8. Übungsblatt zur Linearen Algebra (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___ Σ___

8.1 Aufgabe 1: Visualisierung zur Wiederholung

LA Wörterbuch[1]:

abelsch	Eigenschaft einer Gruppe bei welcher das kommutative Gesetz gilt $a * b = b * a$
assoziativ	Eigenschaft binärer Operationen, die Klammern um einen Ausdruck zu bewegen, ohne das Ergebnis zu verändern $a * (b * c) = (a * b) * c$
Basis	Teilmenge eines Vektorraums, mit wessen Elementen man jedes Element des Vektorraums durch eine Linearkombination bilden kann.
Bild	Teilmenge der Werte die von einer Abbildung in der Zielmenge getroffen werden.
Erzeugendensystem	Teilmenge eines Vektorraums, dessen Lineare Hülle der Vektorraum selbst ist
Gruppe	Paar aus einer Menge und einer Verknüpfung $(G, *)$, dass folgende Bedingungen erfüllt: Assoziativität: $\forall g, h, i \in G : g * (h * i) = (g * h) * i$ Rechtsneutrales Element: $\exists e \in G \; \forall g \in G : g * e = g$ Rechtsinverses Element: $\forall g \in G \; \exists g' \in G : g * g' = e$
Homomorphismus	Zwei Gruppen $(G, *_G), (H, *_H)$ sind homomorph wenn für eine Abbildung $f : G \to H$ gilt: $f(x *_G y) = f(x) *_H f(y)$ Zwei Körper sind homomorph, wenn die oben genannte Bedingung für beide Verknüpfungen gilt
injektiv	Eigenschaft einer Abbildung $f : M \to N$ bei welcher jedes Element der Zielmenge *höchstens* von einem Element der Urbildmenge getroffen wird.
inverses Element	Jedes Element einer Gruppe, Körper, Vektorraum besitzt ein inverses Element, sodass die Verknüpfung der beiden das neutrale Element ergibt.
Isomorphimus	Besondere Art von Homomorphismus, bei welchem die Abbildung bijektiv ist.
Kern	Menge einer Gruppe welches Urbild das neutrale Element ergibt.
Körper	Tripel aus einer Menge und zwei Verknüpfungen $(K, +, *)$, dass folgende Bedingung erfüllt: abelsch: $(K, +)$ und $(K \backslash \{0\}, *)$ sind abelsche Gruppen. distributiv: $\forall x, y, z \in K$: $(x + y) * z = x * z + y * z$ $z * (x + y) = z * x + z * y$

[1] Juan Provencio

linear unabhängig	Zwei Vektoren sind linear unabhängig von einander, falls sie nicht durch eine Linearkombination des anderen erzeugt sein können. Ein Vektor v ist linear unabhängig von einer Menge von Vektoren S, falls es nicht von einer Linearkombination dieser Menge erzeugt sein kann. $v \notin \mathcal{L}(S)$ Eine Teilmenge S ist linear unabhängig, falls alle Vektoren $v \in S$ linear unabhängig von $S \backslash \{0\}$ sind.
neutrales Element	Element einer Gruppe, welcher verknüpft mit einem zweiten Element derselben Gruppe das zweite Element wieder ergibt.
Permutation	Aneinanderreihung der Elementen in einer Menge bzw. Veränderung der Reihenfolge der angeordneten Elementen.
Untergruppe	Nichtleere Teilmenge H einer Gruppe $(G, *)$, dass folgende Bedingung erfüllt: $\forall a, b \in H : a * b^{-1} \in H$
Untervektorraum	Nichtleere Teilmenge W eines Vektorraums, dass folgende Bedingungen erfüllt: Abgeschlossenheit der Addition: $v, w \in W \implies v + w \in W$ Abgeschlossenheit der Multiplikation: $v, w \in W \implies v * w \in W$
Ring	Tripel aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen $(K, +, *)$, dass folgende Bedingungen erfüllt: $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe Distributivität Assoziativität der Multiplikation
surjektiv	Eigenschaft einer Abbildung $f : M \to N$, bei welcher jedem Element der Urbildmenge *mindestens* ein Element der Zielmenge zugeordnet werden kann.
symm. Gruppe	Gruppe aller Permutationen einer n-elementigen Menge
Vektorraum	Ein Vektorraum V über einem Körper K ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Verknüpfung $*$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind: $\forall k, l \in K, v \in V : k * (l * v) = (kl) * v$ $\forall v \in V : 1 * v = v$ $\forall k, l \in K, v, w \in V :$ $(k + l) * v = k * v + l * v$ $k * (v + w) = k * v + k * w$

