

Messung der Boltzmann-Konstante Teil I  
Brownsche Bewegung

Physikalisches Anfängerpraktikum II

Juan Provencio Lameiras

Betreuer/in: Nico Lorenz

---

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuches</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Brownsche Bewegung . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>3</b>
3.1	Materialen und Geräte . . . . .	3
3.2	Aufbau . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Messung und Auswertung</b>	<b>4</b>
4.1	Messprotokoll . . . . .	4
4.2	Auswertung . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>8</b>
5.1	Zusammenfassung . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Quellen</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>11</b>

# 1 Ziel des Versuches

In diesem Versuch wollen wir durch die statistische Bewegung von Teilchen aufgrund der Brownschen Bewegung die Boltzmann-Konstante grob bestimmen. Dies ist eine sehr ungenaue Methode, weshalb der Fokus neben der Bestimmung der Naturkonstante an den statistischen Prozessen der Brownschen Bewegung liegt.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Brownsche Bewegung

Mikroskopische Teilchen unterliegen den Effekten der Brownschen Bewegung. Diese findet statt in einem Medium, wo Teilchen mit anderen Teilchen wechselwirken können und untereinander durch unregelmäßige Stöße in Bewegung. Diese Bewegung, aufgrund ihrer statistischen Natur lässt sich durch den sogenannten "Random Walk Generator". Dabei kann sich ein Teilchen jedes Mal ein Schritt von ihrer aktuellen Position in eine beliebige Richtung bewegen. In einem realen Medium gibt es also drei Freiheitsgrade und eine kontinuierliche Anzahl an Richtungen. In einem vereinfachten Modell kann man diese Freiheitsgrade reduzieren. In unserem Versuch werden wir mit einer sehr dünnen Schicht arbeiten, weshalb wir uns einfachheitshalber auf eine Ebene beschränken.

Im Mittel ist die Verrückung der Teilchen  $\langle x \rangle = 0$ , da diese Bewegung komplett zufällig ist, allerdings legen sie eine mittlere nicht verschwindende Strecke zurück, also eignet sich am besten das mittlere des Quadrats der Verschiebung  $\langle x^2 \rangle$  zur Feststellung von jeglicher Bewegung.

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 P(x, t) dx \quad (1)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P$ . Diese Wahrscheinlichkeit wird durch eine Gaußsche Verteilung beschrieben mit

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2)$$

und mit der allgemeinen Form einer Gaußverteilung

$$G(x; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

lässt sich (1) vereinfachen zu

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \sigma^2. \quad (4)$$

Dies entspricht die Breite der Verteilung. Wenn wir uns die Ausbreitung in zwei Dimensionen anschauen, so interessieren wir uns für den mittleren Abstand

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \quad (5)$$

und jeder dieser Terme liefert den selben Beitrag, also erhalten wir

$$\langle r^2 \rangle = 4Dt \quad (6)$$

Dieser Faktor  $D$  ist als Diffusionskoeffizient bekannt, und er ist durch die Temperatur  $T$ , den Reibungskoeffizient  $f$  und die Boltzmann-Konstante  $k$  gegeben als

$$D = \frac{kT}{f} \quad (7)$$

und der Reibungskoeffizient  $f$  lässt sich experimentell bestimmen durch

$$f = 6\pi\eta a \quad (8)$$

für Partikeln mit Radius  $a$  und Viskosität der Flüssigkeit  $\eta$ . Damit folgt

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad | \quad \langle r^2 \rangle = 4Dt \quad (9)$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t \quad (10)$$

woraus sich die Boltzmann-Konstante berechnen lässt als

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle \quad (11)$$

### 3 Versuchsaufbau

#### 3.1 Materialien und Geräte

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC
- Thermometer
- Objektmikrometer

