

Experimentalphysik 3

Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Tutor/in: Tobias Hammel

1. Wellendarstellung und Interferenz

Gegeben seien zwei örtliche Wellen der Form

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = A_1 \exp\{i\varphi_1(\mathbf{r}, t)\} \quad (1)$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) = A_2 \exp\{i\varphi_2(\mathbf{r}, t)\} \quad (2)$$

die Phasenfunktionen seien jeweils in der Form

$$\varphi_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t \quad (3)$$

mit

$$\mathbf{k}_i = (k_x^i, k_y^i, k_z^i) \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (5)$$

gegeben.

$$(6)$$

- a) In Real- und Imaginärteil kann die Welle $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) = A_2(\cos(\varphi_2(\mathbf{r}, t)) + i \sin(\varphi_2(\mathbf{r}, t))), \quad (7)$$

also

$$\operatorname{Re}\{\Phi_2(\mathbf{r}, t)\} = A_2 \cos(\varphi_2(\mathbf{r}, t)), \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_2(\mathbf{r}, t)\} = A_2 \sin(\varphi_2(\mathbf{r}, t)). \quad (9)$$



$$(10)$$

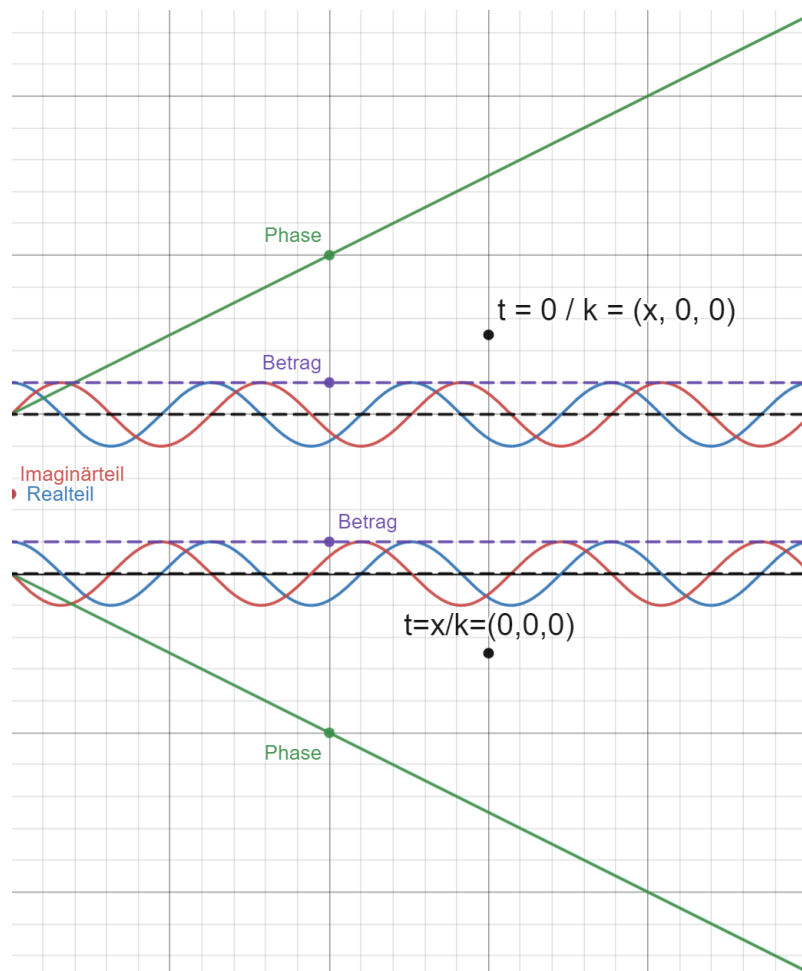


Abbildung 1: Not sure if this is what they want.

It is :)

- c) ~~b)~~ Die Ausbreitungsrichtung der Ebene der Wälle ist parallel zum Vektor \mathbf{k} . Die Phasengeschwindigkeit bei konstanter Phase ist bekanntlich:

$$k \cdot v_{\text{Ph}} = \omega \quad (11)$$

$$\iff v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (12)$$

mit $k = |\mathbf{k}|$.

