10. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___ Σ___

10.1 Aufgabe 1

Zunächst arbeiten wir mit der Ampere-Maxwell Gleichung, denn sie berücksichtigt den Fall einer "Stromlücke", wie zum Beispiel durch einen Kondensator erzeugt, durch welche kein tatsächlicher Strom fließt, aber wo sich ein Magnetfeld wegen der Stetigkeit befinden muss. Stattdessen wird der sogenannte "Verschiebungsstrom" eingeführt, was durch die Änderung des Magnetfeldes bzw. der dielektrischen Verschiebung zustande kommt.

$$\oint \mathbf{B} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \int \mathbf{j} \, \mathrm{d}\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \dot{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{1}$$

Dabei wissen wir folgendes:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2}$$

$$\dot{\Phi}_E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{3}$$

$$= \int \dot{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{4}$$

Das ist dann also schon ein Teil des Ausdrucks, den wir suchen. Zusätzlich gilt:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Big| \sigma = \frac{Q}{A_k} \tag{5}$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 A_k} = \frac{\Phi_E}{A(r)} \tag{6}$$

Dabei bezeichnet A_k die Fläche des Plattenkondensators und $A(r)$ die von uns betrachtete Fläche in Abhängigkeit des Radius r. Damit gilt:

$$\Phi_E = \frac{QA(r)}{\varepsilon A_k} \tag{7}$$

$$= \frac{Qr^2}{\varepsilon_0 r_0^2} \tag{8}$$

und

$$\dot{\Phi}_E = \frac{\dot{Q} r^2}{\varepsilon_0 r_0^2} \tag{9}$$

Hier ist $\dot{Q} = I$ der Strom, den wir abhängig von unserer Wahl der Fläche "einschließen", dabei nehmen wir an, dass der "Verschiebungsstorm" oder die "Verschiebungsstromdichte" homogen auf der Fläche des Kondensators verteilt ist. Durch die Spannung U und der Widerstand R wird also ein Strom I erzeugt, welches auch auf die andere Seite des Kondensators will.

$$\oint \mathbf{B} \; \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \int \mathbf{j} \; \mathrm{d}\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{I r^2}{\varepsilon_0 r_0^2} \tag{10}$$

Da innerhalb des Kondensators die Stromdichte verschwindet, ist dann:

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{r_0^2} \tag{11}$$

$$B = \mu_0 \frac{I r}{2\pi r_0^2} \tag{12}$$

Außerhalb des Leiters können wir eine Fläche finden, durch welche der Strom tatsächlich durchfließt, das heißt für unser Magnetfeld, dass sich das elektrische Feld nicht mehr ändert, aber dass die Stromdichte nicht verschwindet. Es gilt also:

$$\oint \mathbf{B} \; \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 I \tag{13}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{14}$$

Für das Magnetfeld ausgehend eines geraden ausgedehnten Leiters haben wir in vorigen Übungsblätter gefunden, dass es folgendes ergibt:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{15}$$

Wenn wir $r = r_0$ nehmen, dann finden wir, dass das Magnetfeld im Kondensator und im Leiter tatsächlich genau gleich sind.

10.2 Aufgabe 2

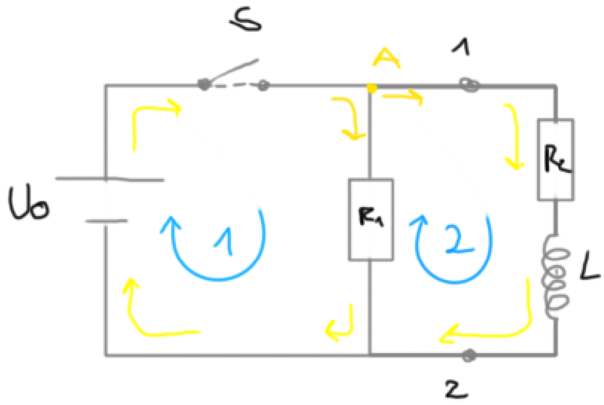

Abbildung 1: Zündspule

a) Über die Kirchhoffsche Regeln kann man die relativen Verhältnissen zwischen den Strömen I_1, I_2 und I_0 erkennen. Wir wissen, im Knoten A teile sich der Strom I_0 in die verschiedenen Richtungen durch die Widerstände R_1 und R_2, also gilt:

$$I_1 + I_2 = I_0 \tag{16}$$

Per die Maschenregel erkennen wir, dass es in Maschen 1 und 2 folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned} &1. && U_0 - I_1 R_1 = 0 && (17)\\ &2. && U_0 - I_2 R_2 = 0 && (18)\\ & && \rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 && (19) \end{aligned}$$