#### 3.2 Aufbau

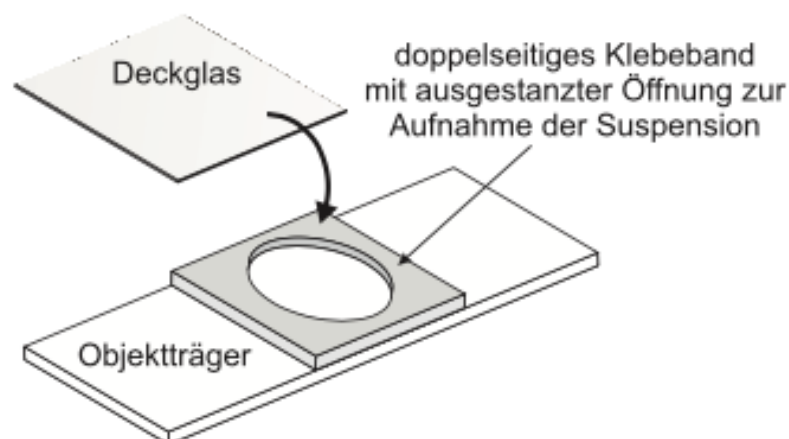


Abbildung 1: Aufbau nach Praktikumsskript

## 4 Messung und Auswertung

### 4.1 Messprotokoll

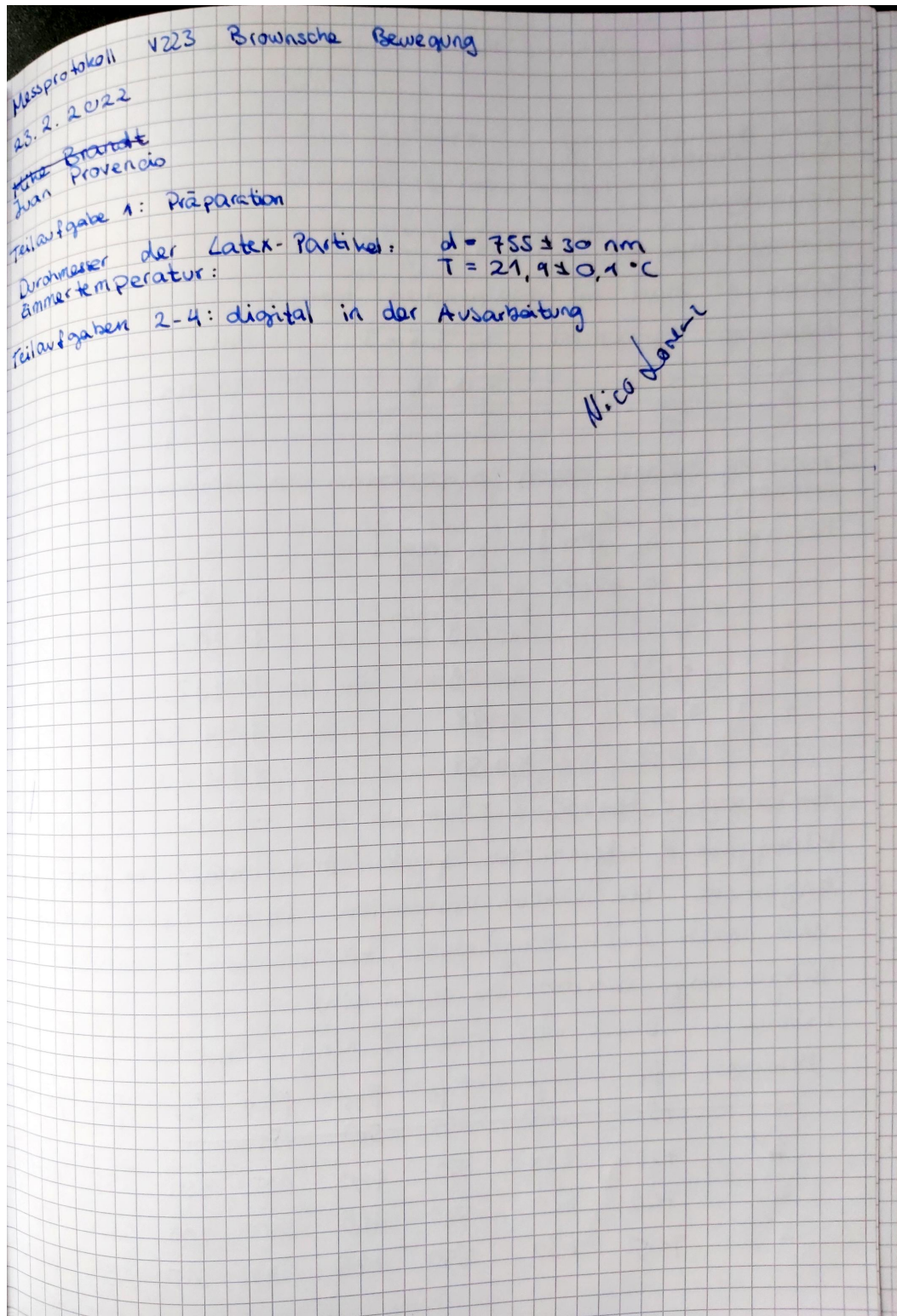


Abbildung 2: Messprotokoll

## 4.2 Auswertung

Im Folgenden wird bei der Fehleranalyse wenn nicht anders explizit angegeben die Gaußsche Fehlerfortpflanzung benutzt um die Fehlern der Größen zu bestimmen. Diese wird explizit in der digitalen Auswertung durch Python und wird in trivialen Fällen nicht nochmal bei der Ausarbeitung vorkommen.

### 4.2.1 Graphische Darstellung der Daten

Aus den gegebenen Messdaten haben wir als erstes ein Scatter-Plot erstellt, in welchem die einzelnen Messpunkten mit den zeitlich benachbarten verbunden sind.

