



Emmanuel de Langre

Emmanuel de Langre est professeur associé à l'École polytechnique. Ses travaux de recherche portent sur les instabilités induites par les écoulements sur les structures, les effets vibratoires des écoulements diphasiques et les oscillations de systèmes immersés.

Cette introduction aux interactions mécaniques entre fluides et solides s'adresse aux étudiants, ingénieurs et chercheurs ayant des connaissances de base en Mécanique des solides et en Mécanique des fluides.

Ce livre a pour objet d'introduire, au sens de *rendre familiers*, les mécanismes physiques qui couplent les mouvements simultanés des fluides et des solides. Les domaines d'application concernés sont vastes, du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil et de la biomécanique à la micro-électronique.

Le point de vue développé est avant tout méthodologique et pratique. Il s'agit en effet d'abord de présenter une *méthode* d'analyse de tels problèmes couplés, en s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle. Pour cela, l'exposé fait constamment référence à des phénomènes observés dans les domaines évoqués plus haut. Dans chaque chapitre, on propose également quelques expériences simples qui illustrent le propos.

Illustration de couverture :

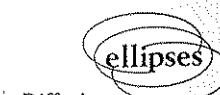
Barque au mouillage par mer calme. Photo : E. de Langre.



POLYTECHNIQUE



9 782730 208338



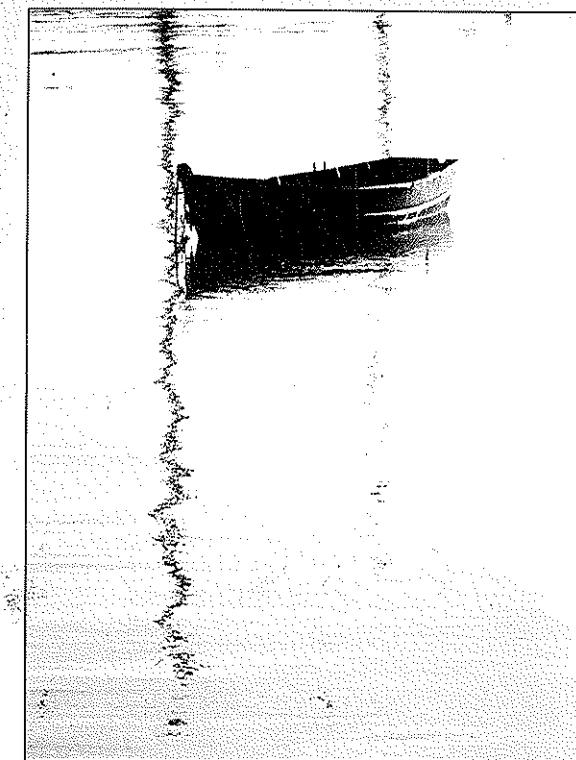
ISBN 2-7302-0833-X

Fluides et Solides

Emmanuel de Langre

Emmanuel de Langre

Fluides et Solides



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



Ce logo a pour objet d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, tout particulièrement dans le domaine universitaire, le développement massif du « photocopillage ».

Cette pratique qui s'est généralisée, notamment dans les établissements d'enseignement, provoque une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que la production et la vente sans autorisation, ainsi que le recel, sont passibles de poursuites.

Les demandes d'autorisation de photocopier doivent être adressées à l'éditeur ou au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20, rue des Grands-Augustins , 75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70.

Avant-Propos

Ce livre est le support d'un cours d'introduction aux interactions fluide-structure, enseigné aux élèves de l'École polytechnique dans le cadre de la spécialisation en Sciences de l'Ingénieur. Cet enseignement a vu le jour lors de mon détachement du Commissariat à l'Énergie Atomique comme enseignant au Département de Mécanique. C'est donc le fruit de plusieurs conjonctions, de mon métier d'ingénieur et de celui d'enseignant, de mon expérience en vibration des structures au CEA et de la culture du Laboratoire d'Hydrodynamique (LadHyX). J'ai ainsi eu la chance de bénéficier, dans ces différents domaines des avis éclairés de François Axixa et de Patrick Huerre. C'est Jean Salençon, par ses conseils et ses encouragements discrets, qui est à l'origine de cette édition. Le texte doit beaucoup aux relectures précieuses et aux contributions de Ianis Politopoulos, Uwe Ehrenstein, Olivier Doaré et Matteo Facchinetti.

L'objet de ce cours est donc d'introduire, au sens de *rendre familier*, les mécanismes physiques qui couplent les mouvements simultanés des fluides et des solides. Les domaines d'application concernés sont vastes, du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil et de la biomécanique à la micro-electronique. Le point de vue développé est avant tout méthodologique et pratique. Il s'agit en effet d'abord de présenter une *méthode* d'analyse de tels problèmes couplés, en s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle. Pour cela, l'exposé fait constamment référence à des phénomènes observés dans les domaines évoqués plus haut. Dans chaque chapitre, on propose également quelques expériences et observations élémentaires, réalisables chez soi et qui illustrent le propos.

L'introduction donne quelques exemples de problèmes d'interaction fluide-structure, afin de mesurer la variété du domaine abordé.

