Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires

1er. Cuatrimestre | 2024

95.10/CB051 | Modelación numérica
75.12 | 95.04 | Análisis numérico I A
95.13 | Métodos matemáticos y numéricos

Trabajo Práctico #1
Distribución de temperaturas en una placa

Problema

La solución aproximada ϕ_t de la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi=0$ en un dominio bidimensional rectangular discretizado utilizando una grilla uniforme ($x_i=x_0+i*\Delta x$; $y_j=y_0+j*\Delta y$) puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que surge de aplicar el siguiente operador a cada uno de los nodos de la grilla:

$$4 \cdot \varphi_{i\,j} - \varphi_{i-1\,j} - \varphi_{i+1\,j} - \varphi_{i\,j+1} - \varphi_{i\,j-1} = 0$$

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales resultante es rala (a lo sumo 5 elementos por fila son distintos de cero) y presenta una estructura tridiagonal en bloques.

En la Figura 1 se representa una región de la placa madre de una computadora con dimensiones L1 y L2, donde se desea conocer la distribución de temperaturas. Despreciando las pérdidas de calor de la placa, la distribución de temperaturas puede ser calculada resolviendo la ecuación de Laplace utilizando a T_a, T_b, T_c y T_d como condiciones de borde (de tipo DIRICHLET). Las temperaturas T_b, T_c y T_d están asociadas a los valores dentro del equipo y la temperatura T_a a la temperatura ambiente.

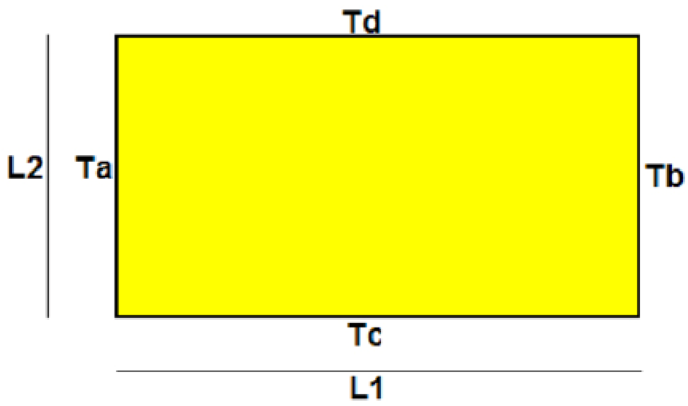

Figura 1

En la Figura 2 se muestra un ejemplo de discretización del dominio, en donde las temperaturas en los nodos rojos corresponden a las condiciones de borde, mientras que los nodos amarillos representan las incógnitas del problema.

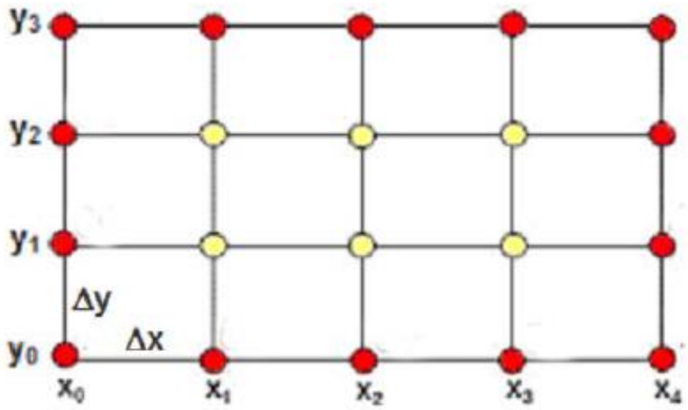

Figura 2

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se requiere resolver dos problemas:

1. Manteniendo T_b, T_c y T_d constantes y adoptando T_a según el valor medio de la temperatura ambiente en un día de verano.
2. Manteniendo T_b, T_c y T_d constantes y adoptando T_a según la variación diaria de temperatura ambiente en un día de verano.

Datos del Problema

Temperatura media (12 de enero de 2015): 30 ºC

Distribución diaria de las temperaturas (12 de enero de 2015):

Tabla 1. Temperaturas del 12 de enero de 2015 en Quilmes (Buenos Aires).

Hora	*Temperatura [°C]*
0	26
5	21
9	29
15	37
20	31
23	24

L1 = 5 cm | L2 = 4 cm

T_b = 72 ºC | T_c = 44 ºC | T_d = 63 ºC

Descripción de tareas

a) Plantear de forma genérica el sistema de ecuaciones lineales a resolver.

b) Discretizar espacialmente con tres pasos de discretización distintos (iguales en ambas direcciones, $\Delta x=\Delta y$) de tres órdenes de magnitud diferentes.

c) Resolver para las tres discretizaciones el problema 1 utilizando los siguientes métodos de resolución del SEL:

   1. Eliminación Gaussiana.
   2. Método de Jacobi.
   3. Método de GaussSeidel.

   Comparar resultados y graficar la distribución de temperaturas.

d) Resolver para las tres discretizaciones el problema 2, para cada una de las horas del día, utilizando los siguientes métodos de resolución del SEL:

   1. Eliminación Gaussiana.
   2. Método de Jacobi.
   3. Método de GaussSeidel.

   A partir de los datos de la Tabla 1, generar la curva de variación horaria con algún criterio.

   Comparar resultados y graficar la distribución de temperaturas. Graficar la evolución temporal de la temperatura en el centro de la placa, compararla con la variación de la temperatura ambiente horaria y la temperatura ambiente media diaria.

e) Cuantificar y comparar el costo computacional de cada una de las resoluciones utilizando funciones de GNU Octave. Resumir resultados en una tabla y establecer conclusiones.

f) Para las resoluciones con métodos indirectos del problema 1, analizar velocidad de convergencia en función de discretización