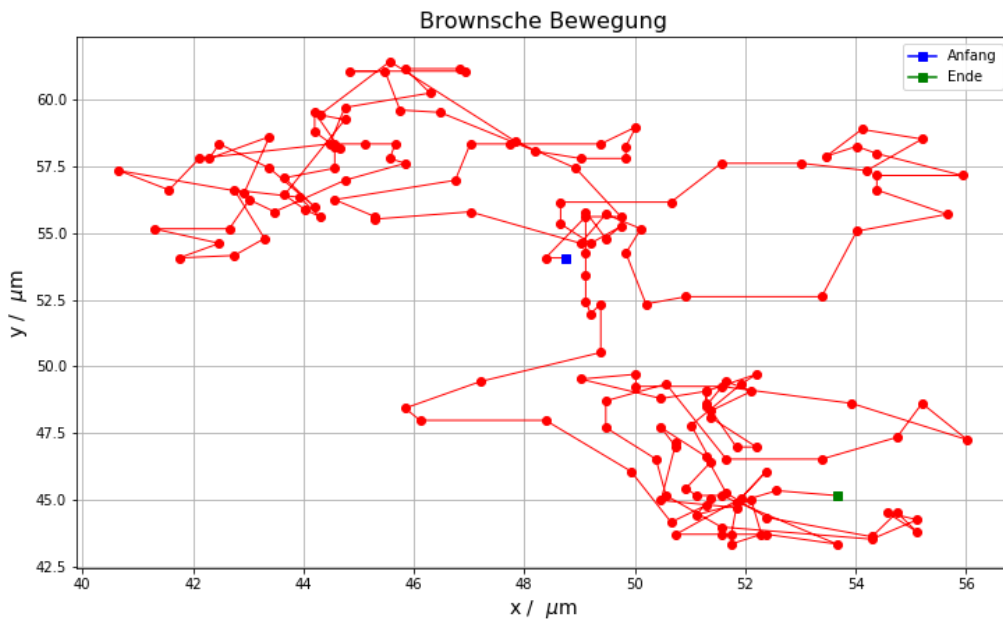


Diagramm 1: Bewegung eines Latex-Partikels in Wasser

### 4.2.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates

Zur Berechnung der mittleren Verschiebung berechnen wir die einzelnen Verrückungen nach jedem Schritt in  $x$  und  $y$  Richtung gemäß

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (12)$$

und addieren sie quadratisch gemäß (5) um die mittlere Verschiebung  $\langle r^2 \rangle$  zu bestimmen. Als Fehler wird hier die Standardabweichung genommen. Ebenfalls für die mittlere Zeit zwischen Aufnahmen  $t$ . Damit erhalten wir für die mittlere Verschiebung und die mittlere Zeit  $t$

$$\langle r^2 \rangle = 1,98(16) \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \quad (13)$$

$$t = 1,021(3) \text{ s} \quad (14)$$

Als nächstes um die Boltzmann-Konstante und das Verschiebungskoeffizient auszurechnen brauchen wir die Viskosität von Wasser. Diese ist temperaturabhängig also

müssen wir diese aus der entsprechenden Abbildung im Praktikumsprotokoll ablesen. Mit einer gemessenen Temperatur von  $21,9^\circ\text{C}$  erhalten wir eine Viskosität von  $\eta = 9,6(1) \cdot 10^{-4} \text{ Pa s}$

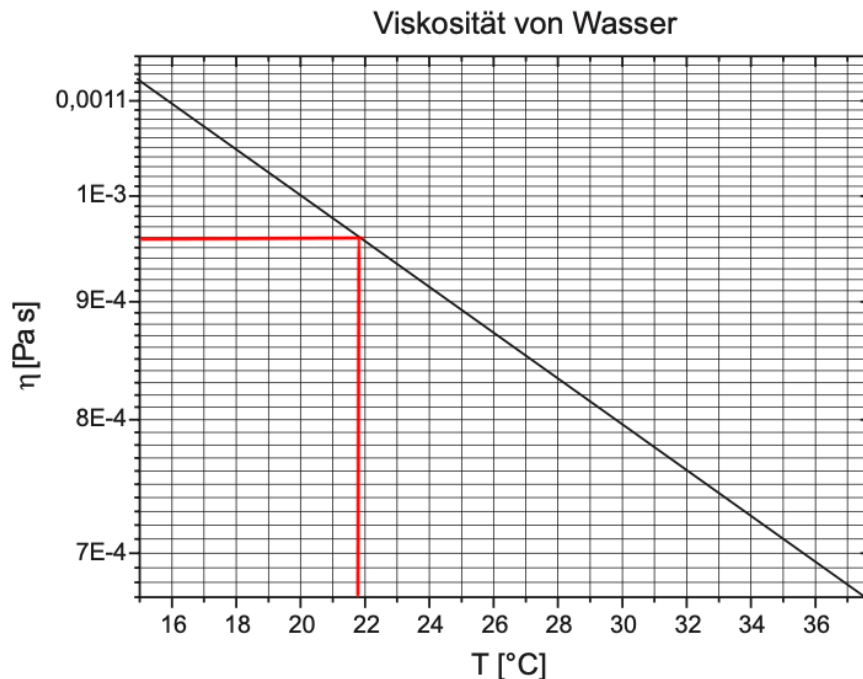


Abbildung 3: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Wir berechnen das Verschiebungskoeffizient  $D$  gemäß (6)

$$D = 0,49(4) \cdot 10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (15)$$

und die Boltzmann-Konstante gemäß (11) als

$$k = 112(10) \cdot 10^{-25} \text{ J K}^{-1} \quad (16)$$

hier wurde der Fehler mithilfe des relativen Fehlern berechnet als

$$\Delta k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle}\right)^2} \quad (17)$$

#### 4.2.3 Kontrollverteilung

Im Folgenden werden wir überprüfen, dass die gemessene Verteilung tatsächlich der erwarteten Gaußverteilung entspricht. Dafür tragen wir alle Verschiebungen in einem Histogramm auf und passen eine Gaußkurve darüber an.

