
Versuch 251

20. Februar 2022

Statistik (des radioaktiven Zerfalls)

Physikalisches Anfängerpraktikum I

Juan Provencio

Betreuer/in: Johannes Wörner

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel des Versuches	2
2	Grundlagen	2
2.1	Radioaktiver Zerfall	2
2.2	Binomialverteilung	2
2.3	Poisson-Verteilung	3
2.4	Gauß-Verteilung	3
2.5	Statistik und Messfehler	4
3	Versuchsaufbau	5
3.1	Materialien und Geräte	5
3.2	Aufbau	5
4	Messung und Auswertung	6
4.1	Messprotokoll	6
4.2	Auswertung	8
5	Zusammenfassung und Diskussion	14
5.1	Zusammenfassung	14
5.2	Diskussion	14
6	Quellen	16
7	Anhang	16

1 Ziel des Versuches

Mit diesem Versuch werden wir den radioaktiven Zerfall als Prozess statistischer Natur betrachten, um verschiedene Werkzeuge wie die Gauß-, Normal- und Poissonverteilung zu untersuchen. Damit bauen wir die mathematischen Grundlagen, die wir später im Praktikum für die Versuche zum radioaktiven Zerfall brauchen.

2 Grundlagen

2.1 Radioaktiver Zerfall

Instabile Atomkerne zerfallen mit der Zeit zu stabileren Atome, indem sie ionisierende Teilchen ausstrahlen. Diese Strahlung wird als α -, β -Teilchen oder γ -Strahlen ausgesendet. α -Teilchen sind ${}^4\text{He}$ Kerne, β -Teilchen bezieht sich auf Elektronen und γ -Strahlen sind Photonen.

Man kann nie voraussagen, wann ein Atom zerfallen wird, aber man kann das Verhalten eines Kollektivs beschreiben. Die Teilchenanzahl lässt sich dann gemäß

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \quad (1)$$

ausrechnen. Dabei ist N_0 die ursprüngliche Anzahl an Teilchen, γ ein Proportionalitätsfaktor, der besagt wie schnell die Atomkerne zerfallen. Die Distribution der Zerfälle lässt sich ziemlich genau mit folgenden mathematischen Modellen beschreiben.

2.2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung geht von der einfachen Annahme aus, dass man n voneinander unabhängige Versuche durchführt, bei welchen ein Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p genau k mal eintritt. Das Nichteintreten hat dann eine Wahrscheinlichkeit von $(1 - p)$. Die Reihenfolge, mit welcher das Ereignis eintritt ist dabei irrelevant. Die Wahrscheinlichkeit für verschiedene k 's lässt sich dann mit der Binomialverteilung

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \left| \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! k!} \right. \quad (2)$$

ausrechnen. Sie erfüllt folgende Eigenschaften:

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (3)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k \cdot B(k; n, p) = n \cdot p \quad (4)$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = n \cdot p(1 - p) \quad (5)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p(1 - p)} \quad (6)$$

2.3 Poisson-Verteilung

Für große Werte lässt sich die Binomialverteilung am besten durch die Poisson-Verteilung approximieren. Man fordert dabei, dass der Mittelwert μ endlich ist. Die Poisson-Verteilung kann man nur anhand des Mittelwertes beschreiben, dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis k mal auftritt:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (7)$$

Hier gelten

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \quad (8)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k; \mu) = \mu \quad (9)$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \quad (10)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma = \sqrt{\mu} \quad (11)$$

Für kleine Werte ist die Poisson-Verteilung stark asymmetrisch, für größere Werte hingegen konvergiert sie gegen die Gauß-Verteilung.

2.4 Gauß-Verteilung

Bei Mittelwerten $\mu > 30$ lässt sich die Gauß-Verteilung durch die Poisson-Verteilung annähern. Im Spezialfall, dass die Varianz dem Mittelwert entspricht lautet sie

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (12)$$

Im allgemeineren Fall heißt sie

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}}. \quad (13)$$

Die Verteilung erfüllt folgende Bedingungen:

$$\text{Normierung:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad (14)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (15)$$

$$\text{Varianz:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \cdot G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \quad (16)$$

Im Spezialfall ist die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (17)$$

Besonders an der Gauß-Verteilung ist, dass man sie auch für kontinuierliche k 's benutzen darf.

Mit der Gaußverteilung kann man die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass k um mehr als eine σ -Abweichung vom Mittelwert entfernt ist als

$$P_{\sigma} = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \quad (18)$$

und analog für mehrere σ 's.

2.5 Statistik und Messfehler

Wenn man nicht genau den Mittelwert bestimmen kann, sondern mit einer einzigen Messung k zählt, dann kann man trotzdem eine Abschätzung machen, indem man die Standardabweichung als

$$\sigma = \sqrt{k} \quad (19)$$

schreibt. Üblicherweise wird dann für eine Messung das Resultat

$$k \pm \sqrt{k} \quad (20)$$

angegeben. Bei mehreren Messungen ist der mittlere statistische Fehler gegeben durch Addieren der Quadrate der Fehlern. Sei

$$\Delta = k_1 - k_2 \quad (21)$$

Dann ist

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2} \quad (22)$$

Also ist

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2} \quad (23)$$

3 Versuchsaufbau

3.1 Materialien und Geräte

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
- Externer Impulszähler
- PC
- Präparatehalterung mit Bleischirmung
- Radioaktives Präparat ^{60}Co

3.2 Aufbau

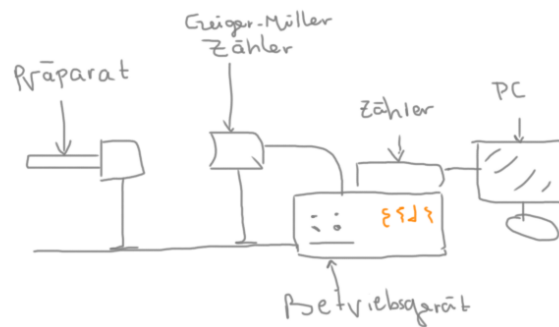


Abbildung 1: Aufbau

4 Messung und Auswertung

4.1 Messprotokoll

Messprotokoll V.251: Statistik des radioaktiven Zerfalls
 Mike Brand 25.10.2021
 Juan Provencio

Versuch (1): Messung Zählrohrcharakteristik
 Präparat (^{60}Co) wird eingeschraubt. Messe Einsatzspannung V_E und bringe Präparat in Abstand, sodass
 Nun Messzeit 30 sec und von V_E bis $V_E + 150 \text{ V}$ in 25 V - Schritten.

