9. Übungsblatt zu Analysis (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

9.1 Kurvenintegral

a) Berechnung von $\int_{\gamma_r} v \cdot \, \mathrm{d}x$ für $r \geq 1$ mit $v(x,y) = (y^3, x^3)$ und $\gamma_r : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : \gamma_r(t) = (t^r, t)$ Wir sehen direkt, dass v, γ_r die Anforderungen gemäß Definition 5.5 ($v \in C^0, \ \gamma_r \in C^1$) erfüllen, da beide in den Komponenten stetig beziehungsweise bei γ_r differenzierbar sind.
Es bleibt also zu lösen:

$$\int_{\gamma_r} v \cdot \, \mathrm{d}x = \int_0^1 v(\gamma_r(t)) \cdot \gamma_r'(t) \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$= \int_0^1 (t^3, t^{3r}) \cdot (rt^{r-1}, 1)^T \, \mathrm{d}t \qquad |\gamma_r'(t) = (rt^{r-1}, 1) \tag{2}$$

$$= \int_0^1 rt^{2+r} + t^{3r} \, \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$= \left[\frac{r}{r+3} t^{r+3} + \frac{1}{3r+1} t^{3r+1} \right]_0^1 \tag{4}$$

$$= \frac{r}{r+3} + \frac{1}{3r+1} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

b) Gegeben ist das Vektorfeld:

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \tag{7}$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy) \tag{8}$$

$$= (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)) \tag{9}$$

Zu bestimmen ist das zugehörige Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Nach Satz 5.7 gilt für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_\gamma v \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{10}$$

Sei nun γ eine (C^1-)Kurve mit

$$\gamma(a) = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \tag{11}$$

$$\gamma(b) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{12}$$

Sodass gilt

$$f(x,y,z) - f(0,0,0) = \int_\gamma v \cdot \, \mathrm{d}x = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \tag{13}$$

Um einfacher integrieren zu können, teilen wir unsere Kurve γ in drei Teilkurven, welche jeweils parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, auf:

$$\gamma_1 = (t,0,0),\ \gamma_1'(t) = (1,0,0),\ \text{auf } [0,x] \subset \mathbb{R} \tag{14}$$
$$\gamma_2 = (x,t,0),\ \gamma_2'(t) = (0,1,0),\ \text{auf } [0,y] \subset \mathbb{R} \tag{15}$$
$$\gamma_3 = (x,y,t),\ \gamma_3'(t) = (0,0,1),\ \text{auf } [0,z] \subset \mathbb{R} \tag{16}$$

Somit können wir das Kurvenintegral umschreiben zu

$$\begin{aligned}
&\int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t && (17)\\
&= \int_0^x v(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^y v(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\ \mathrm{d}t && (18)\\
&\quad + \int_0^z v(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)\ \mathrm{d}t && (19)\\
&= \int_0^x (v_1(y_1(t)), v_2(y_1(t)), v_3(y_1(t))) \cdot (1,0,0)\ \mathrm{d}t && (20)\\
&\quad + \int_0^y (v_1(y_2(t)), v_2(y_2(t)), v_3(y_2(t))) \cdot (0,1,0)\ \mathrm{d}t && (21)\\
&\quad + \int_0^z (v_1(y_3(t)), v_2(y_3(t)), v_3(y_3(t))) \cdot (0,0,1)\ \mathrm{d}t && (22)\\
&= \int_0^x v_1(y_1(t))\ \mathrm{d}t + \int_0^y v_2(y_2(t))\ \mathrm{d}t + \int_0^z v_3(y_3(t))\ \mathrm{d}t && (23)\\
&= \int_0^x v_1(t,0,0)\ \mathrm{d}t + \int_0^y v_2(x,t,0)\ \mathrm{d}t + \int_0^z v_3(x,y,z)\ \mathrm{d}t && (24)\\
&= \int_0^x \left(t^2 - 0 \cdot 0\right)\ \mathrm{d}t + \int_0^y \left(t^2 - x \cdot 0\right)\ \mathrm{d}t + \int_0^z \left(t^2 - x \cdot y\right)\ \mathrm{d}t && (25)\\
&= \left[\frac{1}{3}t^3\right|_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3\right|_0^y + \left[\frac{1}{3}t^3 - xyt\right|_0^z && (26)\\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz && (27)\\
&= f(x,y,z) - f(0,0,0) && (28)\\
\iff f(x,y,z) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz + f(0,0,0) && (29)
\end{aligned}$$