Le premier chapitre structure l'ensemble du cours : L'analyse dimensionnelle y est utilisée pour construire à partir des caractéristiques d'une réalité, les nombres adimensionnels pertinents. Ceux-ci nous permettront ensuite de définir les domaines d'application des principaux modèles. Les équations adimensionnelles sont également obtenues et l'influence des nombres adimensionnels sur les différents termes apparaît.

Le deuxième chapitre développe le cas où la vitesse propre du fluide peut être négligée devant celle consécutive au mouvement du solide. Les notions de masse ajoutée, de raideur ajoutée, d'effets d'histoire et de couplages de modes en découlent.

De façon symétrique le troisième chapitre est consacré aux situations pour lesquelles la vitesse du solide peut être négligée devant celle du fluide. C'est le domaine de l'aéroélasticité, avec les instabilités statiques et dynamiques que nous étudions sur des systèmes simples issus du monde aéronautique principalement.

Le quatrième chapitre donne les résultats essentiels pour comprendre les couplages qui apparaissent lorsque les deux milieux ont des vitesses comparables.

Enfin, le cinquième chapitre est consacré aux effets de fluctuations propres à l'écoulement sur la dynamique des structures, notamment celles associées aux sillages oscillants et à la turbulence.

Le Chêne et le Roseau.

Le chêne un jour dit au roseau :
 « Vous avez bien sujet d'accuser la nature ;
 Un roitelet pour vous est un pesant fardeau ;
 Le moindre vent qui d'aventure
Fait rider la face de l'eau,
Vous oblige à baisser la tête.
Cependant que mon front, au Caucase pareil,
Non content d'arrêter les rayons du soleil,
Brave l'effort de la tempête.
Tout vous est aquilon, tout me semble zéphyr.
Encor si vous naissiez à l'abri du feuillage
Dont je couvre le voisinage,
Vous n'auriez pas tant à souffrir :
Je vous défendrai de l'orage ;
Mais vous naissez le plus souvent
Sur les humides bords des royaumes du vent.
La nature envers vous me semble bien injuste.
 - Votre compassion, lui répondit l'arbuste,
Part d'un bon naturel ; mais quittez ce souci :
Les vents me sont moins qu'à vous redoutables ;
Je plie, et ne romps pas.
Vous avez jusqu'ici
Contre leurs coups épouvantables
Résisté sans courber le dos ;
Mais attendons la fin. »
Comme il disait ces mots,
Du bout de l'horizon accourt avec furie
Le plus terrible des enfants
Que le nord eût porté jusque là dans ses flancs.
L'arbre tient bon ; le roseau plie.
Le vent redouble ses efforts,
Et fait si bien qu'il déracine
Celui de qui la tête au ciel était voisine,
Et dont les pieds touchaient à l'empire des morts.

Jean de La Fontaine, Fables, Livre I, 1668.

Table des matières

1 ANALYSE DIMENSIONNELLE	11
1.1 Paramètres sans dimension	12
1.1.1 Hypothèses simplificatrices	12
1.1.2 Variables et paramètres	13
1.1.3 Analyse découpée	13
1.1.4 Analyse couplée	16
1.1.5 Application	17
1.1.6 Autres nombres adimensionnels	18
1.2 Analyse dimensionnelle des équations	19
1.2.1 Hypothèses complémentaires	19
1.2.2 Équations de conservation et d'interface	20
1.2.3 Analyse découpée	21
1.2.4 Analyse couplée	22
1.3 Conclusion	23
2 FLUIDE AU REPOS	25
2.1 Analyse dimensionnelle	27
2.1.1 Nombres sans dimension	27
2.1.2 Variables sans dimension	27
2.1.3 Petites vitesses réduites	29
2.2 Hypothèse de petits déplacements	30
2.2.1 Efforts à l'interface	30
2.2.2 Projection de l'effort	32
2.3 Raideur ajoutée	33
2.3.1 Raideur de gradient	33
2.3.2 Raideur de forme	35
2.4 Masse ajoutée	36
2.4.1 Pression fluctuante	36
2.4.2 Interprétation physique	38
2.5 Effets de la viscosité	40
2.5.1 Nombre de Stokes	40
2.5.2 Réponse impulsionale	41
2.5.3 Solution générale	42
2.5.4 Mouvement harmonique	43
2.6 Effets de la surface libre	44