Diese Größen können wir mit Gleichung 16 in Abhängigkeit von I_0 setzen:

$$I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = I_0 \tag{20}$$

$$I_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) = I_0 \tag{21}$$

$$I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{22}$$

und

$$I_2 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{23}$$

b) Beim Ausschalten wird der Stromfluss was durch die Spannung erzeugt wird unterbrochen, und der sich in der Masche befindenen Strom wird in Kreis durch die Widerstände R_1, R_2 und durch die Spule L laufen. Zusätzlich wird eine Spannung U_{ind} induziert, aufgrund der Änderung des Stromflusses in der Spule. Zwischen den Punkten 1 und 2 wird also kurzfrisitg eine sehr hohe Spannung induziert.

c) Kurz nach dem Ausschalten, dadurch dass durch Masche 1 kein Strom mehr fließt, wirkt die Anordnung wie eine Reihenschaltung der Widerstände R_1 und R_2. Dies entspricht eben dem Ausschaltvorgang den wir aus der Vorlesung kennen, wobei $R = R_1 + R_2$ und $\frac{U}{R} = I_2$. Wir benutzen zur Einfachheit also folgende Formel:

$$I_1(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \tag{24}$$
$$= I_2\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \tag{25}$$

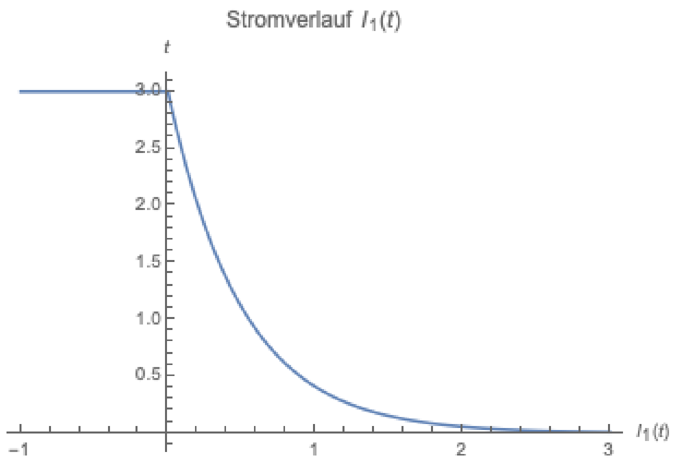

Abbildung 2: Stromverlauf I_1

d) Unmittelbar nach dem Ausschalten messen wir die Spannung U_1' und U_2':

$$U_1' = R_1 I_1(0) \tag{26}$$
$$= R_1 I_2 \qquad |I_2 = \frac{U_0}{R_2} \tag{27}$$
$$= \frac{R_1}{R_2}U_0 \tag{28}$$
$$U_2' = R_2 I_1(0) \tag{29}$$
$$= R_2 I_2 \tag{30}$$
$$= U_0 \tag{31}$$

e) Geg.:

- $U_0 = 3$ V
- $R_1 = 10 \cdot 10^3\ \Omega$
- $R_2 = 10\ \Omega$

Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten 1 und 2 ergibt sich aus dem Unterschied dieser zwei Spannungen:

$$U_1' - U_2' = U_0\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \tag{32}$$
$$\approx 3 \cdot 10^3 \text{ V} \tag{33}$$

Die erreichte Hochspannung ist unabhängig von der Induktivität der Spule L, weil diese Spannung zum Zeitpunkt $t = 0$ erreicht wird, dabei hat die induzierte Spannung noch keine Zeit gehabt um der anderen Spannung entgegen zu wirken.

Um danach die Induktivität der Spule zu optimieren, müssen wir uns überlegen, was das beste Nutzen einer Zündspule wäre. Die Funkendauer dauert nach Wikipedia zwischen $0,02$ und $0,2$ Millisekunden. Das heißt, es muss sich sehr schnell entladen und wieder aufladen müssen. Eine hohe Induktivität verzögert den Entladungsvorgang, deswegen ist eine geringe Induktivität bei einer Zündspule wünschenswert.

