**13. Übungsblatt zu Analysis II (SS 21)**

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ___/___/___/___ $\Sigma$___

---

## 13.1 System linearer Differentialgleichungen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ und $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $x(t) = \mathrm{e}^{At} v_0$.

a) **Zu zeigen** ist, dass $\dot{x} = Ax$. Per den Exkurs zum Matrixexponential wissen wir, dass falls $A(t)$ stetig differenzierbar und $\dot{A} \cdot A = A \cdot \dot{A}$, dann ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{A(t)} = \dot{A}\mathrm{e}^{A}$. Insbesondere ist für $At$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(At) = A$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At}$. Daraus folgt:

$$\dot{x} = A\mathrm{e}^{At} v_0 = Ax \tag{1}$$

Werten wir $x$ an der Stelle $t = 0$, dann erhalten wir:

$$x(0) = \mathrm{e}^{A \cdot 0} v_0 = \mathrm{e}^0 v_0 = v_0 \tag{2}$$

b) **Zu zeigen** ist, dass das gegebene $x$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist. Dazu verwenden wir den Satz von Picard-Lindelöf. Nach diesem Satz muss in der Formulierung $\dot{x} = F(t, x)$ die Funktion $F : D \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllen, damit es eine eindeutige Lösung existiert. Außerdem ist klar, $D = \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{R})$ ist offen.

Es muss also gelten: $Ax$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung, dies ist der Fall, falls $Ax$ stetig partiell differenzierbar ist. Dadurch, dass $A$ eine reellwertige Matrix ist, und $\mathrm{e}^{At}$ eine Reihe von Matrizen mit reellen Einträgen und Polynome von $t$ ist, ist $A\mathrm{e}^{At} v_0$ stetig partiell differrenzierbar und $F$ erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung.

c) Sei $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}$

**Gesucht** ist die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b,\ x(0) = v_0$. Dazu gucken wir uns das System genauer an:

$$\dot{x} = Ax + b \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 + t^2 \\ t+1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Die Gleichung für $\dot{x}_2$ ist integrierbar. Wir erhalten:

$$x_2 = \frac{1}{2}t^2 + t + 0 \tag{6}$$

Dies können wir dann in $\dot{x}_1$ einsetzen:

$$\dot{x}_1 = \frac{3}{2}t^2 + t \tag{7}$$

$$\rightarrow x_1 = \int_0^t \frac{3}{2}\tau^2 + \tau \; \mathrm{d}\tau \tag{8}$$
$$= \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \tag{9}$$

Nach dieser Lösung ist $x(0) = (0,0)^T$

## 13.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = a(t)\dot{x} + b(t)x \tag{10}$$

a) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung und im Intervall $J \subset I$ gelte $\varphi \neq 0$. Sei zusätzlich $u$ eine Lösung von

$$\ddot{u} = \left(a(t) - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)\dot{u} \tag{11}$$

**Zu zeigen** ist, dass $\psi := \varphi \cdot u$ auch eine Lösung von (10) ist.

Dafür berechnen wir die zweite Ableitung von $\psi$:

$$\psi = \varphi u \tag{12}$$
$$\dot{\psi} = \dot{\varphi}u + \varphi\dot{u} \tag{13}$$
$$\ddot{\psi} = [\ddot{\varphi}u + \dot{\varphi}\dot{u}] + [\dot{\varphi}\dot{u} + \varphi\ddot{u}] \tag{14}$$
$$= \ddot{\varphi}u + 2\dot{\varphi}\dot{u} + \varphi\ddot{u} \qquad |\varphi \text{ ist Lösung} \tag{15}$$
$$|\text{Setze (11) ein}$$
$$= (a\dot{\varphi} + b\varphi)u + 2\dot{\varphi}\dot{u} + \varphi\left(a - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)\dot{u} \tag{16}$$
$$= (a\dot{\varphi} + b\varphi)u + 2\dot{\varphi}\dot{u} + \varphi a\dot{u} - 2\dot{\varphi}\dot{u} \tag{17}$$
$$= (a\dot{\varphi} + b\varphi)u + \varphi a\dot{u} \tag{18}$$
$$= a(\dot{\varphi}u + \varphi\dot{u}) + b\varphi u \tag{19}$$

