Zusammenfassung Analysis I

Mathe

Analysis I

WS 20/21, Albers

Juan

4. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Inhalt

1.1 Grundlagen

- M, N, K sind Mengen.
- f ist eine Abbildung.

  $f : M \to N$
- A, B sind Aussagen.
- (a_n) ist eine Folge $((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$
- I ist ein Intervall

1.1.1 Abbildungen

Injektivität

$$\forall x, x' \in M: \; x \neq x' \implies f(x) \neq f(x') \tag{1.1}$$

oder äquivalent

$$\forall x, x' \in M: \; f(x) = f(x') \implies x = x' \tag{1.2}$$

Jeder Wert in M hat höchstens einen Funktionswert.

Surjektivität

$$\forall y \in N, \; \exists x \in M: \implies y = f(x) \tag{1.3}$$

Jeder Wert der Zielmenge wird von mindestens einem Element der Ursprungsmenge getroffen.

Bijektivität

$$f \text{ ist surjektiv und injektiv} \tag{1.4}$$

Jedes Element der Ursprungsmenge trifft genau ein Element der Zielmenge.

Inverse Abbildung

Eine Abbildung f besitzt eine inverse Abbildung genau dann, wenn sie bijektiv ist.

$$\forall x \in M: \; g(f(x)) = x \tag{1.5}$$
$$\forall y \in N: \; f(g(y)) = y \tag{1.6}$$

1.1.2 Vollständige Induktion

$$A(n) \implies A(n+1) \tag{1.7}$$

1.1.3 Formeln

Binomialtheorem

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{1.8}$$

1.2 Reelle Zahlen

1.2.1 Körper

Ein Körper besteht aus einer Menge K und zwei Abbildungen $+$ und $\cdot$, das folgende Axiome erfüllt:

1. Addition
   (a) Assoziativität
   $$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1.9}$$
   (b) Neutrales Element
   $$\exists 0 \in K: \; a + 0 = 0 + a = a \tag{1.10}$$
   (c) inverses Element
   $$\forall a \in K \; \exists a' \in K: \; a + a' = 0 \tag{1.11}$$
   (d) Kommutativität
   $$a + b = b + a \tag{1.12}$$
2. Multiplikation
   (a) Assoziativität
   $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{1.13}$$

(b) Neutrales Element

$$\exists 1 \in K^* := K \setminus \{0\} : \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{1.14}$$

(c) Inverses Element

$$\forall a \in K^* \; \exists a' \in K^* : \; aa' = a'a = 1 \tag{1.15}$$

(d) Kommutativität

$$ab = ba \tag{1.16}$$

3. Distributivität

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1.17}$$

1.2.2 Dedekind Vollständigkeit

Beschränktheit

Eine Menge heißt nach oben beschränkt, falls

$$\exists S \in K \; \forall x \in M : \; x \leq S \tag{1.18}$$

Eine Menge heißt nach unten beschränkt, falls

$$\exists s \in K \; \forall x \in M : \; x \geq s \tag{1.19}$$

Eine Menge heißt beschränkt, falls

$$\exists T \in K \; \forall x \in M : |x| \leq T \tag{1.20}$$

Maximum und Minimum

Ein Maximum ist der größte Wert, der noch in der Menge enthalten ist.

Analog für ein Minimum.

Supremum und Infimum

Ein Supremum ist die kleinste obere Schranke, liegt nicht unbedingt in der Menge. Suprema sind eindeutig bestimmt.

Analog für ein Infimum.

Dedekind Vollständigkeit

Ein Körper heißt dedekind vollständig, falls jede nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum im Körper besitzt.

Archimedes Prinzip

Für jede reelle Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > x \tag{1.21}$$

1.3 Folgen

1.3.1 Konvergenz und Grenzwert

Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\to \mathbb{C}$)

Konvergenz

Eine Folge heißt konvergent, falls es einen Wert a gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - a| < \varepsilon \tag{1.22}$$

Ab ein bestimmtes Folgenglied a_{n_0} geht der Abstand zwischen all den nachfolgenden Folgengliedern gegen 0. Der Wert a ist der Grenzwert oder Limes von (a_n)

1. Beweis 1: Grenzwert gegeben (oder klar)
   (a) Finde den Grenzwert

   Wenn der Grenzwert nicht explizit gegeben ist, kann man durch logisches Nachdenken an den Grenzwert kommen.

   Zum Beispiel kann man vermuten, der Grenzwert von

   $$(a_n) := \frac{n}{n+1} \approx \frac{n}{n} = 1 \tag{1.23}$$

   (b) Setze den Grenzwert ein

   Wenn man ihn gefunden hat, dann setzt man ihn in der Gleichung ein und formt um und hofft, dass etwas klarerweise konvergentes erscheint

   $$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon && (1.24)\\ \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &= \left|\frac{n}{n+1} - \frac{1}{1}\right| && (1.25)\\ &= \left|\frac{n-(n+1)}{-(n+1)}\right| && (1.26)\\ &= \left|\frac{1}{n+1}\right| && (1.27)\\ &= \frac{1}{n+1} < \varepsilon && (1.28) \end{aligned}$$

   (a_n) ist klarweise eine Nullfolge

2. Grenzwert gesucht:
   (a) Finde den Grenzwert:

   Klar, hier müssen wir aber nun ein bisschen kreativer sein. Vielleicht muss man den Grenzwert durch schicke Ausklammerung, Multiplikation mit 1, Addition von 0, Dreiecksungleichung usw. finden.

