Versuch 23 **1. September 2021**

Strom- und Spannungsmessung

Physikalisches Anfängerpraktikum I

Juan Provencio Betreuer: Antonia Schneider

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuches

Gesucht mit diesem Versuch ist eine Einführung in die Werkzeuge der Strom- und Spannungsmessung, wie der Titel desgleichen schon am Anfang verrät. Dabei werden wir lernen wie man die Messbereiche eines Messgeräts erweitert und die Quellenspannung einer Batterie bestimmen. Insbesondere werden wir ein Drehspulinstrument als Voltmeter und als Amperemeter verwenden und ihn auf 5 V bzw. 200 mA erweitern. Zusätzlich werden wir untersuchen, wie die Ausgangsspannung einer Batterie und die Belastung auf dieser in Bezug stehen und daraus versuchen die Quellenspannung zu bestimmen. Zuletzt wollen wir auch herausfinden, bei welcher Last die Leistung der Batterie am größten ist.

2 Grundlagen

2.1 Stromkreise

2.1.1 Kirchoffsche Gesetze

Gustav Kirchhoff entwickelte im 19. Jahrhundert zwei Gesetze, die bei der Verwendung von elektrischen Stromkreisen eine signifikante Rolle spielen. Diese kann man anhand der Maxwellschen Gesetzen herleiten. Insbesondere kann man aus Maxwells Durchflutungsgesetz die erste Kirchhoffsche Regel herleiten, die besagt, dass in jedem Knoten, also an jeder Stelle wo der Strom in mehrere Richtungen gehen kann, die Summe der reinkommenden und rausgehenden Ströme gleich 0 sein muss.

$$\sum_k I_k = 0 \tag{1}$$

Dies ist wahr unter der Annahme, dass die Gesamtladung im Stromkreis erhalten bleibt.

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz besagt, dass um jede geschlossene Schleife, oder "Masche", die Summe aus Spannungen verschwindet. Diese lässt sich aus dem Induktionsgestz herleiten, dabei gilt natürlich die gleiche Annahme wie bei der Knotenregel.

$$\sum_k U_k = 0 \tag{2}$$

2.1.2 Ohmsches Gesetz

Das Ohmsche Gesetz besagt, dass unter der Bedingung, dass ein Strom durch einen "ohmschen" Widerstand fließt, die Spannung proportional zum Strom ist.

$$U = R \cdot I \tag{3}$$

2.1.3 Widerstände

Mehrere Widerstände können auf unterschiedlicher Weise angeordnet werden: In Reihe oder in Parallel. Bei Widerständen, die in Reihe angeordnet sind fließt ein "Faden" von Strom und wird von jedem einzelnen Widerstand beeinflusst. Widerstände die parallel angeordnet sind verteilen dagegen den Strom. Zu diesen zwei Anordnungen lassen sich zwei Regeln zur Berechnung des Gesamtwiderstands formulieren. Alle mögliche Anordnungen von Widerständen lassen sich aus diesen zwei Regeln beschreiben. Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung entspricht:

$$R = \sum_i R_i. \tag{4}$$

Der einer Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \tag{5}$$

2.1.4 Spannungsquellen

Bei idealen Spannungsquellen ist die Spannung unabhängig vom Strom. In der Realität spielt jedoch der Strom auch eine Rolle. Wenn wir die Spannung an den Ausgangsklemmen messen kommt nicht wieder die Quellenspannung U_q zurück, sondern geht ein bisschen Spannung "verloren". Die Spannung, die wir am Ende erhalten ist die sogenannte Klemmenspannung

$$U_{\text{Klemm}} = U_q - U(I). \tag{6}$$

Dieser Spannungsabfall $U(I)$ ist bei linearen Spannungsquellen, wie der Name darauf hindeutet, linear proportional zum Strom. Habe die Spannungsquelle einen Innenwiderstand R_{iS}, dann gilt

$$U_{\text{Klemm}} = U_q - R_{iS} \cdot I. \tag{7}$$

Sei sie noch von einem zusätzlichen Widerstand R_L belastet, dann gilt auch

$$I = \frac{U_q}{R_{iS} + R_L}. \tag{8}$$

Für die Klemmenspannung über dem Lastwiderstand gilt

$$U = R_L \cdot I = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L} \tag{9}$$

2.2 Messung von Strom und Spannung

2.2.1 Drehspulinstrument

Innerhalb eines Dauermagnetes wird eine Drehspule mit einem Zeiger angelegt. Dabei bewirkt ein Strom und das magnetische Feld eine Kraft auf die Spule aufgrund der Lorentzkraft und der elektromagnetischen Induktion. Damit sich der Zeiger nicht einfach in Kreisen dreht, wird eine Rückstellfeder an die Spule befestigt, damit wird bei einem größeren Strom eine stärkere Kraft auf die Feder ausgerichtet und wir können (indirekt) mit der Auslenkung dieser Feder den Strom bestimmen. Die Feder ist so eingestellt, sodass wir mithilfe des Ablenkwinkels α (und der Windungszahl n der Spule) den Strom messen können. Insbesondere stehen diese im folgenden Verhältnis.

$$\alpha \propto n \cdot I \tag{10}$$

Dies folgt aus der Lorentzkraft F_L und aus dem Hookesches Gesetz. Aus der Lorentzkraft ist die Kraft proportional zum durchflossenen Strom, und dieser Kraft wirkt die Kraft F_H der Feder entgegen. Diese folgt dem Hookeschen Gesetz und ist proportional zur Auslenkung, welche wir mit dem Winkel messen möchten. Daraus folgt

$$\alpha \propto F_H \propto F_L \propto I \tag{11}$$

Ein Strommessgerät sollte aufgrund der Kirchhoffschen Regeln immer in Serie zum Verbraucher R_L geschaltet werden. Das liegt daran, dass sie einen geringen Widerstand haben sollten. Wenn es in parallel geschaltet wäre, dann würde sich der Strom ablenken und lieber durch das Messgerät als durch das untersuchte Objekt fließen.