Spannung V [V]	ΔV [V]	Zahl Zerfälle	\dot{N} Zerfälle $[\text{sec}^{-1}]$	$\Delta \dot{N} [\text{sec}^{-1}]$
$V_E = 460$	5	2038	67,8	
485	5	2038	67,6	
510	5	2022	67,4	
535	5	2103	70,1	
560	5	2147	71,5	
585	5	2105	70,2	

Tabelle (1): Messdaten zu Versuch 1

Versuch (2): Messung des Plateauanstiegs
 Präparat möglichst ~~nah~~ nah an Zählrohr und messe Zählrate.
 $U_0 = 520 \text{ V}$ (Mitte des gemessenen Plateaus)
 Messe 1 Minute für U_0 und 3 Minuten für $U_0 + 100 \text{ V}$

Spannung [V]	Zeit	Zählungen	Zählrate $[\text{sec}^{-1}]$
520 V	1min	8634	143,9
620 V	3min	26488	447,2

Tabelle (2): Messdaten Versuch (2)

Versuch (3): Verifizierung der stat. Natur des radioaktiven Zerfalls
 Präparat auf Abstand, sodass 140 - 150 /sec. Totzeit von 500 msec und Aufzeichnung in Histogramm per Computer.
 Messzahl: 2074 Messungen
 Mittelwert: 71,913
 Standardabweichung: (theo): 8,4802, (exp): 8,6187

Versuch (4): Vergleich Poisson + Gauß-Verteilung
 Gehe vor wie bei (3), jedoch mit 40 - 50 /sec, Totzeit von 100 msec und >5000 Messungen

Abbildung 2: Messprotokoll

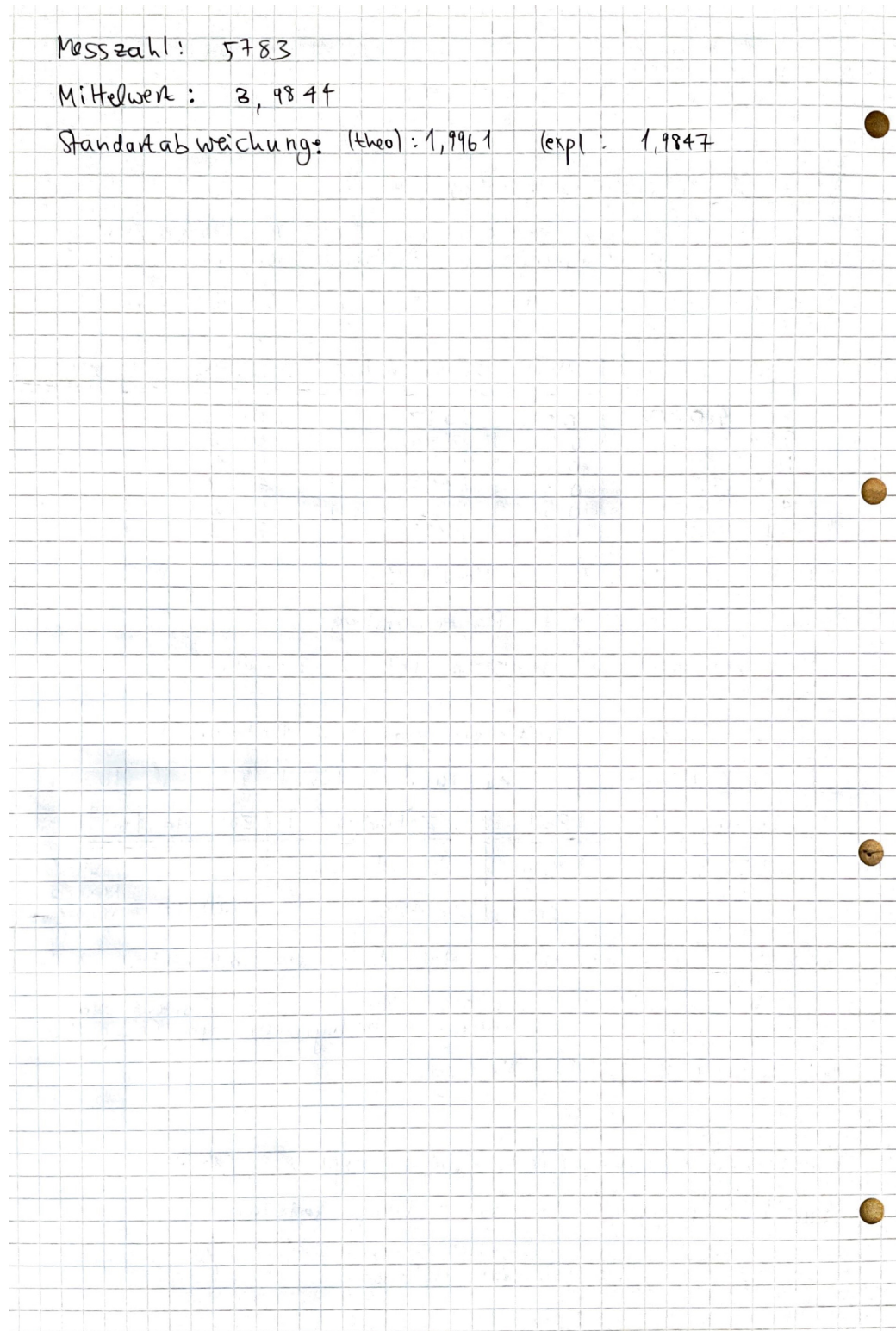


Abbildung 3: Fortsetzung Messprotokoll

4.2 Auswertung

4.2.1 Importieren und graphische Darstellung der Messdaten

Mithilfe des internen Zählrohrs wollen wir die Zählrohrcharakteristik bestimmen. Damit können wir grob den Plateaubereich des ermitteln. Dafür verwenden wir die Daten aus Tabelle 1 des Messprotokolls 2.

