ZUSAMMENFASSUNG
MATHE

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Analysis III

WS 21/22, Albers

Juan
mit Hilfe von:
Jonna

25. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

0. Extras

0.1 Einleitung

0.1.1 Andere Projekte:

Theo I Guide

Theo II Guide

Theo III Guide

Ana I Zusammenfassung

LA I Zusammenfassung

Ex I Formelsammlung

Ex II Formelsammlung

Ex III Formelsammlung

1. Definitionen und so

1.0 Motivation

Wir möchten eine Definition für ein Volumen finden, was sich wie ein Volumen verhält, das heißt für eine Abbildung

$$\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$$

muss gelten:

1. $\mathrm{vol}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{vol}([0,1]^3) = 1$
2. $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ paarweise disjunkt, $k \in \mathbb{N}$

   $\implies \mathrm{vol}(X_1 \cup \cdots \cup X_k) = \mathrm{vol}(X_1) + \cdots + \mathrm{vol}(X_k)$
3. "Invarianz unter Bewegungen"

   $\mathrm{vol}(\underbrace{AX + v}_{:=\{Ax+v \mid x \in X\}}) = \mathrm{vol}(X) \qquad \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3),\ \forall A \in O(3),\ \forall v \in \mathbb{R}^3$

Banach-Tarski sagt aber nein, unmöglich. Das motiviert uns einen anderen Weg zu finden, Objekten (Mengen) ein Maß zuzuordnen. Das geht bei der Maßtheorie weiter.

1.1 Maßtheorie

1.1.0 Definitionen und Notation

1. Komplement: $A^C := X \backslash A$
2. Geometrische Differenz: $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
3. Für eine Folge A_n in $\mathcal{P}(X)$ sei:

   $$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)^C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^C$$

   $$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

   $$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

   Indikator / Charakteristische Funktion: $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

   Diese Indikatorfunktion nimmt einen Wert x und sagt dir, ob dieser Wert in deiner Menge A liegt. Falls ja kriegst du ein 1, falls nein kriegst du ein 0. Analog zu Computern und Programmiersprachen ist das eine Art "boolean".

   Es gelte:

   - $\mathbb{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$: Falls x in A oder in B liegt, dann liegt es in der Vereinigung.
   - $\mathbb{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$: x muss in sowohol A als auch B sein, damit er sich im Schnitt befindet.
   - $\mathbb{1}_{A^C} = 1 - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A$: Falls x im Komplement von A, dann ist $\mathbb{1}_A = 0$, also $\mathbb{1}_{A^C} = 1$ usw.
   - ...
   - (A_n) ist monoton steigend, falls jede Teilmenge $A_i \subset A_{i+1}$. Dann gilt:

     $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n = \liminf\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Wir schreiben $A_n \uparrow B := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Analog für monoton fallend mit Richtungen $\supset$, $\bigcap$, $\downarrow$

1.1.1 Ringe, Algebren und Sigma-Algebren

Ring *Definition 1.1*

Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, falls

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

Ein Ring ist eine Algebra, wenn zusätzlich $X \in \mathcal{A}$.

σ-Algebra *Definition 1.2*

Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra falls:

1. $\mathcal{E}$ eine Algebra ist
2. Für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{E}$, ist auch $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$, d.h., der "Limes" der Folge ist in $\mathcal{E}$.

Es gilt:

$\mathcal{E}$ ist eine σ-Algebra genau dann, wenn

1. Leere Menge: $\emptyset \in \mathcal{E}$
2. Komplement: $A \in \mathcal{E} \implies A^C \in \mathcal{E}$
3. Abzählbare Vereinigungen: $A_n \in \mathcal{E} \implies \bigcup A_n \in \mathcal{E}$

Erzeugte σ-Algebra

Sei X eine Menge und $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$, dann ist

$$\sigma(\mathcal{K}) := \bigcap \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{K} \subset \mathcal{E}\} \tag{1.1.1}$$

die von $\mathcal{K}$ erzeugte σ-Algebra, die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält.

Borel-σ-Algebra *Definition 1.3*

Es sei (E, d) ein metrischer Raum,

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset E \,|\, U \text{ offen bzgl. } d\} \tag{1.1.2}$$

die von d erzeugte Topologie auf E. Dann ist $\sigma(\mathcal{T}_d)$ die Borel-σ-Algebra von E $\mathcal{B}(E) \equiv \mathcal{B}(E, d)$.

Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{J})$ mit

$$\mathcal{J} := \{[a, b) \subset \mathbb{R} \,|\, a \leq b\} \tag{1.1.3}$$

ist gleich der Borell-Algebra $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, weil jeder offene Intervall kann als unendliche Vereinigung halboffener Intervalle gebildet werden, also liegen alle offene Intervalle in $\sigma(\mathcal{J})$, und jeder halboffene Intervall kann als unendlicher Schnitt offener Intervalle gebildet werden, und diese liegen in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.1.2 Additive und Sigma-Additive Funktionen

Voraussetzungen

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring,

$A, B \in \mathcal{A}$ und

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$.

Additivität *Definition 1.4*

μ heißt additiv, falls für $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \tag{1.1.4}$$

σ-Additivität *Definition 1.4, Satz 1.6*

μ heißt σ-additiv, falls für alle paarweise disjunkte Folgen $(A_n) \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.1.5}$$

Eine äquivalente Definition ist, dass für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A_n \uparrow A \implies \mu(A_n) \uparrow \mu(A) \tag{1.1.6}$$

Diese Definition ist ähnlich zu der "Stetigkeitsbedingung".

Für alle σ-additive  gilt außerdem, falls

$$A_n \downarrow A \text{ und } A \in \mathcal{A} \tag{1.1.7}$$

$$\mu(A_0) < \infty \implies \mu(A_n) \downarrow \mu(A) \tag{1.1.8}$$

σ-Subadditivität

μ heißt σ-Subadditivität, falls für $B \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ gilt:

$$\mu(B) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.1.9}$$

Beziehungen *Lemma 1.5*

- Ist μ σ-additiv, dann automatisch auch σ-subadditiv.
- Ist μ additiv und σ-subadditiv, dann auch σ-additiv.

Borell-Cantelli Lemma *Lemma 1.9*

Für alle Folgen $(A_n) \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) < \infty \implies \mu(\limsup(A_n)) = 0 \tag{1.1.10}$$

Voraussetzungen

$\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ σ-additiv
$\mathcal{E}$ eine σ-Algebra

1.1.3 Messbare Räume und Maßräume

Voraussetzungen

Sei X eine Menge,

$\mathcal{E}$ eine σ-Algebra und

$\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ σ-additiv.

Messbarer Raum *Definition 1.10*

Das Paar $(X, \mathcal{E})$ heißt messbarer Raum. Mengen in $\mathcal{E}$ heißen messbare Mengen.

Maßraum *Definition 1.10, 1.11*

μ heißt ein Maß, und das Triplet $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ist ein Maßraum.

- Ein Maß / Maßraum heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$
- Ein Maß / Maßraum heißt σ-endlich, falls es eine Folge (A_n) in $\mathcal{E}$ existiert, mit:

$$X = \bigcup A_n, \ \mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1.11}$$

  Das heißt, die Menge X lässt sich durch eine abzählbare Vereinigung von Mengen bilden, und jede dieser Mengen ein endliches Maß hat.

- Ein Maß mit

$$\mu(X) = 1 \tag{1.1.12}$$

  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß.

- Eine Menge $B \in \mathcal{E}$ mit $\mu(B) = 0$ heißt Nullmenge.
- Eine Eigenschaft $P(x)$, $x \in X$, ist μ-fast überall wahr, falls

$$\{x \in X \mid P(x) \text{ ist falsch}\} \tag{1.1.13}$$

  die Menge aller Werte x, für die $P(x)$ nicht gilt in einer Nullmenge enthalten ist.

Vervollständigung *Lemma/Definition 1.12*

$$\mathcal{E}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B, C \in \mathcal{E} \text{ mit } A \triangle B \subset C \text{ und } \mu(C) = 0\} \tag{1.1.14}$$

ist eine σ-Algebra. In der sind alle Mengen A enthalten, wessen geometrische Differenz mit einer Menge $B \in \mathcal{E}$ in einer Nullmenge enthalten ist. Sie hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_\mu$
2. Sei $\overline{\mu}(A) := \mu(B)$, so ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert und $\overline{\mu} : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ ist ein Maß.

Das Maßraum $(X, \mathcal{E}_\mu, \overline{\mu})$ heißt die Verfollständigung von $\mathcal{E}$ bzgl. μ.

In der neuen Konstruktion $\mathcal{E}_\mu$ sind fast nur neue Mengen enthalten.

1.1.4 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Carathéodory *Theorem 1.13*

Sei $\mathcal{A}$ ein Ring, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv. Dann kann μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden. Ist $\mathcal{A}$ σ-endlich, so ist diese Fortsetzung eindeutig.

Voraussetzungen

$\mathcal{A}$ ist ein Ring
$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ σ-additiv
$\mathcal{A}$ σ-endlich

π-System *Definition 1.14*

Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{K}$ heißt π-System, falls gilt

$$A, B \in \mathcal{K} \implies A \cap B \in \mathcal{K} \tag{1.1.15}$$

Dynkin-System *Definition 1.14, Theorem 1.15*

Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{D}$ heißt Dynkin-System, falls

1. $\emptyset, X \in \mathcal{D}$
2. $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$
3. $A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$ p.w. disjunkt $\implies \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$

- Ein Mengensystem ist eine σ-Algebra genau dann, wenn es ein Dynkin- und ein π-System ist.
- Sei $\mathcal{K}$ ein π-System mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$. Dann gilt: $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}$

Äußeres Maß *Definition 1.17, Proposition 1.18*

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathcal{A} \text{ und } E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right\} \tag{1.1.16}$$

das von μ induzierte äußere Maß.

Für $\mu(\emptyset) = 0$

- μ^* ist σ-subadditiv
- ist μ σ-subadditiv, so gilt $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

Theorem 1.21

Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additiv. Dann ist $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ und $\mu^*|_{\mathcal{G}}$ ist σ-additiv.

1.1.5 Das Lebesgue Maß auf IR

Setze

$$\mathcal{J} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \tag{1.1.17}$$

und

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{n=0}^{N} I_n \mid N \in \mathbb{N}, I_n \in \mathcal{J} \text{ für } n = 0, \ldots, N \right\} \cup \{\emptyset\} \tag{1.1.18}$$

λ-Maß *Lemma 1.22, Lemma 1.23, Theorem 1.25*

a) $\mathcal{A}$ ist ein Ring

b) $\forall A \in \mathcal{A} \; \exists I_1, \ldots, I_k \in \mathcal{J}$ p.w. disjunkt mit $A = \bigcup_{n=1}^{k} I_n$

Dabei gilt $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\lambda((a, b]) := b - a$. Für A nach b) gilt:

$$\lambda(A) := \sum_{n=0}^{k} \lambda(I_n) \tag{1.1.19}$$

Dieses Maß λ ist σ-additiv.

Translationsinvarianz *Definition 1.26*

Ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt translations-invariant, wenn

$$\mu \underbrace{(A + h)}_{\{x+h \;|\; x \in A\}} = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\; h \in \mathbb{R} \tag{1.1.20}$$

gilt.

Lokal endlich *Definition 1.26*

μ heißt lokal endlich, falls für jedes beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt $\mu(I) < \infty$.

Aus lokal endlich folgt σ-endlich.