Durch diesen Stormkreis fließt ein Strom von

$$I = \frac{U_0}{R_L + R_{iS} + R_{iA}}. \tag{12}$$

Dies ist ein kleinerer Strom als bei (8), weil der Widerstand des Amperemeters miteinbezogen werden muss. Falls dieser sehr viel kleiner als der Lastwiderstand ist, kann er in der Regel vernachlässigt werden.

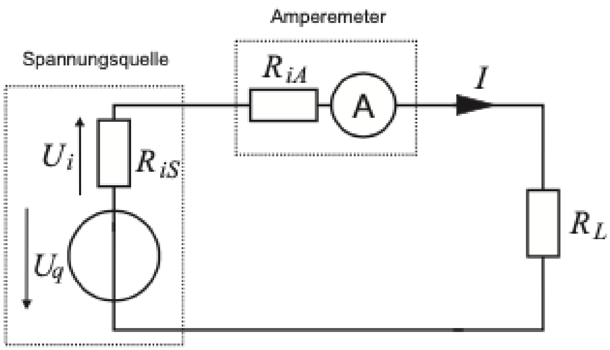

Abbildung 1: Stromkreis mit Amperemeter

2.2.2 Kompensator

Am Kompensator versuchen wir eine Spannung U_x zu bestimmen, indem wir sie mit einer einstellbaren Spannung U_e vergleichen. Dabei wird die Spannung U_e so eingestellt, bis sie der unbekannten Spannung U_x komplett entgegenwirkt und kein Strom mehr fließt. Dann wissen wir, die Spannung U_x entspricht der Spannung, die wir am Kompensator eingestellt haben und ablesen können.

Im Grundlegendsten funktioniert der Kompensators so wie in der unteren Abbildung 2 dargestellt, wir setzen zwei Spannungen "gegeneinander" und lesen die "Gegenspannung" ab, wenn sie abgeglichen sind.

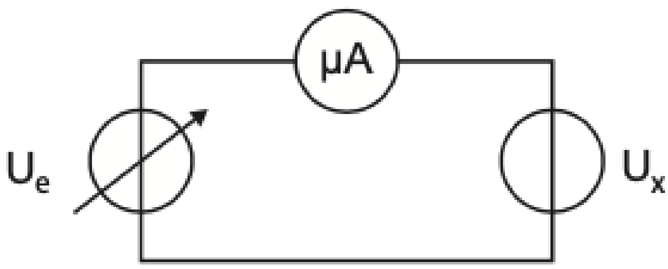

Abbildung 2: Schaltplan Kompensator, vereinfacht

Genauer können wir uns im genaueren Schaltplan (Abb. 4) die Mechanismen zur Eichung und Bestimmung der Spannung angucken:

Einen Spannungsmesser sollte man wie in Abbildung 3 immer parallel zum

Verbraucher schalten.

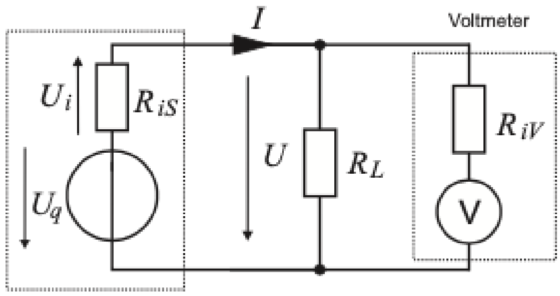

Abbildung 3: Stromkreis mit Voltmeter

Hier beträgt der Strom

$$U = U_q \frac{R_L}{\frac{R_{iS} \cdot R_L}{R_{iV}} + R_{iS} + R_L} \tag{13}$$

2.2.3 Messbereichserweiterung

Falls wir eine Größe messen wollen, die nicht im Messbereich des Messinstruments liegt müssen wir uns keine Sorge machen, denn wir können diesen Messbereich erweitern, indem wir ein bisschen mit Widerständen rumspielen.

Um den Messbereichs eines Amperemeters um einen Faktor f zu erweitern stellt man einen Widerstand R_p parallel zum Messgerät mit

$$R_p = \frac{R_i}{f-1}. \tag{14}$$

Dabei ist R_i der Innenwiderstand des Messgeräts.

Bei der Erweiterung des Messbereichs eines Spannungsmessers legt man dagegen den Widerstand

$$R_s = R_i(f-1) \tag{15}$$

in Reihe zum Gerät.

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialen und Geräte

- 6 V Netzteil mit zusätzlicher Präzisionsspannungsquelle $(2,5\,\mathrm{V} \pm 0,02\%)$

- Kompensator. Linearitätsfehler des Kompensationsreglers: $0,25\%$
- Milliamperemeter
- Schiebewiderstand ($100\,\Omega$)
- Drei Dekadenwiderstände
- Batterie
- Taster
- Steckbrett mit zwei Widerständen

3.2 Aufbau

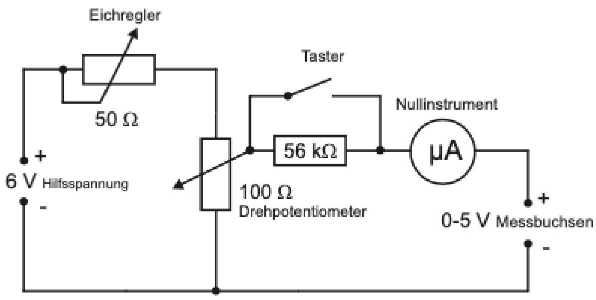

Abbildung 4: Schaltplan Kompensator

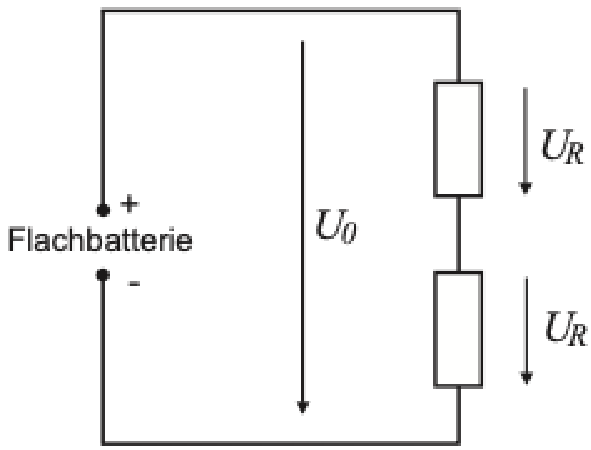

Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Batteriespannung

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll V23 Strom- und Spannungsmessung