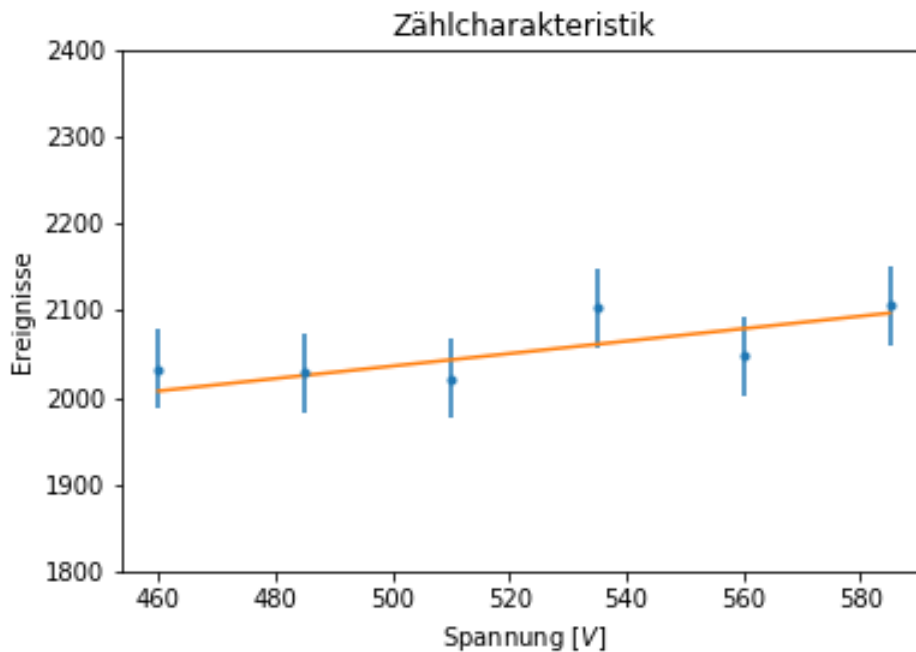


Diagramm 1: Bester fit für die Zählrohrcharakteristik

Als nächstes wird die Zählrohrspannung auf die Mitte des gemessenen Plateaubereiches gesetzt. Dies entspricht etwa $U_0 = 520 \text{ V}$

4.2.2 Plateaubereich des Zählrohrs

Nun bringen wir das Präparat näher zum Zählrohr und messen jeweils 1 und 3 Minuten lang die Zählrate bei den Spannungen. Hierzu verwenden wir die offiziellen Messdaten aus der Versuchsdurchführung in 2020, denn in der eigenen Durchführung zwei Messungen gefehlt haben. Dort wurden für eine Spannung $U_0 = 625(10) \text{ V}$ folgende Werte gemessen

Tabelle 3: Untersuchung des Plateauanstiegs

	$N(U_0)$	$N(U_0 + 100 \text{ V})$
$t_1 = 1 \text{ min}$	15858	16071
$t_2 = 3 \text{ min}$	48042	48457

Signifikanz der Plateauanstiege

Wir bestimmen für beide Zeiten den Plateuanstieg:

$$N_1(U_0 + 100 \text{ V}) - N_1(U_0) = 213(15) \quad (24)$$

$$N_3(U_0 + 100 \text{ V}) - N_3(U_0) = 415(20) \quad (25)$$

Der Fehler wurde als die Wurzel des Messwertes angegeben.

Die prozentuellen Anstiege betragen:

$$\frac{N_1(U_0 + 100 \text{ V}) - N_1(U_0)}{N_1(U_0)} = 1.3 \quad (26)$$

$$\frac{N_3(U_0 + 100 \text{ V}) - N_3(U_0)}{N_3(u_0)} = 0,9 \quad (27)$$

Nun gucken wir, ob die Anstiege hier signifikant sind. Gemäß Gleichung 23 im Praktikumsskript wenn

$$\Delta = k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1 + k_2} \quad (28)$$

um mehr als 3 Standardabweichungen $\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$ von Null abweicht. In unserem Fall entspricht die Standardabweichung

$$N_1(U_0 + 100 \text{ V}) - N_1(U_0) \pm \sqrt{N_1(U_0 + 100 \text{ V}) + N_1(U_0)} \quad (29)$$

$$= 210 \pm 180 < 500 = 3\sigma_\Delta \quad (30)$$

Somit ist der Anstieg bei einer Minute nicht signifikant.

$$N_3(U_0 + 100 \text{ V}) - N_3(U_0) \pm \sqrt{N_3(U_0 + 100 \text{ V}) + N_3(U_0)} \quad (31)$$

$$= 415 \pm 310 < 900 = 3\sigma_\Delta \quad (32)$$

Bei 3 Minuten ist der Anstieg ebenfalls insignifikant.

Messzeit für Genauigkeit von 1%

Um den Plateauanstieg bis auf 1% genau zu kennen benutzen wir folgendes Verhältnis: $N = nT$, wobei T der Torzeit entspricht und n der Zählrate. N sind immernoch die Ereignisse. Daraus schließen wir, dass folgendes gilt:

$$t = \left(\frac{N}{\Delta N} \right)^2 \quad (33)$$

Für eine relative Genauigkeit von 1% erwarten wir also:

$$t = \left(\frac{1}{0,01} \right)^2 \quad (34)$$

$$= 10000 \quad (35)$$

Diese Zeit wird in Sekunden angegeben.

Variation der Zählrate

wat

4.2.3 Auswertung der Daten mit hoher mittlerer Ereigniszahl

Um die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu verifizieren werden wir im Folgenden die Messdaten aus Aufgabe 2.4 mithilfe von Python plotten.