Lebesgue-Maß *Theorem 1.27*

Es gibt ein eindeutig bestimmtes, translations-invariantes, lokal endliches Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das

$$\lambda([0, 1]) = 1 \tag{1.1.21}$$

erfüllt. Wir nennen λ das Lebesgue-Maß.

λ ist definiert durch:

$$\lambda([a, b)) = b - a \tag{1.1.22}$$

1.1.6 Zusammenfassung: Maßtheorie

Ziel:

Finde ”Volumenbegriff.

Mengensysteme:

1. Ring $R \subset \mathcal{P}(X)$
   i) $\emptyset \in R$
   ii) $\forall A, B \in R \implies A \cap B,\, A \cup B \in R$
   iii) $\forall A, B \in R \implies A \setminus B \in R$
2. Algebra
   i) $\mathcal{A}$ ist eine Algebra, falls es ein Ring ist und zusätzlich $X \in \mathcal{A}$
3. σ-Algebra
   i) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra, falls $\mathcal{A}$ eine Algebra ist und eine Fmilie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, dann auch $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$
   ii) Erzeugung: $K \in \mathcal{P}(X)$

   $\sigma(K) = \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg. mit } K \subset \mathcal{A}\}$

Maß:

1. Nullmengen

   $\mu(A) = 0$

   i) Vollständigkeit
      (a) $A \in \mathcal{E}$ Nullmenge, $B \subset A \implies B \in \mathcal{E}$
      (b) Vervollständigung

      $$\mathcal{E}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B, C \in \mathcal{E} :\ A \triangle B \subseteq C,\ \mu(C) = 0\}$$

      ist $A \in \mathcal{E}_\mu \implies \overline{\mu}(A) = \mu(B)$

      (c) Äußeres Maß:

      $$\mu^*(A) := \inf \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \,\Big|\, A_n \in \mathcal{A} \text{ und } A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

      (d) Fortsetzung: Caratheodory

      $\mathcal{A}$ ein Ring, μ σ-additiv, dann ist μ auf $\sigma(\mathcal{A})$ eindeutig, falls $\mathcal{A}$ σ-endlich.
2. Additivität
   i) additiv:

   $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ falls $A \cap B = \emptyset$

Riesen Dank an meinen Tutor Steffen für die coolen Tuts und die Zusammenfassungen

ii) σ-additiv

Ist μ additiv, so ist äquivalent:

(a) μ σ-additiv

(b) $A_n \uparrow A \implies \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$

Es gilt: $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra, $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ p.w.d., $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu\Big(\bigcup A_n\Big) = \sum \mu(A_n)$$

Maßraum:

1. Eigenschaften:

i) endlich:

$\mu(X) < \infty$

ii) σ-endlich:

$A_n \in \mathcal{E},\ n \in \mathbb{N},\ A_n \uparrow X$

$\mu(A_n) < \infty \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

1.2 Integrationstheorie

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum mit

$$\int_X \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu := \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{E} \tag{1.2.1}$$

1.2.1 Messbar und Borel-Funktionen

Sei eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ und $I \in \mathcal{P}(Y)$. Wir schreiben:

$$\varphi^{-1}(I) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in I\} =: \{\varphi \in I\} \tag{1.2.2}$$

i) $\varphi^{-1}(I^C) = \left(\varphi^{-1}(I)\right)^C$

ii) Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ mit $A_i \in \mathcal{P}(Y)$, $i \in I$. Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \tag{1.2.3}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \tag{1.2.4}$$

Falls A_i p.w. disjunkt, dann sind $\varphi^{-1}(A_i)$ p.w. disjunkt.

iii) Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, so auch

$$\varphi^{-1}(\mathcal{F}) := \left\{\varphi^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{F}\right\} \tag{1.2.5}$$

Arten von messbar *Definition 2.1, Lemma 2.2*

a) Für messbare Räume $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$ heißt

$$\varphi : X \to Y \tag{1.2.6}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messbar, falls $\varphi^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$ gilt.

"Urbilder messbarer Mengen sind messbar".

Für $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{K}) \supset \mathcal{K}$ und $\varphi : X \to Y$ ist folgendes äquivalent:

i) φ ist $\mathcal{E}, \mathcal{F}$-messbar

i) $\varphi^{-1}(K) \in \mathcal{E} \qquad \forall K \in \mathcal{K}$

b) Für $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt eine messbare Abbildung *reelwertige $\mathcal{E}$-messbare Funktion*

c) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(X, d)$ und $(Y, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt eine messbare Abbildung

$$\varphi : X \to \mathbb{R} \tag{1.2.7}$$

eine reelwertige Borel-Funktion.

Ist φ stetig, so ist φ eine Borel-Funktion

Komposition messbarer Abbildungen *Lemma 2.4*

Seien $\varphi : X \to Y$ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messbar und $\psi : Y \to Z$ $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-messbar, so ist

$$\psi \circ \varphi : X \to Z \tag{1.2.8}$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{G})$-messbar.

Voraussetzungen

$\varphi : X \to Y$ $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-messb.
$\psi : Y \to Z$ $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-messb.

Sind $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ messbar, so auch $\varphi \pm \psi$ und $\varphi \cdot \psi$.

Erweiterte reelle Gerade *Definition 2.4b*

Wir definieren die *erweiterte reelle Gerade* als

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}. \tag{1.2.9}$$

Fnktionen mit Werten in $\overline{R}$ heißen *erweitert* oder *numerisch*.

$$\varphi : (X, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}} \tag{1.2.10}$$

ist $\mathcal{E}$-messbar falls

1. $\varphi^{-1}(I) \in \mathcal{E} \qquad \forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. $\varphi^{-1}(\{+\infty\}),\ \varphi^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{E}$

Proposition 2.5

Sei (φ_n) eine Folge erweiterter $\mathcal{E}$-messbarer Funktionen. Dann sind

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n,\ \limsup_{n\to\infty} \varphi_n\ \liminf_{n\to\infty} \varphi_n \tag{1.2.11}$$

auch $\mathcal{E}$-messbar.

1.2.2 Partitionen und einfache Funktionen

Voraussetzungen

Sei $(X, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum.

Einfache Funktion *Definition 2.6*

Eine Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt *einfach*, falls $\varphi(X) \subset \mathbb{R}$ endlich ist. Sie ist also messbar und nimmt nur endlich viele Werte.

Für $\phi(x) = \{a_i, \dots, a_n\}$ und $A_i = \phi^{-1}(a_i)$ schreibt man $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_A$ als die kanonische Darstellung von φ.

Partition *Definition 2.6*

Eine disjunkte Vereinigung

$$X = A_1 \cup \dots \cup A_n \tag{1.2.12}$$

heißt endliche Partition von X.

Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, so heißt (A_i) eine *endliche $\mathcal{E}$-messbare Partition.*

Gleichmäßige Konvergenz *Proposition 2.7*

Für eine nicht negative, erweiterte $\mathcal{E}$-messbare Funktion $\varphi : X \to [0, \infty]$ und n
Setze

$$\varphi_n := \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{für } \frac{i-1}{2^n} \leq \varphi(x) < \frac{i}{2^n} \\ n & \varphi(x) \geq n \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Voraussetzungen

φ nicht negativ,
erweitert,
$\mathcal{E}$-messbar,
beschränkt.
$i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n$

so ist φ_n monoton wachsend und $\varphi_n \uparrow \varphi$. Mit der Beschränktheit ist diese Konvergenz gleichmäßig.

1.2.3 Das Integral nicht-negativer messbarer Funktionen

Einfaches Integral *Definition 2.8, Lemma 2.9*

Sei $\varphi : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty)$ nicht-negativ, $\mathcal{E}$-messbar und einfach in der kanonischen Darstellung, so definieren wir:

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{1.2.14}$$

Voraussetzungen

φ : nicht-negativ,
$\mathcal{E}$-messbar und
einfach

Dieses Integral ist wohldefiniert.

Linearität *Proposition 2.10*

Für φ, ψ und $\alpha, \beta \geq 0$ ist auch $\alpha\varphi + \beta\psi$ $\mathcal{E}$-messbar, nicht-negativ und einfach und dafür gilt:

$$\int_X (\alpha\varphi + \beta\psi) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.15}$$

Voraussetzungen

$\varphi, \psi : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty)$ nicht-negativ, einfach, $\mathcal{E}$-messbar

Integral von nicht einfacher Funktion *Definition 2.11, Proposition 2.12*

Es sei $f : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty]$ nicht-negativ, erweitert und $\mathcal{E}$-messbare Funktion. Wir definieren

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \mid \varphi : X \to [0, \infty) \text{ einf., } \mathcal{E}\text{-messb., n.n. mit } \varphi \leq f \right\} \tag{1.2.16}$$

Gibt es eine Folge $\{\varphi_n\}$ nicht-negativer, einfacher, $\mathcal{E}$-messbarer Funktionen mit $\varphi_n \uparrow f$, dann gilt:

$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.17}$$

Jede messbare Funktion $f : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty]$ kann integriert werden.

Linearität *Lemma 2.13*

Für zwei messbare Funktionen $f, g : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty]$ und ein $c \geq 0$ gilt:

$$\int_X (cf + g) \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.18}$$

Voraussetzungen

f, g messbar

Sei ein $f_n : (X, \mathcal{E}, \mu)$ mit $f_n \uparrow g$ gegeben, so ist auch

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X g \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.19}$$

Markov Ungleichung *Lemma 2.14*

Es sei $f : (X, \mathcal{E}, \mu)$ messbar und $a > 0$, so gilt

$$\frac{1}{a} \int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \mu(\{f \geq a\}) \tag{1.2.20}$$

Korollar 2.15

Ist $f : (X, \mathcal{E}, \mu)$ messbar, so gilt:

a) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < \infty \implies \mu(\{f = \infty\}) = 0$

b) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$ μ-fast überall,

Fatou *Lemma 2.16*

Es seien $f_n : (X, \mathcal{E}, \mu) \to [0, \infty]$ nicht-negative, $\mathcal{E}$-messbare, erweiterte Funktionen. Dann gilt:

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.21}$$

Voraussetzungen

f_n nicht negativ,
$\mathcal{E}$-messbar und erweitert

Ist $f_n \to f$ (punktweise), so gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.22}$$

$$\to f = \lim f_n = \limsup f_n \text{ messbar} \tag{1.2.23}$$

μ-Integrierbarkeit *Definition 2.17, Proposition 2.18*

Voraussetzungen

Es sei $f : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

a) ist f nicht-negativ und $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, so heißt f μ-integrierbar.

b) f heißt μ-integrierbar, falls der Positivteil f_+ und der Negativteil f_- μ-integrierbar sind.

