Blatt 12 **31. Januar 2022**

Experimentalphysik III

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio Tutor: Tobias Hammel

1. Spin und Drehimpuls

Die Pauli-Matrizen bilden eine Darstetllung der Komponenten des Spin-Operators $\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x & \hat{S}_y & \hat{S}_z \end{pmatrix}^\top$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Es gilt für die Operatoren $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

a) Wir wollen die Eigenzustände zu den verschiedenen Operatoren $\hat{S}_i$ finden. Dafür bringen wir diese in die Spinordarstellung und lösen die Eigenwertgleichung:

$$\hat{S}_x \left|\psi\right\rangle = \lambda \left|\psi\right\rangle \quad \checkmark \tag{2}$$

Da wir mit einem endlich dimensionalen Problem handeln, lässt sich dies in der Spinordarstellung analog zur Eigenvektorbestimmung durchführen.

Als erstes bestimmen wir die Eigenwerte durch das charakteristische Polynom:

$$0 \overset{!}{=} \det\left(\hat{S}_i - \lambda\mathbb{1}\right) \quad \checkmark \tag{3}$$

(a) Wir fangen mit dem Spin-Operator $\hat{S}_x$ an:

$$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$= \lambda^2 - 1 \tag{5}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \tag{6}$$

$\checkmark$

Dazu wollen wir die Eigenvektoren bestimmen, wofür wir das Gleichungssystem Lös$\left(\hat{S}_x - \lambda_i \mathbb{1}, 0\right)$ lösen müssen.

v_{+1} :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II + I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7}$$

$$\rightarrow x_1 = x_2 \tag{8}$$

Der normierte zugehörige Eigenvektor ist

$$v_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Analog erhalten wir für v_{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II - I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{10}$$

$$\rightarrow x_1 = -x_2 \tag{11}$$

den normierten Eigenvektor

$$v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

(b) Analog berechnen wir die Eigenwerten und Eigenvektoren für den Operator $\hat{S}_y$:

$$0 \stackrel{!}{=} \det\left(\hat{S}_y - \lambda \mathbb{1}\right) \tag{13}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$= \lambda^2 - 1 \tag{15}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \tag{16}$$

Die Eigenvektoren lassen sich berechnen als

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II} + \text{i I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{17}$$

$$\to x_1 = -ix_2 \tag{18}$$

Der normierte Eigenvektor ist

$$v_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Wir überspringen die explizite Rechnung und geben den Eigenvektor v_{-1} einfach an:

$$v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

(c) Zu $\hat{S}_z$ sind die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm 1$:

$$v_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

b) Wir wissen, dass $\left|\hat{\mathbf{S}}\right|^2$, analog zu $\left|\hat{L}\right|^2$ scharf messbar ist, also muss ein ausgerichteter Spin in der x-y-Ebene eine fixe Länge haben, sie befinden sich also auf einer "Kreisbahn", darstelbar durch

$$\hat{S}_{x,y} = \cos\varphi \hat{S}_x + \sin\varphi \hat{S}_y \underbrace{\hat{=}}_{\text{Spinor}} \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Ok, so weit so gut. Weiter kann mein glattes Gehirn nicht entziphern was die Buchstaben in dem weiteren Satz mir sagen wollen, also werden wir uns die Lösung anschauen und explizit ausrechnen.

Also wir wollen schon wieder die Eigenzuständen zu dieser Superposition von $\hat{S}_{x,y}$ bestimmen. Wir lösen zuerst das charakteristische Polynom:

$$0 \stackrel{!}{=} \det\left(\hat{S}_{x,y} - \lambda \mathbb{1}\right) \tag{24}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \mathrm{e}^{-i\varphi} \\ \mathrm{e}^{i\varphi} & -\lambda \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$= \lambda^2 - 1 \tag{26}$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \tag{27}$$

Zu diesen Eigenwerten rechnen wir die Eigenvektoren aus:

v_{+1}:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 \\ \mathrm{e}^{i\varphi} & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\cdot \mathrm{e}^{-i\varphi}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 \\ 1 & -\mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{28}$$

$$\rightarrow x_1 = \mathrm{e}^{-i\varphi} x_2 \tag{29}$$

Der normierte Eigenvektor ist:

$$v_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Zu v_{-1} ist analog:

$$v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Dies entspricht:

$$\mathrm{Eig}\big(\hat{S}_{x,y}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ \big(\mathrm{e}^{-i\varphi} \left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle\big), \big(-\mathrm{e}^{-i\varphi} \left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle\big) \Big\} \tag{32}$$

Woran man hier dieses Symmetriezeug erkennt weiß ich nicht genau.

c) Ich erkenne noch nicht genau weshalb die Blochkugel so nützlich ist.