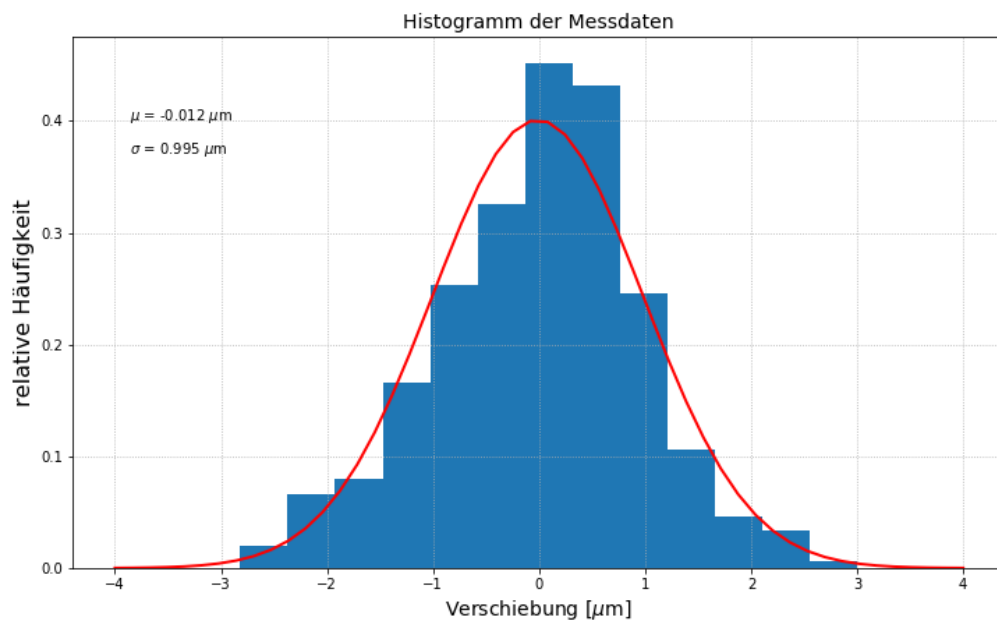


Diagramm 2: Histogramm mit angepasster Gaußkurve

Am Diagramm erkennt man einen relativen guten Fit erkennen und schlussfolgern, dass die Bewegung tatsächlich einer Normalverteilung entspricht.

#### 4.2.4 Kummulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Als nächstes würden wir erwarten, dass jeder Schritt des Teilchens näherungsweise den gleichen Abstand verrückt und von daher wenn wir jede Verrückung nach einander aufsummieren kriegen wir eine Gerade. Aus dieser Gerade lässt sich ebenfalls das Verschiebungskoeffizient ausrechnen. Dementsprechend passen wir auf unsere Messwerte einen linearen Fit an.

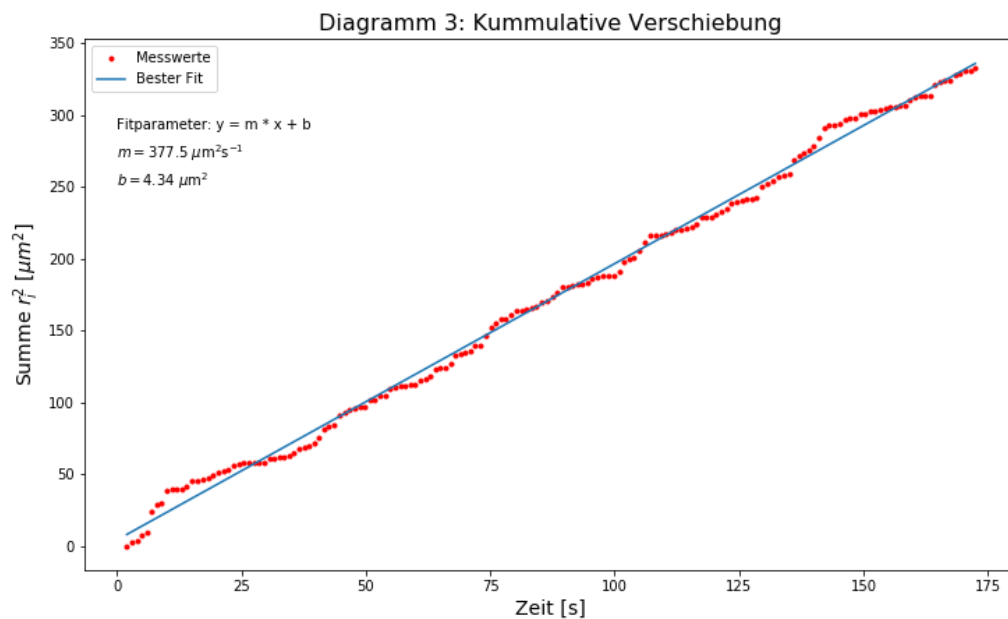


Diagramm 3: Kummulative Verschiebung

Die Steigung dieser Gerade entspricht genau  $m = \frac{\langle r^2 \rangle}{t}$ , woraus wir ein Verschiebungs-koeffizient von

$$D_2 = 0,481(2) \cdot 10^{-12} \text{m}^2 \text{s}^{-1} \quad (18)$$

erhalten. Die Berechnung der Boltzmann-Konstante erfolgt dieses Mal durch (9):

$$k_2 = 111(5) \cdot 10^{-25} \text{J K}^{-1} \quad (19)$$

Der Fehler wurde hier analog mit dem relativen Fehler ausgerechnet.

