**Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires**

---

**95.10 | Modelación numérica**

**75.12 | Análisis numérico I A**

**95.13 | Métodos matemáticos y numéricos**

---

**Trabajo Práctico 1– Cuatrimestre 1 2024**

# Distribución de temperaturas en una placa



| | | |
|---|---|---|
| **Grupo Nº16** | **Francisco Lema Roveta** | **105153** |
| | **Tomás Iturburu** | **110044** |
| | **Juan Cruz Robledo Puch** | **106164** |



| Fecha | Correcciones / Observaciones | Docente |
|---|---|---|
| | | |

| Calificación Final | Docente | Fecha |
|---|---|---|
| | | |

# 1. Introducción

En el siguiente trabajo práctico se resolverá, analizará y se sacarán conclusiones de un problema llamado “Distribución de Temperaturas en una Placa”. El siguiente problema consiste en una placa bidimensional rectangular el cual tiene predefinida las distintas temperaturas de los bordes de la misma. Tres de dichas temperaturas resultan ser constantes en el tiempo y una cuarta varía a lo largo del día. El objetivo del problema es encontrar la temperatura de las distintas regiones dentro de la placa que van a ser determinada por la de los bordes.

La manera de resolver el problema indica que es planteando un sistema de ecuaciones lineales las cuales van a ser determinadas según la manera en la que se divida la placa para encontrar la temperatura de cada una de las regiones dentro de la placa.

De este modo se resolverá el problema con tres discretizaciones y tres métodos distintos (un método directo y dos indirectos). Con los resultados obtenidos y datos recopilados de los distintos planteos se compararon las características de cada uno.

Al ser un problema sencillo de ejecutar pero que requiere un gran número de cálculos, se planteó la solución de él en un programa de python creado desde cero. El mismo automatiza la creación de las matrices, vectores, solución de los problemas ,creación de gráficos y facilita la introducción de variables nuevas como pueden ser las discretizaciones Todo esto se realiza para agilizar el análisis de datos.

Una vez recopilado todos los datos y creados los gráficos se analizan de maneras diferentes, cambiando los criterios y descubriendo las distintas características de los métodos y variables utilizadas.

## 2. Resolución

a) A continuación, se hará el planteo genérico del sistema de ecuaciones:

De forma genérica, el sistema de ecuaciones lineales a resolver se puede plantear con la forma Ax = b. Siendo A una matriz en la cual cada fila representa la ecuación de Laplace de cada nodo, x es el vector de soluciones y contendrá la temperatura de cada nodo y b es un vector que depende de las temperaturas, la dimensión de cada uno depende de la discretización elegida, ya que habrá más o menos nodos a los cuales les queramos conocer su temperatura.

La matriz A tendrá una diagonal de números cuatro excepto en las posiciones que representen bordes de la plancha y por otro lado tendrá 4 diagonales de -1 que representan como están afectados los nodos internos de la plancha por los cuatro nodos de alrededor (arriba, abajo, izquierda y derecha).

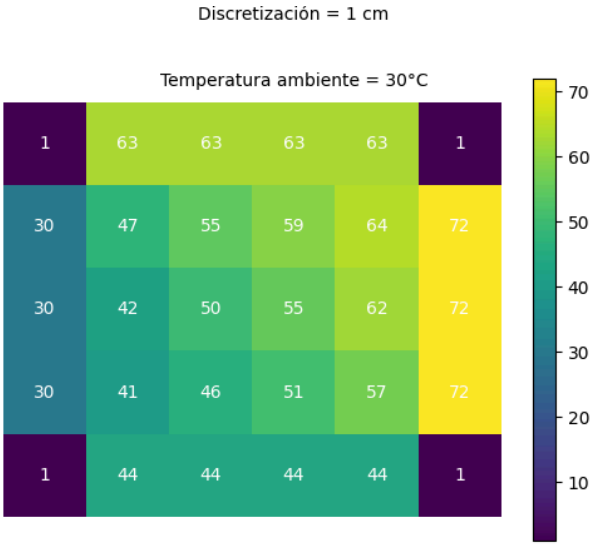
El vector b va a ser el responsable de almacenar las temperaturas según la hora del día. Este tendrá unos (1) en las posiciones que representan los nodos dentro de la placa y el valor de las temperaturas correspondientes según que lado de la placa represente.

b) Las tres discretizaciones , tal que $\Delta x = \Delta y$, elegidas fueron de 1 cm, 0,5 cm y 0,4 cm.

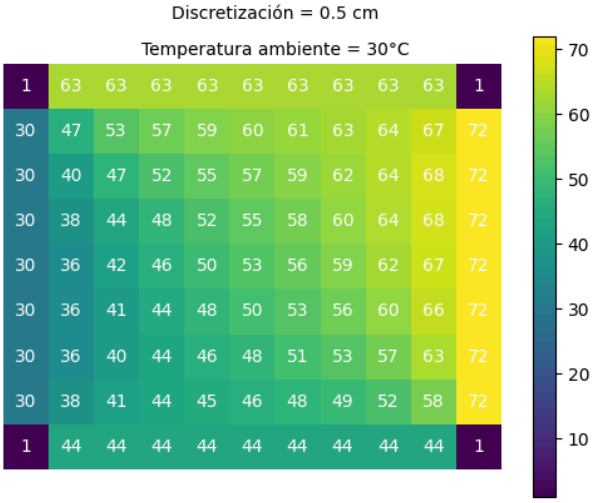
c) En el siguiente ítem se realizará la resolución para las tres discretizaciones, manteniendo Ta=30°C constante, siendo esta la temperatura media medida en un día, utilizando los tres métodos de resolución de SEL. Al final se presentarán los gráficos que muestran la distribución de temperaturas.