Trick mit Dreiecksungleichung:

Manchmal hilft es eine 0 zu addieren, damit wir unsere Ungleichung weiter bearbeiten können. Sei ein ε gegeben, dann können wir:

$$\begin{aligned}\varepsilon &< |a_n - a| \quad (1.29)\\ &= |a_n - b + b - a| \quad (1.30)\\ &\leq |a_n - b| + |b - a| \quad (1.31)\end{aligned}$$

Manchmal ist es hilfreich solche Umformungen zu machen, um die Konvergenz der Folge zu beweisen, der Trick liegt dann daran, das passende b zu finden. Wenn wir zeigen können, dass unsere ursprüngliche Folge kleiner/gleich eine konvergente Folge ist, so haben wir auch gezeigt, dass die ursprüngliche Folge konvergiert.

1.3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

(a_n) und (b_n) mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ müssen für das Folgende konvergente Folgen sein.

1. $$\lambda a_n = \lambda a \tag{1.32}$$

2. $$a_n + b_n = a + b \tag{1.33}$$

3. $$a_n b_n = ab \tag{1.34}$$

4. $$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b_n \neq 0) \tag{1.35}$$

1.3.3 Häufungspunkte, Cauchy-Folgen, Teilfolgen

Monotonie

Eine Folge heißt monoton wachsend, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} \geq a_n \tag{1.36}$$

Analog für monoton fallend.

Teilfolge

Sei (a_n) eine Folge und (n_k) eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt (a_{n_k}) eine Teilfonge von (a_n)

Häufungspunkte

Eine Folge (a_n) hat einen Häunfungspunkt a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ und für unendlich viele } n \in \mathbb{N}: \ |a_n - a| < \varepsilon \tag{1.37}$$

Falls (a_n) mehr als einen Häufungspunkt hat, dann ist sie divergent.

a ist genau dann ein Häufungspunkt von (a_n), falls es eine Teilfolge (a_{n_k}) gibt mit $(a_{n_k}) \to a$

Cauchy-Folge

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0: \ |a_m - a_n| < \varepsilon \tag{1.38}$$

Ab einem bestimmten Wert n_0 wird der Abstand zwischen Folgengliedern (nicht unbedingt nachfolgenden) beliebig klein.

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

1.3.4 Limes superior und Limes inferior

Für eine Folge (a_n) definieren wir die Menge aller Suprema der Teilfolgen (a_k) als

$$B_n := \sup\{a_k | \ k \geq n\} \tag{1.39}$$

Das heißt, wir nehmen eine Folge (a_n) und schneiden das erste Glied raus, dann fügen wir das Supremum dieser neuen Teilfolge zu der Menge B_n. Wir schneiden jetzt das neue erste Glied raus und machen so weiter.

Analog für die Menge aller Infimas b_n.

Die Folgen, die man aus diesen beiden Mengen machen kann sind wohldefiniert und es gilt:

1. (B_n) ist monoton fallend und beschränkt
2. (b_n) ist monoton wachsend und beschränkt
3. $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq B_n$
4. (B_n) und (b_n) sind konvergent

Limes superior und Limes inferior

Wir definieren den Limes Superior, als der Limes der Folge aller Suprema.

$$\limsup_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} B_n \tag{1.40}$$

Der Limes superior ist nicht unbedingt in der Menge enthalten.

Analog für den Limes inferior

$$\liminf_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{1.41}$$

Bestimmte Divergenz

Falls der Limes gegen ∞ geht, dann heißt die Folge bestimmt divergent (gegen $\pm\infty$).

$$\forall k \in K: \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: \ a_n \geq k \tag{1.42}$$

1.4 Stetige Funktionen und die Topologie des $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Stetigkeit

$\varepsilon - \delta -$Kriterium

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.43}$$

Falls zwei Werte x und x_0 sehr nah an einander sind, dann müssen die entsprechenden Funktionswerte $f(x)$ und $f(x_0)$ auch sehr nah an einander liegen.

Eine Funktion f heißt stetig in D, falls sie in jedem Punkt in D stetig ist.

Folgenkriterium

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $x^* \in D$, wenn für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) \tag{1.44}$$

oder auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{1.45}$$

Eine Funktion ist stetig, wenn man den Limes in die Funktion hineinziehen kann und die Werte übereinstimmen.

Rechenregeln für stetige Funktionen

Seien f, g stetig in $x^* \in D$, dann sind $f + g$, $f \cdot g$, $f - g$ und falls $g(x) \neq 0\ \forall x \in D$ auch $\dfrac{f}{g}$ stetig in x^*.

Ist f stetig in x^* und g stetig in $f(x^*)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x^*.

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion f heißt Lipschitz-stetig, falls es einen Wert L gibt, so dass

$$\exists L \geq 0 \; \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \tag{1.46}$$

$$\iff \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L \qquad x \neq y \tag{1.47}$$

Diese Aussage besagt, dass die Steigung beschränkt ist.

Jede stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz-stetig, und jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

1.4.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Ball

$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n | \; |x - a| \leq r\}$ ist der Ball um den Punkt a mit Radius r. Dazu gehören alle andere Punkte, die einen euklidischen Abstand kleiner oder gleich r zu a haben.

Randpunkte

Ein Punkt $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von M, falls

$$\forall r > 0 : \; B_r(p) \cap M \neq \emptyset \neq B_r(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \tag{1.48}$$

Der Schnitt des kleinstmöglichen Balls um p mit M darf nicht leer sein, und es darf auch nicht die ganze Menge $\mathbb{R}^n$ ohne M sein. In anderen Worten, der Ball darf weder komplett in der Menge enthalten sein, noch komplett außerhalb.