## 5 Zusammenfassung und Diskussion

### 5.1 Zusammenfassung

In diesem Versuch haben wir durch den statistischen Prozess der Brownschen Molekularbewegung die Boltzmann-Konstante bestimmt. Dafür haben wir in einem Mikroskop die Bewegung von Latex-Partikeln beobachtet und aufgezeichnet und aus dieser die Konstante bestimmt.

#### 5.1.1 Diskussion

Im Folgenden wollen wir die von uns ausgerechneten Ergebnisse miteinander und mit einem Literaturwert vergleichen. Dafür fahren wir am besten tabellarisch fort:



Tabelle 1: Vergleich der Diffusionskoeffizienten

Größe	$D$ [ $10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ]	$\frac{\Delta D}{D}$ [%]	$D_2$ [ $10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ]	$\frac{\Delta D_2}{D_2}$ [%]	$\sigma$
	0,49(4)	8,2	0,481	0,5	0,1

Tabelle 2: Vergleich der Boltzmann-Konstanten

Größe	Wert	Rel. Fehler [%]	$\sigma$	
$k$ [ $10^{-25} \text{ J K}^{-1}$ ]	112(10)	8,2	$\sigma_{k,k_2}$	0,09
$k_2$ [ $10^{-25} \text{ J K}^{-1}$ ]	111(5)	4,1	$\sigma_{k,k_{\text{Lit}}}$	2,5
$k_{\text{Lit}}$ [ $10^{-25} \text{ J K}^{-1}$ ]	138,0649		$\sigma_{k_2,k_{\text{Lit}}}$	5,8

An diesen beiden Tabellen lassen sich einige Sachen erkennen. Als erstes merken wir sehr gute Konkordanz zwischen den zwei von uns durchgeführten Messungen, die Abweichungen zwischen Methode 1 und 2 sind sehr akzeptabel, deutlich unter 1. Dies kann an einigen Sachen liegen, teilweise daran dass viele der Faktoren die in diese Größen mitbeeinflusst haben die selben sind, zum Beispiel die Viskosität des Wassers, die Raumtemperatur und der Radius der Partikeln. Auf diesem Grund ist es keine Überraschung, dass beide Werte nicht signifikant von einander abweichen. Als zweites erkennen wir, dass die zweite Methode mit der Gerade einen wesentlich kleineren relativen Fehler besitzt, und dementsprechend eine größere  $\sigma$ -Abweichung. Aufgrund des größeren abgeschätzten Fehlers der ersten Methode ist auch der Vergleich zum Literaturwert (BIPM, 2019) innerhalb des akzeptablen Bereiches, aber der der zweiten Messung liegt in einem inakzeptablen 5,8  $\sigma$ -Bereich. Dies führt uns auf die Schlussfolgerung, dass der Fehler vielleicht zu gering abgeschätzt wurde. Wir erkennen, dass zu einem großen Teil der Fehler der Diffusionskonstante zum Gesamtfehler beigetragen hat, und im Falle der zweiten Methode wurde dieser durch die Kovarianz der Anpassung bestimmt, was allerdings in der Regel sehr klein abgeschätzt wird.

Die andere Auffälligkeit ist, dass beide Messwerte deutlich unter dem tatsächlichen Wert liegen. Obwohl dies keine signifikante Probe darstellt, ist es genug um Verdacht über einen systematischen Fehler zu denken. Insbesondere lässt sich über einen Fehler in der Temperaturmessung vermuten, denn beide Methoden diese noch insgesamt haben. Insbesondere ist hier ein kleiner Fehler sehr signifikant, denn für eine kleinere Temperatur (im Nenner) ist die Viskosität größer (im Zähler), also spielt der Einfluss eine doppelte Rolle.

Weitere Rollen können eine schlechte Bedichtung des Aufbaus sein oder Luftblasen innerhalb des Dings. Diese würden dann in die Verrückung eine Rolle ausgeübt haben, weshalb die Messung verfälscht sein könnte. Allerdings lässt sich an dieser Stelle keine signifikante Aussage darüber treffen, denn der Versuch sorgfältig durchgeführt wurde.

## 6 Quellen

Wagner, J., Universität Heidelberg (2021). Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik B.Sc..

---

BIPM. (2019). The International System of Units (9. Aufl.). BIPM.

