

---

**Versuch 211**

**12. Januar 2022**

**Gekoppeltes Pendel**

Physikalisches Anfängerpraktikum 2.1

Jan A. Kesting

Betreuer/in: Josch Hagedorn

---

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1 Ziel/Motivation . . . . .	2
1.2 Aufgaben . . . . .	2
1.3 Versuchsaufbau . . . . .	2
1.4 (physikalische) Grundlagen . . . . .	2
<b>3 Auswertung</b>	<b>10</b>
3.1 Berechnung der Frequenzen . . . . .	10
3.2 Ermittlung der Kopplungsgrade . . . . .	11
<b>4 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>12</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Ziel/Motivation

Bei diesem Versuch wird mittels eines gekoppelten Pendels die symmetrische sowie antisymmetrische Eigenschwingung gemessen. Zudem wird mittels des Versuchsaufbaus eine Schwebung erzeugt.

## 1.2 Aufgaben

## 1.3 Versuchsaufbau

Der Versuch ist in Abb. 1 im Messprotokoll zu finden.

## 1.4 (physikalische) Grundlagen

Es gibt verschiedene Arten der Schwingungen beim gekoppelten Pendel. Die für die im Versuch relevanten Fälle sind im folgenden ausgeführt und erläutert.

### 1.4.1 Symmetrische Schwingung

In diesem Fall gilt mit  $\varphi$  als Amplitude und  $w$  der Frequenz.

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(wt) \quad (1)$$

Die Pendel schwingen also unabhängig, ohne dass sie sich dabei gegenseitig beeinflussen.

### 1.4.2 Antisymmetrische Schwingung

In diesem Fall gilt

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos(wt) \quad (2)$$

Die Pendel schwingen jeweils harmonisch, jedoch mit entgegengesetzter Phase.

### 1.4.3 Schwebungsschwingung

In diesem Fall gilt:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{w_1 - w_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{w_1 + w_2}{2}t\right) \quad (3)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{w_1 - w_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2}t\right) \quad (4)$$

Hierbei setzt sich die Frequenz aus der Einzelfrequenz sowie einer Schwebung zusammen. Es gilt:

$$w_I = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad (5)$$

$$w_{II} = \frac{w_1 - w_2}{2} \quad (6)$$

### 1.4.4 Kopplungsgrad

Wir können den Grad der Kopplung berechnen indem wir die symmetrische und die antisymmetrische Schwingung vergleichen. Es gilt:

$$k = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2w_1^2} \quad (7)$$

# Messprotokoll Versuch 211

Jan Kesting  
Victoria Hahn

12.01.2022

## GEKOPPELTE PENDEL

### Material

- Zwei Pendel aus Messing (Dichte  $\rho = 7.5 \text{ g/cm}^3$ )
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- Fest montierter magnetischer Winkelauflnehmer
- Analog-Digital-Wandler
- PC mit Drucker