Da $\psi$ eine Lösung ist, so gilt auch

$$\ddot{\psi} = a\dot{\psi} + b\psi \tag{20}$$
$$= a(\dot{\varphi}u + \varphi\dot{u}) + b\varphi u \tag{21}$$

Dies ist identisch zu der Gleichung (19), die wir eben hergeleitet haben.

$$\tag{22}$$

Hier gilt entweder trivialerweise $u = 0$, oder $\ddot{\varphi} = a\dot{\varphi} + b\varphi$, was mit unserer Annahme übereinstimmt

b) **Zu zeigen** ist, dass $\dot{u} = \frac{C}{\varphi^2}e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\; \mathrm{d}\tau}$ eine Lösung von (11) ist. Diese Differentialgleichung ist nämlich nur eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung, wenn wir $\dot{u}$ als unsere Funktion betrachten. Zur Klarheit führen wir eine kleine Umbenennung $z = \dot{u}$ ein.

$$\dot{z} = \left(a - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)z \tag{23}$$

Dies ist eine separable Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \left(a - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right) z && |\text{Schwarze Magie} && (24)\\
\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_{t_0}^{t} \left(a - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)\, \mathrm{d}\tau && && (25)\\
[\ln z]_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \frac{2}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau && \Big|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau} \text{ kürzt sich raus smirk} && (26)\\
\ln z &= \int_{t_0}^{t} a\, \mathrm{d}\tau - 2\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} + \ln_{z_0} && && (27)\\
&= \int_{t_0}^{t} a\, \mathrm{d}\tau - 2[\ln\varphi]_{t_0}^{t} + \ln z_0 && && (28)\\
&= \int_{t_0}^{t} a\, \mathrm{d}\tau - 2\ln\varphi + 2\ln\varphi_0 + \ln z_0 && |\mathrm{e} && (29)\\
z &= \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}\tau - 2\ln\varphi + 2\ln\varphi_0 + \ln z_0\right\} && && (30)\\
&= \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}\tau - \ln\varphi^2 + \ln\varphi_0^2 + \ln z_0\right\} && && (31)\\
&= \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}\tau + \ln\frac{1}{\varphi^2} + \ln\varphi_0^2 z_0\right\} && && (32)\\
&= \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}\tau\right\} \exp\left\{\ln\frac{1}{\varphi^2}\right\} \exp\left\{\ln\varphi_0^2 z_0\right\} && && (33)\\
&= \frac{\varphi_0^2 z_0}{\varphi^2} \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} && && (34)
\end{aligned}
$$

Dies beweist unsere Annahme.

## 13.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung - Beispiel

Für $t > -\frac{1}{2}$ betrachten wir die folgende DGL 2. Ordnung

$$(2t+1)\ddot{x} = -(4t-2)\dot{x} + 8x + b(t) \tag{35}$$

a) Sei nun $b(t) = 0$; zu bestimmen ist eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi(t) = e^{\alpha t}$ eine Lösung ist.

$$(2t+1)\ddot{x} = -(4t-2)\dot{x} + 8x \tag{36}$$

Wir leiten die gegebene Funktion ab:

$$\varphi'(t) = \alpha e^{\alpha t} \tag{37}$$
$$\varphi''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t} \tag{38}$$

Ist $\varphi$ eine Lösung, so gilt

$$\begin{aligned}
&\varphi''(t) = f(t, \varphi'(t), \varphi(t)) && (39)\\
\Longrightarrow\ &\alpha^2 e^{\alpha t} = f(t, \alpha e^{\alpha t}, e^{\alpha t}) && (40)\\
\Longleftrightarrow\ &\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{4t-2}{2t+1}\alpha e^{\alpha t} + \frac{8}{2t+1}e^{\alpha t} && (41)\\
\Longleftrightarrow\ &e^{\alpha t} = \left(-\frac{4t-2}{2t+1}\frac{1}{\alpha} + \frac{8}{2t+1}\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha t} && (42)\\
\Longleftrightarrow\ &e^{\alpha t} = \left(\frac{-(4t-2)\alpha+8}{(2t+1)\alpha^2}\right)e^{\alpha t} && (43)
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass der Ausdruck in der Klammer gleich 1 sein muss. Also gilt:

