

Fourieroptik

Physikalisches Anfängerpraktikum 2.1

Jan A. Kesting

Betreuer/in: Julian Costisella

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
1.1 Ziel/Motivation	2
1.2 Versuchsaufbau	2
1.3 (physikalische) Grundlagen	2
3 Auswertung	17
3.1 Einzelpalt	17
3.2 Beugungsstruktur des Doppelspaltes	23
3.3 Fourier-Synthese am Einzelpalt	24
3.4 Fourier-Synthese des Doppelspaltes	29
3.5 Grenzraumfrequenz zur Auflösung der Doppelstruktur	30
4 Zusammenfassung und Diskussion	33

1 Einleitung

1.1 Ziel/Motivation

In diesem Versuch wird die Beugung eines Laserslichts an einem (Doppel)Spalt untersucht. Man erhofft ein fouriertransformiertes Bild des Spaltbildes zu erkennen.

1.2 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist als Abb. 1 im Messprotokoll zu finden.

1.3 (physikalische) Grundlagen

1.3.1 Fresnel'sche und Fraunhofer'sche Beugungstheorie

Allgemein ist eine Beschreibung der auftretenden Beugungen bei Interferenzen am Einzel- und Doppelspalt kompliziert und ohne Näherungen nur im Fresnel'schen Formalismus möglich. Um dies zu vereinfachen nutzt man Lichtstrahlen, die im unendlichen entstehen und erst im unendlichen gebündelt werden, also immer parallel zueinander sind.

Mit Hilfe von Linsen kann man diese Methode auch praktisch umsetzen, wobei eingehendes (Laser)Licht mit einer passenden Linse aufgebereitet wird, wodurch die leicht radialen Lichtstrahlen zueinander parallel werden. Um die Interferenz, welche am Objekt entsteht, sichtbar zu machen, wird wieder eine zweite - identische - Linse verwendet, da die Lichtstrahlen sonst erst im Unendlichen interferieren würden. Dank der zweiten installierten Linse interferiert das Licht nun in dessen Brennpunkt.

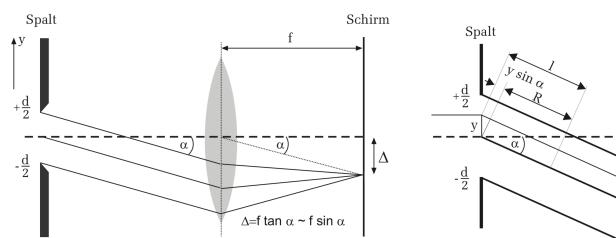


Abbildung 1: Fraunhofer'sche Beugung am Einzelspalt

Beim Treffen eines kohärenten Lichtbündels mit Wellenlänge λ , Amplitude E_0 und der Phase $\phi = \omega t$ auf einen Spalt (oben), beobachtet man unter dem Winkel α , nach dem Huygen'schen Prinzip, folgende Amplitude:

$$E_\infty(\alpha) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_0 e^{(\omega t - kl)} dy \quad (1)$$

Hierbei ist d die Spaltbreite und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ der Ausbreitungsvektor des Lichts.
Für l setzt man:

$$l = R + y \sin(\alpha) \quad (2)$$

Durch Einsetzen folgender Substitution

$$x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin(\alpha) \quad (3)$$

und quadrieren der erhaltenen Funktion, erhält man die Intensität I_∞ am Schirm mit der proportionalen Verteilung:

$$I_\infty(x) \propto I_0 \operatorname{sinc}^2(x) \quad (4)$$

I_0 ist nichts weiteres als eine konstante Amplitude, welche durch geeignete Normierung auf 1 gesetzt werden kann.

1.3.2 Fouriertransformierte

Eine jede L -periodische Funktion kann als Fourierreihe dargestellt werden. Diese ist nichts anderes als eine geschickte Anordnung aus verschiedenen Sinus- und Kosinusfunktionen; jene sind also die Basiskfunktionen der Reihe:

$$f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \right) \quad (5)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) dx \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \sin \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) dx \quad (7)$$

Im Falle nicht L -periodische Funktionen wird der Grenzfall $L \rightarrow \infty$ betrachtet. Die sich ergebende kontinuierliche Fouriertransformation sieht folgendermaßen aus:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \quad (8)$$

Mit folgender Rücktransformation:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(k) e^{ikx} dk \quad (9)$$

Mit diesem Wissen lassen sich jedem Punkt P(Y,Z) im Abstand R von der Mitte des Spaltes zwei Raumfrequenzen zuordnen.

$$k_y = k \frac{Y}{R} \quad (10)$$

$$k_z = k \frac{Z}{R} \quad (11)$$

Hiermit kann man dann die Feldstärke der Beugungsstruktur beschreiben:

$$E(k_y, k_z) = \int_S A(y, z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} dS \quad (12)$$

Hierbei gilt, beim Beschreiben einer Öffnungsfunktion $A(y, z)$ als zweidimensionale Fouriertransformation, $\mathbf{x} = (0, y, z)^T$ und $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)^T$.

1.3.3 Beugung am Einzelpalt

Ein Einzelpalt kann durch folgenden Funktion beschrieben werden:

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } |y| \leq \frac{d}{2} \\ 0 & \text{für } |y| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad (13)$$

Durch Integration der Fouriertransformierten des obigen Terms, folgt folgende Funktion; das Spaltbild:

$$F(k_y) = d \operatorname{sinc} \left(\frac{k_y d}{2} \right) \quad (14)$$

Dessen Nullstellen sind gegeben durch:

$$k_{y,n} = \frac{2\pi n}{d} \quad (15)$$

Die Nullstellen sind die Minima des sich Ergebenden Spaltbildes bzw. der Intensitätsverteilung. Will man nun aus der Intensitätsverteilung das Objektbild ableiten, entfernt man die äußeren Minima und nimmt als obere Integrationsgrenze den k_z -Wert, bei dem noch annähernd ein Minimum zu erkennen ist.

$$f_{mod} = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} \text{sinc}\left(\frac{k_y d}{2}\right) \cos(k_y y) dk_y \quad (16)$$

Wendet man nun den Limes $n \rightarrow \infty$ an, so lässt sich die ursprüngliche Funktion wiedererkennen.

Außerdem lässt sich die Spaltbreite b anhand des Beugungsbildes anhand folgenden Formeln berechnen:

$$n\lambda = b \sin(\alpha) \quad (17)$$

$$d = \tan(\alpha) f \quad (18)$$

Wobei α der Beugungswinkel der Maxima n entspricht und f die Brennweite der verwendeten Linse

1.3.4 Beugungsbild des Doppelspaltes

Ein Doppelspalt ist nichts Weiteres als eine Überlagerung zweier Einzelspalte, mit einem mittleren Abstand g . Dessen Fouriertransformierte sieht folgendermaßen aus:

$$F(k_y) = 2 \cos^2\left(k_y \frac{g}{2}\right) d \text{sinc}\left(k_y \frac{g}{2}\right) \quad (19)$$

Mit der Intensitätsverteilung

$$I = 4 \cos^2\left(k_y \frac{g}{2}\right) d^2 \text{sinc}^2\left(k_y \frac{g}{2}\right) \quad (20)$$

Der Graph entspricht dem Produkt der Fouriertransformierten des Einzelspaltes und der Gitterfunktion $\cos^2(k_y \frac{g}{2}) d^2$. Dieses modifizierte Spaltbild wird durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$f_{mod}(y) = \frac{2d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} \text{sinc}\left(\frac{k_y d}{2}\right) \cos\left(\frac{k_y d}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_y g}{2}\right) dk_y \quad (21)$$

Für die Auflösung des Bildes ist der Faktor g ausschlaggebend. Ab einem bestimmten Wert von k_y ist keine Doppelstruktur mehr zu erkennen, da nicht mehr genügend Beugungsordnungen des Spaltes vorhanden sind.



Messprotokoll Versuch 233

Jan Kesting
Victoria Hahn

01.12.2021

FOURIER OPTIK

Material

- Singlemode Glasfaser - gekoppelter Diodenlaser mit regelbarer Stromversorgung & Justeroptik für einen Parallelstrahl
- 1 Satz Beugungsobjekte: Spalt, Doppelspalt, Gitter, Kreuzgitter, Spalt mit gaußförmigem Transmissionsprofil
- versch. sphärische und zylindrlinsen
- Strahlteiler
- Grauhilfer
- Spiegel
- versch. Fest-Reiter
- feinjustierbare Verschiebereiter
- symmetrisch öffnender Analytisspalt
- versch. schmale Metallstreifen als Modenblende
- CCD-Kamera mit PC & Monitor zur Aufnahme von Beugungsbildern & Objektbildern, Drucker

Aufbau

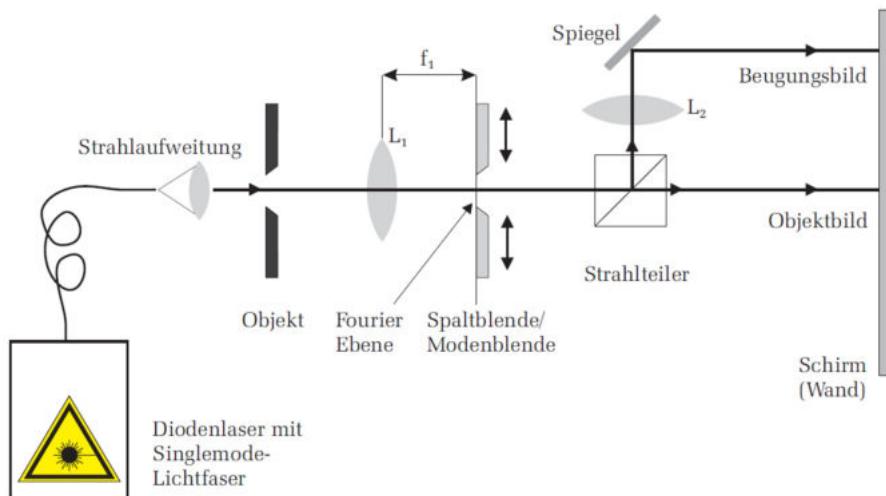


Abbildung 1 : Schematische Darstellung des optischen Aufbaus.

Quelle : Praktikums Skript

Durchführung

Zunächst wird der Versuch nach Abb. 1 aufgebaut. Es wird der Diodensensor mit $\lambda = 635 \text{ nm}$ verwendet. Die Linse L₁ (Brennweite 80 mm) wird so positioniert, dass das Objekt scharf auf dem Schirm zu sehen ist. Der Abstand des Schirms vom Objekt beträgt ca. 1 m.

Um simultan das Objektbild und das Fourierbild sehen zu können, wird ein Strahlteiler in den Strahlengang vor dem Schirm platziert. Die Linse L₂ wird so positioniert, dass die Beugungsstruktur stark vergrößert neben dem Objektbild sichtbar wird und möglichst scharf ist.

1. Quantitative Beobachtungen am Einfachspalt

Mit Hilfe der CCD-Zeilenkamera soll die Beugungsstruktur des Spaltes bestimmt werden. Die Linse L₂ wird so justiert, dass in der Ebene der Kamera ein scharfer Beugungsbild entsteht. Um auf dem Monitor etwas erkennen zu können, muss die Intensität des Lasers verringt werden (unter die Sichtbarkeitsgrenze). Mit der Zylinderlinse wird der Laserstrahl nun so fokussiert, dass das Beugungsbild mit der Pixel-Zeile der Kamera (Höhe 56 μm) zur Deckung gebracht wird. Es wird feinjustiert, bis das Beugungsbild symmetrisch auf dem Monitor erscheint (Abb. 1)

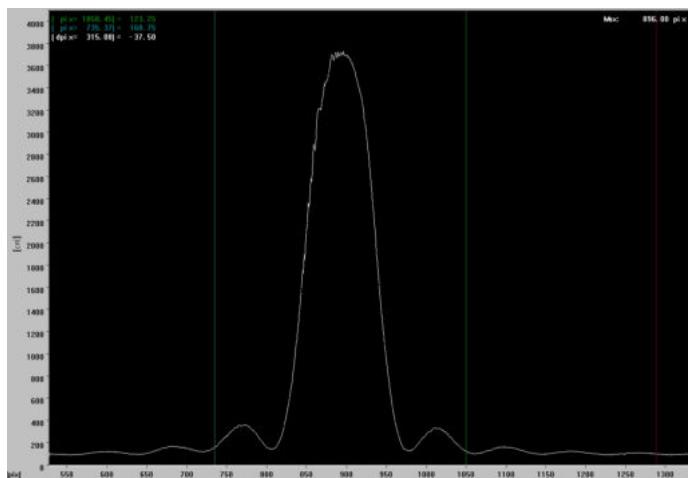


Abb. 1 : Intensitätsverteilung des Einzelspaltes

Jetzt werden Lage und Intensität der Beugungsmaxima und -minima bestimmt:

Ordnung	Min/Max	Fehler: 10 ↑ Lage [Pixel]	Fehler: 10 ↑ Intensität [b.E.]
0	Max	895	3680
1	Min	810	143
	Max	774	3740 / 3130
2	Min	722	474
	Max	687	1147
3	Min	642	223
	Max	602	567
4	Min	554	176
	Max	519	348
5	Min	472	147
	Max	438	239
Untergrund	Links	—	93
	Rechts	—	99

Tabelle 1 : Lage und Intensität der Maxima und Minima (Einzelspalte)

Zur Vermessung der höheren Beugungsordnungen wird ein 2. Bild bei höherer Intensität aufgenommen :

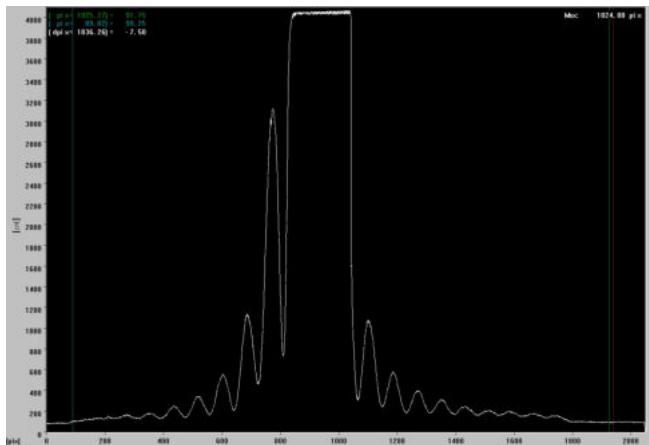


Abb. 2: Intensitätsverteilung des Einzelpaltes bei erhöhte Laserintensität

Um den Abbildungsmaßstab zu erhalten, wird in der Fourierebene der analysierende Spalt auf verschiedene Weiten eingestellt. Somit kann bestimmt werden, wie viele Pixel 1mm in der Fourierebene entsprechen.

Pixel	441	519	606	693	779
Δ Messuhr [mm]	0,68	0,27	0,23	0,23	0,25

Tabelle 2: Messung zur Eichung der Abstände

Fehler der Messuhr : 0,01 mm

2. Beugungsstruktur des Doppelspaltes

Der Einzelspalt wird durch den Doppelspalt ersetzt, sodass auf dem Schirm ein scharfer Bild entsteht.

