ZUSAMMENFASSUNG LINEARE ALGEBRA I
MATHE

Lineare Algebra I

WS 20/21, Wienhard

Juan

4. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Wenn nicht explizit anders gesagt:

- M, N sind Mengen
- f ist eine Abbildung
- G ist eine Gruppe
- K ist ein Körper
- V, W sind Untervektorräume

1.1 Abbildungen

Abbildung

Eine Abbildung

$$f : M \to N \tag{1.1}$$
$$m \mapsto f(m) = n \tag{1.2}$$

ist eine Vorschrift, die ein Element aus der Menge M genau ein Element aus der Menge N zuordnet.

Identität

Die Identitätsabbildung, oder identische Abbildung

$$\mathrm{id}_M : M \to M \tag{1.3}$$
$$m \mapsto m \tag{1.4}$$

ordnet jedem Element sich selbst zu.

Kanonische Inklusion

Falls $M \subset N$ eine Teilmenge ist, dann ist

$$i : M \to N \tag{1.5}$$

$$m \mapsto m \tag{1.6}$$

die kanonische Inklusion. Jedes Element wird "auf sich selbst" abgebildet, aber in einer anderen Menge.

Einschränkung

Für eine Abbildung $f : M \to N$ und eine Teilmenge $M' \subset N$ heißt

$$f|_{M'} : M' \to N \tag{1.7}$$

$$m \mapsto n \tag{1.8}$$

die Einschränkung von f auf M'.

Urbild

Für eine Abbildung $f : M \to N$ ist die Urbildmenge eines Elements $n \in N$

$$f^{-1}(n) := \{m \in M | f(m) = n\} \tag{1.9}$$

die Menge der Elemente in M, die auf n abbilden.

Das Urbild von einer Menge $N' \subset N$ ist

$$f^{-1}(N') := \{m \in M | f(m) \in N'\} \tag{1.10}$$

Bild

Das Bild einer Menge $M' \subset M$ ist

$$f(M') := \{f(m) \in N | m \in M'\} \tag{1.11}$$

Injektivität

$$\forall x, x' \in M : \; x \neq x' \implies f(x) \neq f(x') \tag{1.12}$$

oder äquivalent

$$\forall x, x' \in M : \; f(x) = f(x') \implies x = x' \tag{1.13}$$

Jeder Wert in M hat höchstens einen Funktionswert.

Surjektivität

$$\forall y \in N, \; \exists x \in M : \implies y = f(x) \tag{1.14}$$

Jeder Wert der Zielmenge wird von mindestens einem Element der Ursprungsmenge getroffen.

Bijektivität

$$f \text{ ist surjektiv und injektiv} \tag{1.15}$$

Jedes Element der Ursprungsmenge trifft genau ein Element der Zielmenge.

Man kann Bijektivität beweisen, indem man zu einer Abbildung ϕ eine Abbildung ψ findet, sodass für alle $x \in M$ gilt: $(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x)) = x = id_N$ und $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) = x = id_M$.

Inverse Abbildung

Eine Abbildung f besitzt eine inverse Abbildung genau dann, wenn sie bijektiv ist.

$$f^{-1}(n) : N \to M \tag{1.16}$$
$$n \mapsto f^{-1}(n) = m \tag{1.17}$$

Verknüpfungen

Für zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to O$ heißt

$$g \circ f : M \to O \tag{1.18}$$
$$m \mapsto g(f(m)) \tag{1.19}$$

die Verknüpfung von g nach f.

Die Komposition ist assoziativ.

Die Komposition zweier injektiver Abbildungen ist injektiv, zweier surjektiver Abbildungen ist surjektiv und zweier bijektiver Abbildungen ist bijektiv.

1.2 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelation

Eine Relation $\sim$ heißt Äquivalenzrelation, falls es folgende Bedingungen für alle $m, n, o \in M$ erfüllt:

1. Reflexivität:

$$m \sim m \tag{1.20}$$

2. Symmetrie:

$$m \sim n \implies n \sim m \tag{1.21}$$

3. Transitivität:

$$m \sim n \land n \sim o \implies m \sim o \tag{1.22}$$

Äquivalenzklasse

Wir definieren

$$[m] := \{n \in M | m \sim n\} \subseteq M \tag{1.23}$$

als die Äquivalenzklasse zu m.

Faktormenge

Die Menge aller Äquivalenzklassen in M bezüglich $\sim$ heißt die Faktormenge oder Quotientenmenge:

$$M\backslash_{\sim} \tag{1.24}$$

Die Abbildung auf diese Menge heißt die kanonische Projektion:

$$p : M \to M\backslash_{\sim} \tag{1.25}$$

$$m \mapsto [m] \tag{1.26}$$

Kapitel 2

Vektorräume

2.1 Gruppen

2.1.1 Definition

Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \bullet)$ aus einer Menge G und einer Abbildung $\bullet$

$$\bullet : G \times G \to G, \tag{2.1}$$

die folgende Bedingungen für alle $g, h, i, g', e \in G$ erfüllt:

1. Assoziativität:

$$g \cdot (h \cdot i) = (g \cdot h) \cdot i \tag{2.2}$$

2. Rechtsneutrales Element:

$$\exists e \in G \; \forall g \in G : \tag{2.3}$$
$$g \cdot e = g \tag{2.4}$$

3. Rechtsinverses Element:

$$\forall g \in G \; \exists g' \in G : \tag{2.5}$$
$$g \cdot g' = e \tag{2.6}$$

Falls die Gruppe folgendes Kriterium erfüllt, so ist sie auch eine abelsche Gruppe.

4. Kommutativität:

$$g \cdot h = h \cdot g \tag{2.7}$$

2.1.2 Untergruppen und Homomorphismen

Untergruppen

Eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$, für welche H mit der gegebenen Verknüpfung wieder eine Gruppe ist.

$$\forall a, b \in H: \; a \cdot b^{-1} \in H \tag{2.8}$$

Mit dieser Definition können wir b so wählen, dass alle Bedingungen für eine Gruppe erfüllt sind.

Gruppenhomomorphismus

Ein Gruppenhomomorphismus zwischen zwei Gruppen $(G, \cdot_G)$ und $(H, \cdot_H)$ ist eine Abbildung $\varphi : G \to H$, die die Struktur dieser Gruppen erhält:

$$\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b) \tag{2.9}$$

In anderen Worten, es ist egal ob man zuerst zwei Elemente verknüpft und dann abbildet, oder ob man die jeweiligen Abbildungen verknüpft.