Para los métodos indirectos utilizaremos una tolerancia de $1,0 * 10^{-9}$ para asegurar una mayor precisión en el cálculo.

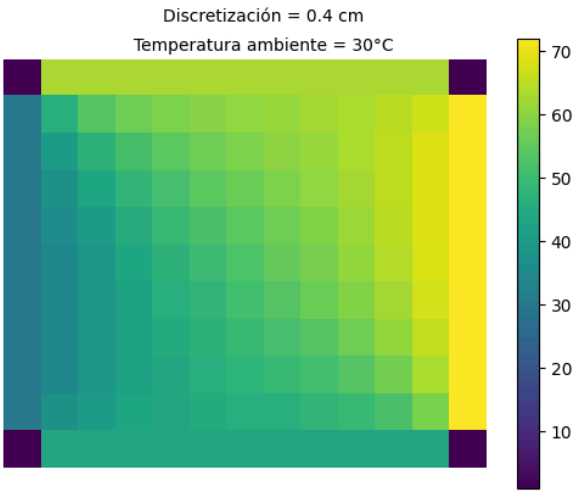
Para la primer discretización (Δx = Δy = 1cm):




Para la segunda discretización (Δx = Δy = 0,5 cm):



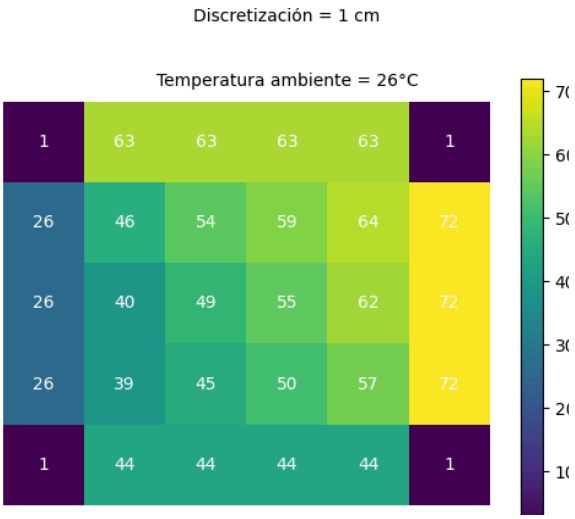

Finalmente,para la tercer discretización (Δx = Δy = 0,4cm):

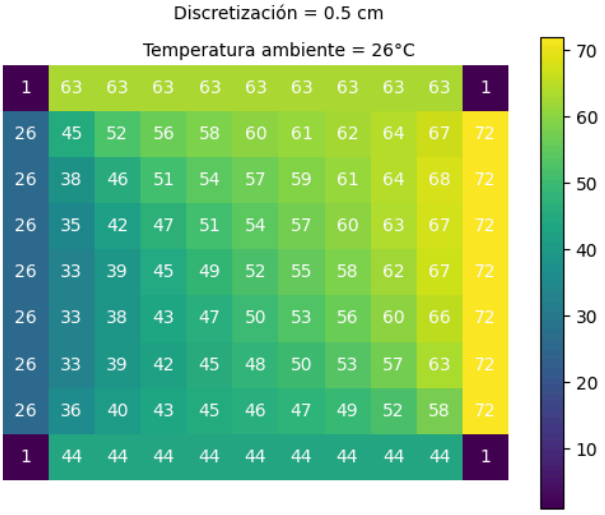


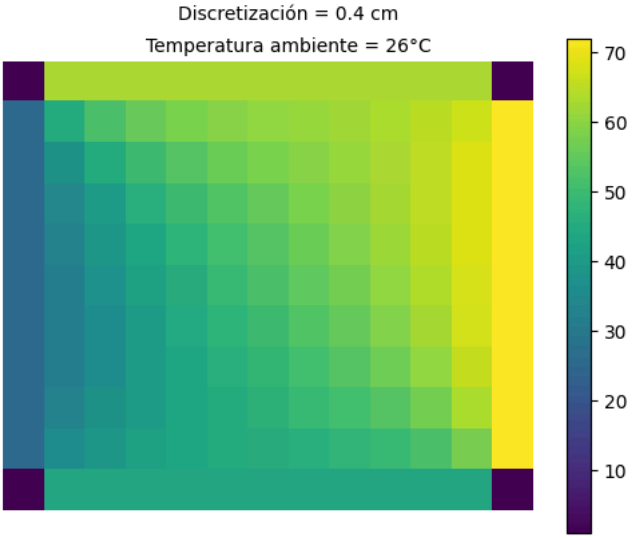
d) En este ítem se realizará lo mismo que en el anterior, pero ahora la temperatura Ta va a variar a lo largo del día. Las temperaturas del día serán obtenidas a partir de la tabla antes presentada.

A continuación, se mostrará la resolución para las tres discretizaciones, manteniendo Ta variable a lo largo del día y utilizando nuevamente los tres métodos de resolución de SEL.