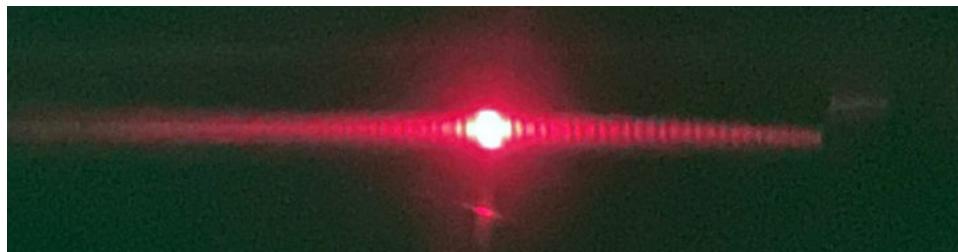


Abb. 3: Beugungsbild des Doppelspaltes

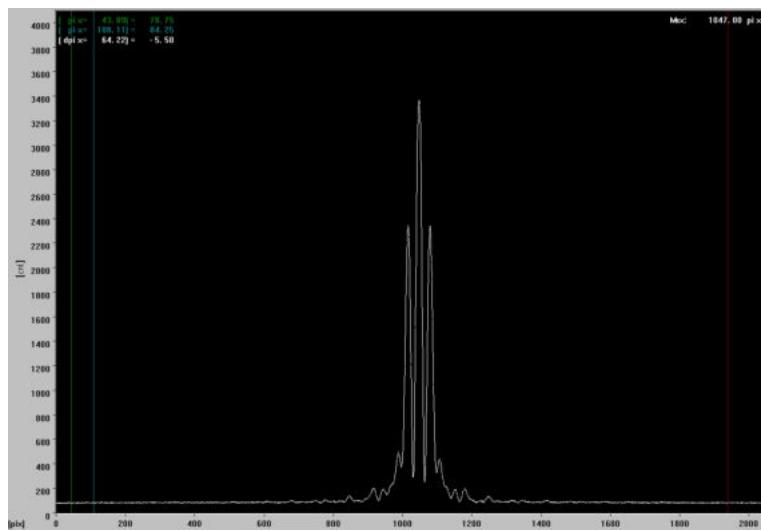


Abb. 4 : Intensitätsverteilung des Doppelspaltes

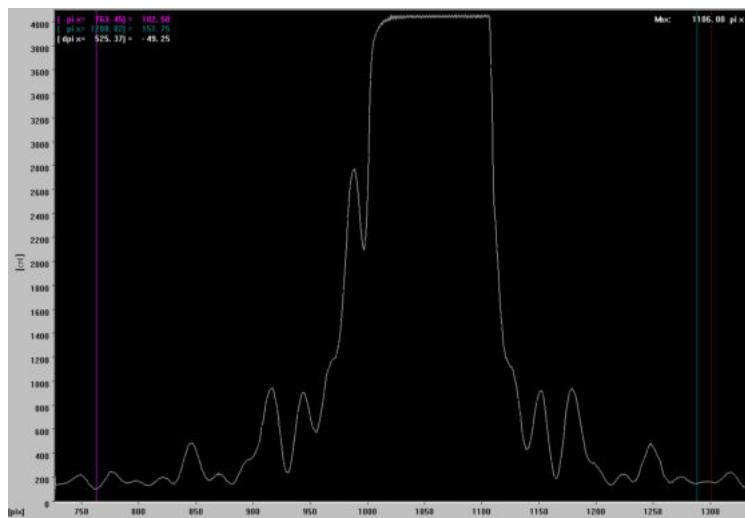


Abb. 5 : Intensitätsverteilung des Doppelspaltes bei erhöhte Laserintensität

Zur quantitativen Messung wird wieder die CCD-Kamera verwendet.
Analog zu 1. wird die Messung für den Doppelspalt durchgeführt.

Ordnung	Min/Max	Fehler : 5 ↑ Lage [Pixel]	Fehler : 10 ↑ Intensität [b.E.]
0	Max	1048	3360
1	Min	1031	295
	Max	1016	2370
2	Min	997	380
	Max	988	500 / 2750
3	Min	956	570
	Max	944	905
4	Min	931	240
	Max	916	935
5	Min	882	147
	Max	871	220
Untergrund	links	—	90
	rechts	—	89

Tabelle 3 : Lage und Intensität der Maxima und Minima (Doppelspalt)

3. Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes

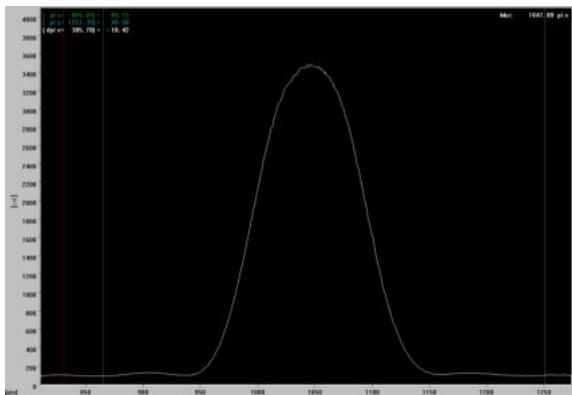
Nun wird untersucht, wie sich Manipulationen in der Fouriervene auf die Struktur des Bildes auswirken.

Es wird wieder die CCD-Kamera zur quantitativen Messung verwendet. Bei maximaler Laserintensität wird der Analyserspalt zunächst geöffnet. Um zu verhindern, dass die Kamera übersteuert, wird ein Grauefilter in den Strahlengang platziert. Beim Nachjustieren wird die Position der Linse L₁ festgehalten und lediglich das Objekt bzgl. L₁ bewegt. Während der Analyserspalt langsam geschlossen wird, werden die

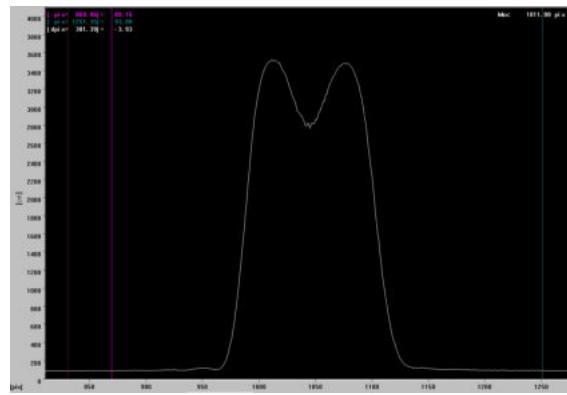
Während der Analysenspalt langsam geschlossen wird, werden die Beugungsstruktur auf dem Schirm und das Spaltbild auf dem Monitor beobachtet. Es werden der Reihe nach die charakteristischen Bildstrukturen bei Zulassen der 0., $\pm 1.$, $\pm 2.$, etc. Ordnung aufgezählt.

Zur Verbesserung der Signalqualität wird bei reduzierter Laserleistung der Graufilter entfernt.

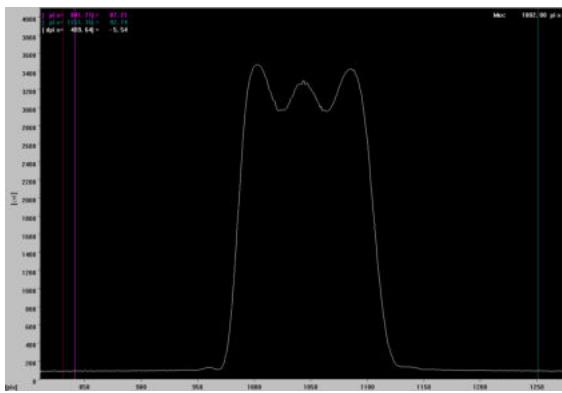
0. Ordnung



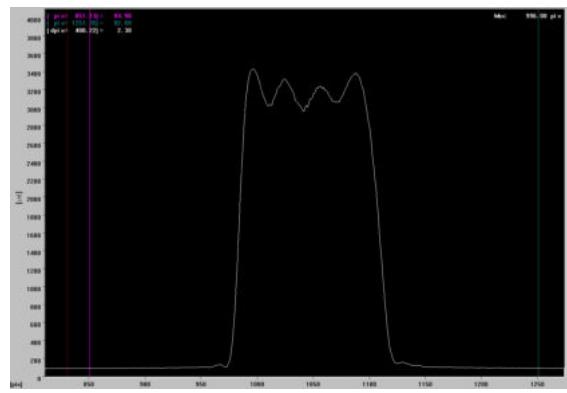
0. $\pm 1.$ Ordnung



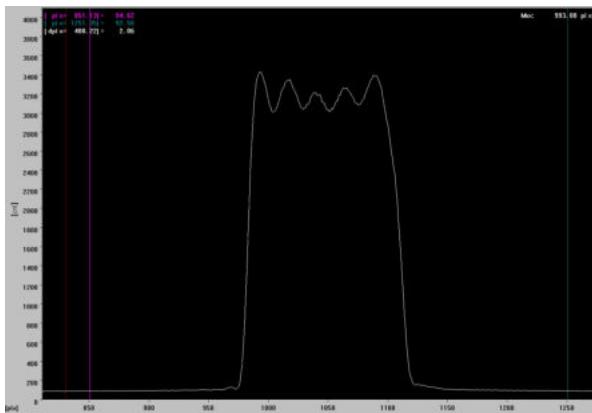
0. $\pm 1.$ $\pm 2.$ Ordnung



0. $\pm 1.$ $\pm 2.$ $\pm 3.$ Ordnung



0. $\pm 1.$ $\pm 2.$ $\pm 3.$ $\pm 4.$ Ordnung



0. $\pm 1.$ $\pm 2.$ $\pm 3.$ $\pm 4.$ $\pm 5.$ Ordnung

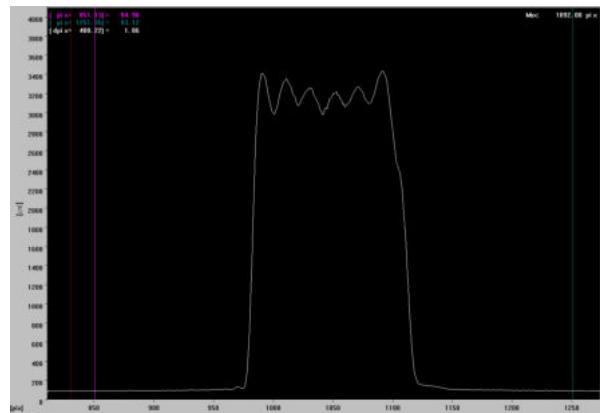


Abb. 6: Objektbild des Einfachspalts unter Berücksichtigung unterschiedl. Beugungsordnungen

Für Beugungsordnung 1-3 werden voneinander die Intensitäten der Maxima, Minima und des Untergrunds bestimmt:

n	1. Max	1. Min	2. Max	2. Min	3. Max	Untergrund
1	3515	2757	—	—	—	93
2	3479	2973	3296	—	—	93
3	3432	3014	3318	2959	—	93

Tabelle 4: Intensitäten der Maxima und Minima (Einzelspalt) unter Berücksichtigung von n Beugungsordnungen

Ablesefehler Intensitäten: 10

Bei $n = 9$ werden die Abstände der Maxima und Minima zum 0. Maximum bestimmt.

Minn/Max	1. Max	1. Min	2. Max	2. Min	3. Max	3. Min
Lage [Pixel]	988	994	1000	1005	1012	1018
	4. Max	4. Min	5. Max	5. Min		
	1024	1028	1036	1042		

Tabelle 5: Lage der Maxima/Minima im Objektbild der Einzelspalte
Ablesefehler: 3

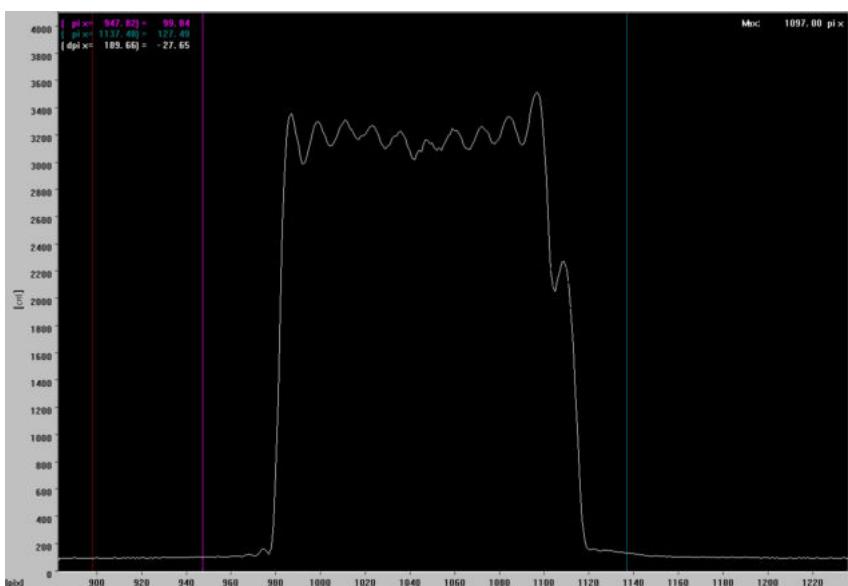


Abb. 7: Objektbild des Einfachspalts bei $n=9$

Die Spaltbreite entspricht: $b = (1106 - 983)$ Pixel

Bildweite $b_L = (69,0 \pm 0,5)$ cm

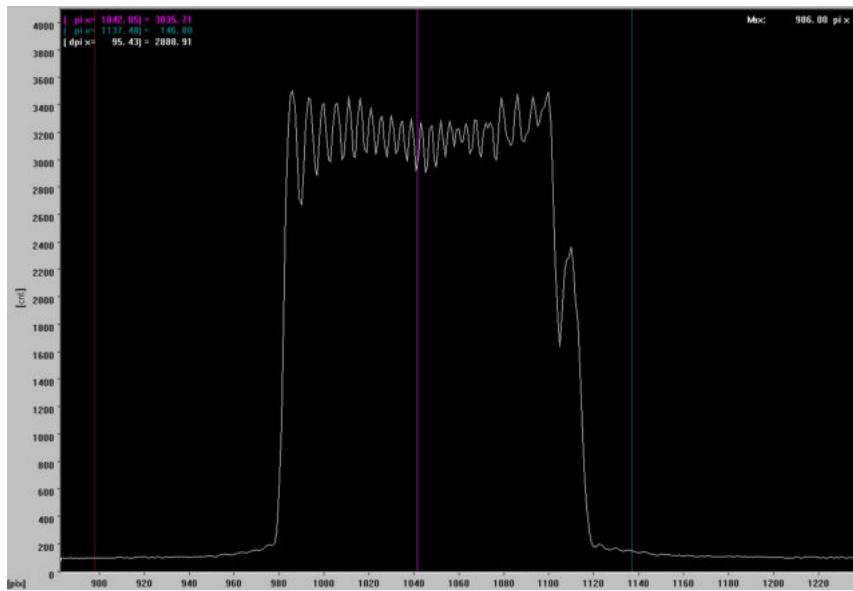


Abb 8 : Objektbild des Einfachspalts bei komplett geöffnetem Analytikspalt zur Bestimmung der Spaltbreite

4. Fourierbild des Doppelspaltes

Es wird das Bild des Doppelspaltes mit der CCD-Kamera untersucht. Der Abstand und die Breite der beiden Einzelspalte werden bestimmt.

$$\text{Spaltbreite} : b_l = (854 - 727) \text{ px} \quad b_r = (1179 - 1049) \text{ px}$$

$$\text{Spaltabstand} : g = (1116 - 789) \text{ px}$$

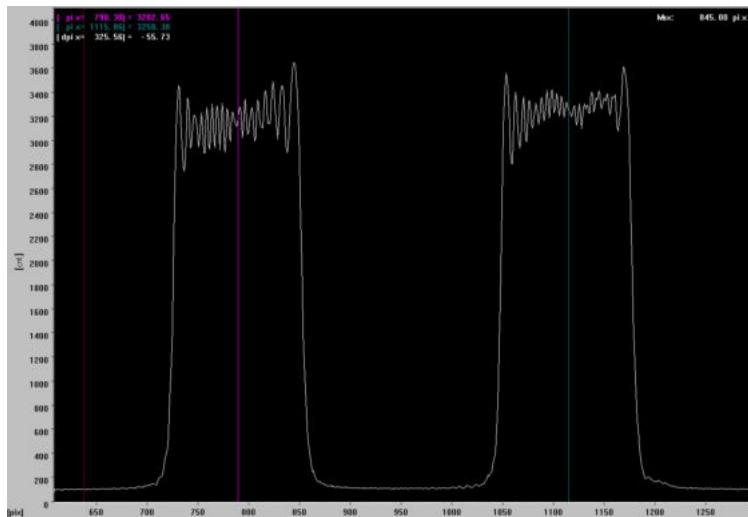


Abb 9: Objektbild des Doppelspaltes

Wie beim Einzelspalt wird auch hier aus der Bildweite und Brennweite die Vergrößerung bestimmt. Der Abstand der Analytikspalte, bei dem die Doppelstruktur noch aufgelöst wird, beträgt $d_1 = (0,21 \pm 0,01) \text{ mm}$

$$\text{beträgt } d_1 = (0,21 \pm 0,01) \text{ mm}$$

Der Abstand, bei dem die Doppelstruktur nicht mehr aufgetaut wird, beträgt $d_2 = (0,1 \pm 0,01) \text{ mm}$