TABLE DES MATIÈRES

2.6.1 Modes de ballottement	44
2.6.2 Couplage avec un mouvement du solide	46
2.7 Expériences élémentaires	48
2.7.1 Effets visqueux	48
2.7.2 Couplage avec un mode de ballottement	49
2.8 Conclusion	51
3 AÉROÉLASTICITÉ	53
3.1 Analyse dimensionnelle	55
3.1.1 Nombres et variables sans dimension	55
3.1.2 Grandes vitesses réduites	56
3.2 Instabilités statiques	58
3.2.1 Mécanisme générique	58
3.2.2 Torsion des ailes	59
3.3 Instabilités dynamiques	61
3.3.1 Mécanisme générique	61
3.3.2 Flottement des ailes d'avion	64
3.3.3 Instabilité du tuyau d'arrosage	66
3.3.4 Instabilité dans un sillage	74
3.3.5 Panneau souple en écoulement supersonique	76
3.4 Expériences élémentaires	79
3.4.1 Instabilité statique	79
3.4.2 Instabilité dynamique par couplage antisymétrique	79
3.5 Conclusion	82
4 COUPLAGES FORTS	83
4.1 L'approximation pseudo-statique	84
4.1.1 Hypothèses	84
4.1.2 Instabilité par crise de trainée	87
4.1.3 Instabilité par crise de portance	88
4.2 Effets instationnaires	90
4.3 Amortissement de Coriolis	95
4.4 La corde fluide	98
4.5 Expériences élémentaires	101
4.5.1 Amortissement de Coriolis et instabilité par couplage de modes	101
4.5.2 Mode propagatif	102
4.6 Conclusion	102
5 FORÇAGE PAR L'ÉCOULEMENT	105
5.1 Effets du sillage sur un cylindre	107
5.1.1 Caractéristiques des fluctuations dans un sillage .	107
5.1.2 Portance fluctuante	109
5.1.3 Effets de corrélation	110
5.2 Couplage entre sillage et mouvement	111
5.3 Réponse à la turbulence	114
5.3.1 Caractérisation des efforts	114
5.3.2 Réponse vibratoire	114

TABLE DES MATIÈRES

5.3.3 Système multimodal	116
5.4 Expérience élémentaire	116
5.5 Conclusion	117
Index	125

Introduction

La Mécanique des solides considère généralement les fluides environnants comme d'influence négligeable, tandis que la Mécanique des fluides ne voit dans les solides que des frontières du domaine d'analyse. Ces approximations sont heureusement légitimes dans un très grand nombre de cas, et l'expérience les a bien validées. Cette même expérience a montré qu'il existe aussi des situations où l'on ne peut pas négliger ces interactions. Plus précisément il faut alors utiliser *conjointement* la Mécanique des solides et la Mécanique des fluides pour aboutir à une modélisation satisfaisante de la réalité. On désignera ici par le terme de *Mécanique des interactions fluide-structure* l'ensemble de ce qui permet d'obtenir de telles modélisations.

L'utilisation conjointe de deux modélisations est une démarche scientifique générique : s'il est habituel, au moins depuis Descartes, de chercher à isoler les phénomènes physiques pour réduire un problème complexe à des problèmes élémentaires plus simples à résoudre, il est parfois nécessaire d'articuler plusieurs approches scientifiques pour modéliser une réalité. Le langage scientifique et technique moderne traduit ce fait, par l'utilisation de termes tels que thermo-élasticité, bio-mécanique ou psycho-acoustique.

Outre cet intérêt méthodologique, la Mécanique des interactions fluide-structure est d'abord destinée à résoudre des problèmes bien réels. Comme on le verra plus loin, la recherche de plus grandes vitesses, l'utilisation de matériaux plus légers, le souci de confort vibratoire ou les impératifs de plus grande fiabilité amènent progressivement ce domaine de la Mécanique dans ce que l'on appelle les Sciences de l'Ingénieur.

Il reste que ce que nous avons appelé la Mécanique des interactions fluide-structure recouvre de toute évidence des phénomènes fort éloignés les uns des autres. Commençons donc par en citer quelques exemples pour montrer l'étendue du domaine scientifique, l'importance des applications industrielles et surtout fixer les idées.

- (1) : *Écrasement au sol d'un chasseur F117, le 15/09/97 lors d'un meeting aérien à Baltimore, USA.*

Cet accident a été attribué dès le lendemain aux vibrations excessives dues au "flottement d'un aileron", problème générique de cet avion, qui avait nécessité un renforcement des structures sur les premiers appareils [29]. Le terme flottement sert ici pour décrire des vibrations suffisamment fortes pour que les points d'attache de l'aileron cassent. En se détachant, celui-ci est venu heurter l'empennage, entraînant la perte de l'avion.

- (2) : *Barrages souples.*

Il existe actuellement à travers le monde plus de 2000 barrages souples constitués d'un long tube gonflé d'eau ou d'air, ancré à

sa base. Ces tubes peuvent faire 5 m de diamètre et 100 m de long, formant ainsi des barrages ajustables que l'on peut gonfler ou dégonfler selon les saisons. Leur comportement mécanique est assez complexe à modéliser, dans les phases de gonflage, de remplissage et lors de séismes ou d'interactions avec de grosses vagues [20].

- (3) : *Mouvement d'une tête de lecture.*

Certains dispositifs de lecture-écriture sur disque informatique sont formés d'une tête de lecture planant à $0.1 \mu\text{m}$ de la surface du disque, grâce à l'air entraîné par ce dernier. La stabilité de la position de cette tête est un problème de grande importance pratique pour la fiabilité de la lecture et de l'écriture de données. On produit chaque année dans le monde quelques millions de ces systèmes [30].

- (4) : *Souplesse de la peau de dauphin.*

La faible trainée du dauphin a fait l'objet de nombreuses études en mécanique des fluides depuis les années 1960. On a notamment cherché à comprendre le lien entre la souplesse particulière de sa peau et la réduction du coefficient de friction ou l'apparition de la turbulence. Des peaux artificielles ont été rajoutées sur des objets sous-marins, mais leur capacité à réduire la trainée de ces objets n'est pas démontrée, ce qui laisse supposer que certaines interactions ne sont pas bien représentées [10].