10.3 Aufgabe 3

a) Gegeben sind zwei RC-Filterschaltungen bestehend aus je einem Wiederstand R_1, R_2 und einem Kondensator C_1, C_2. An der Schaltung liegt eine Wechselstrom U_e. Folgende Werte sind für die Bauteile angegeben:

R_1	$50\ \Omega$	R_2	$100\ \Omega$
C_1	500 pF	C_2	1.25 nF

Tabelle 1: Caption

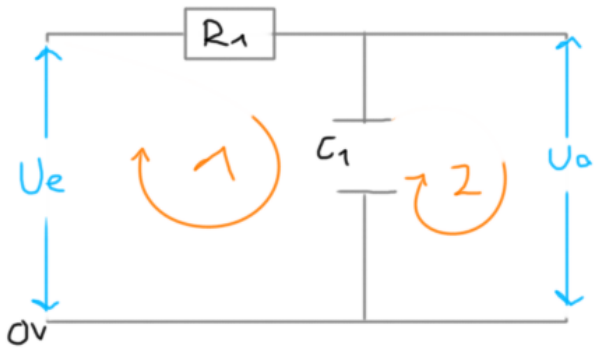

Abbildung 3: Filter A

Sei $\hat{Z}_1 = \dfrac{1}{i\omega C_1}$ der komplexe Widerstand des Kondensators. Aus den Kirchhoffschen Regeln lässe sich aus Masche 1 und 2 erkennen, dass:

$$U_e = (R_1 + \hat{Z}_1)I \tag{34}$$

$$U_a = \hat{Z}_1 I \tag{35}$$

Nach Auflösen nach I und Gleichsetzen erhalten wir:

$$\frac{U_e}{R_1 + \hat{Z}_1} = \frac{U_a}{\hat{Z}_1} \tag{36}$$

$$U_a = \frac{\hat{Z}_1}{R_1 + \hat{Z}_1} \cdot U_e \tag{37}$$

Da wir uns gerade für die Amplitude konzentrieren, können wir im Folgenden mit den Beträgen von U_a und U_e rechnen:

$$|U_a| = \left|\frac{\frac{1}{i\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}}\right| \cdot |U_e| \qquad | \cdot \frac{R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}}{R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}} \tag{38}$$

$$= \left|\frac{1 - iR_1\omega C_1}{R_1^2\omega^2 C^2 + 1}\right| \cdot |U_e| \tag{39}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{R_1^2\omega^2 C_1^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{R_1\omega C_1}{R_1^2\omega^2 C_1^2 + 1}\right)^2} \cdot |U_e| \tag{40}$$

$$= \dots \tag{41}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+R_1^2\omega^2C_1^2}} \cdot |U_e| \tag{42}$$

Daraus lässt sich folgern, dadurch dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Eingagsspannung maximal ist, dass die Amplitude der Ausgangspannung die folgende ist:

$$\hat{U}_a = \frac{U_{e,0}}{\sqrt{1+R_1^2\omega^2C_1^2}} \tag{43}$$

Nun bestimmen wir Real- und Imaginärteil von U_a. Zuerst der Vorfaktor:

$$\frac{\hat{Z}_1}{R_1+\hat{Z}_1} = \frac{\frac{1}{i\omega C_1}}{R_1+\frac{1}{i\omega C_1}} \cdot \frac{R_1-\frac{1}{i\omega C_1}}{R_1-\frac{1}{i\omega C_1}} \tag{44}$$

$$= \frac{\frac{R_1}{i\omega C_1}+\frac{1}{\omega C_1}}{R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2}} \tag{45}$$

$$= \frac{R_1}{i\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})} + \frac{1}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} \tag{46}$$

$$= -\frac{R_1}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})}i + \frac{1}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} \tag{47}$$

Re und Im der e-Fkt ergeben sich durch:

$$U_{e,0}e^{i\omega t} = U_{e,0}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \tag{48}$$

Somit gilt:

$$U_a = \left(-\frac{R_1}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})}i + \frac{1}{1+R_1^2\omega^2C_1^2}\right) \cdot U_{e,0} \cdot (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \tag{49}$$

$$= \frac{\cos(\omega t)}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} - \frac{R_1\sin(\omega t)}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})} - \frac{\cos(\omega t)R_1}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})}i + \frac{\sin(\omega t)}{1+R^2\omega^2C_1^2}i \tag{50}$$

$$\mathrm{Re}(U_a) = \frac{U_{e,0}\cos(\omega t)}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} - \frac{U_{e,0}R_1\sin(\omega t)}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})} \tag{51}$$

$$\mathrm{Im}(U_a) = -\frac{U_{e,0}\cos(\omega t)R_1}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})} + \frac{U_{e,0}\sin(\omega t)}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} \tag{52}$$

Da wir uns lediglich für die Cosinusfunktion interessieren, rechnen wir von nun an mit dem Realteil weiter. Nun bestimmen wir die Phasenverschiebung ϕ:

$$\hat{U}_a\cos(\omega t-\phi) = \mathrm{Re}(U_a(t)) \tag{53}$$

$$\frac{U_{e,0}}{\sqrt{1+R_1^2\omega^2C_1^2}}\cos(\omega t-\phi) = \frac{U_{e,0}\cos(\omega t)}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} - \frac{U_{e,0}R_1\sin(\omega t)}{\omega C_1(R_1^2+\frac{1}{\omega^2C_1^2})} \tag{54}$$

An der Stelle $t = 0$, da dort der Cosinus maximal ist.

$$\frac{U_{e,0}}{\sqrt{1+R_1^2\omega^2C^2}}\cos(-\phi) = \frac{U_{e,0}}{1+R_1^2\omega^2C_1^2} \tag{55}$$

$$\iff \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+R_1^2\omega^2C_1^2}} \tag{56}$$

$$\iff \phi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+(R_1\omega C_1)^2}}\right) \tag{57}$$

(Da $R_1\omega C > 0$, gilt die Identität)

$$\iff \phi = \arctan(R_1\omega C) \tag{58}$$

$$\tag{59}$$

Für den Filter B erhalten wir durch analoge Rechnung, indem wir den Kondensator und den Widerstand vertauschen:

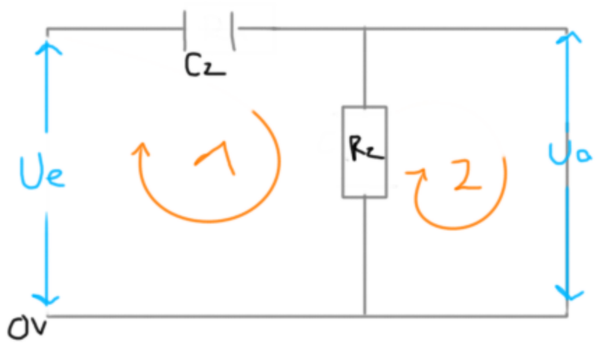

Abbildung 4: Filter B

$$|U|_a = \left|\frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}}\right| \cdot |U_e| \tag{60}$$

$$= \left|\frac{R_2^2\omega^2C_2^2 + iR_2\omega C_2}{R_2^2\omega^2C_2^2 + 1}\right| \cdot |U_e| \tag{61}$$

$$= \dots \tag{62}$$

$$= \sqrt{\frac{R_2^2\omega^2C_2^2}{1+R_2^2\omega^2C_2^2}} \cdot |U_e| \tag{63}$$

$$\rightarrow \hat{U}_a = \sqrt{\frac{R_2^2\omega^2C_2^2}{1+R_2^2\omega^2C_2^2}} \cdot U_{e,0} \tag{64}$$

Für später, zum einfacher rechnen:

$$\sqrt{\frac{R_2^2\omega^2C_2^2}{1+R_2^2\omega^2C_2^2}} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2C_2^2}}} \tag{65}$$

Um den „Kosinus-Teil“zu bestimmen, ermitteln wir wieder den Realteil der komplexwertien Funktion.

$$\frac{R_2}{R_2+\hat{Z}_2} = \frac{R_2}{R_2+\frac{1}{i\omega C_2}} \cdot \frac{R_2-\frac{1}{i\omega C_2}}{R_2-\frac{1}{i\omega C_2}} \tag{66}$$

$$= \frac{R_2^2 - R_2\frac{1}{i\omega C_2}}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} \tag{67}$$

$$= \frac{R_2^2}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} + \frac{R_2}{C\omega(R_2^2+\frac{1}{\omega C_2})}i \tag{68}$$

Real- und Imaginärtteil der e-Fkt wurden bereits in Teil A bestimmt. Somit können wir rechnen

$$\mathrm{Re}(U_a(t)) = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{R_2^2}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} + \frac{R_2}{C_2\omega(R_2^2+\frac{1}{\omega C_2})}i\right) \cdot U_0 \cdot (\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\right) \tag{69}$$

$$= \frac{U_0 R_2^2\cos(\omega t)}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{U_0 R_2 \sin(\omega t)}{C_2\omega(R_2^2+\frac{1}{\omega C_2})} \tag{70}$$