Das kommt mit der Zeit. Ihr werdet noch SEHR viel Zwei-Niveau Systeme rechnen und die Blochkugel bietet da für Diskussionen immer eine schöne Anschauung.

2. Stern-Gerlach Experiment

a) Wir verwenden die Formel

Symmetrisch bedeutet, dass wenn ich das Betragsquadrat |<up|psi>|² und |<down|psi>|² berechne beides mal 0.5 rauskommt. D.h. die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung eines dieser Zustände Spin-up oder down zu messen ist identisch.

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{f}{2} k_B T \tag{33}$$

mit der Anzahl der Freiheitsgrade $f = 3$ und stellen diese mit nach der Geschwindkeit um:

$$\frac{1}{2}m\left\langle v\right\rangle^2 = \frac{3}{2}k_BT \tag{34}$$

$$\iff \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}. \tag{35}$$

Mit $T = 1273.15\,\mathrm{K}$ und $m = 107.8682\mathrm{u} = 1.791194824 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ erhalten wir also

$$\langle v\rangle = 542.59\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{36}$$

b) Wende an

$$v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v}. \tag{37}$$

Mit $v = \langle v\rangle$ aus (a) und $s = 3.5\,\mathrm{cm} = 0.035\,\mathrm{m}$:

$$t = 0.0000645\,\mathrm{s} = 64.5\,\mu\mathrm{s}. \tag{38}$$

c) Gegeben ist nun das magnetische Moment des Silberatoms

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g_s\mu_B\frac{\mathbf{s}}{\hbar} \tag{39}$$

mit halbzahligem Spin $\mathbf{s}$. g_s ist der Landé-Faktor für ein Elektron, also $g_s \approx 2$. Die durch das magnetische Moment erzeugte Potential erhalten wir aus dem Skalarprodukt

$$V = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}. \tag{40}$$

Da sich das Magnetfeld auf eine z-Kompoenente beschränkt können wir schreiben

$$V = -g_s\mu_B\frac{s_zB_z}{\hbar} \tag{41}$$

Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass die Eigenwerte zu s_z gerade $\pm\frac{\hbar}{2}$ betragen. Somit erhalten wir

$$V = \mp\frac{1}{2}g_s\mu_BB_z. \tag{42}$$

Die durch das Potential erzeugte Kraft auf die Teilchen ist gegeben durch den Gradienten

$$F_z = (-\boldsymbol{\nabla} V)_z = \pm \frac{1}{2} g_s \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z}. \tag{43}$$

Das Bohr'sche Magneton μ_B ist gegeben durch

$$\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}, \tag{44}$$

somit ergibt sich für den Betrag der z-Komponente der Kraft

$$F_z = \pm 9.274 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{N}. \tag{45}$$

Während sich die Teilchen im Magnetfeld befinden, erfahren diese eine Beschleunigung in Richtung der jeweiligen Kraft, die dabei zurückgelegte Strecke beträgt

$$s_{mag} = \text{🐉} = \frac{1}{2} a_z t_{mag}^2 \tag{46}$$

$$\text{mit } a_z = \frac{F_z}{m}. \tag{47}$$

Nach dem Magnetfeld werden die Teichen mit einer Konstanten Geschwindigkeit in $\pm z$-Richtung fortsetzen.

$$s_{au} = \text{🐷} = (a_z t_{mag}) t_{au}. \tag{48}$$

Die gesamte strecke ist somit gegeben durch

$$s_{ges} = \text{🐉} + \text{🐷} = \frac{1}{2} a_z t_{mag}^2 + (a_z t_{mag}) t_{au} \tag{49}$$

$$= a_z t_{mag} \left(\frac{1}{2} t_{mag} + t_{au} \right) \tag{50}$$

$$= \frac{F_z}{m} t_{mag} \left(\frac{1}{2} t_{mag} + t_{au} \right) \tag{51}$$

Hierbei ist t_{au}, also die Zeit, welche ein Teilchen von der austrittstelle aus dem Magneten bis zur Stelle, an der die Abstände gemessen werden, benötigt, gegeben durch $t_{au} = \frac{10\,\mathrm{cm}}{\langle v \rangle}$.