# Versuch Messung der Boltzmann-Konstante Teil I

## Brownsche Bewegung

20. März 2022

## 7 Anhang

```
[1]: import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
%matplotlib inline
import numpy as np
from numpy import exp, sqrt, log, pi
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats import chi2

def fehler(name, G, sig_G, G_lit, sig_G_lit):
    print(name)
    print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)
    print('Rel. Fehler (Vergleich):', sig_G_lit / G_lit * 100)
    print('Absoluter Fehler: ', np.abs(G - G_lit))
    print('Sigma-Abweichung: ', np.abs(G - G_lit) / sqrt(sig_G ** 2
                                                    + sig_G_lit ** 2), '\n')

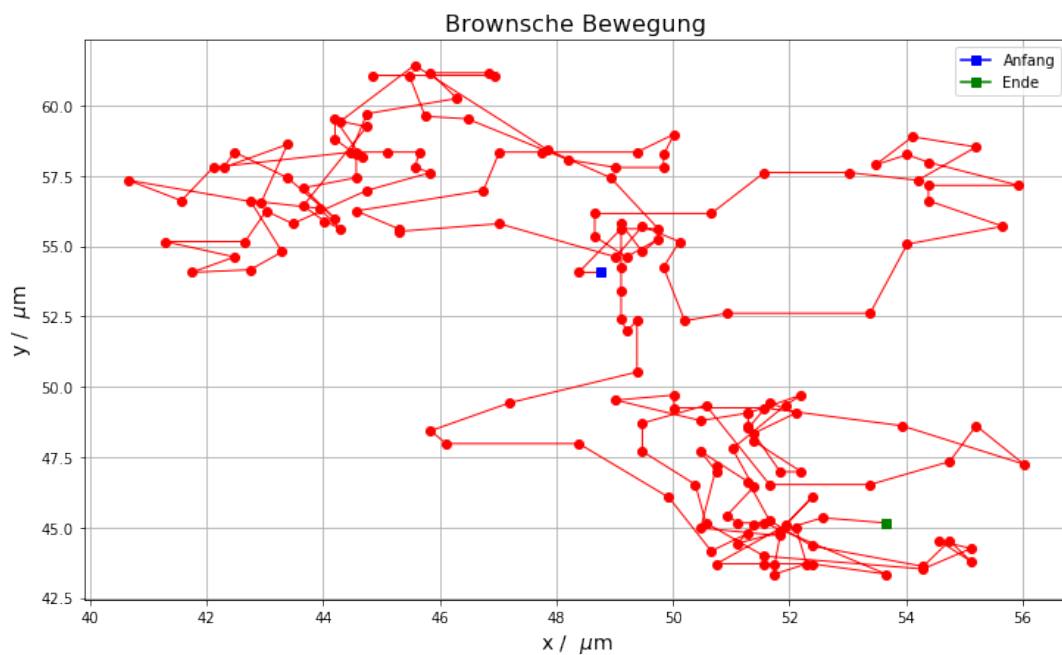
def fehler_small(name, G, sig_G):
    print(name)
    print('Relativer Fehler: ', sig_G / G * 100)
```

## VIII.1 Importieren und graphische Darstellung der Messdaten

```
[2]: # Komma auf Punkt
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))

[3]: # Importiere Daten
t, x, y = np.loadtxt('data/223/Messung.dat', skiprows = 1, usecols =
    (1,2,3),
                    converters = {1:comma_to_float, 2:comma_to_float,
                                3:comma_to_float}, unpack = True)
```

```
[4]: # Plot
plt.figure(figsize = (12,7))
plt.plot(x, y, marker = 'o', color = 'red', linewidth = 1)
plt.plot(x[0], y[0], marker = 's', color = 'blue', label = 'Anfang')
plt.plot(x[-1], y[-1], marker = 's', color = 'green', label = 'Ende')
plt.grid()
plt.xlabel('x / '+'  $\mu\text{m}$ ', size = 14)
plt.ylabel('y / '+'  $\mu\text{m}$ ', size = 14)
plt.title('Brownsche Bewegung', size = 16)
plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('images/223/V223Diagramm1.png', format='png')
```



## VIII.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

```
[5]: # Kleine Verschiebungen
dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
i=0

while i < len(t) - 1:
    dt = np.append(dt, t[i + 1] - t[i])
    dx = np.append(dx, x[i + 1] - x[i])
    dy = np.append(dy, y[i + 1] - y[i])
    i = i + 1
```

```

r_squared = dx ** 2 + dy ** 2

# Mittelwert und Fehler
r_squared_mean = np.mean(r_squared)
r_squared_mean_std = np.std(r_squared) / sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean =", np.round(r_squared_mean, 2), '+/-',
      np.round(r_squared_mean_std, 2), '[(10^-6 m)^2]')

dt_mean = np.mean(dt)
dt_mean_std = 1 / sqrt(len(dt)) * np.std(dt)
print("dt_mean =", np.round(dt_mean, 3), '+/-', np.round(dt_mean_std, 3),
      '↪ [s]')

```

```

r_squared_mean = 1.98 +/- 0.16 [(10^-6 m)^2]
dt_mean = 1.021 +/- 0.003 [s]