- (5) : *Effet "Castafiore".*

Immortalisée par Hergé et reprise dans une campagne publicitaire pour une marque de téléphone, la rupture d'un verre par la voix d'une cantatrice est-elle possible ? Quel est le rôle de la hauteur et de la durée du son, de la puissance de la voix, de la finesse du verre ?

- (6) : *Rupture du pont de Tacoma.*

Cette spectaculaire rupture est connue pour être la conséquence de l'effet du vent sur les vibrations du pont. Par contre le mécanisme précis à l'origine de ces interactions a fait l'objet de nombreuses controverses, jusqu'au début des années 90 [31].

Dans ces quelques exemples une modélisation s'appuyant sur l'utilisation conjointe de la Mécanique des fluides et de la Mécanique des solides semble nécessaire. Leur grande variété suggère, avant toute analyse détaillée, de se munir d'un outil de classification des phénomènes entrant en jeu. Cet outil est l'*Analyse Dimensionnelle*, objet du Chapitre 1. Les chapitres suivants sont des incursions limitées dans le très vaste monde des modélisations en interaction fluide-structure : *Fluide au repos* dans le Chapitre 2 et *Aéroélasticité* dans le Chapitre 3, *Couplages forts* puis *Forçage par l'écoulement* dans les Chapitres 4 et 5.

On trouvera notamment dans les références [16], [14], [17], [5], [19], [21], [1] des analyses plus approfondies et plus complètes de chacun de ces domaines.

Chapitre 1

ANALYSE DIMENSIONNELLE

Tout vous est aquilon, tout me semble zéphyr.

Jean de la Fontaine, *Le chêne et le roseau*, 1668.

Si tous les mouvements de l'univers se produisaient deux ou trois fois plus vite, il n'y aurait rien à modifier à nos formules, ni aux nombres que nous y faisons entrer. La conscience aurait une impression indénissable, et en quelque sorte qualitative de ce changement.

Henri Bergson, *Essai sur les données immédiates de la conscience*, 1889.

La variété des situations évoquées précédemment montre la nécessité d'une approche systématique permettant de les classer en fonction de paramètres physiques. En Mécanique des fluides, l'analyse dimensionnelle est utilisée couramment pour déterminer quelle modélisation (fluide parfait, fluide incompressible, ...) est applicable à une situation donnée. Les nombres de Reynolds ou de Mach sont d'usage courant. En Mécanique des solides, l'analyse dimensionnelle est moins explicitement utilisée. On conçoit bien qu'une telle démarche de classement soit très utile en Mécanique des interactions fluide-structure, où le nombre de paramètres physiques est augmenté par la juxtaposition de deux systèmes.

Nous allons en premier lieu dans ce chapitre montrer comment on peut construire les paramètres sans dimension de la modélisation d'un problème couplé en partant de ceux associés aux modélisations respectives de Mécanique des fluides et de Mécanique des solides. Nous appliquerons ensuite cette démarche aux exemples proposés dans l'introduction.

Nous écrirons enfin les lois de conservation et conditions d'interface de l'ensemble fluide-solide, en faisant apparaître ces paramètres adimensionnels.

1.1 Paramètres sans dimension

La démarche de construction de nombres adimensionnels est simple, décrite dans la plupart des cours de Mécanique des fluides et dans de nombreux ouvrages généraux [13], [7], [9], [18], [25]. Nous utiliserons dans ce chapitre les notations, terminologies et surtout l'approche du cours de Mécanique des fluides de P. Huerre [18]. La modélisation du solide se réfère plus particulièrement au cours de Mécanique des milieux continus de J. Salençon [23].

1.1.1 Hypothèses simplificatrices

La démarche proposée ci-dessous a un caractère systématique et s'applique aux cas les plus généraux. Pour alléger sa description nous ferons cependant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- (a) Le fluide et le solide sont contenus dans deux domaines disjoints.
- (b) Il n'y a pas d'échange de masse entre ces deux milieux.
- (c) La température y est uniforme et constante dans le temps.

La première hypothèse exclut les interactions dans les milieux continus qui représentent un solide poreux en présence d'un fluide, telle une éponge. La deuxième hypothèse exclut notamment la dissolution ou la solidification à l'interface. La troisième permet de s'affranchir de toutes considérations de thermique.

1.1. PARAMÈTRES SANS DIMENSION

1.1.2 Variables et paramètres

Les variables **indépendantes** seront ici les coordonnées du point courant, $\underline{x} = (x, y, z)$, et le temps t . On notera que dans ce chapitre le point courant peut aussi bien être celui de la configuration de référence (représentation Lagrangienne) que celui de la configuration actuelle (représentation Eulerienne).

Les variables **dépendantes**, ou fonctions de champ, sont bien sûr différentes selon le milieu considéré. Dans le fluide nous considérerons la vitesse \underline{U} , la pression p et la masse volumique ρ_F . Dans le solide, on prend comme variables le déplacement ξ , la contrainte de Cauchy $\underline{\sigma}$ et la masse volumique ρ_S .