01.09.2021

Mike Brandt
Juan Provencio

Teil 1: Vorbereitung

Wir eichen den Kompensator mit

Eichspannung $U_E = 2{,}5\,V \pm 0{,}02\%$
Hilfsspannung $U_e = 6\,V \pm 0{,}02\%$

Wir stellen den Kompensationsregler auf 500 Skt. und gleichen den Kompensator auf 0 ab mit einem Linearitätsfehler des Kompensationsreglers von 0,25%. Am Eichregler stellen wir 60 Skt. an

Teil 2: Batteriespannung / Drehspulinstrument als Voltmeter

Wir benutzen das Drehspulinstrument als Voltmeter. Dieser hat

$R_i = 448\,\Omega \pm 1\%$; $I_{max} = 10\,mA \pm 2{,}5\%$

$U = R_i \cdot I_{max} = 4{,}48\,V \pm$

Wir wollen diese Spannung auf 5V erweitern, also um einen Faktor $f = 1{,}116$. Per Gleichung

$R_s = (f-1)R_i = 52\,\Omega \pm 2{,}6\%$

Der Dekadenwiderstand gibt eine Fehlergrenze von
$0{,}1\,\Omega \pm 1\%$
$1\,\Omega \pm 0{,}5\%$
$10\,\Omega \pm 0{,}2\%$

Am ersten Widerstand messen wir einen Strom von und eine Spannung

$I_A = 2{,}30\,mA \pm 2{,}5\%$; $U_A = 1{,}15\,V \pm 2{,}6\%$

Am zweiten

$I_B = 2{,}30\,mA \pm 2{,}5\%$; $U_B = 1{,}15\,V \pm 2{,}6\%$

An der Batterie messen wir einen Strom von

$I_0 = 8{,}60\,mA \pm 2{,}5\%$

Dies entspricht einer Spannung von

$U_0 = 4{,}3\,V \pm 2{,}6\%$

Abbildung 6: Messprotokoll

Wir wiederholen die Messung mit dem Kompensator. Um ihn abzugleichen drehen wir den Kompensationsregler auf 442 Skt. für beide Widerstände. Dies entspricht einer Spannung von

$U = 2{,}21\,V \pm 0.25\,\%$.

Wir messen die Spannung über beide Widerstände und drehen den Kompensationsregler auf ~~878~~ 881 Skt. Dies entspricht (wir haben vergessen den Taster zu drücken)

$U = \cancel{4{,}39\,V \pm}\ 4{,}4\ V \pm 0.25\,\%$.

Teil 3: Batteriespannung / Drehspulinstrument als Amperemeter

Wir erweitern den Messbereich vom Messgerät von 10 mA auf 200 mA um einen Faktor $f = 20$. Dies entspricht

$$R_p = \frac{R_i}{f-1} = 23{,}6\,\Omega \pm$$

Wir messen die Klemmspannung der Batterie mit dem Kompensator.

Tabelle 1: Verhältnis von Strom und Spannung

Messung	Strom I [mA]	Spannung U [V]	Kompensator Skt
1	176,0 ± 5	4,080 ± 0,010	816
2	148,0 ± 5	4,110 ± 0,010	822
3	112,0 ± 5	4,160 ± 0,010	832
4	84,0 ± 5	4,200 ± 0,011	840
5	68,0 ± 5	4,230 ± 0,011	846
6	56,0 ± 5	4,250 ± 0,011	850
7	48,0 ± 5	4,260 ± 0,011	852
8	40,0 ± 5	4,270 ± 0,011	854
9	36,0 ± 5	4,28 ± 0,011	856

VT 1.3.21

A. Se[illegible]

Abbildung 7: Fortsetzung Messprotokoll

4.2 Auswertung

4.2.1 Eichung des Kompensators

Zuerst schließen wir eine Hilfsspannung von $U_e = 6\,\mathrm{V}$ an die linke Buchse des Kompensators an und eine Eichsspannung von $U_E = 2,5\,\mathrm{V}$ an die rechte. Den Kompensationsregler stellen wir auf 500 Skt. Um den Kompensator abzugleichen drücken wir kurz den Taster, dieser besitzt einen enormen Widerstand von $R = 56 \cdot 10^3\,\Omega$, weshalb beim Runterdrücken nahezu kein Strom mehr fließt. Beim Runterdrücken gibt es am Messgerät noch einen großen Schlag, wir drehen den Eichregler bis kein Schlag mehr vorkommt. Wir verriegeln den Drehknopf, damit sich der Eichregler nicht dekalibriert.

