9. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

9.1 Aufgabe 1

Geg.:

- $\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = f\cos\eta t$

a) Geg.:

- $\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$
- $c = \frac{5}{2}\omega$

$$\ddot{x} + \frac{5\omega}{2}\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad |x \sim e^{\alpha t} \tag{1}$$
$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{5\omega}{2}\alpha e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0 \tag{2}$$
$$e^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{5\omega}{2}\alpha + \omega^2\right) = 0 \qquad |e^{\alpha t} \neq 0 \tag{3}$$
$$\alpha^2 + \frac{5\omega}{2}\alpha + \omega^2 = 0 \tag{4}$$
$$\alpha_{1,2} = -\frac{5\omega}{4} \pm \sqrt{\frac{25\omega^2}{16} - \omega^2} \tag{5}$$
$$= -\frac{5\omega}{4} \pm \sqrt{\frac{9\omega^2}{16}} \tag{6}$$
$$= -\frac{5\omega}{4} \pm \frac{3\omega}{4} \tag{7}$$
$$\alpha_1 = -\frac{\omega}{2} \tag{8}$$
$$\alpha_2 = -2\omega \tag{9}$$
$$\rightarrow x_1 = C_1 e^{-\frac{\omega}{2}t} \tag{10}$$
$$x_2 = C_2 e^{-2\omega t} \tag{11}$$
$$\rightarrow x = C_1 e^{-\frac{\omega}{2}t} + C_2 e^{-2\omega t} \tag{12}$$

Es handelt sich um einen Kriechfall, denn $\frac{c}{2} > \omega$.

b) Um die partikuläre Lösung zu finden, probieren wir mit dem Ansatz:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = f e^{i\eta t} \qquad |x = Ae^{i\eta t} \tag{13}$$
$$\left[A\left(-\eta^2 + c\eta i + \omega^2\right)\right] e^{i\eta t} = f e^{i\eta t} \tag{14}$$
$$A\left(-\eta^2 + c\eta i + \omega^2\right) = f \tag{15}$$

$$A = \frac{f}{-\eta^2 + c\eta i + \omega^2} = |A|e^{i\varphi} \tag{16}$$

Dabei ist

$$\mathrm{Re}(x(t)) = |A| \cos(\eta t + \varphi) \tag{17}$$

Die Amplitude ist

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \eta^2)^2 + c^2\eta^2}} \\ &= \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \eta^2)^2 + \frac{25\omega^2\eta^2}{4}}} \end{aligned}$$

Und die Phasenverschiebung ist

$$\varphi = \arctan\left(\frac{c\eta}{\eta^2 - \omega^2}\right) \tag{18}$$

Im Fall von Resonanz $\eta \to \omega$

Ist die Amplitude

$$|A| = \frac{f}{\sqrt{\frac{25\omega^2\eta^2}{4}}} \tag{19}$$

$$= \frac{2f}{5\omega\eta} \tag{20}$$

Und die Phasenverschiebung

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$

Da $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

c) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist die Summe der homogenen Lösung und der partikulären Lösung die wir gerade gefunden haben.

$$x = C_1 e^{-\frac{\omega}{2}t} + C_2 e^{-2\omega t} + |A| \cos(\eta t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -\frac{C_1\omega}{2} e^{-\frac{\omega}{2}t} - 2C_2\omega e^{-2\omega t} - |A|\eta \sin(\eta t + \varphi) \tag{22}$$

