

3. Übungsblatt zu Experimentalphysik II (SS 21)

Name(n): Leo Knapp, Marius Pfeiffer, Juan Provencio

Gruppe: K

Punkte: ____/____/____/____ Σ ____

3.1 Aufgabe 1

$$E = F/q, \quad \sigma = Q/A = dQ/dA$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{b^2}$$

$$F = \int_A dA \, \sigma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b^2}$$

Da wir eine unendliche Platte betrachten, genügt es aus Symmetriegründen die Kraft entlang der Senkrechten zwischen Platte und Probeladung zu betrachten. Das liegt daran, dass jeder Ladung auf der unendlichen Platte eine andere Ladung zugeordnet werden kann, sodass die Kraft bis auf die zur Platte orthogonale Komponente aufgehoben wird. Ferner kann das Flächenelement $\int_A dA$ umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} r \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cos \alpha \, d\rho & | \, k &:= \frac{\sigma q}{4\pi\epsilon_0} \\ F &= k \int_0^\infty \frac{r}{b^2} \cos \alpha \, dr \int_0^{2\pi} d\rho \\ &= k' \int_0^\infty \frac{r}{b^2} \cos \alpha \, dr & | \, k' &= \frac{\sigma q}{2\epsilon_0} \\ s &= k' \int_0^\infty r \frac{\cos(\alpha)^3}{a^2} \, dr & | \, \text{Nutze } b &= \frac{a}{\cos(\alpha)} \\ &= k' \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \tan(\alpha) \frac{\cos(\alpha)^3}{a^2} \frac{a}{\cos(\alpha)^2} \, d\alpha & | \, \text{Substitution } r &= a \tan \alpha \\ &= k' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \tan \alpha \, d\alpha \\ &= k' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \\ &= k' \\ &= \frac{\sigma q}{2\epsilon_0} \\ E &= F/q = \frac{\frac{\sigma q}{2\epsilon_0}}{q} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

3.2 Aufgabe 2

- a) Die Kraft *am* Schwerpunkt kann man als Linearkombination der Kräfte an beiden Ladungen betrachten.

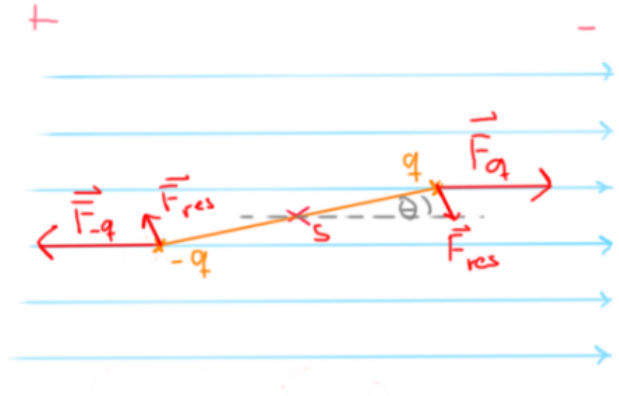


Abbildung 1: Kräfte am Dipol

$$\begin{aligned}\sum F &= F_q + F_{-q} & | F_q &= qE; F_{-q} = -qE \\ &= qE - qE \\ &= 0\end{aligned}$$

Dadurch, dass am Schwerpunkt die Gesamtkraft gleich null ist, so bewegt sich dieser von seiner ursprünglichen Lage nicht.

Der Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts ist ebenfalls die Summe des Drehmomentes, der an beide Ladungen wirkt:

$$\begin{aligned}\sum M &= M_q + M_{-q} \\ &= F_q r_q + F_{-q} r_{-q} \\ &= qEa \sin \theta - qE(-a) \sin \theta \\ &= 2qaE \sin \theta\end{aligned}$$