Dann heißt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_- \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.24}$$

c) Sei $A \in \mathcal{E}$ und $f \cdot \mathbb{1}_A$ μ-integrierbar. Dann schreiben wir

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.25}$$

Es gilt außerdem:

$$f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \iff |f| \ \mu\text{-integrierbar} \tag{1.2.26}$$

Linearität[1] *Proposition 2.19*

Für $f, g : (X, \mathcal{E}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\alpha f + \beta g$ ist μ-integrierbar mit

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.27}$$

b) $f \leq g$, so ist

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.28}$$

c)

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.29}$$

1.2.4 Konvergenzsätze

Monotone Konvergenz *Satz 2.20*

Es sei ein Maßraum $(X, \mathcal{E}, \mu)$ und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge μ-integrierbarer Funktionen und

$$\exists\, M \geq 0 \text{ mit } \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.2.30}$$

Voraussetzungen

f_n monoton wachsend,
μ-integrierbar,
$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Dann ist $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ μ-integrierbar mit

$$\int_X \underbrace{f}_{:=\lim f_n} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.31}$$

[1] Jap, das machen wir jedes Mal dass die Terms and Conditions aktualisiert werden

Majorisierte / Dominierte Konvergenz *Satz 2.21*

Es sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{E}$-messbar mit einer punktweise konvergenten Folge f_n (μ-f.ü.) mit $f := \lim_{n\to\infty} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
Es sei außerdem $\psi : X \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit $|f_n(x)| \leq \psi(x)\ \forall\, x \in X,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
Dann sind f_n und f μ-integrierbar und es gilt

Voraussetzungen

f_n $\mathcal{E}$-messbar
ψ μ-integrierbar

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.32}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0 \tag{1.2.33}$$

Riemann vs Lebesgue

Ist f stetig und Intervall kompakt, so ist f Riemann und Lebesgue integrierbar und ihre Integrale stimmen überein:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda \tag{1.2.34}$$

1.2.5 Räume integrierbarer Funktionen

Wir hätten gerne einen Raum L^1, der alle μ-integrierbare Funktionen enthält:

$$L^1(X, \mathcal{E}, \mu) := \left\{\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid \varphi\ \mu\text{-integrierbar}\right\} \tag{1.2.35}$$

aber so wie es aussieht können wir nicht i.A. mit $f, g \in L^1$ $f + g \in L^1$ definieren, weil wir ggf. ein $\infty - \infty$ bekommen können.

Dafür entfernen wir alle problematische Stellen:

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, \mu) := \left\{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_1 < \infty\right\} \tag{1.2.36}$$

mit

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{1.2.37}$$

Wir definieren die Äquivalenzrelation $\sim$

$$f \sim g \iff f = g\ \mu\text{-f.ü.} \tag{1.2.38}$$

L^1 Raum *Definition 2.22, Lemma 2.23*

Wir definieren den Raum der "integrablen Funktionen" L^1:

$$L^1(X, \mathcal{E}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, \mu)\big|_\sim \tag{1.2.39}$$

Dies ist ein normierter Vektorraum.

L^p Raum *Definition 2.24, Lemma 2.24b, Definition 2.25*

Mit

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{E},\mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ messbar und } \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\} \tag{1.2.40}$$

definieren wir den Raum der "hoch p integrablen Funktionen"

$$L^p(X,\mathcal{E},\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{E},\mu)\big|_{\sim} \tag{1.2.41}$$

mit

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2.42}$$

Für $0 < p < \infty$ ist L^p ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Hölder-Ungleichung *Proposition 2.26*

Es seien $f \in L^p(X,\mathcal{E},\mu)$ und $g \in L^q(X,\mathcal{E},\mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$fg \in L^1(X,\mathcal{E},\mu) \tag{1.2.43}$$

und die Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.2.44}$$

Voraussetzungen

$f \in L^p(X,\mathcal{E},\mu)$
$g \in L^q(X,\mathcal{E},\mu)$

Minkowski-Ungleichung *Proposition 2.27*

Es sei $1 \leq p < \infty$, $f, g \in L^p(X,\mathcal{E},\mu)$. Dann gilt

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.2.45}$$

Daraus folgt, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist.

L^p mit Banachraum *Theorem 2.28*

Sei $p \geq 1$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X,\mathcal{E},\mu)$

a) Es existiert eine Teilfolge f_k die μ-f.ü. gegen eine Funktion $f \in L^p(X,\mathcal{E},\mu)$ punktweise konvergiert.

b) Das heißt: $f_n \xrightarrow{L^p} f$ und insbesondere ist $\left(L^p(X,\mathcal{E},\mu), \|\cdot\|_p\right)$ ein Banachraum[2].

[2] sogar L^∞ mit $\|\cdot\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$ ist ein Banachraum. L^2 ist ein Hilbertraum

1.2.6 Zusammenfassung: Integrationstheorie

Grundidee:

Approximiere "bestimmte" Funktionen durch charakteristische Funktion.

Integral:

1. Konstruktionsprinzip:

   Charakteristische Funktionen → messbare, nicht-negative Funktionen → messbare Funktionen

   i) 1. Schritt: einfache Funktionen φ

      (a) $\varphi = \sum a_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $[A_i]$ p.w.d.

      (b) $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum a_i \mu(A_i)$

      (c) monoton, linear

   ii) 2. Schritt: messbare, nicht-negative Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$

      (a) f lässt sich approximieren durch nicht-negative einfache Funktionen φ_n mit $\varphi_n \uparrow f$

      (b)
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \mid \varphi \text{ einf., n.n. mit } \varphi \leq f \right\} \tag{1.2.46}$$

      (c)
$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.47}$$

      (d) monoton, linear

   iii) 3. Schritt: messbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

      (a) $f = f_+ - f_-$

      (b)
$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu \tag{1.2.48}$$

      (c) monoton, linear, $\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$

2. Beweisprinzip: Maßtheoretische Induktion

   i) Zeige Aussage für charakteristische Funktion

      → Integral linear

   ii) Zeige Aussage für einfache Funktion

      → Konvergenzsätze

Danke nochmals Steffen <3

iii) Zeige Aussage für nicht-negative, messbare Funktion

$\rightarrow$ Definition von $f = f_+ - f_-$

iv) Zeige Aussage für beliebige messbare Funktion

3. Integrierbarkeit:

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar, es heißt μ-integrierbar, falls $\int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu\,,\ \int_X f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$

Wichtig: f integrierbar $\iff$ $|f|$ integrierbar

Konvergenzsätze:

1. Majorisierte Konvergenz

   i) $f_n : X \to \mathbb{R}$ ist eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \uparrow f$ punktweise μ-f.ü.

   ii) $\exists$ μ-integrierbare Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ mit $|f_n(x)| \leq \varphi(x)\ \forall\ x, n$. Dann gilt

   (a) f_n und f sind μ-integrierbar

   (b) $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$

2. Monotone Konvergenz:

   i) $f_n : X \to \mathbb{R}$ ist eine monoton wachsende Folge μ-integrierbarer Funktionen mit $\exists M \geq 0 : \displaystyle\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M\ \forall\ n$. Dann gilt

   (a) $f := \lim\limits_{n\to\infty}$ μ-integrierbar

   (b) $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$

L^p-Räume:

1. Definition:

$$L^p(X, \mathcal{E}, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{E}, \mu)\big|_{\sim} := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f \text{ messb.}, \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\} \tag{1.2.49}$$

$$\_ \sim :\ f \sim g \iff f = g\ \mu\text{–f..} \tag{1.2.50}$$

2. L^p ist ein Banachraum mit Norm

$$\|\cdot\|_p := \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty \tag{1.2.51}$$

3. L^∞:

$$\|\cdot\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} f(x) = \inf\{a > 0 \mid \mu(\{|f| > a\}) = 0\} \tag{1.2.52}$$

4. Ungleichungen:

i) Minkowski:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.2.53}$$

ii) Hölder:

Ist $f \in L^p$, $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.2.54}$$

5. Inklusion:

$L^p \subseteq L^q$ für $p \leq q$ falls $\mu(X) < \infty$. Hier sind Gegenbeispiele wichtig!

1.3 Produktmaße - Fubini - Transformationsformel

1.3.1 Produktmaße und der Satz von Fubini

Wir wollen zwei Maße miteinander multiplizieren, sodass sie sich wie man es erwartet verhalten:

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \tag{1.3.1}$$

Messbare Rectecke *Definition 3.1*

Es seien messbare Räume $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$.

Mengen $A \times B \subset X \times Y$ mit $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$ heißen "messbare Rechtecke" mit:

$$R := \{A \times B \mid A \in \mathcal{E},\, B \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(X \times Y) \tag{1.3.2}$$

R ist ein π-System.

Produkt σ-Algebra *Definition 3.1*

Die σ-Algebra $''\mathcal{E} \times \mathcal{F}'' := \sigma(\mathcal{R})$ heißt Produkt σ-Algebra von $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$

Für $E \in X \times Y$, $x \in X$ und $y \in Y$ heißen

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \subset Y \tag{1.3.3}$$

$$E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \subset X \tag{1.3.4}$$

Schnitte von E. Es gilt auch

$$E_x := (i_x)^{-1}(E) \qquad i_x : Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x, y) \tag{1.3.5}$$

$$E^y := (i^y)^{-1}(E) \qquad i^y : X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, y) \tag{1.3.6}$$

Theorem 3.2

Es seien $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ und $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ σ-endliche Maße. Dann gilt für $E \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$

Voraussetzungen

$\mu,\ \nu$ σ-endlich

1. $E_x \in \mathcal{F} \quad \forall\, x \in X,\ E^y \in \mathcal{E} \quad \forall\, y \in Y$
2. Die Funktion

$$\nu : X \to [0, \infty] \tag{1.3.7}$$

$$x \mapsto \nu(E_x) \text{ ist } \mathcal{E}\text{-messbar} \tag{1.3.8}$$

$$\mu : Y \to [0, \infty] \tag{1.3.9}$$

$$y \mapsto \mu(E^y) \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar} \tag{1.3.10}$$

3. Man kann die Menge E sowohl durch "vertikale" als auch durch "horizontale" Schnitte messen.

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu\,(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu\,(y) \tag{1.3.11}$$

Eindeutig bestimmtes Produktmaß *Theorem 3.3*

Sind $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß auf $(X \times Y, \mathcal{E} \times \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \qquad \forall\ A \in \mathcal{E},\ \forall\ B \in \mathcal{F} \tag{1.3.12}$$

und dieses Maß ist σ-endlich.

Sind μ, ν endlich, so auch dieses Maß.

Voraussetzungen

$(X, \mathcal{E}, \mu)$,
$(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endlich

Lebesgue-Produktmaß *Definition 3.4*

Das Produktmaß

$$\lambda^n := \underbrace{\lambda \times \ldots \times \lambda}_{n\text{-Mal}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty] \tag{1.3.13}$$

heißt n-dimensionales Lebesgue-Maß.

Messbarkeit *Theorem 3.6*

Sind $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $F : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-messbar. Sei außerdem $x, x_0 \in X$, $y, y_0 \in Y$.

Dann gilt:

Voraussetzungen

$(X, \mathcal{E}, \mu)$,
$(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endlich,
F $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$-messbar

1. Die Funktion

$$y \mapsto F(x_0, y) \in [0, \infty] \qquad \text{ist } \mathcal{F} \text{ messbar} \tag{1.3.14}$$
$$\text{bzw. } x \mapsto F(x, y_0) \in [0, \infty] \qquad \text{ist } \mathcal{E} \text{ messbar} \tag{1.3.15}$$

2. Die Funktion

$$x \mapsto \int_Y F(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \in [0, \infty] \qquad \text{ist } \mathcal{E} \text{ messbar} \tag{1.3.16}$$
$$\text{bzw. } y \mapsto \int_X F(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x) \in [0, \infty] \qquad \text{ist } \mathcal{F} \text{ messbar} \tag{1.3.17}$$

3. Es gilt:

$$\int_{X \times Y} F(x, y)\,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X F(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \tag{1.3.18}$$
$$= \int_X \left(\int_Y F(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) \tag{1.3.19}$$

Allgemeiner Satz von Fubini *Korollar 3.7*

Voraussetzungen

Es sei $F : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ messbar,
für μ-fast alle $x \in X$ ist $y \mapsto F(x,y)$ ν-integrierbar,
$x \mapsto \int_Y |F(x,y)| \, \mathrm{d}\nu(y)$ ist μ-integrierbar

Dann gilt

$$\int_{X\times Y} F(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y F(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \tag{1.3.20}$$

$$= \int_Y \left(\int_X F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) \tag{1.3.21}$$

Diesen Prozess kann man auf endliche Dimensionen erweitern.