Les **paramètres physiques** et les **données** doivent être regroupés selon leur signification propre. Nous ferons l'hypothèse que seuls interviennent les paramètres suivants :

- Paramètres physiques propres au fluide : μ , la viscosité dynamique et c_0 , la vitesse du son..
- Paramètres physiques propres au solide : E , module d'Young et ν , coefficient de Poisson.
- Données communes au fluide et au solide : une dimension caractéristique du domaine, L et la gravité g .
- Données propres au fluide : U_0 une vitesse de référence (par exemple en amont), ρ_F^0 une masse volumique de référence et p_0 une pression de référence.
- Données propres au solide : ξ_0 un déplacement de référence et ρ_S^0 une masse volumique de référence.

Cette liste fixe donc l'ensemble des grandeurs qui peuvent intervenir dans les problèmes d'interaction fluide-solide que nous allons considérer.

Il faut bien noter que les paramètres ou données cités plus haut sont soit connus, par exemple dans une condition aux limites, soit estimés par l'intermédiaire d'autres données. Dans ce cas, une vérification a posteriori de cette estimation est nécessaire. Par exemple, si aucune condition aux limites ne donne directement un ordre de grandeur ξ_0 du déplacement dans le solide, on peut l'estimer à partir des conditions aux limites en effort et de la rigidité de la structure, ou tout simplement par l'intuition.

1.1.3 Analyse découpée

Avant d'aborder le cas général, faisons ici l'hypothèse simplificatrice de découplage :

“Les variables dépendantes définies pour chaque milieu ne dépendent que des paramètres et des données définies pour ce milieu.”

Selon cette hypothèse, le déplacement dans le solide ne dépendrait pas de la vitesse du fluide et une modification de module d'Young n'aurait aucune influence sur l'écoulement.

La vitesse du fluide s'écrit alors sous la forme

$$\underline{U} = f_U(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0). \quad (1.1)$$

De même, la pression et la masse volumique s'écrivent

$$p = f_p(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0), \quad (1.2)$$

$$\rho_F = f_{\rho_F}(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0). \quad (1.3)$$

L'utilisation du théorème de Waschy-Buckingham, ou théorème π , permet de réduire ces relations à des relations entre un nombre réduit de combinaisons de ces paramètres, uniquement à partir de considérations sur leurs dimensions physiques.

Le nombre total de grandeurs physiques, noté $N + 1$, vaut ici 10. Le rang de la matrice des exposants aux dimensions est $r = 3$, comme on peut le voir en formant le tableau suivant.

	U	x	t	μ	c_0	L	g	U_0	p_0	ρ_F^0
Longueur	1	1	0	-1	1	1	1	1	-1	-3
Masse	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Temps	-1	0	1	-1	-1	0	-2	-1	-2	0

La relation (1.1) est donc réductible à une relation entre $N + 1 - r = 7$ paramètres adimensionnels, par exemple

$$\frac{U}{U_0} = F_U\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right). \quad (1.4)$$

De même, p et ρ_F peuvent s'exprimer en fonction des 6 nombres adimensionnels arguments de F_U , eux-mêmes étant adimensionnés :

$$\frac{p}{p_0} = F_p\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right), \quad (1.5)$$

$$\frac{\rho_F}{\rho_F^0} = F_{\rho_F}\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}, \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}\right). \quad (1.6)$$

On retrouve les nombres adimensionnels classiques et leurs interprétations :

(a) La quantité $U_0 t / L = t/T_{Fluide}$ est le temps réduit où $T_{Fluide} = L/U_0$ est l'ordre de grandeur du temps de passage du fluide le long de la distance caractéristique L et donc l'échelle de temps naturelle du point de vue du fluide.

(b) La quantité $\Pi = \rho_F^0 U_0^2 / p_0$ est la pression dynamique réduite, inverse du nombre d'Euler.

(c) La quantité $R_E = \rho_F^0 U_0 L / \mu$ est le nombre de Reynolds qui mesure l'importance relative des vitesses de convection et de diffusion visqueuse.

(d) La quantité $F_R = U_0 / \sqrt{Lg}$ est le nombre de Froude qui mesure l'importance relative des forces d'inerties et de pesanteur.

(e) La quantité $M_{ach} = U_0 / c_0$ est le nombre de Mach, mesure de l'effet de compressibilité.

De façon similaire, on écrit que le déplacement dans le solide ne dépend que des grandeurs qui sont reliées au solide :

$$\xi = f_\xi(\underline{x}, t; g, E, \nu, L; \xi_0, \rho_S^0) \quad (1.7)$$

et des relations de même forme pour $\underline{\sigma}$ et ρ_S . Le théorème de Waschy-Buckingham donne ici une réduction de 9 à 6 du nombre de paramètres pour chaque relation, soit par exemple :

$$\frac{\xi}{\xi_0} = F_\xi\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right). \quad (1.8)$$

De même, on peut exprimer $\underline{\sigma}$ et ρ_S en fonction de ces paramètres :

$$\frac{\underline{\sigma}}{E} = F_\sigma\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right), \quad (1.9)$$

$$\frac{\rho_S}{\rho_S^0} = F_{\rho_S}\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{t \sqrt{E/\rho_S^0}}{L}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}\right). \quad (1.10)$$

Ces variables et nombres adimensionnels sont moins classiques :

(a) La quantité $t \sqrt{E/\rho_S^0} / L = t/T_{Solide}$ est le temps réduit où $T_{Solide} = L / \sqrt{E/\rho_S^0}$ est le temps caractéristique de passage des ondes élastiques sur la longueur L , lesquelles ont une célérité d'ordre de grandeur $c_s = \mathcal{O}(\sqrt{E/\rho_S^0})$. C'est une échelle de temps de la dynamique du solide.