Mit der Kalibrierung der Skala entsprechen k die Skalenteile, so gilt nämlich

$$U_K = \frac{k}{500} \cdot U_E \tag{16}$$

Per die Versuchsanleitung hat die Referenzspannung einen Fehler von $0,02\%$ und der Kompensationsregler einen Linearitätsfehler von $0,25\%$. Bei Einstellung der Eichspannung auf $U_E = 2,5\,\mathrm{V}$ erhalten wir hierfür einen Fehler von

$$\sigma_{U_E} = U_E \cdot 0,02\% = 2,5\,\mathrm{V} \cdot 0,0002 = 0,0005\,\mathrm{V}. \tag{17}$$

Beim Kompensationsregler erhalten wir einen Fehler von

$$\sigma_k = k \cdot 0,0025 \tag{18}$$

Insgesamt entspricht dies nach der gaußschen Fehlerfortpflanzung einem Fehler von

$$\begin{aligned}
\sigma_{U_K} &= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial k}(U_K) \cdot \sigma_k\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial U_E}(U_K) \cdot \sigma_{U_E}\right)^2} && (19)\\
&= \sqrt{\left(\frac{U_E}{500} \cdot \sigma_k\right)^2 + \left(\frac{k}{500} \cdot \sigma_{U_E}\right)^2} && (20)\\
&= \sqrt{\left(\frac{2,5\,\mathrm{V}}{500} \cdot 0,0025 \cdot k\right)^2 + \left(\frac{k}{500} \cdot 0,0005\,\mathrm{V}\right)^2} && (21)\\
&= \sqrt{(1,25\,\mathrm{V} \cdot 10^{-5} \cdot k)^2 + (1\,\mathrm{V} \cdot 10^{-6} \cdot k)^2} && (22)\\
&= k\sqrt{(1,25\,\mathrm{V} \cdot 10^{-5})^2 + (1\,\mathrm{V} \cdot 10^{-6})^2} && (23)
\end{aligned}$$

4.2.2 Messbereichserweiterung des Drehspulinstruments als Voltmeter

Obwohl wir das Drehspulinstrument als einen Strommesser eingeführt haben, dient dieses ebenfalls zur Messung von Spannung. Dies ist möglich aufgrund der Relation was im Ohmschen Gesetz zwischen der Spannung und dem Strom entsteht. Als nächstes wollen wir den Messbereich des Drehspulinstruments erweitern, so dass ein Vollausschlag bei 5 V erfolgt. Dies können wir nach Gleichung (15) machen, indem wir einen passenden Widerstand in Serie zum Messgerät einbauen. Der Messgerät besitzt einen Widerstand von $R_i = 448\,\Omega \pm 1\%$ und misst einen maximalen Strom von $I_{\max} = 10\,\text{mA} \pm 2,5\%$. Das heißt, er kann eine Spannung bis zu $U_{\max} = R_i \cdot I_{\max} = 4,48\,\text{V}$. Wir wollen diese Spannung auf 5 V erweitern, das heißt um einen Faktor von etwa $f = 1,116$. Aus Gleichung (15) müssen wir dann einen Widerstand von etwa $R_S = 52\,\Omega$ einbauen. Dieser Widerstand besitzt nach den Angaben des Dekadenwiderstands einen Fehler von

$$\sigma_{R_S} = \sqrt{\underbrace{(50\,\Omega \cdot 0,002)^2}_{10\,\Omega\text{: }\pm 0{,}2\%} + \underbrace{(2\,\Omega \cdot 0,005)^2}_{1\,\Omega\text{: }\pm 0{,}5\%}} = 0,10\,\Omega \tag{24}$$

Der Fehler des Innenwiderstands beträgt

$$\sigma_{R_i} = 448\,\Omega \cdot 0,01 = 4,48\,\Omega \tag{25}$$

Insgesamt ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung einen Widerstand von

$$\sigma_R = \sqrt{(\sigma_{R_S})^2 + (\sigma_{R_i})^2} = 4,5\,\Omega \tag{26}$$

Der Widerstand insgesamt beträgt also

$$R = (500 \pm 4,5)\,\Omega\| \tag{27}$$

4.2.3 Messung der Spannung an der Batterie

Nun wollen wir mithilfe des Drehspulinstruments und des Kompensators die Spannung an beiden Widerständen $U_A = U_B$, die in Abbildung 5 dargestellt sind. Wir haben gemessen, dass die Batterie eine Spannung von $U_0 = (4,300 \pm 0,17)\,\text{V}$ besitzt. Dementsprechend sollte aufgrund der Maschenregel gelten, dass

$$U_0 = U_A + U_B = 2U_A \tag{28}$$

Mithilfe des Drehspulinstruments haben wir an den jeweiligen Widerständen einen Strom von $I_A = (2,30 \pm 0,06)\,\text{mA}$, dies entspricht einer Spannung von

$$U_A = 1,15\,\text{V} \tag{29}$$

Für die Berechnung des Fehlers betrachten wir den Fehler des Drehspulinstruments, welcher als prozentueller Anteil von dem Maximalstrom gegeben wird, den Fehler des Widerstands und zusätzlich einen Ablesefehler, welchen wir nachträglich hinzufügen, da wir ihn aus dem Messprotokoll weggelassen haben. Wir schätzen ihn ab als einen Skalenteil des Messinstruments, dies entspricht $0,2\,\mathrm{mA}$ oder $0,1\,\mathrm{V}$. Somit ergibt sich für den Fehler

$$\sigma_{U_A} = \sqrt{\underbrace{(0,1\,\mathrm{V})^2}_{\text{Ablesefehler}} + \underbrace{(500\,\Omega \cdot 0,025\,\mathrm{mA})^2}_{R\cdot\sigma_I} + \underbrace{(10\,\mathrm{mA} \cdot 4,5\,\Omega)^2}_{I_{\max}\cdot\sigma_R}} = 0,17\,\mathrm{V} \tag{30}$$

Wie gesagt, die Maschenregel sollte anhand dieser Rechnung bestätigt werden. Wir erhalten aber damit

$$U_0 = 2 \cdot U_A \tag{31}$$
$$4,40\,\mathrm{V} = 2 \cdot 1,15\,\mathrm{V} \tag{32}$$
$$= 2,30\,\mathrm{V} \tag{33}$$

Dies ist eine falsche Aussage. Selbst mit dem Fehler

$$\sigma_U = \sqrt{\underbrace{(0,17\,\mathrm{V})^2}_{\sigma_{U_0}} + \underbrace{(2 \cdot 0,17\,\mathrm{V})^2}_{\sigma_{U_A}}} = 0,4\,\mathrm{V} \tag{34}$$

kommen wir nicht nah zum erwarteten Ergebnis. Hier muss also wahrscheinlich ein Problem aufgetaucht sein. Wir werden ihn tiefer während der Diskussion untersuchen. Zuerst gehen wir zur zweiten Messung mit dem Kompensator rüber.