$f(0,0,0) \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun als die beliebige Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$. Somit erhalten wir

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz + c \tag{30}$$

Als das gesuchte Potential.

$$\tag{31}$$

9.2 Impliziter Funktionensatz

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$y_1 + \sin(y_1 y_2) = y_1 x_1 + 1 + \frac{\pi}{2} \tag{32}$$

$$\cos(y_1) = x_2 + y_2 \tag{33}$$

Diese Gleichungen betrachten wir als Komponenten einer Funktion.

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \tag{34}$$

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + \sin(y_1 y_2) - (y_1 x_1 + 1 + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(y_1) - (x_2 + y_2) \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + \sin(y_1 y_2) - y_1 x_1 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ \cos(y_1) - x_2 - y_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Um das Implizite-Funktionen-Theorem anwenden zu können prüfen wir erst die Voraussetzungen. Als erstes ist klar, $\mathbb{R}^4$ ist offen.

i.) $f \in C^l$ mit $l \geq 1$ ✓

ii.) $f(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \stackrel{!}{=} (0,0)^T$

$$f(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = f(0, -1, \frac{\pi}{2}, 1) \tag{39}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) - \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-1) - 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ 0 - (-1) - 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \checkmark \tag{42}$$

iii.) $\det \frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\Big|_{(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)} \stackrel{!}{\neq} 0$

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + y_2 \cos(y_1 y_2) - x_1 & y_1 \cos(y_1 y_2) \\ -\sin(y_1) & -1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\Bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)} = \begin{pmatrix} 1 + 1\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) - 0 & \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & -1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$ \tag{48} $$

$$\det \frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \tag{49}$$

$$= -1 \neq 0 \qquad \checkmark \tag{50}$$

Es sind also alle Voraussetzungen für die Gültigkeit des Implizite-Funktionen-Theorems erfüllt und somit ist die Lösung durch die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wohldefiniert.

Um die Jacobimatrix der Abbildung g zu bestimmen, wenden wir, wie auch schon im Übungsblatt zuvor die 2. Bemerkung zum Implizite-Funktionen-Theorem an:

$$\frac{\partial g}{\partial(y_1, y_2)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x_1, x_2)} \tag{51}$$

Wir berechnen nun noch die Jacobimatrix für f in den Variablen x_1 und x_2

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$= \begin{pmatrix} -y_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{53}$$

ausgewertet am gegebenen Punkt

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1, x_2)}\bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{54}$$

und invertieren die Jacobimatrix für f in den Variablen y_1 und y_2, welche wir bereits im ersten Aufgabenteil berechnet hatten:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{55}$$

$$= \frac{1}{\det \frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}\Big|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)}} \cdot \operatorname{adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

$$ \tag{59} $$

Nun können wir beide Matrizen in die Formel von oben einsetzen und erhalten

$$\frac{\partial g}{\partial(y_1, y_2)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix} \tag{62}$$

als Jacobimatrix von g an der Stelle (x_1^0, x_2^0).

9.3 Die Menge der orthogonalen Matrizen I

a) **Zu zeigen ist**, dass die Menge $O(n)$ kompakt ist. Zunächst stellen wir fest, dass wir $M(n, n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren können. Somit können wir in der Folge den Satz von Heine-Borell nutzen, um die Kompaktheit zu zeigen:

$$M \subset \mathbb{R}^k (k \in \mathbb{N}) \text{ kompakt} \iff M \text{ abgeschlossen, beschränkt} \tag{63}$$

$M = O(n)$ **ist abgeschlossen:**

Wir suchen eine stetige Funktion in eine Menge, von der wir wissen, dass sie abgeschlossen ist. Dann nutzen wir das Kriterium Ürbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen".

Eine solche Funktion ist die Determinantenfunktion. Mit der Leibnizformel sehen wir, dass diese ein Polynom ist, woraus die Stetigkeit folgt:

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R} \tag{64}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right) \tag{65}$$

Insbesondere gilt für $A \in O(n)$:

$$\det A = 1 \vee \det A = -1 \qquad | \text{ hier exklusives } \vee \tag{66}$$

Die Menge $\{\pm 1\}$ ist abgeschlossen.