- b) Wir können die Vibration des Dipols um einen kleinen Winkel θ mit einem harmonischen Oszillator annähern, dabei ist:

$$\begin{aligned}ma\ddot{\theta} &= -F \sin \theta & | F &= qE \\ ma\ddot{\theta} &= -qE \sin \theta & | \sin \theta &\approx \theta \\ ma\ddot{\theta} &= -qE\theta & | \theta &= A \cos(\omega t + \phi) \\ -ma\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) &= -qEA \cos(\omega t + \phi) \\ ma\omega^2 &= qE\end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{qE}{ma}} \quad | [\omega] = \sqrt{\frac{\text{C} \frac{\text{N}}{\text{C}}}{\text{kg m}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m}}} = \text{s}^{-1}$$

c) Nun sei das Elektrische Feld nicht mehr homogen, sondern sei es beschrieben durch:

$$E_x = \frac{dE}{dx}x$$

Wenn das Dipol parallel zu den Feldlinien wäre, dann gäbe es eine betragsmäßig gleich große Kraft, die ein Teilchen anzieht und das andere wegschiebt, also würde sich der Schwerpunkt nicht bewegen:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_q + F_{-q} \\ &= q \frac{dE}{dx}x_0 - q \frac{dE}{dx}x_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Parallel zum elektrischen Feld gäbe es insgesamt eine Kraft, die das Dipol in positive x -Richtung, denn eine kleinere Kraft das negative Teilchen anzieht als das positive Teilchen wegschiebt:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_q + F_{-q} \\ &= q \frac{dE}{dx}(x_0 + a) - q \frac{dE}{dx}(x_0 - a) \\ &= q \frac{dE}{dx}(x_0 + a - x_0 + a) \\ &= 2qa \frac{dE}{dx}\end{aligned}$$

Antiparallel zum elektrischen Feld ist die Situation genau andersrum, da gibt es eine Kraft die insgesamt in negative x -Richtung zeigt:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_q + F_{-q} \\ &= q \frac{dE}{dx}(x_0 - a) - q \frac{dE}{dx}(x_0 + a) \\ &= q \frac{dE}{dx}(x_0 - a - x_0 - a) \\ &= -2qa \frac{dE}{dx}\end{aligned}$$

3.3 Aufgabe 3

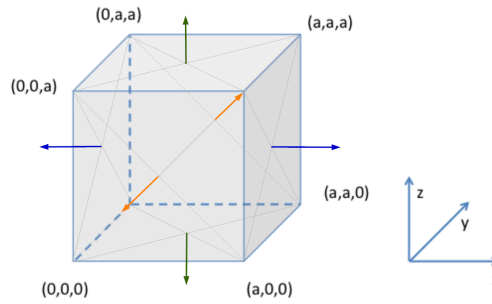


Abbildung 2: Würfel

a) i. Orange, x-z-Ebene

$$\begin{aligned}
 I_{x0z} &= \int_0^a \int_0^a dx dz (-F_y(x, 0, z)) \\
 I_{xaz} &= \int_0^a \int_0^a dx dz (F_y(x, a, z)) \\
 \Rightarrow I_{xz} &= \int_0^a \int_0^a dx dz (F_y(x, a, z) - F_y(x, 0, z))
 \end{aligned}$$

ii. Blau, y-z-Ebene

$$\begin{aligned}
 I_{0yz} &= \int_0^a \int_0^a dy dz (-F_x(0, y, z)) \\
 I_{ayz} &= \int_0^a \int_0^a dy dz (F_x(a, y, z)) \\
 \Rightarrow I_{yz} &= \int_0^a \int_0^a dy dz (F_x(a, y, z) - F_x(0, y, z))
 \end{aligned}$$

iii. Orange, x-y-Ebene

$$\begin{aligned}
 I_{xy0} &= \int_0^a \int_0^a dx dy (-F_z(x, y, 0)) \\
 I_{xya} &= \int_0^a \int_0^a dx dy (F_z(x, y, a)) \\
 \Rightarrow I_{xy} &= \int_0^a \int_0^a dx dy (F_z(x, y, a) - F_z(x, y, 0))
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Integral für alle Seitenflächen:

$$\begin{aligned}
 I &= I_{xz} + I_{yz} + I_{xy} \\
 &= \int_0^a \int_0^a dx dz (F_y(x, a, z) - F_y(x, 0, z)) \\
 &\quad + \int_0^a \int_0^a dy dz (F_x(a, y, z) - F_x(0, y, z)) \\
 &\quad + \int_0^a \int_0^a dx dy (F_z(x, y, a) - F_z(x, y, 0))
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I &= I_{xz} + I_{yz} + I_{xy} \\ &= \int_0^a \int_0^a dx dz (F_y(x, a, z) - F_y(x, 0, z)) \\ &\quad + \int_0^a \int_0^a dy dz (F_x(a, y, z) - F_x(0, y, z)) \\ &\quad + \int_0^a \int_0^a dx dy (F_z(x, y, a) - F_z(x, y, 0)) \end{aligned}$$

Einsetzen wie angegeben.