In diesem Fall haben wir mithilfe des Kompensators die Spannung an den zwei Widerständen abgeglichen, und aus dem Drehpotentiometer die Skalenteilen abgelesen. Nochmal fügen wir den Ablesefehler rückwirkend in unsere Rechnung hinzu. Diesen schätzen wir als 0,5 Skt. oder $0,01\,\mathrm{V}$ ab. Hier lesen wir eine Spannung von $U_0 = 4,4\,\mathrm{V}$, entsprechend 880 Skt., ab mit einem Fehler von

$$\sigma_{U_0} = \sqrt{\underbrace{(0,01\,\mathrm{V})^2}_{\text{Ablesefehler}} + \underbrace{(0,011\,\mathrm{V})^2}_{\text{Linearitätsfehler}}} = 0,015\,\mathrm{V} \tag{35}$$

Bei diesem Teil des Versuchs haben wir an den Widerständen eine Spannung von $U_A = 2,21\,\mathrm{V}$ gemessen und betrachten für den Fehler den Ablesefehler und den Linearitätsfehler σ_{U_K} aus Gleichung (19) bei 442 Skalenteilen:

$$\sigma_{U_A} = \sqrt{\underbrace{(0,01\,\mathrm{V})^2}_{\text{Ablesefehler}} + \underbrace{(0,006\,\mathrm{V})^2}_{\text{Linearitätsfehler}}} = 0,012\,\mathrm{V} \tag{36}$$

Hier scheint die Maschenregel doch einigermaßen erfüllt zu sein, nämlich gilt

$$U_0 = 2 \cdot U_A \tag{37}$$
$$4{,}4\,\mathrm{V} \approx 2 \cdot 2{,}21\,\mathrm{V} \tag{38}$$

mit einem Fehler von

$$\sigma_U = \sqrt{\underbrace{(0{,}015\,\mathrm{V})^2}_{\sigma_{U_0}} + \underbrace{(2 \cdot 0{,}012\,\mathrm{V})^2}_{\sigma_{U_A}}} = 0{,}028\,\mathrm{V} \tag{39}$$

4.2.4 Messung der Widerstände im Spannungsteiler

Um den Wert der Widerständen in unserem Spannungsteiler zu bestimmen benutzen wir die Kirchhoffschen Regeln, welche wir gleich formulieren werden. Wie in der folgenden Abbildung gezeichnet, haben wir ein System aus 2 Maschen und 2 Knoten.

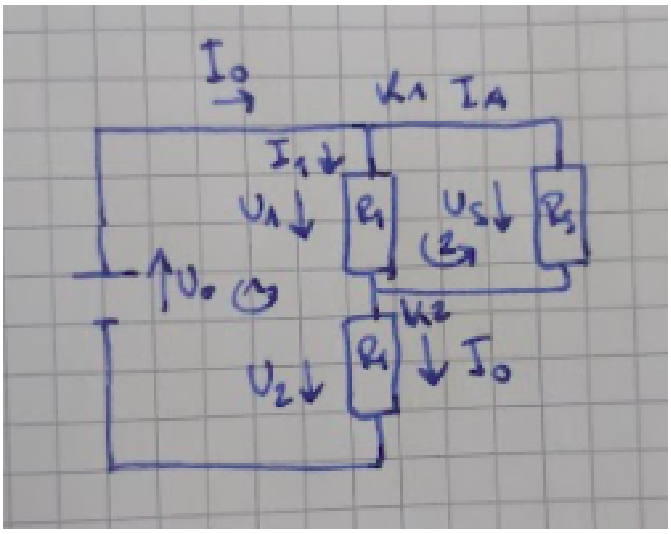

Abbildung 8: Knoten und Maschen am Spannungsteiler

$$\text{K1:} \quad I_0 = I_A + I_S \tag{40}$$
$$\text{K2:} \quad I_A + I_S = I_0 \tag{41}$$
$$\text{M1:} \quad U_0 = U_A + U_B \tag{42}$$
$$\text{M2:} \quad U_0 = U_S \tag{43}$$

Mit I_A bezeichnen wir den Strom, der durch Widerstand R_A fließt, mit I_S den Strom, der durch den Strommessgerät fließt. Aus dem Ohmschen Gesetz ist uns bekannt, dass

$$\begin{aligned} U_A &= R_A \cdot I_A && |K1 && (44)\\ &= R_A \cdot (I_0 - I_S) && |K2 && (45)\\ &= R_A \cdot \left(\frac{U_A}{R_B} - I_S\right) && |M1 && (46)\\ &= R_A \cdot \left(\frac{U_0 - U_A}{R_B} - I_S\right) && |R_A = R_B && (47)\\ R_A &= \frac{U_0 - 2 \cdot U_A}{I_S} && && (48) \end{aligned}$$

An dieser Stelle sind uns alle Werte bekannt, wir haben am Amperemeter $I_S = 2{,}6\,\mathrm{mA}$, an der Spannung $U_0 = 4{,}3\,\mathrm{V}$ und an der Spannung $U_A = 1{,}15\,\mathrm{V}$. Damit erhalten wir für $R_A = 769{,}23\,\Omega$. Wir verzichten auf die Berechnung des Fehlers, per die Anweisungen auf dem Praktikumsskript.