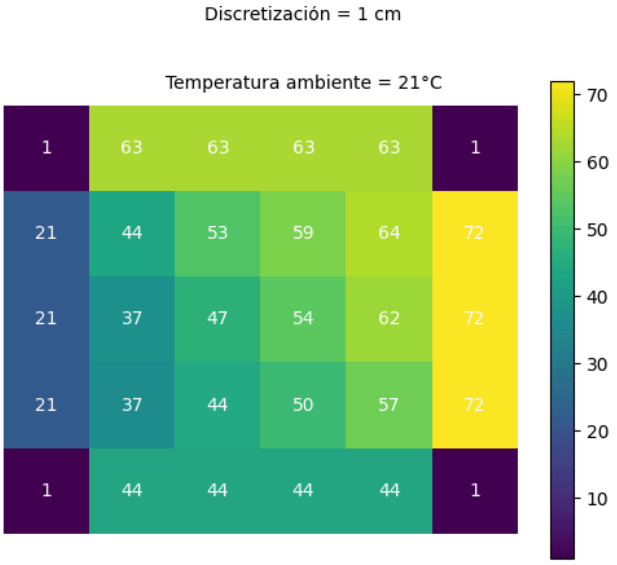
Con Ta= 26°

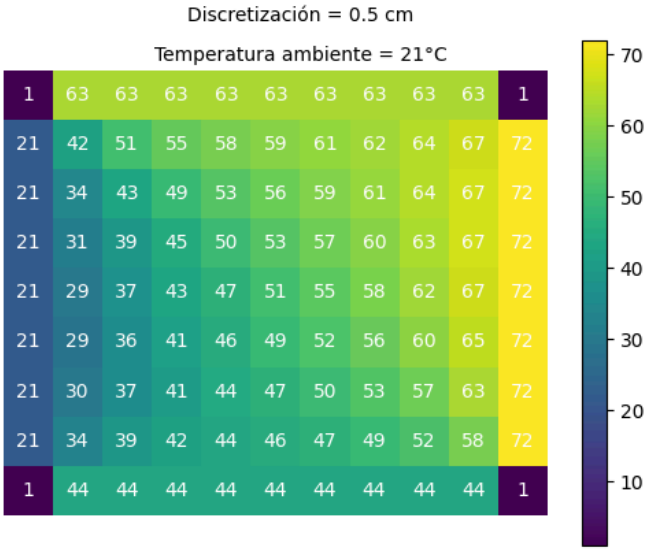


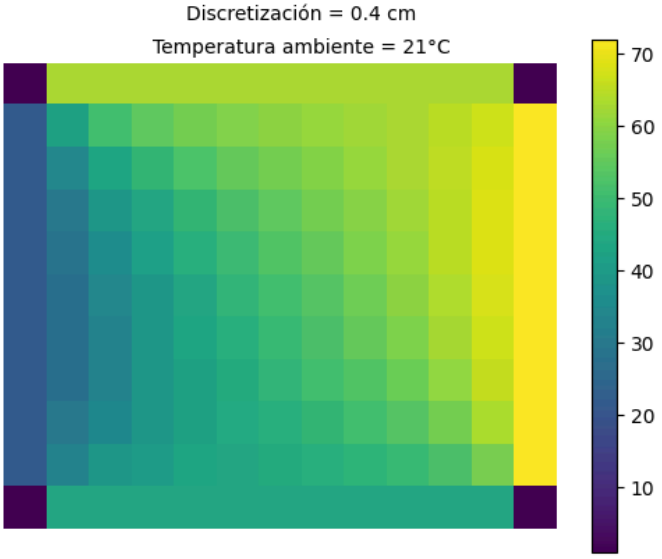



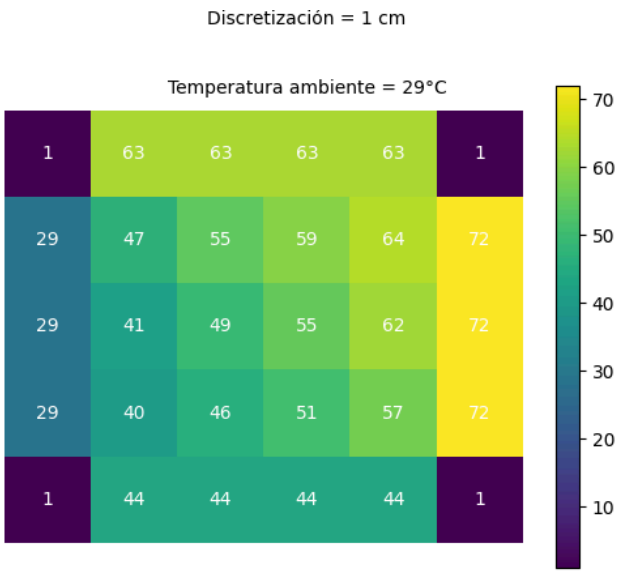
Con Ta= 21°

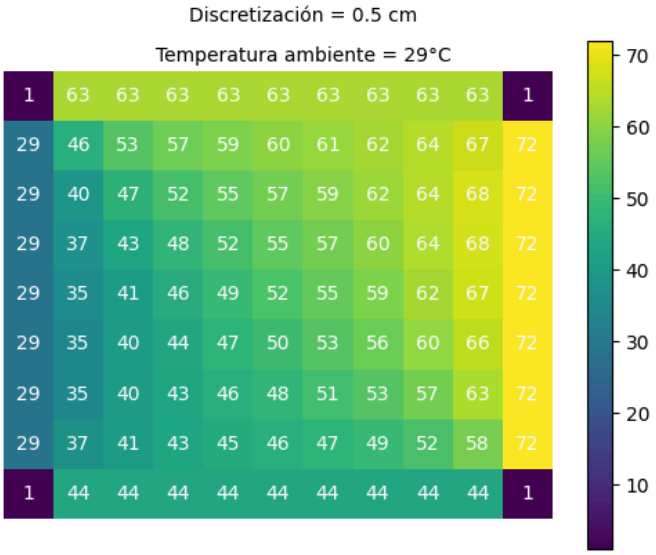

Discretización = 1 cm
Temperatura ambiente = 21°C
1 63 63 63 63 1
21 44 53 59 64 72
21 37 47 54 62 72
21 37 44 50 57 72
1 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10

