7. Übungsblatt zur Linearen Algebra I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

7.1 Aufgabe 1: LAdventskalendar

Vektorraumhomomorphismus

7.2 Aufgabe 2: Beispiel eines Faktorraums

a) $zz: W_X \neq \emptyset$
Beweis:

$$\forall X \subseteq R : \text{Abb}(R, 0) \in W_X$$

$zz: \forall u, w \in W_X : (u + w) \in W_X$
Beweis:

$$\begin{aligned}
&\forall u, w \in W_X, \forall x \in X : u(x) = w(x) = 0 \\
\Rightarrow &\forall x \in X : u(x) + w(x) = 0 \\
\Rightarrow &(u + w) \in W_X
\end{aligned}$$

$zz: \forall a \in X, w \in W_X : (a \cdot w \in W_X)$
Beweis:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in X, w \in W_X, \forall x \in X : w(x) = 0 \\
\Rightarrow &\forall a, x \in X : a \cdot w(x) = 0 \\
\Rightarrow &(a \cdot w) \in W_X
\end{aligned}$$

b) $zz: W_X$ ist endlichdimensional $\Leftrightarrow R \setminus X$ ist endlich
Beweis:

$$\begin{aligned}
&B_X := \{f \in W_X | \exists! x \in R : f(x) \neq 0 \land \exists! x \in R : f(x) = 1\} \\
\Rightarrow &B_X \text{ ist Basis von } W_X \land |B_X| = |R \setminus X| \\
\Rightarrow &|R \setminus X| = \text{ dim } W_X \\
\Rightarrow &(W_X \text{ ist endlichdimensional } \Leftrightarrow R \setminus X \text{ ist endlich})
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\text{Sei } \pi : &V \to W/W_X \\
&f \mapsto [f]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (f, g \in V : \forall x \in X : f(x) = g(x) \Leftrightarrow \pi(f) = \pi(g)) \\
&\Rightarrow \forall f \in V : \exists! [f] \in V/W_X : \forall h \in [f], \forall x \in X : h(x) = f(x) \\
&\Rightarrow V/W_X \text{ ist zu Abb } (X, R) \text{ als R-Vektorraum isomorph.}
\end{aligned}$$

d) $zz : X$ist endlich$\Leftrightarrow V/W_X$ ist endlichdimensional
Beweis:

$$|X| = \dim \text{Abb}(X, R) = \dim V/W_X$$
$$\Rightarrow X \text{ ist endlich} \Leftrightarrow V/W_X \text{ ist endlichdimensional}$$

7.3 Aufgabe 3: Dualraum

Wir wissen, dass

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \varphi_i \in B^*, x_j \in B$$

O.B.d.A. ist $x \in B$.

Wenn $\forall \varphi \in V^*$ gilt $\varphi(x) = 0$, dann ist auch im Fall $i = j$ $\varphi_i(x_j) = 0$, was ein Widerspruch zu unserer Definition ist. Dies ist nur der Fall, falls x kein Element der Basis sein darf, also falls $x = 0$ $\forall x \in V$.

7.4 Aufgabe 4:

a) Geg.:

- $A = \begin{bmatrix} [1] & [1] \\ [0] & [2] \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} [2] & [2] \\ [0] & [1] \end{bmatrix}$
- $A, B \in \text{Mat}(2, 2, \mathbb{F}_3)$

Z.z.: $A \cdot B = B \cdot A$

$$\begin{bmatrix} [1] & [1] \\ [0] & [2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [2] & [2] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2] & [0] \\ [0] & [2] \end{bmatrix} \tag{1}$$
$$\begin{bmatrix} [2] & [2] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1] & [1] \\ [0] & [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2] & [0] \\ [0] & [2] \end{bmatrix} \tag{2}$$

Die beiden Matrizen kommutieren.

b) Geg.:

- $C = \begin{bmatrix} x & 1 & -8 \\ 5 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $x \in \mathbb{R}$
- $C, D \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{R})$

Z.z.: $C \cdot D = D \cdot C$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & -8 \\ 5 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6-x & 2x-18 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 & -8 \\ 5 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ -3x+20 & -1 & -2 \\ -x+10 & 0 & -5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wir können sehen, die Matrizen C und D kommutieren, falls $x = 6$