Die Menge aller Randpunkte ist

$$\partial M := \{\text{Randpunkte von } M\} \tag{1.49}$$

Offene Teilmengen

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls

$$M \cap \partial M = \emptyset \tag{1.50}$$

Der Rand und die Menge haben keine Punkte in gemeinsam.

Kriterium für Offenheit:

$$\forall p \in M \; \exists r > 0 : \; B_r(p) \subset M \tag{1.51}$$

Auch:

$$\forall p \in M \; \exists r > 0 : \; \mathring{B}_r(p) \subset M \tag{1.52}$$

Jede offene Menge ist eine Vereinigung offener Bälle

Abgeschlossene Teilmengen

Eine Teilmenge M heißt abgeschlossen, falls

$$\partial M \subset M \tag{1.53}$$

Der Rand ist in der Menge enthalten

Kriterium für Abgeschlossenheit:

Für alle konvergenten Folgen (a_n) in M ist auch $\lim a_n \in M$

Merksätze dazu

Es gilt:

1. $\partial M = \partial(\mathbb{R}^n \setminus M)$
2. M offen $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen

   M abgeschlossen $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen

Innen

Das Innen $\mathring{M}$ einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathring{M} = M \setminus \partial M$.

Abschluss

Der Abschluss $\overline{M}$ einer Menge M ist $\overline{M} = M \cup \partial M$

Merksätze dazu

Es gilt:

1. M offen $\iff$ $M = \mathring{M}$
2. M abgeschlossen $\iff$ $M = \overline{M}$

1.4.3 Kompaktheit und Existenz von Extrema

Beschränktheit

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls

$$\exists s > 0 : \; M \subset B_s(0) \tag{1.54}$$

Wenn die Menge M komplett in einem Ball ist, dann ist sie beschränkt.

Kompaktheit

Eine Menge M heißt kompakt, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Limes in M besitzt.

Eine Menge heißt kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Kompakte Mengen haben ein Minimum und ein Maximum.

Stetige Bilder von kompakten Mengen sind auch kompakt.

Existenz von Extrema

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum:

$$\exists x_{min}, x_{max}\ \forall x \in K:\ \min f := f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) =: \max f \tag{1.55}$$

1.4.4 Zusammenhang und Zwischenwertsatz

Zusammenhang

Eine Menge M heißt zusammenhängend, falls es keine offenen Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

1. Der Schnitt von M und U_1 darf nicht leer, aber auch nicht gleich dem Schnitt von M und U_2 sein
$$M \cap U_1 \neq \emptyset \neq M \cap U_2 \tag{1.56}$$

2. Die Menge M ist genau die Vereinigung zwischen dem Schnitt von M und U_1 und dem Schnitt von M und U_2.
$$M = (M \cap U_1) \cup (M \cap U_2) \tag{1.57}$$

3. Der Schnitt aus dem Schnitt von M und U_1 und dem Schnitt von M und U_2 ist leer.
$$(M \cap U_1) \cap (M \cap U_2) = \emptyset \tag{1.58}$$

Für alle nicht-leeren, disjunkten und offenen Mengen U_1, U_2 gilt:

$$M \subset U_1 \cup U_2 \implies M \subset U_1 \text{ oder } M \subset U_2 \tag{1.59}$$

Intervalle

M ist ein Intervall genau dann, wenn

$$\forall a, b \in M \text{ mit } a < b \text{ gilt } [a, b] \in M \tag{1.60}$$

M ist genau dann zusammenhängend, wenn es ein Intervall ist.

Relative Offen- und Abgeschlossenheit

Eine Menge $M \subset D$ heißt offen in D (relativ offen), falls es eine offene Menge $U \in \mathbb{R}^n$ mit

$$M = D \cap U \tag{1.61}$$

gibt.

Eine Menge M heißt abgeschlossen in D, falls es eine abgeschlossene Menge A mit

$$M = D \cap A \tag{1.62}$$

gibt.

M ist genau dann offen in D, wenn

$$\forall x \in M\ \exists r > 0:\ D \cap B_r(x) \subset M \tag{1.63}$$

Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn

$$\forall U \subset \mathbb{R} \text{ offen } : \; f^{-1}(U) \subset D \text{ offen in } D \tag{1.64}$$

Urbilder offener Mengen sind stetig.

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

$$f : M \to \mathbb{R} \text{ stetig }, D \subset M \text{ zusammenhängend } \implies f(D) \text{ zusammenhängend} \tag{1.65}$$

Zwischenwertsatz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Monotonie

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton steigend, falls

$$\forall x, y \in [a, b] : \; x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \tag{1.66}$$

$$x < y \implies f(x) < f(y) \tag{1.67}$$

Analog für monoton fallend.

Merksatz dazu

Eine stetige und streng monoton wachsende Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist bijektiv. f^{-1} ist dann ebenfalls streng monoton wachsend und bijektiv.

1.5 Differenzierbarkeit

1.5.1 Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D$. Für eine Funktion $g : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ schreiben wir $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \; |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - c| < \varepsilon \tag{1.68}$$

Mit Folgen:

$$\forall \text{ Folgen } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0 \text{ gilt } g(x_n) \to c \tag{1.69}$$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.70}$$

existiert.

Ableitung

Die Ableitung von f in x_0 ist

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \frac{d}{dx}f(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1.71}$$

f heißt differenzierbar auf I, falls f in jedem Punkt von I differenzierbar ist. $f' : I \to \mathbb{R}$ heißt Ableitung von f.

