Interpolación de Lagrange.

Punto 1:

$(X_i, Y_i) \quad Y_i = F(X_i)$

$(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{n-1}, Y_{n-1})$

Grado $n-1$

$P(X) \overset{?}{\approx} F(X)$

P(X) combinación lineal de n polinomios $L_i(X)$.

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cdot L_i(X)$$

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{X - X_j}{X_i - X_j}$$

Ejemplo:

$$L_0(X) = \prod_{j}^{n-1} \frac{X - X_j}{X_0 - X_j}$$

$$= \frac{X - X_1}{X_0 - X_1} \cdot \frac{X - X_2}{X_0 - X_2} \cdot \frac{X - X_3}{X_0 - X_3} \cdots \frac{X - X_{n-1}}{X_0 - X_{n-1}}$$

$$L_1(X) = \prod_{j}^{n-1} \frac{X - X_j}{X_1 - X_j}$$

$$= \frac{X - X_0}{X_1 - X_0} \cdot \frac{X - X_2}{X_1 - X_2} \cdot \frac{X - X_3}{X_1 - X_3} \cdots \frac{X - X_{n-1}}{X_1 - X_{n-1}}$$

$$L_2(X) = \frac{X - X_0}{X_2 - X_0} \cdot \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \cdots$$

Al final tenemos:

$$P(x) = F(x_0)L_0(x) + F(x_1)L_1(x) + F(x_2)L_2(x) + \dots$$
$$+ F(x_{n-1})L_{n-1}(x)$$

$P(x)$ es una combinación lineal de los polinomios

$L_0(x), L_1(x), L_2(x), \dots, L_{n-1}(x)$

$$\underset{\downarrow}{P(x)} = c_0 \underset{\downarrow}{V_0} + c_1 \underset{\downarrow}{V_1} + c_2 \underset{\downarrow}{V_2} + \dots + c_{n-1} \underset{\downarrow}{V_{n-1}}$$

$P_{n-1} \quad P_{n-1} \quad P_{n-1} \quad P_{n-1} \quad P_{n-1}$

$$\begin{matrix} p_1 x^{n-1} \\ p_2 x^{n-2} \\ \vdots \\ p_{n-1} x^0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \dots & V_{n-1} \end{pmatrix} \vec{c}$$

$V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$
son los vectores que se forman
con los coeficientes de los polinomios
$L_0(x), L_1(x), \dots, L_{n-1}(x)$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \dots & V_{n-1} \end{pmatrix} \vec{c}$$

Si el polinomio es único, la combinación lineal es única
es decir:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \dots & V_{n-1} \end{pmatrix} \vec{c}$$

Matriz
$n-1 \times n-1$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0\,0} & V_{1\,0} & V_{2\,0} & V_{3\,0} & \cdots & V_{n-1\,0} \\ V_{0\,1} & V_{1\,1} & V_{2\,1} & V_{3\,1} & & V_{n-1\,1} \\ V_{0\,2} & V_{1\,2} & V_{2\,2} & V_{3\,2} & & V_{n-1\,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{0\,n-1} & V_{1\,n-1} & V_{2\,n-1} & V_{3\,n-1} & \cdots & V_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} \vec{C}$$

Hay un único $\vec{C}$ para cada $\vec{P}$

Por ejemplo $P(X_0)$

$$\begin{pmatrix} F(X_0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \vec{C}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} F(X_0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $P(X_1)$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(X_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y así hasta $P(X_{n-1})$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F(X_{n-1}) \end{pmatrix}$

Esto se logra porque

$$L_i(X_i) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

Y porque

$$L_i(X_j) \overset{j \neq i}{=} 0$$

Esto demuestra que hay una combinación lineal única para cada $P(X)$