1.3.2 Das Lebesgue Maß auf IR^n

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ein Maßraum. Wir wissen:

$$\lambda^n([a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]) = \prod_{i=1}^n \lambda([a_i,b_i]) \tag{1.3.22}$$

$$= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \tag{1.3.23}$$

Eigenschaften des Lebesgue Maßes λ^n *Theorem 3.11*

1. Translationsinvarianz

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \qquad \lambda^n(E+x) = \lambda^n(E) \tag{1.3.24}$$

2. Eindeutigkeit

   Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\backslash))$ mit einem $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\implies \mu(K) < \infty$, dann existiert ein $c \geq 0$ mit $\mu = c\lambda^n$. Das heißt, das Lebesgue Maß ist proportional zu jedem solchen Maß.

3. Rotationsinvarianz

$$\forall R \in O(n),\ \forall\ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \qquad \lambda^n(R(E)) = \lambda^n(E) \tag{1.3.25}$$

4. Lineare Transformationsformel

   Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt:

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \qquad \lambda^n(T(E) = |\det(T)| \cdot \lambda^n(E) \tag{1.3.26}$$

Bildmaß *Definition 3.12*

Es seien $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$ messbare Räume und $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $(X, \mathcal{E})$. Ist $F : X \to Y$ $\mathcal{E} - \mathcal{F}$-messbare Funktion, so heißt

$$(F_\# \mu)(B) := \mu\big(F^{-1}(B)\big) \qquad \forall\ B \in \mathcal{F} \tag{1.3.27}$$

das Bildmaß von μ unter F. Dies ist ein Maß und es ist wohldefiniert. Es gilt für messbare F, G

$$(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{F} (Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{G} (Z, \mathcal{G}) \tag{1.3.28}$$

$$(G \circ F)_\# \mu = G_\# F \# \mu \text{ und} \tag{1.3.29}$$

$$id_\# \mu = \mu \tag{1.3.30}$$

Trafosatz *Satz 3.13*

Sei[3] $\varphi : Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{F}$-messbar. Dann gilt:

$$\int_X \varphi \circ F \,\mathrm{d}\mu = \int_Y \varphi \,\mathrm{d}F_\# \mu \tag{1.3.31}$$

Trafoformel *Theorem 3.14*

Es sei $F : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein C^1 Diffeomorphismus.
Dann ist $\varphi : V \to \mathbb{R}$ genau dann bezüglich λ^n integrierbar, wenn $\varphi \circ F \cdot |\det(DF)| : U \to \mathbb{R}$ bezüglich λ^n integrierbar ist.
Dann gilt

Voraussetzungen

U, V offen,
F ein C^1-Diffeo.

$$\int_V \varphi(y) \,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \int_U \varphi(F(x))\, |\det(DF(x))| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) \tag{1.3.32}$$

[3] mit der Situation aus Definition 3.12

1.3.3 Zusammenfassung: Produktmaße - Fubini - Transformationsformel

Interation auf mehreren Dimensionen:

1. Ziel: Verallgemeinere Lebesgue auf messbare $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$
2. Produktmaß
   i) $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endlich. Dann existiert genau ein Maß $\mu \times \nu$ auf $(X \times Y, \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}))$ mit der Eigenschaft:
   $$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$
   ii) Das Lebesguemaß λ^n ist ein solches Beispiel, und das einzige eindeutige, translations- und rotationsinvariante Maß. Es gilt außerdem:
   $$\lambda^n(T(E)) = |\det(T)|\lambda^n(E)$$
   für ein $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und ein $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
3. Fubini
   i) $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ σ-endlich, $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist F $\mu \times \nu$ integrierbar genau dann, wenn
   (a) $y \mapsto F(x, y)$ für μ-f.ü., $x \in X$ ν-integrierbar,
   (b) $x \mapsto \int_Y |F(x, y)| \, \mathrm{d}\nu(y)$ μ-integrierbar ist.

   Dann gilt:
   $$\int_X \left(\int_Y F(x, y) \, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\int_X F(x, y) \, \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu$$

Trafoformel:

1. Sind $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, dann sind äquivalent:
   i) $\varphi : V \to \mathbb{R}$ ist λ^n integrierbar
   ii) $(\varphi \circ F) \, |\det(DF)|$ ist λ^n integrierbar

   und es gilt:
   $$\int_V \varphi \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_U (\varphi \circ F) \, |\det(DF)| \, \mathrm{d}\lambda^n$$

1.4 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

1.4.1 Untermannigfaltigkeiten

Untermannigfaltigkeit *Definition 4.1*

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ und C^l-Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

Voraussetzungen

$\forall a \in M\ \exists\, U \in \mathbb{R}^n$ mit
$n-k\ f_i : U \to \mathbb{R}$
s.d. $M \cap U$ eine Nullstellenmenge
und $\operatorname{rk} Df(x) = \text{maximal}$

i) $M \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\} = \{f = 0\}$

ii) $\operatorname{rk} Df(x) = \operatorname{rk} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,n-k}^{j=1,\dots,n} = n-k = \text{maximal}\ \forall x \in U$

Äquivalent, $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$ sind lin. unabhängig in $\mathbb{R}^n\ \forall\ x \in U$

Lokale Graphe *Proposition 4.2*

Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal ein Graph:

Voraussetzungen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^l-Untermannigfaltigkeit.

Zu $a \in M$ gibt es offene Umgebungen $U' \subset \mathbb{R}^k$ von $a' := (a_1, \dots a_k)$ und $U'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' := (a_{k+1,\dots a_n})$ und ein $g \in C^l(U', U'')$ mit

$$\operatorname{Gr}(g) = M \cap (U' \times U'') \tag{1.4.1}$$

$$g(a') = a'' \tag{1.4.2}$$

Ähnlichkeit zu $\mathbb{R}^k$ *Proposition 4.3*

Jede Untermannigfaltigkeit sieht lokal wie $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ aus.

Voraussetzungen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^l-Untermannigfaltigkeit.

Mathematisch: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^l-Untermannigfaltigkeit. Zu $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^l-Diffeomorphismus $F : U \to V := F(U)$ mit

$$F(U \cap M) = \big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\big) \cap V \tag{1.4.3}$$

Karten *Proposition 4.4*

Jede Untermannigfaltigkeit besitzt Karten.

Voraussetzungen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^l-Untermannigfaltigkeit.

Zu $a \in M$ gibt es eine Menge $a \in W \subset M$, die $\underbrace{\text{offen in M ist}}_{W=M\cap U,\ U\subset\mathbb{R}^n \text{ offen}}$, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine Karte $\phi : \Omega \xrightarrow{bij.} W$ mit folgenden Eigenschaften:

i) ϕ ist ein Homömorphismis (ϕ, ϕ^{-1} stetig)

ii) ϕ ist eine C^l-Immersion, d.h. $\phi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{rk} D\phi(t) = k = \max\ \forall t \in \Omega$

Das heißt, man kann einen Stück der Mannigfaltigkeit auf einen "schöneren" Raum projezieren, und dann von diesem Raum zurück in die Mannigfaltigkeit, sodass die Struktur dann erhalten bleibt.

Wir nennen $\phi^{-1} : W \to \Omega \subset \mathbb{R}^k$ "lokale Koordinaten" auf M.

Kartenwechsel *Proposition 4.5*

Kartenwechsel sind glatt.

Voraussetzungen

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^l-Untermannigfaltigkeit.

Gegeben seien zwei Karten $\phi_i : \Omega_i \to W_i \subset M$. Dann ist

$$\phi_i^{-1}(W_1 \cap W_2) \subset \Omega_i \subset \mathbb{R}^k \text{ offen} \tag{1.4.4}$$

und

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(W_1 \cap W_2) \to \phi_2^{-1}(W_1 \cap W_2) \tag{1.4.5}$$

ein C^l-Diffeomorphismus.

Das heißt, hat man zwei verschiedene Karten die sich überlappen, dann kann man von der einen in die andere springen und dieser Wechsel ist auch ein äquivalenter Diffeomorphismus. Man wechselt von einer Karte Ω_1 in eine Karte Ω_2, indem man von Ω_1 mit ϕ_1 wieder auf die Mannigfaltigkeit ($W_1 \subset M$), und von dort die inverse Abbildung ϕ_2^{-1} auf Ω_2 nimmt.

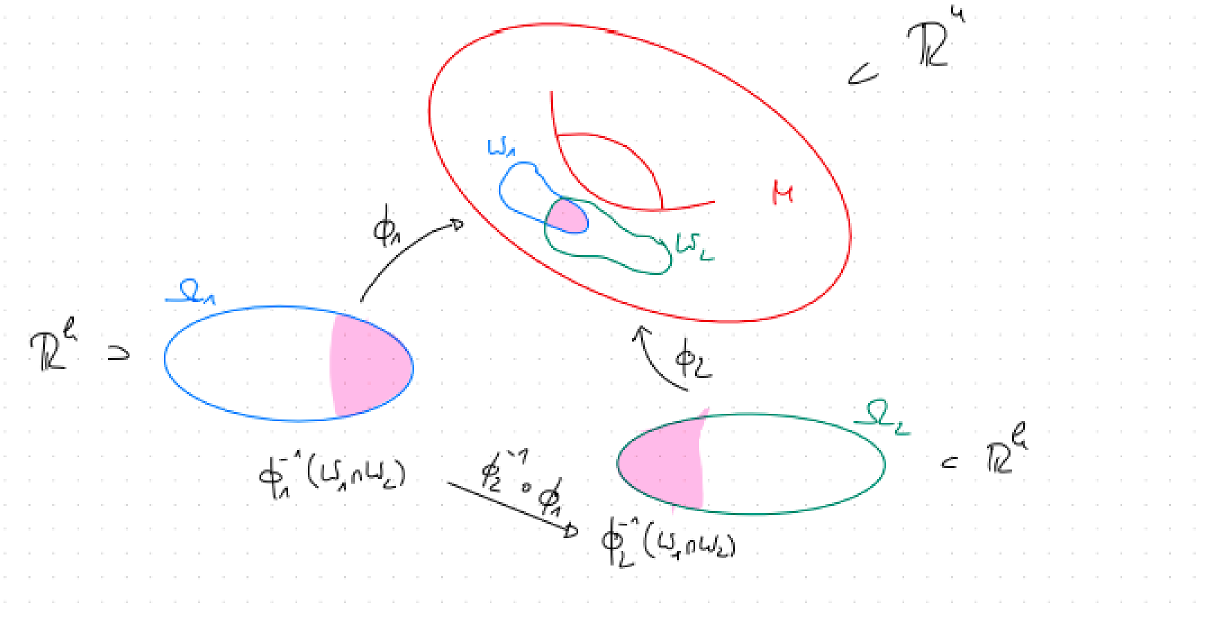

Abbildung 1.1: Kartenwechsel

Abstrakte Mannigfaltigkeit *Definition*

Allgemein redet man von Untermannigfaltigkeiten, wenn man sie in einen größeren Raum reingesteckt hat. Zum Beispiel ist die Fläche $\mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, aber $\mathbb{R}^2$ alleine ist eine Mannigfaltigkeit.