### Aufbau

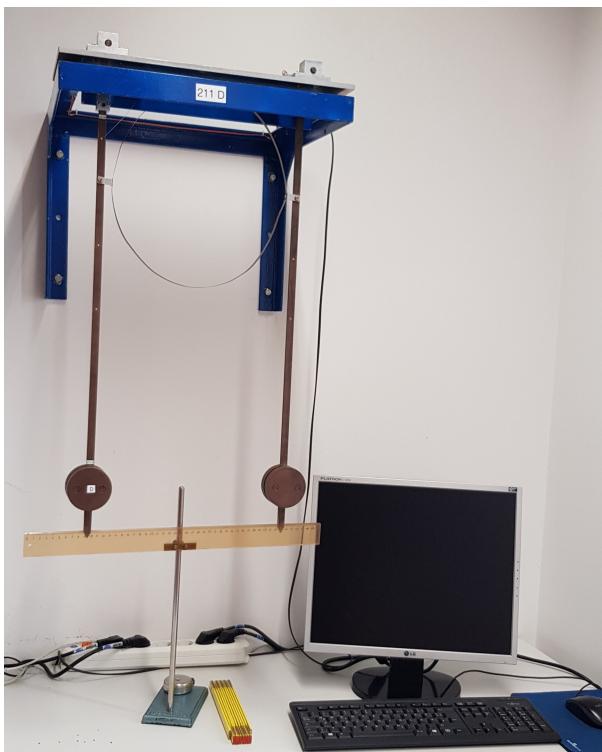


Abb. 1 : Versuchsaufbau

### Durchführung

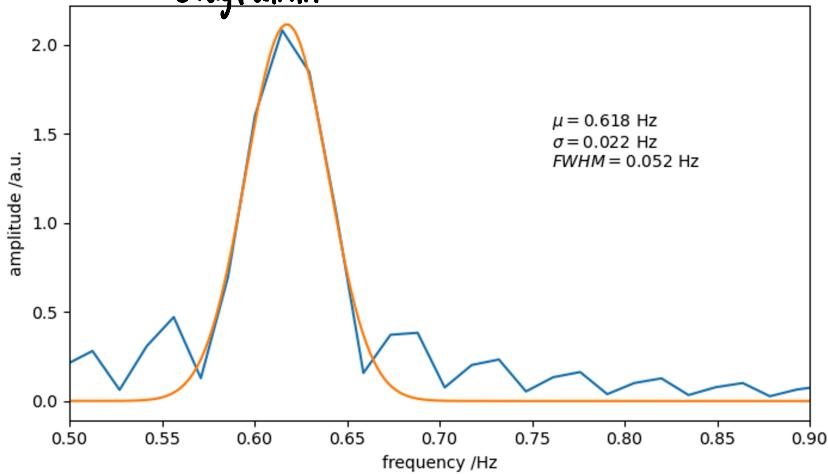
#### Vermessung der Einzelpendel

Nachdem ein Nullabgleich der beiden Pendel überprüft wurde, werden die Schwingungsfrequenzen der beider Pendel ohne Kopplung gemessen. In Diagramm 1 sind das Frequenzspektrum und die entsprechenden Fitparameter dargestellt.

$$\text{Pendel links : } f_1 = (0,63 \pm 0,002) \frac{1}{s} \quad T_1 = 1,59 \text{ s} \pm 0,05 \text{ s}$$

$$\text{Pendel rechts : } f_2 = (0,64 \pm 0,002) \frac{1}{s} \quad T_2 = 1,57 \text{ s} \pm 0,05 \text{ s}$$

Diagramm 1 : freie Pendel



### Symmetrische Eigenschwingung

Für drei verschiedene Kopplungsgrade wird die symmetrische Eigenschwingung angeregt und die Frequenzen gemessen. Die verschiedenen Kopplungsgrade ergeben sich aus der Position der Feder. Die Länge der Federposition bis zur Pendelachse beträgt für die verschiedenen Positionen

$$\text{oben} : L_1 = (19,1 \pm 0,1) \text{ cm}$$

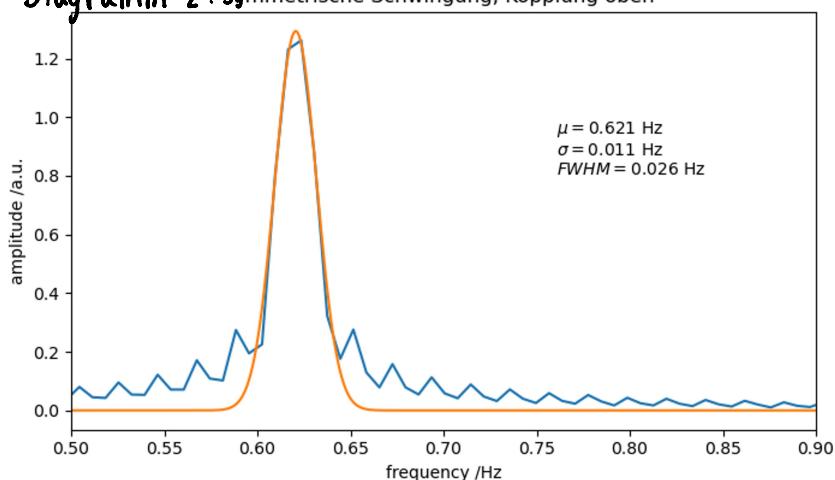
$$\text{mitte} : L_2 = (29,1 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\text{unten} : L_3 = (39,1 \pm 0,1) \text{ cm}$$