$$\begin{aligned}
&1 = \frac{-(4t-2)\alpha+8}{(2t+1)\alpha^2} && (44)\\
\Longleftrightarrow\ &0 = -(2t+1)\alpha^2 - (4t-2)\alpha + 8 && (45)\\
\Longleftrightarrow\ &0 = -2t\alpha^2 - \alpha^2 - 4t\alpha + 2\alpha + 8 && (46)\\
\Longleftrightarrow\ &0 = (2+\alpha)(-4+\alpha-2t\alpha) && (47)\\
& && (48)\\
&2+\alpha = 0 \iff \alpha = -2 && (49)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(t) = e^{-2t} \tag{50}$$

eine mögliche Lösung der DGL. Dies überprüfen wir durch einsetzen in (40)

$$\begin{aligned}
&(-2)^2 e^{-2t} = f(t, -2e^{-2t}, e^{-2t}) && (51)\\
\Longleftrightarrow\ &4e^{-2t} = \frac{4t-2}{2t+1}2e^{-2t} + \frac{8}{2t+1}e^{-2t} && (52)\\
\Longleftrightarrow\ &4e^{-2t} = \frac{8t+4}{2t+1}e^{-2t} && (53)\\
\Longleftrightarrow\ &4e^{-2t} = 4e^{-2t} \quad \checkmark && (54)
\end{aligned}$$

b) Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass falls $\varphi$ eine Lösung ist, so ist ebenfalls $\psi = \varphi \cdot u$, falls $u$ (11) erfüllt. Nun wissen wir in diesem Fall, was $\varphi$ ist und können daraus die Differentialgleichung nach $u$ auflösen:

$$\ddot{u} = \left(a - 2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}\right)\dot{u} \tag{55}$$

Mit der Lösung aus (34) können wir sofort $\dot{u}$ ausrechnen:

$$\dot{u} = \frac{\varphi_0^2 \dot{u}(0)}{\varphi^2} \exp\left\{\int_0^t a(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right\} \qquad \left|\varphi_0 = \mathrm{e}^{\alpha \cdot 0} = 1,\right. \tag{56}$$

$$\dot{u}(0) = 1,$$

$$a(\tau) = -\frac{4t-2}{2t+1}$$

$$\varphi = \mathrm{e}^{-2t}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{(\mathrm{e}^{-2t})^2} \exp\left\{-\int_0^t \frac{4\tau - 2}{2\tau + 1}\ \mathrm{d}\tau\right\} \tag{57}$$

Als nächstes rechnen wir das Integral in der Exponentialfunktion aus:

$$\int_0^t \frac{4x-2}{2x+1}\ \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{4x}{2x+1} - \frac{2}{2x+1}\ \mathrm{d}x \qquad \left|u = 2x+1,\right. \tag{58}$$

$$\mathrm{d}u = 2\ \mathrm{d}x \tag{59}$$

$$u(0) = 1,$$

$$u(t) = 2t+1$$

$$= \int_1^{2t+1} \frac{4(u-1)}{2u}\frac{\mathrm{d}u}{2} - \int_1^{2t+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{60}$$

$$= \int_1^{2t+1} 1 - \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u - \int_1^{2t+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{61}$$

$$= [u]_1^{2t+1} - [\ln u]_1^{2t+1} - [\ln u]_1^{2t+1} \tag{62}$$

$$= 2t - 2\ln(2t+1) \tag{63}$$

$$= 2t - \ln\left((2t+1)^2\right) \tag{64}$$

Dieses Ergebnis setzen wir wider in (57) ein und erhalten:

$$\dot{u} = \mathrm{e}^{4t}\mathrm{e}^{-2t+\ln\left((2t+1)^2\right)} \tag{65}$$

$$= \mathrm{e}^{2t}(2t+1)^2 \tag{66}$$

Diese Gleichung können wir integrieren um $u$ zu bestimmen.