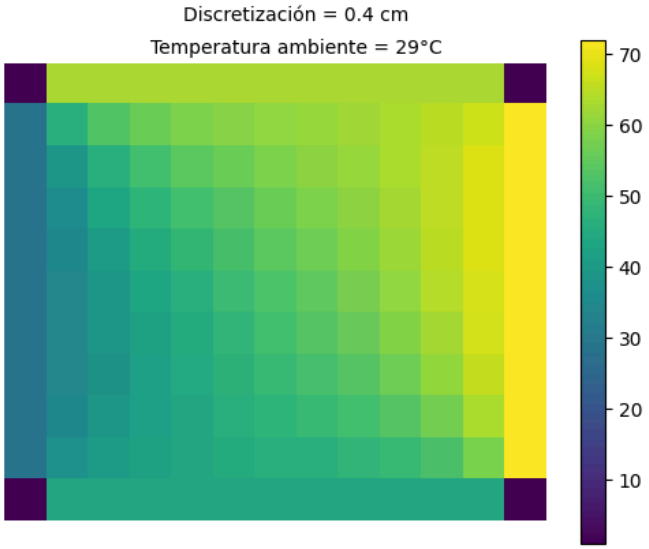

Discretización = 0.5 cm
Temperatura ambiente = 21°C
1 63 63 63 63 63 63 63 63 63 1
21 42 51 55 58 59 61 62 64 67 72
21 34 43 49 53 56 59 61 64 67 72
21 31 39 45 50 53 57 60 63 67 72
21 29 37 43 47 51 55 58 62 67 72
21 29 36 41 46 49 52 56 60 65 72
21 30 37 41 44 47 50 53 57 63 72
21 34 39 42 44 46 47 49 52 58 72
1 44 44 44 44 44 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10