Mathematisch: M sei ein topologischer Raum, der Hausdorffsch und zweitabzählbar ist. Ein C^l-Atlas auf M ist eine Familie $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ mit $U_i \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) =: V_i \subset M$ offen ein Homömorphismus ist, so dass $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \phi_j^{-1}(V_i \cap V_j)$ ein C^l-Diffeomorphismus ist für alle $i, j \in I$. Außerdem: $M = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$.

M zusammen mit diesem Atlas ist eine k-dimensionale C^l-Mannigfaltigkeit.

Bemerke, dass hier nicht die Rede von einem $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ Raum ist, die Mannigfaltigkeit existiert unabhängig von einem größeren Raum wo wir sie einbetten können.

Whitney Embedding Theorem

Ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann kann M in einen $2k$ dimensionalen Raum eingebettet werden. Das heißt:

$$\exists\ F : M \to \mathbb{R}^{2k} \text{ inj., s. d.} \tag{1.4.6}$$

1. $F(M) \subset \mathbb{R}^{2k}$ ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit
2. $F : M \to F(M)$ ist ein Diffeomorphismus.

Für die Einbettung in eine Dimension anderer Größe ist der Beweis sehr schwierig.

1.4.2 Tangentialraum und Differential

Tangentialraum / Normalraum *Definition 4.6*

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zu $p \in M$ ist

$$T_pM := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^1} M \text{ mit } \gamma(0) = p,\ \dot{\gamma}(0) = v \right\} \tag{1.4.7}$$

der Tangentialraum von M in p.

Außerdem ist $N_pM := T_p^{\perp}M = (T_pM)^{\perp}$ der Normalraum von M in p.

Insbesondere gilt: $T_pM \oplus N_pM = \mathbb{R}^n$.

Zu $p \in M$ sei $\phi : \Omega \to W \subset M \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $0 \in \Omega$ und $\phi(0) = p \in W$. Dann gilt:

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k} \right\}\Bigg|_0 \tag{1.4.8}$$

Alternativ sei $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \cap U = \{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\}$ mit $\nabla f_1(p), \dots \nabla f_{n-k}$ lin. unabhängig. Dann gilt:

Voraussetzungen

$\Omega \subset \mathbb{R}^k \ni (t_1, \dots, t_k)$
ϕ eine Karte
$p \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen
$M \cap U = \{f = 0\}$

$$N_pM = \operatorname{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\} \tag{1.4.9}$$

Es gilt: $\dim T = k$, $\dim N = n - k$.

Differenzierbarkeit *Definition 4.8*

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^r$ zwei C^l-Untermannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ heißt C^l-differenzierbar in $p \in M$, falls es Karten

$$\phi : \Omega_M \to W_M \subset M \text{ um } p \tag{1.4.10}$$
$$\psi : \Omega_N \to W_N \subset N \text{ um } f(p) \tag{1.4.11}$$

gibt, so dass

Voraussetzungen

$M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$
C^l-Untermannigfaltigkeiten
f stetig.
ϕ, ψ Karten

$$f(W_M) \subset W_N \tag{1.4.12}$$

und

$$\psi^{-1} \circ f \circ \phi : \Omega_M \to \Omega_N \qquad C^l\text{differenzierbar} \tag{1.4.13}$$

f heißt differenzierbar, falls es in jedem Punkt von M differenzierbar ist.

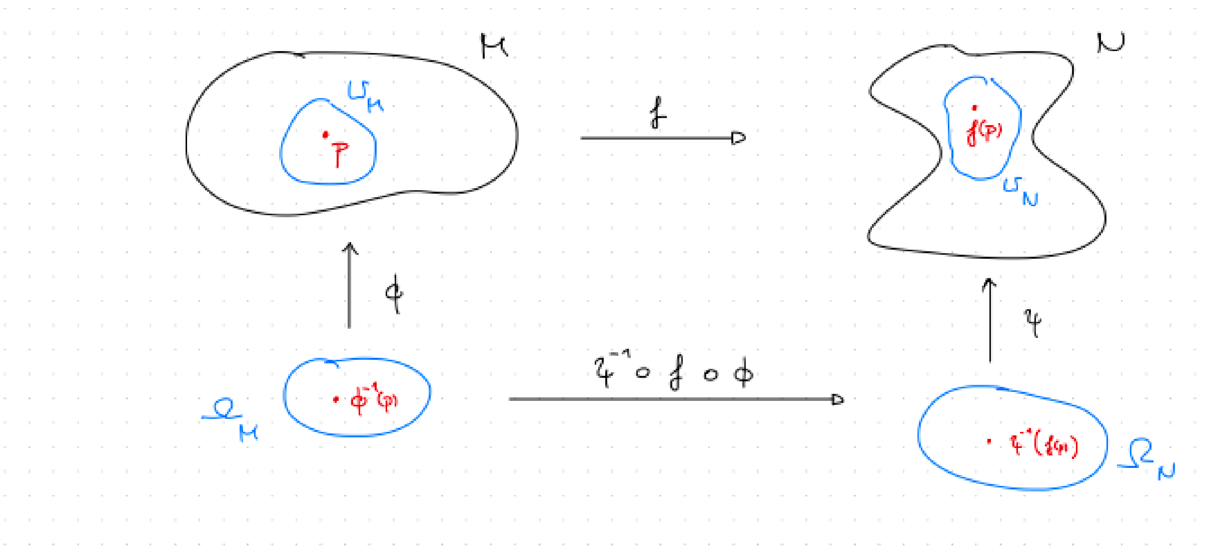

Abbildung 1.2: Differenzierbarkeit

Differential *Definition 4.9*

Es sei $f : M \to N$ in $p \in M$ differenzierbar. Dann heißt die Abbildung: $Df(p) \equiv Df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$, definiert durch:

$$v = \dot\gamma(0) \in T_pM \to Df(p)v \equiv Df_p(v) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) \tag{1.4.14}$$

das Differential von f in p.

Dieses Differential ist wohl definiert, unabhängig von γ und linear.

1.4.3 Kurven- und Flächeintegrale

Kurvenintegral und Motivation *Erinnerung Ana 2*

Für $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ ist die "Länge von γ":

$$\to L(\gamma) := \int_a^b \left|\dot{\gamma(t)}\right| \mathrm{d}t \tag{1.4.15}$$

unabhängig von der Parametrisierung. Das heißt, die Länge von γ ist eine intrinsische Eigenschaft von $\gamma([a, b])$. Falls γ regulär ($\dot\gamma(t) \neq 0\ \forall\ t$) und injektiv, so ist $M := \gamma((a, b)) \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Außerdem ist γ eine Karte und die Parametrisierung $\gamma \circ \varphi$ eine andere. Das heißt, diese Untermannigfaltigkeit hat eine definierte "Länge"! Dies wollen wir dann auf allgemeine Untermannigfaltigkeiten erweitern.

Flächenelement

Ähnlich zur Länge einer Kurve wollen wir ein analoges für Flächen und mehrdimensionale Volumina definieren. Dies machen wir, indem wir analog zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelepipeds die Determinante zweier Vektoren bestimmen.

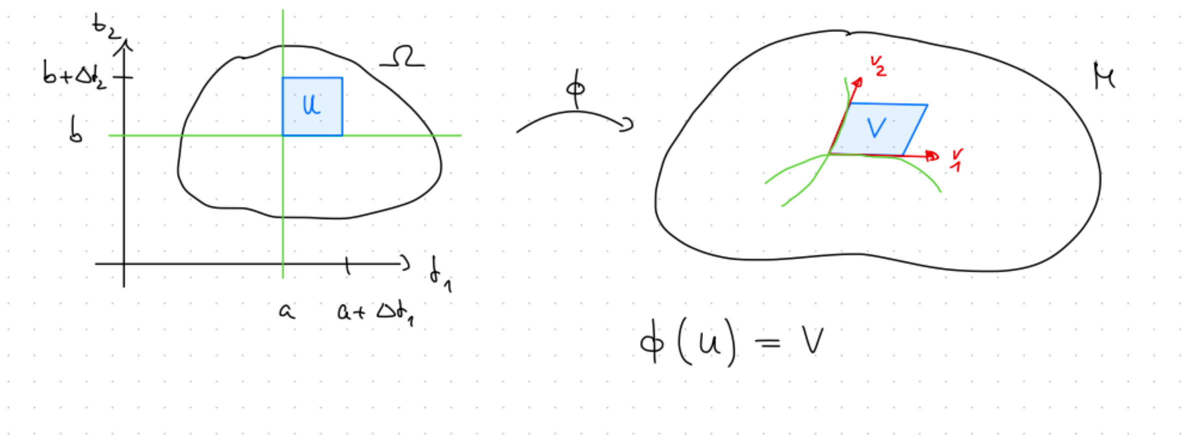

Abbildung 1.3: Volumenelement

$$A^2 = g := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix} \tag{1.4.16}$$

Da dies nur für kleine Parallelepipede gilt, mit Basisvektoren v_i, muss man für das Volumen über all diese Stücke integrieren:

$$\operatorname{vol}_n(\phi(\Omega)) = \int_\Omega \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \tag{1.4.17}$$

Gramsche Determinante

Wir definieren

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t_i}, \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right\rangle \qquad \qquad |t \in \Omega,\ i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{1.4.18}$$

und daraus die Gramsche Determinante:

$$g(t) := \det(g_{ij}(t)) \tag{1.4.19}$$

Flächeninhalt *Definition 4.11, Proposition 4.12*

Der Flächeninhalt von einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit , die von einer Karte überdeckt wird:

$$\phi : \Omega \xrightarrow{\cong} M, \tag{1.4.20}$$

so dass $M = \phi(\Omega)$ beträgt

$$\operatorname{vol}_k M := \int_\Omega \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k \tag{1.4.21}$$

Dieses Volumen ist unabhängig von der Wahl der Karte ϕ.

Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf der Untermannigfaltigkeit, bei welcher $\{f \neq 0\}$ von einer Karte $\Phi : \Omega \to W \subset M$ überdeckt wird definiert man

$$\int_M f \,\mathrm{d}S(x) := \int_\Omega f(\phi(t)) \underbrace{\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k}_{\text{Volumenelement } \mathrm{d}S(\phi(t))} := \int_\Omega f(\phi(t))\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.4.22}$$

Partition der Eins

Wenn wir eine Mannigfaltigkeit, wie in den oberen Definitionen sich nicht von *einer* Karte überdecken lässt, so können wir sie durch mehrere Karten überdecken, durch die "Partition der Eins". Es gilt:

$$\exists V_j \subset M \text{ offen }, j \in \mathbb{N} \text{ und Karten } \phi_j : \Omega_j \xrightarrow{\cong} V_j \text{ mit } M = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \tag{1.4.23}$$

und es existieren Funktionen

$$\lambda_j : M \xrightarrow{C^l} [0,1] \quad \text{mit} \quad \lambda\Big|_{M\setminus V_j} \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1 \qquad \forall\, x \in M \tag{1.4.24}$$

Damit lässt sich das Volumen beschreiben als:

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}S(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_M \lambda_j f(x)\,\mathrm{d}S(x) \tag{1.4.25}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} \lambda_j(\phi_j(t)) f(\phi_j(t)) \sqrt{g_{\phi_j}(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.4.26}$$

1.4.4 Zusammenfassung: Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Untermannigfaltigkeiten:

1. $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k-dim. C^l Untermannigfaltigkeit, falls

$$\forall a \in M \; \exists \, U \subset \mathbb{R}^n \text{ und } C^l \text{ Funktionen } f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$$

   mit

   i) $M \cap U = \{x \in U \mid f_1 = \cdots = f_{n-k} = 0\} = \{f = 0\}$

   ii) $\operatorname{rk} Df(x) = n - k =$ maximal

2. Eine Untermannigfaltigkeit sieht lokal wie der $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ aus.
3. Ist M eine k-dimensionale *Mannig*faltigkeit, so kann man sie in einen $2k$-dimensionalen Raum als Untermannigfaltigkeit einbetten.