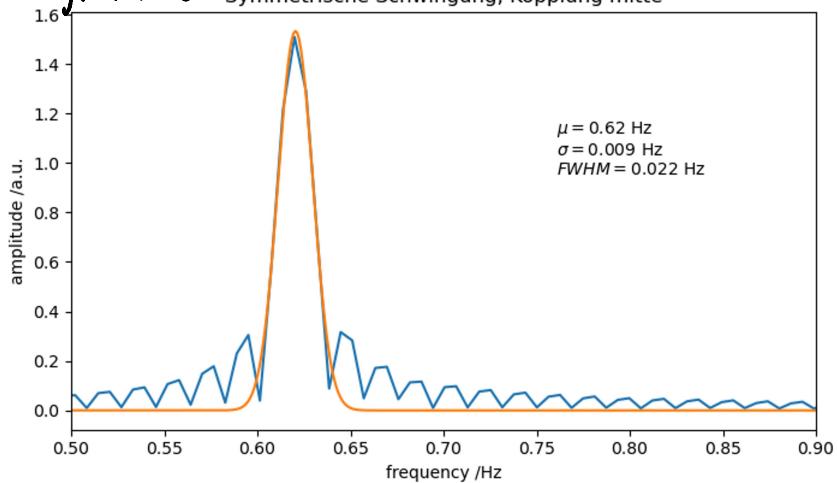
Die Fehler ergeben sich aus dem Ablesefehler und der Ausdehnung des Lochs zur Aufhängung.

Die Frequenzen für die verschiedenen Positionen sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Diagramme 2 - 4 zeigen die Frequenzspektren mit angepasster Gaußkurve.

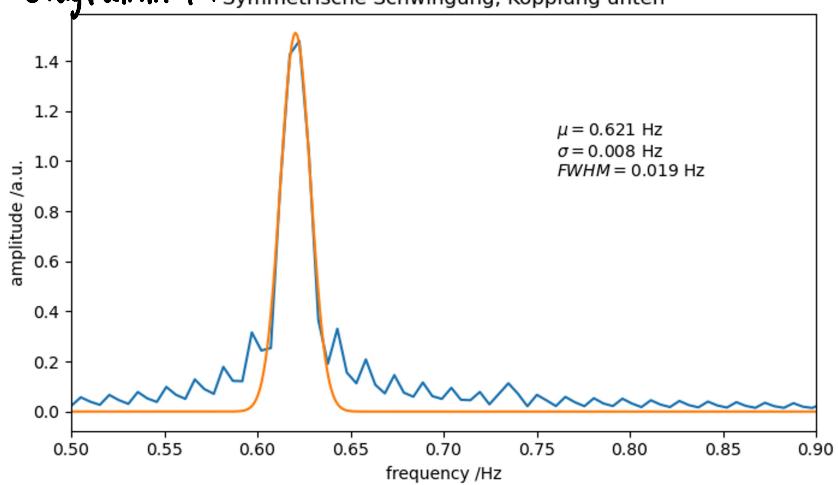
Diagramm 2 : Symmetrische Schwingung, Kopplung oben



**Diagramm 3** : Symmetrische Schwingung, Kopplung mitte



**Diagramm 4** : Symmetrische Schwingung, Kopplung unten



## Antisymmetrische Eigenschwingung

Analog zur symmetrischen Eigenschwingung wird für die drei Kopplungsgrade eine antisymmetrische Eigenschwingung angeregt. Die Frequenzspektren sind in Diagrammen 5 - 7 zu Sehen. Die Frequenzen sind ebenfalls in Tabelle 1 zusammengefasst.