Die Bildweite der Linse ist $b_L = (69,0 \pm 0,5) \text{ cm}$

und die Gegenstandsweite $g_L = (9,5 \pm 0,5) \text{ cm}$

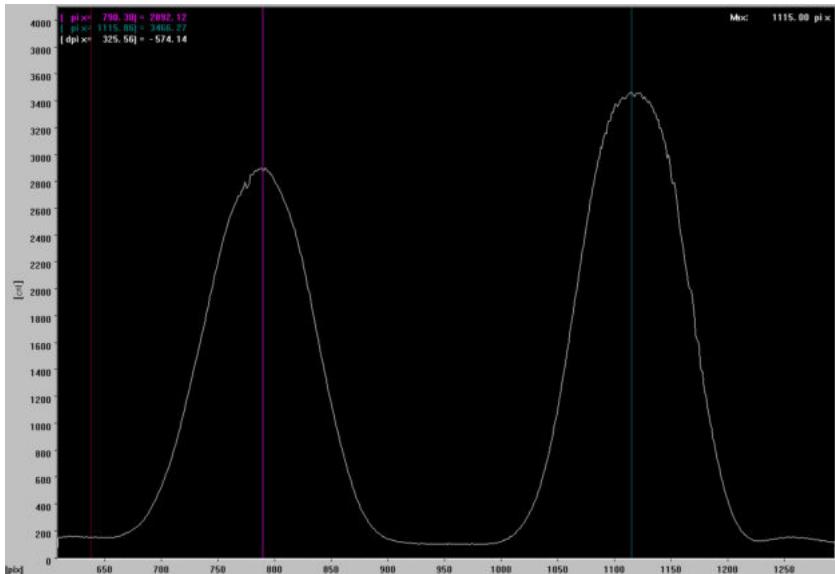


Abb. 10 : Objektbild des Doppelspalters bei Analyseverspaltöffnung d_1

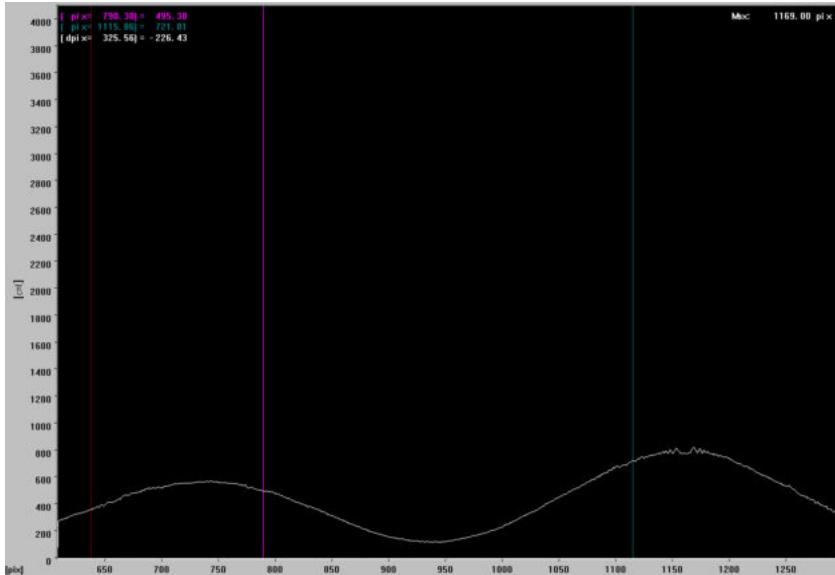


Abb. 11 : Objektbild des Doppelspalters bei Analyseverspaltöffnung d_2

Handwritten note: A sketch of a double slit interference pattern showing two sharp peaks. Below it, the numbers 08, 12, 21 are written.

3 Auswertung

Die Berechnungen der Auswertung finden in einem Python Skript und dementsprechendem Programm statt. Jenes ist im Anhang verzeichnet; in der Auswertung werden somit nur wesentliche Rechenwege und Ergebnisse angegeben. Außerdem werden alle Fehler nach der Fehlerfortpflanzung nach Gauß bestimmt und in trivialen oder unwesentlichen Fällen die Rechnung nicht angegeben; das Ergebnis nur endgültig präsentiert.



3.1 Einzelspalt

3.1.1 Eichung der Abszisse

Die Messergebnisse beim Messprotokoll sind nur als Pixelwert gegeben. Damit diese nützlich sind, wird eine Gerade an die Werte der Minima der Tabelle 1 und 2 angelegt. Wichtig zu erwähnen ist, dass bei den Messuhrwerten die Schrittweite aufeinanderaddiert worden sind, da nur die Differenzen zwischen den Messaufnahmen notiert wurde. Jedem Minima wurde nun einem Messwert zugeordnet und an den Werten eine Gerade der Form

$$y = qx + a \quad (22)$$

gefittet wurde. Die Steigung q ist der Umrechnungsfaktor für die Umrechnung von Pixel in ein Längenmaß:

$$q = (0,0028694 \pm 0,00005) \frac{\text{mm}}{\text{Pixel}} \quad (23)$$

3.1.2 Auswertung der Beugungsstrukturen

Als nächstes werden die Pixelwerte der Minima gegen ihre Ordnungszahl n aufgetragen.

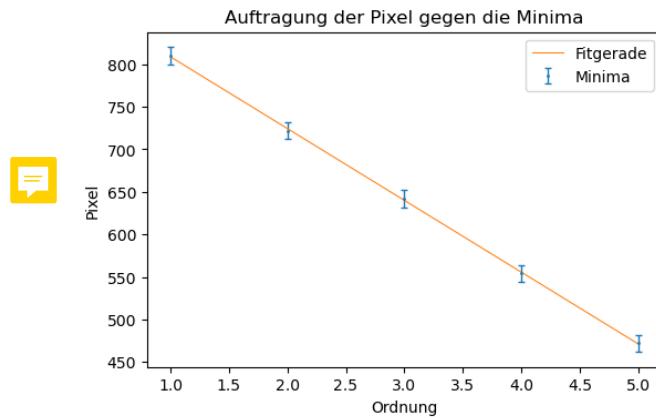


Diagramm 1: Pixel der jeweiligen Minima

Man kann einen linearen Zusammenhang erkennen. Durch fitten einer Gerade erhält man die Steigung q und den Achsenabschnitt a

$$q = -84.4 \pm 0,7 \quad (24)$$

$$a = 893 \pm 2,3 \quad (25)$$

In das gleiche Diagramm werden nun auch noch die Maxima p eingetragen. Damit diese Werte zwischen den Minima erscheinen müssen sie noch mittels

$$n = \frac{p - a}{m} \quad \Delta n = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta nq}{q}\right)^2} \quad (26)$$

geeicht werden. Nun kann man sie in das vorherige Diagramm eintragen und erhält:

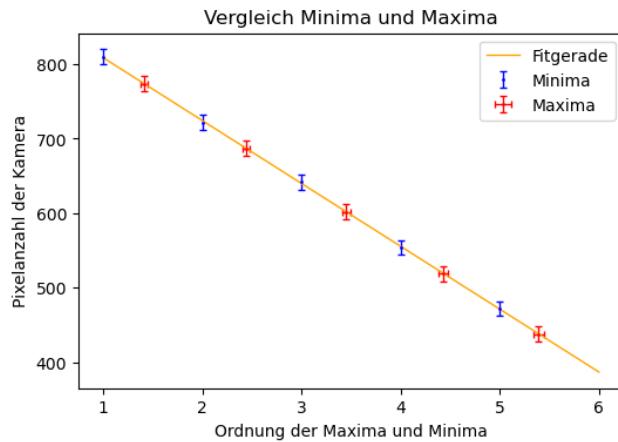


Diagramm 2: Ordnung der Maxima und Minima

Aus der Einleitung geht schon hervor, dass sich das Beugungsmuster durch eine quadratische sinc-Funktion beschreiben lässt. Demnach müssen die ermittelten Werte für die Maxima mit π multipliziert werden, damit man diese mit der Theorie überprüfen kann. Zum Vergleich zweier Werte nutzt man:

$$\sigma = \frac{|q_1 - q_2|}{\sqrt{\Delta q_1^2 + \Delta q_2^2}} \quad (27)$$

Durch Eintragen, Umrechnen und Vergleichen der Werte erhält man folgende Ergebnisse:

Maxima p	Ordnung n	$n \cdot \pi$	Maxima der sinc ² -Funktion	σ
1 NM	$1,41 \pm 0,03$	$4,4 \pm 0,10$	4,49	1,0
2 NM	$2,44 \pm 0,04$	$7,7 \pm 0,11$	7,73	0,8
3 NM	$3,45 \pm 0,04$	$10,8 \pm 0,13$	10,9	0,6
4 NM	$4,43 \pm 0,05$	$13,9 \pm 0,15$	14,07	1,2
5 NM	$5,39 \pm 0,05$	$16,9 \pm 0,17$	17,22	1,9

Tabelle 6: Die bestimmten Nebenmaxima des Beugungsbildes des Einzelpaltes verglichen mit den theoretischen Werten

Wie erwartet, liegt der Wert für n immer ziemlich nah an der Hälfte zwischen den Ordnungen der Maxima.

3.1.3 Spaltbreite

Mittels (17) kann man die Spaltbreite des Einzelpaltes ermitteln:

$$n\lambda = b \sin(\alpha) \quad (28)$$

$$d = \tan(\alpha)f \quad (29)$$

Man nimmt die bekannte Wellenlänge des Lichts $\lambda = 635 \text{ nm}$ und $f = 80 \text{ mm}$. Auf die Ordnungsposition muss aber vorher noch der Eichfaktor q angewendet werden:

$$d = q \cdot h \quad \Delta d = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \quad (30)$$

h beschreibt hierbei die Position der Minima.

Als nächstes wird für kleine Winkel die Näherung $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha)$ genutzt und die beiden Formeln aus (17) gleichgesetzt. Man erhält:

$$b = \lambda f_1 q_1 \quad \Delta b = \lambda f_1 \Delta q_1 \quad (31)$$

Man nutzt hier aus, dass sich die Position der Minima d gegen die Ordnung n plotten lässt und dessen Steigung somit folgenden Zusammenhang aufweist (Maxima sind nicht relevant, da sie mit gleicher Steigung Verlaufen (Diagramm 2)):

$$q_1 = \frac{n}{d} \quad (32)$$



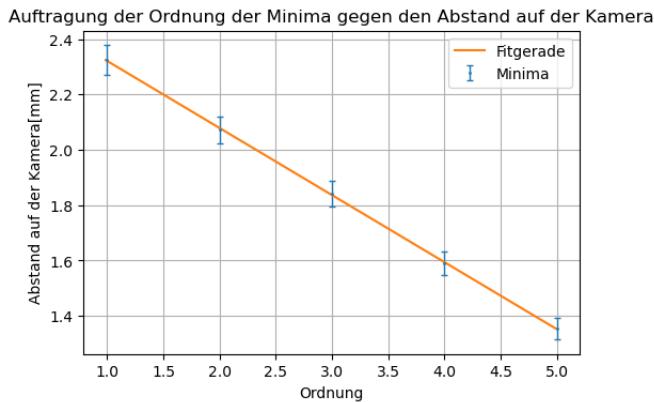


Diagramm 3: Abstand auf der Kamera als Funktion der Ordnung

Mittels der ermittelten Steigung $q_1 = (-4,13 \pm 0,03) \frac{\text{mm}}{\text{Pixel}}$ (Vorzeichen ist irrelevant) wird nun diese genutzt um die Spaltbreite b zu errechnen:

$$b = \underline{\underline{(210 \pm 1,7) \mu\text{m}}} \quad (33)$$

Mit der gegebenen Spaltbreite vom Hersteller $b_{lit} = 240 \mu\text{m}$ erhält man eine signifikante σ -Abweichung (27) von $\sigma = 17,6$; dazu in der Diskussion mehr.

3.1.4 Intensitäten

Da ab der zweiten Messung die Intensität erhöht worden ist, müssen die Messwerte in ihrer Intensität untereinander verglichen werden. Dazu setzt man den Wert des 0. Maximums = 1 und alle weiteren Messungen werden relativ zu diesem angegeben.

Zuerst wird das Rauschen aus den Messungen abgezogen, woraufhin dann die Intensitäten relativiert werden können. Als erstes wird das Verhältnis zwischen dem Maximum 0., und dem Maximum 1, Ordnung gebildet:

$$r = \frac{I_1}{I_0} \quad (34)$$

Da das zweite Maximum sowohl bei hoher, als auch geringer Intensität gemessen worden ist, nimmt man nun dessen Intensitätsverhältnis zum 0. Maximum als Maßstab für weitere Maxima:

$$v_{i0} = r \frac{I_i}{I_{1;2}} \quad \Delta v_{i0} = v_{i0} \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_i}{I_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_{1;2}}{I_{1;2}}\right)^2} \quad (35)$$

Die gewonnenen Werte werden nun mit einer quadratischen sinc-Funktion verglichen:

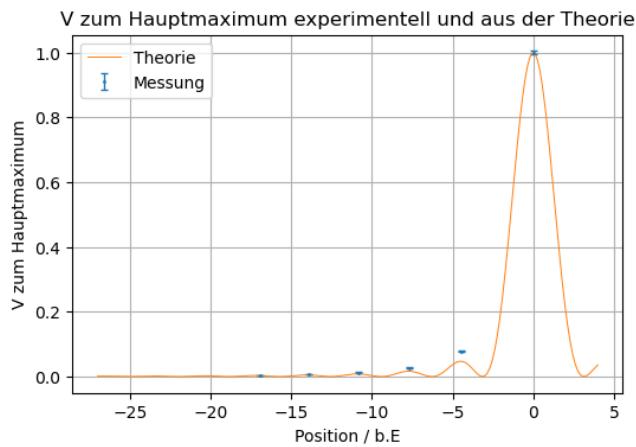


Diagramm 4: Intensitätsmaxima experimentell bestimmt verglichen mit der theoretischen Intensitätsverteilung

Maxima	v_{theo}	$v_{Messung}$	σ
0	1, 0	$1,000 \pm 0,004$	0
1	0, 047	$0,078 \pm 0,003$	10, 0
2	0, 016	$0,027 \pm 0,0016$	6, 9
3	0, 008	$0,0121 \pm 0,0007$	5, 1
4	0, 005	$0,0064 \pm 0,0005$	3, 2
5	0, 003	$0,0036 \pm 0,0004$	1, 5

Tabelle 7: Vergleich der bestimmten Intensitätsmaxima

Der Großteil der Ergebnisse weißt auf einen systematischen Fehler hin, da fast alle Abweichungen signifikant sind.