8.2 Aufgabe 2: Beispiel einer Matrixdarstellung

Geg.:

- $x = (1, 2)$
- $f(x) = (7, 0)$
- $y = (-2, 2)$
- $f(y) = (4, -6)$

Ges.: A sodass $Ax = f(x)$ und $Ay = f(y)$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad | a_{11} = 7 - 2a_{12} \tag{2}$$

$$a_{21} = -2a_{22} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
Ay &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} && \text{(4)} \\
&= \begin{bmatrix} -2a_{11} + 2a_{12} \\ -2a_{21} + 2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} && \text{(5)} \\
&= \begin{bmatrix} -2(7 - 2a_{12}) + 2a_{12} \\ -2(-2a_{22}) + 2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} & |a_{12} = 3 & \text{(6)} \\
& & a_{22} = -1 & \text{(7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} && \text{(8)} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + 2 \cdot 3 \\ a_{21} - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} & |a_{11} = 1 & \text{(9)} \\
& & a_{21} = 2 & \text{(10)}
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

8.3 Aufgabe 3: Nilpotente Endomorphismen und untere Dreiecksmatrizen

a)

$$\begin{aligned}
0 =& a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(v) \\
=& f^{n-1}(a_0 v + a_1 f(v) \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(v)) & |f(0) = 0 \\
=& a_0 f^{n-1}(v) + a_1 f^n(v) \ldots + a_{n-1} f^{2n-2}(v) \\
=& a_0 f^{n-1}(v) & | \Rightarrow a_0 = 0 \\
=& a_1 f(v) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(v) \\
\Rightarrow& \forall i \in \mathbb{N}, i < n : a_i = 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & & \ldots & & 0 \\ a_{11} & . & & & \\ . & & 0 & & \\ . & & & . & \\ a_{1n} & & \ldots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}^n = 0$$

8.4 Aufgabe 4: Matrixdarstellung und Verknüpfung

a) Geg.:

- f mit

  $f((1,0,0)) = (2,1,3)$

  $f((0,1,0)) = (1,0,1)$

  $f((0,0,1)) = (0,2,1)$

- g mit

  $g((1,0,0)) = (4,7,6)$

  $g((0,1,0)) = (0,0,3)$

  $g((0,0,1)) = (1,2,3)$

  Als Basis wählen wir

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{12}$$

  Somit ist die Darstellung

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

  und

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

b) Sei

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = A$
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = C$
- $f(b_j) = \sum_{a=1}^{3} a_{ai} b_a$
- $g(bj) = \sum_{i=1}^{3} c_{ij} d_i$

Dann ist:

$$(f \circ g)(b_j) = f\left(\sum_{i=1}^{3} c_{ij} d_i \right) \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} c_{ij} f(d_i) && (16)\\
&= \sum_{i=1}^{3} c_{ij} \sum_{a=1}^{3} a_{ai} b_a && (17)\\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} c_{ij} a_{ai} b_a && (18)\\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{a=1}^{3} a_{ai} c_{ij} b_a && (19)\\
&= \sum_{a=1}^{3} (A \cdot C)_{aj} b_a && (20)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f \circ g) = A \cdot C && (21)
\end{aligned}
$$

$$
Mat_{BB}(f) \cdot Mat_{BB}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 16 & 6 & 7 \\ 25 & 3 & 8 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) =& (2x + y, x + 2z, 3x + y + z)\\
g(x,y,z) =& (4x + z, 7x + 2z, 6x + 3y + 3z)\\
(f \circ g)(x,y,z) =& (2(4x + z) + (7x + 2z), (4x + z) + 2(6x + 3y + 3z), 3(4x + z) + (7x + 2z)\\
&+ (6x + 3y + 3z))\\
=& (8x + 2z + 7x + 2z, 4x + z + 12x + 6y + 6z, 12x + 3z + 7x + 2z + 6x + 3y + 3z)\\
=& (15x + 4z, 16x + 6y + 7z, 25x + 3y + 8z)\\
Mat_{BB}(f \circ g) =& \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 16 & 6 & 7 \\ 25 & 3 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$