Discretización = 0.4 cm
Temperatura ambiente = 21°C
70
60
50
40
30
20
10

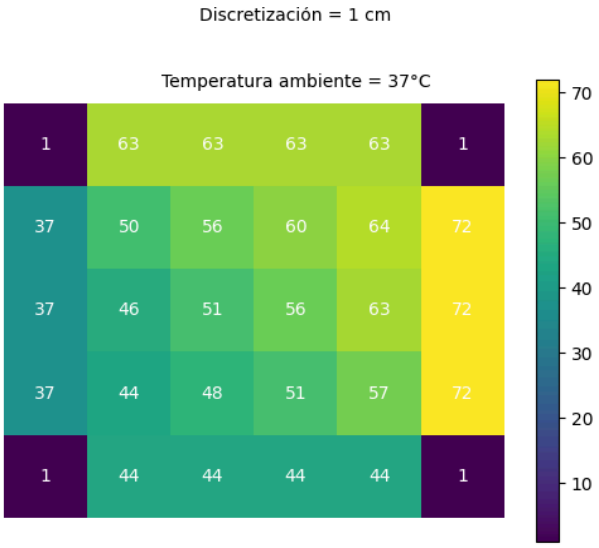
Con Ta= 29°

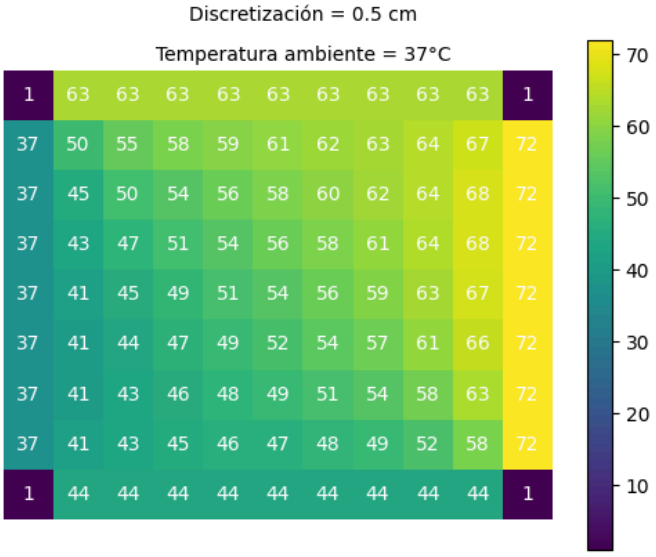


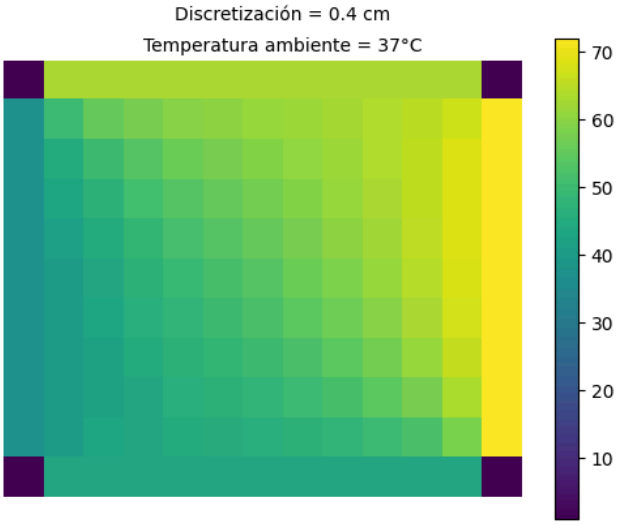



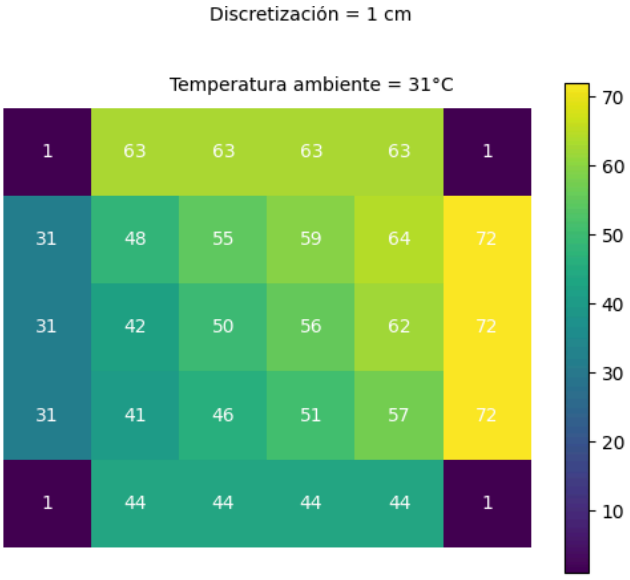

Con Ta= 37°

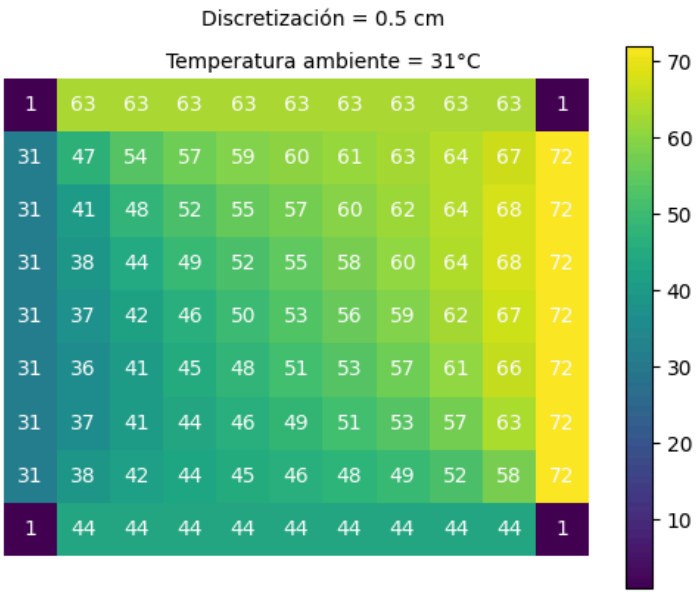


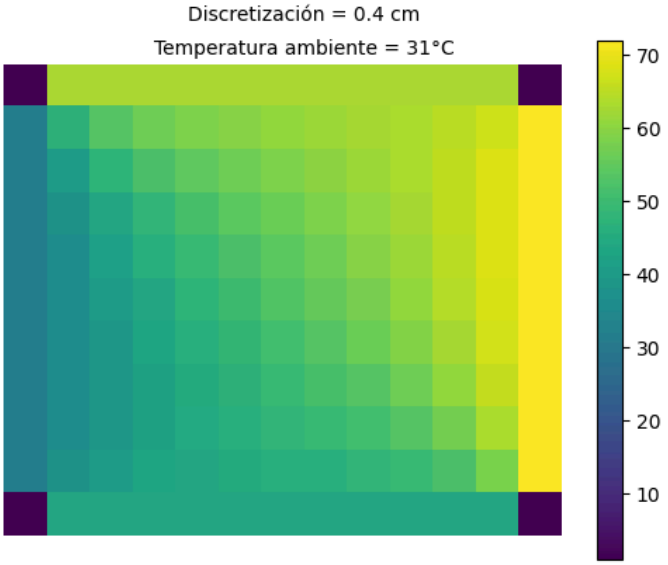




Discretización = 0.4 cm
Temperatura ambiente = 37°C
70
60
50
40
30
20
10

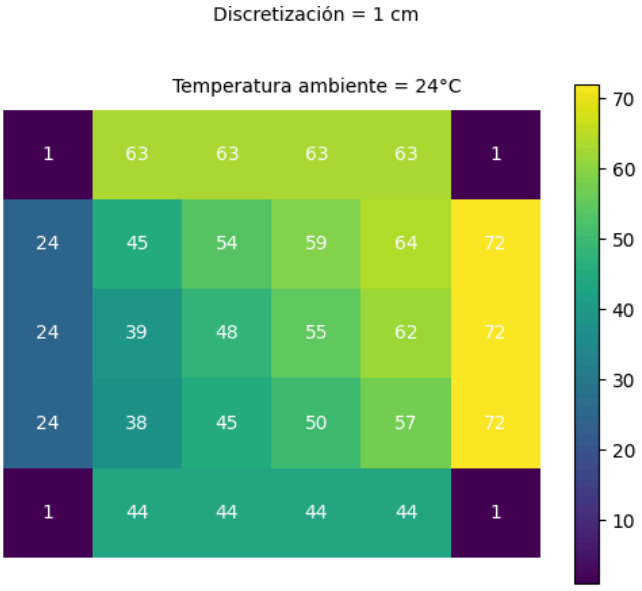
Con Ta= 31°

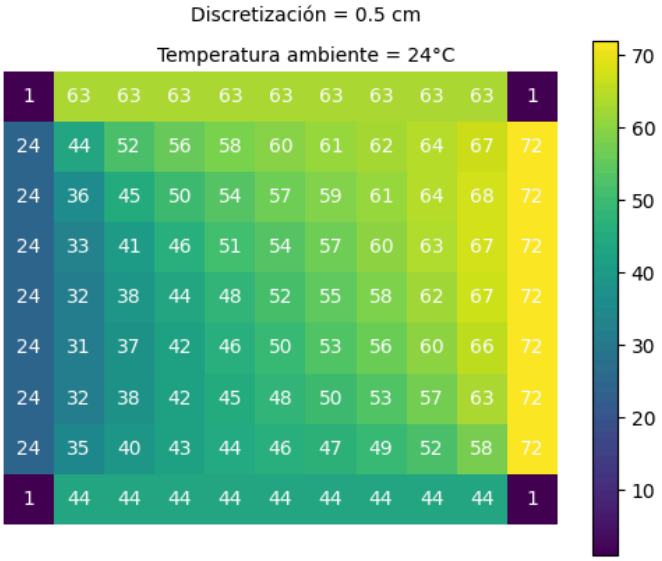

Discretización = 1 cm
Temperatura ambiente = 31°C