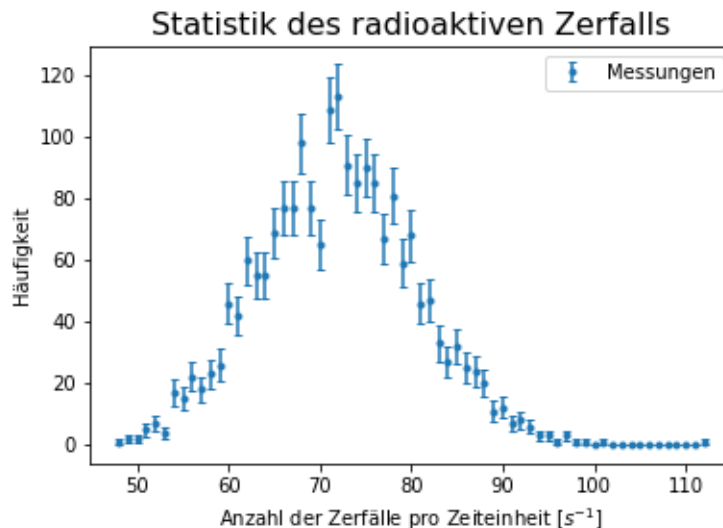


Diagramm 2: Messdaten des radioaktiven Zerfalls

Hinzu fitten wir auf diese Daten eine Gauß- und eine Poissonkurve.

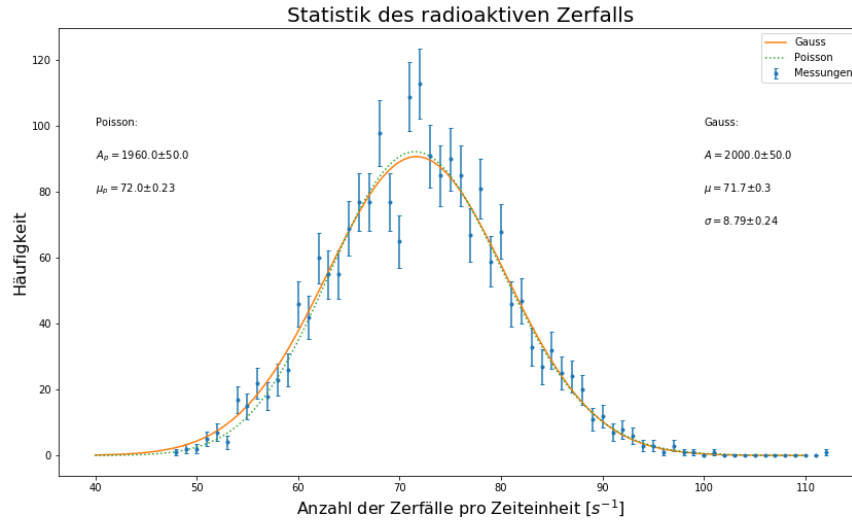


Diagramm 3: Bester Fit, Gauß und Poissonkurve

Die dabei errechneten Fitparameter sind in folgender Tabelle angegeben

Tabelle 4: Fitparameter

	Gauß	Poisson
A	2000 ± 50	1960 ± 50
μ	$71,7 \pm 0,3$	$72,00 \pm 0,23$
σ	$8,79 \pm 0,24$	

Als nächstes berechnen wir die sogenannte χ^2 -Summe um die Qualität des Fits zu bestimmen. Dabei erhalten wir folgende Werte:

Tabelle 5: Daten der χ^2 -Summe

	Gauß	Poisson
χ^2	37,17	37,8
χ^2_{red}	1	1
Wahrscheinlichkeit	42%	43%

4.2.4 Auswertung der Daten mit kleinerer mittlerer Ereigniszahl

Im folgenden Versuchsteil wollen wir die Gauß und die Poissonverteilung vergleichen indem wir den Mittelwert der Verteilung deutlich kleiner machen.

Die Daten wurden auf Diagramm 4 aufgetragen

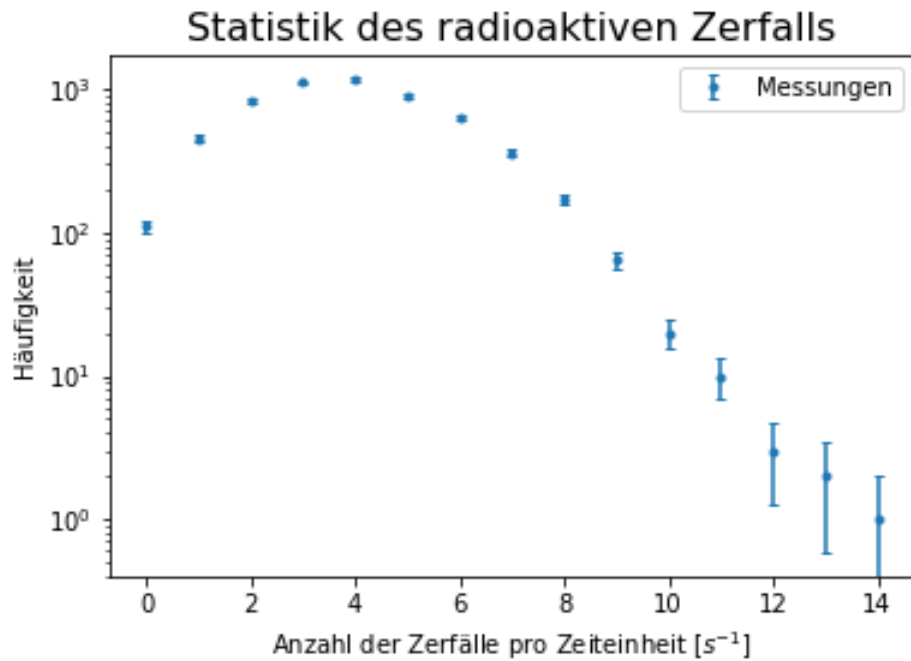


Diagramm 4: Messungen bei kleinerer mittlerer Ereigniszahl

Hinzu haben wir ebenfalls eine Gauß- und eine Poissonverteilung geplottet.