$O(n)$ **ist beschränkt:** Wir betrachen $A \in O(n)$ bezüglich der Operatornorm

$$\|A\| := \sup\{|Av| \mid |v| \leq 1, v \in \mathbb{R}^n\} \tag{67}$$

Elemente in $O(n)$ sind Isometrien (vgl. LA2), diese verändern also die Länge der Vektoren nicht.

$$\implies \|A\| = 1 \qquad \forall A \in O(n) \tag{68}$$

Somit sind die orthogonalen Matrizen bezüglich der Operatornorm beschränkt.

Da $\mathbb{R}^{n^2}$ endlichdimensional ist, sind alle Normen äquivalent. Somit ist auch $A \in O(n)$ bezüglich aller Normen beschränkt.

b) **Zu zeigen**: q ist C^∞-Abbildung. Wir berechnen zunächst $A^T A$

$$(A^T A)^{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} \tag{69}$$

Wir erhalten damit bei Anwendung von $n \times n$-Elementarmatrizen E_{ij}, die nur an der Stelle ij den Eintrag 1 und sonst den Eintrag 0 haben:

$$A^T A = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} E_{ij} \tag{70}$$

Dies ist ein Polynom und damit C^∞.

Wir berechnen die Richtungsableitung mit:

$$
\begin{aligned}
D_{\hat{A}}q(A) &= \lim_{t\to 0} \frac{q(A+t\hat{A}) - q(A)}{t} && (71)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(A+t\hat{A})^T(A+t\hat{A}) - A^TA}{t} && (72)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(A^T+t\hat{A}^T)(A+t\hat{A}) - A^TA}{t} && (73)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{A^TA + tA^T\hat{A} + t\hat{A}^TA + t^2\hat{A}^T\hat{A} - A^TA}{t} && (74)\\
&= A^T\hat{A} + \hat{A}^TA && (75)\\
& && (76)
\end{aligned}
$$

c) **Zu zeigen** ist, dass das Differential $Dq(A)$ für alle $A \in q^{-1}(\mathbb{1}) = O(n,\mathbb{R})$ vollen Rang hat. Das ist gleichwertig mit der Aussage, dass das Differential surjektiv ist.

$$
\begin{aligned}
D_{\hat{A}}q(A) &= A^T\hat{A} + \hat{A}^TA && (77)\\
&= A^TAS + (AS)^TA && (78)\\
&= S + S^TA^TA \qquad |AA^T = \mathbb{1} && (79)\\
&= S + S^T && (80)
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass die Richtungsableitung in Richtung $\hat{A} = AS$ gerade ein Vielfaches von S ist, sofern dies eine symmetrische Matrix ist. Falls wir $\hat{A} = \frac{1}{2}AS$ wählen, ist es gerade S.
Ferner wissen wir, dass gilt $D_{\hat{A}}q(A) = Dq(A) \cdot \hat{A}$. Somit können wir, falls wir $\hat{A}$ mit $\hat{A} = AS, A \in O(n), S \in Sym(n,n,\mathbb{R})$ darstellen schließen, dass gilt:

$$
\begin{aligned}
Dq(A) \cdot AS &= D_{AS}q(A) && (81)\\
&= 2S && (82)
\end{aligned}
$$

Nun nutzen wir aus, dass $Dq(A) \cdot R, R \in Mat(n,n,\mathbb{R})$ im gleichen Raum wie $q(A)$ "lebt". Wir schließen also, dass wir für jede symmetrische Matrix S eine Matrix $\hat{A} = \frac{1}{2}AS$ konstruieren können, sodass $Dq(A)\hat{A} = S$ gilt. Da $q(A)$ aber gerade in den Raum der symmetrischen Matrizen abbildet, muss $Dq(A)$ surjektiv sein.
Dass wir eine quadratische Matrix $\hat{A}$ in das Produkt aus einer orthogonalen und einer symmetrischen Matrix zerlegen können, folgt unter anderem aus dem Satz zu Polarzerlegung, oder aus dem Hinweis zur Aufgabe, indem wir für S nur symmetrische Matrizen zulassen.