4.2.5 Messbereichserweiterung des Drehspulinstruments als Amperemeter

Zunächst wollen wir das Drehspulinstrument von 10 mA auf 200 mA erhöhen, also um einen Faktor von $f = 20$. Dieser Faktor besitzt aber einen Fehler laut dem Gaußschen Forptflanzungsgesetz von

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial R_i}(f) \cdot \sigma_{R_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial R_P}(f)\sigma_{R_P}\right)^2} && (49)\\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_i}}{R_P}\right)^2 + \left(\frac{R_i}{R_P^2} \cdot \sigma_{R_P}\right)^2} && (50)\\ &= 0{,}19 && (51) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Fehler des gemessenen Stroms $I = I_{\mathrm{Abl}} \cdot f$

$$\sigma_I = \sqrt{(I_{\mathrm{Abl}} \cdot \sigma_f)^2 + (f \cdot \sigma_{I_{\mathrm{Abl}}})^2} \tag{52}$$

Auf den Fehler des Skalierungsfaktor haben wir während der Messung nicht beachtet, weshalb wir ihn zunächst rückwirkend in die nächste Tabelle hinzufügen:

Dementsprechend brauchen wir einen Widerstand von $R_p = \frac{R_i}{20-1} \approx 23{,}6$ laut Gleichung (14). Dieser besitzt analog zur Rechnung in (24) einen Fehler von

$$\sigma_{R_P} = 0{,}04\,\Omega \tag{53}$$

Tabelle 1: Korrektur zur Fehlerangabe des gemessenen Stroms

Messung	Abgelesener Strom I [$20 \cdot$ mA]	Fehler σ_I [mA]
1	176,00	5,27
2	148,00	5,19
3	112,00	5,11
4	84,00	5,06
5	68,00	5,04
6	56,000	5,028
7	48,00	5,020
8	40,000	5,014
9	36,00	5,012

Also

$$R_P = (23,60 \pm 0,04)\,\Omega \tag{54}$$

4.2.6 Messung der Quellspannng

Zunächst nehmen wir die Klemmenspannung der belasteten Batterie auf. Mit dem Schiebewiderstand passen wir die Stromstärke von etwa 0 bis auf etwa 200 mA an. Insgesamt wollen wir aber in diesem Intervall 9 Messungen durchführen. Hier passen wir auf, dass wir den Taster nur sehr kurz gedrückt halten, denn mit dem hohen Widerstand könnte es zu Schädigungen führen. Die Werten der Messungen tragen wir in ein Diagramm ein (Diagramm 9). Wir erwarten aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen der Spannung und dem Strom im Ohmschen Gesetz eine abfallende Gerade. Der Betrag der Steigung dieser Gerade entspricht dem Widerstand der Schaltung. Aus dem Diagramm lesen wir aus der Ausgleichsgerade eine Steigung von

$$R_A = \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = \frac{0,22\,\mathrm{V}}{153\,\mathrm{mA}} = 1,4\,\Omega \tag{55}$$

Hierbei betrachten wir nur die absolute Differenz, den wir keinen negativen Wert für den Widerstand erhalten können. Aus der Fehlergerade lässt sich eine Steigung von

$$R_F = \frac{\Delta U_F}{\Delta I_F} = \frac{0,234\,\mathrm{V}}{149\,\mathrm{mA}} = 1,6\,\Omega \tag{56}$$

Als Fehler ergibt sich die Differenz dieser beiden Steigungen, also $\sigma_{R_{iS}} = 0,2\,\Omega$. Der tatsächliche Widerstand entspricht dann nach unseren Rechnungen

$$R_i = (1,4 \pm 0,2)\,\Omega\| \tag{57}$$

Zu dieser Rechnung fehlt allerdings den Wert der Spannung der unbelasteten Batterie. Diesen erhielten wir, wenn wir einen Strom von 0 mA eingestellt haben könnten, wir werden ihn aber mithilfe unserer Geraden versuchen zu bestimmen. Dafür brauchen wir als Anfangswerte zwei Messwerte, aus welchen wir die Gerade legen. Wir entscheiden uns für Messung 8, weil dieser Punkt am nächsten zu unserer Ausgleichsgerade liegt. Dann wollen wir per Gleichung (7) die Quellenspannung bestimmen

$$U_q(U_8, I_8) = U_8 + R_i \cdot I_8 \tag{58}$$
$$= 4,27\,\mathrm{V} + 1,4\,\Omega \cdot 40\,\mathrm{mA} \tag{59}$$
$$= 4,326\,\mathrm{V} \tag{60}$$

mit einem Fehler von

$$\sigma_{U_q} = \sqrt{(\sigma_{U_8})^2 + (R_i \cdot \sigma_{I_8})^2 + (I_8 \cdot \sigma_{R_i})^2} \tag{61}$$
$$= 0,015\,\mathrm{V} \tag{62}$$