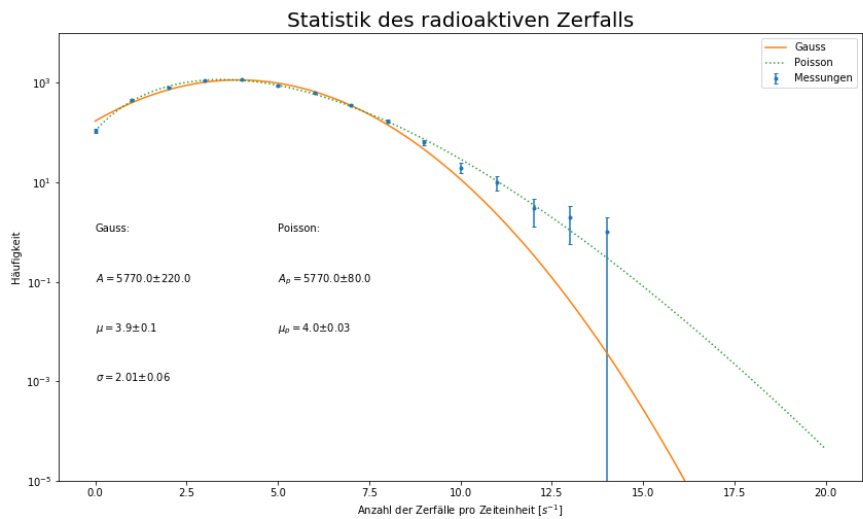


Diagramm 5: Bester Fit, Gauß und Poissonkurve

Tabelle 6: Fitparameter

	Gauß	Poisson
A	5770 ± 220	5770 ± 80
μ	$3,9 \pm 0,1$	$4,00 \pm 0,03$
σ	$2,01 \pm 0,06$	

Genauso wie beim letzten Aufgabenteil berechnen wir die Qualität des Fits mithilfe der χ^2 -Summe. Dabei erhalten wir folgende Werte

Tabelle 7: Daten der χ^2 -Summe, kleine mittlere Ereigniszahl

	Gauß	Poisson
χ^2	90,9	14,4
χ^2_{red}	7,6	1.1
Wahrscheinlichkeit	0%	35%

5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Zusammenfassung

Als erstes haben wir im abgeschätzten Plateaubereich des Zählers einige Messungen durchgeführt, durch diese haben wir eine Gerade geplottet und um die Mitte der gemessenen Werten haben wir die Spannung U_0 für die weiteren Messungen gesetzt.

Der Plateauanstieg wurde als nächstes untersucht, um zu überprüfen, ob dieser "insignifikant" war, in anderen Worten, ob dieser flach genug war. Dabei haben wir bei der Spannung U_0 und $U_0 + 100\text{ V}$ jeweils eine und drei Minuten die Ereignisse gezählt.

Danach haben wir mehrere Messungen durchgeführt, bei welchen wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls verifizieren wollten. Dafür haben wir das Präparat so nah an den Messer gehalten, dass es etwa 140 – 150 Messungen pro Sekunde lieferte. Insgesamt wurde der Versuchsteil so eingestellt, dass man einen großen Mittelwert kriegt.

Im letzten Versuchsteil wollten wir einen kleineren Mittelwert haben, also haben wir das Präparat weiter vom Messer entfernt und die Torzeit reduziert. So gab es insgesamt weniger Zerfälle pro Zeiteinheit und dementsprechend einen kleinen Mittelwert.

5.2 Diskussion

Über die Signifikanz des Anstiegs in unserem Fall lässt sich leider nichts sagen, denn in unserer Durchführung zwei wichtige Messungen fehlen. Die Auswertung haben wir mithilfe der Messdaten aus der Praktikumsseite durchgeführt. An der Fitgerade in Diagramm 1 können wir aber erkennen, dass die Steigung in diesem Bereich ziemlich klein ist, weshalb man davon ausgehen kann, dass der Plateaubereich richtig identifiziert wurde.

Als nächstes haben wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls untersucht, indem wir die Messungen der Häufigkeit der Ereignissen gegen die Anzahl der Zerfälle für eine Zeiteinheit aufgetragen haben. Dafür haben wir sowohl eine Poisson- als auch eine Gaußkurve an die Messdaten gefittet. Die χ^2 Funktion von Python gibt uns eine Fitwahrscheinlichkeit 42% für Gauß und 43% für Poisson. Diese Zahl gibt an, wie gut der lineare Zusammenhang zwischen den Daten und dem Fit es gibt, je näher an die 100% desto besser. Eine Wahrscheinlichkeit von etwa 40% ist also ziemlich gut. Die Ab-

weichung lässt sich dadurch erklären, dass die Werte drum herum um die Kurven verteilt sind, also kommt immer eine kleine Abweichung vor. Außerdem lässt sich in diesem Fall kaum einen Unterschied zwischen der Poisson- und der Gaußverteilung erkennen. Dies entspricht den Erwartungen, denn wir wissen, dass die Poisson-Verteilung für große Mittelwerte (> 30) gegen die Gauß-Verteilung konvergiert. Außerdem vergleichen wir die vom Software berechneten Mittelwerte und Abweichungen und die, die wir mit Python ermittelt haben:

Tabelle 8: Vergleich zwischen Software und Python, hohe Ereigniszahl

	Software	Python	σ -Abweichung
μ	72	72	0
σ_μ	9	9	

Obwohl die rohen Daten ohne Rundung auf Nachkommastellen ein wenig von einander abweichen, fällt dieser Unterschied weg wenn man die signifikanten Nachkommastellen betrachtet. Deswegen wurde hier nur σ_μ statt σ_μ (theoretisch) und σ_μ (experimentell) angegeben. Beide sind auf die signifikante Stelle gleich.

Allerdings bei kleineren Mittelwerte, wie wir im letzten Aufgabenteil untersucht haben, weichen die Gauß- und die Poissonverteilung stark voneinander ab. Am Digramm 5 lässt sich erkennen, dass während die Poisson-verteilung durch die Fehlerbalken von allen bis auf einem Messpunkten geht, die Gauß-verteilung verpasst fast die Hälfte der Fehlerbalken und steigt viel schneller ab als die Poisson-Verteilung. Die Gaußkurve stimmt nur mit den Messwerten um das Maximum überein. Man erkennt an die Fitwahrscheinlichkeit, dass obwohl hier die Poisson-Verteilung gut verteidigt mit einem linearen Zusammenhang von 35%, die Gauß-Verteilung ganz hinten bei 0\$ bleibt.

Tabelle 9: Vergleich zwischen Software und Python, kleine Ereigniszahl

	Software	Python	σ -Abweichung
μ	4	4	0
σ_μ	2	2	

Hier lassen sich wie erwartet keine signifikante Unterschiede erkennen, aber Vollständigkeitshalber wurde der Vergleich hinzugefügt.