Karten:

1. Zu $a \in M \; \exists \, W = M \cap U \subset M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und eine Karte $\phi : \Omega \xrightarrow{\text{bij}} W$ mit

   i) ϕ ist ein Homöomorphismus (ϕ, ϕ^{-1} stetig) und

   ii) ϕ ist eine C^l-Immersion, das heißt, $\phi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{rk} D\phi = k = \max$

2. Wir nennen $\phi^{-1} : W \to \Omega$ lokale Koordinaten
3. Kartenwechsel: Für zwei Karten $\phi_i : \Omega_i \to W_i$ ist $\phi^{-1}(W_1 \cap W_2) \subset \Omega_i$ offen und $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(W_1 \cap W_2) \to \phi_2^{-1}(W_1 \cap W_2)$ ein C^l-Diffeomorphismus.

Differenzierbarkeit:

1. Der Tangentialraum ist

$$T_pM := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^1} M \text{ mit } \gamma(0) = p, \, \dot\gamma(0) = v \right\}$$

   Falls $\phi : \Omega \to W \subset M$ eine Karte ist mit $0 \in \Omega$ und $\phi(0) = p$, dann ist

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial t_k} \right\}\Bigg|_0$$

2. Der Normalraum ist das orthogonale Komplement zum Tangentialraum $N_pM = T_p^\perp M$.

   Falls $p \in U$ und $M \cap U = \{f = 0\}$ mit $\operatorname{rk} Df = n - k =$ maximal, dann ist

$$N_pM = \operatorname{span}\{\nabla f_1, \ldots, \nabla f_{n-k}\}\big|_p$$

3. Differenzierbarkeit

   Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ und $N \subset \mathbb{R}^r$ C^l-UMfkt.-en, $f : M \to N$ heißt C^l differenzierbar falls es $\phi : \Omega_M \to W_M$ und $\psi : \Omega_N \to W_N$ gibt, mit

   i) $f(W_M) \subset W_N$ und

ii) $\psi^{-1} \circ f \circ \phi : \Omega_M \to \Omega_N$ differenzierbar.

Volumenintegrale:

Das Volumen einer Menge Ω ist gegeben durch

$$\mathrm{vol}_n(\phi(\Omega)) = \int_\Omega \sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

mit

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t_i}, \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right\rangle$$

und

$$\sqrt{g} = \det(g_{ij}) \tag{1.4.27}$$

1.5 Differentialformen

1.5.1 1-Formen und Kurvenintegral

Beobachtungen und Konventionen

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, dann ist U eine n-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit.

Anders betrachtet[4], ist auch jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit offen.

Die Identität $id : U \to U$ verwenden wir als Karte.

Tangentialzeug *Definition 5.1*

a) Der Kotangentialraum von U bei p ist

$$T_p^*U := (T_pU)^* = \{l : T_pU \to \mathbb{R} \mid l \text{ linear}\} \tag{1.5.1}$$

der Raum aller linearen Abbildungen vom Tangentialraum am Punkt p in die reelle Zahlen.

b) Das Tangentialbündel von U ist

$$TU := \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_pU \ \ni (p, v) \text{ mit } p \in U,\ v \in T_pU \tag{1.5.2}$$

mit der kanonischen Projektion

$$\pi : TU \to U, \qquad \pi(p, v) = p \tag{1.5.3}$$

c) Das Kotangentialbündel von U ist

$$T^*U := \bigcup_{p\in U} \{p\} \times T_p^*U \ \ni (p, l) \text{ mit } p \in U,\ l \in T_p^*U \tag{1.5.4}$$

mit der kanonischen Projektion

$$\pi : T^*U \to U, \qquad \pi(p, l) = p \tag{1.5.5}$$

Differential-1-Form *Definition 5.2*

Eine Differentialform auf U ist eine Abbildung von U auf das Kotangentialbündel:

$$\omega : U \to T^*U \tag{1.5.6}$$

mit

$$\pi \circ \omega = id_U \tag{1.5.7}$$

Vektorfeld *Definition 5.2*

[4] solange man keine Untermannigfaltigkeit mit Rand betrachtet

Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung von U auf das Tangentialbündel:

$$X : U \to TU \tag{1.5.8}$$

mit

$$\pi \circ X = id_U \tag{1.5.9}$$

Kurvenintegral *Definition*

Für eine stetige 1-Form ω auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und eine stückweise C^1 Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ definieren wir das Kurvenintegral:

Voraussetzungen

ω stetige 1-Form
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, \mathrm{d}t \tag{1.5.10}$$

Beziehungsweise die Summe aus den jeweiligen Wegstücken.

Wie lese ich das? Sagen wir, wir haben eine 1-Form ω auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\omega(x, y, z) = f(x, y, z) \, \mathrm{d}x + g(x, y, z) \, \mathrm{d}y + h(x, y, z) \, \mathrm{d}z \tag{1.5.11}$$

und eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit $t :\mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, und die Indizes $1, 2, 3$ entsprechen den Koordinaten x, y, z. Dann heißt:

$$\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma(t)}) \, \mathrm{d}t = f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \, \mathrm{d}x(t) + g(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \, \mathrm{d}y(t) + h(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \, \mathrm{d}z(t) \tag{1.5.12}$$

$\mathrm{d}x(t)$ erhält man, indem man $\gamma_1(t)$ nach t differenziert.

Im Ausdruck $\omega_\gamma(\dot{\gamma})$ bezieht sich das untere γ darauf, dass man die Parametrisierung in die Funktionen f, g, h einsetzt, und die Anwendung auf $\dot{\gamma}$ darauf, dass man die 1-Formen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ auf die Ableitung der Parametrisierung anwendet.

Das Integral hängt bis auf ein Vorzeichen nicht von der Parametrisierung ab. Falls γ regulär und injektiv ist, so ist $M = \gamma([a, b])$ eine orientierte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit und das Integral hängt nicht von der Wahl der "orientierungserhaltenden" Karte ab.

Siehe orientierbare Untermannigfaltigkeiten [HEY:ref].

Exaktheit *Definition 5.4*

Eine stetige 1-Form ω auf U heißt exakt, falls es eine Funktion $f \in C^1(U)$ existiert, mit $\omega = \mathrm{d}f$. Wir nennen f die Stammfunktion.

Für ein Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^n$ und eine Form $\omega = \sum_{i=1}^n v_i \, \mathrm{d}x_i$ ist ω genau dann exakt, wenn v konservativ ist, d.h.

$$\omega = \mathrm{d}f \iff \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \iff v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \iff v = \boldsymbol{\nabla} f \tag{1.5.13}$$

Gebiet *Erinnerung 5.5*

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene und zusammenhängende Menge. Je 2 Punkten in G können durch einen stückweise C^1-Weg verbunden werden.

Exaktheit II *Proposition 5.6*

Eine stetige 1-Form ω auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann exakt, wenn für alle stückweise C^1-Kurven $\gamma_{1,2}$ in G mit gleichen Anfangs- und Endpunkten

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \tag{1.5.14}$$

gilt.

Voraussetzungen

ω stetige 1-Form
G Gebiet

Diese Bedingung ist wieder analog zur Konservativität eines Vektorfeldes und Unabhängigkeit der Parametrisierung bei einem Kurvenintegral.

Wedge-Produkt *Definition 5.7*

Das Wedge-Produkt $\wedge$ erfüllt

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \tag{1.5.15}$$

Differential einer Form *Definition 5.7*

Für $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_i$ definieren wir

a)

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j}_{=\mathrm{d}f_i} \wedge \mathrm{d}x_i \tag{1.5.16}$$

b) ω heißt geschlossen, falls $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt, also

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \forall\, i, j \tag{1.5.17}$$

Sternförmiges Gebiet *Definition 5.8*

Ein Gebiet $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig (bzgl. $x_0 \in X$), falls gilt

$$[x_0, x] = \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0,1]\} \subset X \qquad \forall\, x \in X \tag{1.5.18}$$

Exaktheit III *Proposition 5.9*

Es sei ω eine C^1-Form auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$.

a) Ist ω exakt, so ist es auch geschlossen.

b) Ist ω geschlossen, und G sternförmig, so ist ω exakt.

1.5.2 Differentialformen höherer Ordnungen

k-Form aus der Sicht der multilinearen Algebra *Definition 5.10*

a) Eine k-Form ω ist eine multilineare alternierende Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k-\text{Mal}} \to \mathbb{R} \tag{1.5.19}$$

Sie sind

i) (Multi)-Linear:

$$\omega(\ldots, \lambda v + \mu\omega, \ldots) = \lambda\,\omega(\ldots, v, \ldots) + \mu\,\omega(\ldots, w, \ldots) \qquad \forall\, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{1.5.20}$$

ii) Alternierend:

$$\omega(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) = -\omega(\ldots, w, \ldots, v, \ldots) \tag{1.5.21}$$

b) Der Raum der k-Formen bildet einen $\mathbb{R}$-VR mit der Folgenden bezeichnung:

$$\bigwedge^k V^* \tag{1.5.22}$$

Spezialfälle:

$$\bigwedge^1 V^* = V^* \qquad (\alpha \in V^* \text{ heißt Linearform}) \tag{1.5.23}$$

$$\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R} \tag{1.5.24}$$

c) Das **äußere Produkt** von Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ ist die k-Form: $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k V^*$ definiert durch:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) := \det(\alpha_i(v_j)) \tag{1.5.25}$$

Beobachtungen

a) Es gilt: $\bigwedge^k V^* = \{0\} \quad \forall k > dim(V)$

b) $\phi : V \to W$ linear $\implies$ $\phi^* : \bigwedge^k W^* \to \bigwedge^k V^*$ linear, wobei $(\phi^*\omega)(\omega_1, \ldots, \omega_k) := \omega(\phi(\omega_1), \ldots, \phi(\omega_k))$

c) $V \overset{\phi}{\to} W \overset{\psi}{\to} X \quad \implies (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*, \quad (id_V)^* = id_{\bigwedge^k V^*}$

d) α, β Linearformen $\implies$ $(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)$

e) Es sei $e_1, \ldots, e_n in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ die duale Basis: $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$. Sei nun $v \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_1(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n(v_1) & \dots & \alpha_n(v_n) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{1.5.26}$$

Basis des $\bigwedge$-Raums *Proposition 5.11*

Es sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ eine Basis. Dann bilden die k-Formen

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \text{ mit } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \tag{1.5.27}$$

eine Basis von $\bigwedge^k V^*$.

