5. Übungsblatt zur Theoretischen Physik (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

5.1 Aufgabe 1

Bemerkung: Die folgenden Taylor-Reihen sind nicht alle in einem unendlichen Intervall konvergent, aber Konvergenzradien sind noch nicht in den Vorlesungen erwähnt worden.

a) Geg.: $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Ges.: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$

Mit der Allgemeinen Formel

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(a) Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1-x)^{-2}(-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(1-x)^{-3}(-1) \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$...$$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\to f^n(0) = n!$$

(b) In die allgemeine Formel einsetzen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}(x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{n} x^n\end{aligned}$$

b) Geg.: $f(x) = \sin x$

Ges.: Taylor-Entwicklung um $x_0 = \frac{\pi}{2}$

(a) Ableitungen berechnen:

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$...$$

(b) Ableitungen um die Entwicklungsstelle untersuchen:

$$f^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$...$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

(c) In die allgemeine Formel einsetzen:

Nur die geraden n-ten Ableitungen sind ungleich null, also können wir $2n$ in den entsprechenden Stellen einsetzen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

c) Geg.: $f(x) = \arctan x$

Ges.: Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$

(a) Ableitungen berechnen:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

...

(b) Taylor-Reihe aufstellen

Wir wissen, dass

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

und aus Teilaufgabe a) wissen wir, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n} x^n$$

durch Substitution mit $z = -x^2$ erhalten wir:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-z}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int \frac{1}{1-z} dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

Um C zu bestimmen setzen wir $x = 0$

$$\arctan(0) = C$$

$$C = 0$$

Also

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

d) Geg.:

- $\sin 0.1 = 0.099833$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ges.: m für welches $\sin 0.1 \approx \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{0.1^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm 10^{-5}$

Lsg.:

Für m=1: $\sin 0.1 \approx 0.1$

Für m=2: $\sin 0.1 \approx 0.099833$

Also müssen wir die Taylorreihe bis auf den zweiten Glied entwickeln um einen bis auf 10^{-5} genauen Wert bei $x = 0.1$ zu erhalten

5.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $m\ddot{x} = F(x)$
- $F(x) = -m\omega^2 x$
- $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$
- $\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$
- $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$

Ges.: E_{ges}

Lsg.:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{m\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} \end{aligned}$$

Am Umkehrpunkt einer Schwingung gilt $\dot{x} = 0$ und $x = x_{max}$, somit ist die Gesamtenergie nur die vorhandene Potentialenergie

Mit $\hat{x} = x_{max}$ und

$\hat{\dot{x}} = \dot{x}_{max}$ für die Ruhelage.

Es gilt:

$$E_{ges} = \frac{m\hat{v}^2}{2} = \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

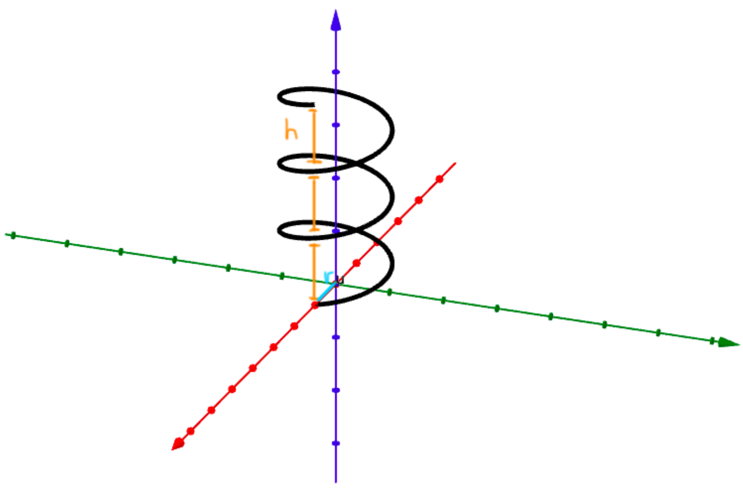
also

$$k = m\omega^2$$

Zu jedem Zeitpunkt gilt:

$$\begin{aligned}
E_{ges} &= \frac{m\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} \\
&= \frac{m}{2}(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)^2 + \frac{k}{2}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2 \\
&= \frac{m}{2}(A^2\omega^2\cos^2\omega t + B^2\omega^2\sin^2\omega t) + \frac{m\omega^2}{2}(A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t) \\
&= \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{m}{2}B^2\omega^2\sin^2\omega t + \frac{m\omega^2}{2}A^2\sin^2\omega t + \frac{m\omega^2}{2}B^2\cos^2\omega t \\
&= \frac{m\omega^2A^2}{2}(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + \frac{m\omega^2B^2}{2}(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) \\
&= \frac{m\omega^2A^2}{2} + \frac{m\omega^2B^2}{2} \\
&= \text{const}
\end{aligned}$$

5.3 Aufgabe 3



Geg.:

- $v_0 = 0$
- Energierhaltungssatz:

