14. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

14.1 Fundamentallösung homogener Gleichungen

Gesucht ist das reelle Fundamentalsystem zu den folgenden Differentialgleichungen:

a)

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4x \tag{1}$$

Als erstes stellen wir ein System von 2 Differentialgleichungen erster Ordnung auf und definieren: $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 4\dot{x} - 4x \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diese Gleichung können wir als eine Matrixgleichung auffassen:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az && (3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} && (4) \end{aligned}$$

Die Lösung erhält man durch das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) && (5) \\ &= -\lambda(4-\lambda) + 4 && (6) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 && (7) \\ &= (\lambda - 2)^2 \qquad |\lambda = 2 && (8) \end{aligned}$$

Dadurch, dass wir hier eine doppelte Nullstelle erhalten, sind nach Satz 6.14 die Funktionen

$$\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad t\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{9}$$

Lösungen. Diese sind linear unabhängig, also ist folgendes ein Fundamentalsystem

$$x = \mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t} \tag{10}$$

b)

$$\dddot{x} = 2\ddot{x} - 2\dot{x} + x \tag{11}$$

Wir fahren analog zu Teilaufgabe a) fort und stellen ein Gleichungssystem auf mit $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$ und $z_3 = \ddot{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ 2\ddot{x} - 2\dot{x} + x \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dies fassen wir nochmal als Matrixgleichung auf:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az \qquad (13)\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix} \qquad (14)\end{aligned}$$

Und rechnen das charakteristische Polynom aus:

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) \qquad (15)\\ &= -\lambda \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} \qquad (16)\\ &= -\lambda(-\lambda(2-\lambda)+2)+1 \qquad (17)\\ &= \lambda^2(2-\lambda) - 2\lambda + 1 \qquad (18)\\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \qquad (19)\\ &= -\big[(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)\big] \qquad (20)\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass entweder $\lambda_1 = 1$, oder

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^2 - \lambda + 1 \qquad (21)\\ \rightarrow \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \qquad (22)\\ &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (23)\end{aligned}$$

Für die 3 verschiedene Eigenwerte erhalten wir 3 linear unabhängige Lösungen, die unser Fundamentalsystem bilden. Als erstes brauchen wir die Eigenvektoren die zu den verschiedenen Eigenwerten gehören:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix} \qquad (24)$$

So ist per dem Korollar zum Satz 6.13 $\alpha_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1,\ \alpha_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2\ \alpha_3 = \mathrm{e}^{\lambda_3 t} v_3$ ein Fundamentalsystem der Lösung:

$$\Phi = \left(\mathrm{e}^t v_1 \quad \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)v_2 \quad \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)v_3\right) \qquad (25)$$

14.2 Lösungen inhomogener Gleichungen

Sei nun die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung gesucht:

$$\ddot{x} = 5\dot{x} - 6x + 4\mathrm{e}^t \tag{26}$$

Als erstes bestimmen wir ein Fundamentalsystem der homogenen Lösung mit $z_1 = x$ und $z_2 = \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az \qquad (27) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (28) \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) = -\lambda(5-\lambda) + 6 \qquad (29) \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 & \qquad (30) \end{aligned}$$

und die gesuchten Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \qquad (31) \\ \lambda_2 &= 2 \qquad (32) \end{aligned}$$

mit Eigenvektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (33) \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (34) \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ist also

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} v_1 & \mathrm{e}^{2t} v_2 \end{pmatrix} \qquad (35) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \qquad (36) \end{aligned}$$

Insbesondere ist Φ invertierbar mit $\det(\Phi) = -\mathrm{e}^{5t} \neq 0$.