Beispiel: Sei $f(x) = |x|$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Ableitung nicht definiert:

1. Beweis 1: Folgen, die gegen x_0 von beiden Seiten konvergieren.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| - |0|}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \tag{1.72}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{\left|-\frac{1}{n}\right| - |0|}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \tag{1.73}$$

   Werte Stimmen nicht überein

2. Beweis 2: Links- und rechtsseitiger Limes

   Der Limes $\lim\limits_{x\to x_0}$ existiert genau dann, wenn $\lim\limits_{x\nearrow x_0}$ und $\lim\limits_{x\searrow x_0}$ existierenn und übereinstimmen

Differenzierbarkeit II

Eine Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\Delta : I \to \mathbb{R}$ gibt, die stetig in x_0 ist, und die

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x) \ \forall x \in I \tag{1.74}$$

erfüllt.

Dann ist $\Delta(x_0) = f'(x_0)$.

1.5.2 Differentiationsregeln

Produktregel

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.75}$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{1.76}$$

Kettenregel

$$f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \tag{1.77}$$

Umkehrfunktion

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1.78}$$

1.5.3 Mittelwertsatz und Existenz von Extrema

Stetige Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und $f' : I \to R$ stetig ist.

Menge der k-fachen differenzierbaren Funktionen

Sei f k-fach stetig differenzierbar, so sagen wir $f \in C^k$.

Lokale Extrema

Eine Funktion hat ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in x_0, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I : f(x) \leq f(x_0) \tag{1.79}$$

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{1.80}$$

Notwendiges Kriterium

Sei x_0 eine Extremstelle von f, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Dieses Kriterium ist notwendig aber nicht hinreichend.

Satz von Rolle

Wenn es für unterschiedliche a, b die Gleichung $f(a) = f(b)$ stimmt, dann muss ein $f'(x) = 0$ geben.

Mittelwertsatz

Für eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.81}$$

Für jede Gerade zwischen zwei Punkten gibt es ein x_0 mit einer parallelen Tangente.

Zum Beweis benutzt man den Trick:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1.82}$$

Hinreichendes Kriterium

Sei an der Stelle x_0 $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so hat die Funktion f ein Extremum an der Stelle x_0.

Für $f''(x_0) > 0$ ist es ein Minimum, für $f''(x_0) < 0$ ist es ein Maximum.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) und $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Dann gilt für verschiedene $g(x)$:

$$\exists c \in (a, b) \text{ mit } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{1.83}$$

Regel von l'Hospital

Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b,$ dessen Limes gegen x_0 beide gegen 0 gehen, dann verwendet man

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1.84}$$

Voraussetzung dafür ist, dass man wirklich guckt, dass der Limes beider Funktionen gegen 0 geht.

1.5.4 Geometrische Betrachtung der trigonometrischen Funktionen

Identitäten

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.85}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{1.86}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{1.87}$$

1.5.5 Taylor-Entwicklung

Taylor-Polynom

Sei $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{1.88}$$

das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0.

Restglied

Das n-te Restglied ist definiert durch

$$f = p_n + r_n \tag{1.89}$$

Sei $f \in C^{n+1}(I)$. Nach Lagrange gilt:

$$\forall x \in I \; \exists \xi = \xi(x) \text{ zwishen } x \text{ und } x_0 \text{ mit } r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1.90}$$

Taylor-Reihen

Eine Taylor-Reihe ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{1.91}$$

falls $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

1.6 Reihen

1.6.1 Definition und Konvergenzkriterien

Partialsumme

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Die n-te Partialsumme ist

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{1.92}$$

Reihe

Die Folge (s_n) heißt Reihe zu (a_n). Die Reihe wird durch das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, und falls $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ einen Grenzwert hat, dann wird dieser Grenzwert vom gleichen Symbol bezeichnet. In dem Fall heißt die Reihe konvergent, sonst divergent.

Rechenregeln

Für konvergente Reihen gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.93}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=k_0}^{\infty} \tag{1.94}$$

Wenn eine Reihe $\sum\limits_{k} a_k$ konvergiert dann ist (a_k) eine Nullfolge.

Cauchy-Kriterium

Eine Reihe $\sum_k a_k$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \tag{1.95}$$

Beschränktheit

Für eine Folge mit $a_k \geq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_k a_k$ genau dann konvergent, wenn die Reihe beschränkt ist.

Leibniz-Kriterium

Es sei (a_k) eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der Beträge $\sum_k |a_k|$ konvergiert.

Majoranten-Kriterium

Es gebe eine Reihe $\sum_k b_k$ (die Majorante) konvergent. Für eine Reihe $\sum_k a_k$ für die gilt $|a_k| \leq |b_k|$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_k a_k$ konvergent.

Wurzelkriterium

Für eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ gebe es ein $\theta < 1$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dieses Kriterium basiert auf die Existenz einer geometrischen Reihe (als Majorante) für die gilt: $|a_n| \leq \theta^n < 1$.

Quotientenkriterium

Es sei $\sum_k a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1. Falls $q \in (0, 1)$ mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \tag{1.96}$$

   existiert, dann ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent

2. Falls

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}, \tag{1.97}$$

dann divergiert $\sum\limits_k a_k$

Unordnung

Es gebe ein Isomorphismus $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, was die Reihenfolge der Folgengliedern $a_k \mapsto a_{\tau(k)}$ vertauscht. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ heißt die Unordnung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ absolut mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

1.6.2 Die Exponentialreihe

Die Exponentialreihe

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp\{z\} \equiv e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{1.98}$$

die Exponentialreihe an der Stelle z.