  $E_{kin} = \frac{m\dot{x}^2(t)}{2}$

$E_{pot} = mg\vec{e_z}$

$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const}$

- $\varphi = \varphi(t)$

Ges.: $\vec{x}(t)$

Lsg.: Parametrisierung von $\vec{x}(\varphi)$

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ a\varphi \end{pmatrix}$$

Dabei hängen unser Parameter a und die Höhe h einer Umdrehung wie folgt zusammen:

$$h = 2\pi a$$

Laut des Energieerhaltunssatzes gilt:

$$E_{ges} = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + mgz$$

Bestimme $\dot{\vec{x}}(\varphi)$:

$$\dot{\vec{x}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ a\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= \frac{m\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}}{2} + mgz && (1) \\ &= \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + a^2\dot{\varphi}^2) + mgz && (2) \\ &= \frac{m}{2}[r^2\dot{\varphi}^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2\dot{\varphi}^2] + mgz && (3) \\ &= \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\varphi}^2) + mgz && (4) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = a\varphi$ und entsprechend $\dot{z} = a\dot{\varphi}$ können wir die Gleichung umformulieren:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= \frac{m}{2}\left(r^2 \cdot \frac{a^2}{a^2}\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\right) + mgz && (5) \\ &= \frac{m}{2}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\right) + mgz && (6) \\ &= \frac{m}{2}\left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz && (7) \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Energieerhaltunssatz an:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{m}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2(\ddot{z}\dot{z} + \dot{z}\ddot{z}) + \frac{m}{2}(\ddot{z}\dot{z} + \dot{z}\ddot{z}) + mg\dot{z} \tag{8}$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2(2\ddot{z}\dot{z}) + \frac{m}{2}(2\ddot{z}\dot{z}) + mg\dot{z} \tag{9}$$
$$= m\left(\frac{r}{a}\right)^2(\ddot{z}\dot{z}) + m(\ddot{z}\dot{z}) + mg\dot{z} \tag{10}$$

Wir können die gemeinsamen Vorfaktoren wegkürzen und erhalten somit eine Differentialgleichung 2. Grades:

$$0 = \ddot{z}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1\right] + g \tag{11}$$
$$\rightarrow \ddot{z} = \frac{-g}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} \tag{12}$$

Integrieren wir zweimal nach t und erhalten:

$$\dot{z} = \int \frac{-g}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} dt \tag{13}$$
$$= \frac{-gt}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + C_1 \tag{14}$$

$$z = \int \left[\frac{-gt}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + C_1\right] dt \tag{15}$$
$$= \frac{-1}{2}\frac{gt^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + C_1 t + C_2 \tag{16}$$

Die Anfangsbedigungen $v_0 = 0$ müssen noch erfüllt werden, also

$$\dot{z}(0) = 0 = \frac{-g0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + C_1 \tag{17}$$
$$= 0 + C_1 \tag{18}$$
$$= C_1 \tag{19}$$

Und zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden wir uns ganz oben auf der Rutschbahn, also

$$z(0) = 3h = 6\pi a = \frac{-1}{2}\frac{g0^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + C_1 0 + C_2 \tag{20}$$
$$= 0 + 0 + C_2 \tag{21}$$
$$= C_2 \tag{22}$$

Die Gleichung für z(t) sieht dann wie folgt aus:

$$z(t) = \frac{-1}{2}\frac{gt^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1} + 6\pi a$$

Nun müssen wir die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ noch in Abhängigkeit der Zeit definieren und wir wissen, dass

$$z(t) = a\varphi(t)$$

und daraus

$$\varphi(t) = \frac{z(t)}{a}$$

Setzen wir dies in unsere ursprüngliche Trajektorie ein und wir erhalten

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{z(t)}{a} \\ r\sin\frac{z(t)}{a} \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\frac{\frac{-1}{2}\frac{gt^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1} + 6\pi a}{a} \\ r\sin\frac{\frac{-1}{2}\frac{gt^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1} + 6\pi a}{a} \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\frac{-1}{2}\frac{agt^2}{r^2+a^2} + 6\pi \\ r\sin\frac{-1}{2}\frac{agt^2}{r^2+a^2} + 6\pi \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\frac{-agt^2}{2(r^2+a^2)} \\ r\sin\frac{-agt^2}{2(r^2+a^2)} \\ \frac{-1}{2}\frac{gt^2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2+1} + 6\pi a \end{pmatrix} \tag{26}$$

5.4 Aufgabe 4

Geg.:

- $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2 z \end{pmatrix}$

- Quadrat mit den Eckenpunkten an
  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lsg.: Kurvenintegral:

Strecke AB:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_0^1 2x^2 - 3ydx \text{ mit } y = 0 \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}x^3|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Strecke BC:

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_0^1 4yzdy \\ &= 2y^2z|_0^1 \\ &= 2z \end{aligned}$$

Strecke CD:

$$\begin{aligned} W_{CD} &= \int_1^0 2x^2 - 3ydx \text{ mit } y = 1 \\ &= \int_1^0 2x^2 - 3dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 3x|_1^0 \\ &= -\frac{2}{3} + 3 \end{aligned}$$

Strecke DA:

$$\begin{aligned} W_{DA} &= \int_1^0 4yzdy \\ &= 2y^2z|_1^0 \\ &= -2z \end{aligned}$$

Gesamtarbeit:

$$
\begin{aligned}
W_{ges} &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \\
&= \frac{2}{3} + 2z - \frac{2}{3} + 3 - 2z \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Flächenintegral:

$$
\begin{aligned}
\text{rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2 z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - 4y \\ 0 - 6xz \\ 0 + 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 [\text{rot } \vec{F}] dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 3 dx dy \\
&= \int_0^1 3 dy \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Und $3 = 3$, also kann man an diesem Beispiel die beiden Ansätzen des Satzes von Stokes zeigen.