Wir zählen somit mit einer Quellenspannung von

$$U_q = (4,326 \pm 0,015)\,\mathrm{V}\| \tag{63}$$

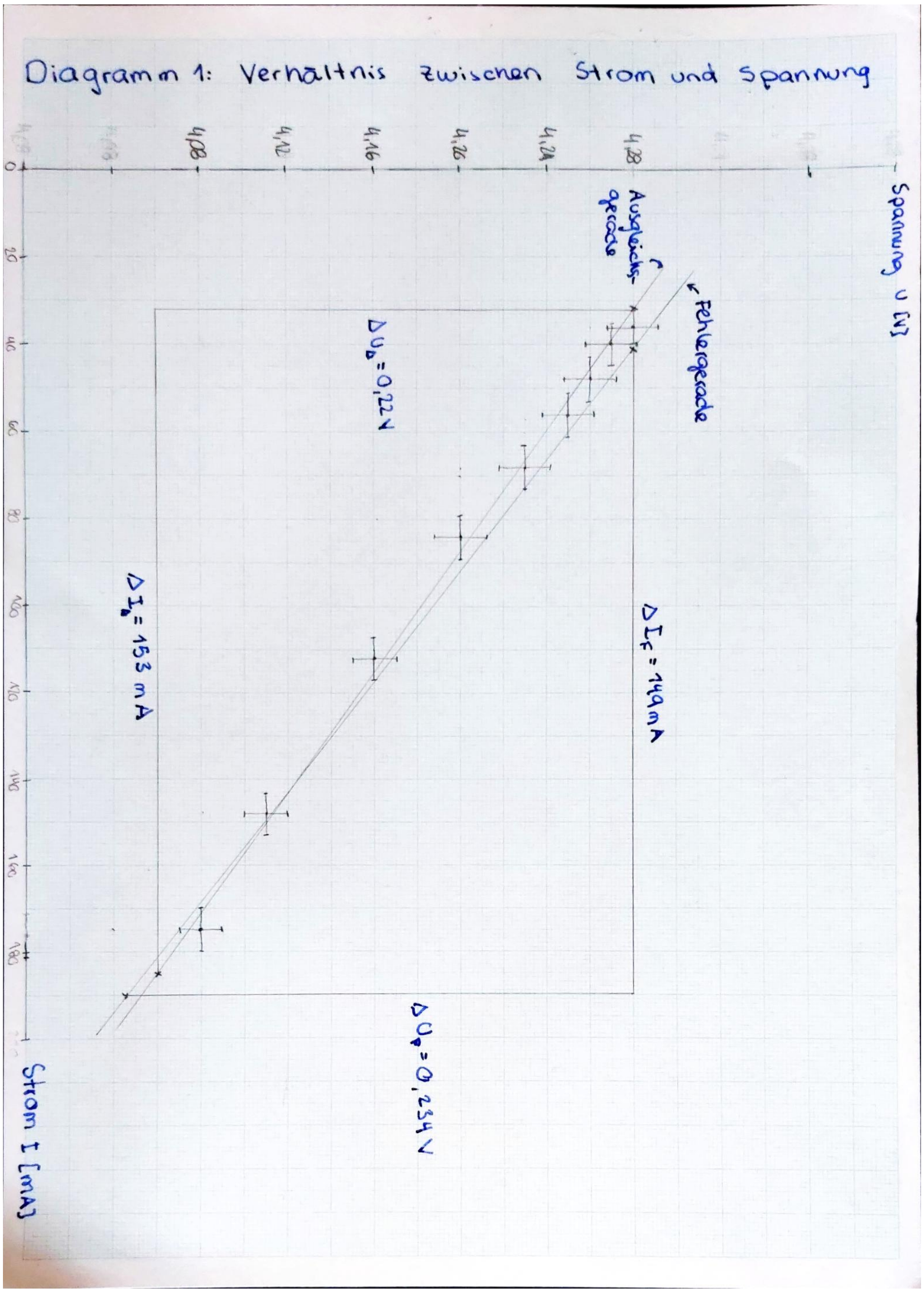

Abbildung 9: Verhältnis zwischen Strom und Spannung

4.2.7 Bestimmung der größten Leistung

Wir wollen zunächst untersuchen, unter welcher Belastung die Batterie die größte Leistung liefert. Dafür nehmen wir das Ohmsche Gesetz (3) wofür wir zunächst sofort Gleichung (8) benutzen können:

$$I = U_q \frac{R_L}{R_{iS} + R_L}. \tag{64}$$

Damit ist die Leistung

$$P = U_q^2 \frac{R_L}{(R_{iS} + R_L)^2}. \tag{65}$$

Wir wollen diese Gleichung bezüglich des Lastwiderstands optimieren, also leiten wir nach R_L ab und suchen nach den Nullstellen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} P \overset{!}{=} 0 = -\frac{2R_L \cdot U_q^2}{(R_{iS} + R_L)^3} + \frac{U_q^2}{(R_{iS} + R_L)^2} && (66) \\ \frac{2R_L}{R_{iS} + R_L} = 1 && (67) \\ 2R_L = R_{iS} + R_L && (68) \\ R_L = R_{iS} && (69) \end{aligned}$$

Die Leistung ist am größten, wenn der Lastwiderstand gleich dem inneren Widerstand der Quelle. Spezifisch können wir dann auch die Spannung $U(I)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} U(I) &= I \cdot R_L && && (70) \\ &= \frac{U_q}{R_{iS} + R_L} R_L && |R_L = R_{iS} && (71) \\ &= \frac{U_q}{2} && |U_q = 4{,}326\,\mathrm{V} \text{ laut } (63) && (72) \\ &= 2{,}163\,\mathrm{V} && && (73) \end{aligned}$$

5 Diskussion

5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir gelernt, wie man mit verschiedenen Messgeräten zur Messung von Strom und Spannung umgeht. Wir haben den Messbereich von einem Drehspulinstrument als Voltmeter auf 5 V erweitert und einen Kompensator geeicht. Dabei haben wir beide Werkzeuge und ihre Vor- und Nachteile beobachtet. Bei der Messung haben wir an einem Spannungsteiler die Spannung an zwei identische in Reihe geschalteten Widerständen gemessen, dabei sind wir zu deutlich unterschiedliche Ergebnisse gekommen. Mit dieser Rechnung haben wir zunächst die Widerstände des Spannungsteilers bestimmt. Nachdem wir das Drehspulinstrument als Voltmeter verwendet haben, haben wir seinen Messbereich als Amperemeter auf 200 mA erweitert und damit den Strom beim nächsten Teil des Versuchs gemessen. In diesem Teil haben wir mithilfe eines Schiebewiderstands die Stromstärke reguliert und bei verschiedenen Messungen die Spannung gegen die Stromstärke gemessen. Daraus ergab sich ein Diagramm, aus welchem wir den Innenwiderstand der Batterie und ihre Quellenspannung entnehmen konnten. Für die Quellenspannung haben wir einen Wert von $U_q = (4,326 \pm 0,015)\,\mathrm{V}$ erhalten. Zuletzt haben wir herausgestellt, dass eine Spannungsquelle die größte Leistung leistet, wenn der Innenwiderstand der Quelle gleich dem Lastwiderstand ist.