- c) Gesucht ist nun die Intensität, oder die Proportionalität der Intensität für eine Überlagerung der beiden Zuständen: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

$$|\Phi|^2 = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 \quad (13)$$

$$= (\Phi_1 + \Phi_2) \cdot (\Phi_1 + \Phi_2)^* \quad (14)$$

$$= (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) \cdot (A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}) \quad (15)$$

$$= A_1^2 + A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + A_2 A_1 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + A_2^2 \quad (16)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (17)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 [\cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t)] \quad (18)$$

Für einen Detektor an der Position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ bleibt dann nur stehen:

$$I \propto A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\omega t) \quad (19)$$

also schwingt die Intensität um die Summe der Quadrate der Amplituden und schwingt mit einem Term, der von der Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ abhängt.

Wenn eine der Wellen geblockt sein sollte, also sagen wir $A_i \rightarrow 0$, dann würde die Schwingung verschwinden und die Intensität wäre nur

$$I \propto A_j^2 \quad i \neq j \quad (20)$$

proportional zur verbleibenden Amplitude.

3/3

2. De-Broglie-Wellen

a) Mittlere thermischen Geschwindigkeit

Zunächst sind wir an der mittleren thermischen Energie der Elektronen interessiert. Wie die Aufgabe vorgibt, nehmen wir an, dass ein ideales Gas mit drei Freiheitsgraden des einzelnen Teilchens vorliegt. Dann gilt:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_b T \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} m_{e-} v_{eff}^2 = \frac{3}{2} k_b T \quad (22)$$

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{3k_b T}{m_{e-}}} \quad T = 293,15 \text{ K} \quad (23)$$

$$= 115452 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (24)$$

b) De-Broglie-Wellenlänge

Es gilt:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \quad (25)$$

$$\langle \lambda_{dB} \rangle = \frac{h}{v_{eff} m_e} \quad (26)$$

$$= 6,3 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad \checkmark \quad (27)$$

Für den Vergleich mit den Atomabständen betrachten wir Eisen und verwenden wir die Dichte:

$$\rho = 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (28)$$

Mit der Atommasse von $m = 55,8 \text{ u}$ folgt dann für die Atomdichte

$$n = 8,4 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \quad (29)$$

Hieraus folgt, wenn man das Volumen von 1 m^3 in kleine Würfel zerlegt, dass jedes Atom in einem Würfel mit folgendem Volumen sitzt

$$V = 0,012 \cdot 10^{-27} \text{ m}^3 \quad (30)$$

Es folgt eine Kantenlänge von

$$a = 0,23 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad \checkmark \quad (31)$$

Damit entspricht die de-Broglie-Wellenlänge etwa 27 Atomabständen und ist folglich deutlich größer.

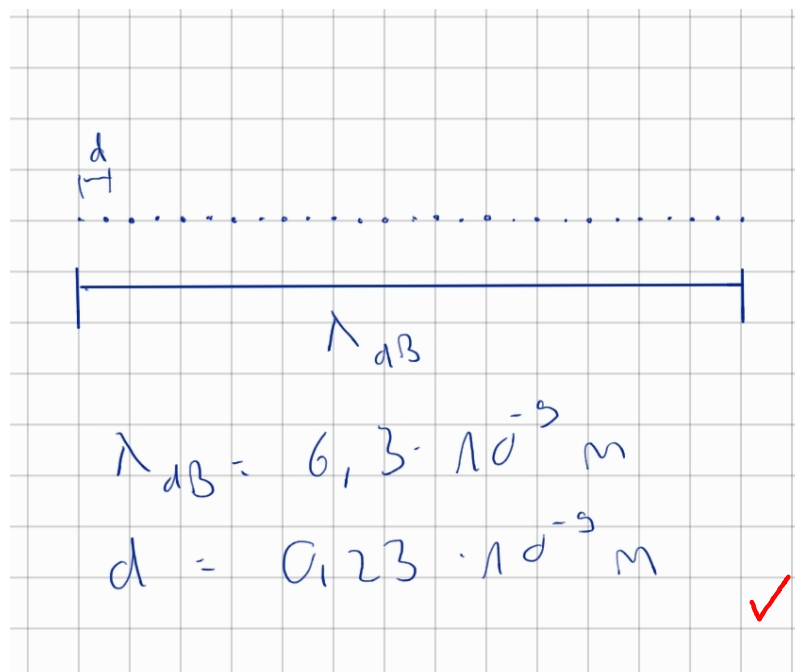


Abbildung 2: Atomabstand und de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen

c) C_{60} -Fulleren

Das Fullerenmolekül hat eine molare Masse von:

$$M_{C_{60}} = 0,721 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \quad (32)$$

$$\rightarrow m_{C_{60}} = 1,197 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \quad (33)$$

Wiederholt man die Rechnungen oben, so findet man für die Annahme, dass die Fullerene Punktmassen mit drei Freiheitsgraden sind:

$$v_{eff} = 100,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \checkmark \quad (34)$$

$$\langle \lambda_{dB,C_{60}} \rangle = 5,5 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad \checkmark \quad (35)$$

Tatsächlich ist es aber so, dass man für Fulleren wahrscheinlich von einer größeren Zahl an Freiheitsgraden ausgehen muss, da ein mehratomiges Molekül vorliegt. Wir gehen bei n-atomigen Molekülen deshalb von $f = 3 \cdot n = 180$ Freiheitsgraden aus.

$$v'_{eff} = 780 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (36)$$

$$\langle \lambda'_{dB,C_{60}} \rangle = 7,1 \cdot 10^{-13} \text{ m} \quad (37)$$

Müsste ich nochmal drüber nachdenken ist aber denke ich nicht so weil das Molekül selbst sphärisch symmetrisch ist und die Freiheitsgrade keine Energie aufnehmen können

Aber schöner Gedanke!

$$(38)$$

Nun sind wir an der Temperatur eines Fullerengases interessiert, in dem die de-Broglie-Wellenlänge 100 nm beträgt:

$$v_{eff} = \frac{h}{m_{C_{60}} \lambda_{C_{60}}} \quad (39)$$

$$= 5,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \checkmark \quad (40)$$

$$T = \frac{m_{C_{60}} v_{eff}^2}{3k_b} \quad (41)$$

$$\approx 9 \cdot 10^{-7} \text{ K} \quad \checkmark \quad (42)$$

Bzw für die höhere Zahl an Freiheitsgraden

$$T = \frac{m_{C_{60}} v_{eff}^2}{180k_b} \quad (43)$$

$$\approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ K} \quad (44)$$

d) Rubidium

$$m_R = 1,42 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \quad (45)$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{3k_b T m_R}} \quad (46)$$

$$\lambda_{dB}(10\mu\text{K}) = 8,64 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (47)$$

$$\lambda_{dB}(10\text{ nK}) = 2,73 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (48)$$

$$(49)$$

Zunächst bestimmen wir aus der gegebenen Dichte den mittleren Abstand:

$$d = \left(\frac{1 \text{ cm}^3}{10^{14}} \right)^{1/3} \quad (50)$$

$$= \frac{0,01 \text{ m}}{10^{14/3}} \quad (51)$$

$$\approx 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (52)$$

$$\rightarrow \lambda_{dB} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (53)$$

Man stellt die oben verwendete Beziehung um und setzt ein:

$$= \frac{h^2}{3k_B \lambda_{dB}^2 m_R} \quad (54)$$

$$\approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ K} \quad (55)$$

Passt!

3/3

3. Relativistische Dispersionsrelation

Gegeben sei die folgende Relation zwischen Energie und Impuls einer Materiewelle

$$E(p) = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}. \quad (56)$$

Mit der Lichtgeschwindigkeit c , sowie der Ruhemasse m_0 .