```

```

[6]: # Bestimmung der Diffusionskonstante und Boltzmann-Konstante
eta = 9.6 # 10^-4 Pa s
sig_eta = 0.1
a = 755 / 2 # 10^-9 m
sig_a = 30 / 2
T = 295 # K
sig_T = 0.1

D = r_squared_mean / (4 * dt_mean) # 10^-12 m^2 s^-1
sig_D = sqrt((r_squared_mean_std / (4 * dt_mean)) ** 2 +
              (r_squared_mean * dt_mean_std / (4 * dt_mean ** 2)) ** 2)
print('D =', np.round(D, 2), '+/-', np.round(sig_D, 2), '[10^-12 m^2_
      ↪ s^-1]')

k = 3 * pi * eta * a / (2 * T * dt_mean) * r_squared_mean # 10^-25 kg_
      ↪ m^2 s^-2 K^-1 = J K^-1
rho_k = sqrt((sig_eta / eta) ** 2 + (sig_a / a) ** 2
              + (sig_T / T) ** 2 + (dt_mean_std / dt_mean)_
      ↪ ** 2
              + (r_squared_mean_std / r_squared_mean) ** 2)
sig_k = k * rho_k
print('k =', np.round(k, 0), '+/-', np.round(sig_k, 0), '[10^-25 J_
      ↪ K^-1]')

```

```

D = 0.49 +/- 0.04 [10^-12 m^2 s^-1]
k = 112.0 +/- 10.0 [10^-25 J K^-1]

```

### VIII.3 Kontrollverteilung

```
[7]: all_data = np.append(dx,dy)
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.title('Histogramm der Messdaten', size = 14)
plt.xlabel('Verschiebung [ $\mu\text{m}$ ]', size = 14)
plt.ylabel('relative Häufigkeit', size = 16)
plt.grid(linestyle = 'dotted')
plt.hist(all_data, density = 1, bins = 13)

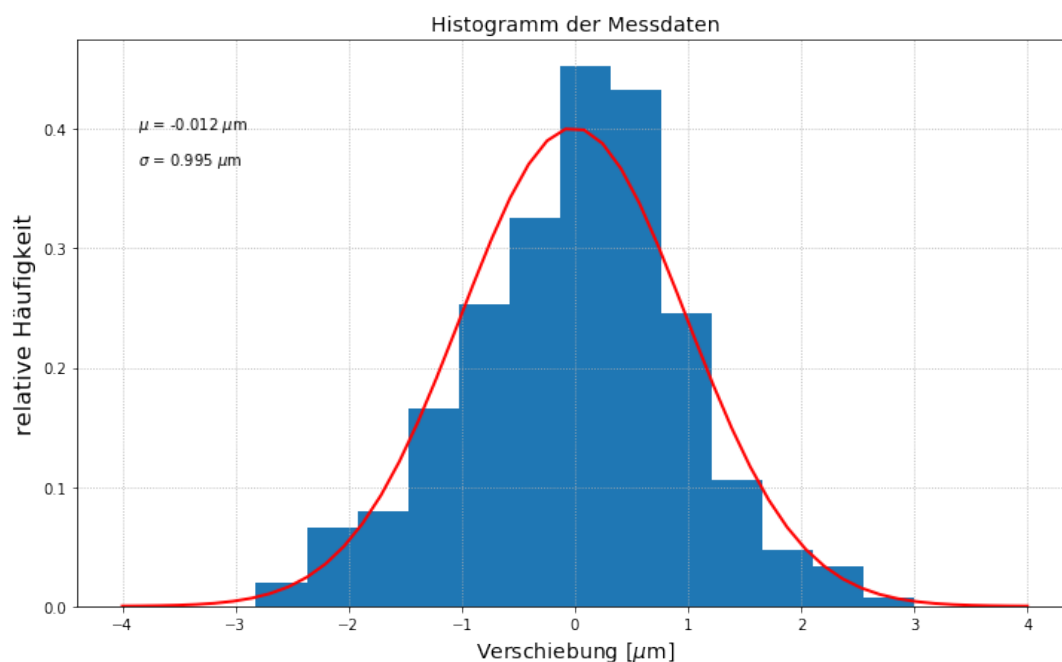
# Fit
mu = np.mean(all_data)
sigma = np.std(all_data)

def gaussian(x, mu, sigma):
    return 1 / (sqrt(2 * pi * sigma**2)) * exp(-(x - mu)**2 / (2 *
    sigma ** 2))

gauss = gaussian(np.linspace(-4, 4), mu, sigma)

plt.text(-3.9, 0.4, '  $\mu$  = ' + str(np.round(mu,3)) + '  $\mu\text{m}$ ')
plt.text(-3.9, 0.37, '  $\sigma$  = ' + str(np.round(sigma,3)) + '  $\mu\text{m}$ ')

plt.plot(np.linspace(-4, 4), gauss, 'r-', linewidth = 2)
plt.savefig('images/223/V223Diagramm2.png')
plt.show()
```