Wir überprüfen die Anfangsbedingungen um die Lösung des Anfangswertproblems zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= C_1 + C_2 + |A|\cos\varphi && (23)\\ C_1 &= -C_2 - |A|\cos\varphi && (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 &= \frac{-C_1\omega}{2} - 2C_2\omega - |A|\eta\sin\varphi && (25)\\ &= \frac{(C_2 + |A|\cos\varphi)\omega}{2} - 2C_2\omega - |A|\eta\sin\varphi && (26)\\ |A|\eta\sin\varphi &= C_2\left(\frac{\omega}{2} - 2\omega\right) + \frac{|A|\omega\cos\varphi}{2} && (27)\\ |A|\eta\sin\varphi &= -\frac{3C_2\omega}{2} + \frac{|A|\omega\cos\varphi}{2} && (28)\\ 2|A|\eta\sin\varphi &= -3C_2\omega + |A|\omega\cos\varphi && (29)\\ 2|A|\eta\sin\varphi - |A|\omega\cos\varphi &= -3C_2\omega && (30)\\ C_2 &= \frac{-2|A|\eta\sin\varphi + |A|\omega\cos\varphi}{3\omega} && (31)\\ &= |A|\left(\frac{-2\eta\sin\varphi}{3\omega} + \frac{\cos\varphi}{3}\right) && (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2|A|\eta\sin\varphi - |A|\omega\cos\varphi}{3\omega} - |A|\cos\varphi && (33)\\ &= |A|\left(\frac{2\eta\sin\varphi}{3\omega} - \frac{4\cos\varphi}{3}\right) && (34) \end{aligned}$$

Daran erkennt man:

$$C_1 = -C_2 \qquad (35)$$

Die Lösungs unseres Anfangswertproblems ist dann

$$\begin{aligned} x = |A|\left(\frac{2\eta\sin\varphi}{3\omega} - \frac{4\cos\varphi}{3}\right)e^{-\frac{\omega}{2}t} - |A|\left(\frac{2\eta\sin\varphi}{3\omega} - \frac{4\cos\varphi}{3}\right)e^{-2\omega t} && (36)\\ + |A|\cos(\eta t + \varphi) && (37) \end{aligned}$$

Wir kennen schon aber die Amplitude und die Phasenverschiebung im Resonanzfall, also setzen wir nochmal ein:

$$x = \frac{2f}{5\omega\eta}\left(\frac{2\eta}{3\omega}\right)e^{-\frac{\omega}{2}t} - \frac{2f}{5\omega\eta}\left(\frac{2\eta}{3\omega}\right)e^{-2\omega t} + \frac{2f}{5\omega\eta}\cos\eta t \qquad (38)$$

$$= \frac{4f}{15\omega^2} e^{-\frac{\omega}{2}t} - \frac{4f}{15\omega^2} e^{-2\omega t} + \frac{2f}{5\omega\eta} \cos \eta t \tag{39}$$

Wir berechnen die maximale Energie in der Gleichgewichtslage, also setzen wir die zweite Ableitung gleich 0:

$$\ddot{x} = \frac{-2f}{15\omega} e^{-\frac{\omega}{2}t} + \frac{8f}{15\omega} e^{-2\omega t} - \frac{2f}{5\omega} \sin \eta t \tag{40}$$

Die Energie wird nicht erhalten, denn dem Oszillator eine periodisch treibende Kraft zugeführt wird.

9.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $F_R = \mu_H mg$

a) Geg.:

  - $a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$

Die Kraft des Sprinters, die er selbst steuern kann ist gleich die Reibungskraft die ihm entgegen wirkt:

$$F = F_R \tag{41}$$
$$ma_g = \mu_H mg \tag{42}$$
$$a_g = \mu_H g \tag{43}$$

Im Vergleich zum Eisenbahnwagen ist seine maximale Beschleunigung a_s die Gesamtbeschleunigung minus die Beschleunigung des Wagens, also

$$a_s = a_g - a(t) \tag{44}$$

Seine Geschwindigkeit ist also

$$\int_0^t a_s dt' = \int_0^t a_g - a(t')dt' \tag{45}$$
$$= \int_0^t a_g dt' - \int_0^t a_0 e^{-\gamma t'} dt' \tag{46}$$
$$= a_g t + \left[\frac{a_0 e^{-\gamma t'}}{\gamma} \right]_0^t \tag{47}$$
$$= a_g t + \frac{a_0 e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{a_0}{\gamma} \tag{48}$$
$$v_s = \mu_H g t + \frac{a_0 e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{a_0}{\gamma} \tag{49}$$

