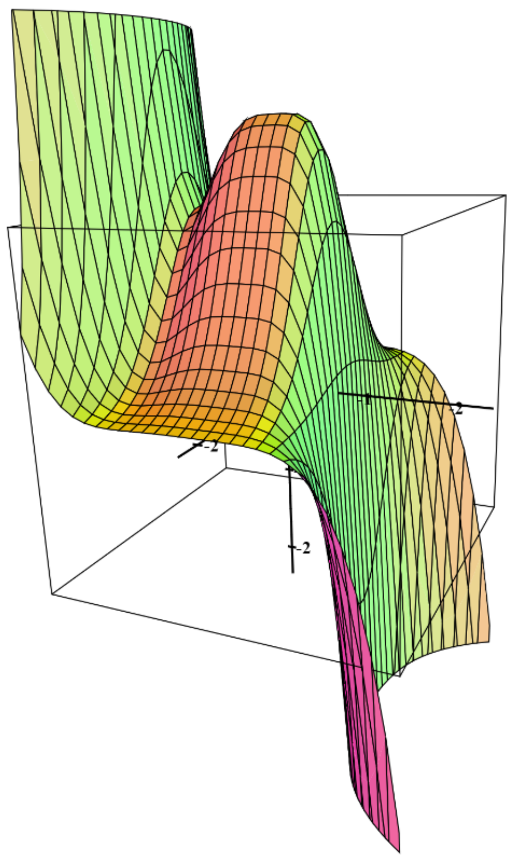

Abbildung 1: Der Graph sieht schön aus

6.3 Aufgabe 3

Gegeben ist $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$.
Die Funktion ist entsprechend ihrer Zusammensetzung aus stetig partiell differenzierbaren Funktionen, wie nach Voraussetzung verlangt, an der Stelle $(1,2)$ mindestens 3 mal stetig partiell differenzierbar.
Wir bestimmen zuerst die ersten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= (x+y)^{-1} - (x-y)(x+y)^{-2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{(x+y)} - \frac{(x-y)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2y}{(x+y)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -(x+y)^{-1} - (x-y)(x+y)^{-2} \cdot 1 \\ &= -\frac{2x}{(x+y)^2}\end{aligned}$$

Dann alle zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} &= 0(x+y)^{-2} - 2y2(x+y)^{-3} \cdot 1 \\ &= -\frac{4y}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} &= 0(x+y)^{-2} + 2x2(x+y)^{-3} \cdot 1 \\ &= \frac{4x}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2(x+y)^{-2} - 2y2(x+y)^{-3} \cdot 1 \\ &= \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} \\ &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -2(x+y)^{-2} + 2x2(x+y)^{-3} \cdot 1 \\ &= \frac{-2}{(x+y)^2} + \frac{4x}{(x+y)^3} \\ &= \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

Für $v_0 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $n = 2$ gilt nun die Taylorformel:

$$\begin{aligned}T_f(v) = f(v_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(v_0) \cdot (v-v_0)_1^1 \cdot (v-v_0)_2^0 + \frac{\partial f}{\partial y}(v_0) \cdot (v-v_0)_1^0 \cdot (v-v_0)_2^1 && (44)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(v_0) \cdot (v-v_0)_1^2 \cdot (v-v_0)_2^0 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(v_0) \cdot (v-v_0)_1^1 \cdot (v-v_0)_2^1 && (45)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(v_0) \cdot (v-v_0)_1^0 \cdot (v-v_0)_2^2 && (46)\\ = f(1,2) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot (y-2) && (47)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,2) \cdot (x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) \cdot (x-1) \cdot (y-2) && (48)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1,2) \cdot (y-2)^2 && (49)\\ = -\frac{1}{3} &+ \frac{4}{9} \cdot (x-1) - \frac{2}{9} \cdot (y-2) && (50)\\ &- \frac{4}{27} \cdot (x-1)^2 - \frac{2}{27} \cdot (x-1) \cdot (y-2) && (51)\\ &+ \frac{2}{27} \cdot (y-2)^2 && (52)\end{aligned}$$

$$\implies T_f(x,y) = -\frac{9}{27} + \frac{24}{27}x - \frac{12}{27}y - \frac{4}{27}x^2 - \frac{2}{27}xy + \frac{2}{27}y^2 \qquad (53)$$

6.4 Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x^2)(y-2x^2) && (54)\\ &= y^2 - 3yx^2 + 2x^4 && (55) \end{aligned}$$

a) Außerdem sei die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= f(at, bt) && (56)\\ &= b^2t^2 - 3a^2bt^3 + 2a^4t^4 && (57) \end{aligned}$$

Diese Funktion nach t abgeleitet ergibt (notwendiges Kriterium, vgl. Ana 1)

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= 2b^2t - 9a^2bt^2 + 8a^4t^3 && (58)\\ &= t\big(2b^2 - 9a^2bt + 8a^4t^2\big) && (59)\\ \to t_1 &= 0 && (60) \end{aligned}$$

Außerdem ist zu zeigen, dass die zweite Ableitung an der Stelle $t = 0$ größer 0 ist, damit es ein isoliertes Minimum ist (hinreichendes Kriterium, vgl. Ana 1):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= 2b^2 - 18a^2bt + 24a^4t^2 && |t = 0 && (61)\\ &= 2b^2 && && (62) \end{aligned}$$

Das ist für alle $b \neq 0$ positiv, also handelt es sich hier um ein Minimum. Sollte $b = 0$ sein, dann könnte es sich um einen Sattelpunkt handeln, dies schließen wir aus mit der dritten Ableitung, welche für einen Sattelpunkt ungleich 0 sein soll:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3} &= -18a^2b + 48a^4t && |b = 0,\ t = 0 && (63)\\ &= 0 && && (64) \end{aligned}$$

b) An der Stelle $(0,0)$ hat aber die Funktion f kein Minimum thinking.