## VIII.4 Kummulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

```
[8]: # Zusammenhang
r_kumm = np.cumsum(r_squared)
plt.figure(figsize = (12, 7))
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker = '.', color = 'red', linewidth = 0,
         label = 'Messwerte')
plt.xlabel('Zeit [s]', size = 14)
plt.ylabel('Summe  $r_i^2$  [ $\mu m^2$ ]', size = 14)
plt.title('Diagramm 3: Kummulative Verschiebung', size = 16)

# Fit
def linear(x, m, b):
    return m * x + b

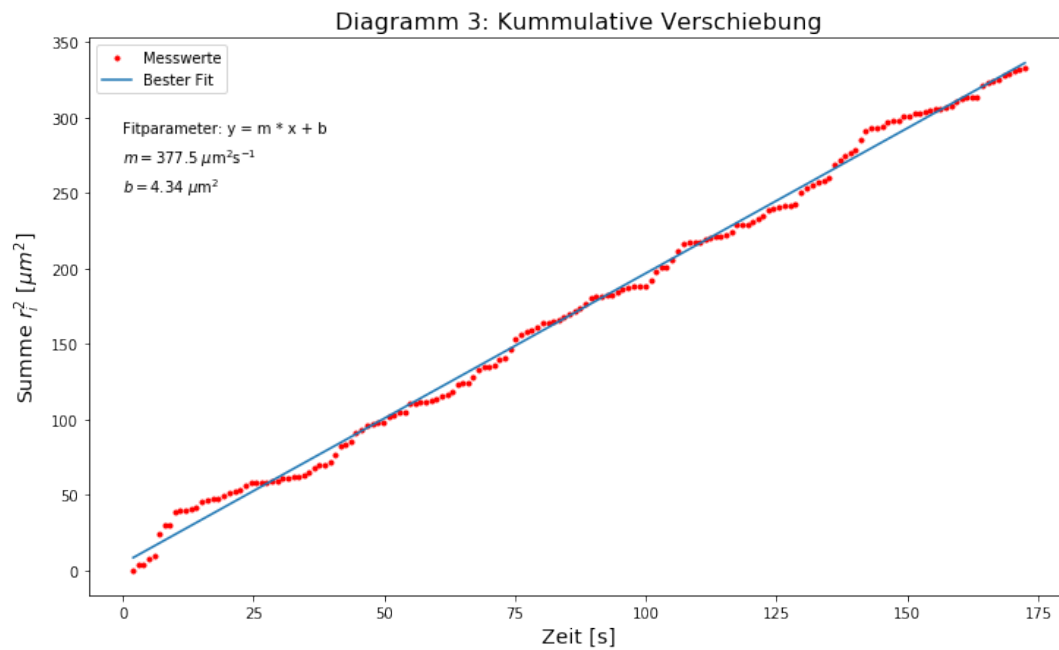
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)

plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1], *popt), label = 'Bester Fit')

m = popt[0]
sig_m = np.sqrt(pcov[0][0])
b = popt[1]
sig_b = np.sqrt(pcov[1][1])

plt.text(0, 290, 'Fitparameter:  $y = m * x + b$ ')
plt.text(0, 270, ' $m =$ ' + str(np.round(a, 2)) + '  $\mu m^2 s^{-1}$ ')
plt.text(0, 250, ' $b =$ ' + str(np.round(b, 2)) + '  $\mu m^2$ ')

plt.legend(loc = 'best')
plt.savefig('images/223/V223Diagramm3.png')
```



```
[9]: # Bestimmung von D und K
D_2 = m / 4 # 10^-12 m^2 s^-1
sig_D_2 = sig_m / 4 # 10^-12 m^2 s^-1
print('D_2 =', np.round(D_2,3), '+/-', np.round(sig_D_2,3),
      '[10^-12 m^2 s^-1]')

k_2 = 6 * pi * eta * a * D_2 / T
sig_k_2 = k_2 * sqrt((sig_T / T) ** 2 + (sig_eta / eta) ** 2 + (sig_a /
↪ a) ** 2
                    + (sig_D_2 / D_2) ** 2)
print('k_2 =', np.round(k_2,0), '+/-', np.round(sig_k_2,0),
      '[10^-25 J K^-1]')
```

D\_2 = 0.481 +/- 0.002 [10<sup>-12</sup> m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>]

k\_2 = 111.0 +/- 5.0 [10<sup>-25</sup> J K<sup>-1</sup>]

## Sigmas

```
[10]: # Literaturwert
k_lit = 138.0649 # 10^-25 J K^-1
```

```
[11]: fehler('D, D_2', D, sig_D, D_2, sig_D_2)
```

D, D\_2

Relativer Fehler: 8.2230953786244

Rel. Fehler (Vergleich): 0.45970643377478665

Absoluter Fehler: 0.004190046441558792

Sigma-Abweichung: 0.10489893858223297



```
[12]: fehler('k, k_2', k, sig_k, k_2, sig_k_2)
```

```
k, k_2  
Relativer Fehler: 9.192077966341088  
Rel. Fehler (Vergleich): 4.133561386818065  
Absoluter Fehler: 0.9702555434697047  
Sigma-Abweichung: 0.08584128441328072
```

```
[13]: fehler('k, k_lit', k, sig_k, k_lit, 0)
```

```
k, k_lit  
Relativer Fehler: 9.192077966341088  
Rel. Fehler (Vergleich): 0.0  
Absoluter Fehler: 25.756106856209087  
Sigma-Abweichung: 2.494897790911734
```

```
[14]: fehler('k_2, k_lit', k_2, sig_k_2, k_lit, 0)
```

```
k_2, k_lit  
Relativer Fehler: 4.133561386818065  
Rel. Fehler (Vergleich): 0.0  
Absoluter Fehler: 26.72636239967879  
Sigma-Abweichung: 5.807242324791667
```