Mit diesem Fundamentalsystem können wir durch Variation der Konstanten die inhomogene Lösung

$$\dot{z} = Az + b \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \tag{37}$$

bestimmen. Eine Lösung α lautet

$$\begin{aligned} \alpha &= \Phi \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1} b \, \mathrm{d}\tau \qquad (38) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{-1}{\mathrm{e}^{5\tau}} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2\tau} & -\mathrm{e}^{2\tau} \\ -3\mathrm{e}^{3\tau} & \mathrm{e}^{3\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4\mathrm{e}^{\tau} \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \qquad (39) \\ &= -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-3\tau} & -\mathrm{e}^{-3\tau} \\ -3\mathrm{e}^{-2\tau} & \mathrm{e}^{-2\tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4\mathrm{e}^{\tau} \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \qquad (40) \end{aligned}$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-2\tau} \\ 4\mathrm{e}^{-\tau} \end{pmatrix} \, \mathrm{d}\tau \tag{41}$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2\tau} \\ -4\mathrm{e}^{-\tau} \end{pmatrix} \right]_{t_0}^{t} \tag{42}$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-4t} \\ -4\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right] \tag{43}$$

$$= -\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{t} \\ -2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \\ 3c_1\mathrm{e}^{2t} + 2c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{t} \\ 2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \\ 3c_1\mathrm{e}^{2t} + 2c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \tag{45}$$

Eine Lösung für x ist

$$x = 2\mathrm{e}^{t} + c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{t} \tag{46}$$

14.3 Wiederholung: Normen

Sei $L \in \mathbb{R}$. Für $y \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ definieren wir $\|y\|_L := \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}y(t)\right|$.

a) Z: $\|\cdot\|_L$ ist eine Norm auf $F := C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$.
Wir überprüfen die Normaxiome:

(N1)

$$\forall f \in F : \|f\|_L = 0 \iff \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)\right| = 0 \tag{47}$$

$e^{-Lt} \neq 0 \; \forall t, L \in \mathbb{R}$, e^{-Lt} nicht nach oben beschränkt.

$$\iff f(t) = 0 \forall t \in [a,b] \tag{48}$$
$$\iff f = 0 \tag{49}$$

(N2)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in F : \|\lambda f\|_L = \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}\lambda f(t)\right| \tag{50}$$

Da wir mit Beträgen und somit rein positiven reellen Zahlen arbeiten, kann λ aus dem sup „herausgezogen “werden.

$$= |\lambda| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)\right| \tag{51}$$
$$= |\lambda| \cdot \|f\|_L \tag{52}$$

(N3)

$$\forall f,g \in F : \|f+g\|_L = \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}(f+g)(t)\right| \tag{53}$$
$$= \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}(f(t)+g(t))\right| \tag{54}$$
$$= \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)+e^{-Lt}g(t)\right| \tag{55}$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \left(\left|e^{-Lt}f(t)\right| + |e^{-Lt}g(t)|\right) \tag{56}$$
$$= \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)\right| + \sup_{t\in[a,b]} |e^{-Lt}g(t)| \tag{57}$$
$$= \|f\|_L + \|g\|_L \tag{58}$$

b) Zu Zeigen ist die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_L$ und $\|\cdot\|_{L'}$ auf $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ mit $L, L' \in \mathbb{R}$.

Es müssen also $c, C \in \mathbb{R}$ mit $c, C > 0$ existieren, sodass gilt

$$\forall f \in F : c\|f\|_L \leq \|f\|_{L'} \leq C\|f\|_L \tag{59}$$
$$\iff c \cdot \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-L't}f(t)\right| \leq C \cdot \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}f(t)\right| \tag{60}$$

Da c, C positiv sind, können wir diese in das sup „hineinziehen “.

$$\iff \sup_{t\in[a,b]} \left|ce^{-Lt}f(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-L't}f(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|Ce^{-Lt}f(t)\right| \tag{61}$$

c) Zu Zeigen ist, dass $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_L$ ist. Ein metr. Raum heißt Vollständig, falls jede Cauchy-Folge in ihm Konvergiert.
Hierzu müssen wir zuerst eine Metrik definieren

$$d(f,g) := \|f-g\|_L = \sup_{t\in[a,b]} \left|e^{-Lt}(f-g)(t)\right| \tag{62}$$

Eine Cauchyfolge auf dem gegebenen Raum erfüllt das Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \forall \; n,m \geq n_0 : d(f_n, f_m) < \varepsilon \tag{63}$$

14.4 woops nicht gesehen, die war auf einer anderen Seite