Wenn der Wagen zusätzlich mit einer konstante Kraft beschleunigt wäre, dann wär die gesamte Kraft

$$F = (M+m)a_w + ma_s \tag{50}$$

$$\begin{align} g\mu_H &= a_s + a_w \tag{51}\\ a_w &= g\mu_H - a_s \tag{52}\end{align}$$

$$\begin{align} F &= (M+m)(g\mu_H - a_s) + ma_s \tag{53}\\ &= (M+m)g\mu_H - (M+m)a_s + ma_s \tag{54}\\ F-(M+m)g\mu_H &= -Ma_s \tag{55}\\ \frac{F-(M+m)g\mu_H}{-M} &= a_s \tag{56}\\ v_s &= \int \frac{F-(M+m)g\mu_H}{-M} \tag{57}\\ &= \frac{F-(M+m)g\mu_H}{-M}t \tag{58}\end{align}$$

9.3 Aufgabe 3

Geg.:

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

$r_R = 100$

$\omega = \frac{2\pi}{86400\ s}$

- Kräfte:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m[R^{-1}\ddot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}] \tag{59}$$

  Da $\dot{\omega} \approx 0$ und wir keine Beschleunigung des Ursprungs $\ddot{r}_0$ haben, so können wir nur mit der Corioliskraft $F_C = 2m\omega \times \dot{r}$ und der Zentrifugalkraft $F = m\omega \times (\omega \times r)$ rechnen

- Unsere drei Basisvektoren zeigen in die Richtungen Norden $\vec{e}_N$, Osten $\vec{e}_O$ und hin zum Erdzentrum in Radialrichtung $\vec{e}_R$. Der Vektor $\vec{\omega}$ lässt sich wie folgt als eine Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_R$ und $\vec{e}_N$ schreiben:

$$\vec{\omega} = \omega \sin\varphi \vec{e}_R + \omega \cos\varphi \vec{e}_N \tag{60}$$

- Außerdem ist $|\omega|^2 \approx 0$, also fällt jetzt zusätzlich die Zentrifugalkraft weg.

- Die Gesamtkraft ist jetzt also

$$
\begin{align}
m\ddot{\vec{r}} &= F - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \tag{61}\\
&= mg\vec{e}_R - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \tag{62}\\
\ddot{\vec{r}} &= g\vec{e}_R - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \tag{63}\\
& \tag{64}
\end{align}
$$

Im Grenzfall $\vec{\omega} = 0$ ist die Beschleunigung also

$$
\ddot{\vec{r}} = g\vec{e}_R \tag{65}
$$

- Im Allgemeinen haben wir aber jetzt:

$$
\ddot{\vec{r}} = g\vec{e}_R - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \qquad\qquad g\vec{e}_R \equiv \vec{g} \tag{66}
$$

Uns interessiert eine Gleichung für $\vec{r}$

$$
\vec{v} = \int \vec{g}dt' = \vec{g}t + \vec{v}_0 \tag{67}
$$

$$
\vec{r}_0 = \int \vec{v}dt' = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0 \tag{68}
$$

Seien v_0 und x_0 gleich 0

So fehlt dann

$$
\omega\vec{u}(t) = \iint -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}dt'dt' \tag{69}
$$

Bestimmen wir $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$:

$$
\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad\qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}_N \\ \dot{r}_O \\ \dot{r}_R \end{pmatrix} \tag{70}
$$

$$
\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\dot{r}_O \sin\varphi \\ \dot{r}_N \sin\varphi - \dot{r}_R \cos\varphi \\ \dot{r}_O \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{71}
$$

Dadurch ist

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}t^2}{2} - 2w \iint \begin{pmatrix} -\dot{r}_O \sin\varphi \\ \dot{r}_N \sin\varphi - \dot{r}_R \cos\varphi \\ \dot{r}_O \cos\varphi \end{pmatrix} dt' dt' \tag{72}$$