Schlussfolgernd haben wir in diesem Versuch tiefer die Gauß- und die Poisson-Verteilung untersucht. Obwohl 2 Messungen nicht aussagekräftig genug sind,

zeigt sich hier die Poisson-Verteilung als geeignet und mehrseitig einsetzbar zu sein, denn man sie für große und kleine Mittelwerte anwenden kann. Außerdem ist es klar, dass der radioaktive Zerfall von der Statistik

6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik B.Sc..

7 Anhang

VIII.1 Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

In [1]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
```

In [2]:

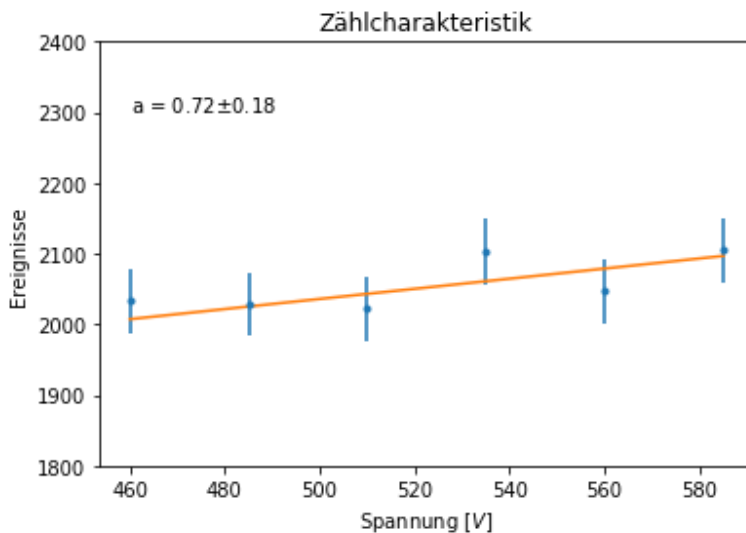
```
# Zählrohrspannung
U = np.array([460, 485, 510, 535, 560, 585])
# Ereignisse
N = np.array([2033, 2028, 2022, 2103, 2047, 2105])
Delta_N = np.sqrt(N)
```

In [3]:

```
# Plot
plt.errorbar(U, N, yerr = Delta_N, fmt = '.')
plt.xlabel('Spannung [V$]')
plt.ylabel('Ereignisse')
plt.title('Zählcharakteristik')
plt.ylim(1800,2400)

# Define fit
def line(x, a, b):
    return a * x + b

# Fit
popt, pcov = curve_fit(line, U[1:], N[1:])
plt.plot(U, line(U, *popt))
plt.savefig('V251Diagramm1.png')
plt.text(460, 2300, 'a = ' + str(round(popt[0],2)) + '$\pm$' + str(round(pcov[0,0],
2)))
plt.show()
```



VIII.2 Plateaubereich des Zählrohrs

In [4]:

```
# Rechnungen
n100 = 26488
Delta_n100 = np.sqrt(n100)
n0 = 8634
Delta_n0 = np.sqrt(n0)
Delta_V = 100
a = (n100 - n0) / Delta_V
Delta_a = ((n100 + Delta_n100) - (n0 - Delta_n0)) / 90

print (a, Delta_a)
```

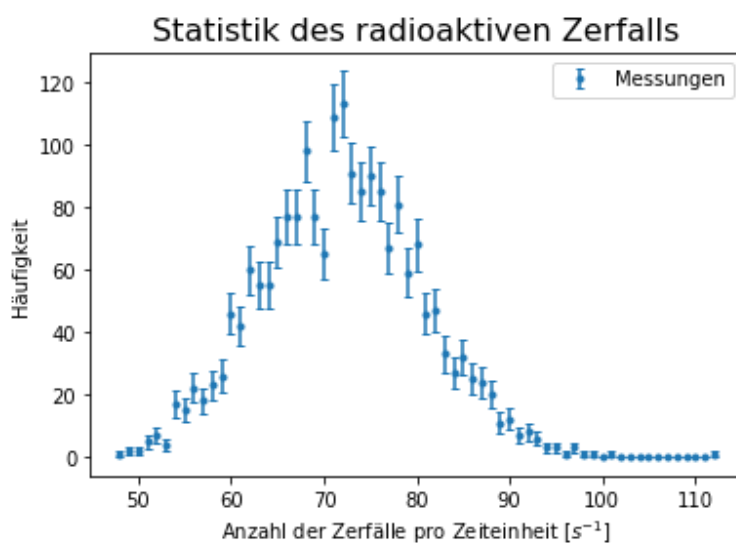
178.54 201.2185629324779

VIII.3 Hohe mittlere Ereigniszahl

In [5]:

```
# Importieren der Daten
anzahl, haeufigkeit = np.loadtxt('data/V251JuanundMike.dat', unpack=True)
fehler = np.sqrt(haeufigkeit)

# Plot
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, yerr = fehler, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messungen')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit [ $s^{-1}$ ]\n')
plt.ylabel('Häufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls', size = 16)
plt.legend(loc = 'upper right')
plt.savefig('V251Diagramm2.png')
plt.show()
```



In [6]:

```
# Gauss-Verteilung
from numpy import exp, pi, sqrt

def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return A / (sqrt(2 * pi) * sig) * exp( - (x - mu) ** 2 / 2 / sig ** 2)

# Curve fit
popt, pcov = curve_fit(gaussian, anzahl[13:-13], haeufigkeit[13:-13],
                       p0 = [2000, 72, 8], sigma = fehler[13:-13])