5.2 Diskussion

Im Folgenden untersuchen wir die Ergebnisse genauer. Als erstes fällt dramatisch auf, dass die Messung der Spannung an den Widerständen mithilfe des Drehspulinstruments der Maschenregel zu widersprechen scheint. Die Diskrepanz zwischen den Erwartungen und den gemessenen Werten liegt nicht an einen Fehler in der Durchführung des Versuches, sondern daran dass das Drehspulinstrument nicht geeignet für die Aufgabe der Spannungsmessung ist. Zwar ist es möglich, mit dem Gerät eine Spannung zu bestimmen, aber wie wir in den Grundlagen gesprochen haben, ist ein kleiner Widerstand für einen Strommessgerät besser, und ein großer Widerstand für einen Spannungsmessgerät. Da wir das Drehspulinstrument für die Messung sowohl von Strom als auch von Spannung gemessen haben, muss an einem dieser beiden Extremen ein Kompromiss gemacht werden. Die Abweichung vom Erwartungswert, damit die Maschenregel erfüllt ist beträgt beim Drehspulinstrument k σ-Bereiche:

$$k = \frac{|U_0 - 2 \cdot U_A|}{\sqrt{(\sigma_{U_0})^2 + (2 \cdot \sigma_{U_A})^2}} = \frac{4,4\,\mathrm{V} - 2,3\,\mathrm{V}}{\sqrt{(0,17\,\mathrm{V})^2 + (2 \cdot 0,17\,\mathrm{V})^2}} = 5,25 \tag{74}$$

Eine analoge Rechnung mit dem Kompensator führt zu einer Abweichung von 0,7 σ-Bereiche von der Erwartung. Dazu müssen wir auch mitberücksichtigen, dass der eingeschätzte Fehler beim Kondensator auch deutlich geringer ist, dementsprechend ist das Ergebnis desto überraschender. Der Kompensator eignet sich also offensichtlich besser für die Messung von Spannung. Dies liegt hauptsächlich an den folgenden Gründen:

1. Der Kompensator hat einen viel größeren Widerstand. Dies ist kohärent mit dem was wir von einem Spannungsmessgerät erwarten.

2. Der verwendete Kompensator hat eine deutlich feinere Skalierung. Mit dem Drehpotentiometer konnte man das Intervall von 5 V bis auf 0, 01 V ziemlich genau messen, wobei der Ablesefehler des Drehspulinstruments 10 mal größer war. Damit kommt auch der Linearitätsfehler des Kompensators, der maximal in der gleichen Ordnung wie der Ablesefehler war. Dagegen entstand beim Drehspulinstrument ein relativ großer Fehler aufgrund der Bestimmung der Spannung mithilfe des Widerstands und der Spannung.

Im nächsten Teil des Versuchs haben wir das Ohmsche Gesetz anhand unserer Messung beobachtet. Wie erwartet erhielten wir eine linear absteigende Gerade für die Spannung. Mithilfe dieser Gerade haben wir die Quellenspannung als

$$U_q = (4,326 \pm 0,015)\,\mathrm{V} \tag{75}$$

bestimmt. Laut Angabe des Herstellers sollte die Batterie eine Spannung von $U_q = 4,5\,\mathrm{V}$ liefern. Unser Ergebnis liegt dabei 11,6 σ-Bereiche von den Erwartungen entfernt. Die Batterie hatte keine Angabe des Fehlers. Die große Abweichung kann aber an mehreren Gründen liegen. Angenommen, wir waren nicht die ersten, die die Batterie verwendet haben, können wir vermuten, dass der Gebrauch die maximale Spannung der Batterie verringert hat. Mit den verwendeten Methoden bietet sich aber natürlich immer ein menschlicher Fehler an. Obwohl die Messergebnisse ziemlich plausibel sind, könnten sie von der Zeichnung des Diagramms, vom Ablesen oder von anderen Ungenauigkeiten auf unserer Seite beeinflusst gewesen sein.

Zuletzt bleibt die Bestimmung des optimalen Widerstands für eine maximale Leistung der Batterie zu besprechen. Das Ergebnis kommt als keine Überraschung, denn wir im vergangenen Semester auf die gleiche Schlussfolgerung bei einer ähnlichen Fragestellung gekommen sind.

Der Versuch eignet sich ganz gut zur Untersuchung und zum Umgang zweier wichtiger Messinstrumente der Elektronik. Zwar wird es ein bisschen unübersichtlich, wenn man die einzelnen Größen vor sich hat und sie miteinander in Bezug setzen muss, aber letztendlich sehr lehrreich.

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP1 für Studierende der Physik B.Sc., 55-60.

Walcher W, et. al. (1967). Praktikum der Physik (8. Auflage). https://doi.org/10.1007/978-3-322-94128-2

Glossar

Durchflutungsgesetz Das Durchflutungsgesetz besagt, dass elektrische Ströme, inklusiv Verschiebungsströme, ein magnetisches Feld bewirken.
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. 2

Hookesches Gesetz Das Hookesche Gesetz besagt, dass die Kraft einer Feder proportional zur Auslenkung dieser ist. 4

Induktionsgestz Die Änderung eines magnetischen Feldes bewirkt ein elektrisches Feld.
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. 2

Klemmenspannung Spannung, die an den Ausgangsklemmen einer Spannungsquelle gemessen werden kann. 3

Linearitätsfehler Maximale Abweichung aus einer linearen idealen Kennlinie und aus einer wirklichen Kennlinie eines Messgeräts. 10

Quellenspannung Messbare Spannung einer unbelasteten Spannungsquelle. 3, 16, 20