5. Übungsblatt zu Linearer Algebra I (WS 20/21)

Name(n): Joshua Detrois, Leo Knapp, Juan Provencio

Gruppe: F

Punkte: ___/___/___/___ Σ___

5.1 Aufgabe 1: Quiz im Mampf

Code Joshua Detrois: nkCCz8

Code Leo Knapp: nV7Kcm

Code: Juan Provencio: 4hNF7Y

5.2 Aufgabe 2: Basen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{F}_3^3$

a) Geg.:

- $e_1 = (1, 1, 1)$
- $e_2 = (1, 0, 2)$
- $e_3 = (1, 2, 3)$
- $S = \{e_1, e_2, e_3\}$

Z.z.: S ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$

Alle Elemente der Standardbasis von R lassen sich als Linearkombination von e_1, e_2 und e_3 darstellen.

$$
\begin{aligned}
(1,0,0) &= \frac{1}{3}(4e_1 + e_2 - 2e_3) \\
(0,1,0) &= \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\
(0,0,1) &= \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \\
&\Rightarrow e_1, e_2, e_3 \text{ bilden ein Erzeugendensystem von } R^3
\end{aligned}
$$

Die Menge $\{e_1, e_2, e_3\}$ hat die gleiche Anzahl an Elementen wie die Standardbasis und ist ein Erzeugendensystem von $R^3 \Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ ist Basis von R^3

b) Geg.:

- $x = (6, 7, 14)$

$$(6, 7, 14) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

c) Geg.:

- $f_1 = ([1], [1], [1])$
- $f_2 = ([1], [0], [2])$

- $f_3 = ([1], [2], [3]) = ([1], [2], [0])$
- $S = \{f_1, f_2, f_3\}$

(a) S ist linear unabhängig

$$\sum_{i=1}^{3} k_i f_i = 0 \implies k_i = 0$$

Beweis durch Gegenbeispiel:

für $k_1 = -2, k_2 = 1, k_3 = 1$

$-2([1], [1], [1]) + ([1], [0], [2]) + ([1], [2], [0]) = 0$

und nicht alle $k_i = 0$. Dies führt zu einem Widerspruch, also ist S linear abhängig und kann kein Erzeugendensystem in $\mathbb{F}_3^3$ bilden.

5.3 Aufgabe 3: Beispiel im $\mathbb{R}^4$

Geg.:

- $\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \subseteq \mathbb{R}^4$
- $a_1 = (1, 0, 0, -1)$
- $a_2 = (2, 1, 1, 0)$
- $a_3 = (1, 1, 1, 1)$
- $a_4 = (1, 2, 3, 4)$
- $a_5 = (0, 1, 2, 3)$

Ges.: Basis von $\mathcal{L}$

a) Basis ist linear unabhängig:

Nach Lemma 6.12 muss also eine nicht triviale lineare Kombination der Elementen in der Basis geben, so dass

$$\sum_{i=1}^{5} k_i a_i = 0$$

Wir können einfach zeigen:

$a_1 = a_3 - a_2$ und

$a_5 = a_4 - a_3$

Die übrigen Vektoren sind linear unabhängig.

b) Basis ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{L}$:

Wie eben gezeigt, wir können alle Elemente der linearen Hülle mit den übrigen linearen unabhängigen Vektoren bilden, also ist

$S = \{a_2, a_3, a_4\}$ eine Basis von $\mathcal{L}$ deren Dimension 3 ist

5.4 Aufgabe 4: Dimension von Abb(X,K)

$$\text{Sei } f_i : X \to K$$
$$f_i(x) = \begin{cases} 1_K & x = x_i \\ 0_K & x \neq x_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{Alle } f \in \text{Abb}(X,K) \text{ lassen sich darstellen als}$$
$$\sum_{i=1}^{n} k_i f_i$$
$$\Rightarrow B := \{f \in \text{Abb}(X,K) | \exists! x \in X : f(x) \neq 0 \wedge \exists! x \in X : f(x) = 1_K\}$$
$$\text{ist Erzeugendensystem von Abb}(X,K)$$
$$f \in \text{ B } = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \text{ Aus der Definition von B folgt direkt } \exists! k_i \neq 0_K$$
$$\Rightarrow B \text{ ist linear unabhängig}$$

Aus der Definition erkennt man, dass X genauso viele Elemente wie B enthält.