1 63 63 63 63 1
31 48 55 59 64 72
31 42 50 56 62 72
31 41 46 51 57 72
1 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10

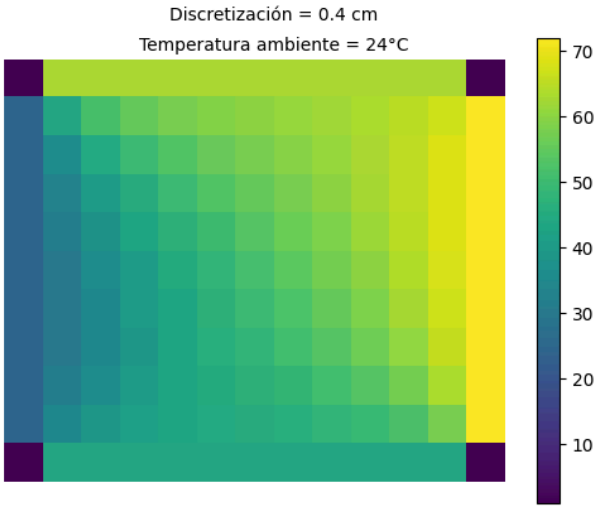

Discretización = 0.5 cm
Temperatura ambiente = 31°C
1 63 63 63 63 63 63 63 63 63 1
31 47 54 57 59 60 61 63 64 67 72
31 41 48 52 55 57 60 62 64 68 72
31 38 44 49 52 55 58 60 64 68 72
31 37 42 46 50 53 56 59 62 67 72
31 36 41 45 48 51 53 57 61 66 72
31 37 41 44 46 49 51 53 57 63 72
31 38 42 44 45 46 48 49 52 58 72
1 44 44 44 44 44 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10


Discretización = 0.4 cm
Temperatura ambiente = 31°C
70
60
50
40
30
20
10

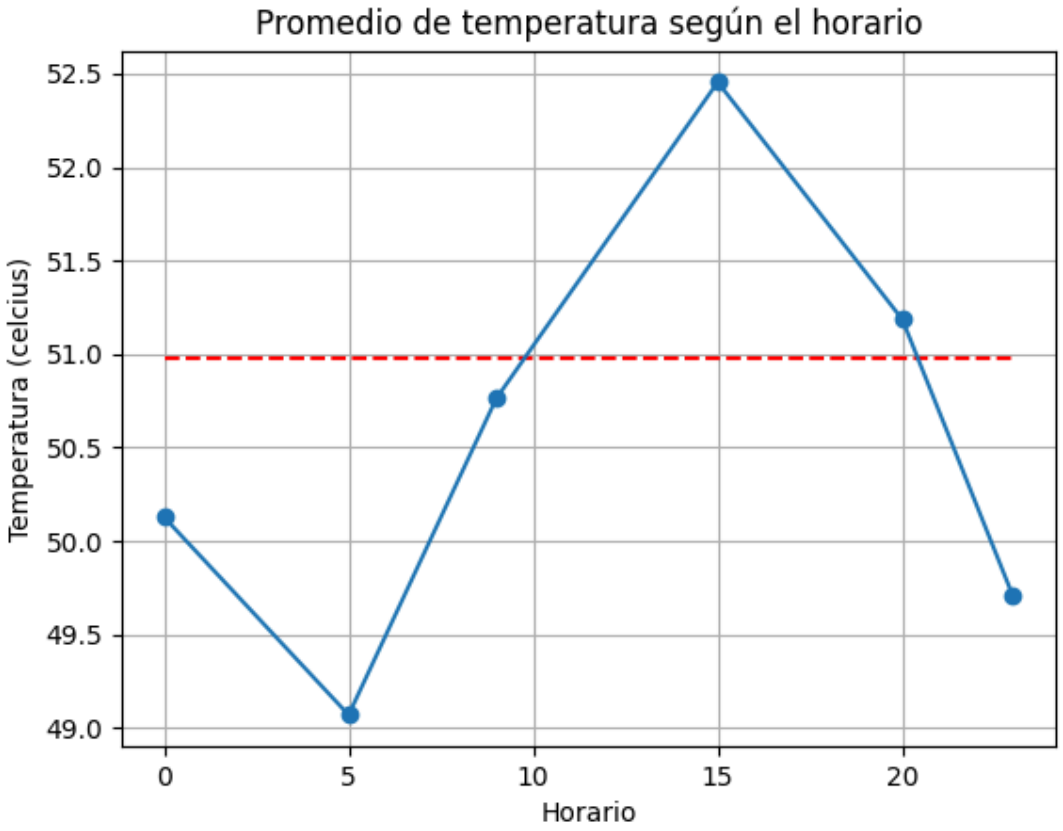
Con Ta= 24°


Discretización = 1 cm
Temperatura ambiente = 24°C
1 63 63 63 63 1
24 45 54 59 64 72
24 39 48 55 62 72
24 38 45 50 57 72
1 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10


Discretización = 0.5 cm
Temperatura ambiente = 24°C
1 63 63 63 63 63 63 63 63 63 1
24 44 52 56 58 60 61 62 64 67 72
24 36 45 50 54 57 59 61 64 68 72
24 33 41 46 51 54 57 60 63 67 72
24 32 38 44 48 52 55 58 62 67 72
24 31 37 42 46 50 53 56 60 66 72
24 32 38 42 45 48 50 53 57 63 72
24 35 40 43 44 46 47 49 52 58 72
1 44 44 44 44 44 44 44 44 44 1
70
60
50
40
30
20
10




En el siguiente gráfico se muestra la distribución de la temperatura promedio en los distintos horarios junto a una recta de valor constante que representa el promedio de la temperatura de la placa de la temperatura promedio de ese mismo día (30 C°).



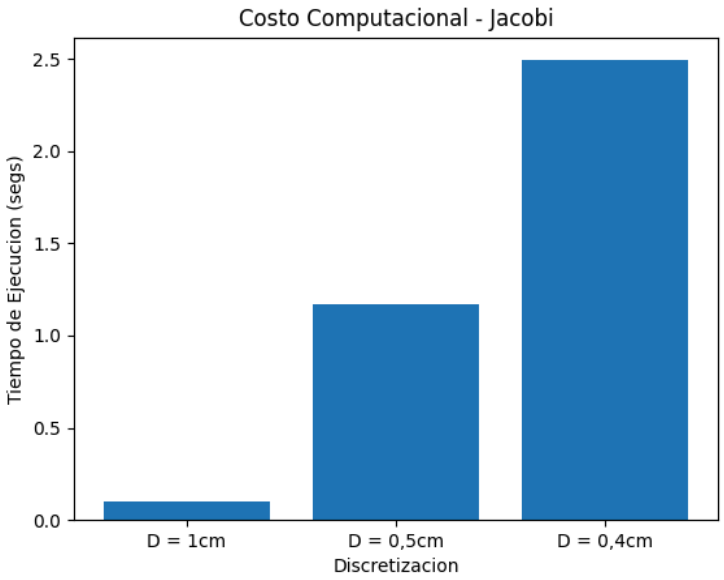

e) En los siguientes gráficos se puede observar el coste computacional de la solución del sistema de ecuaciones utilizando los dos métodos indirectos y eliminación de Gauss

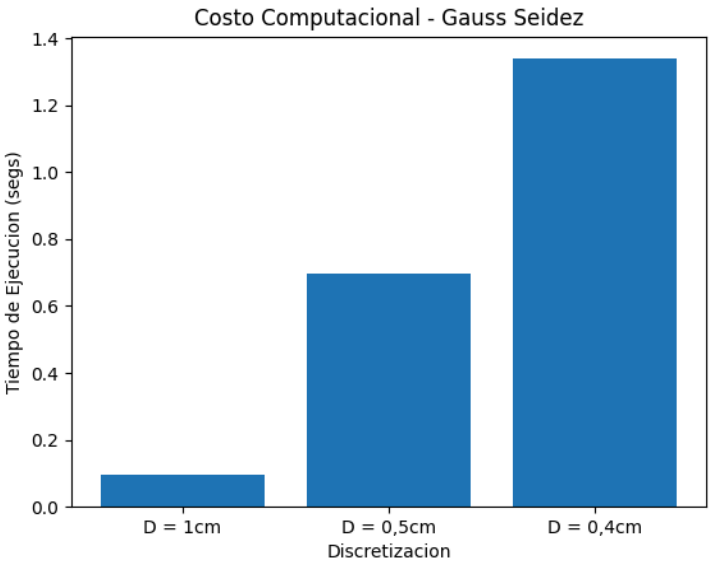
calculado en segundos y medido con cada discretización utilizada.