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \int_0^a dx dz \int_0^a \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \\ &\quad + \int_0^a \int_0^a dy dz \int_0^a \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \\ &\quad + \int_0^a \int_0^a dx dy \int_0^a \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Gleiche Integrationsgrenzen und Variablen \rightarrow Zusammenfassen

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx dy dz \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\ &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx dy dz (\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ &= \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{F}) \end{aligned}$$

c) Berechnung von Divergenzen

i. $F = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Das ist charakteristisch für ein Radialfeld, das heißt, dass die Kraftlinien sich geradlinig vom Zentrum entfernen. Das Feld hat nur eine "Quelle" am Koordinatenursprung.

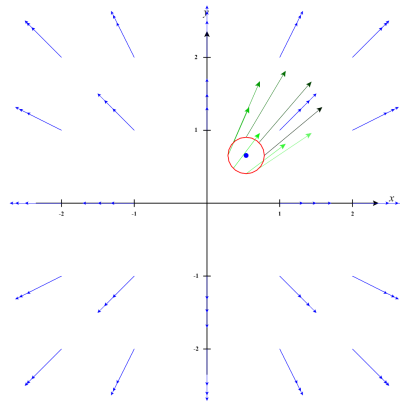


Abbildung 3: Radialfeld mit Divergenz an einem Punkt

ii. $F = (-y, x, 0)$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein Zirkularfeld, die Kraftlinien gehen entlang einer "Kreisbahn" um das Zentrum herum. Das Feld ist "quellenfrei".

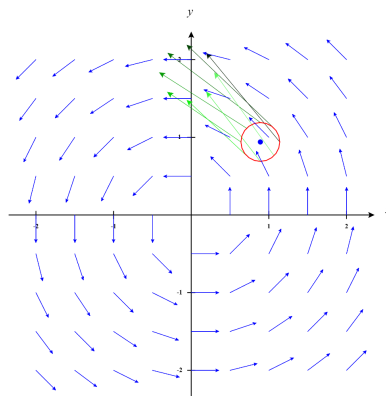


Abbildung 4: Zirkularfeld mit Divergenz an einem Punkt

iii. $F = (x, x^2y, 5)$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(5) \\ &= 1 + x^2 + 0 \\ &= 1 + x^2\end{aligned}$$

Die Divergenz ist abhängig von der x -Koordinate, d.h. die Vektoren des Feldes streben in unterschiedlichen Punkten unterschiedlich stark auseinander.

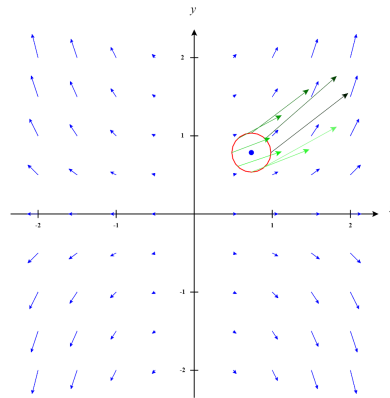


Abbildung 5: Feld (iii) mit Divergenz an einem Punkt

In der 3-Dimensionalen Ansicht erkennt man auch, dass alle Vektoren einer y - z -Ebene sehr ähnlich gerichtet sind und sich deren Neigung (nur) in zunehmender und abnehmender x -Richtung ändert.

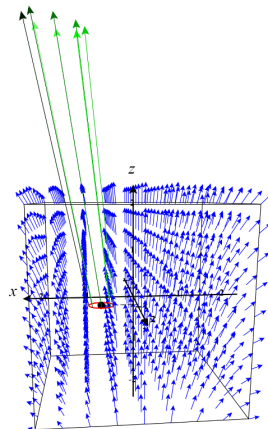


Abbildung 6: Feld (iii) mit Divergenz an einem Punkt