Die Exponentialreihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Restgliedabschätzung

Es gilt für $\exp\{z\} = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} + R_{N+1}(z)$. Dann ist $R_{N+1}(z) = \sum\limits_{k=N+1} \frac{z^k}{k!}$. Man kann diesen Rest abschätzen mit

$$|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}, \text{ falls } |z| \leq 1 + \frac{N}{2} \tag{1.99}$$

Cauchy-Produkt von Reihen

Für zwei absolut konvergente Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist

$$c_k := \sum_{n=0}^{k} a_k b_{k-n} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + ... + a_k b_0 \tag{1.100}$$

Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \tag{1.101}$$

Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{1.102}$$

Es gilt außerdem

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{mit } c_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{w^{k-n}}{(k-n)!} \tag{1.103}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \cdot z^n \cdot w^{k-n} \tag{1.104}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z^n w^{k-n} \tag{1.105}$$

$$= \frac{1}{k!}(z+w)^k \tag{1.106}$$

$$e^z e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \tag{1.107}$$

Komplexe Konjugation

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.108}$$

Stetigkeit

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \text{ist stetig} \tag{1.109}$$

$$\Longrightarrow \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{auch stetig} \tag{1.110}$$

1.6.3 Trigonometrische Funktionen

Euler-Formel

Wir definieren

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.111}$$

$$\rightarrow \cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) \in \mathbb{R} \tag{1.112}$$

$$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}) \in \mathbb{R} \tag{1.113}$$

Äquivalenzen

Es gilt

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1 \tag{1.114}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{1.115}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{1.116}$$

Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{1.117}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \tag{1.118}$$

Potenzreihenentwicklung

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ... \tag{1.119}$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ... \tag{1.120}$$

Restgliedabschätzung

Es gilt

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x) \tag{1.121}$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x) \tag{1.122}$$
$$\tag{1.123}$$

Wir schätzen ab:

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \text{für} |x| \leq 2n+3 \tag{1.124}$$
$$|r_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \qquad \text{für} |x| \leq 2n+4 \tag{1.125}$$

Die Zahl π

π ist eine eindeutig bestimmte reelle Zahl mit

$$\frac{\pi}{2} \in (0,2) \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \tag{1.126}$$

Da $\cos x|_{(0,2)}$ streng monoton fallend ist, und $\cos 0 = 1, \cos 2 < 0$, existiert genau eine Nullstelle in $(0,2)$.

e, π und i

Es gilt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \qquad e^{i2\pi} = 1 \tag{1.127}$$

1.6.4 Logarithmus und allgemeine Potenzen

Umkehrfunktion von e

Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv (und streng monoton wachsend) ist, existiert eine Umkehrfunktion. Sie heißt der natürliche Logarithmus $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Der natürliche Logarithmus ist monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Es gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \qquad \lim_{x\searrow 0} \log x = -\infty \qquad \log 1 = 0 \tag{1.128}$$

Funktionalgleichung für den natürlichen Logarithmus

Für alle $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\log xy = \log x + \log y \tag{1.129}$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \tag{1.130}$$

$$\log x^n = n \log x \tag{1.131}$$

Allgemeine Potenzen

Wir definieren für $a > 0$:

$$a^x = e^{x \log a} \tag{1.132}$$

Potenzgesetze

$$a) \quad a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{ist stetig} \tag{1.133}$$

$$b) \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.134}$$

$$c) \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \forall q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \tag{1.135}$$

$$d) \quad (a^x)^y = a^{xy} \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.136}$$

$$e) \quad a^x b^x = (ab)^x \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a, b > 0 \tag{1.137}$$

$$f) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.138}$$

Limiten

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = +\infty \tag{1.139}$$

Ableitungen

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist

$$\exp' x = \exp x \tag{1.140}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind

$$\sin' x = \cos x \qquad\qquad \cos' x = -\sin x \tag{1.141}$$

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist

$$\log' x = \frac{1}{x} \tag{1.142}$$

1.7 Integralrechnung

1.7.1 Das Riemann Integral

Ziel: "Fläche" unter einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu finden. Diese Fläche ist "orientiert", je nachdem ob sie ober oder unterhalb der $x-$Achse liegt.

Die Riemannsche Ober- und Untersumme

Man kann eine solche Fläche in kleinere, rechteckige Abschnitte zerlegen: $z = (x_0, ..., x_n)$ von $[a, b]$ ist ein Tupel mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Die Ober- und Untersummen sind

$$O(z, f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup \left(f|_{[x_{i-1}, x_i]}\right) \tag{1.143}$$

$$U(z, f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf \left(f|_{[x_{i-1}, x_i]}\right) \tag{1.144}$$

Da werden die rechteckigen Abschnitte über- oder unterschätzt.

Gemeinsame Verfeinerung

Für zwei Zerlegungen $z = (x_0, ..., x_n)$, $z' = (x'_0, ..., x'_k)$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung $z'' = (x''_0, ..., x''_r)$ mit

$$\{x_0, ..., x_n\} \subset \{x''_0, ..., x''_r\} \qquad \text{und} \tag{1.145}$$

$$\{x'_0, ..., x'_k\} \subset \{x''_0, ..., x''_r\} \tag{1.146}$$

Es gilt

$$U(z, f), U(z', f) \leq U(z'', f) \tag{1.147}$$

$$O(z, f), O(z', f) \geq O(z'', f) \tag{1.148}$$

Riemann integrierbar

f heißt Riemann integrierbar, falls $\sup\limits_z U(z,f) = \inf\limits_z O(z,f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx := \sup U(z,f) = \inf O(z,f) \tag{1.149}$$

Bemerkung:

$$f \text{ ist Riemann integrierbar} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists z \text{ von } [a,b] \text{ mit } O(z,f) - U(z,f) < \varepsilon \tag{1.150}$$

Rechenregeln

Für Riemann integrierbare $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$a) \quad \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.151}$$

$$b) \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{1.152}$$

$$c) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \text{für } a \leq c \leq b \tag{1.153}$$

$$d) \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{1.154}$$

$$e) \quad f \leq g \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{1.155}$$

$$f) \quad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \tag{1.156}$$

1.7.2 Gleichmäßige Stetigkeit und Existenz des Integrals

Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D: \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1.157}$$

Kommentar: Lipschitz stetig $\implies$ gleichmäßig stetig

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann integrierbar.

