10. Übungsblatt zur Linearen Algebra (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

10.1 Aufgabe 1

10.2 Aufgabe 2

Geg.:

- $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$
- $B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\text{Mat}_{BB} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

  $\text{Mat}_{CC}(f) = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&1&0\\1&2&1&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$
- $\text{Mat}_{BC}(f) = \begin{pmatrix}-4&-4&-2&-6&-5\\1&1&-10&-9&-1\\10&10&12&18&10\\-7&-7&14&12&0\end{pmatrix}$

a) Zunächst formen wir die folgenden Vektoren in die Standardbasis um:

$$f(b_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \text{Mat}_{CC}(f) \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\10\\-7\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$f(b_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Mat}_{CC}(f) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$f(b_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Mat}_{CC}(f) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$f(b_4) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Mat}_{CC}(f) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$f(b_5) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Mat}_{CC}(f) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Wir definieren: $E \equiv$ Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, $I \equiv$ Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

$$f(e_5) = f(b_5) \tag{11}$$
$$f(e_4) = f(b_4) - f(b_5) \tag{12}$$
$$f(e_3) = f(b_3) - f(b_4) - f(b_5) = f(b_3) - f(e_4) \tag{13}$$
$$f(e_2) = f(b_2) - f(e_3) \tag{14}$$
$$f(e_1) = f(b_1) - f(e_2) \tag{15}$$

Dann ist:

$$f(e_4) = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{18}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Somit ist die Matrixdarstellung von f mit den jeweiligen Standardbasen:

$$\mathrm{Mat}_{EI}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

b) Um den Kern zu bestimmen suchen wir alle Elemente die auf die 0 abgebildet werden. Dafür lösen wir das Gleichungssystem:

$$\mathrm{Mat}_{EI}(f) \cdot x = 0 \tag{25}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{13} \tag{26}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{41}(-2) \tag{27}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{31}(-3) \tag{28}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{2}\left(\frac{1}{3}\right) \tag{29}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{32}(-3) \tag{30}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{41}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{31}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{23}\left(-\frac{1}{3}\right) \tag{32}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z^{23}\left(-\frac{1}{3}\right) \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

Daran erkennen wir:

$$x_5 = 0 \tag{35}$$

$$x_2 - \frac{2}{3}x_4 = 0 \tag{36}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_4 \tag{37}$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \tag{38}$$

$$x_3 = -x_1 - 3x_4 \tag{39}$$

Eine Basis des Kerns von f ist:

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

c) Sei n die Dimension des Bilds von f, dann braucht man n linear unabhängige Vektoren um eine Basis des Bilds zu bestimmen. Nach der Dimensionsformel ist:

$$\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im(f)}) \tag{41}$$
$$5 = 2 + \dim(\mathrm{im(f)}) \tag{42}$$
$$\dim(\mathrm{im(f)}) = 3 \tag{43}$$

Drei linear unabhängige Vektoren des Bildes von f sind, wie in der Matrixdarstellung vorgegeben:

$$e_1, e_2, e_4 \tag{44}$$

10.3 Aufgabe 4

Geg.:

- $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eine Determinantenform ist

$$\delta(v_1, v_2, v_3) = \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{45}$$
$$= \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{46}$$
$$= \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{47}$$
$$+ \delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{48}$$
$$= \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \tag{49}$$

$$+ t^2\delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + t\delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{50}$$

$$= \delta\left(\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{51}$$

$$+ \delta\left(\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{52}$$

$$+ t^2\delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + t\delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{53}$$

$$= 0 + xt\delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{54}$$

$$+ yt\delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) + xy\delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{55}$$

$$- t^2 + xt\delta\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \tag{56}$$

$$= xt + yt - xy - t^2 \tag{57}$$

Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit ist, dass der letzte Ausdruck gleich 0 ist:

$$0 = xt + yt - xy - t^2 \tag{58}$$

$$= t^2 - xt - yt + xy \tag{59}$$

$$= t^2 - t(x+y) + xy \tag{60}$$

$$t_{1,2} = \frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy} \tag{61}$$

$$= \frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4} - \frac{2xy}{4}} \tag{62}$$

$$= \frac{x+y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2} \tag{63}$$

$$= \frac{x+y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x-y)^2} \tag{64}$$

$$= \frac{x+y}{2} \pm \frac{x-y}{2} \tag{65}$$

$$t_1 = \frac{2x}{2} = x \tag{66}$$

$$t_2 = \frac{2y}{2} = y \tag{67}$$