d) Laut dem Korollar zum IFT ist $O(n)$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+k}$, falls es eine Funktion $q \in C^l : D \subset \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ dessen Jakobi-Matrix an einem Punkt $A \in O(n)$ vollen Rang hat. Diesen Satz können wir anwenden, indem wir den Raum der quadratischen Matrizen mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren und die Menge der symmetrischen Matrizen, da nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Elementen unterschiedlich sein können, mit dem $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. $GL(n,\mathbb{R})$ ist nämlich der Definitionsbereich der Abbildung q Der

Satz gilt, da wir gezeigt haben, dass der Rang der Jakobi-Matrix voll ist für alle $A \in O(n)$, dass die Abbildung $q \in C^\infty$. Dann ist bei uns $D \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}} = \mathbb{R}^{n^2}$. Außerdem haben wir gezeigt, dass die Menge kompakt ist.

9.4 Die Menge der orthogonalen Matrizen II

a) Wir können den Tangentialraum laut Satz 4.12 als eine Nullstellenmenge darstellen:

$$
\begin{aligned}
T_{\mathbb{1}}O(n,\mathbb{R}) &= \ker D_{\hat{A}}q(\mathbb{1}) && (83)\\
&= \left\{\hat{A} \in O(n) | \mathbb{1}^T\hat{A} + \hat{A}^T\mathbb{1} = 0\right\} && (84)\\
&= \left\{\hat{A} \in O(n) | \hat{A} + \hat{A}^T = 0\right\} && (85)\\
&= \left\{\hat{A} \in O(n) | \hat{A}^T = -\hat{A}\right\} && (86)
\end{aligned}
$$

Dies entspricht der Menge der antisymmetrischen Matrizen.

b) An einem allgemeinen Punkt A können wir ähnlicherweise fortfahren:

$$
\begin{aligned}
T_A O(n,\mathbb{R}) &= \ker D_{\hat{A}}q(A) && (87)\\
&= \left\{\hat{A} \in O(n) | A^T\hat{A} + \hat{A}^T A = 0\right\} && (88)\\
&= \left\{\hat{A} \in O(n) | A^T\hat{A} = -\hat{A}^T A\right\} && (89)
\end{aligned}
$$

c) Nun betrachten wir Teilaufgaben 3 d), 4a) und 4b) aber für die Spezielle Orthogonale Gruppe $SO(n,\mathbb{R})$

Für Teilaufgabe 3d) ist wenig zu zeigen. Eine analoge Argumentation wie in den Aufgabenteilen 3a,b) führt uns im Fall der $SO(n,\mathbb{R})$ für die Abgeschlossenheit, die wir mit der Determinantenfunktion gezeigt haben, nur zur Menge $\{1\}$. Diese enthält nur einen Punkt und ist damit abgeschlossen. Die Beschränktheit gilt, da $SO(n) \subset O(n)$ gilt. Wir halten somit vorerst fest, dass $SO(n,\mathbb{R})$ sicherlich kompakt ist.

Bleibt zu zeigen, dass $SO(n,\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Wir betrachten weiterhin die Abbildung q, schränken deren Definitionsbereich jedoch auf die Menge der quadratischen Matrizen mit positiver Determinante ein. $SO(n,\mathbb{R})$ ist Teilmenge dieser Menge.

Wir argumentieren dann analog wie in Aufgabe 3c), erhalten aber für $q^{-1}(\mathbb{1})$ durch unsere Einschränkung nur die Matrizen mit positiver Determinante, also gerade $SO(n,\mathbb{R})$.

Nun argumentieren wir analog zu Aufgabe 3d und erhalten, dass $SO(n,\mathbb{R})$ Untermannigfaltigkeit ist. An den Dimensionen der Mengen D und $\mathbb{R}^{m+k}$ ändert sich gar nichts, da wir immernoch die Menge der quadratischen Matrizen mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren können und die Menge der symmetrischen Matrizen mit $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. $SO(n,\mathbb{R})$ ist ebenfalls eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$

In Teilaufgaben 4a) und 4b) hat der Wert der Determinante in der Rechnung keine Rolle gespielt, dementsprechend finden wir die gleichen Tangentialräume für $SO(n,\mathbb{R})$.