Diagramm 5 : Antisymmetrische Schwingung, Kopplung oben

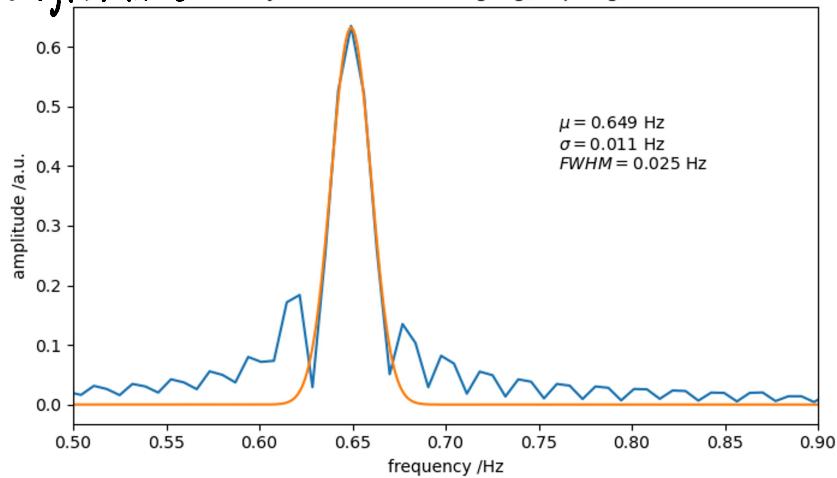


Diagramm 6 : Antisymmetrische Schwingung, Kopplung mitte

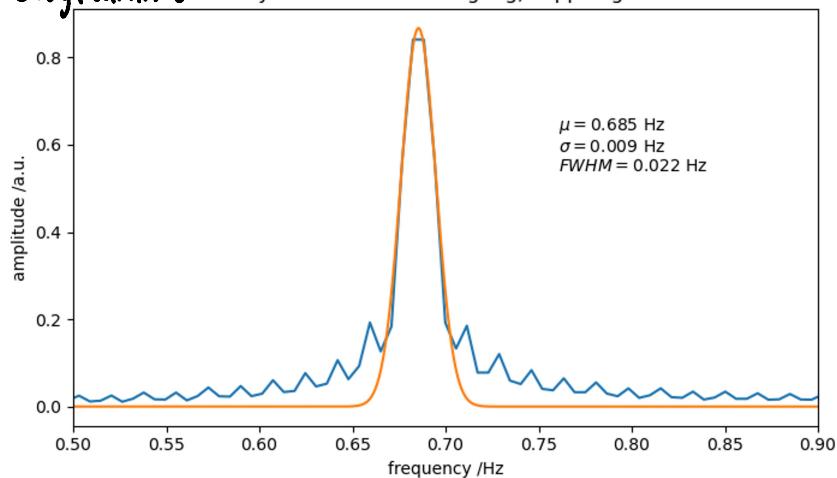