Die Funktion ist mindestens zweifach stetig differenzierbar, da alle Komponenten zweifach stetig diff'bar sind und Kompositionen stetiger (und differenzierbarer) Funktionen weiterhin stetig und differenzierbar sind. Insbesondere gilt also auch der Satz von Schwarz. Für den Gradienten und die Hessematrix erhält man:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -6xy + 8x^3 \\ 2y - 3x^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6y + 24x^2 & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

Man sieht direkt, dass der Gradient im Punkt $(0,0)$ $(0,0)^T$ ist, also dass das notwendige Kriterium erfüllt ist (Lemma 3.19) . Jedoch erkennt man auch, dass die Matrix die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ hat, also positiv-semidefinit ist (vgl. LA2). Damit können wir aber nicht anhand der Hesseschen Matrix bestimmen, welche Art von Extremum vorliegt (Satz 3.21).

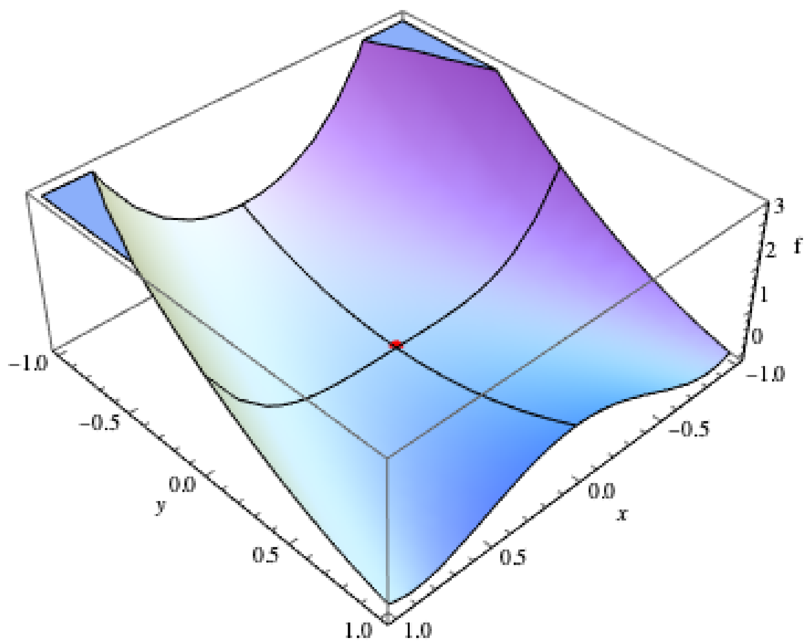

Abbildung 2: Graph der Funktion f in 6.4

Zu zeigen: $f(x,y)$ hat an $(0,0)$ kein lokales Extremum. Die Hessematrix hilft uns hier wie erwähnt nicht weiter. Wir betrachten deshalb den Funktionswert der Funktion an der Stelle $(0,0)$. Man sieht direkt, dass $f(0,0) = 0$. Zunächst suchen wir "nahe"Punkte, für die ebenfalls gilt $f(0,0) = 0$

$$0 \stackrel{!}{=} (y - x^2)(y - 2x^2)$$

$$\implies f = 0 \iff y = x^2 \vee y = 2x^2$$

Da $(0,0)$ auf beiden der gerade gefundenen Parabeln liegt, kann ein lokales Extremum ausgeschlossen werden. Das liegt daran, dass die Funktion zwischen den Parabeln negativ ist, woraus aber direkt folgt, dass für jede Umgebung um $(0,0)$

ein negativer Funktionswert gefunden werden kann, der in der Umgebung liegt. Somit wird die Bedingung für ein lokales Extremum verletzt.
Wir können hierfür Punkte betrachten, die zum Beispiel $y = 1,5x^2$ erfüllen. Für diese ist f negativ (außer bei $(0,0)$) und jeder Ball um $(0,0)$) mit Radius $r > 0$ enthält Punkte, die $y = 1,5x^2$ erfüllen.

Zu untersuchen ist, wo f größer bzw. kleiner als null ist. Wir machen eine Fallunterscheidung der möglichen Fällen:

Sei $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

Fall	Vorzeichen	Bedingung	Bereich
1.	+	$y < x^2 \wedge y < 2x^2$	$y < 2x^2$
2.	+	$y > x^2 \wedge y > 2x^2$	$y > 2x^2$
3.	-	$y < x^2 \wedge y > 2x^2$	$x^2 > y > 2x^2$
4.	-	$y > x^2 \wedge y < 2x^2$	$x^2 < y < 2x^2$

Fall 3 ist offensichtlich nicht realisierbar, so können wir also sagen, dass $f < 0$ für $x^2 < y < 2x^2$, und positiv für $y < x^2 \vee y > 2x^2$.