3.2 Beugungsstruktur des Doppelspaltes

Zum Vergleich der Beugungsstruktur des Doppelspaltes mit der des Einzelspaltes, müssen zuerst die Spaltbreite b und der mittlere Spaltabstand d bestimmt werden. Man nutzt dafür die Messwerte des vierten Versuchsteiles und stellt folgendes Verhältnis auf:

$$v = \frac{d}{b} \quad \Delta v = v \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \quad (36)$$

Man erhält:

$$v = \frac{1116 - 789}{\frac{(854 - 727) + (1179 - 1049)}{2}} = \underline{\underline{2,5 \pm 0,11}} \quad (37)$$

Mithilfe dieses Verhältnisses lassen sich die Beugungstruktur des Doppelspaltes mit der des Einzelspalts vergleichen:

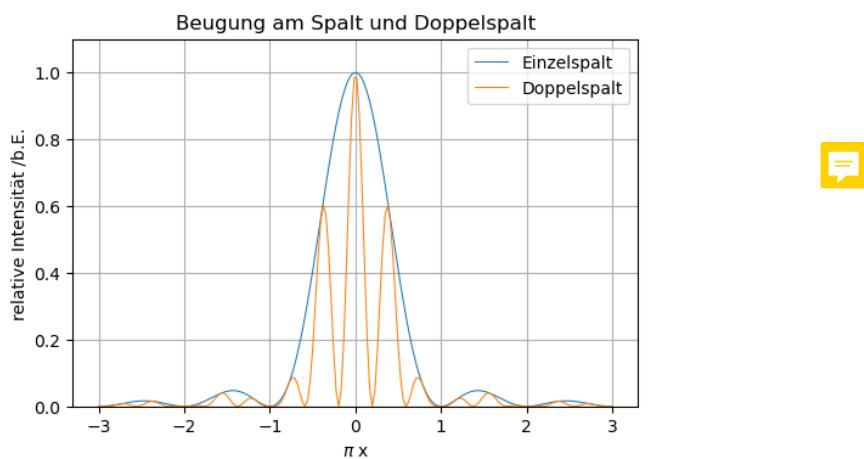


Diagramm 5: Intensitätsverhältnisse bezüglich des Hauptmaximums experimentell bestimmt, verglichen mit der theoretischen Verteilung

Man kann hier gut erkennen, dass der die Intensität des Doppelspaltes innerhalb der Intensitätsverteilung des Einzelspaltes liegt; und zwar fast nahtlos. Wenn der Doppelspalt betrachtet wird, entsteht ein Beugungsbild für jeden Einzelspalt, wie es schon oben beschrieben wurde. Nun kommt aber noch

eine zusätzliche Interferenz hinzu; und zwar durch die Teilbündel der beiden Spalten. Durch diese zusätzliche Interferenzen entsteht nun ein neues Beugungsbild, da Teile des Einzelspaltes überlagert und ausgelöscht werden (destruktive Interferenz).

Mit der gleichen Methode, wie in Kapitel 3.1.4, werden nun die Intensitäten der Maxima untereinander verglichen. Der einzige Unterschied hier ist, dass das Verhältnis des Maximums 2. Ordnung zum Maximum 0. Ordnung als Referenz genutzt wird, da erst bei jener Messung die Intensitäten geändert worden sind. Die theoretischen Werte der Maxima werden aus Diagramm 5 abgelesen. Man erhält folgende Ergebnisse:

Maxima	v_{theo}	$v_{Messung}$	σ
0	$0.98 \pm 0,02$	$1,000 \pm 0,004$	1,0
1	$0.6 \pm 0,02$	$0,697 \pm 0,003$	4,8
2	$0.09 \pm 0,02$	$0,125 \pm 0,0016$	1,8
3	$0.03 \pm 0,02$	$0,038 \pm 0,0007$	0,4
4	$0.04 \pm 0,02$	$0,0399 \pm 0,0005$	0,0
5	$0.02 \pm 0,02$	$0,0062 \pm 0,0004$	0,7

Tabelle 8: Vergleich der bestimmten Intensitätsmaxima

3.3 Fourier-Synthese am Einzelspalt

3.3.1 Spaltweite des Einzelspaltes

Für die weitere Analyse wird zuerst einmal die Spaltbreite wieder einmal benötigt. Dazu wird die Linsengleichung genutzt:

$$\frac{2}{g'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{b'} \quad \text{Icon: Chat} \quad (38)$$

und die Vergrößerungsformel

$$\frac{b}{g'} = \frac{B}{G} \quad (39)$$

die Kleinbuchstaben entsprechen den Weiten; die Großbuchstaben den Größen. b steht hierbei für Bild und g für den Gegenstand. Die obigen Formeln werden ineinander eingesetzt und erhält folgende Formel für die Gegenstandsgröße.

$$G_{real} = k \left(\frac{B}{\frac{b}{f}} - 1 \right) \quad \Delta G_{real} = k \sqrt{\left(\frac{\Delta B}{\frac{b}{f} - 1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b B f}{(b-f)^2} \right)^2} \quad (40)$$

Hierbei ist $k = 14 \mu\text{m}$, da dies einem Pixel auf der Kamera entspricht. Man erhält folgende Spaltbreite:

$$b = \underline{(226 \pm 13) \mu\text{m}} \quad (41)$$

Von obig genanntem Herstellerwert ist dies eine σ -Abweichung von $\sigma = 1, 1$.

3.3.2 Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Objektbildern

Als nächstes werden die gemessenen Objektbilder mit den Theoretischen Verglichen. Dazu werden, mittels der soeben bestimmten Spaltbreite, die theoretisch modifizierten Objektbilder geplottet:

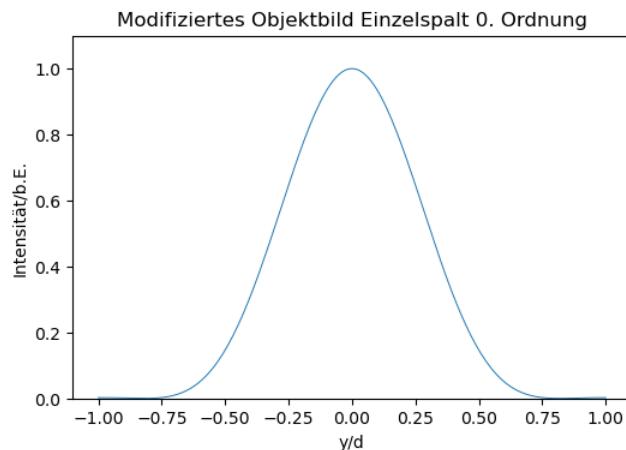


Diagramm 6: Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 0. Ordnung

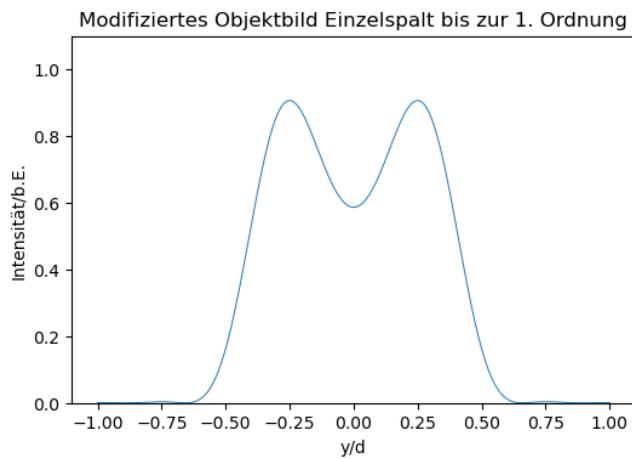


Diagramm 7: Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 1. Ordnung

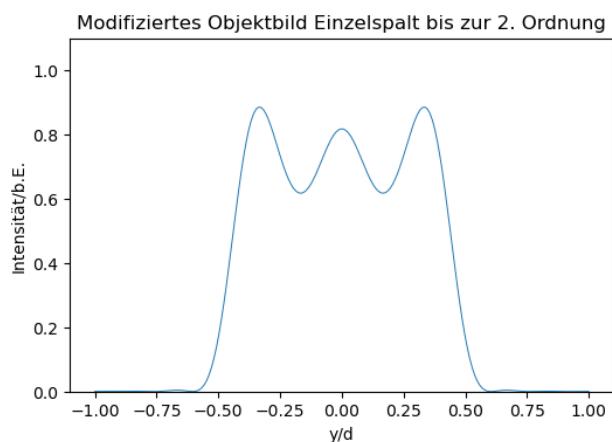


Diagramm 8: Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 2. Ordnung

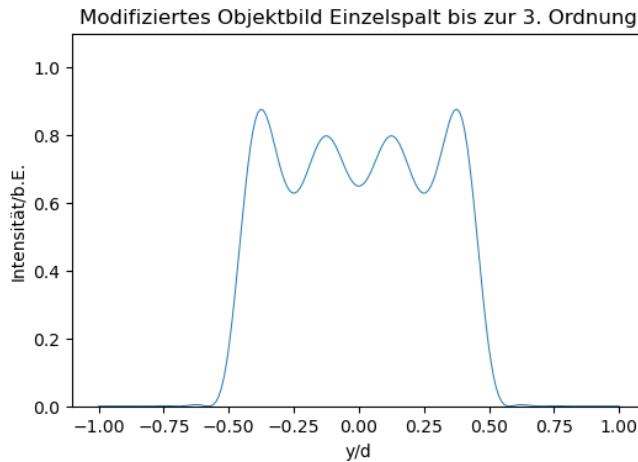


Diagramm 9: Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 3. Ordnung

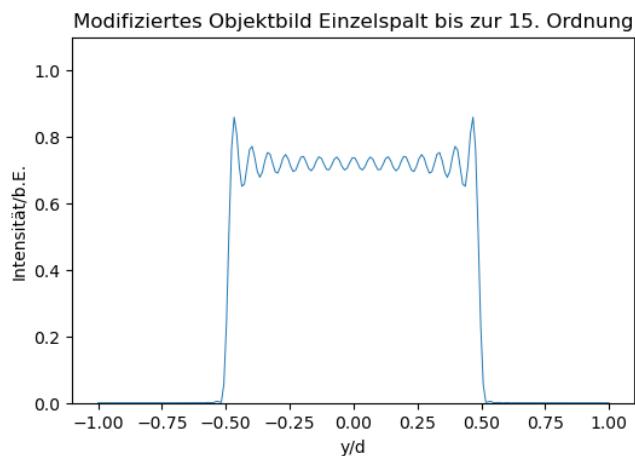


Diagramm 10: Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 15. Ordnung

Nun werden die experimentell gemessenen Maxima und Minima mit dem Maxima 0. Ordnung verglichen; ganz analog zu 3.1.4 (inkl. Fehlerrechnung). Da allerdings nur bis zum Mittelpunkt des Spaltbildes die Intensitäten vermessen worden sind (Gründe in Diskussion), werden die Werte gespiegelt. D.h. der gemessene Wert des linken Maximums beim Bild 1. Ordnung wird auch für das rechte Maximum zum Rechnen verwendet.

Die theoretischen Werte zum Vergleichen wurden mittels Python aus den modifizierten Diagrammen entnommen. Es ergibt sich folgende Tabelle:

Ordnung	Extremwert	$I_{n,\text{theo}}$	$I_{n,\text{Messung}}$	σ
0.	1. Max	1,00	1,00	0
1.	1. Max	$0,906 \pm 0,001$	$1,004 \pm 0,009$	10,7
	1. Min	$0,586 \pm 0,001$	$0,788 \pm 0,008$	24,3
	2. Max	$0,906 \pm 0,001$	$1,004 \pm 0,009$	10,7
2.	1. Max	$0,885 \pm 0,001$	$0,994 \pm 0,009$	11,9
	1. Min	$0,618 \pm 0,001$	$0,849 \pm 0,009$	27,1
	2. Max	$0,181 \pm 0,001$	$0,942 \pm 0,009$	13,9
	2. Min	$0,618 \pm 0,001$	$0,849 \pm 0,009$	27,1
	3. Max	$0,885 \pm 0,001$	$0,994 \pm 0,009$	11,9
3.	1. Max	$0,876 \pm 0,001$	$0,981 \pm 0,009$	11,5
	1. Min	$0,629 \pm 0,001$	$0,861 \pm 0,009$	27,0
	2. Max	$0,797 \pm 0,001$	$0,948 \pm 0,009$	16,9
	2. Min	$0,650 \pm 0,001$	$0,845 \pm 0,009$	22,9
	3. Max	$0,797 \pm 0,001$	$0,948 \pm 0,009$	16,9
	3. Min	$0,629 \pm 0,001$	$0,861 \pm 0,009$	27,0
	4. Max	$0,876 \pm 0,001$	$0,981 \pm 0,009$	11,5

Tabelle 9: Vergleich der Intensitäten bezüglich der 0. Ordnung

Jede σ -Abweichung (ausser die Erste, jene ist aber aufgrund des Quotientens vernachlässigbar) deutet auf eine signifikante Abweichung hin. Dazu mehr in der Diskussion.

Außerdem lässt sich feststellen, dass die Anzahl Minima immer gleich der Ordnung ist, während die Anzahl Maxima immer eines Größer als jene ist. Zusätzlich ist feststellbar, dass die Wiggles am Rand größer sind als jene in der Mitte des Bildes. Dies liegt daran, dass bei geöffnetem Analysierspalt die Form des Spaltes deutlich besser angenähert werden kann als bei fastgeschlossenem. Dadurch sind die Kanten steiler dargestellt, was zu höheren Peaks führt.

3.4 Fourier-Synthese des Doppelspaltes

Auf dieselbe Art und Weise, wie beim Einzelpalt, wird als erstes die Spaltbreite b und der mittlere Spaltabstand d bestimmt. Man erhält:

$$b = \underline{(236 \pm 9) \mu\text{m}} \quad (42)$$

$$d = \underline{(600 \pm 13) \mu\text{m}} \quad (43)$$

Die σ -Abweichung der Spaltbreite beträgt $\sigma = 0,44$

Mittels diesen Werten lassen sich nun die modifizierten theoretischen Doppelspaltbilder erzeugen:

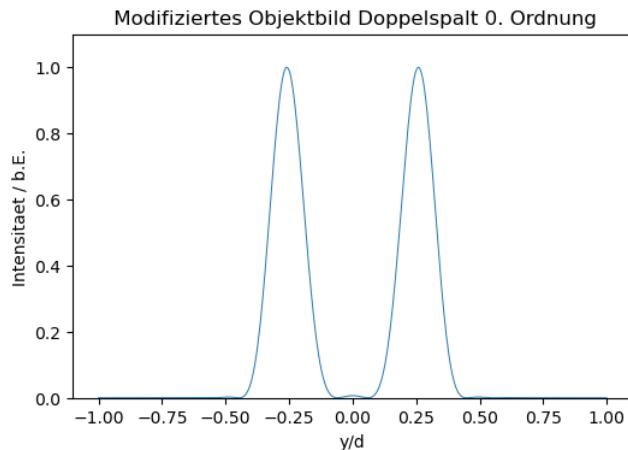


Diagramm 11: Modifiziertes Objektbild Doppelspalt 0. Ordnung

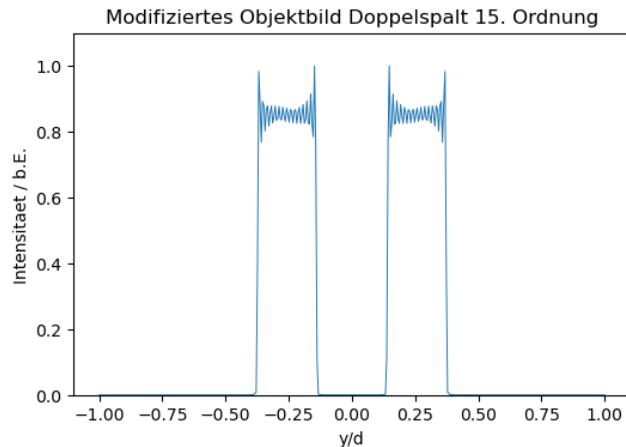


Diagramm 12: Modifiziertes Objektbild Doppelspalt 15. Ordnung

Zwischen den Modifizierten Bildern und denen des Messprotokolls ist eine relativ gute Ähnlichkeit zu erkennen, weswegen die genutzte Theorie für weitere Analysen verwendet werden kann.

3.5 Grenzraumfrequenz zur Auflösung der Doppelstruktur

3.5.1 Theoretische Vorhersage

Zuletzt wird nun die Grenzraumfrequenz k_y bestimmt, bei welcher sich die Struktur des Doppelspaltes auflöst. Jene ist in y -Richtung folgendermaßen definiert:

$$k_y = \frac{2\pi n}{d} \quad \Delta k_y = k_y \sqrt{\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2} \quad (44)$$

Durch variieren des Faktors n erhält man dessen passenden Wert und sieht, dass bei $n = 0,31 \pm 0,005$ die Doppelstruktur nicht mehr erkennbar ist (Szenario b).