$$\tag{67}$$

$$u = \int_0^t \mathrm{e}^{2\tau}(2\tau+1)^2\ \mathrm{d}\tau \tag{68}$$

$$\tag{69}$$

Durch mehrfache Anwendung von partieller Integration erhalten wir:

| | D | I |
|---|---|---|
| $+$ | $(2t+1)^2$ | $\mathrm{e}^{2t}$ |
| $-$ | $8t+4$ | $\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ |
| $+$ | $8$ | $\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}$ |
| $-$ | $0$ | $\frac{\mathrm{e}^{2t}}{8}$ |

$$\begin{aligned} u &= (2t+1)^2\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} - (8t+4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4} + 8\frac{\mathrm{e}^{2t}}{8} && (70)\\ &= \left(\frac{(2t+1)^2}{2} - 2t\right)\mathrm{e}^{2t} && (71) \end{aligned}$$

Nun zurück in unser ursprüngliches Ziel: Wir wollen die Lösung $\psi = \varphi u$ finden. Diese Funktion ist also:

$$\begin{aligned} \psi &= \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{(2t+1)^2}{2} - 2t\right)\mathrm{e}^{2t} && (72)\\ &= \frac{(2t+1)^2}{2} - 2t && (73) \end{aligned}$$

Dieses Mal gucken wir, dass es doch stimmt durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} (2t+1)\ddot{\psi} &= -(4t-2)\dot{\psi} + 8\psi && \mid \dot{\psi} = 4t,\ \ddot{\psi} = 4 && (74)\\ (2t+1)4 &= -(4t-2)4t + 8\left(\frac{(2t+1)^2}{2} - 2t\right) && && (75)\\ &= -16t^2 + 8t + 4(2t+1)^2 - 16t && && (76)\\ &= -16t^2 - 8t + 16t^2 + 16t + 4 && && (77)\\ &= 8t + 4 && && (78)\\ &= 4(2t+1) && && (79)\\ 4 &= 4 \quad \checkmark && && (80) \end{aligned}$$

c) Sei nun $b(t) = 54(2t+1)^3e^t$ somit erhalten wir die DGL:

$$\begin{aligned} (2t+1)\ddot{x} &= -(4t-2)\dot{x} + 8x + 54(2t+1)^3e^t && (81)\\ \iff \quad \ddot{x} &= -\frac{4t-2}{2t+1}\dot{x} + \frac{8}{2t+1}x + 54(2t+1)^2e^t && (82) \end{aligned}$$

Diese schreiben wir um in ein System von DGLen erster Ordnung mit

$$\begin{aligned} &z_1 = x, \qquad z_2 = \dot{x} && (83)\\ &\to \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{4t-2}{2t+1}z_2 + \frac{8}{2t+1}z_1 + 54(2t+1)^2e^t \end{cases} && (84) \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist dies

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{8}{2t+1} & -\frac{4t-2}{2t+1} \end{pmatrix}}^{A(t):=} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 54(2t+1)^2e^t \end{pmatrix} \qquad (85)$$

Wir betrachten nun den homogenen Teil der DGL, also das System

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{4t-2}{2t+1} z_2 + \frac{8}{2t+1} z_1 \end{cases} \tag{86}$$

Aus den Aufgabenteilen $a$) und $b$) erhalten wir das Fundamentalsystem

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{(2t+1)^2}{2} - 2t \\ -2e^{-2t} & 2(2t+1) - 2 \end{pmatrix} \tag{87}$$

In der Tat gilt

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & 4t \\ 4e^{-2t} & 4 \end{pmatrix} = A(t) \cdot X(t). \tag{88}$$

Nun folgen wir dem Ansatz

$$\beta(t) = X(t)u(t) \tag{89}$$

und bestimmen $u(t)$ durch

$$\dot{u}(t) = X(t)^{-1} \cdot b(t). \tag{90}$$

Also invertieren wir die Matrix $X(t)$ im ersten schritt.

