8. Übungsblatt zu Analysis I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

8.1 Aufgabe 1: Peer Feedback

Beweis folgt aus der Definition:

Siehe Rückseite.

8.2 Aufgabe 2: Häufungspunkte

a) $a_n := \frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3}$

Wir teilen a_n in die Teilfongen:

- a_j mit $j = 4n$
- a_k mit $k = 4n + 1$
- a_l mit $l = 4n + 2$
- a_m mit $m = 4m + 3$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{(-1)^{4n}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{4n(4n+1)}{2}}}{3} && |(-1)^{\frac{4n(4n+1)}{2}} = 1 \qquad (1)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} && \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-1)^{4n+1}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4n+1)(4n+2)}{2}}}{3} && |(-1)^{\frac{(4n+1)(4n+2)}{2}} = -1 \qquad (3)\\ &= \frac{-1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-5}{6} && \qquad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{(-1)^{4n+2}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4n+2)(4n+3)}{2}}}{3} && |(-1)^{\frac{(4n+2)(4n+3)}{2}} = -1 \qquad (5)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} && \qquad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(-1)^{4n+3}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4n+3)(4n+4)}{2}}}{3} && |(-1)^{\frac{(4n+3)(4n+4)}{2}} = 1 \qquad (7)\\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{6} && \qquad (8) \end{aligned}$$

b) $b_n := \begin{cases} (-1)^n - \frac{1}{n}, & n \text{ durch 3 teilbar} \\ 2, & n \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{cases}$

2 ist ein Häufungspunkt, ist klar.

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \tag{9}$$
$$\lim_{n\to\infty} -1 - \frac{1}{n} = -1 \tag{10}$$
$$\Rightarrow 1, -1 \text{ und 2 sind Häufungspunkte von } b_n \tag{11}$$
$$\Rightarrow \limsup b_n = 2, \liminf b_n = -1 \tag{12}$$

c) $c_n := \frac{1+n+(-1)^n n}{3n+4}$

Wir teilen die Folge c_n in zwei Teilfolgen:

- (c_k) mit $k = 2n$
- (c_l) mit $k = 2n+1$

$$c_k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3n+4} \tag{13}$$
$$= 0 \tag{14}$$

$$c_l = \lim_{x\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} \tag{15}$$
$$= \frac{2}{3} \tag{16}$$

d) $d_n := max \left\{ m \in N \,\middle|\, \frac{n}{2^m} \in N \right\}$

$$\forall n \in N, \exists m \in N_0 : 2^m = n \tag{17}$$
$$\Rightarrow d_n \text{ hat keine Häufungspunkte} \tag{18}$$
$$\Rightarrow \nexists \limsup d_n, \liminf d_n \tag{19}$$

8.3 Aufgabe 3: Stetige Funktionen

a) $zz : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : |x| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(0)| < \varepsilon$

Beweis:

$$\forall \varepsilon, \forall x \in R : |x| < \frac{\varepsilon}{|h(x)|} \Rightarrow |x \cdot h(x)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : |x| < \delta \Rightarrow |x \cdot h(x)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : |x| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(0)| < \varepsilon$$

b)

$$
\begin{aligned}
&f : R \to R\\
&f(x) := \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}\\
&|f(x)| = 1 \Rightarrow |f(x)| \text{ ist stetig}\\
&\forall \delta > 0, \exists x \in R : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| = 1\\
\Rightarrow &f(x) \text{ ist überall unstetig}
\end{aligned}
$$

8.4 Aufgabe 4: Stetige Funktionen II

a) Widerlegen durch Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&f : R \to R\\
&f(x) := \begin{cases} x, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}
\end{aligned}
$$

Stetigkeit bei $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \forall x \in R : |x| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\\
\Rightarrow &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Unstetigkeit bei $x_0 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
&\text{Sei } x_0 > 0\\
\Rightarrow &\forall \delta > 0, \exists x \in R : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| > \frac{\delta}{2}\\
\Rightarrow &\exists \varepsilon, \forall \delta > 0, \exists x \in R : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon
\end{aligned}
$$

b)