1.7.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$

1. Es sei $f \in C^0(I)$. Dann gilt für $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, dass $F \in C^1(I)$ und $F'(x) = f(x)$.

   Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.

2. Für alle $F \in C^1(I)$ gilt: $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$

   Stammfunktionen berechnen das Integral: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Das unbestimmte Riemann Integral

$\int f(x)dx$ bezeichnet eine beliebige Stammfunktion von f

1.7.4 Integrationstechniken

Partielle Integration

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx \tag{1.158}$$

Substitutionsregel

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$, I ein Intervall, stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \tag{1.159}$$

Uneigentliche Integrale

Sei $I := [a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann heißt $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I, falls f auf jedem kompakten Teilintervall von I integrierbar und außerdem der Limes $\lim\limits_{s \nearrow b} \int_a^s f(t)dt \in \mathbb{R}$ existiert. Diesen Limes bezeichnen wir mit $\int_a^b f(t)dt$.

Analog für $(a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Kapitel 2

Beispielaufgaben

Disclaimer: Diese sind von mir bearbeitete Aufgaben und sind nicht auf Richtigkeit überprüft worden.

2.1 Grundlagen

1. Aufgabe 1:

   Gegeben sei die Folge (a_n) definiert durch $a_{n+1} := \sqrt{10a_n - 9}$ mit $a_1 := 10$. Zeigen Sie induktiv, dass $a_n \geq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   Induktionsanfang:

   $$a_1 = 10 \geq 2 \tag{2.1}$$
   $$\tag{2.2}$$

   Induktionsschritt: $n \implies n+1$

   $$\begin{aligned}
   a_{n+2} &:= \sqrt{10a_{n+1} - 9} && (2.3)\\
   &= \sqrt{10\sqrt{10a_n - 9} - 9} && \text{Induktionsannhame: } a_n \geq 2 \quad (2.4)\\
   &\geq \sqrt{10\sqrt{10 \cdot 2 - 9} - 9} && (2.5)\\
   &= \sqrt{10\sqrt{11} - 9} && (2.6)\\
   &\geq \sqrt{10\sqrt{9} - 9} && (2.7)\\
   &= \sqrt{30 - 9} && (2.8)\\
   &= \sqrt{21} && (2.9)\\
   &\approx 4.6 \geq 2 && (2.10)
   \end{aligned}$$

   Diese Folge ist wohldefiniert, da es immer eine positive Zahl unter der Wurzel steht.

2. Zeigen Sie, dass (a_n) monoton fallend ist.

   Z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} \leq a_n$

Per Induktion zeigt man:

Induktionsanfang:

$$a_2 = \sqrt{10 \cdot 10 - 9} = \sqrt{91} \approx 9.5 \leq 10 = a_1 \tag{2.11}$$

Induktionsschritt: $n \implies n+1$

$$a_{n+1} = \sqrt{10a_n - 9} \qquad \text{Induktionsannahme: } a_n \leq a_{n+1} \tag{2.12}$$
$$\leq \sqrt{10a_{n-1} - 9} = a_n \tag{2.13}$$

3. Aufgabe 2:

   Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f : e^x - e^{-x}$, wobei $e^x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ die Exponentialfunktion ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

   $$f(x) = e^x - e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \tag{2.14}$$

   Für alle $k = 2n \ \forall n \in N$ sind die Taylorentwicklungen von e^x und e^{-x} komponentenweise gleich, also nach der Substraktion bleibt übrig:

   $$f(x) = \sum_{k=0} \frac{x^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2.15}$$
   $$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{2.16}$$
   $$\tag{2.17}$$

   Beide Summanden sind bijektiv und wir wissen die Summe zweier bijektiver Funktionen ist wieder bijektiv.

2.2 Stetigkeit

1. Aufgabe 1:

   Ist die folgende Funktion stetig?

   $$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

   Wir untersuchen die Funktion mit dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium:

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2.19}$$

   Wir wählen: $\delta = \frac{|x_0 - 1|}{2}$.

   $$|x - x_0| < \frac{|x_0 - 1|}{2} \implies |f(x) - f(x_0)| \tag{2.20}$$

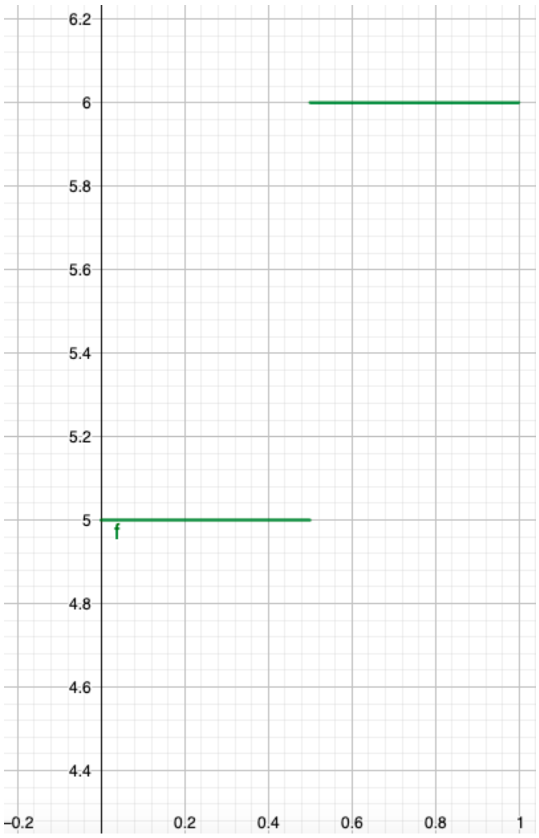
$$(2.21)$$

Diese Funktion ist stetig.

2. Aufgabe 2:

   Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := [2x] + 5$, wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von f

   (b) In welchen Werten ist $f(x)$ unstetig?

   Behauptung: f ist unstetig in $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

   Beweis: Sei $x_0 = \frac{1}{2}$. Nach dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [0,1] : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (2.22)$$

   Sei $x > x_0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |6 - 6| < \varepsilon \qquad (2.23)$$

   Für den Fall $x < x_0$:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |5 - 6| \not< \varepsilon \qquad (2.24)$$

Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ nicht stetig.

Sei $x_0 = 1$ und $x < x_0$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |6 - 7| \not< \varepsilon \tag{2.25}$$

3. Aufgabe 3:

Es sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \begin{cases} x \log |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 36$ gilt: $\log y < \sqrt{y}$

Äquivalent kann man sagen, dass $y < e^{\sqrt{y}}$ $\forall y \geq 36 \in \mathbb{R}$.

$$36 < e^{\sqrt{36}} = e^6 \approx 403 \tag{2.26}$$

Außerdem zeigen wir, dass $e^{\sqrt{y}}$ eine größere Steigung als y $\forall y \geq 36 \in \mathbb{R}$ hat.

$$\frac{d}{dy} e^{\sqrt{y}} = \frac{d}{dy} e^{y^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{Kettenregel} \tag{2.27}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \tag{2.28}$$

$$\frac{d}{dy} y = 1 < \frac{e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} \qquad \forall y \in (0, \infty) \tag{2.29}$$

(b) Beweisen Sie, dass g stetig ist.

Die Funktion $x \log |x|$ ist für alle $x \neq 0$ stetig, da sowohl x als $\log |x|$ für ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und definiert sind.

Bleibt zu zeigen: $x \log |x|$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

Nach dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2.30}$$

$$|x - 0| < \delta \implies |x \log |x| - 0| < \varepsilon \tag{2.31}$$

Nun zeigen wir, dass dieser Grenzwert definiert ist.

$$\lim_{x \to 0} x \log |x| \qquad \Big| x = \frac{1}{y} \tag{2.32}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y} \log \left| \frac{1}{y} \right| \tag{2.33}$$

$$= - \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y} \log y \qquad \Big| \frac{\infty}{\infty} \to \text{L'Hospital (theoretisch)} \tag{2.34}$$

$$= - \lim_{y \to \infty} \frac{\frac{1}{y}}{1} \tag{2.35}$$

$$= \frac{0}{1} = 0 \tag{2.36}$$

4. Aufgabe 4:

   Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := |z - x|^2 = \sum_{j=1}^{n} (z_j - x_j)^2 \tag{2.37}$$

   (a) Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\min_{x \in K} f(x)$ und $\max_{x \in K} f(x)$ existieren.

   Da K kompakt ist, so ist sie *beschränkt* und *abgeschlossen*. Es gilt, dass stetige Bilder von kompakten Mengen auch kompakt, also existiert ein Minimum und ein Maximum. Bleibt zu zeigen, dass $f(x)$ stetig ist[1].

   ...

   (b) Geben Sie eine abgeschlossene (aber nicht kompakte) Menge $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ an, sodass $\max_{x \in A} f(x)$ *nicht* existiert.

   $A = \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen aber nicht kompakt, denn die Menge nicht beschränkt ist.

   (c) Geben Sie eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ an, sodass weder $\max_{x \in M} f(x)$ noch $\min_{x \in M} f(x)$ existieren.

   $M = \mathbb{R}^n \setminus \{z\}$

2.3 Folgen

1. Aufgabe 1:

   Geg.: $(a_n) := \sqrt{n + 10^{10}} - \sqrt{n}$

   Ges.: Grenzwert für $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n + 10^{10}} - \sqrt{n} = \lim_{n \to \infty} (\sqrt{n + 10^{10}} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n + 10^{10}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + 10^{10}} + \sqrt{n}} \tag{2.38}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n + 10^{10} - n}{\sqrt{n + 10^{10}} + \sqrt{n}} \tag{2.39}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{10^{10}}{\sqrt{n + 10^{10}} + \sqrt{n}} \tag{2.40}$$

   Klarweise konvergiert die Folge gegen 0.

2. Aufgabe 2:

   Geg.: (a_n) mit $a_{n+1} := \sqrt{10a_n - 9}$; $a_1 := 10$; $a_n \geq 2$

   Ges.: Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{10a_n - 9} = a \tag{2.41}$$

[1] Mit dem $\varepsilon - \delta$Kriterium ist das nicht cool

$$10a - 9 = a^2 \tag{2.42}$$
$$a_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-9} \tag{2.43}$$
$$= 5 \pm 4 \tag{2.44}$$
$$a_1 = 9 \tag{2.45}$$
$$a_2 = 1 \tag{2.46}$$

Die Folge konvergiert gegen 9.