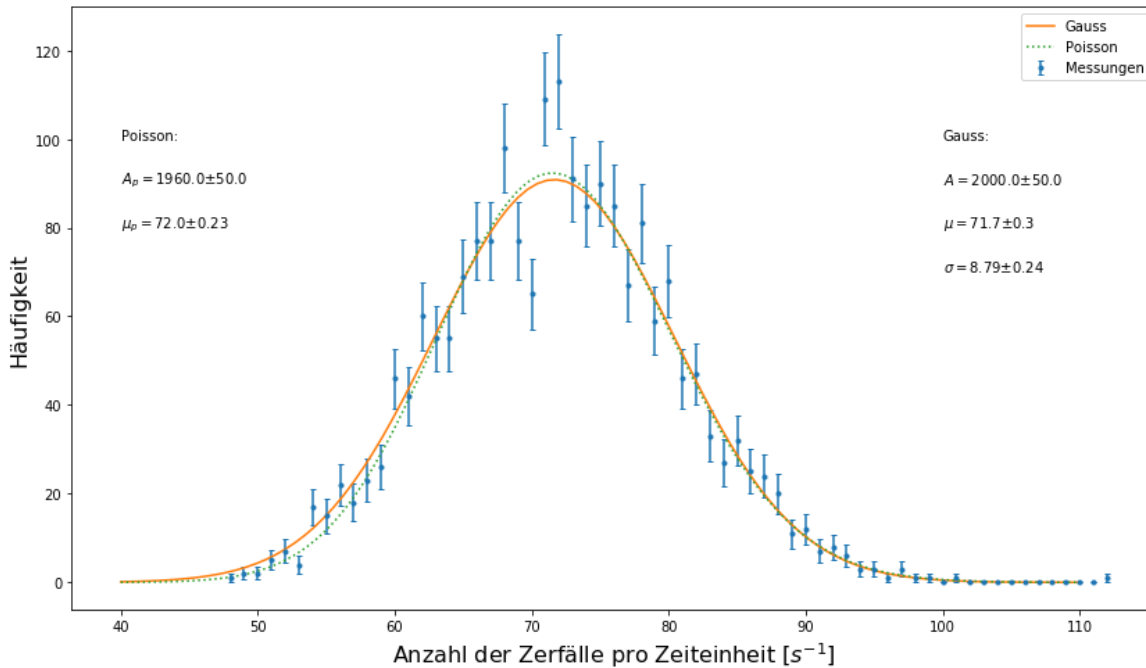
# Poisson-Verteilung
from scipy.special import gamma

def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p * exp(-mu_p) * mu_p ** x / gamma(x + 1)

# Curve fit
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[13:-13], haeufigkeit[13:-13],
                           p0 = [2000, 72], sigma = fehler[13:-13])

# Plot
plt.figure(figsize = (14,8))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, yerr = fehler, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messungen')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit [ $s^{-1}$ ]', size = 16)
plt.ylabel('Häufigkeit', size = 16)
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls', size = 20)
x = np.linspace(40, 110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x, *popt), label = 'Gauss')
plt.plot(x, poisson(x, *popt_p), label = 'Poisson', linestyle = ':')
plt.legend(loc = 'upper right')
plt.text(100,100, 'Gauss:')
plt.text(100,90, '$A = $' + str(round(popt[0],-1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(pcov[0][0]),-1)))
plt.text(100,80, '$\mu = $' + str(round(popt[1],1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(pcov[1][1]),1)))
plt.text(100,70, '$\sigma = $' + str(round(popt[2],2)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(pcov[2][2]),2)))
plt.text(40,100, 'Poisson:')
plt.text(40,90, '$A_p = $' + str(round(popt_p[0],-1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(pcov_p[0][0]),-1)))
plt.text(40,80, '$\mu_p = $' + str(round(popt_p[1],1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(pcov_p[1][1]),2)))
plt.savefig('V251Diagramm3.png')
plt.show()
```

Statistik des radioaktiven Zerfalls



In [7]:

```
print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))
```

Gaussfit:

A= 2001.9388471962243 , Standardfehler= 54.37382453636759
 mu= 71.65294574662273 , Standardfehler= 0.31423651419017606
 sig= 8.792232555005752 , Standardfehler= 0.24428703085958767

Poissonfit:

A_p= 1963.0798563911599 , Standardfehler= 47.6676385684735
 mu_p= 72.0143865534365 , Standardfehler= 0.23494516817562683

In [8]:

```
#Gauss:
chi2_g = np.sum((gaussian(anzahl[13:-13], *popt) - haeufigkeit[13:-13]) ** 2 /
                fehler[13:-13] ** 2)
dof_g = len(anzahl[13:-13])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g = chi2_g / dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p = np.sum((poisson(anzahl[13:-13], *popt_p) - haeufigkeit[13:-13]) ** 2 /
                fehler[13:-13] ** 2)
dof_p = len(anzahl[13:-13]) - 2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p = chi2_p / dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)

from scipy.stats import chi2

#Gauss:
prob_g = round(1 - chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2) * 100
#Poisson:
prob_p = round(1 - chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2) * 100

print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")
```

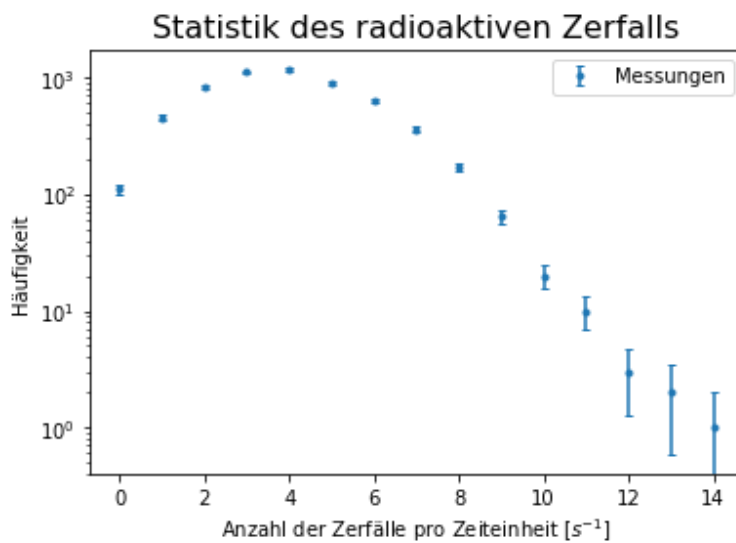
```
chi2_g= 37.166078731750055
chi2_red_g= 1.032391075881946
chi2_p= 37.84642683000824
chi2_red_p= 1.0228764008110336
Wahrscheinlichkeit Gauss= 42.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 43.0 %
```

VIII.4 Kleine mittlere Ereigniszahl

In [9]:

```
# Importieren der Daten
anzahl, haeufigkeit = np.loadtxt('data/V251.2JuanundMike.dat', unpack=True)
fehler = np.sqrt(haeufigkeit)

# Plot
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, yerr = fehler, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messungen')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit [ $s^{-1}$ ']')
plt.ylabel('Häufigkeit')
plt.yscale('log')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls', size = 16)
plt.legend(loc = 'upper right')
plt.savefig('V251Diagramm4.png')
plt.show()
```



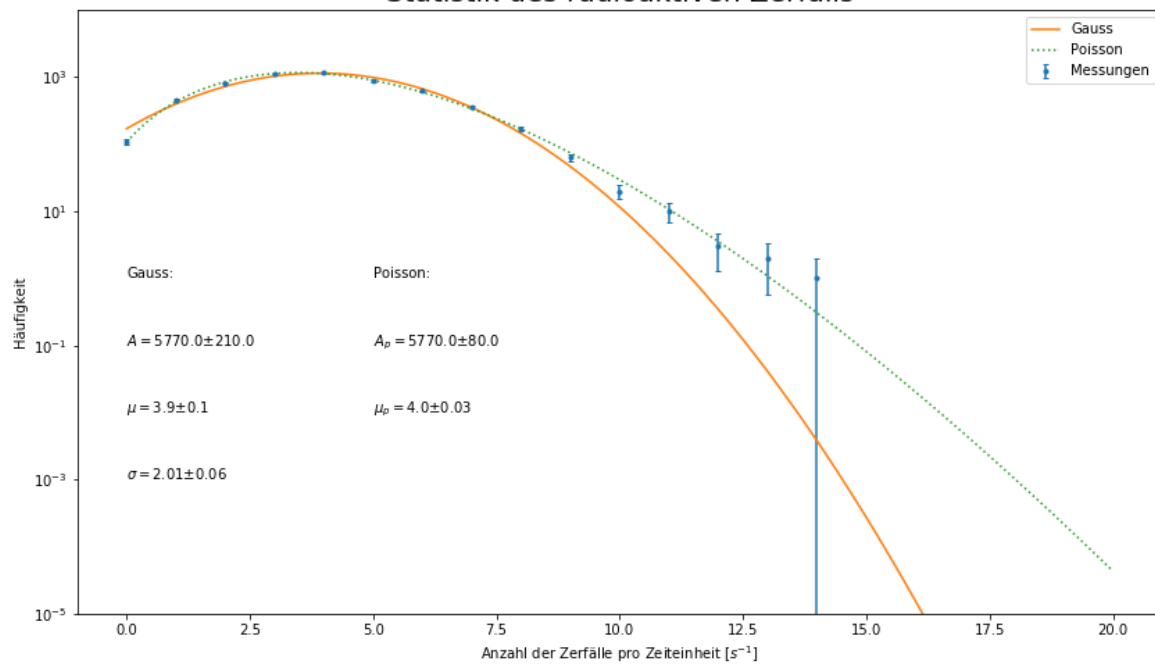
In [10]:

```
# Curve fit
popt, pcov = curve_fit(gaussian, anzahl[:], haeufigkeit[:],
                       p0 = [2000, 5, 8], sigma = fehler[:])

# Curve fit
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[:], haeufigkeit[:],
                           p0 = [2000, 5], sigma = fehler[:])

# Plot
plt.figure(figsize = (14,8))
plt.yscale('log')
plt.ylim((10 ** -5, 10 ** 4))
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, yerr = fehler, fmt = '.', capsize = 2,
             label = 'Messungen')
plt.xlabel('Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit [ $s^{-1}$  $]')
plt.ylabel('Häufigkeit')
plt.title('Statistik des radioaktiven Zerfalls', size = 20)
x = np.linspace(0, 20, 100)
plt.plot(x, gaussian(x, *popt), label = 'Gauss')
plt.plot(x, poisson(x, *popt_p), label = 'Poisson', linestyle = ':')
plt.legend(loc = 'upper right')
plt.text(0, 10 ** 0, 'Gauss:')
plt.text(0, 10 ** -1, '$A = $' + str(round(popt[0],-1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(
pcov[0][0]),-1)))
plt.text(0, 10 ** -2, '$\mu = $' + str(round(popt[1],1)) + '$\pm$' + str(round(sqrt(
pcov[1,1]),1)))
plt.text(0, 10 ** -3, '$\sigma = $' + str(round(popt[2],2)) + '$\pm$' + str(round(s
qrt(pcov[2,2]),2)))
plt.text(5, 10 ** 0, 'Poisson:')
plt.text(5, 10 ** -1, '$A_p = $' + str(round(popt_p[0],-1)) + '$\pm$' + str(round(s
qrt(pcov_p[0,0]),-1)))
plt.text(5, 10 ** -2, '$\mu_p = $' + str(round(popt_p[1],1)) + '$\pm$' + str(round(
sqrt(pcov_p[1,1]),2)))
plt.savefig('V251Diagramm5.png')
plt.show()
```


Statistik des radioaktiven Zerfalls



In [11]:

```
#Gauss:
chi2_g = np.sum((gaussian(anzahl[:,], *popt) - haeufigkeit[:,]) ** 2 /
                fehler[:,] ** 2)
dof_g = len(anzahl[:,]) - 3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g = chi2_g / dof_g
print("chi2_g=", chi2_g)
print("chi2_red_g=", chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p = np.sum((poisson(anzahl[:,], *popt_p) - haeufigkeit[:,]) ** 2 /
                fehler[:,] ** 2)
dof_p = len(anzahl[:,]) - 2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p = chi2_p / dof_p
print("chi2_p=", chi2_p)
print("chi2_red_p=", chi2_red_p)

from scipy.stats import chi2

#Gauss:
prob_g = round(1 - chi2.cdf(chi2_g, dof_g), 2) * 100
#Poisson:
prob_p = round(1 - chi2.cdf(chi2_p, dof_p), 2) * 100

print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g, "%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p, "%")
```

```
chi2_g= 90.93787681960904
chi2_red_g= 7.578156401634087
chi2_p= 14.391601465458244
chi2_red_p= 1.107046266573711
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson= 35.0 %
```

In []: