

8. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ____/____/____ Σ ____

8.1 Halleffekt

Wir betrachten die Hall-Spannung in einem Wismutstreifen.

Gegeben sind die Werte:

- Höhe des Streifens: $d = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$
- Magnetfeldstärke: $B = 2 \text{ T}$
- Elektrischer Strom: $I = 2 \text{ A}$
- Hallspannung: $U_H = 3,6 \text{ mV} = 0,0036 \text{ V}$

- a) Die Ladungsträgerdichte erhalten wir durch Umstellen der Formel für die Hallspannung aus der Vorlesung:

$$U_H = \frac{I}{n \cdot d \cdot q} \cdot B \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{I \cdot B}{U_H \cdot d \cdot q} \quad (2)$$

Neben den oben gegebenen Werten setzen wir für q die einfache Elementarladung ein und erhalten so:

$$n = \frac{2 \text{ A} \cdot 2 \text{ T}}{0,0036 \text{ V} \cdot 0,001 \text{ m} \cdot e} \quad (3)$$

$$(4)$$

$$\Leftrightarrow n = 6,935 \cdot 10^{24} \frac{1}{\text{m}^3} \quad (5)$$

- b) Da wir in der Aufgabe hierzu keine Angaben finden (bzw. noch keine bessere Lösung gefunden haben) nutzen wir für unsere Rechnung folgende Daten:

$$\rho_{Bi} = 9,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \left(9800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \quad (6)$$

$$\text{Molmasse } m_m = 208,98 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad (7)$$

$$n_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \quad (8)$$

Quelle: <https://www.lenntech.de/pse/elemente/bi.htm>

Dann gilt für die Atomdichte pro Kubikzentimeter:

$$\frac{n_2}{V} = \rho_{Bi} \cdot \frac{n_A}{m_m} \quad \left| \frac{1}{\text{mol}} \text{ kürzen wir direkt} \right. \quad (9)$$

$$= 9,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{208,98 \text{ g}} \quad (10)$$

$$= 2,82 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (11)$$

Mit Umrechnung der in a) erhaltenen Ergebnisse auf Kubikzentimeter erhält man:

$$n = 6,935 \cdot 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (12)$$

$$n_2 \equiv \frac{n_2}{V} = 2,82 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3} \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n_2} = \frac{6,935 \cdot 10^{18} \frac{1}{\text{cm}^3}}{2,82 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3}} \quad (14)$$

$$= 0,00025 \quad (15)$$

Dies würde bedeuten, dass etwa pro 4000 Wismut-Atomen ein (freier?) Ladungsträger vorliegt.

- c) **Vermutung:** Wir betrachten den Aufbau von oben, das B-Feld zeigt also in die Papierebene und der Strom fließt von links nach rechts, wobei wir I hier als technische Stromrichtung annehmen, das heißt positive Ladungen fließen wie eingezeichnet und negative entgegengesetzt. Gesichert ist zudem, dass wir oben positive Ladungen (oder Abwesenheit von negativen Ladungen) haben und unten analog für negative Ladungen. Nutzt man nun die rechte-Hand-Regel, also die Regel für den Fluss positiver Teilchen, so treibt die Lorentzkraft diese nach oben, was somit mit der Skizze übereinstimmt. Für die linke-Hand-Regel ist dies nicht der Fall, da dann die (negative) Ladung entgegen der technischen Stromrichtung fließt, weswegen wir von positiver Ladung ausgehen können.

8.2 Weichmagnetischer Ringkern

Geg.:

- Relative Permeabilität Eisen: $\mu_{\text{Fe}} = 2500$
- Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
- Radius: $R = 10 \text{ cm}$
- Wanddicke: $w = 1 \text{ cm}$
- Windungen: $N = 100$
- Strom: $I = 10 \text{ A}$
- Breite Luftspalt: $d = 1 \text{ mm}$

a) **Gesucht** ist der Betrag des Magnetfeldes, welches wir leicht bestimmen können als

$$B = \mu_0 \mu_{\text{Fe}} H \quad (16)$$

Und die magnetische Erregung H in der geschlossenen Kurve ist

$$\oint_C H \, ds = N I_{\text{frei}} \quad (17)$$

$$H 2\pi R = N I_{\text{frei}} \quad (18)$$

$$\implies H = \frac{N I_{\text{frei}}}{2\pi R} \quad (19)$$

$$H = 1591,55 \text{ T} \quad (20)$$

Das heißt für unser Magnetfeld B :

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{\text{Fe}} N I_{\text{frei}}}{2\pi R} \quad (21)$$

$$= 5 \text{ T} \quad (22)$$

b) **Gesucht** sind das magnetische Feld und die magnetische Erregung im Kern und in der Luftspalte.

Wir können uns überlegen, dass da der magnetische Fluss entlang des Ringkerns und durch den Luftspant konstant bleiben soll, und der Luftspalt und Ringkern die gleiche Querschnittsfläche haben, so muss auch das Magnetfeld durch den Kern und durch die Luftspalte gleich sein.

$$\phi_{M_{\text{Fe}}} = \int \mathbf{B}_{\text{Fe}} \, d\mathbf{A} \quad (23)$$

$$\phi_{M_{\text{Luft}}} = \int \mathbf{B}_{\text{Luft}} \, d\mathbf{A} \quad (24)$$

$$\phi_{M_{\text{Fe}}} = \phi_{M_{\text{Luft}}} \iff B_{\text{Fe}} = B_{\text{Luft}} \quad (25)$$

Dies können wir aus dem Satz von Gauß herleiten. Das Magnetfeld ist divergenzfrei, also gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad |\mathbf{B}| \parallel d\mathbf{A} \quad (26)$$

Da wir annehmen können, dass $d \ll R$, so gilt daraus

$$= -B_{\text{Fe}}A + B_{\text{Luft}}A \quad (27)$$

$$B_{\text{Fe}} = B_{\text{Luft}} \quad (28)$$

Nun um die magnetische Erregung zu bestimmen brauchen wir aber wegen der Änderung des Mediums doch eine Unterscheidung machen, und zwar:

$$NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (29)$$

Dies teilen wir in zwei verschiedene Integrale:

$$= \int_0^{2\pi-0.01} \mathbf{H}_{\text{Fe}} \cdot d\mathbf{s} + \int_{2\pi-0.01}^{2\pi} \mathbf{H}_{\text{Luft}} \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

Das 0.01 kommt dadurch, dass der zugehörige Winkel zu dieser kleinen Luftspalte $\arcsin \frac{d}{R} \approx 0.01$ ist, es steht nicht direkt für das d , obwohl die Annahme trotzdem zum richtigen Ergebnis geführt hätte. Außerdem wählen wir für unsere Wege jeweils die entsprechenden Kreisausschnitte

$$= (2\pi - 0.01)RH_{\text{Fe}} + (2\pi - 2\pi + 0.01)RH_{\text{Luft}} \quad (31)$$

Da das Feld im Kern und in der Luftspalte gleich ist, können wir schreiben:

$$H_{\text{Fe}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0 \mu_{\text{Fe}}} \quad (32)$$

und

$$H_{\text{Luft}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0} \quad (33)$$

Es gilt also:

$$NI \approx 2\pi R \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0 \mu_{\text{Fe}}} + 0.01 R \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0} \quad (34)$$

$$= B_{\text{Fe}} \frac{R}{\mu_0} \left(\frac{2\pi}{\mu_{\text{Fe}}} + 0.01 \right) \quad (35)$$

$$B_{\text{Luft}} = B_{\text{Fe}} = \frac{NI \mu_0}{R \left(\frac{2\pi}{\mu_{\text{Fe}}} + 0.01 \right)} \quad (36)$$

$$\approx 1.004 \, \text{T} \quad (37)$$

Somit gilt für die magnetische Erregung im Kern:

$$H_{\text{Fe}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0 \mu_{\text{Fe}}} \quad (38)$$

$$\approx 320 \text{ A m}^{-1} \quad (39)$$

und die in der Luft:

$$H_{\text{Luft}} = \frac{B_{\text{Fe}}}{\mu_0} \quad (40)$$

$$\approx 800 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1} \quad (41)$$

8.3 Helmholtzspulen

- a) **Gesucht** ist der optimale Abstand, bei welchem in der Konfiguration einer Helmholtzspule das Magnetfeld möglichst homogen ist.

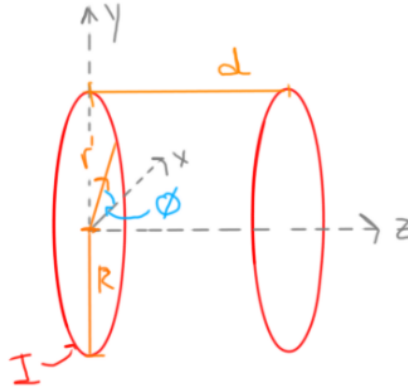


Abbildung 1: Helmholtz-Spule

Dazu berechnen wir die Magnetfeldstärke B entlang der Symmetrieachse durch das Zentrum der beiden Spulen:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \left| \mathbf{r}' = R \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right. \quad (42)$$

Uns interessiert spezifisch das Feld in z -Richtung entlang der Koordinatenachse

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - R \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\phi \quad (43)$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} Rz \cos \phi \\ Rz \sin \phi \\ R^2 \end{pmatrix}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\phi \quad \left| \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0 \right. \quad (44)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = 0$$

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} d\phi \quad (45)$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \quad (46)$$

Diese Formel gilt allgemein für das Magnetfeld einer dieser Spulen. Aus Bequemheit legen wir den Ursprung im Zentrum der linken Spule, dann ist die andere Spule in z -Richtung um d verschoben:

$$B_l = \frac{\mu_0 N I}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (47)$$

$$B_r = \frac{\mu_0 N I}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + (z - d)^2}^3} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (48)$$

Aufgrund des Superpositionsprinzips summieren sich diese zwei Felder, sodass das Gesamtfeld

$$B_{\text{ges}} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - d)^2}^3} \right] \quad (49)$$

ist. Wir wollen, dass das Magnetfeld genau in der Mitte der Spule möglichst homogen ist, deswegen zeigen wir kurz, dass die Ableitung an dieser Stelle wie erwartet verschwindet:

$$\frac{dB_{\text{ges}}}{dz} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[-\frac{3z}{\sqrt{R^2 + z^2}^5} - \frac{3(z - d)}{\sqrt{R^2 + (z - d)^2}^5} \right] \Bigg|_{z=\frac{d}{2}} \quad (50)$$

$$= -\frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{3\frac{d}{2}}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^5} + \frac{-3\frac{d}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{d}{2}\right)^2}^5} \right] \quad (51)$$

$$= -\frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[3\frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^5} - 3\frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^5} \right] \quad (52)$$

$$= 0 \quad (53)$$

Um einen optimalen Abstand zu finden, brauchen wir auch eine Stelle, wo die zweite Ableitung verschwindet.

$$\frac{d^2 B_{\text{ges}}}{dz^2} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{15z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^7} - \frac{3}{\sqrt{R^2 + z^2}^5} + \frac{15(z - d)^2}{\sqrt{R^2 + (z - d)^2}^7} - \frac{3}{\sqrt{R^2 + (z - d)^2}^5} \right] \Bigg|_{z=\frac{d}{2}} \quad (54)$$

$$= \frac{5\frac{d^2}{4}}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^7} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^5} + \frac{5\frac{d^2}{4}}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^7} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{d^2}{4}}^5} \quad (55)$$

$$= \frac{5\frac{d^2}{4}}{R^2 + \frac{d^2}{4}} - 1 + \frac{5\frac{d^2}{4}}{R^2 + \frac{d^2}{4}} - 1 \quad (56)$$

$$1 = \frac{5\frac{d^2}{4}}{R^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (57)$$

$$R^2 + \frac{d^2}{4} = 5\frac{d^2}{4} \quad (58)$$

$$R^2 = d^2 \quad (59)$$

$$R = d_{\text{opt}} \quad (60)$$

- b) Zunächst vergleichen wir dies mit einem Solenoid der Länge d_{opt} und Radius R . Wir nutzen die aus der Vorlesung bekannte Formel für das Magnetfeld auf der Symmetrieachse einer Leiterschleife, welche mit dem Biot-Savart-Gesetz bestimmt wurde:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (61)$$

Diese integrieren wir nun mit den Grenzen

$$a := z - \frac{d}{2}, \quad b := z + \frac{d}{2}, \quad (62)$$

wobei $d = d_{\text{opt}}$ die Länge des Solenoids ist.

$$B_{\text{Sol.}}(z) = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(\zeta^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta \quad (63)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \int_a^b \frac{R^2}{(\zeta^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} d\zeta \quad (64)$$

Wie von der Aufgabenstellung „angeboten“, ziehen wir zum Lösen des Integrals WolframAlpha zu Rate und erhalten:

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \left[\frac{\zeta}{\sqrt{R^2 + \zeta^2}} \right]_{z - \frac{d}{2}}^{z + \frac{d}{2}} \quad (65)$$

$$\Rightarrow B_{\text{Sol.}}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{z + \frac{d}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} - \frac{z - \frac{d}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} \right) \quad (66)$$