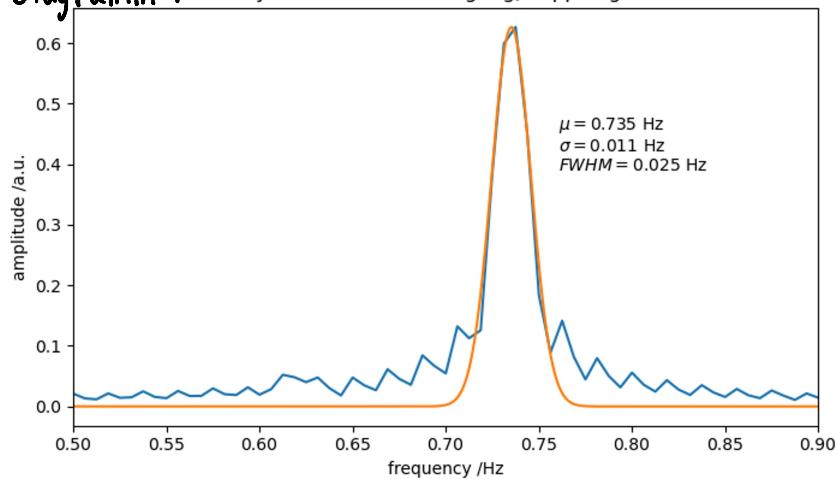
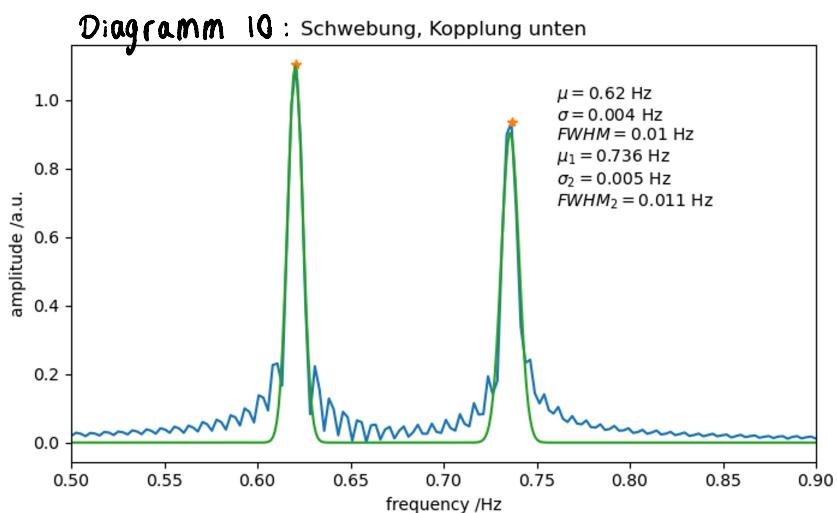
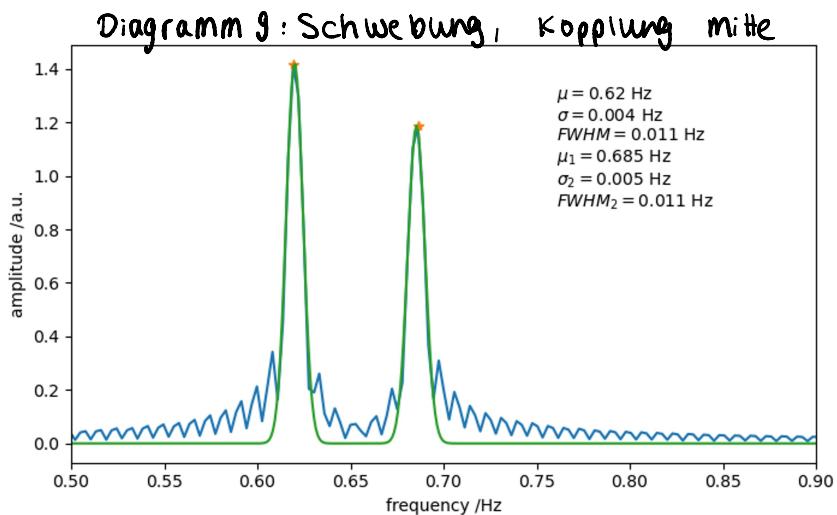
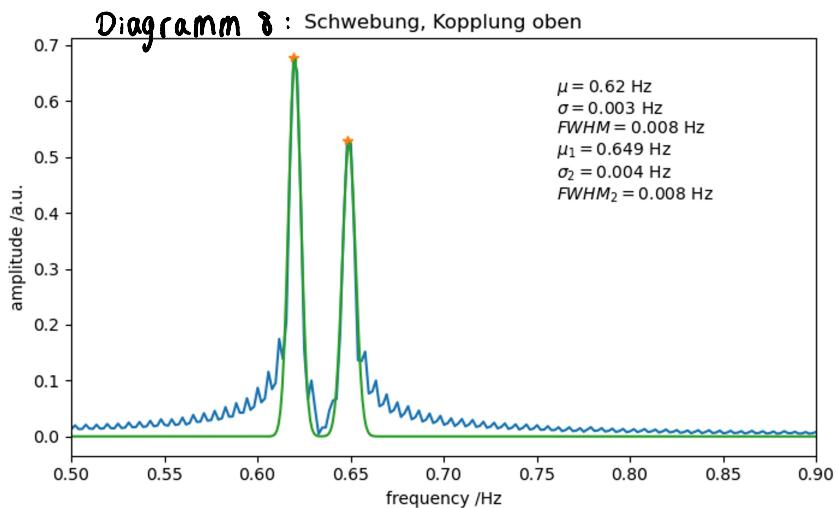