(57)

a) Nun seien noch die zwei bekannten Relationen

$$E = \hbar \omega \quad (58)$$

$$p = \hbar k \quad (59)$$

gegeben. Diese können wir in die oben gegebene Gleichung einsetzen und erhalten so mit

$$\hbar \omega = \sqrt{c^2 (\hbar k)^2 + m_0^2 c^4} \quad (60)$$

$$\Leftrightarrow \omega(k) = \frac{\sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_0^2 c^4}}{\sqrt{\hbar^2}} \quad (61)$$

$$= \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} \quad \checkmark \quad (62)$$

die gesuchte Relation $\omega(k)$. Alle Skizzen folgen am Schluss der Aufgabe.

(63)

b) Für die Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten erhalten wir:

$$v_{ph} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}}{\sqrt{k^2}} \quad (64)$$

$$= \sqrt{c^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2 k^2}} \quad \checkmark \quad (65)$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (66)$$

$$= \frac{1}{2} \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (2c^2 k) \quad (67)$$

$$= \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}} \quad \checkmark \quad (68)$$

- c) Für die Taylorentwicklung benötigen wir nun noch die zweite Ableitung von $\omega(k)$. Hierzu leiten wir (2) erneut ab.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left[c^2 k \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (69)$$

$$= \left[c^2 \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] + \left[c^2 k \frac{-1}{2} \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} (2c^2 k) \right] \quad (70)$$

$$= \left[c^2 \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] - \left[c^4 k^2 \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (71)$$

$$= \frac{c^2}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}} - \frac{c^4 k^2}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} \quad (72)$$

$$= \frac{c^2 \left(c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \right)}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} - \frac{c^4 k^2}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} \quad (73)$$

$$= \frac{c^4 k^2 + \frac{m_0^2 c^6}{\hbar^2} - c^4 k^2}{\sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} = \frac{m_0^2 c^6}{\hbar^2 \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} \quad (74)$$

Somit ergibt sich in der Taylor-Entwicklung:

$$\omega(k) \approx \sqrt{c^2 k_0^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} + \frac{c^2 k_0}{\sqrt{c^2 k_0^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}} (k - k_0) + \frac{m_0^2 c^6}{2\hbar^2 \sqrt{c^2 k_0^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} (k - k_0)^2$$

~~Für $k_0 = 0$~~

Für ~~$k = k_0$~~ erhalten wir: ✓

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} + \frac{m_0^2 c^6}{2\hbar^2 \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}^3} (k)^2 \quad (75)$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{m_0^2 c^6}{2\hbar^2 \frac{m_0^3 c^6}{\hbar^3}} k^2 = \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{\hbar}{2m_0} k^2. \quad (76) \quad \text{✓}$$

Hier ist nun der hintere Term vergleichbar mit

$$E = \frac{p^2}{2m} \iff \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \iff \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad (77)$$

also der nichtrelativistischen Dispersionsrelation. Der vordere Term entspricht einer Konstanten. ✓

$$(78)$$

Skizzen. Zu a). Die Dispersionsrelation wurde bestimmt als:

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} \quad (79)$$

Außerdem ist gegeben

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}, \quad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (80)$$

$$\Rightarrow \lambda_c = \frac{\hbar 2\pi}{m_0 c} \quad (81)$$

$$\Rightarrow k_c = \frac{2\pi m_0 c}{2\pi \hbar} = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (82)$$

Die können wir in (79) einsetzen und erhalten so

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + c^2 k_c^2} = c \sqrt{k^2 + k_c^2}. \quad (83)$$