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det X(t)} \cdot \text{adj } X(t) \tag{91}$$

$$= \frac{1}{\det X(t)} \cdot \begin{pmatrix} 4t & -\frac{(2t+1)^2}{2} + 2t \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$\det X(t) = e^{-2t}4t - \left(-2e^{-2t}\left(\frac{(2t+1)^2}{2} - 2t\right)\right) \tag{93}$$

$$= e^{-2t}4t - \left(-e^{-2t}\left((2t+1)^2 - 4t\right)\right) \tag{94}$$

$$= e^{-2t}4t - \left(-e^{-2t}(2t+1)^2 + e^{-2t}4t\right) \tag{95}$$

$$= e^{-2t}4t + e^{-2t}(2t+1)^2 - e^{-2t}4t \tag{96}$$

$$= e^{-2t}(2t+1)^2 \tag{97}$$

$$\implies X^{-1}(t) = \frac{1}{e^{-2t}(2t+1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4t & -\frac{(2t+1)^2}{2} + 2t \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{98}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4t}{e^{-2t}(2t+1)^2} & -\frac{(2t+1)^2+4t}{2e^{-2t}(2t+1)^2} \\ \frac{2e^{-2t}}{e^{-2t}(2t+1)^2} & \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}(2t+1)^2} \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4t}{e^{-2t}(2t+1)^2} & -\frac{(2t+1)^2+4t}{2e^{-2t}(2t+1)^2} \\ \frac{2}{(2t+1)^2} & \frac{1}{(2t+1)^2} \end{pmatrix} \tag{100}$$

$$\tag{101}$$

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4t}{e^{-2t}(2t+1)^2} & -\frac{(2t+1)^2+4t}{2e^{-2t}(2t+1)^2} \\ \frac{2}{(2t+1)^2} & \frac{1}{(2t+1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 54(2t+1)^2 e^t \end{pmatrix} \tag{102}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + -\frac{54\left((2t+1)^2+4t\right)e^t}{2e^{-2t}} \\ 0 + 54e^t \end{pmatrix} \tag{103}$$

$$= \begin{pmatrix} -27((2t+1)^2+4t)e^{3t} \\ 54e^t \end{pmatrix} \tag{104}$$

$$= \begin{pmatrix} -27(4t^2+8t+1)e^{3t} \\ 54e^t \end{pmatrix} \tag{105}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -108t^2e^{3t} - 216te^{3t} - 27e^{3t} \\ 54e^t \end{pmatrix} \tag{106}$$

Wir integrieren mit unbestimmten Integralen

$$I_{u_1} = \int \left(-108t^2e^{3t} - 216te^{3t} - 27e^{3t}\right)\mathrm{d}t \tag{107}$$

$$= -108\int t^2e^{3t}\mathrm{d}t - 216\int te^{3t}\mathrm{d}t - 27\int e^{3t}\mathrm{d}t \tag{108}$$

Nebenrechnung. $\forall i \in \mathbb{N} : c_i \in \mathbb{R}, \mathfrak{C}_\mathfrak{i} \in \mathbb{R}$

$$\int t^2e^{3t}\mathrm{d}t = \frac{t^2e^{3t}}{3} + c_1 - \int \frac{2}{3}te^{3t}\mathrm{d}t \tag{109}$$

$$= \frac{t^2e^{3t}}{3} + c_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{te^{3t}}{3} + c_2 - \int \frac{1}{3}e^{3t}\mathrm{d}t\right) \tag{110}$$

$$= \frac{t^2e^{3t}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{te^{3t}}{3} - \left(\frac{e^{3t}}{9}\right)\right) + \mathfrak{C}_1 \tag{111}$$

$$= \frac{9t^2e^{3t} - 6te^{3t} + 2e^{3t}}{27} + \mathfrak{C}_1 \tag{112}$$

$$\int te^{3t}\mathrm{d}t = \frac{te^{3t}}{3} + c_3 - \left(\int \frac{e^{3t}}{3}\mathrm{d}t\right) \tag{113}$$