Insbesondere gilt:

$$\dim(\bigwedge^k V^*) = \binom{n}{k} \tag{1.5.28}$$

Rechenregeln *Lemma 5.13*

Für $\lambda \in \bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}, \sigma \in \bigwedge^l V^*$

0.

$$\lambda \wedge \sigma := \lambda\sigma \tag{1.5.29}$$

1. Linearität

$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) \wedge \sigma = \lambda_1\omega_1 \wedge \sigma + \lambda_2\omega_2 \wedge \sigma \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},\ \omega_i \in \bigwedge^k V^*,\ \sigma \in \bigwedge^l V^* \tag{1.5.30}$$

2. Assoziativität für 1-Formen

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_l) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_l \qquad \omega_i, \sigma_j \in V^* \tag{1.5.31}$$

3. Allgemeine Assoziativität

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 \qquad \omega_i \in \bigwedge^{k_i} V^* \tag{1.5.32}$$

4. Graduierte Kummutativität (Alternierendes Gesetz)

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl}\sigma \wedge \omega \qquad \omega \in \bigwedge^k V^*,\ \sigma \in \bigwedge^l V^* \tag{1.5.33}$$

Differential k-Form *Definition 5.14*

Eine Differential k-Form auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\omega : U \to \bigwedge^k T^*U \tag{1.5.34}$$

mit

$$\pi \circ \omega = id_U \tag{1.5.35}$$

mit analog zur für die 1-Formen definierten Projektion π und Kotangentialbündel:

$$\bigwedge^k T^*U := \bigcup_{p \in U} \{p\} \times \bigwedge^k T_p^*U \tag{1.5.36}$$

$$\pi : \bigwedge^k T^*U \to U, \qquad \pi(p, \eta) = p \tag{1.5.37}$$

Eine k-Form ω hat eine eindeutige Darstellung:

$$\omega := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \tag{1.5.38}$$

mit

$$f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R} \tag{1.5.39}$$

Diese Form definieren wir als C^l, falls alle f_i mindestens $C^l(U)$ sind.

Raum von k-Formen

Als Notation verwenden wir

$$\Omega^k(U) := \{C^\infty - k - \text{Formen auf } U\} \tag{1.5.40}$$

Äußere Ableitung *Definition 5.15*

Es sei ω eine C^1-k-Form auf U mit der Darstellung aus (1.5.38). Die äußere Ableitung von ω ist die $(k+1)$-Form

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots i_k}}{\partial x_l} \, \mathrm{d}x_l}_{\mathrm{d}f_{i_1,\ldots,i_k}} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \tag{1.5.41}$$

Als Notation verkürzt man diesen Ausdruck als

$$\omega := \sum_{|I|=k} F_I \, \mathrm{d}x_I \tag{1.5.42}$$

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{|I|=k} \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}x_I \tag{1.5.43}$$

Rechenregeln *Lemma 5.16*

1. Linearität:

$$\mathrm{d}(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \,\mathrm{d}\omega_1 + \lambda_2 \,\mathrm{d}\omega_2\,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},\ \omega_i \in \Omega^k(U) \tag{1.5.44}$$

2. Leibniz-Regel:

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \sigma) = \mathrm{d}\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\sigma\,, \qquad \omega \in \Omega^k(U),\ \sigma \in \Omega^l(U) \tag{1.5.45}$$

3. $\mathrm{d}^2 = 0$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0, \qquad \omega \in \Omega^k(U) \tag{1.5.46}$$

Poincaré-Lemma *Proposition 5.17*

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $\omega \in \Omega^k(G)$. Falls ω geschlossen ist, so ist sie auch exakt. Dies ist analog zur Exaktheit von 1-Formen, nur erweitert.

Voraussetzungen

G sternförmig
$\omega \in \Omega^k(G)$ geschlossen

Pullback / Rücktransport / Zurückgezogene Form *Definition 5.18*

Wir wollen eine Form in einem Raum in eine Form in einen anderen Raum bringen. Dafür definieren wir für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^l$, eine $C^1(V)$ Abbildung $\phi : V \to U$ und eine Form $\omega \in \Omega^k(U)$ den "Pullback"

$$\phi^*\omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \phi)\, \mathrm{d}\phi_I \tag{1.5.47}$$

Rechenregeln *Lemma 5.19*

a) $\phi^*(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\phi^*\omega_1 + \lambda_2\phi^*\omega_2$ $\qquad \lambda_i \in \mathbb{R},\ \omega_i \in \Omega^k(U)$
b) $\phi^*(\omega \wedge \sigma) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\sigma,$ $\qquad \omega \in \Omega^k(U), \sigma \in \Omega^l(U)$
c) $\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega)$ $\qquad \omega \in \Omega^k(U)$

Trafo-ähnliche Formel für Pullback *Proposition 5.20*

Für zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $\phi : V \xrightarrow{C^1} U$ und eine n-Form $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \in \Omega^n(U)$ gilt:

$$\phi^*\omega = (f \circ \phi) \cdot \det J_\phi \cdot \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n \tag{1.5.48}$$

Voraussetzungen

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen
$\phi \in C^1(V)$
$\omega \in \Omega^n(U)$

1.6 Integralsätze

1.6.1 Integration von Differentialformen

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Wir schreiben $(t_1, \ldots, t_k) \in \Omega$. Somit ist $\{\mathrm{d}t_i\} \in T_p^*\Omega$ eine Basis. Wir schreiben $\{\partial_{t_i}\} \in T_p\Omega$ für die Dualbasis. So erhalten wir Vektorfelder

$$\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_k} : \Omega \to T\Omega \tag{1.6.1}$$
$$\partial_{t_i}(p) = (p, \partial_{t_i}) \tag{1.6.2}$$

Wir schreiben $\partial_i = \partial_{t_i}$ wenn der Kontext es klar macht, dass $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ gilt.

Wie von einer Basis und einer dualen Basis zu erwarten ist, gilt

$$\mathrm{d}t_i\left(\partial_j\right) = \delta_{ij} \tag{1.6.3}$$

und im Vergleich zum $\mathbb{R}^n$ existiert ein Isomorphismus

$$T_p\Omega \cong \mathbb{R}^k \tag{1.6.4}$$
$$\partial_i \leftrightarrow e_i \tag{1.6.5}$$

Integral von Differentialformen *Definition 6.1*

Voraussetzungen

f stetig
Ω offen

Es sei $\omega = f(t)\,\mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k$ eine stetige / integrierbare k-Form auf der offenen / messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Dann schreiben wir

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega \omega_t(\partial_i, \ldots, \partial_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k \tag{1.6.6}$$
$$= \int_\Omega f(t_1, \ldots, t_k)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k \tag{1.6.7}$$

als das Integral von ω über Ω.

Integral über Untermannigfaltigkeit *Definition 6.1*

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die von einer Karte $\phi : \Omega \xrightarrow{\cong} M$ überdeckt wird. Außerdem sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subset U$ und ω eine stetige k-Form auf U. Dann gilt:

$$\int_M \omega := \int_\Omega \phi^*\omega \tag{1.6.8}$$

Es gilt übrigens

$$\int_\Omega \phi^*\omega = \int_\Omega \omega_{\phi(t)}(\partial_i(\phi), \ldots, \partial_k(\phi))\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k \tag{1.6.9}$$

Das Integral von ω über M hängt bis auf ein Vorzeichen nicht von der Wahl der Karte ab.

1.6.2 Orientierung und Mannigfaltigkeiten mit Rand

Orientierbarkeit *Definition 6.2*

Eine Untermannigfaltigkeit M heißt orientierbar, falls Karten $\phi_i : \Omega_i \xrightarrow{\cong} W_i \subset M$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

i) $\bigcup_{i \in I} W_i = M$

ii) Alle Kartenwechsel haben positive Jakobi-Determinante:

$$\det J_{\phi_i^{-1} \circ \phi_j}(t) > 0 \qquad \forall\, t \in \phi_j^{-1}(W_i \cap W_j),\ \forall\, i, j \in I \tag{1.6.10}$$

Untermannigfaltigkeit mit Rand *Definition 6.3*

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand vom Grad C^l, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $W \subset M$, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine C^l-Immersion $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gibt, die $\Omega \cap \mathbb{R}^k_-$ homöomorph auf W abbildet. Dabei sind

$$\mathbb{R}^k_- := \left\{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \leq 0\right\} \tag{1.6.11}$$

$$\partial\mathbb{R}^k_- := \left\{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_1 = 0\right\} \tag{1.6.12}$$

What.

$\mathbb{R}^k_-$ ist also der "euklidische Halbraum". Ist wie der euklidische Raum, aber bei einer Koordinate wird alles rechts von der 0-Achse / Ebene rausgeschnitten. Der Rand von dieser Menge ist dann genau alles was auf der 0-Achse / Ebene steht. Dann können wir eine Untermannigfaltigkeit, auf deren Rand wir keine offene Umgebung W finden würden, mit diesem Halbraum schneiden: $\Omega \cap \mathbb{R}^k_-$. Die Aussage ist, dass man von diesem Schnitt durch einen Homömorphismus auf eine Menge $W \subset M$ abbildet.

Die Punkte in $\phi\left(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^k_-\right)$ heißen Randpunkte von M, diese Menge wird als Rand von M mit ∂M bezeichnet.

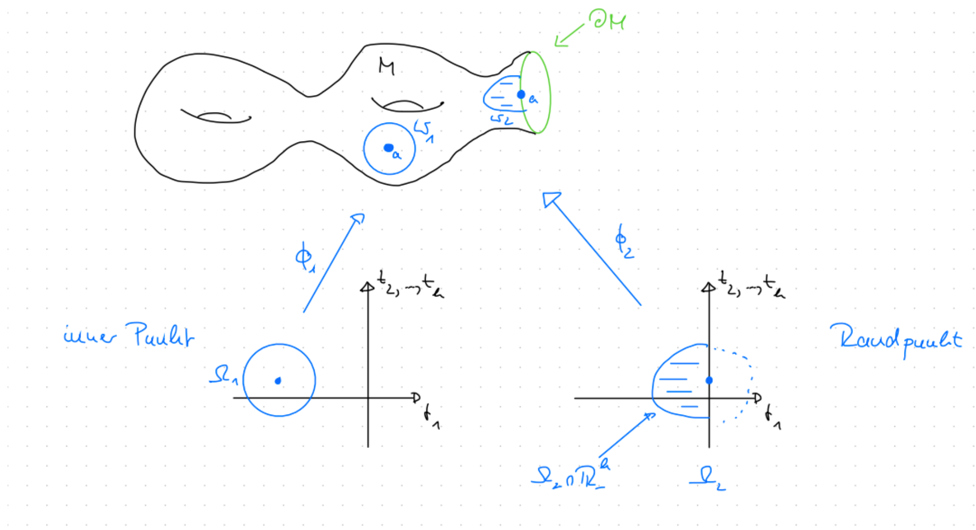

Abbildung 1.4: Rand von M

Der Rand ist ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit vom Grad $k-1$. Der Rand selbst hat keinen Rand.

1.6.3 Die Integralsätze von Gauß und Stokes

Gaußscher Integralsatz *Theorem 6.5*

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand, orientiert durch die Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ ($T_pM \cong \mathbb{R}^n$). Es sei ω eine auf einer offenen Umgebung von M definierte stetig differenzierbare $(n-1)$-Form. Dann gilt:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{1.6.13}$$

Voraussetzungen

$M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
n-dim. UMfkt.
mit Rand,
ω stetig diffbar. $(n-1)$-Form

Integralsatz von Stokes *Theorem 6.6*

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale orientierte Untermannigfaltikeit mit Rand ∂M mit der induzierten Orientierung. Es sei ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf M. Dann gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{1.6.14}$$

Voraussetzungen

$M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,
k-dim. UMfkt.
mit Rand,
ω stetig diffbar. $(n-1)$-Form

Der Unterschied: Stokes gilt für alle Untermannigfaltigkeit der Dimension k, die in $\mathbb{R}^n$ reinpassen.