Nun vergleichen wir die magnetische Flussdichte der Beiden Spulenarten. Als Formel für das Magnetfeld der Helmholtzspulen nutzen wir die Formel aus Aufgabenteil a). Bei dieser Stellen wir zuvor die z -Abhängigkeit so um, dass sie sich auf das Zentrum der Spulen bezieht:

$$B_{\text{Hlm.}}(z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}^3} \right] \quad (67)$$

Für die freien Variablen der beiden Formeln können wir, da wir uns nur für das Verhältnis der Ergebnisse interessieren, möglichst einfache Werte verwenden:

$$R = 1 \text{ m}, \quad d = d_{\text{opt}} = R = 1 \text{ m}, \quad I = 1 \text{ A}, \quad N = 1 \quad (68)$$

Die folgende Grafik zeigt die Werte der beiden Magnetfelder abgezeichnet für den Bereich $-2d_{\text{opt}} = -2 \text{ m} \leq z \leq 2d_{\text{opt}} = 2 \text{ m}$.

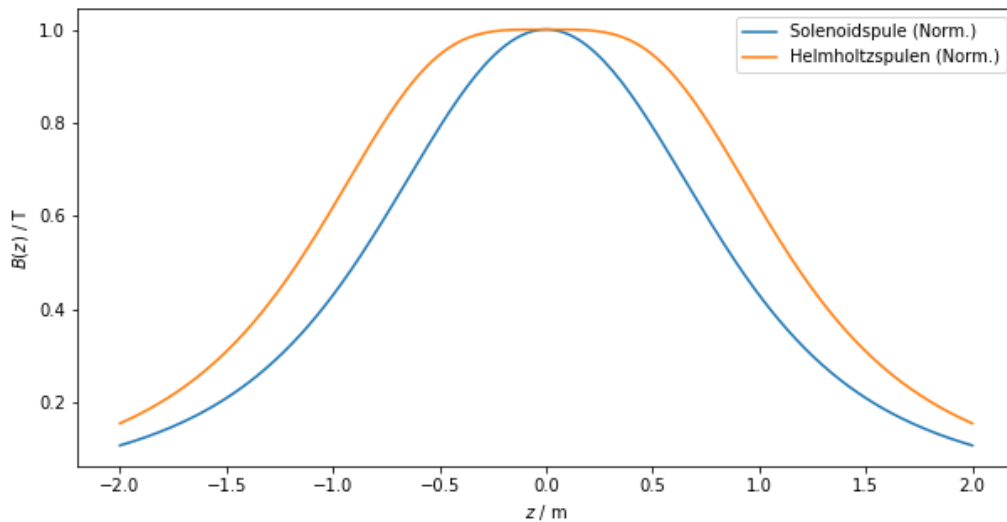


Abbildung 2: Vergleich der magnetischen Flussdichte der beiden Spulenkonfigurationen

Es ist hier klar zu erkennen, dass die magnetische Flussdichte der Helmholtzspulen für einen deutlich längeren Bereich der z -Achse auf ihrem Höepunkt verweilt, als das Feld der Solenoidspule.

8.4 Anhang

Python-Code Plot Aufgabe 3b)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.preprocessing import normalize
import numpy as np

#variables
mu0 = 1.2566*10**(-6)
I = 1
R = 1
d = 1
N = 1

def solenoidField(z):
    return (N/d) * \
        ((mu0*I)/2)*((z+(d/2))/np.sqrt(R**2+(z+(d/2))**2) - \
        (z-(d/2))/np.sqrt(R**2+(z-(d/2))**2))

def helmholtzField(z):
    return ((mu0*N*I*(R**2))/2) * \
        ((1/((np.sqrt(R**2+(z-(d/2))**2))**3))+ \
        (1/((np.sqrt(R**2+(z+(d/2))**2))**3)))

x = np.linspace(-2*d,2*d,200)
ys = solenoidField(x)
yh = helmholtzField(x)

ysplot = ys
yhplot = yh

ysplot = normalize(ys.reshape(-1,1), norm='max', axis=0)
yhplot = normalize(yh.reshape(-1,1), norm='max', axis=0)

fig = plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(x, ysplot, label='Solenoidspule (Norm.)')
plt.plot(x, yhplot, label='Helmholtzspulen (Norm.)')
plt.ylabel(r" $B(z) \backslash \mu_0 T$ ")
plt.xlabel(r" $z \backslash \mu m$ ")
plt.legend()
plt.show()
fig.savefig('pep8.3b.png')
```