Zusätzlich gilt:

1. $$\varphi(e_G) = e_H \tag{2.10}$$

2. $$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \tag{2.11}$$

3. Für $G' \subset G$ ist $\varphi(G')$ eine Untergruppe von H.

   Insbesondere ist:

   $$\varphi(G') = \mathrm{im}(\varphi) \subset H \tag{2.12}$$

4. Für $H' \subset H$, so ist $\varphi^{-1}(H^{-1})$ eine Untergruppe von G.

   Insbesondere ist:

   $$\varphi^{-1}(e_H) =: \ker \varphi \subset G \tag{2.13}$$

5. Falls φ ein Isomorphismus ist, so gelten die vorherigen Bedingungen auch für die Umkehrabbildung φ^{-1}.

Gruppenisomorphismus

Ein Gruppenhomomorphismus ist zusätzlich ein Gruppenisomorphismus $G \cong H$, falls φ bijektiv ist.

Gruppenautomorphismus

Ein Gruppenisomorphismus $\varphi : G \to G$ heißt auch Gruppenautomorphismus.

2.2 Körper

2.2.1 Definition

Körper

Ein Körper ist ein Tripel $(K, \cdot, +)$ aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $\cdot, +$:

$$+ : K \times K \to K \qquad \text{und} \tag{2.14}$$
$$(x, y) \mapsto x + y \tag{2.15}$$
$$\bullet : K \times K \to K \tag{2.16}$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y, \tag{2.17}$$

dass folgende Bedingungen erfüllt:

1. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe
3. Distributivität:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \tag{2.18}$$
$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y \tag{2.19}$$

Ringe

Ein Ring ist auch ein Tripel $(R, +, \cdot)$, was aber nicht abelsch bezüglich der Multiplikation ist.

2.2.2 Unterkörper und Körperhomomorphismen

Unterkörper

Eine Teilmenge $L \subset K$ für die gilt $(L, +)$ und $(L \backslash \{0\}, \cdot)$ sind Untergruppen von K heißt Unterkörper von K und $(L, +, \cdot)$ ist selbst wieder ein Körper.

Körperhomomorphismus

Ein Körperhomomorphismus zwischen zwei Körpern $(K, +_K, \cdot_K)$ und $(L, +_L, \cdot_L)$ ist eine Abbildung f, ungleich der konstanten Nullabbildung für die gilt:

$$f(x +_K y) = f(x) +_L f(y) \tag{2.20}$$
$$f(x \cdot_K y) = f(x) \cdot_L f(y) \tag{2.21}$$

Körperisomorphismus

Ein Körperhomomorphismus ist ein Körperisomorphismus, falls f bijektiv ist.

Charakteristik

Die Charakteristik eines Körpers ist definiert als

$$\mathrm{char}(K) = \begin{cases} 0 & n \cdot 1_K \neq 0 \quad \forall n \in K \\ \min\{n \in \mathbb{N} | & n \cdot 1_K = 0\} \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{2.22}$$

In anderen Worten ist es die kleinste Vielfache n vom neutralen multiplikativen Element 1_K, die das neutrale additive Element 0 ergibt. Normalerweise gibt es dies in Körpern $\mathbb{F}$ der Restklassen.

2.2.3 Die komplexen Zahlen

jabajabajaba

2.3 Vektorräume

2.3.1 Definition

Vektorraum

Ein Vektorraum über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Verknüpfung

$$\bullet : K \times V \to V \tag{2.23}$$

$$(k, v) \mapsto k \cdot v \tag{2.24}$$

das folgende Bedingungen für alle $k, l \in K,\ v, w \in V$ erfüllt:

1. $$k \cdot (l \cdot v) = (kl) \cdot v \tag{2.25}$$

2. $$1 \cdot v = v \tag{2.26}$$

3. $$(k + l) \cdot v = k \cdot v + l \cdot v \tag{2.27}$$
$$k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w \tag{2.28}$$

2.3.2 Untervektorräume

Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt Untervektorraum von V falls gilt:

1. $$W \neq \emptyset \tag{2.29}$$

2.

$$v, w \in W \implies v + w \in W \qquad \text{(Abgeschlossenheit der Addition)} \tag{2.30}$$

3.

$$k \in K,\ v \in W \implies k \cdot v \in W \quad \text{(Abgeschlossenheit der skalaren Multiplikation)} \tag{2.31}$$

2.3.3 Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit, Basen

Lineare Hülle

Für eine Teilmenge $S \subset V$ sei

$$\mathcal{L}(S) := \{v \in V |\text{ v ist eine Linearkombination von Vektoren in S}\} \tag{2.32}$$

$$\mathcal{L}(\emptyset) := \{0\} \tag{2.33}$$

Die Lineare Hülle $\mathcal{L}(S)$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der S enthält. Es gilt $\mathcal{L}(S) = S$.

Erzeugendensystem

Eine Tielmenge $S \subset V$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $\mathcal{L}(S) = V$. Ein Vektorraum V ist endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $T \subset V$ gibt, so dass $\mathcal{L}(T) = V$.

Lineare Unabhängigkeit

Ein Vektor ist linear abhängig von S, falls man ihn mit der linearen Hülle $\mathcal{L}(S)$ beschreiben kann ($v \in \mathcal{L}(S)$). Andernfalls ist der Vektor linear unabhängig von S.

Eine Teilmenge $S \subset V$, falls für alle $v \in S$ v linear unabhängig von allen anderen Elementen der Teilmenge ist:

$$v \text{ ist linear unabhängig von } S \backslash \{v\} \tag{2.34}$$

S ist linear unabhängig, ist äquivalent zur Aussage:

$$\forall n \in N,\ \forall k_1, ..., k_n \in K : \tag{2.35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = k_1 v_1 + ... + k_n v_n = 0 \implies k_1 = ... = k_n = 0 \tag{2.36}$$

Falls $S \subset V$ linear unabhängig ist, und $0 \neq v \notin \mathcal{L}(S)$. Dann ist $S' = S \cup \{v\}$ auch linear unabhängig.

Basis

Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt Basis von V, wenn S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Ein Vektorraum heißt eindlich dimensional, wenn er eine endliche Basis hat.

Austauschsatz von Steinitz

Sei $T \subset V$ eine endliche Teilmenge, die V erzeugt und $S \subset V$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt:

1. $|S| \leq |T|$
2. S kann durch $|T|-|S|$ Elemente zu einem Erzeugendensystem von V ergänzt werden.

Dimension

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines endlich dimensionalen Vektorraums V wird die Dimension von V genannt. Wir schreiben $\dim(V)$.

Es gilt für $S \subset V$ linear unabhängig und $T \subset V$ ein Erzeugendensystem von V:

1. $|S| \leq \dim V$
2. S ist Basis $\iff |S| = \dim V$
3. $|T| \geq \dim V$
4. T ist Basis $\iff |T| = \dim V$
5. Jede lineare unabhängige Menge $S \subset V$ kann zu einer Basis ergänzt werden.