Mit $x = \frac{k}{k_c}$ gilt dann

$$\omega(x) = c k_c \sqrt{x^2 + 1}. \quad \checkmark \quad (84)$$

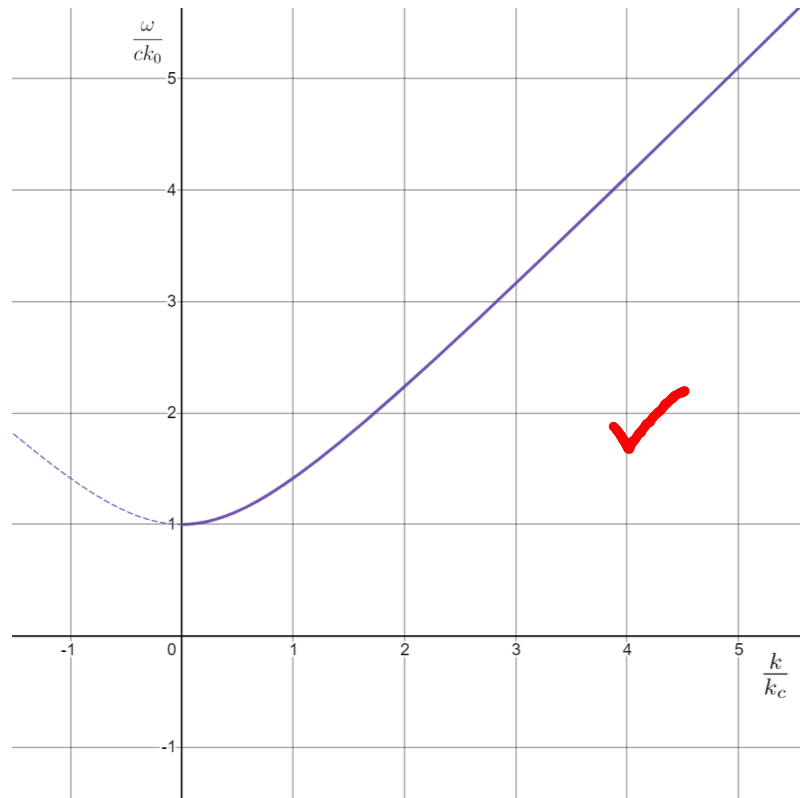


Abbildung 3: Skizze zu a)

Zu b). Aus (65) entnehmen wir die Phasengeschwindigkeit und setzen hier ebenfalls k_c ein.

$$v_{ph}(k) = \sqrt{c^2 + \frac{c^2 k_c^2}{k^2}} = c \sqrt{1 + \frac{k_c^2}{k^2}} \quad (85)$$

und wieder mit $x = \frac{k}{k_c}$ gilt

$$v_{ph}(x) = c \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (86)$$

Selbiges führen wir für die Gruppengeschwindigkeit aus (68) durch

$$v_{gr}(k) = \frac{c^2 k}{\sqrt{c^2 k^2 + c^2 k_c^2}} = \frac{ck}{\sqrt{k^2 + k_c^2}} \quad (87)$$

Erneut mit $x = \frac{k}{k_c}$.

$$v_{gr}(x) = \frac{cxk_c}{\sqrt{(xk_c)^2 + k_c^2}} = \frac{cx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (88)$$