$$= \frac{te^{3t}}{3} + c_3 - \left(\frac{e^{3t}}{9} + c_4\right) \tag{114}$$

$$= \frac{3te^{3t} - e^{3t}}{9} + \mathfrak{C}_2 \tag{115}$$

$$\int e^{3t}\mathrm{d}t = \frac{e^{3t}}{3} + \mathfrak{C}_3 \tag{116}$$

Nach Aufgabenstellung dürfen wir alle Integrationskonstanten als 0 annehmen, somit gilt:

$$u_1(t) = -108\frac{9t^2e^{3t} - 6te^{3t} + 2e^{3t}}{27} - 216\frac{3te^{3t} - e^{3t}}{9} - 27\frac{e^{3t}}{3} \tag{117}$$

$$= -4\left(9t^2e^{3t} - 6te^{3t} + 2e^{3t}\right) - 24\left(3te^{3t} - e^{3t}\right) - 9e^{3t} \tag{118}$$

$$= -36t^2e^{3t} + 24te^{3t} - 8e^{3t} - 72te^{3t} + 24e^{3t} - 9e^{3t} \tag{119}$$

$$= -(36t^2 + 48t - 7)e^{3t} \tag{120}$$

$$u_2(t) = \int 54e^t\mathrm{d}t \tag{121}$$

$$= 54e^t \tag{122}$$

Nun bestimmen wir mit $\beta$ eine Lösung für die inhomohene Gleichung.

$$\beta(t) = X(t)u(t) \tag{123}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{(2t+1)^2}{2} - 2t \\ -2e^{-2t} & 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(36t^2+48t-7)e^{3t} \\ 54e^t \end{pmatrix} \tag{124}$$

$$= \begin{pmatrix} 72t^2e^t - 48te^t + 34e^t \\ 72t^2e^t + 312te^t - 14e^t \end{pmatrix} \tag{125}$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 72t^2e^t - 48te^t + 34e^t \\ 72t^2e^t + 312te^t - 14e^t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{(2t+1)^2}{2} - 2t \\ 4t \end{pmatrix} \tag{126}$$

## 13.4 Taylor-Entwicklung einer Lösung

Gegeben sei $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\sin u - 2\dot{u} && |t \geq 0 && (127) \\ u(0) &= 0 && && (128) \\ u(1) &= 1 && && (129) \end{aligned}$$

Obwohl wir diese Differentialgleichung nicht explizit nach $u$ bestimmen wollen, können wir die Lösung in der Nähe eines bestimmten Zeitpunktes durch ihre Taylor-Entwicklung bis zu einer gewünschten Ordnung annähern. Dazu brauchen wir die folgende Taylor-Entwicklung:

$$T_4(u, t, t_0 = 0) = u_0 + \dot{u}_0(t - t_0) + \ddot{u}_0 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dddot{u}_0 \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \ddddot{u}_0 \frac{(t - t_0)^4}{4!} \qquad (130)$$

Als erstes betrachten wir aber die Terme $\ddot{u}(0)$, $\dddot{u}(0)$ und $\ddddot{u}(0)$. Diese sind Anfangsbedingungen, die uns nicht gegeben sind, wir können sie aber bestimmen. Aus (127) können wir jeweils Ausdrücke für $\dddot{u}$ und $\ddddot{u}$ finden:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\sin u - 2\dot{u} && |\ddot{u}(0) = -2 && (131) \\ \dddot{u} &= -\dot{u}\cos u - 2\ddot{u} && |\dddot{u}(0) = 3 && (132) \\ \ddddot{u} &= -\ddot{u}\cos u + \dot{u}^2 \sin u - 2\dddot{u} && |\ddddot{u}(0) = -4 && (133) \end{aligned}$$

Nun wissen wir jetzt grob wie die Differentialgleichung aussehen soll:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u_0 + \dot{u}_0 t + \ddot{u}_0 \frac{t^2}{2!} + \dddot{u}_0 \frac{t^3}{3!} + \dddot{u}_0 \frac{t^4}{4!} + \mathcal{O}\big(t^5\big) && (134) \\ &= t - t^2 + \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{6} + \mathcal{O}\big(t^5\big) && (135) \end{aligned}$$

und voilà.