Für einen Untervektorraum $W \subset V$ gilt $\dim W \leq \dim V$ mit Gleichheit genau dann, wenn $W = V$

Dimensionsformel

Seien $U, W \subset V$ endlich dimensionale Untervektorräume. Dann ist $U + W$ endlich dimensional und es gilt:

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W \tag{2.37}$$

Komplement

Für $U \subset V$ ist ein Untervektorraum $U' \subset V$ das Komplement zu U, wenn gilt:

$$U \cap U' = \{0\} \qquad \text{und} \qquad U + U' = V \tag{2.38}$$

2.3.4 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear oder $K-linear$, falls für alle $v, w \in V,\ k \in K$

1.

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \tag{2.39}$$

$$f : (V,+) \to (W,+) \text{ ist ein Gruppenhomomorphismus} \tag{2.40}$$

2.

$$f(kv) = k \cdot f(v) \tag{2.41}$$

Es gilt:

1. $f(\sum_{i=1}^n k_i x_i) = \sum_{i=1}^n k_i f(x_i)\ \forall k_i \in K,\ x_i \in V$
2. Die Komposition linearer Abbildungen ist linear.
3. Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Untervektorraum ist linear.

Lineare Abbildungen nennt man auch Vektorraumhomomorphismus.

Die linearen Abbildungen

$$f_{i,a} : V \to W \qquad 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq a \leq m \tag{2.42}$$

$$\sum_{i=1}^n k_i v_i = v \mapsto k_i w_a \tag{2.43}$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$. Insbesondere ist

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim V \cdot \dim W \tag{2.44}$$

Homomormphismen:

1. Monomorphismus:

   Falls f injektiv ist.
2. Epimorphismus

   Falls f surjektiv ist.
3. Isomorphismus

   Falls f bijektiv ist. V und W sind isomorph ($V \cong W$)
4. Endomorphismus

   Falls $V = W$
5. Automorphismus

   Falls $V = W$ und f bijektiv.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W ist ein $K-$Vektorraum: $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Bild und Kern

Sei $f : V \to W$ linear:

Das Bild von f ist der Untervektorraum $\mathrm{im} f = f(V) \subset W$.

Der Kern von f ist der Untervektorraum $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subset V$.

Es gilt:

1. f ist surjektiv $\iff$ $\mathrm{im} f = W$
2. f ist injektiv $\iff$ $\ker f = \{0\}$

Dimensionsformel II

Sei V endlich dimensional und $f : V \to W$ linear. Dann ist auch $\mathrm{im} f = \mathrm{im} V$ endlich dimensional und:

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) \tag{2.45}$$

Insbesondere ist f injektiv, wenn

$$\dim V = \dim f(V) = \dim(\mathrm{im} f) \tag{2.46}$$

Eine Lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist ein Isomorphismus, genau dann, wenn

$$\dim V = \dim W \qquad \text{und} \tag{2.47}$$

$$f \text{ ein Epimorphismus oder ein Monomorphismus ist, injektiv oder surjektiv} \tag{2.48}$$

Zwei endlich dimensionale Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn ihre Dimensionen übereinstimmen. Der Isomorphismus hängt von der Wahl der Basis B ab!

Rang

Man nennt die Dimension des Bildes von f auch den Rang von f:

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim(\mathrm{im} f) \tag{2.49}$$

Linksnebenklasse

Sei G eine Gruppe und $H \subset H$ eine Untergruppe. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_H$ auf G :

$$g, g' \in G \qquad g \sim_H g' \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad g^{-1} \cdot g' \in H \tag{2.50}$$

Die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_H$ bezeichnen wir mit G/H. Die Äquivalenzklasse von $g \in G$ ist:

$$gH = \{g' = gh \in G | h \in H\} \tag{2.51}$$

Wir nennen die Äquivalenzklassen gH die Linksnebenklasse zu H. Zwei Nebenklassen sind entweder disjunkt oder gleich.

Faktorgruppe

Die Menge G/H der Linksnebenklassen zu H wird durch die Verknüpfung

$$\cdot : G/H \times G/H \to G/H \qquad \forall g, g' \in G \tag{2.52}$$

$$(gH, g'H) \mapsto gg'H \tag{2.53}$$

eine abelsche Gruppe. G/H heißt die Faktorgruppe von G nach H

Faktorrraum

Sei V ein $K-$Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum. Die Faktorgruppe V/U der Linksnebenklassen $v+U$ von V mod U wird mit der skalaren Multiplikation

$$k \cdot (v+U) := (kv) + U \tag{2.54}$$

ein Vektorraum über K. Wir nennen V/U den Faktorraum.

Die kanonische Projektion

$$p : V \to V/U \tag{2.55}$$

$$v \mapsto v + U \tag{2.56}$$

ist linear.

[somthing something Repräsentanten]

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann ist V/U endlich dimensional und es gilt:

$$\dim V/U = \dim V - \dim U \tag{2.57}$$

Homomorphiesatz für lineare Abbildungen

Seien $f : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gibt es einen natürlichen Vektorraumisomorphismus

$$F : V/\ker f \to \mathrm{im} f \tag{2.58}$$

$$f = i \circ F \circ p \tag{2.59}$$

2.3.5 Dualraum

Wir definieren den Raum der linearen Funktionale auf V durch

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \tag{2.60}$$

V^* wird auch der Dualraum von V genannt.

Die Basis des Dualraums B^* wird eindeutig durch die Basis des Vektorraums bestimmt.

Lineare Funktionale

Die linearen Funktionale $\varphi_1, ..., \varphi_n \in V^*$ bilden eine Basis von V^* und werden definiert durch

$$\varphi_i(v_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{2.61}$$

Nachdem wir eine Basis zu V bestimmt haben, können wir mit der obigen Gleichung die zu V duale Basis bestimmen.

Außerdem kann man die Basis als Matrix darstellen und die inverse Matrix dazu stellt die duale Basis dar.

Es gilt

$$\dim V = \dim V^* \tag{2.62}$$

Dualraumception

Wir definieren den Dualraum des Dualraums

$$V^{**} := \mathrm{Hom}(V^*, K) \tag{2.63}$$

und die Abbildung:

$$\Phi_V : V \to V^{**} \tag{2.64}$$
$$v \mapsto \Phi_V(v)(\varphi) := \varphi(v) \qquad \text{für } \varphi \in V^* \tag{2.65}$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere sind V und V^{**} kanonisch isomorph.

Duale Abbildung

Die zu f duale Abbildung ist

$$F^* : W^* \to V^* \tag{2.66}$$
$$\varphi \mapsto f^*(\varphi) := \varphi \circ f \tag{2.67}$$

f^* ist eine lineare Abbildung.

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Für die duale Abbildung der dualen Abbildung $f^{**} = (f^*)^*$ gilt:

$$f^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ f \tag{2.68}$$

Rangsatz

Seien V, W endlich dimensional und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\mathrm{Rang} f = \dim(\mathrm{im} f) = \dim\left(\mathrm{im} f^*\right) = \mathrm{Rang} f^* \tag{2.69}$$

2.4 Matrizen und Lineare Gleichungssysteme

2.4.1 Matrizenrechnung

Matrixprodukt

Man kann eine Matrix mit n Spalten mit einer Matrix mit n Zeilen multiplizieren. Dieses Produkt ist wie folgt definiert:

$$(A \cdot B)_{kj} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{2.70}$$

Im Allgemeinen ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ.

Assoziativität und Distributivität

Die Matrixmultiplikation ist Assoziativ und distributiv:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \tag{2.71}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \tag{2.72}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{2.73}$$

Wir definieren den Matrixprodukt als die Abbildung:

$$A\bullet : \mathrm{Mat}(n, o; K) \to \mathrm{Mat}(m, o; K) \tag{2.74}$$

Matrix-Vektor-Produkt

Die Zuordnung

$$\mathrm{Mat}(m, n; K) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Mat}(n, 1; K), \mathrm{Mat}(m, 1; K)) \tag{2.75}$$

$$A \mapsto A\bullet \tag{2.76}$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen

Inverse Matrix

Die Inverse Matrix erfüllt:

$$B \cdot A = \mathbb{1} \tag{2.77}$$

Wir schreiben $B = A^{-1}$.

Außerdem gilt:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \tag{2.78}$$

General Linear Transformation

Die Teilmenge

$$GL_n(K) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; K) | A \text{ ist invertierbar}\} \tag{2.79}$$

mit der Matrixmultiplikation ist eine Gruppe und wir nennen sie die allgemeine lineare Gruppe.

Spaltenraum

Man nennt die lineare Hülle aller Spaltenventkoren

$$(a_{ij})_{i=1}^{n} \in \mathrm{Mat}(m, 1; K) \tag{2.80}$$

den Spaltenraum von A. Seine Dimension ist der Spaltenrang von A.

Analog gilt für den Zeilenraum von A.

Bemerkung: Der Rang wird durch die Anzahl der ungleich null linear unabhängigen Spalten-/Zeilenvektoren bestimmt.

Transponierte Matrix

Die Transposition einer Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Matrix $A^T = (a_{ji})$

Merkregeln:

Es gilt für alle $A, B \in \text{Mat}(m, n; K),\ C \in \text{Mat}(n, o; K),\ D \in GL_n(K),\ k \in K$

1. $$(A + B)^T = A^T + B^T \tag{2.81}$$

2. $$(kA)^T = k(A^T) \tag{2.82}$$

3. $$(A)^{T^T} = A \tag{2.83}$$

4. $$(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T \tag{2.84}$$

5. $$(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T \tag{2.85}$$

2.4.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Geordenete Basen

Eine Geordnete Basis $\mathcal{A}$ eines endlich dimensionalen Vektorraums V über K ist ein Element $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n) \in V^n$, sodass die Teilmenge

$$\{v_1, ..., v_n\} \subset V \tag{2.86}$$

eine Basis von V ist.

Matrixdarstellung

Für jede lineare Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ zwischen zwei endlich-dimensionale Vektorräume V, W mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ gibt es genau eine Matrix

$$\text{Mat}_{\mathcal{AB}}(f) = A \tag{2.87}$$

sodass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{2.88}$$

Man bildet also ein Element der geordneten Basis $\mathcal{A}$ ab und stellt man ihn als Linearkombination von Elementen der geordneten Basis $\mathcal{B}$ dar. Die Vielfachen der Elementen aus $\mathcal{B}$ sind die zugehörigen Matrixeinträge.

Komposition von Funktionen

Für zwei Funktionen $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}(W, U)$ gilt:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{AC}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{AB}}(f) \tag{2.89}$$

In der Komposition bilden wir zuerst f ab. In der Matrixmultiplikation schreiben wir zuerst die Matrixdarstellung von g.

Matrixdarstellung der Identitätsabbildung

Die Matrixdarstellung der Identitätsabbildung ist die Einheitsmatrix

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{AA}}(id_V) = \mathbb{1}_n \tag{2.90}$$

und es gilt:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{AA}}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{AA}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{AA}}(id_V) \tag{2.91}$$

Basiswechselmatrix

Manchmal sind gegebene Basen scheiße. Deswegen interessieren wir uns für Matrizen, die unsere ursprüngliche Matrixdarstellung schöner machen.

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ geordnete Basen zu den endlich-dimensionalen Vektorräumen V, W und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{AB}}(f)$, so können wir eine Matrixdarstellung bezüglich verschiedener Basen $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ bestimmen durch:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}'}(id_W) \cdot A \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}'A}(id_V) \tag{2.92}$$

Das heißt wir haben zwei (drei) Aufgaben:

1. Bestimme die Matrixdarstellung, mit der wir die Elementen der ursprünglichen Basis $\mathcal{B}$ in die Elementen der neuen Basis $\mathcal{B}'$ überführen können[1]
2. Bestimme die Matrixdarstellung der Abbildung f nach den ursprünglichen Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$
3. Bestimme die Matrixdarstellung, mit der wir die Elementen der neuen Basis $\mathcal{A}'$ in die Elementen der alten Basis $\mathcal{A}$ überführen können

Falls $f \in \mathrm{End}(V)$, d.h., falls $f : V \to V$, starten wir mit nur einer Basis $\mathcal{A}$ und es gilt:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}(id_V) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{AA}'} = \mathbb{1}_n \tag{2.93}$$

Die Darstellungsmatrizen sind invers zu einander.

Rang

Der Rang einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, n; K)$ ist

$$\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{Zeilenrang}(A) = \mathrm{Spaltenrang}(A) \tag{2.94}$$

[1] Mehr dazu unter Lineare Gleichungssysteme

Matrixdarstellung der dualen Abbildung

Die Matrixdarstellung der dualen Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ zu den zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dualen Basen $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ ist

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*}(f^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(f))^T \tag{2.95}$$

2.4.3 Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem

Ein Linares Gleichungsystem ist ein System von lineare[2] Gleichungen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \tag{2.96}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \tag{2.97}$$
$$\vdots \tag{2.98}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \tag{2.99}$$

Man kann dieses System als Matrixgleichung darstellen:

$$A \cdot x = b \tag{2.100}$$

Es heißt homogen, falls $b = 0$, inhomogen sonst.

Lösungsraum

Der Lösungsraum $\mathrm{Lös}(A, B)$ ist die Menge aller Lösungen

$$\mathrm{Lös}(A, B) = \{x \in \mathrm{Mat}_{n,1;K} | A \cdot x = b\} \tag{2.101}$$

Die Dimension des Untervektorraums $\mathrm{Lös}(A, 0)$ ist

$$\dim(\mathrm{Lös}(A, 0)) = n - \mathrm{Rang}(A) \tag{2.102}$$

Der Lösungsraum eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist:

1. Falls $b \notin \mathrm{Spaltenraum}(A)$

$$\mathrm{Lös}(A, b) = \emptyset \tag{2.103}$$

2. Falls $b \in \mathrm{Spaltenraum}(A)$[3]

$$\mathrm{Lös}(A, b) = v + \mathrm{Lös}(A, 0) \tag{2.104}$$

Auberdem gilt für $B \in GL_m(K)$, $C \in GL_n(K)$:

$$\mathrm{Lös}(B \cdot A, B \cdot b) = \mathrm{Lös}(A, b) \tag{2.105}$$
$$\mathrm{Lös}(A \cdot C, b) = C^{-1} \cdot \mathrm{Lös}(A, b) \tag{2.106}$$

[2] duh
[3] Das v kommt aus der Gleichung $A \cdot v = b$

Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform, wenn sie wie eine umgekehrte Treppe aussieht lol.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & * & * & * & * & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{2j_2} & * & * & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{3j_3} & * & * & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{4j_4} & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{5j_5} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.107}$$

Die "Treppe" muss nicht unbedingt uniform sein oder "schön gebaut", Hauptsache gibt es nur Nullen links von der "Treppe" und es gibt *keine* " 'doppelthohe' Stufen". Die ersten Elementen, die nicht null sind[4] nennt man die Pivot-Elemente von A.

Der Rang(A) ist gleich der Anzahl der von Null verschiedener Zeilenvektoren.

Die von Null verschiedenen *transponierten* Zeilenvektoren bilden eine Basis der Linearen Hülle von den Spaltenvektoren.

Lösung eines LGS

Man kann ein lineares Gleichungsystem lösen, indem man die Matrixgleichung in eine Zeilenstufenform mit elementaren Zeilentransformationen bringt.

1. $z^i(k)$: Multiplikation der $i-$ten Zeile mit $k \in K\backslash\{0\}$
2. $z^{ij}(k)$: Addition des $k-$fachen der $j-$ten Zeile zur (unterschiedlichen) $i-$ten Zeile
3. z^{ij}: Vertuschen der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile

Spezifisch gibt es den Gauß-Algorithmus[5]:

1. Schritt 1: Suche die erste Zeile, die eine 0 bzw. 1 ganz vorne hat. Falls eine solche Zeile nicht gibt, dann multipliziere sie into submission (1)[6]. Bewege diese Zeile nach oben. Wir nennen sie "Hauptzeile".
2. Schritt 2: Für alle Zeilen, die unten noch vielleicht eine Zahl haben, addiere das negative Vielfache der Hauptzeile zur unteren Zeilen bis sie alle 0 sind.
3. Schritt 3: Eins, dass alle untere Zeilen am Anfang eine Null haben, dann lass die Hauptzeile in Ruhe. Wiederhole das ganze nochmal mit der nächsten Zeile.

[4] gelesen von links nach rechts zeilenweise
[5] Ich finde am besten just wing it
[6] Es muss nicht unbedingt eine 1 sein, aber das macht die Rechnung einfacher meiner Meinung nach

Invertierung einer Matrix

Man kann eine Matrix A invertieren, indem man die A durch elementare Zeilentransformationen in die Einheitsmatrix überführt:

$$(A|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.108}$$

$$\to ... \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right) \tag{2.109}$$

Die Matrix B ist dann die inverse Matrix zu A

2.5 Determinanten

2.5.1 Alternierende Multilinearform

Multilineare Abbildungen

Es gibt multilineare Abbildungen (oder $k-$multilineare) $\delta : V^k \to W$, falls für alle $1 \leq i \leq k$ und alle $v_i, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_k$ die Abbildung

$$\delta(v_1, ..., v_{i-1}, \bullet, v_{i+1}, ..., v_k) : V \to W \tag{2.110}$$

$$v \mapsto \delta(v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_k) \tag{2.111}$$

linear ist. Der $\bullet$ stellt den Platz dar, wo wir einen Vektor normalerweise einsetzen würden. (Analog zu dem Platz in f($\bullet$) wo das x reingehört). Wir nehmen alle anderen v_i als konstant an, und stelen uns vor, dass die Abbildung δ jeweils für einen v gleichzeitig linear ist.

Falls die Abbildung von einem K-Vektorraum V in den Körper K abbildet, so nennen wir sie eine Multilinearform.

Falls $V = K$, so gilt:

$$\delta(l_1, ..., l_k) = l_1\delta(1, l_2, ..., l_k) \tag{2.112}$$

Analog zur Linearität: $f(\lambda v) = \lambda f(1v)$. Weiterhin gilt:

$$l_1\delta(1, l_2, ..., l_k) = l_1 \cdot l_2\delta(1, 1, l_3, ..., l_k) = ... = l_1 \cdot ... \cdot l_k\delta(1, ..., 1) \tag{2.113}$$

Das heißt, δ ist eindeutig bestimmt durch $\delta(1, ..., 1)$.

Wenn man für Vektoren $x, y \in V^n$ die Werten x_i, y_i aus der Abbildung δ herausziehen möchte, muss man aufpassen, immer *alle* nicht momentan relevante Vektoren festzuhalten. Am Beispiel $\delta : V^2 \to W$

$$\delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \delta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \tag{2.114}$$

$$= \delta\left(\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\0\end{pmatrix}\right) \tag{2.115}$$

$$+ \delta\left(\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\right) + \delta\left(\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\0\end{pmatrix}\right) \tag{2.116}$$

$$= x_2y_2\delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + x_2y_1\delta\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \tag{2.117}$$

$$+ x_1y_2\delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + x_1y_1\delta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \tag{2.118}$$

Hier haben wir nur die Werte x_i, y_i rausgezogen, wenn sonst nichts auf dem Weg war. Dafür braucht man aber die Abbildung ein bisschen umgeformt haben.

Alternierende multilineare Abbildungen

Eine multilineare Abbildung $\delta(v_1, ..., v_k)$ heißt alternierend, wenn aus $v_i = v_j$ sofort folgt $\delta(v_1, ..., v_k) = 0$.

Symmetrische Gruppe S_n

Sei $X = \{1, ..., n\}$

- Permutation: Elemente aus S_n werden Permutationen benannt.
- Transposition: Permutation, die zwei beliebige Elemente $i, j \in X, i \neq j$ vertauscht und alle anderen Elemente stehen lässt. Es müssen also nicht unbedingt benachbarte Elemente sein.
- Fehlstand
- Länge:
- Signum:
- Alternierende Gruppe:

Determinantenform

Die Dimension der Alternierenden Multilinearformen, die von einem $n-$dimensionalen $K-$Vektorraum in den Körper K gehen ist

$$\dim(\mathrm{Alt}^n(V, K)) = 1 \tag{2.119}$$

da δ auf den Körper abbildet. Alle von null verschiedene Elemente in $\mathrm{Alt}^n(V, K)$ sind proportional zueinander. Sie werden Determinantenformen genannt.

Für eine Determinantenform $\delta \in \mathrm{Alt}^k(V, K)$ gilt:

$$\delta(v_1, ..., v_n) = 0 \iff \{v_1, ..., v_n\} \subset V \text{ ist linear abhängig} \tag{2.120}$$

Determinante von f

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, so existiert ein $d_f \in K$, so dass für alle Determinantenformen δ auf V gilt:

$$f^*\delta(v_1, ..., v_m) := \delta(f(v_1), ..., f(v_n)) = d_f\delta(v_1, ..., v_n) \tag{2.121}$$

Wir nennen dieses Element d_f die Determinante von f[7]

$$d_f =: \det\{f\} \in K \tag{2.122}$$

Es gilt:

1. $\det(f \circ g) = \det\{f\} \cdot \det\{g\} \qquad \forall f, g \in \mathrm{Hom}(V, V)$
2. $\det(l \cdot f) = l^n \cdot \det\{f\} \qquad \forall l \in K$
3. $\det\{0\} = 0, \det\{id_V\} = 1$
4. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn

$$\det\{f\} \neq 0 \tag{2.123}$$

Dann gilt $\det\{f^{-1}\} = (\det\{f\})^{-1}$

2.5.2 Determinanten von Matrizen

Determinante

Die Determinante einer Matrix kann man sich dadurch vorstellen, wie sie einen Raum "streckt" oder "staucht". Man guckt sich also, wie der Endomorphismus

$$A\bullet : \mathrm{Mat}(n, 1; K) \to \mathrm{Mat}(n, 1; K) \tag{2.124}$$

den Raum transformiert. Determinanten von Matrizen sind nur für $\mathrm{Mat}(n, n; K)$ definiert.

Dabei gilt: $\det\{A\} = \det\{A\bullet\}$

Es gilt:

1. Für $n = 2$:

$$\det\{A\} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{2.125}$$

2. Für eine Dreiecksmatrix:

$$\det\{A\} = \det \begin{pmatrix} * & & & \triangle \\ & * & & \\ & & * & \\ 0 & & & * \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn} \tag{2.126}$$

[7]Hier ist übrigens f^* nicht die duale Abbildung, sondern die Schreibweise.

3. $\det\{(A \cdot B)\} = \det\{A\} \cdot \det\{B\} \qquad \forall A, B \in \mathrm{Mat}(n, n; K)$
4. $\det(l \cdot A) = l^n \cdot \det\{A\} \qquad \forall l \in K$
5. $\det\{0\} = 0, \det\{\mathbb{1}_n\} = 1$
6. A ist genau dann invertierbar, wenn $\det\{A\} \neq 0$. Dann gilt $\det\{A^{-1}\} = (\det\{A\})^{-1}$

Spezielle lineare Gruppe

Die Spezielle lineare Gruppe $SL_n(K)$ ist die Gruppe aller Matrizen mit $\det\{A\} = 1$. Sie ist definiert als der Kern der multiplikativen Gruppe bezüglich der Abbildung $\det : GL_n(K) \to K\backslash\{0\}$:

$$\ker(\det) =: SL_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; K) | \det\{A\} = 1\} \backslash GL_n(K) \tag{2.127}$$

Berechnung der Determinante

1. Zeilenstufenform: Man kann eine Determinante mit elementaren Zeilentransformationen in eine obere Dreiecksmatrix überführen und so die Determinante bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass Vertauschung zweier Zeilen auch das Vorzeichen der Determinante ändert.
2. Laplace'scher Entwicklungssatz: Man reduziert das Problem einer großen Matrix auf viele kleinere Matrizen, indem man sich eine Zeile aussucht, und systemathisch "entwickelt".

   Man nimmt einen Eintrag fest und streicht alle Einträge in der gleichen Zeile und Spalte durch. Man multipliziert diesen ersten Eintrag mit der Matrix, die nach dem Durchstreichen übrig geblieben ist. Man macht das gleiche für jeden Eintrag in der Zeile und addiert alternierend:

   $$\det\{A\} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A[i, j]) \tag{2.128}$$

   $A[i, j]$ ist die Matrix die nach dem Durchstreichen übrig bleibt.

   Beispiel:

   $$\det \begin{pmatrix} 3 & -17 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -0 \det \begin{pmatrix} -17 & -7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 3 & -17 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

   $$= 2(15 + 7) = 44 \tag{2.130}$$

   Hier haben wir uns eine besonders schöne Zeile ausgesucht, weil durch die "Null-Einträge" war es klar, dass wir die Multiplikation mit der 17 komplett vermeiden könnten[8]. Man muss nur aufpassen, die richtigen Vorzeichen zu schreiben. Man kann sich das wie ein Schachbrett vorstellen, wo man ganz oben links eine + hinschreibt.

[8] 17 ist eine zu große Zahl, Kopfrechnen bad

Komplementäre Matrix

Die komplementäre Matrix zu , Adjunkte von oder Kofaktormatrix zu A ist die Matrix, in welcher die Einträge die Determinanten der "Untermatrizen" sind.

Beispiel aus der Vorlesung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 14 & -6 & 5 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

Cramersche Regel

Man kann diese Kofaktormatriz benutzen, um die Inverse Matrix zu bestimmen, aber why.

2.5.3 Orientierung

Man kann die Orientierung eines reellen Vektorraums dadurch definieren, welches Vorzeichen seine Determinante hat. Man kann also jede Matrix einer eindeutigen Klasse zuordnen. Das ist nämlich eine Äquivalenzrelation und es gibt genau 2 Äquivalenzklassen: Determinante ist positiv oder negativ.

2.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Manchmal ist es aber eher schwer mit einer gegebenen Form eines Endomorphismus zu rechnen. Dafür hilft uns Matrizen auf besonders schöne Formen zu bringen.

2.6.1 Polynome

Polynom

Ein Polynom ist eine Folge $p = (p_i)_{i=0}^{\infty}$ mit $p_i \in K$. Ab ein bestimmtes i_0 sind alle $p_{i>0} = 0$.

$$p(t) = \sum_{i=0}^{i_0} p_i t^i \tag{2.133}$$

Die Menge aller Polynom bezeichnen wir mit $K[t]$.

Der Grad eines Polynoms $\deg p$ wird durch das größte Exponent bestimmt. Es gilt:

$$\deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\} \tag{2.134}$$

Jedes Polynom definiert eine Abbildung von K nach K.

$K[t]$ mit der Addition und der Multiplikation ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring, kein Körper.

Jedes Polynom kann eindeutig als ein Produkt

$$p(t)\left(\prod_{i=1}^{m}(t-x_i)^{v_i}\right)q(t) \tag{2.135}$$

dargestellt werden. Dabei sind die x_i die Nullstellen des Polynoms, $q(t)$ nennt man das führende Polynom, welcher sich nicht mehr faktorisieren lässt[9] und v_i ist die Multiplizität der Nullstelle x_i, die besagt wie "oft" eine Nullstelle vorkommt, also ob bei der Faktorisierung sich ein Wert x_i wiederholt. Beispielsweise hat

$$p(t) = (t+1)^2 \tag{2.136}$$

eine doppelt auftretende Nullstelle bei $t = -1$.

Algebraische Abgeshlossenheit

Wir nennen einen Körper K algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom[10] in $K[t]$ eine Nullstelle in K besitzt.

2.6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Matrizen[11] hilfen uns die Koordinaten eines Vektors mit einer anderen "Sprache" zu lesen. So bleibt ein Vektor nach der Matrixmultiplikation der gleiche Vektor, aber man liest ihn mit anderen Koordinaten. Manche Vektoren sind besonders schön, weil sie selbst nach der Transformation nicht so anders aussehen. Im Prinzip bleiben diese Vektoren bis auf ein Vorfaktor gleich.

Das charakteristische Polynom

Das charakteristische Polynom von A ist definiert durch

$$X_A(t) := \det(t\mathbb{1} - A) \tag{2.137}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte.

Eigenwert

Der Eigenwert λ ist der "Streckungsfaktor" dieses Vektors. Ein λ wird als Eigenwert von f bezeichnet, wenn

$$V_\lambda(f) \neq 0 \tag{2.138}$$

Die Multiplizität des Eigenwerts λ gibt an wie häufig der Wert vorkommt und außerdem die Dimension des Eigenraums zu diesem Eigenwert

$$\dim(V_\lambda(f)) \geq 1 \tag{2.139}$$

[9] Es hat keine Nullstelle im Körper

[10] nicht konstant

[11] beziehungsweise Endomorphismen

Eigenraum

Wir definieren den Untervektorraum der Gerade, die von diesen Vektoren gespannt wird als

$$V_\lambda(f) := \{v \in V | f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda id_V) \subseteq V \tag{2.140}$$

der Eigenraum von f.

Man kann den Eigenraum bestimmen, indem man eine Darstellungsmatrix A bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{A}$ zur Abbildung aufstellt:

$$V_\lambda(f) = \text{Lös}(A - \lambda \mathbb{1}_n, 0) \tag{2.141}$$

Eigenvektor

Die von Null verschiedene Elemente in $V_\lambda(f)$ heißen Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ

2.6.3 Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix ist diagonalisierbar, "wenn alle Eigenwerte unterschiedlich sind". Dies folgt aus der Eigenschaft, dass der Eigenraum bezüglich eines Eigenwerts bestimmt wird. Wenn sich ein Eigenwert wiederholt, dann können nicht genug linear unabhängige Vektoren existieren, um eine Basis des Vektorraums zu bilden.

Diagonalmatrix

Die Diagonalmatrix ist die Matrix bestehend aus den Eigenwerten der Matrixdarstellung. Dabei gibt es zwei äquivalente, aber unterschiedliche Aussagen:

Sei D die diagonalisierte Matrix (bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$), A die Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{A}$, T die Basiswechselmatrix, die die Standardbasis $\mathcal{E}$ in die Basis $\mathcal{A}$ überführt.

Dann ist

1. Die Diagonalmatrix:

$$D = T^{-1} \cdot A \cdot T \tag{2.142}$$

2. Die ursprüngliche Matrix

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1} \tag{2.143}$$

An einem kleinen Beispiel seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.144}$$

Man rechnet nach:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \tag{2.145}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.146}$$

2.7 Euklidische Vektorräume

2.7.1 Bilinearformen

Bilinearform

Eine Bilinearform β auf V ist eine 2-Multilinearform

$$\beta : V \times V \to K \tag{2.147}$$

2-Multilinear entspricht:

$$\beta(v, \bullet) : V \to K \qquad \text{linear} \tag{2.148}$$
$$\beta(\bullet, v) : V \to K \qquad \text{linear} \tag{2.149}$$

Standard Skalarprodukt

Wir kennen schon den Standard Skalarprodukt

$$< \bullet, \bullet >: \mathrm{Mat}(n, 1; K) \times \mathrm{Mat}(n, 1; K) \to K \tag{2.150}$$
$$(x, y) \mapsto < x, y > \tag{2.151}$$

Das ist eine Bilinearform.

Strukturmatrix

Für eine geordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ ist die Strukturmatrix $B = (b_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ eindeutig bestimmt durch $b_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ Man schreibt $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta)$

Symmetrie

Eine Bilinearform β auf V heißt

1. Symmetrisch, falls $\beta(u, w) = \beta(w, u)$
2. Schiefsymmetrisch, falls $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$

   Es gilt für eine[12] Basis $\mathcal{A}$:

$$B = \begin{cases} B^T & \beta \text{ symmetrisch} \\ -B^T & \beta \text{ schiefsymmetrisch} \end{cases} \tag{2.152}$$

[12] und dadurch für alle anderen auch

Jede Bilinearform β lässt sich in einen symmetrischen und einen Schiefsymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}(\beta(v,w)+\beta(w,v)) + \frac{1}{2}(\beta(v,w)-\beta(w,v)) \tag{2.153}$$

$$= \beta^{\text{sym}} + \beta^{\text{schief}} \tag{2.154}$$

Nicht ausgeartet

Eine (schief-)symmetrische Bilinearform β heißt nicht ausgeartet, falls es für alle $0 \neq v \in V$ ein $w \in V$ gibt, so dass

$$\beta(w,v) \neq 0 \tag{2.155}$$

Eine (schief-)symmetrische Bilinearform β auf V mit $\dim V = n$ heißt nicht ausgeartet genau dann, wenn bezüglich einer Basis[13] $\mathcal{A}$ für B gilt, dass

$$\det\{B\} \neq 0 \tag{2.156}$$

Adjungation (?)

Für zwei Abbildungen $f, g \in \text{End}(V)$ nennt man f adjungiert zu g, falls

$$\beta(v, g(w)) = \beta(f(v), w) \tag{2.157}$$

Dann ist auch g adjungiert zu f.

Seien $F = \text{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(f)$ und $G = \text{Mat}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(g)$. Dann gilt

$$B \cdot G = F^T \cdot B \tag{2.158}$$

Falls β nicht ausgeartet ist, dann gibt es zu $g \in \text{End}(V)$ genau einen bezüglich β adjungierten Endomorphismus

$$f \in \text{End}(V), f = g^{\text{ad}} \tag{2.159}$$

Orthogonalität

$v, w \in V$ heißen orthogonal ($v \perp w$) bezüglich β, falls $\beta(v,w) = 0$.

Das orthogonale Komplement von $U \subset V$[14] ist

$$U^\perp := \{v \in V | \beta(v,u) = 0 \ \forall u \in U\} \tag{2.160}$$

Es gilt

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \tag{2.161}$$

Eine Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ heißt Orthogonalbasis von V bezüglich β, falls

$$\beta(v_i, v_j) = 0 \qquad \forall i \neq j \tag{2.162}$$

Sie heißt zusätzlich Orthonormalbasis, falls

$$\beta(v_i, v_i) = 1 \qquad \forall i \tag{2.163}$$

[13]und dadurch für alle anderen auch

[14]Das orthongonale Komplement ist nicht immer ein Komplement zu U

Dimensionsformel für ausgeartete Bilinearformen

Sei $X \subset V^*$. Für

$$X^0 = \{v \in V | \phi(u) = 0 \ \forall \phi \in X\} \subset V \tag{2.164}$$

gilt

$$\dim X^0 = \dim V - \dim X \tag{2.165}$$

2.7.2 Euklidische Vektorräume

Positiv definite symmetrische Bilinearformen

Eine symmetrische Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, falls $\beta(u, v) > 0$ für alle $v \in V \backslash \{0\}$. Man nennt sie auch ein Skalarprodukt. Eine symmetrische Matrix B heißt positiv definit, wenn $x^T \cdot B \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathrm{Mat}(n, 1; K)$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Es gilt:

$$\beta(u, v)^2 \leq \beta(u, u)\beta(v, v) \tag{2.166}$$

Daraus folgt:

$$-1 \leq \frac{\beta(u, v)}{\sqrt{\beta(u, u)\beta(v, v)}} \leq 1 \tag{2.167}$$

Also existiert genau ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \varphi = \frac{\beta(u, v)}{\sqrt{\beta(u, u)\beta(v, v)}} \tag{2.168}$$

φ ist der von u, v eingeschlossene Winkel. Es gilt:

$$u, v \text{ linear abhängig} \iff \varphi \in \{0, \pi\} \tag{2.169}$$

$$u, v \text{ orthogonal} \iff \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{2.170}$$

Norm

Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$N : V \to \mathbb{R}^+ \tag{2.171}$$

für die gilt:

1. $N(v) = 0 \iff v = 0 \qquad \forall v \in V$
2. $N(kv) = |k| \cdot N(v) \qquad \forall v \in V,\ k \in \mathbb{R}$
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \qquad \forall u, v \in V$

Einige Beispiele sind die Norm auf Mat$(n,1:\mathbb{R})$: $||v|| = \sqrt{<v,v>}$, die l_1-Norm auf $\mathbb{R}^n$: $||(v_1,...,v_m)||_1 = |v_1| + ... + |v_n|$ und die $l_\infty-$Norm auf $\mathbb{R}^n$: $||(v_1,...,v_n)||_\infty = \max(|v_1|,...,|v_n|)$.

Die Norm ist bestimmt durch die Menge der Vektoren von Norm $N(v) \leq 1 =$ Einheits"ball" bezüglich der Norm N

Wir nennen $||v||$ die Länge von v.

Metrik

Eine Metrik auf einer Menge X ist die Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \tag{2.172}$$

die folgende Eigenschaften für alle $x, y \in X$ erfüllt:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ein Beispiel ist der Abstand zweier Vektoren:

$$d(u,v) := ||u - v|| \tag{2.173}$$

Euklidischer Vektorraum

Ein Euklidischer Vektorraum ist ein Paar (V,β) aus einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt β.

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Ein Euklidischer Vektorraum (V,β) besitzt eine Orthogonalbasis.

Aus einer normalen Basis $\{v_1,...,v_n\}$ erhält man eine Orthogonalbasis $\{u_1,...,u_2$ mit:

$$u_1 = v_1 \tag{2.174}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\beta(u_1,v_2)}{\beta(u_1,u_1)}u_1 \tag{2.175}$$

$$\vdots \tag{2.176}$$

$$u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta(u_i,v_n)}{\beta(u_1,u_i)}u_i \tag{2.177}$$

Aus einer Orthongonalbasis erhält man eine Orthonormalbasis $\{w_1,...,w_n\}$ mit

$$w_i = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{u_1}{\sqrt{\beta(u_i,u_i)}} \tag{2.178}$$

Matrix-Version

Für eine positiv definite symmetrische Matrix B existiert eine obere Dreiecksmatrix T mit

$$T^T \cdot B \cdot T = \mathbb{1}_n \tag{2.179}$$

Orthogonale Projektion

Sei $U \subset V$ und $\{u_1, ..., u_k\}$ eine Orthogonalbasis von U. Dann gilt

$$V = U \oplus U^\perp \tag{2.180}$$

Das heißt, dass jedes $v \in V$ als Linearkombination eines Elementes in U und in $U^\perp$ dargestellt werden kann

$$v = u + w \qquad u \in U,\ w \in U^\perp \tag{2.181}$$

Die orthogonale Projektion auf U ist die Abbildung

$$\pi_U : V \to U \tag{2.182}$$
$$v \mapsto u \tag{2.183}$$

mit

$$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta(u_i, v)}{\beta(u_i, u_i)} u_i \tag{2.184}$$

Außerdem gilt:

$$\pi_U \circ \pi_U = \pi_U \tag{2.185}$$
$$\pi_{U^\perp} = id_V - \pi_U \tag{2.186}$$

Komplexe Nullstellen

Eine Matrix A mit Einträgen in $\mathbb{C}$ muss eine Nullstelle haben, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

$$A \cdot x = \lambda x \tag{2.187}$$

Dabei ist aber $\lambda \in \mathbb{R}$

Eigenschaften selbstadjungierter Endomorphismen

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert bezüglich β.

Dann sind die Eigenräume von f zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal.

Falls $U \subset V$ ein $f-$invarienter Untervektorraum ist ($f(U) \subset U$), so gilt dies auch für $U^\perp$ ($f(U^\perp) \subset U^\perp$).

V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Orthogonale Matrizen

Eine Matrix heißt orthogonal, falls

$$P^T \cdot P = \mathbb{1}_n \tag{2.188}$$

Die Menge

$$O_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R}) | P^T \cdot P = \mathbb{1}_n\} \tag{2.189}$$

ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$. Man nennt sie die orthogonale Gruppe

Trägheitssatz von Sylvester

Für ein $\mathbb{R}-$Vektorraum V, $\dim V = n$, β eine symmetrische Bilinearform, A eine Orthogonalbasis bezüglich β und $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(\beta)$ ist

$$n_+ \text{ die Anzahl der positiven Eigenwerte von } B \tag{2.190}$$

$$n_- \text{ die Anzahl der negativen Eigenwerte von } B \tag{2.191}$$

n_+, n_- hängen nicht von der Basis ab. Die Kombination (n_+, n_-) heißt Signatur von β.

Positiv definite symmetrische Matrix

Eine symmetrische Matrix B heißt positiv definit genau dann, wenn für alle $1 \leq k \leq n$ die Determinanten der Hauptminoren $B_k = (b_{ij})_{i=1}^{k}\,{}_{j=1}^{k}$ positiv sind.