Und die Phasenverschiebung ϕ berechnen wir wie oben.

$$\hat{U}_a \cdot \cos(\omega t - \phi) = \mathrm{Re}(U_a(t)) \tag{71}$$

$$\frac{U_0 R_2}{\sqrt{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}}}\cos(\omega t-\phi) = \frac{U_0 R_2^2\cos(\omega t)}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} - \frac{U_0 R_2\sin(\omega t)}{C\omega(R_2^2+\frac{1}{\omega C_2})} \tag{72}$$

$(t = 0)$

$$\frac{U_0 R}{\sqrt{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}}}\cos(-\phi) = \frac{U_0 R_2^2}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} \tag{73}$$

$$\iff \cos(-\phi) = \frac{U_0 R_2^2}{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}} \frac{\sqrt{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}}}{U_0 R} \tag{74}$$

$$\iff \cos(-\phi) = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}}} \tag{75}$$

$$\iff -\phi = \arccos\left(\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+\frac{1}{\omega^2 C_2^2}}}\right) \tag{76}$$

$$\iff \phi = -\arccos\left(\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2(1+\frac{1}{\omega^2 C_2^2 R_2^2})}}\right) \tag{77}$$

$$\iff \phi = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega C_2 R_2)^2}}}\right) \tag{78}$$

$$\iff \phi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega C_2 R_2}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\omega C_2 R_2}\right) \tag{79}$$

b) Plots

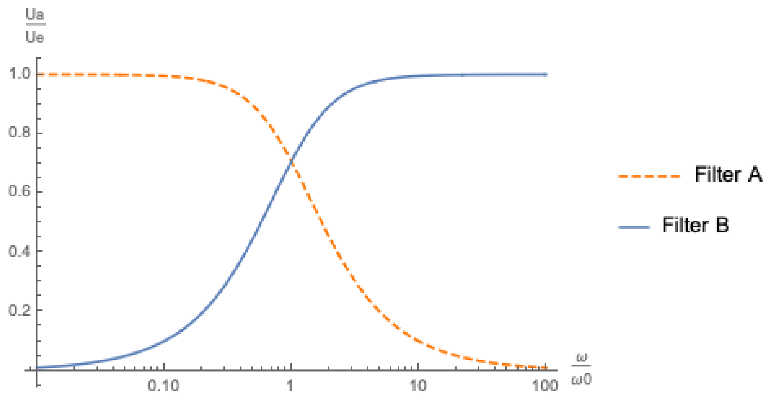

Abbildung 5: Verhältnis $\dfrac{U_a}{U_e}$

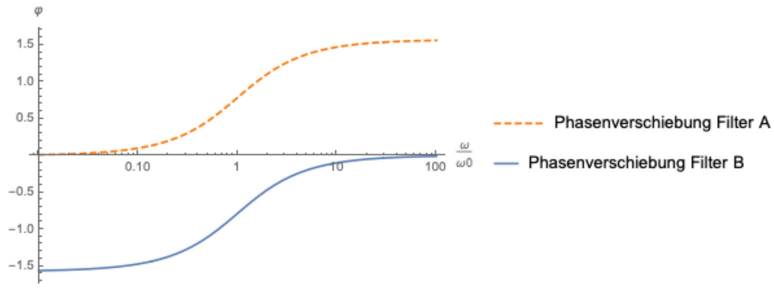

Abbildung 6: Phasenverschiebung ϕ

c) Die Amplitude des ersten Filters ist größer für kleinere Frequenzen $\dfrac{\omega}{\omega_0}$. Die Spannung, die man dem Filter entziehen kann ist fast gleich groß wie die Spannung die man eingibt, also werden hier große Frequenzen rausgefiltert. Im Gegenteil ist die Amplitude des Filters B am größten für höhere Frequenzen, das heißt kleinere Spannungen werden rausgefiltert.

Für die Phasenverschiebung am Filter A beobachten wir, dass für höhere Frequenzen die Verschiebung gegen $\dfrac{\pi}{2}$ geht, kommt die Spannung am Kondensator eine viertel Periode spät. Im Filter B passiert das Gegenteil, für kleine Frequenzen kommt die Spannung eine viertel Periode zu früh und für große Frequenzen werden sie wieder in Synthonie kommen.