Wir interessieren uns vor allem für den Faktor der in Richtung Osten wirkt, $\dot{r}_N$ und $\dot{r}_O$ sind vernachlässigbar klein. Also in Richtung Osten bleibt nur $\dot{r}_R \cos\varphi$ übrig:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \frac{\vec{g}t^2}{2} - 2\omega \iint \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{r}_R \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dt' dt' & \Big| \dot{r}_R = \int \ddot{r}_R dt = gt \qquad (73) \\
&= \frac{\vec{g}t^2}{2} + 2\omega \iint \begin{pmatrix} 0 \\ gt \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dt' dt' & (74) \\
&= \frac{\vec{g}t^2}{2} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gt^3}{6} \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dt' dt' & (75) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega g t^3}{3} \cos\varphi \\ \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix} & \Big| t = \sqrt{\frac{2r_R}{g}} \qquad (76) \\
& & (77)
\end{aligned}$$

Die Ablenkung in Richtung Osten ist also:

$$\begin{aligned}
r_O(h) &= \frac{\omega g \sqrt{\frac{2r_R}{g}}^3}{3} \cos\varphi & (78) \\
&= \frac{2\omega r_R \sqrt{\frac{2r_R}{g}}}{3} \cos\varphi & (79) \\
&\approx 0.0155 \text{ m} & (80)
\end{aligned}$$

9.4 Aufgabe 4

Der vollständig antisymmetrische zweidimensionale Tensor ε^{ij} kann komponentenweise als eine Matrix dargestellt werden:

$$\varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

Denn $\varepsilon^{11} = 0$, $\varepsilon^{12} = 1$, $\varepsilon^{21} = -1$ und $\varepsilon^{22} = 0$

Um diesen Tensor in ein um 60° gedrehtes Koordinatensystem zu transformieren brauchen wir eine Matrix, die eine Rotation beschreibt, eine solche Matrix im zwei dimensionalen Fall ist

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{82}$$

Die Multiplikation des Tensors mit der Matrix ergibt

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

9.5 Aufgabe 5

i.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} && |\text{L'Hospital} \quad (83) \\ &= 1 && (84) \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} && |\text{L'Hospital} \quad (85) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} && (86) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-x^{-1}} && (87) \\ &= \lim_{x\to 0} -x && (88) \\ &= 0 && (89) \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{5x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x}} && (90) \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{5x \ln\left(1-\frac{2}{x}\right)} && |\text{Betrachte: } x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) \quad (91) \\ \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) & && |\text{L'Hospital} \quad (92) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x^{-1}} && (93) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x(x-2)}}{-x^{-2}} && (94) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{1-\frac{2}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} \tag{95}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1-\frac{2}{x}} \tag{96}$$

$$= -2 \qquad \Big| \text{Zurück zu } \lim_{x\to\infty} e^{5x(1-\frac{2}{x})} \tag{97}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{5\cdot(-2)} \tag{98}$$

$$= e^{-10} \tag{99}$$

iv.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{4x^3} \qquad \Big|\text{L'Hospital (mehrmals)} \tag{100}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{12x^2} \tag{101}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}}{24x} \tag{102}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + (12x^2+3)(1-x^2)^{-3}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{24} \tag{103}$$

$$= \frac{1+3}{24} \tag{104}$$

$$= \frac{1}{6} \tag{105}$$

v.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x \ln x} \tag{106}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos x \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x \ln x} \qquad \Big| \cos 0 = 1 \tag{107}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x \ln x} \tag{108}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\ln x} \qquad \Big|\text{L'Hospital} \tag{109}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}{x^{-1}} \tag{110}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\cos x \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{x^{-1}} \tag{111}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin^2 x} \qquad \Big|\text{L'Hospital} \tag{112}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sin x \cos x} \tag{113}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \tag{114}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} && (115)\\
&= -\frac{1}{2}\infty && (116)\\
&= -\infty && (117)
\end{aligned}
$$

vi.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{\sinh^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2x\cos 2x}{2\sinh x\cosh x} && |\text{L'Hospital} \quad (118)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cosh x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2x\cos 2x}{\sinh x} && (119)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2x\cos 2x}{\sinh x} && (120)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sinh x} + \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos 2x}{\sinh x}\right) && (121)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sinh x} + \lim_{x\to 0}2\cos 2x\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}\right) && (122)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sinh x} + 2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}\right) && |\text{L'Hospital} \quad (123)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cosh x} + 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cosh x}\right) && (124)\\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} && (125)\\
&= 2 && (126)
\end{aligned}
$$