(b) La quantité $D = \xi_0 / L$ est une mesure d'effets de grands déplacements que nous dénommerons *déplacement réduit*.

(c) La quantité $\mathcal{G} = \rho_S^0 g L / E$ est une mesure des déformations induites par le poids propre dans la structure. En effet les contraintes associées aux forces de gravité ont pour ordre de grandeur

$$\sigma = \mathcal{O}\left(\frac{Force}{Section}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g Volume}{Section}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g L^3}{L^2}\right) = \mathcal{O}(\rho_S^0 g L). \quad (1.11)$$

Les déformations associées ont donc pour ordre de grandeur

$$\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_S^0 g L}{E}\right) = \mathcal{O}(\mathcal{G}). \quad (1.12)$$

Nous dénommerons cette grandeur *nombre de gravité*.

1.1.4 Analyse couplée

Faisons maintenant l'hypothèse de couplage qui s'écrit :

“Les variables dépendantes définies pour chaque milieu dépendent des paramètres et des données relatives aux deux milieux.”

Ainsi, sans en préciser le mode, nous admettons par exemple que la viscosité du fluide peut influer sur le déplacement du solide. La relation (1.1) est maintenant remplacée par une forme plus générale :

$$\underline{U} = g_U(\underline{x}, t; g, \mu, c_0, L; U_0, p_0, \rho_F^0; E, \nu, \xi_0, \rho_S^0), \quad (1.13)$$

et de même pour p , ρ_F , ξ , g , ρ_S . L'analyse des dimensions de ces variables et paramètres donne $N + 1 = 14$, $r = 3$ et donc la possibilité d'exprimer ces relations en fonction de 11 nombres adimensionnels. Prenons par exemple :

$$\frac{U}{U_0} = G_U\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}; \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}; \mathbf{A}\right) \quad (1.14)$$

où \mathbf{A} est un **nouveau nombre adimensionnel**. Le choix de ce nombre adimensionnel n'est pas unique. On pourrait prendre entre autres :

(a) Le nombre de masse $M = \rho_F^0 / \rho_S^0$, rapport des masses volumiques.

(b) Le nombre de Cauchy $C_Y = \rho_F^0 U_0^2 / E$, qui mesure l'ordre de grandeur des déformations consécutives à la pression dynamique $\rho_F^0 U_0^2$. En effet, les efforts appliqués sur le solide ont pour ordre de grandeur

$$F = \mathcal{O}(\rho_F^0 U_0^2 L^2), \quad (1.15)$$

les contraintes

$$\sigma = \mathcal{O}\left(\frac{F}{L^2}\right) = \mathcal{O}(\rho_F^0 U_0^2), \quad (1.16)$$

et les déformations

$$\epsilon = \mathcal{O}\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{\rho_F^0 U_0^2}{E}\right). \quad (1.17)$$

Il peut être plus pertinent, comme on le verra dans les chapitres suivants, de choisir dans la relation (1.14) d'autres nombres adimensionnels, qui seront évidemment des combinaisons de ceux utilisés ici. Ainsi, on pourrait remplacer le nombre

$$\mathcal{G} = \frac{\rho_S^0 g L}{E} \quad (1.18)$$

par le produit

$$U_R = F_R \sqrt{\mathcal{G}} = \frac{U_0}{\sqrt{E/\rho_S^0}} = \frac{U_0}{c_S}. \quad (1.19)$$

Ce nombre appelé vitesse réduite est un rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse des ondes élastiques dans le solide. Par ailleurs, nous avons

choisi dans (1.14) une réduction du temps sous la forme de $U_0 t / L$, qui pourrait être remplacée par $t \sqrt{E/\rho_S^0} / L$.

On retiendra principalement que l'analyse dimensionnelle du système couplé fait apparaître : les nombres adimensionnels propres à la description de l'écoulement du fluide (R_E, F_R, M_{ach}, Π), les nombres adimensionnels propres à la description du mouvement du solide ($\nu, \mathcal{D}, \mathcal{G}$), et un nouveau nombre adimensionnel (par exemple C_Y).