Geschlossene Untermannigfaltigkeiten *Korollar*

Für geschlossene Untermannigfaltigkeiten M, d.h. kompakte und mit $\partial M = \emptyset$ orienteirte k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, und eine exakte, stetige k-Form α auf M gilt:

$$\int_M \alpha = 0 \tag{1.6.15}$$

Voraussetzungen

M geschlossen,
α stetig, exakte k-Form

Orientierungserhaltende Diffeomorphismen *Lemma*

Für kompakte, k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ und einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\Psi : M \xrightarrow{\cong} N$ gilt:

$$\int_M \Psi^*\omega = \int_N \omega \tag{1.6.16}$$

für alle $\omega \in \Omega^k(N)$

Voraussetzungen

M, N kompakt, k-dim. UMfkt
Ψ orientierungserhaltender Diffeo.

1.6.4 Die klassische Formulierung der Integralsätze

Gaußscher Integralsatz *Theorem 6.7*

Für die Bedingungen, die im Gaußschen Satz gestellt werden, nämlich $M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\omega \in \Omega^n(M)$, finden wir ein Analog in der Vektoranalysis mit dem traditionellen Satz von Gauß über die Divergenz eines Vektorfeldes.

Voraussetzungen

M kompakt, n-dim. UMfkt. mit Rand,
$\mathbf{v}$ stetig diffbares. Vektorfeld

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf (einer offenen Umgebung von) M mit dem äußeren Normalenfeld

$$\mathbf{n} : \partial M \to \mathbb{R}^n \tag{1.6.17}$$

mit

$$\mathbf{n}(p) \perp T_p\partial M, \ |\mathbf{n}(p)| = 1 \qquad \forall\, p \in \partial M \tag{1.6.18}$$

Dann gilt:

$$\int_M div\, \mathbf{v}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial M} \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{n}(x) \rangle \, \mathrm{d}S(x) \tag{1.6.19}$$

1.6.5 Zusammenfassung: Differentialformen

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Theorie:

1. Eine Differential k-Form ω ist ein Schnitt

$$\omega : U \to \Lambda^k T^*U := \bigcup -p \in U\{p\} \times \Lambda^k T_p^* U$$

Das heißt:

$$p \to (p, \omega_p) \qquad \omega_p \in \Lambda^k T_p^* U \cong \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$

und die kanonische Projektion ist:

$$\pi \circ \omega = id_U$$

Um zu zeigen, dass ω k-Form ist, zeige multilinear und alternierend

i) Produktstruktur:

Für k-Form ω und l-Form σ ist:

$$(\omega \wedge \sigma)_p := \omega_p \wedge \sigma_p \in \Lambda^{k+l} T^* U$$

mit

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega$$

ii) Darstellung:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} := \sum_{|I|=k} f_I \, \mathrm{d}x_I$$

iii) Totales Differential:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\sum_{|I|=k} f_I \, \mathrm{d}x_I \right) = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I$$

2. Eigenschaften:

i) d ist linear

ii) Erfüllt Leibnizregel:

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \sigma) = \mathrm{d}\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\sigma$$

iii) $\mathrm{d}^2 = 0$

iv) ω ist geschlossen genau dann, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$

Pullback:

$V \subset \mathbb{R}^k$ offen

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : V \xrightarrow{C^1} U$$

$$\phi^* \omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \phi) \, \mathrm{d}\phi_I$$

ist eine k-Form auf V

1. Eigenschaften
   i) ϕ^* ist linear
   ii) $\phi^*(\omega \wedge \sigma) = \phi^* \omega \wedge \phi^* \sigma$
   iii) $\mathrm{d}\phi^* \omega = \phi^* \, \mathrm{d}\omega$
2. Rechnung

   Der Pullback ist analog zu einer Substitution.

   ...

Integration:

1. Dualität

   Ist $U = G$ sternförmiges Gebiet, ω geschlossen, dann ist ω exakt
2. Kurvenintegrale

   Ist ω eine stetige 1-Form, $\gamma : [a, b] \to U$ stückweise C^1, dann ist

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, \mathrm{d}t$$

   Wann gilt: $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2}$?

   - Wenn U offen und zusammenhängend und $\omega = \mathrm{d}f$, $f : U \to \mathbb{R}$ ist exakt.

3. Integration

   Für $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\omega = f(t)\,\mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k\,(t_1, \ldots, t_k) \in \Omega$ ist:

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}_{t_k}$$

   Ist M eine Mannigfaltigkeit, $\phi : \Omega \to M$ eine Karte, so dass $M \subset U$ und ω stetige Form auf U, so gilt ebenfalls:

$$\int_M \omega := \int_\Omega \phi^* \omega$$

2. Abarrotes / Beispiele und Gegenbeispiele

2.1 Maßtheorie

1. σ-Algebren über $\mathbb{N}$, deren Vereinigung keine σ-Algebra ist:
   i) $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{N}\}$
   ii) $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \mathbb{N} \setminus \{2\}, \mathbb{N}\}$
2. Mengen, durch welche sich die Borell-σ-Algebra erzeugen lässt:
   i) $\mathcal{K} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}$
   ii) $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^n\}$
   iii) $\mathcal{L} := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}$
   iv) $\mathcal{A} := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}$
3. Maßraum mit überabzählbar viele Atomen[1]:

   $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_{\#})$ mit

$$\begin{aligned} \mu_{\#} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\to [0, \infty] \\ A &\mapsto \#A \end{aligned}$$

   mit $\#A$ entsprechend der Kardinalität der Menge
4. Menge mit überabzählbar viele Elemente, aber mit Maß 0:

   Cantor-Menge
5. Menge mit $\lambda(A) = c$ für $c \in [0, \infty]$ und $A \subset \mathbb{R}$:
   i) offen:

$$A := \begin{cases} (0, c) & c \neq 0 \\ \emptyset & c = 0 \end{cases}$$

Danke an meinen Tutor Steffen und seine Lösungen der Präsenzblätter amen

[1]Credit an Paul Polosan, Ruben Heinrich, Konrad Kockler

ii) abgeschlossen:

$$A := \begin{cases} [0,c] & c \neq 0 \\ \emptyset & c = 0 \end{cases}$$

iii) kompakt:

Erreichbar bis auf $c = \infty$, da nach Heine Borel sind die kompakten Mengen in $\mathbb{R}$ gleich den beschränkten + abgschlossen

iv) abzählbar:

A abzählbar, falls $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ und

$$\lambda(A) = 0$$

also nur möglich für $c = 0$

v) dicht:

Betrachte Intervall I mit $\lambda(I) = c$ und bilde $I \cup \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Alle c möglich.

vi) überabzählbar:

Alles möglich, betrachte Intervall und Cantor-Menge für $c = 0$

2.2 Integrationstheorie:

1. Punktweise Konvergenz in L^p

   i) Folge messbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n\|_p = 1$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

   "Dreieck", was sich weg vom Ursprung bewegt:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   f_1 messbar da stetig und $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_1| = 1$ als auch $\|f_1\|_p = 1$

   Definiere: $f_n(x) := f_1(x-n), n \in \mathbb{N}$

   sup und lim gelten immernoch, aber jetzt gilt: $\forall\, x \in \mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ s.d. $x - N < 0$, also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

   ii) Folge messbarer Funktionen $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\|g_n\|_p = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathcal{B}([0,1])$ mit $\lambda(Q) = 0$, s.d. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \ \forall\, x \in [0,1] \setminus Q$

   Wähle $Q = C$ Cantor-Menge mit $\mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $C = \bigcap C_n$. Definiere $g_n := \left(\frac{3}{2}\right)^n \mathbb{1}_{C_n}$. Es gilt: $\|g_n\|_p = 1$ und $g_n(x) = 0 \ \forall\, x \in [0,1] \setminus C$

   iii) Folge messbarer Funktionen $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\|h_n\|_p \to 0$ aber $\limsup_{n\to\infty} h_n(x) = 3 \ \forall\, x \in [0,1]$

   Setze

$$\begin{aligned} &A_1 := [0,1] \\ &A_2 := [0,1/2] && A_3 := [1/2,1] \\ &A_4 := [0,1/4] && A_5 := [1/4,1/2] && \dots \end{aligned}$$

   Definiere: $h_n := 3 \cdot \mathbb{1}_{A_n}$

2. Integrierbare Funktion:

   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, $\mathcal{I}(f) := \{q \in [1,\infty] \mid f \in L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)\}$, $I \subset [1,\infty]$ ein offenes Intervall. Eine messbare Funktion $f_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{I}(f) = I$ ist.

   Sei I der Form (a,b) mit $1 \le a < b \le \infty$. Wir betrachten: $f_1 = x^{-\frac{1}{a}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Dann gilt:

$f \in L^\infty$ da beschränkt

$$\int_{[0,\infty)} |f_1|^p \,\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} \lim\limits_{c\to\infty} \left[\frac{1}{1-\frac{p}{a}} x^{1-\frac{p}{a}}\right]_c^1 & p \neq a \\ \lim\limits_{c\to\infty} [\log x]_c^1 & p = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} \infty & p \in [1,a) \\ \frac{1}{\frac{p}{a}-1} & p \in (a,\infty] \end{cases} \\ \infty & p = a \end{cases}$$

und $\mathcal{I}(f_1) = (a, \infty]$

Betrachte $f_2 := x^{-\frac{1}{b}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}$ mit $b < \infty$. Analog zu f_1 bekommt man: $\mathcal{I}(f_2) = [1, b)$.

Definiere $f := f_1 + f_2$

Dann ist $f \in L^q$ für $q \in (a, b)$

3. Borel-messbare Funktion mit $f : [0,1] \to [0,\infty)$ mit $f \in L^q([0,1])\ \forall\, q \in [1,2)$ aber $f \ni L^2([0,1])$ ist $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}$

2.3 Produktmaße:

1.

2.4 Integration auf Untermannigfaltigkeiten:

1. Good to know: Parametrisierungen
   i) Torus:
      (a) Als Nullstellenmenge mit der Funktion $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 - r^2 = 0$ mit R Radius vom Ursprung zum Zentrum des Rohres und r Radius vom Rohr.
      (b) Als Fläche eingebettet in $\mathbb{R}^4$:
$$\begin{aligned}\varphi_1 : (0, 2\pi) &\to S^1(R)\\ \vartheta_1 &\mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta_1 & R\cos\vartheta_1 \end{pmatrix}\\ \varphi_2 : (0, 2\pi) &\to S^1\end{aligned}$$
      (c) Als Fläche eingebettet in $\mathbb{R}^3$:
$$(\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} (R - r\cos\varphi)\cos\vartheta & (R - r\cos\varphi)\sin\vartheta & r\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \vartheta, \varphi \in (0, 2\pi)$$
   ii) Sphäre:
      (a) Als Nullstellenmenge mit $f(x,y,z) = r^2 - R^2 = 0$
      (b) Als Fläche
$$(\vartheta, \varphi) \mapsto R\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \vartheta \in (0, \pi)\ \varphi \in (0, 2\pi)$$
2. Untermannigfaltigkeiten:
   i) I.A. ist der Schnitt und die Vereinigung zweier Untermannigfaltigkeiten keine Untermannigfaltigkeit (siehe Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ die Koordinatenachsen)
   ii) Das kartesische Produkt zweier Untermannigfaltigkeiten *ist wieder* eine Untermannigfaltigkeit