Diagramm 7 : Antisymmetrische Schwingung, Kopplung unten



## Schwebung

Nun werden beide Eigenschwingungen gleichzeitig angeregt und erneut die Frequenz  $f$  bestimmt. Außerdem wird die Schwebungsfrequenz  $f_s$  bestimmt. Die Frequenzspektren mit angepassten Fitkurven sind in Diagrammen 8 - 10 dargestellt. Für das Frequenzspektrum wird eine doppelte Gaußkurve angepasst.



Kopplung	oben	Mitte	unten
symmetrische Schwingung: $f_1 \left[ \frac{1}{s} \right]$	$0,621 \pm 0,011$	$0,629 \pm 0,009$	$0,621 \pm 0,008$
antisymmetrische Schwingung: $f_2 \left[ \frac{1}{s} \right]$	$0,649 \pm 0,011$	$0,685 \pm 0,009$	$0,735 \pm 0,011$
Schwebung: $f_3 \left[ \frac{1}{s} \right]$	$0,620 \pm 0,003$	$0,620 \pm 0,004$	$0,620 \pm 0,004$
Schwingungsfrequenz: $f_1 \left[ \frac{1}{s} \right]$	$0,649 \pm 0,004$	$0,685 \pm 0,005$	$0,736 \pm 0,005$

Tabelle 1: Schwingungsfrequenzen bei symmetrischer & antisymmetrischer Eigenschwingung und Schwebung für verschiedene Kopplungen

12.01.22  


### 3 Auswertung

#### 3.1 Berechnung der Frequenzen

Die Frequenz der Schwingung des Pendels wurde sowohl durch Messen der Periodendauer (nur für die nicht-gekoppelte Messung), als auch mithilfe des Programms betrachtet. Die Werte der Messreihe stimmen überein. Daraus berechnet man nun die Kreisfrequenzen für Versuchsteile 4 und 5. Dafür verwendet man:

$$w_I = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad \Delta w_I = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta w_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta w_2\right)^2} \quad (8)$$

$$w_{II} = \frac{w_1 - w_2}{2} \quad \Delta w_{II} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta w_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta w_2\right)^2} \quad (9)$$

Man erhält durch ablesen der Diagramme im Messprotokoll und weiterer obiger Rechnung, mittels den experimentell gewonnenen Werten  $w_{1,2}$ ,  $w_{I,II,(theo)}$ :

Tabelle 1: Ergebnisse der Kreisfrequenzen

Frequenzen	Kopplung $l_1$	Kopplung $l_2$	Kopplung $l_3$
Symmetrisch $w_1[\frac{1}{s}]$	$3,90 \pm 0,07$	$3,90 \pm 0,06$	$3,90 \pm 0,05$
Antisymmetrisch $w_2[\frac{1}{s}]$	$4,08 \pm 0,07$	$4,30 \pm 0,06$	$4,62 \pm 0,07$
Schwebung $w_I[\frac{1}{s}]$	$3,99 \pm 0,016$	$4,10 \pm 0,020$	$4,26 \pm 0,020$
Schwebung $w_{II}[\frac{1}{s}]$	$0,09 \pm 0,016$	$0,20 \pm 0,020$	$0,36 \pm 0,020$
Schwebung $w_{I,theo}[\frac{1}{s}]$	$3,99 \pm 0,05$	$4,10 \pm 0,04$	$4,26 \pm 0,05$
Schwebung $w_{II,theo}[\frac{1}{s}]$	$0,09 \pm 0,05$	$0,20 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$

Es fällt auf, dass die Frequenz der antisymmetrischen Schwingung größer wird je stärker die Kopplung. Die Frequenz der symmetrischen Schwingung bleibt dagegen konstant. Diese Ergebnisse decken sich sowohl mit den theoretisch erwarteten Ergebnissen, als auch mit der eigenen physikalischen Intuition.