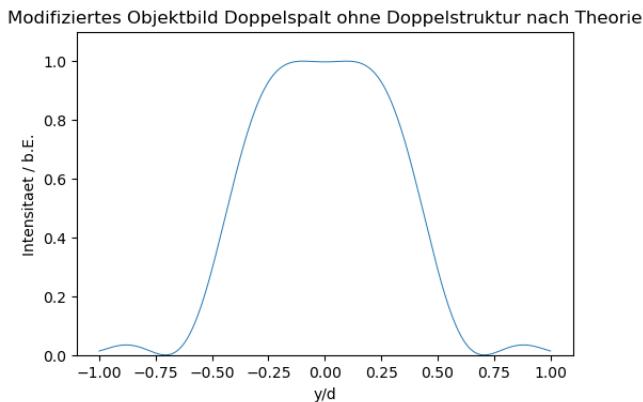


Diagramm 13: Modifiziertes Objektbild Doppelspalt ohne Doppelstruktur nach Theorie bestimmt

Setzt man diesen Wert nun mit den anderen schon bekannten Größen in die obige Formel ein, so erhält man

$$k_{yb,\text{theo}} = \frac{(8,3 \pm 0,4)}{\underline{\underline{\text{mm}}}} \quad (45)$$

Szenario a ist, wenn die Doppelstruktur gut erkennbar ist; also bei $n = 1$. Man setzt wieder ein und erhält:

$$k_{ya,\text{theo}} = \frac{(26,6 \pm 1,1)}{\underline{\underline{\text{mm}}}} \quad (46)$$

3.5.2 Experimentelles Ergebnis

Alternativ werden noch die gleichen Werte anhand der Messungen bestimmt. Man nutzt:

$$k_y = \frac{\pi d}{\lambda f} \quad \Delta k_y = k_y \frac{\Delta d}{d} \quad (47)$$

Der gemessene Spaltabstand muss allerdings noch verdoppelt werden, da die Messuhr nur die halbe Spaltbreite vermisst. Durch einsetzen der angepassten Spaltbreiten erhält man:

$$k_{ya, \text{Messung}} = (26 \pm 1, 1) \frac{1}{\text{mm}} \quad (48)$$

$$k_{yb, \text{Messung}} = (12, 4 \pm 0, 5) \frac{1}{\text{mm}} \quad (49)$$

Damit hat man eine σ -Abweichung von jeweils $\sigma_a = 0,4$ und $\sigma_b = 6,5$; letztere ist signifikant. Dazu dann mehr in der Diskussion

4 Zusammenfassung und Diskussion

Als erstes wurde das Beugungsbild des Einzelpaltes untersucht. Dazu wurde, nach Eichung der Skala, die Extrema des Beugungsbildes untersucht. Man erkennt, dass Minima und Maxima linear auftauchen; zwischen jedem der Extreme herrscht ziemlich genau der gleiche Abstand. Es ist allerdings zu bemerken, dass die Maxima dazu tendieren, leicht in Richtung der Minima derselben Ordnung zu liegen. Dies liegt vermutlich daran, dass das Bild nicht perfekt ist und die Minima durch die Kamera leicht nach aussen verzerrt werden.

Dennoch trifft der lineare Zusammenhang der Lage ganz gut zu; keine der Abweichung der bestimmten Lagen ist signifikant.

Daraufhin wurde die Spaltbreite bestimmt. Das hier bestimmte Ergebnis ($b = (210 \pm 1,7) \mu\text{m}$) ist weit vom Herstellerwert entfernt und, dank des nur kleinen Fehlers, mit einer Abweichung von $\sigma = 17,6$ versehen. Es liegt also ein Messfehler zugrunde. Vermutlich wurde die Messuhr zu ungenau abgelesen; durchaus plausibel, da wir in der Durchführung immer nur die Differenzen zwischen den Messungen notiert haben. Außerdem kann man nicht ganz vernünftig festmachen, ob nun ein Maximum verschwunden ist; da der Übergang hier ziemlich fließend ist; diese Fehlerquelle wird noch öfters auftauchen.

Nun wurden noch die Intensitäten der Maxima mit denen des Hauptmaximums bestimmt und mit den theoretischen Erwartungen verglichen. Hier weichen die Ergebnisse allerdings stark von der Literatur ab. Nur die Abweichung des Messwertes der geringsten Intensität ist nicht signifikant; dies liegt an dem relativ großen Fehler. Die sonstig so großen Abweichungen sind vermutlich der nicht-linearität der optischen Zeile der Kamera geschuldet, sowie ein **Defekter** Versuchsaufbau. Wie im Messprotokoll schon zu erkennen ist, ist keines der Bilder perfekt symmetrisch. In jedem Bild existiert ein Artefakt (gut zu sehen auf der rechten Seite) sehr vermutlich einer Masse im (Analysier-) Spalt, der ersten Linse, dem Strahlteiler oder ein Fettfleck o.ä. auf einem der letzten Beiden. Hierdurch könnten die Intensitäten variieren und somit ließen sich die (auch noch kommenden) Abweichungen gut erklären.

Hiernach wurde die Beugungsstruktur des Doppelpaltes untersucht. Nach Bestimmung des Spalt-Abstand-Verhältnisses ließ sich ein theoretisches Beugungsbild erstellen. Man erkennt, dass es sich um ein Einzelpaltpbild handelt,

mit zusätzlicher Interferenz; genau, wie man es erwarten würde. Daraufhin wurden erneut die Intensitätsverhältnisse bestimmt, wobei es nur einen Wert gab, der signifikant Abweicht. Diese Abweichung lässt sich vermutlich auf ein unbekanntes Fehlerhafte Teil zurückführen, oder wieder aufgrund der fehlerhaften Auflösung der CCD-Kamera (nur bis 80% der Skala verläuft diese Linear).

Daraufhin wurde nun das Objektbild des Einzelpaltes betrachtet und analysiert. Für die Fourier-Synthese wurde zuerst die Spaltbreite wieder vermessen, was uns dann auch einigermaßen gelungen ist. Mit jenem Wert ließen sich dann Fourier-Bilder erstellen an denen dann die gemessenen Daten verglichen worden sind. Hier lag dann offensichtlich ein systemischer Fehler vor. Das ist an denn konstant sehr großen σ -Abweichungen zu erkennen.

Die naheliegenste Vermutung ist, dass der Referenzwert für die Vergleiche zu klein sind. Dies wird deshalb vermutet, weil die Bilder im Messprotokoll vom ersten Versuchstag stammen; die Messdaten allerdings vom zweiten Tag. Außerdem wurde in den Messdaten nicht die Intensität der 0. Ordnung erfasst, weshalb dieser dann vom Bild aus dem Messprotokoll entnommen worden ist. Da die Intensitäten von Tag zu Tag nicht identisch sein können, wurde bei den Aufnahmen der Werte dann eine Andere Intensität vermessen, sodass die Verhältnisse zum Maximum 1. Ordnung nicht mehr stimmen. Hinzu kommt möglicherweise nochmals die nicht-linearität der Kamera. Außerdem kann es gut sein, dass wegen den zwei Terminen beim neu-justieren etwas anders war als zuvor, wodurch die Messungen nicht mit gleichen Voraussetzungen durchzuführen waren.

Vor allem bei den Objektbildern ist die obig erwähnte Anomalie nochmals gut zu erkennen.

Hiernach ist noch schnell das gleiche Verfahren mit dem Doppelspalt durchlaufen worden; mit zufriedenstellenden Ergebnissen.



Anhand dieser Messdaten ließen sich im Anschluss die Grenzraumfrequenzen bestimmen, bei denen die Struktur des Doppelpalts deutlich zu erkennen war und wann nicht mehr. Die experimentelle Bestimmung der GRF bei derer der Doppelspalt gut zu erkennen war ist gelungen; die andere GRF leider nicht. Hier ist die σ -Abweichung von $\sigma = 6,5$ signifikant, lässt sich aber leicht begründen. Der Übergang von von die Struktur zu erkennen war und wann nicht ist nicht eindeutig; somit kann die Messung nicht exakt durchgeführt werden, sowie der Fehler nicht gut abgeschätzt werden, weshalb jene Abweichung entsteht.



Pythonskript 233 Jan Kesting

January 16, 2022

1 Fourieroptik

1.0.1 Jan A. Kesting

```
[139]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.optimize as curve_fit
from scipy import odr
from scipy.integrate import quad
```

2 Einzelpunkt

Eichung

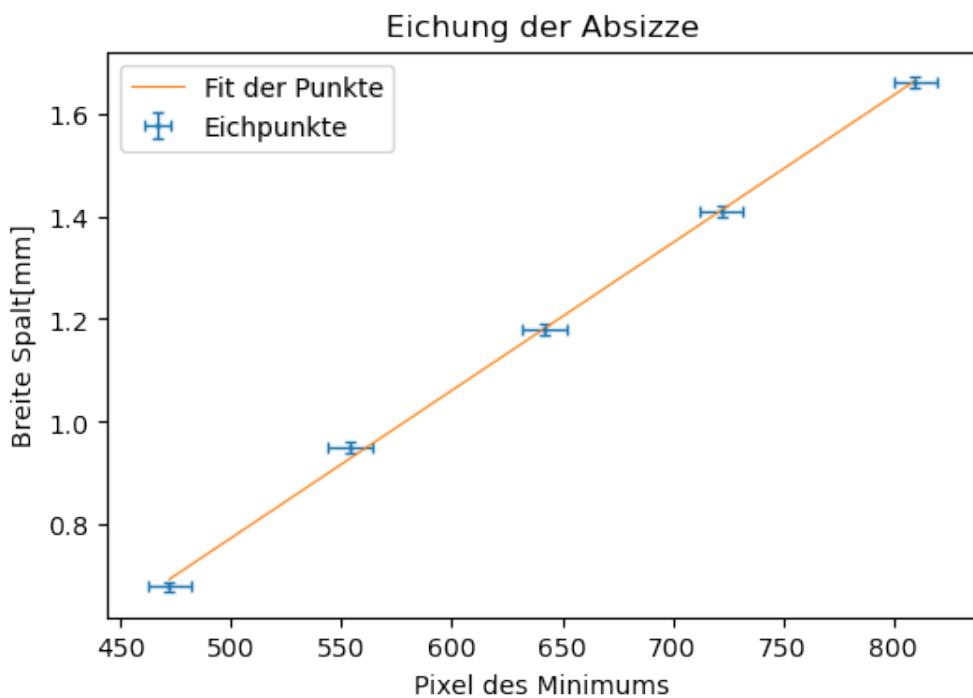
```
[140]: x=np.array([810,722,642,554,472])
y=np.array([1.66,1.41, 1.18, 0.95, 0.68])

x_err=np.zeros(5)+10
y_err=np.zeros(5)+0.01
```

```
[141]: #Für die Gerade
def fit_func(p,x):
    return p[0]*x+p[1]
quad_model = odr.Model(fit_func)
data = odr.RealData(x, y, sx=x_err, sy=y_err)
out = odr.ODR(data, quad_model, beta0=[2., 1.]).run()
popt = out.beta
perr = out.sd_beta
q=popt[0]
a=popt[1]
delta_q=perr[0]
delta_a=perr[1]
print('Steigung:', q, 'Fehler:', delta_q)
print('Achsenabschnitt:', a, 'Fehler:', delta_a)
```

Steigung: 0.0028694191683439397 Fehler: 5.4948227993006774e-05
Achsenabschnitt: -0.6604282676786701 Fehler: 0.03577282176617724

```
[142]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.errorbar(x,y, xerr=x_err, yerr=y_err, fmt='.', markersize=2, linewidth=1,capsize=2,label='Eichpunkte')
plt.plot(x, fit_func(popt, x), linewidth=0.75,label='Fit der Punkte')
plt.title('Eichung der Absizze')
plt.xlabel('Pixel des Minimums')
plt.ylabel('Breite Spalt[mm]')
plt.legend()
plt.savefig('233_4.pdf', format='PDF')
```



```
[143]: ordnung=np.arange(1,6,1)
maxi=np.array([774,687,602,519,438])
mini=np.array([810,722,642,554,472])

#maxi=np.array([438,519,602,687,774])
#mini=np.array([472,554,642,722,810])

err_pos=np.zeros(5)+10

quad_model = odr.Model(fit_func)
data = odr.RealData(ordnung, mini, sy=err_pos)
out = odr.ODR(data, quad_model, beta0=[2., 1.]).run()
popt_2 = out.beta
```

```

perr_2 = out.sd_beta
q_2=popt_2[0]
a_2=popt_2[1]
delta_q_2=perr_2[0]
delta_a_2=perr_2[1]
print('Steigung m:', q_2, 'Fehler:', delta_q_2)
print('Achsenabschnitt b:', a_2, 'Fehler:', delta_a_2)

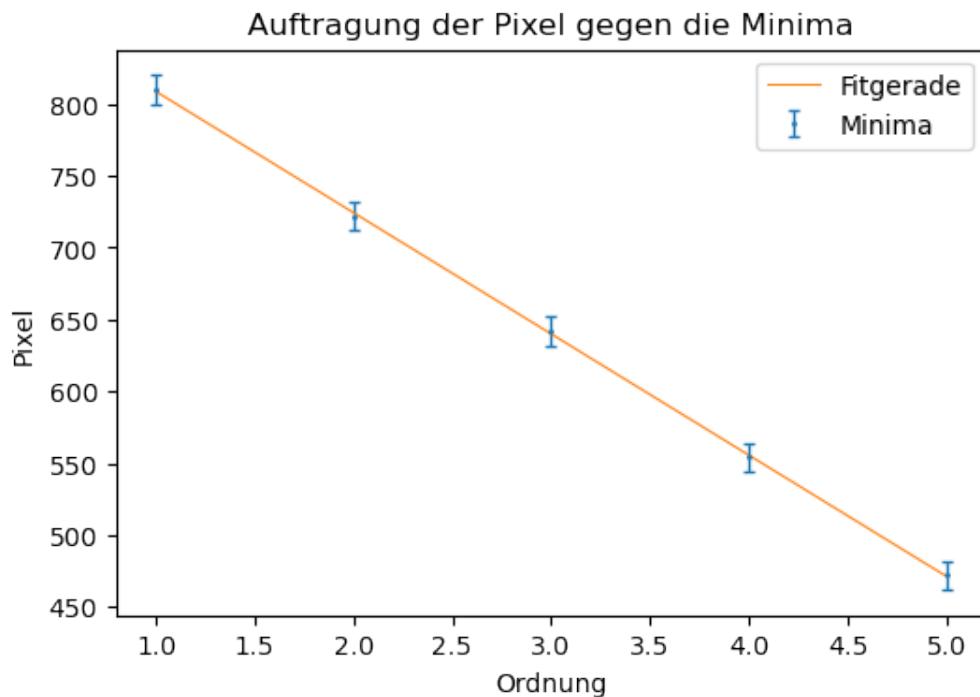
```

Steigung m: -84.41682541664336 Fehler: 0.6929566476662021
 Achsenabschnitt b: 893.2504761957903 Fehler: 2.298236104164254

```

[144]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.errorbar(ordnung,mini, yerr=err_pos,fmt='.
˓→',markersize=2,linewidth=1,capsize=2, label='Minima')
plt.plot(ordnung,fit_func(popt_2, ordnung), linewidth=0.75, label='Fitgerade')
plt.xlabel('Ordnung')
plt.ylabel('Pixel')
plt.legend()
plt.title('Auftragung der Pixel gegen die Minima')
plt.savefig('233_5.pdf', format='PDF')

```



```

[145]: n=(maxi-a_2)/q_2
err_n=np.sqrt((err_pos/a_2)**2+(delta_a_2/q_2)**2+((n*delta_q_2)/q_2)**2)
print('Maxima n:', n)

```

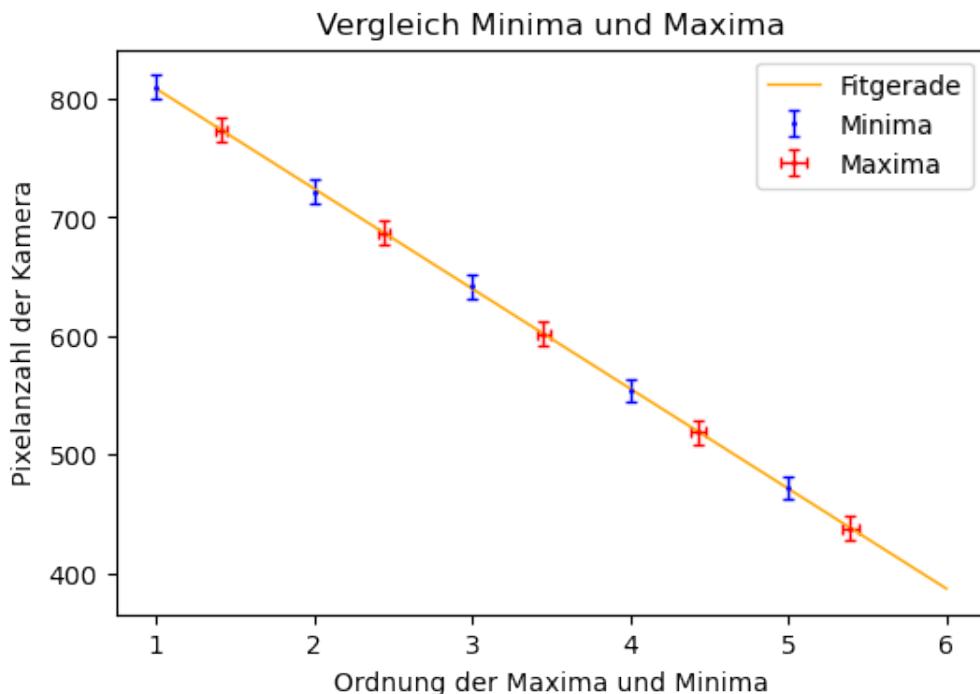
```
print('Fehler von n:',err_n)
```

```
Maxima n: [1.41263872 2.44323895 3.45014723 4.43336354 5.3928879 ]  
Fehler von n: [0.03163842 0.0356197 0.04084879 0.04680734 0.05316254]
```

```
[146]: n_pi=n*np.pi  
n_pi_err=err_n*np.pi  
  
print('Maxima n mit pi:',n_pi)  
print('Fehler von n mit pi:',n_pi_err)
```

```
Maxima n mit pi: [ 4.43793542 7.67566155 10.83895718 13.92782234 16.942257 ]  
Fehler von n mit pi: [0.09939503 0.11190259 0.12833027 0.14704961 0.16701504]
```

```
[147]: fig=plt.figure(dpi=100)  
ordnung_2=np.arange(1,7,1)  
plt.errorbar(ordnung,mini,yerr=err_pos, color='b',fmt='-' .  
             _' ',markersize=2,linewidth=1,capsize=2,label='Minima')  
plt.errorbar(n,maxi,xerr=err_n,yerr=err_pos,color='r',fmt='-' .  
             _' ',markersize=2,linewidth=1,capsize=2,label='Maxima')  
plt.  
    _plot(ordnung_2,fit_func(popty_2,ordnung_2),color='orange', linewidth=1, label='Fitgerade')  
plt.xlabel('Ordnung der Maxima und Minima')  
plt.ylabel('Pixelanzahl der Kamera')  
plt.title('Vergleich Minima und Maxima')  
plt.legend()  
plt.savefig('233_6.pdf', format='PDF')
```



```
[148]: sinc_T=np.array([4.49,7.73,10.9,14.07,17.22])
sigma=np.abs(sinc_T-(n_pi))/(n_pi_err)
print('Die Sigma-Umgebung der gemessenen Werte im Vergleich zur Theorie sind:
      ',sigma)
```

Die Sigma-Umgebung der gemessenen Werte im Vergleich zur Theorie sind:
[0.52381468 0.48558707 0.47566965 0.96686871 1.66298199]

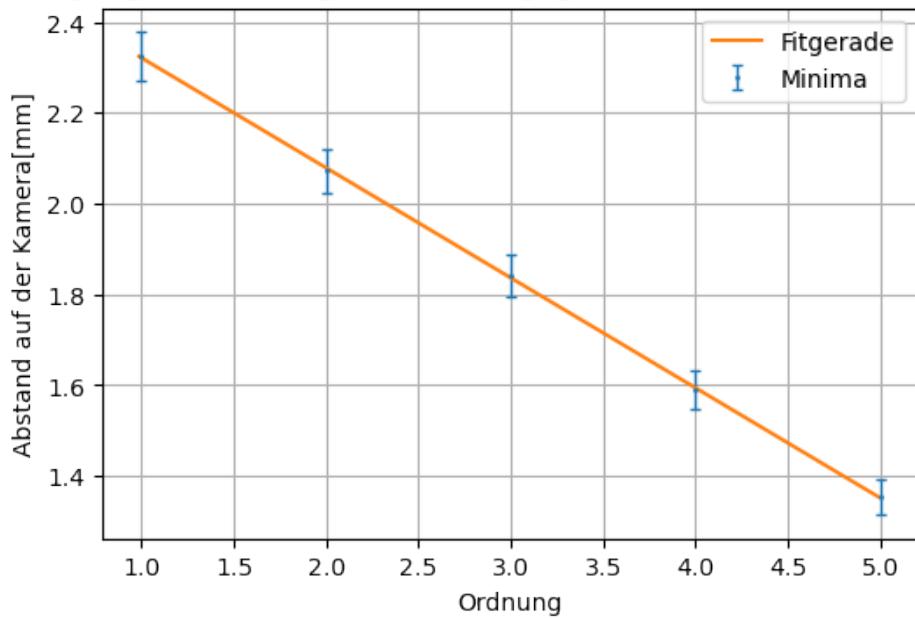
Spaltbreite

```
[149]: lmbda= 635e-9
f=0.08
```

```
[150]: ordnung=np.arange(1,6,1)
mini_2=mini*q
err_pos_2=mini_2*np.sqrt((err_pos/mini)**2+(delta_q/q)**2)
quad_model = odr.Model(fit_func)
data = odr.RealData(mini_2,ordnung ,sx=err_pos_2)
out = odr.ODR(data, quad_model, beta0=[2., 1.]).run()
popt_3 = out.beta
perr_3 = out.sd_beta
q_3=popt_3[0]
a_3=popt_3[1]
delta_q_3=perr_3[0]
delta_a_2=perr_3[1]
fig=plt.figure(dpi=100)
plt.errorbar( ordnung,mini_2, yerr=err_pos_2,fmt='.
      ',markersize=2,linewidth=1,capsize=2,label='Minima')
plt.plot(fit_func(popt_3,mini_2),mini_2,label='Fitgerade')
plt.xlabel('Ordnung')
plt.ylabel('Abstand auf der Kamera[mm]')
plt.title('Auftragung der Ordnung der Minima gegen den Abstand auf der Kamera')
plt.grid()
plt.savefig('233_7.pdf', format='PDF')
plt.legend()
print('Steigung q=', q_3, 'Fehler:', delta_q_3 )
```

Steigung q= -4.12848445316994 Fehler: 0.03387537669031899

Auftragung der Ordnung der Minima gegen den Abstand auf der Kamera



```
[151]: d=lmbda*f**-q_3
delta_d=lmbda*f*delta_q_3
print('Spaltbreite d=' ,d, ' +- ',delta_d,' [m]')

d_lit=240*10**(-9)
sigma=np.abs(d_lit-d)/delta_d
print('Sigma-Abweichung Spaltbreite:',sigma)
```

Spaltbreite d= 2.0972701022103295e-07 +- 1.7208691358682045e-09 [m]
Sigma-Abweichung Spaltbreite: 17.591686170659283

Intensitätsverhältnis

```
[152]: I_1=np.array([3680,374]) #Max. 0. und 1. Ordnung bei geringer Intensität (b.E.)
#I_2=np.array([239,348,567,1147,3130])
I_2=np.array([3130,1147,567,348,239])
err_I=10
u_I_1=93
u_I_2=99
err_u_I=10
I_1_c=I_1-u_I_1
I_2_c=I_2-u_I_2
err_I_c=np.sqrt(5**2+10**2)
```

```
[153]: v_0=1
delta_v_0=v_0*np.sqrt(2*(err_I_c/I_1_c[0])**2)
```

```

v_1=I_1_c[1]/I_1_c[0]
delta_v_1=v_1*np.sqrt((err_I_c/I_1_c[1])**2+(err_I_c/I_1_c[0])**2)
print('Verhältnis 1 zu 0:', v_1, 'Fehler:', delta_v_1)

```

Verhältnis 1 zu 0: 0.07833844438249234 Fehler: 0.0031264549191112427

```

[154]: v_2=v_1*(I_2_c[1]/I_2_c[0])
delta_v_2=v_2*np.sqrt((delta_v_1/v_1)**2+(err_I_c/I_2_c[1])**2+(err_I_c/
↪I_1_c[1])**2)

v_3=v_1*(I_2_c[2]/I_2_c[0])
delta_v_3=v_3*np.sqrt((delta_v_1/v_1)**2+(err_I_c/I_2_c[2])**2+(err_I_c/
↪I_1_c[1])**2)

v_4=v_1*(I_2_c[3]/I_2_c[0])
delta_v_4=v_4*np.sqrt((delta_v_1/v_1)**2+(err_I_c/I_2_c[3])**2+(err_I_c/
↪I_1_c[1])**2)

v_5=v_1*(I_2_c[4]/I_2_c[0])
delta_v_5=v_5*np.sqrt((delta_v_1/v_1)**2+(err_I_c/I_2_c[4])**2+(err_I_c/
↪I_1_c[1])**2)

v_i0=np.array([v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5])
delta_v_i0=np.array([delta_v_0, delta_v_1, delta_v_2, ↪
↪delta_v_3,delta_v_4,delta_v_5])

#v_i0=np.array([v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_0])
#delta_v_i0=np.array([delta_v_5, delta_v_4, delta_v_3, ↪
↪delta_v_2,delta_v_1,delta_v_0])

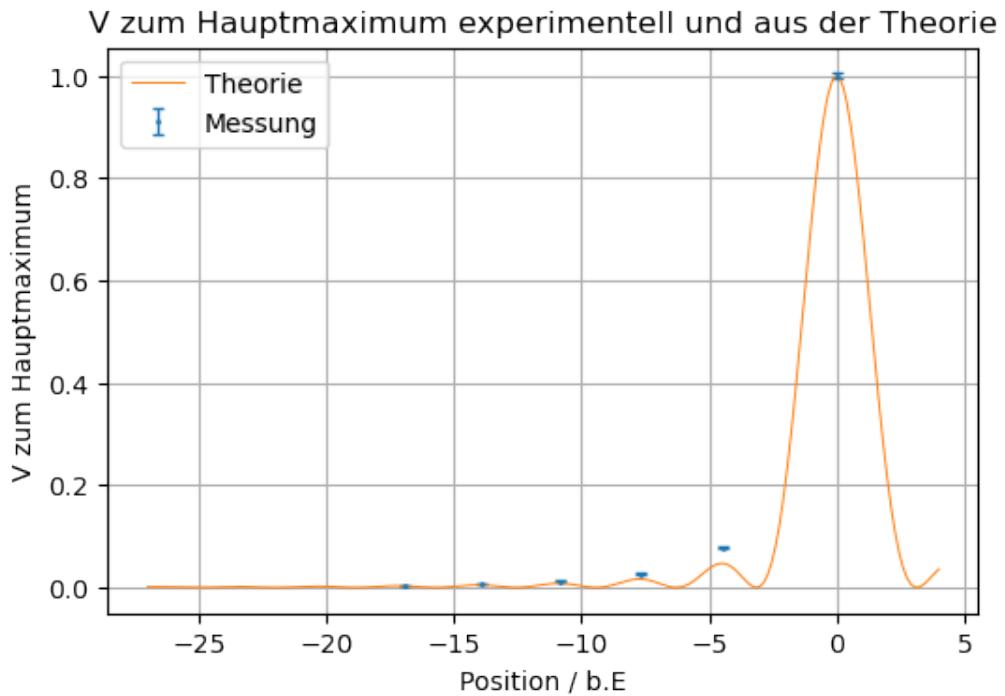
```

```

[155]: fig=plt.figure(dpi=100)
maxima=-np.append([0],n*np.pi)
plt.errorbar(maxima, v_i0, yerr=delta_v_i0, fmt='.', markersize=2, linewidth=1, ↪
↪capsize=2, label='Messung')
x=np.linspace(-27,4,200)
plt.plot(x, np.sinc(x/np.pi)**2, label = "Theorie", linewidth=0.7)
plt.legend()
plt.title('V zum Hauptmaximum experimentell und aus der Theorie')
plt.ylabel('V zum Hauptmaximum')
plt.xlabel('Position / b.E')
plt.grid()
plt.savefig('233_8.pdf', format='PDF')
print('Theoretische der sinc$^2$.Funktion:', maxima)

```

Theoretische der sinc\$^2\$.Funktion: [-0. -4.43793542 -7.67566155
-10.83895718 -13.92782234
-16.942257]



```
[156]: theo = np.sinc(maxima/np.pi)**2
print('Theo:',theo)
print('Messung:',v_i0)
print('Fehler:',delta_v_i0)
print('Sigma(Maxima ab 0. Ordnung):',np.abs(theo-v_i0)/delta_v_i0)

Theo: [1.          0.04704417  0.01643936  0.00830478  0.00493242  0.00310401]
Messung: [1.          0.07833844  0.02708634  0.01209581  0.00643559  0.0036184 ]
Fehler: [0.00440797  0.00312645  0.00155355  0.00074037  0.00046372  0.00035367]
Sigma(Maxima ab 0. Ordnung): [ 0.          10.00950834   6.8533281    5.12042249
 3.24157293   1.45444726]
```

3 Doppelspalt

```
[157]: #aus versuchsteil 4 zu entnehmen
d=1116-789 #pixel
b_1=854-727
b_2=1179-1049
b=(b_1+b_2)/2
err_b=5
err_d=np.sqrt(2*(5**2)) #5 entspricht unserem Ablesefehler bei den pixeln
v=d/b
delta_v=v*np.sqrt((err_d/d)**2+(err_b/b)**2)
```

```
print('Das Verhältnis beträgt',v,'+-',delta_v)
```

Das Verhältnis beträgt 2.544747081712062 +- 0.11328062356071988

```
[158]: I_1=np.array([3360,2370,500])
I_2=np.array([2750,905,935,220])
delta_I=10
ug_1=90
ug_2=89
delta_ug=10
I_1_c=I_1-ug_1
I_2_c=I_2-ug_2
delta_I_c=np.sqrt((delta_I)**2+(delta_ug)**2)
```

```
[159]: v_0=1
v_0_err=v_0*np.sqrt(2*(delta_I_c/I_1_c[0])**2)

v_1=I_1_c[1]/I_1_c[0]
v_1_err=v_1*np.sqrt((delta_I_c/I_1_c[0])**2+(delta_I_c/I_1_c[1])**2)

v_2=I_1_c[2]/I_1_c[0]
v_2_err=v_2*np.sqrt((delta_I_c/I_1_c[0])**2+(delta_I_c/I_1_c[2])**2)

v_3=(I_2_c[1]/I_2_c[0])*v_2
v_3_err=v_2*np.sqrt((delta_I_c/I_2_c[1])**2+(delta_I_c/I_2_c[0])**2+(v_2_err/
˓→v_2)**2)

v_4=(I_2_c[2]/I_2_c[0])*v_2
v_4_err=v_3*np.sqrt((delta_I_c/I_2_c[2])**2+(delta_I_c/I_2_c[0])**2+(v_2_err/
˓→v_2)**2)

v_5=(I_2_c[3]/I_2_c[0])*v_2
v_5_err=v_3*np.sqrt((delta_I_c/I_2_c[3])**2+(delta_I_c/I_2_c[0])**2+(v_2_err/
˓→v_2)**2)

v_i0=np.array([v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5])
delta_v_i0=np.array([delta_v_0, delta_v_1, delta_v_2, delta_v_3, delta_v_4, u
˓→delta_v_5])

print('Messung:',v_i0)
print('Fehler', delta_v_i0)
#print(np.sinc(I_2/pi)**2)
```

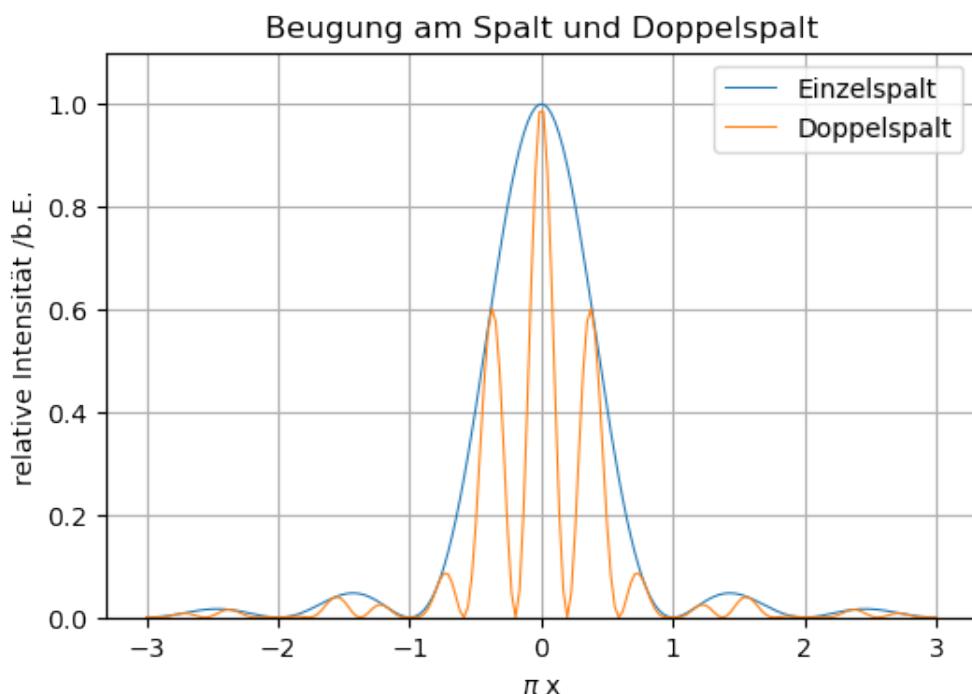
Messung: [1. 0.69724771 0.12538226 0.03844868 0.03986223 0.00617252]
Fehler [0.00440797 0.00312645 0.00155355 0.00074037 0.00046372 0.00035367]

```
[160]: def beugung_spalt(x):
        return np.sinc(x)**2
```

```

def beugung_doppelspalt(x):
    return np.sinc(x)**2*np.cos(np.pi*x*v)**2
a=1
x=np.linspace(-(a+2),a+2,200)
fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(x,beugung_spalt(x),label='Einzelspalt',linewidth=0.75)
plt.plot(x,beugung_doppelspalt(x),label='Doppelspalt',linewidth=0.75)
plt.xlabel('$\pi x$')
plt.ylabel('relative Intensität /b.E.')
plt.title('Beugung am Spalt und Doppelspalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.legend()
plt.grid()
plt.savefig('233_13.pdf', format='PDF')

```



```

[161]: #Intensitäten Theoretisch Doppelspalt
max_theo=np.array([0.98,0.6,0.09,0.03,0.04,0.02]) #aus obigem Diagramm ablesen
max_theo_err=np.zeros(6)+0.02

#Abweichung Maxima Doppelspalt
sigma=np.abs(v_i0-max_theo)/np.sqrt(max_theo_err**2+delta_v_i0**2)
print(sigma)

```

[0.97656273 4.80404189 1.76379996 0.42214465 0.00688664 0.69126591]

4 Einzelspalt (Fourierbild)

```
[187]: B=1106-983 #(Pixel)Spaltgröße  
err_B=np.sqrt(5**2 + 5**2)  
f=80 #Brennweite  
b=690 #Bildweite  
err_b=5  
G=B/((b/f)-1)  
err_G= np.sqrt((err_B/(b/f-1))**2+(err_b*B*f/(b-f)**2)**2)  
print(G)  
print(err_G)
```

16.131147540983605
0.9367319095218113

```
[188]: #Ein Pixel entspricht 14 \mu m  
G_real=14*G  
err_G_real=14*err_G  
print('Spaltbreite G:', G_real)  
print('Fehler:', err_G_real)  
  
sigma_spalt = np.abs(G_real - 240)/err_G_real  
print('sigma-Abweichung:', sigma_spalt)
```

Spaltbreite G: 225.83606557377047
Fehler: 13.114246733305357
sigma-Abweichung: 1.080041783128752

```
[189]: #Intensitätsvergleich  
I_0=3500  
I_1=np.array([3515,2757,3515]) #Spiegeln!  
I_2=np.array([3479,2973,3296,2973,3479])  
I_3=np.array([3432,3014,3318,2959,3318,3014,3432])  
err_I=20  
ug=93  
err_ug=10  
I_0_c=I_0-ug  
I_1_c=I_1-ug  
I_2_c=I_2-ug  
I_3_c=I_3-ug  
err_I_c=np.sqrt((err_I)**2+(err_ug)**2)
```

```
[190]: rel_1=I_1/I_0  
rel_2=I_2/I_0  
rel_3=I_3/I_0  
err_rel_1=rel_1*np.sqrt((err_I_c/I_1_c)**2+(err_I_c/I_0)**2)  
err_rel_2=rel_2*np.sqrt((err_I_c/I_2_c)**2+(err_I_c/I_0)**2)  
err_rel_3=rel_3*np.sqrt((err_I_c/I_3_c)**2+(err_I_c/I_0)**2)
```

```

print('Vergleich 1. Ordnung mit 0.:', rel_1)
print('Fehler:', err_rel_1)
print('Vergleich 1. und 2. Ordnung mit 0.:', rel_2)
print('Fehler:', err_rel_2)
print('Vergleich 1., 2. und 3. Ordnung mit 0.:', rel_3)
print('Fehler:', err_rel_3)

```

```

Vergleich 1. Ordnung mit 0.: [1.00428571 0.78771429 1.00428571]
Fehler: [0.0091778 0.00830916 0.0091778 ]
Vergleich 1. und 2. Ordnung mit 0.: [0.994      0.84942857 0.94171429 0.84942857
0.994      ]
Fehler: [0.0091333 0.00854079 0.00891167 0.00854079 0.0091333 ]
Vergleich 1., 2. und 3. Ordnung mit 0.: [0.98057143 0.86114286 0.948
0.84542857 0.948      0.86114286
0.98057143]
Fehler: [0.00907565 0.00858631 0.0089379 0.00852536 0.0089379 0.00858631
0.00907565]

```

```

[191]: Theo_1=np.array([0.906,0.586,0.906])
Theo_1_err=np.zeros(3)*0.001
Theo_2=np.array([0.885,0.618,0.818,0.618,0.885])
Theo_2_err=np.zeros(5)*0.001
Theo_3=np.array([0.876,0.629,0.797,0.650,0.797,0.629,0.876])
Theo_3_err=np.zeros(7)*0.001

sigma_1 = np.abs(Theo_1-rel_1)/np.sqrt(err_rel_1**2+Theo_1_err**2)
sigma_2 = np.abs(Theo_2-rel_2)/np.sqrt(err_rel_2**2+Theo_2_err**2)
sigma_3 = np.abs(Theo_3-rel_3)/np.sqrt(err_rel_3**2+Theo_3_err**2)
print(sigma_1)
print(sigma_2)
print(sigma_3)

```

```

[10.7090758 24.27613529 10.7090758 ]
[11.93434482 27.09685632 13.88227225 27.09685632 11.93434482]
[11.52219848 27.03637941 16.89434179 22.92321713 16.89434179 27.03637941
11.52219848]

```

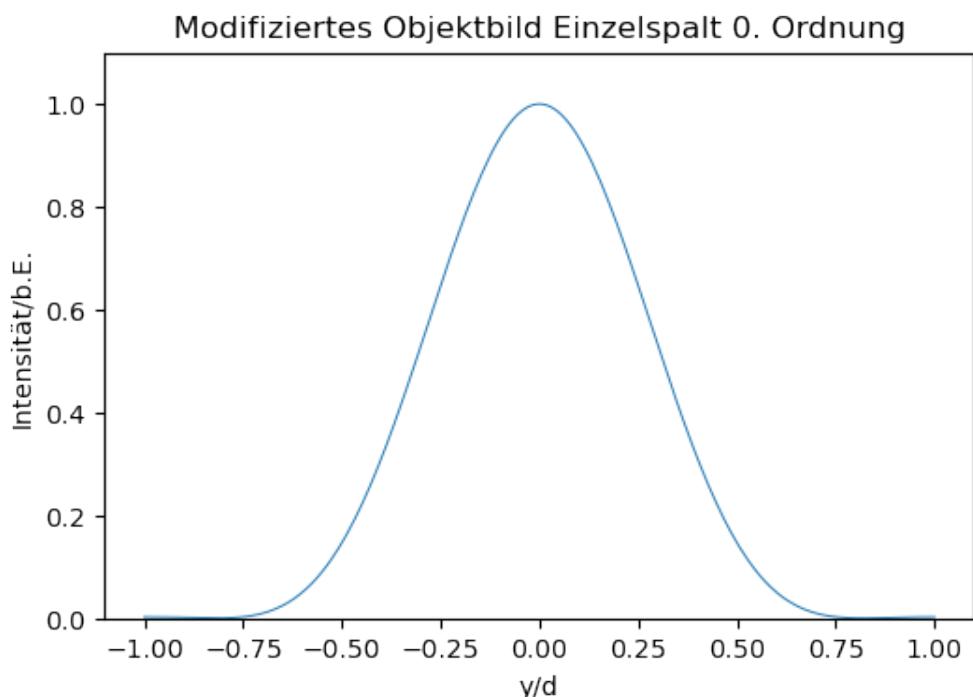
```

[192]: #theoretische Werte
def spalt(k,y):
    return d/np.pi*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=1 #Integrationsbereich
p=1.38976 #maximale Intensität bei 0. Beugungsordnung
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))

```

```
f_modifiziert.append((result**2)/p)
```

```
[193]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y,f_modifiziert,linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensität/b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Einzelspalt 0. Ordnung',)
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_19.pdf', format='PDF')
```



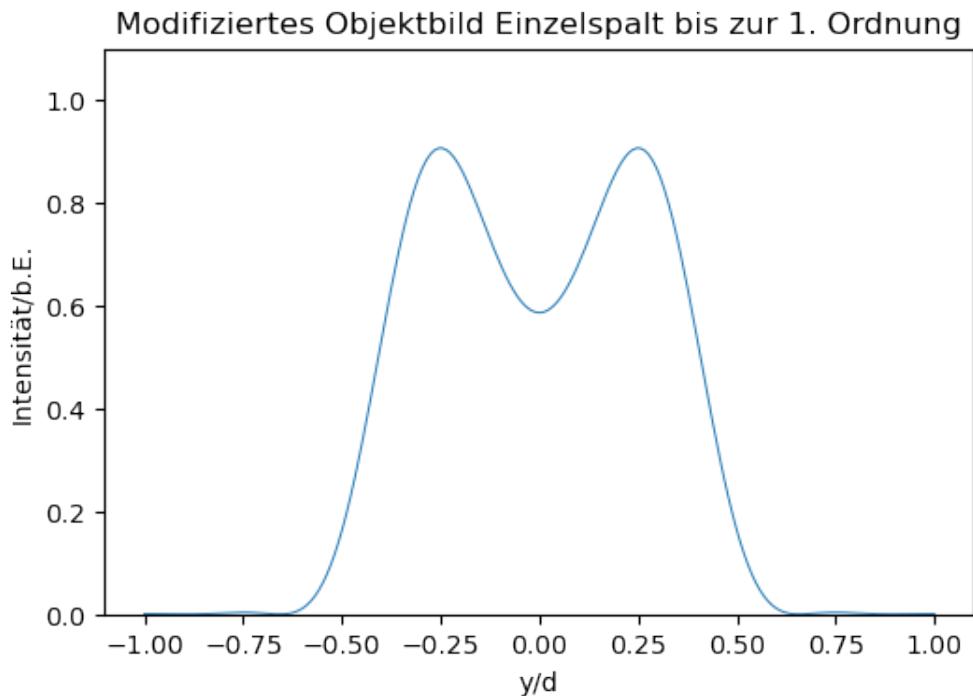
```
[194]: d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=2 #Integrationsbereich
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
p= 1.38976 #maximale Intensität bei 0. Beugungsordnung
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append((result**2)/p)
```

```
[195]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y,f_modifiziert,linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
```

```

plt.ylabel('Intensität/b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Einzelspalt bis zur 1. Ordnung',)
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_20.pdf', format='PDF')

```



```

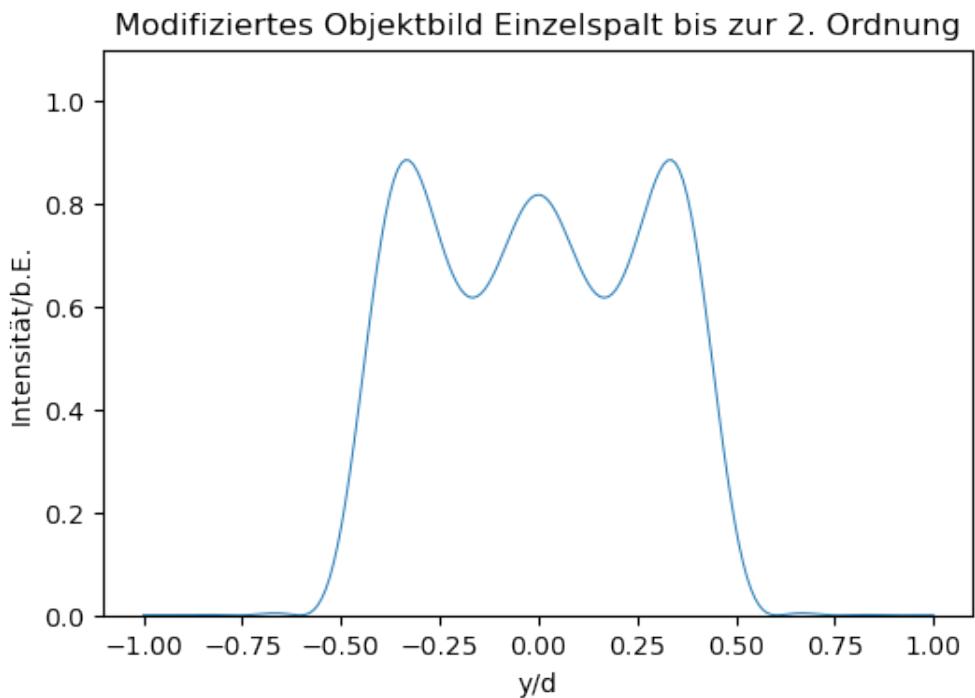
[196]: d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=3 #Integrationsbereich
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
p= 1.38976 #maximale Intensität bei 0. Beugungsordnung
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append((result**2)/p)