$$s_{ges} = \frac{F_z}{m} t_{mag} \left(\frac{1}{2} t_{mag} + \frac{0.1\,\mathrm{m}}{\langle v \rangle} \right) \tag{52}$$

$$\approx \pm 0.000723\,\mathrm{m} = \pm 0.723\,\mathrm{mm}. \tag{53}$$

Α α	Alpha	Ν ν	Ny
Β β	Beta	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Gamma	Ο ο	Omikron
Δ δ	Delta	Π π	Pi
Ε ε	Epsilon	Ρ ρ	Rho
Ζ ζ	Zeta	Σ σ	Sigma
Η η	Eta	Τ τ	Tau
Θ ϑ	Theta	Υ υ	Ypsilon
Ι ι	Iota	Φ φ	Phi
Κ κ	Kappa	Χ χ	Chi
Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Psi
Μ μ	My	Ω ϖ	Omega

Eine kleine Hilfe, falls das nächste Mal die Variablen ausgehen:)

Somit kann ein Abstand der Strahlen von ca. $s_{ges} \cdot 2 = 1.446\,\text{mm}$ gemessen werden.

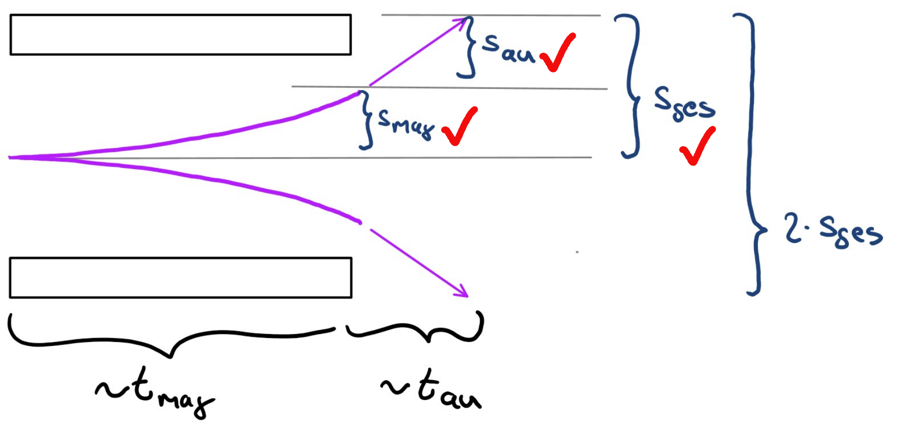

Abbildung 1: Literal Art

d) Für ein allgemeines magnetisches Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}$ in einem äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}$ ergibt sich das Potential als

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \tag{54}$$

$$\iff V = -\mu B \cos(\phi) \tag{55}$$

Hierbei ist also der Winkel ϕ der Neigung des Dipols zu den Feldlinien relevant. Für die z-Kompoenente der Kraft ergibt sich hier also

Also kontinuierlich.

$$F_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \cos(\phi). \tag{56}$$

e) ?

3/3

3. Stern-Gerlach-Filter

a) Auf Basis der Einstellung des ersten Stern-Gerlach-Apparats ist zu erwarten, dass nur eine Ablenkung „nach oben“ erfolgt. Gewissermaßen war die Weginformation bereits vor dem Eintritt in die zweite Apparatur festgelegt, da das Teilchen beim Eintritt bereits im up-Zustand ist und keine weiteren Bauteile zwischengeschaltet sind, die dies ändern könnten.

und aus Aufgabe 1!

b) Wir wissen aus dem Skript, dass der Spin in z-Richtung als Superpostition von Spins in ± x-Richtung gesehen werden kann. Es wäre also zu erwarten, dass man eine Verteilung in $\pm x$ erhält mit jeweils gleicher Antreffwahrscheinlichkeit.

c) Hier gilt die gleiche Argumentation wie in Teil a), nur dass nun die x- anstelle der z-Richtung relevant ist.

d) Was die Orientierung betrifft erhält man wieder eine gleichwertige Aufspaltung in $\pm$ z-Richtung - die gleiche Argumentation wie in b) gilt.
Der Stern-Gerlach-Apparat ist damit ein besonderer Filter, da er erlaubt, Zustände, die eigentlich gefiltert wurden, wieder „herzustellen" beziehungsweise zu messen.
Insbesondere ist es unmöglich, dass die verschiedenen Komponenten gleichzeitig scharf gemessen werden. Will man „z" scharf messen, so geschieht das zum Preis des Verlusts der Einstellung in „x". Auch hier wird also wieder der besondere Charakter der Quantenmechanik gegenüber der klassischen Erwartung deutlich.

Das ist doch mal ein schöner letzter Satz
für den letzten Zettel <3

3/3

Das ganze Semester über wirklich
hervorragende Abgaben!
Zwei Daumen nach oben!