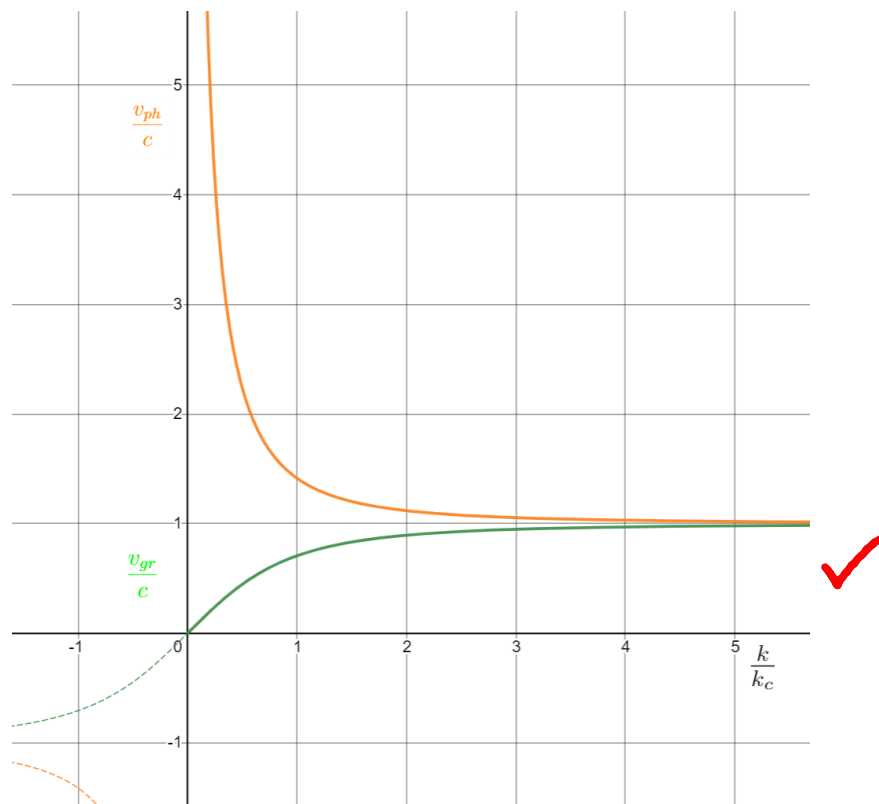


Abbildung 4: Skizze zu b)

Zu d). Den Koeffizient des zweiten Terms der Taylorentwicklung, beziehungsweise die zweite Ableitung von $\omega(k)$ in (74), können wir ebenfalls nach demselben Schema umschreiben:

$$\omega''(k) = \frac{m_0^2 c^6}{\hbar^2 \sqrt{c^2 k^2 + c^2 k_c^2}^3} = \frac{m_0^2 c^3}{\hbar^2 \sqrt{k^2 + k_c^2}^3} \quad (89)$$

$$\rightarrow x = \frac{k}{k_c}$$

$$\omega''(x) = \frac{m_0^2 c^3}{\hbar^2 \sqrt{(x k_c)^2 + k_c^2}^3} \quad (90)$$

$$= \frac{m_0^2 c^3}{\hbar^2 k_c^3 \sqrt{x^2 + 1}^3} \quad (91)$$

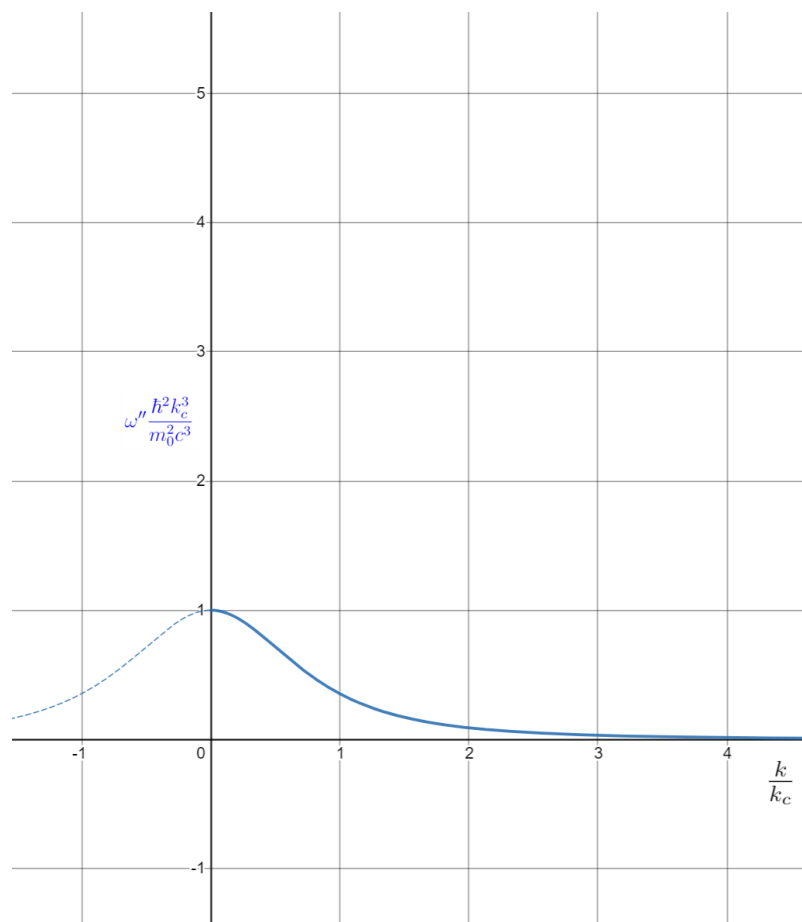


Abbildung 5: Skizze zu d)

3/3