```

```

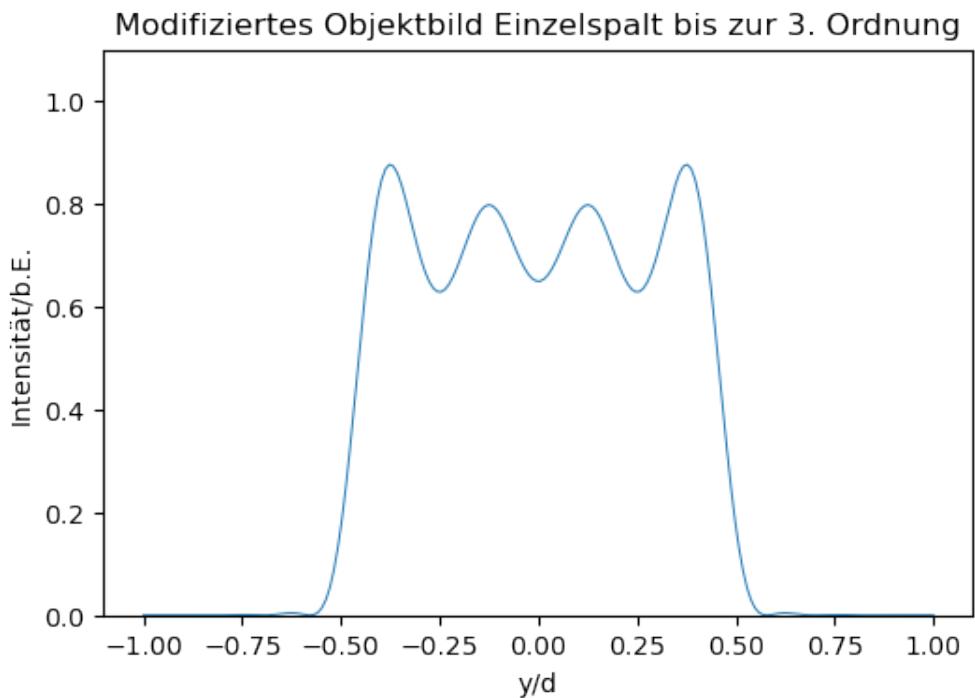
[197]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y,f_modifiziert,linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensität/b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Einzelspalt bis zur 2. Ordnung',)
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_21.pdf', format='PDF')

```



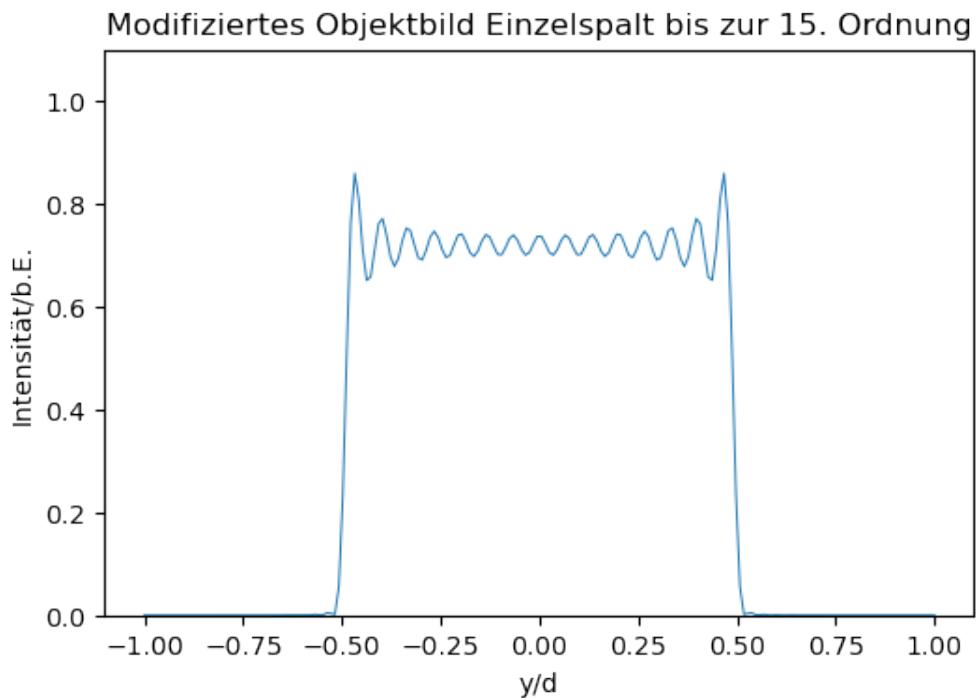
```
[198]: d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=4 #Integrationsbereich
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
p= 1.38976 #maximale Intensität bei 0. Beugungsordnung
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append((result**2)/p)
```

```
[199]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y,f_modifiziert,linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensität/b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Einzelpalt bis zur 3. Ordnung',)
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_29.pdf', format='PDF')
```



```
[200]: d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=15 #Integrationsbereich
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
p= 1.38976 #maximale Intensität bei 0. Beugungsordnung
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append((result**2)/p)
```

```
[201]: fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y,f_modifiziert,linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensität/b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Einzelspalt bis zur 15. Ordnung',)
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_30.pdf', format='PDF')
```



5 Doppelspalt (Fourierbild)

```
[202]: #Spaltbreite
B_1=854-727
B_2=1179-1049
B=(B_1+B_2)/2
delta_B=5

b=690 #Bildweite mm
delta_b=5

f=80

G=B/((b/f)-1)
delta_G=np.sqrt((delta_B/((b/f)-1))**2+(((B/f)*delta_b)/(((b/f)-1)**2))**2)
scale=14
G_real=scale*G
delta_G_real=scale*delta_G
print('Spaltbreite:', G_real)
print('Fehler:', delta_G_real)
spaltbreite=G_real
delta_spaltbreite=delta_G_real
```

```
Spaltbreite: 235.9344262295082
Fehler: 9.381809283753702
```

```
[204]: # Berechnung für den Spaltmittenabstand
B=1116-789
Delta_B=err_d=np.sqrt(2*(5**2))

b=690 #Bildweite mm
delta_b=5

f=80

G=B/((b/f)-1)
delta_G=(Delta_B/((b/f)-1))

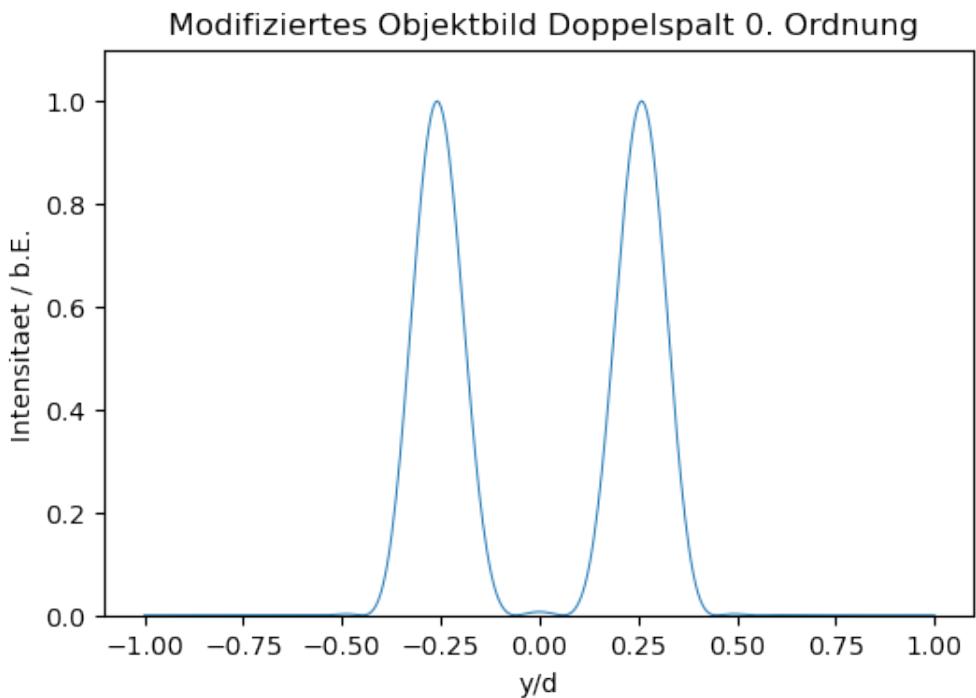
G_real=14*G
delta_G_real=scale*delta_G
print('Spaltmittenabstand:', G_real)
print('Fehler:', delta_G_real)
```

```
Spaltmittenabstand: 600.3934426229508
Fehler: 12.98294417916284
```

```
[179]: def doppelspalt(k,y):
    return d/np.pi*np.cos(k*g/2)*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
```

```
[180]: d=0.236 #Spaltbreite
g=2.177*d
n=1
Y=np.linspace(-1,1,400)
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(doppelspalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append(result**2)

f_modifiziert=f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y, f_modifiziert, linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Doppelspalt 0. Ordnung')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_24.pdf', format='PDF')
```



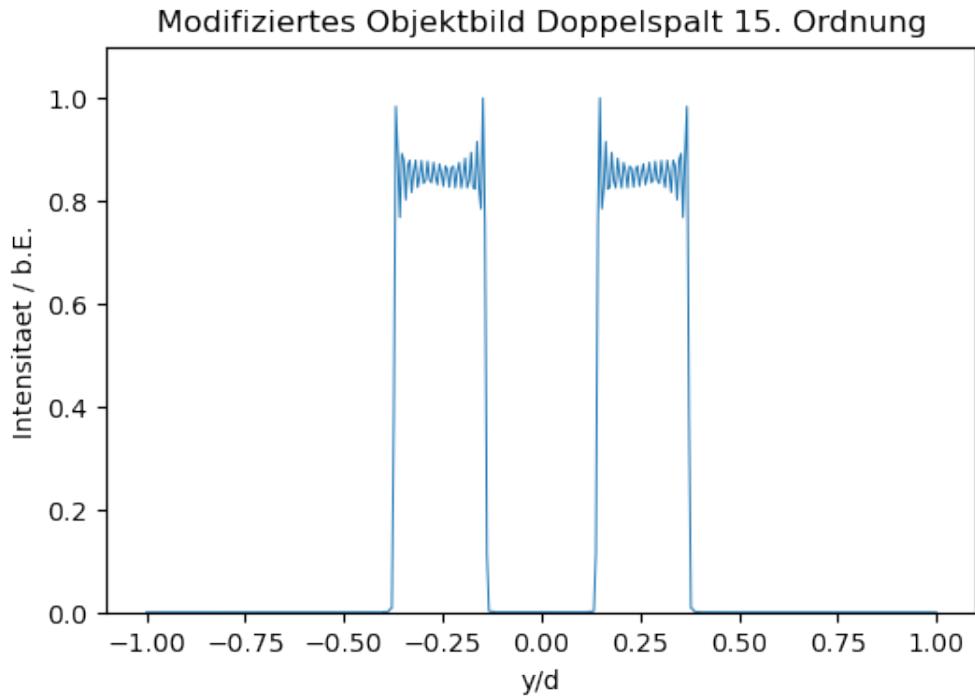
```
[181]: d=0.236
g=2.177*d
n=15
Y=np.linspace(-1,1,400)
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(doppelspalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append(result**2)

f_modifiziert=f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y, f_modifiziert, linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Doppelspalt 15. Ordnung')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_25.pdf', format='PDF')
```

<ipython-input-181-d0f273f090e7>:8: IntegrationWarning: The maximum number of subdivisions (50) has been achieved.

If increasing the limit yields no improvement it is advised to analyze the integrand in order to determine the difficulties. If the position of a local difficulty can be determined (singularity, discontinuity) one will

```
probably gain from splitting up the interval and calling the integrator
on the subranges. Perhaps a special-purpose integrator should be used.
result, error = quad(doppelspalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
```



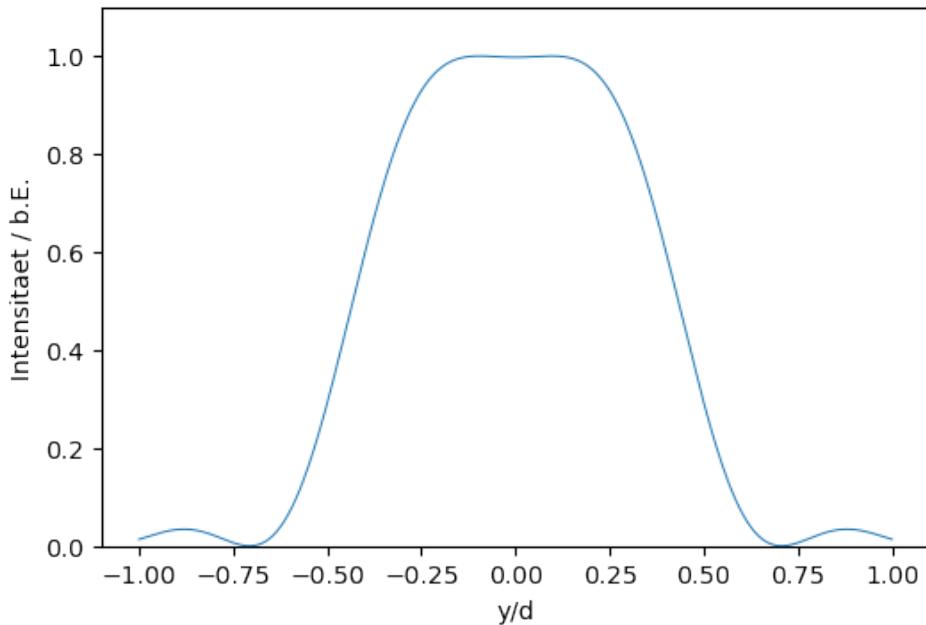
```
[182]: d=0.236
g=2.177*d
n=0.31
Y=np.linspace(-1,1,400)
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(doppelspalt, 0, 2*np.pi*n/d, args=(y,))
    f_modifiziert.append(result**2)

f_modifiziert=f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
fig=plt.figure(dpi=100)
plt.plot(Y, f_modifiziert, linewidth=0.7)
plt.xlabel('y/d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Modifiziertes Objektbild Doppelspalt ohne Doppelstruktur nach  
Theorie')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig('233_27.pdf', format='PDF')
```

```
print('n wurde abgeschätzt auf n=',n, 'mit einem Fehler von 0.005' )
```

n wurde abgeschätzt auf n= 0.31 mit einem Fehler von 0.005

Modifiziertes Objektbild Doppelspalt ohne Doppelstruktur nach Theorie



```
[183]: n=0.31
delta_n=0.005
k_yb=2*n*np.pi/(spaltbreite*10**(-6))
k_ya=2*np.pi/(spaltbreite*10**(-6))
delta_k_yb=k_yb*np.sqrt((delta_n/n)**2+(delta_spaltbreite/spaltbreite)**2)
delta_k_ya=k_ya*np.sqrt((0/n)**2+(delta_spaltbreite/spaltbreite)**2)
print('Theoretisches k_yb:', k_yb, 'Fehler:', delta_k_yb)
print('Theoretisches k_ya:', k_ya, 'Fehler:', delta_k_ya)
```

Theoretisches k_yb: 8255.63050019219 Fehler: 354.25788612661785

Theoretisches k_ya: 26631.066129652223 Fehler: 1058.9704412546714

```
[184]: d_a=0.21
d_a_err=0.01
d_b=0.1
d_b_err=0.01

ky_a_exp= (2*np.pi*d_a)/(lmbda*f)
ky_a_exp_err = ky_a_exp*d_a_err/d
ky_b_exp= (2*np.pi*d_b)/(lmbda*f)
ky_b_exp_err = ky_b_exp*d_b_err/d
```

```
print('ky_a:',ky_a_exp,'+-',ky_a_exp_err)
print('ky_b:',ky_b_exp,'+-',ky_b_exp_err)

sigma_a = np.abs(k_ya-ky_a_exp)/np.sqrt(delta_k_ya**2+ky_a_exp_err**2)
sigma_b = np.abs(k_yb-ky_b_exp)/np.sqrt(delta_k_yb**2+ky_b_exp_err**2)

print('sigma-Abweichung:',sigma_a)
print('sigma-Abweichung:',sigma_b)
```

```
ky_a: 25973.797529679392 +- 1100.58464108811
ky_b: 12368.475014133044 +- 524.0879243276714
sigma-Abweichung: 0.4303412527185505
sigma-Abweichung: 6.501622697287572
```

```
[ ]:
```