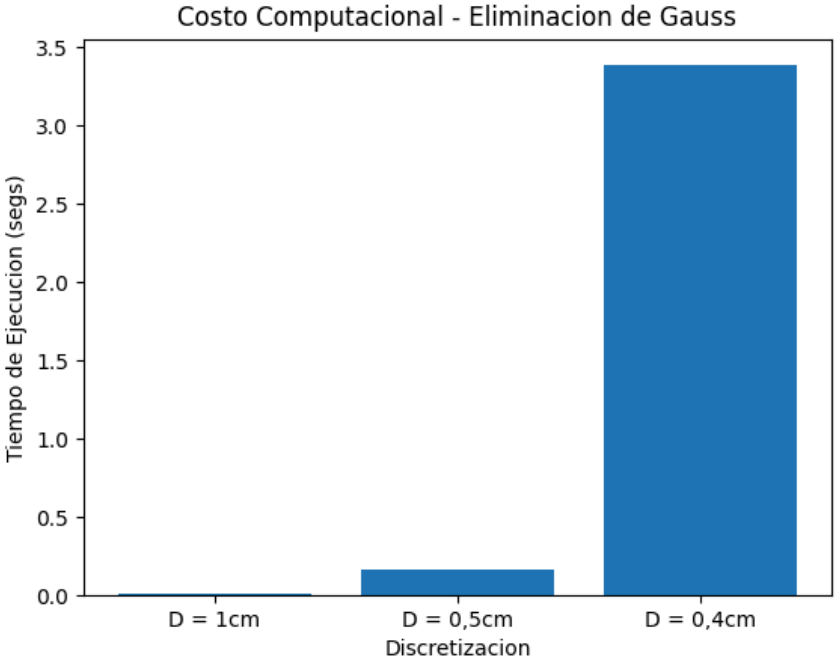
Con los métodos indirectos podemos ver que el costo computacional en función de la discretización resulta ser inversamente proporcional. A menor sea la está, mayor es el costo computacional. Al mismo tiempo, utilizando las mismas discretizaciones, se ve que el costo se reduce significativamente utilizando el método de Gauss Seidez.

Sin embargo se puede notar cómo es que comparando los costos entre los métodos indirectos y la eliminación de gauss se puede concluir que resolviendo el problema con discretizaciones grandes como 1 cm, no parece haber grandes diferencias entre ellos. Por otro lado ya podemos ver que en el caso de la discretización de 0,5cm se nota que para resolver el problema con mayor eficiencia parece conveniente utilizar el método directo.

De todos modos con solo 0,1 cm de diferencia con la última discretización, el costo computacional del método de eliminación de Gauss se dispara con una discretización igual a 0,4 cm y resulta más eficiente utilizar los métodos indirectos.



f) En la siguiente tabla de doble entrada se representa la cantidad de iteraciones que le tomó a cada método indirecto en resolver el problema con cada una de las discretizaciones.

Como se puede intuir del análisis del costo computacional, no es raro ver que al método de Gauss-Seidez le tomó significativamente menos iteraciones para llegar a un resultado que aplicando el método de Jacobi.

También se puede ver que independiente del método, cuantas mayor sea la discretización, que significa el análisis de un mayor número de nodos, mayor será la cantidad de iteraciones.

| | GS | J |
|---|---|---|
| 1cm | 41 | 77 |
| 0.5cm | 159 | 305 |
| 0.4cm | 237 | 455 |

## 3. Conclusiones

Comparando los distintos métodos y variables podemos ver cambios significativos en con los datos obtenidos. Está claro que los dos métodos indirectos son más eficientes que resolviendo el sistema con la eliminación de Gauss en los casos que se tengan que resolver una gran cantidad de ecuaciones lineales. Sin embargo en los casos en donde son pocas las variables a encontrar el método directo parece ser, por un poco, más eficiente.

Además de esto se puede ver que el costo que tiene el problema utilizando la eliminación de Gauss está mucho más afectado que resolviendo por métodos indirectos. Un pequeño cambio en la discretización del problema dispara el costo computacional en función del tiempo.

Otro factor que descubrimos en la resolución del problema es que al utilizar los métodos de Jacobi o de Gauss-Seidez era muy importante tener una tolerancia de error baja y un vector inicial adecuado. De otra manera la solución al problema resultaba ser muy distrito al método más exacto, osea el de eliminación de Gauss.

## 4. Anexo

Link de GitHub al repositorio con el codigo de python:

https://github.com/juancruzPuch/TP1-Modelacion-Numerica.git

Para tener en cuenta:
Las constantes están en la parte de arriba del código. Ahí se puede modificar las discretizaciones, la tolerancia y el valor del elemento del vector inicial en los métodos indirectos.
Funciones importantes:

- crear_funcion_respecto_horario(largo_placa, ancho_placa)
- crear_graficos_de_plancha(largo_placa, ancho_placa)
- crear_graficos_de_plancha_gauss(largo_placa, ancho_placa)
- mostrar_iteraciones_gauss_seidez(largo_placa, ancho_placa)
- mostrar_iteraciones_jacobi(largo_placa, ancho_placa)
- graficar_grafico_costo_computacional_gauss()
- graficar_grafico_costo_computacional_jacobi()
- graficar_grafico_costo_computacional_gauss_seidez()
- j, i = resolucion_por_jacobi(largo_placa, ancho_placa, TEMPERATURA_IZQUIERDA)
- gs, i = resolucion_por_gauss_seidez(largo_placa, ancho_placa, TEMPERATURA_IZQUIERDA)
- eg = resolucion_por_gauss(largo_placa, ancho_placa, TEMPERATURA_IZQUIERDA)