3. Beispiel 3:

   Geg.: $(x_n) := \sqrt[n]{a^n + b^n}$

   Ges.: Grenzwert:

   O.B.d.A. Sei $a \leq b$ und $a^n \leq b^n$

$$b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2} \cdot b = b \qquad \sqrt[n]{2} \to 1 \tag{2.47}$$
$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b := \max\{a, b\} \tag{2.48}$$

2.4 Differenzierbarkeit

1. Aufgabe 1:

   (a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

   Es gebe $n_1 < n_2 \in [a, b]$ mit $f(n_1) = 0 = f(n_2)$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [n_1, n_2]$ gibt mit $f'(x_0) = 0$ gibt.

   Z.z.: Existenz von Extrema

   Mit dem Mittelwertsatz

$$f'(x_0) = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1} \tag{2.49}$$

   lässt sich zeigen:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1}(x - n_1) \tag{2.50}$$

   Da $f'(x_0) = 0$, dann ist

$$F(x) = f(x) - 0 \tag{2.51}$$

   Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $x_0 \in [n_1, n_2]$ mit

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1} \tag{2.52}$$
$$= f'(x_0) \tag{2.53}$$

(b) Sei f zweimal differenzierbar auf (a, b) mit $n_1 < n_2 < n_3 \in [a, b]$ mit $f(n_i) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $x_1 \in [n_1, n_3]$ mit $f''(x_0)$ gibt.

Wie in $a)$ gezeigt, gibt es zwischen n_1 und n_2 eine Stelle mit $f'(x_1) = 0$. Zwischen n_2 und n_3 gibt es auch eine Stelle $f'(x_2) = 0$. Nach $a)$ gibt es also zwischen zwei Stellen $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$ dann eine Stelle $f''(x_0) = 0$.

2. Aufgabe 2:

(a) Beweisen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$ existiert und bestimmen Sie ihn.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \qquad \left| \frac{0}{0} \right. \to \text{L'Hospital} \tag{2.54}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \qquad \left| \frac{0}{0} \right. \to \text{L'Hospital} \tag{2.55}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2} \tag{2.56}$$
$$= \frac{0}{2} = 0 \tag{2.57}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ in *jedem* $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Die Funktion ist für jeden $x \neq 0$ definiert, da $\frac{\sin x}{x}$ keiner Division durch 0 entspricht.

Z.z.: $f(x)$ ist differenzierbar in $x_0 = 0$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$ existiert.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \qquad \left| \frac{0}{0} \right. \to \text{L'Hospital} \tag{2.58}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} \tag{2.59}$$
$$= \frac{1}{1} = 1 \tag{2.60}$$

2.5 Reihen

1. Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass für alle $x \in (0, \infty)$ gilt: $\log x < x$

Sei $f(x) = x, g(x) = \log x$

$$\lim_{x \to 0} \log x := -\infty < 0 = \lim_{x \to 0} x \tag{2.61}$$

Außerdem gilt

$$g(1) = \log 1 = 0 < 1 = f(1) \tag{2.62}$$

Da g und f streng monoton wachsende Funktionen sind, so gilt auch für alle $x \in (0, 1]$ $g < f$. Zunächst zeigen wir, die Steigung von $\log x$ ist kleiner als die Steigung von x für alle $x \in (1, \infty)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} < 1 = f'(x) \qquad \forall x \in (1, \infty) \tag{2.63}$$

Somit lässt sich schlussfolgern, dass auch

$$g(x) = \log x < x = f(x) \qquad \forall x \in (0, \infty) \tag{2.64}$$

2. Aufgabe 2:

   Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$ konvergent und/oder absolut konvergent?

   Nach dem Leibniz-Kriterium ist eine Reihe $\sum (-1)^k a_k$ konvergent, falls (a_k) eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$. Da der natürliche Logarithmus eine streng monoton wachsende Funktion ist, ist $\frac{1}{\log(n+1)}$ monoton fallend. Das heißt auch, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$.

   Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn wir wissen nach Aufgabe 1, dass $\log(n+1) < n+1$. So ist

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1} \tag{2.65}$$

   und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \tag{2.66}$$

   Da wir von der letzteren wissen, dass sie divergiert, so können wir die gleiche Aussage über unsere Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ sagen.

3. Aufgabe 3:

   Es seien (a_n) und (b_n) Folgen, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergiert.

   Wir nehmen an, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert und wenden die Rechenregeln für konvergente Reihen an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{2.67}$$

$$\to \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.68}$$

Nach den Rechenregeln ist die Summe konvergenter Reihen auch konvergent, dies führt zu einem Widerspruch, denn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.

4. Aufgabe 4:

   Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2+(-1)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-(2+(-1)^n)} \tag{2.69}$$

   konvergent und/oder absolut konvergent?

   Da $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+(-1)^n}}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Die Reihe s_n konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

   Wir untersuchen die Reihe der Beträge:

$$\frac{1}{n^{2+(-1)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{k^3} & k = 2n \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{l} & l = 2n+1 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.70}$$

   Also gibt es zwei Teilfolgen, die wir mit $a_k := \begin{cases} \frac{1}{k^3} & k = 2n \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $b_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = 2n+1 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ definieren. Es gilt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{2.71}$$

   Nach Teilaufgabe 3 reicht es, dass eine der Reihen divergiert und wir wissen, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.72}$$

   divergiert.