### 3.2 Ermittlung der Kopplungsgrade

Man berechnet nun den Kopplungsgrad  $k$  und dessen Fehler mittels:

$$k = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2w_1^2} \quad \Delta k = \sqrt{\left(\frac{w_2}{w_1}\Delta w_2\right)^2 + \left(\frac{w_2}{w_1^3}\Delta w_1\right)^2} \quad (10)$$

Die Ergebnisse werden in folgende Tabelle eingetragen:

Tabelle 2: Ermittelte Kopplungsgerade  $k_i$

$k_1$	$0,047 \pm 0,004$
$k_2$	$0,108 \pm 0,006$
$k_3$	$0,202 \pm 0,008$

Des weiteren Berechnet man  $\frac{k_i}{k_j}$  und dessen Fehler:

$$\Delta \frac{k_i}{k_j} = \frac{k_i}{k_j} \sqrt{\left(\frac{\Delta k_i}{k_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k_j}{k_j}\right)^2} \quad (11)$$

Für  $\frac{l_i^2}{l_j^2}$  berechnet sich der Fehler folgendermaßen:

$$\Delta \frac{l_i^2}{l_j^2} = \frac{l_i^2}{l_j^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta l_i}{l_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_j}{2l_j}\right)^2} \quad (12)$$

Somit erhält man:

Tabelle 3: Beziehungen zwischen Kopplungs- und Längenverhältnissen

i,j	$\frac{k_i}{k_j}$	$\frac{l_i^2}{l_j^2}$	$\sigma$
1,3	$0,23 \pm 0,022$	$0,232 \pm 0,0025$	0,19
2,1	$2,30 \pm 0,023$	$2,32 \pm 0,017$	0,70
3,2	$1,9 \pm 0,13$	$1,81 \pm 0,010$	0,69

Diese Ergebnisse werden in der Diskussion abschließend bewertet und diskutiert.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

Zuerst wurde überprüft und bestätigt, dass die Pendelfrequenz mit und ohne (also frei) Kopplung bei der symmetrischen Schwingung identisch war. Dies liegt daran, dass hier die Feder weder gestaucht noch gestreckt wurde und somit keinen Einfluss auf die Bewegung hat. Bei der antisymmetrischen Schwingung war es allerdings schon so der Fall; je höher der Kopplungsgrad, desto größer die Frequenz. Aus den Diagrammen wurden dann die Schwebungsfrequenzen ermittelt und mit den vorherig bestimmten Werten auf andere Art und Weise errechnet. Bemerkenswert ist hier, dass jeder errechnete Wert der Schwebungsschwingung genau mit den gemessenen Werten übereinstimmt!

Im Anschluss wurde dann die unterschiedlichen Kopplungsgrade der einzelnen Federpositionen bestimmt. Wie erwartet wird der Kopplungsgrad größer, je weiter weg der Aufhängepunkt von der Pendelachse liegt. Bei den errechneten Kopplungs- und Längenverhältnissen wurde dann nochmals der direkte Zusammenhang zwischen ihnen gezeigt. Hierbei gab es auch keine signifikanten  $\sigma$ -Abweichungen.

Aufgrund der zufriedenstellenden Ergebnissen, welche in sich schlüssig sind und der Intuition gerecht werden kann von einem gelungenem Experiment sprechen; der einzige zu verbessernde Faktor ist, dass die Pendel auch parallel zur Pendelachse schwingen können, welche etwaige Ergebnisse verzerrten könnte.