Dans l'expression (1.14), le couplage fluide-structure se traduit essentiellement par l'influence possible des quatre nombres adimensionnels $\nu, \mathcal{D}, \mathcal{G}$ et \mathbf{A} , qui diffèrent l'équation (1.14) de la relation (1.4). Ainsi, le nombre adimensionnel \mathbf{A} , qui est le seul à combiner des grandeurs caractéristiques du fluide et du solide ne résume pas, à lui seul, l'ensemble des interactions. De la même façon, pour le solide, le déplacement s'écrit

$$\frac{\xi}{\xi_0} = F_\xi\left(\frac{\underline{x}}{L}, \frac{U_0 t}{L}; \frac{\rho_F^0 U_0^2}{p_0}, \frac{\rho_F^0 U_0 L}{\mu}, \frac{U_0}{\sqrt{Lg}}, \frac{U_0}{c_0}; \nu, \frac{\xi_0}{L}, \frac{\rho_S^0 g L}{E}; \mathbf{A}\right). \quad (1.20)$$

Le couplage fluide-structure se traduit par la présence des nombres Π, R_E, F_R, M dans la relation (1.20), à la différence de la relation (1.8).

1.1.5 Application

Pour les six exemples décrits dans l'introduction, on peut tenter de donner un ordre de grandeur des différents paramètres physiques. Le tableau ci-dessous donne *en puissances de 10* ces valeurs.

	g	μ	c_0	L	U_0	ρ_F	E	ξ_0	ρ_S
Aileron du F 117	1	-5	2	0	2	0	11	-1	4
Barrage souple	1	-3	3	1	-2	3	9	0	3
Tête de lecture	1	-5	2	-7	1	0	11	-9	4
Peau de dauphin	1	-3	3	0	1	3	8	-3	3
Effet “Castafiore”	1	-5	2	-3	-2	0	10	-6	3
Pont de Tacoma	1	-5	2	1	1	0	11	0	4

Nous pouvons alors estimer les nombres adimensionnels que nous avons mis en évidence dans ce chapitre, également en puissances de 10.

	R_E	M	F_R^2	U_R^2	C_Y	M	\mathcal{G}	\mathcal{D}
Aileron du F 117	7	0	3	-3	-7	-4	-6	-1
Barrage souple	1	-5	-6	-10	-10	0	-4	-1
Tête de lecture	-1	-1	8	-5	-9	-4	-13	-2
Peau de dauphin	7	-2	1	-3	-3	0	-4	-3
Effet “Castafiore”	0	-4	-2	-11	-14	-3	-9	-3
Pont de Tacoma	7	-1	0	-5	-9	-4	-5	-1

Les valeurs sont très sensiblement différentes d'un cas à l'autre. Sans formaliser plus loin une procédure de classement de ces exemples, on peut dire que leurs signatures en terme de paramètres adimensionnels sont différentes, et qu'ils relèveront donc de modélisations assez différentes.

1.1.6 Autres nombres adimensionnels

Dans ces quelques exemples, il apparaît que la liste des données et paramètres proposée plus haut est parfois mal adaptée. Ainsi, la raideur de l'aileron du F117 n'est pas seulement liée au module d'Young du matériau qui le constitue mais aussi à celle du système de commande. De même, le pont de Tacoma a de toute évidence plusieurs dimensions caractéristiques qui interviennent dans son comportement au vent : sa largeur, la hauteur de son profil et la longueur du tablier.

L'introduction d'une autre longueur h , par exemple une dimension dans la direction transverse à l'écoulement, amènerait un autre nombre adimensionnel, l'élancement $\mathcal{E} = L/h$ et donc d'autres combinaisons possibles de ces nombres. Le choix d'utiliser alors h ou L dans la définition des nombres faisant intervenir une longueur R_E, \mathcal{G}, \dots dépend des phénomènes qu'ils représentent. Ainsi, pour un écoulement transverse à une structure élancée on utilisera plutôt un nombre de Reynolds défini avec la dimension transverse, soit

$$R_E = \frac{\rho_F^0 U_0 h}{\mu}. \quad (1.21)$$

Par contre, le nombre de Cauchy n'exprime l'ordre de grandeur des déformations induites par la pression dynamique dans le solide que si celui-ci est massif. Pour un écoulement transverse à une structure élancée, on aurait plutôt des déformations de l'ordre de

$$\epsilon = \mathcal{O}\left[\frac{\rho_F U_0^2}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2\right] = \mathcal{O}(C_Y \mathcal{E}^2). \quad (1.22)$$

Par contre les déplacements varient comme

$$\frac{\xi}{L} = \mathcal{O}(C_Y \mathcal{E}^3). \quad (1.23)$$

Par ailleurs, notre description du solide s'est limitée à une modélisation de type Milieu Continu. On peut sans difficulté de principe l'étendre à des modélisations plus adaptées à la description de milieux élancés, telles les poutres. Plus généralement, il suffit de savoir décrire la dynamique du solide par des paramètres $q_i(t)$ comme par exemple dans la dynamique d'un solide rigide ou dans la décomposition modale d'un mouvement. Il faut alors redéfinir la vitesse des ondes élastiques et la rigidité [26]. Par exemple, si l'on modélise le solide par un simple système masse-ressort, comme nous le ferons souvent par la suite, son élasticité est définie par une raideur K dont la dimension est $[MT^{-2}]$ et par une masse $M, [M]$. Il suffit alors de remplacer dans la définition des nombres

1.2. ANALYSE DIMENSIONNELLE DES ÉQUATIONS

adimensionnels E par K/L et ρ_S par M/L^3 . La vitesse des ondes élastiques $c_s = \sqrt{E/\rho_S}$ devient $c_s = L\sqrt{K/M}$. L'équation d'évolution de la variable $q(t)$ en l'absence de couplage,

$$\frac{q}{L} = F_q(t\sqrt{\frac{K}{M}}, \frac{q_0}{L}, \frac{Mg}{K}) \quad (1.24)$$

devient ainsi

$$\frac{q}{L} = G_q\left(\frac{U_0 t}{L}, \Pi, R_E, F_R, M_{ach}, \frac{q_0}{L}, \frac{Mg}{K}, \mathbf{A}\right) \quad (1.25)$$

avec les nombres de masse et de Cauchy $\mathcal{A} = M = \rho_F^0 L^3/M$ ou $\mathcal{A} = C_Y = \rho_F^0 U_0^2 L/K$.

Enfin, si d'autres échelles de temps sont présentes par exemple du fait de périodicités de l'écoulement ou de forces extérieures, on définit alors le nombre de Strouhal, ou fréquence réduite

$$S = \frac{fL}{U_0} \quad (1.26)$$

où f est la fréquence de ces fluctuations. Ce nombre exprime donc le rapport entre le temps caractéristique de convection L/U_0 et celui des fluctuations.

1.2 Analyse dimensionnelle des équations

L'analyse effectuée dans les sections précédentes a permis de mettre en évidence quelques paramètres pertinents. Il est possible d'aller plus loin dans l'analyse du problème grâce à la connaissance que nous avons des équations qui décrivent les liens entre toutes les variables utilisées plus haut. Comme en Mécanique des fluides, seule l'analyse dimensionnelle des équations de conservation permet de dégager l'influence réelle de chaque nombre adimensionnel.

1.2.1 Hypothèses complémentaires

Pour simplifier l'exposé, diminuons le nombre de paramètres en faisant quelques hypothèses.

On suppose tout d'abord que le fluide est incompressible. On connaît bien le lien entre la valeur du nombre de Mach et le domaine de validité de cette hypothèse, en écoulement stationnaire [24]. En présence d'un solide vibrant, une analyse dimensionnelle du même type que celle du Chapitre 2 montre que la compressibilité peut jouer un rôle même à vitesse moyenne nulle : c'est là tout le domaine de la vibro-acoustique que nous n'aborderons pas dans ce cours [26, 11]. On remplace donc ici la variable dépendante $\rho_F(\underline{x}, t)$ et la donnée ρ_F^0 par un seul paramètre physique noté ρ_F .

On suppose ensuite que le solide est en transformation infinitésimale. On rappelle que cette hypothèse, qui porte sur le gradient du champ de déplacement,

$$\|\nabla \xi\| \ll 1, \quad (1.27)$$

implique celle des déformations infinitésimales [23]. Une conséquence directe en est que l'on peut écrire

$$\rho_S \simeq \rho_S^0 \quad (1.28)$$

et donc, comme pour le fluide mais pour des raisons différentes, nous remplaçons la variable dépendante $\rho_S(\underline{x}, t)$ et la donnée ρ_S^0 par un seul paramètre physique ρ_S . Par contre nous ne faisons pas à priori l'hypothèse de petits déplacements

$$\mathcal{D} = \frac{\xi_0}{L} \ll 1 \quad (1.29)$$

et nous distinguerons la configuration actuelle de la configuration de référence.

1.2.2 Équations de conservation et d'interface

On considère un fluide homogène, newtonien, incompressible et de viscosité constante et uniforme μ . On écrit alors [18] la conservation de la masse

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad (1.30)$$

et la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_F \frac{d \underline{U}}{d t} = -\rho_F g \underline{e}_z - \underline{\operatorname{grad}} p + \mu \Delta \underline{U}, \quad (1.31)$$

où \underline{e}_z est le vecteur unitaire vertical.

Pour le solide, outre l'hypothèse de petites transformations, nous supposerons le matériau élastique linéaire et isotrope et les forces de volume nulles en dehors de la pesanteur. Les variables $\xi(\underline{X}, t)$ (description Lagrangienne) et $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ sont reliées par la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\rho_S g \underline{e}_z + \operatorname{div} \underline{\sigma} \quad (1.32)$$

avec la loi de comportement élastique

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \operatorname{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \quad (1.33)$$

où

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla^t \xi + \nabla \xi). \quad (1.34)$$

Les équations de champ que nous venons d'écrire doivent être complétées par des conditions initiales et des conditions aux limites pour chaque domaine. On peut séparer ces dernières en deux groupes :

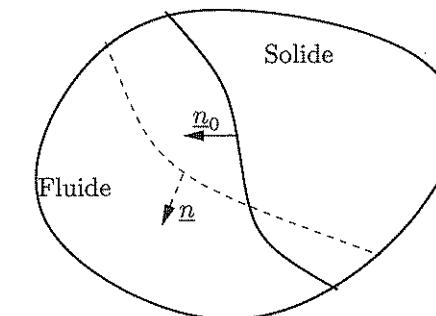


FIG. 1.1: Déplacement de l'interface entre le fluide et le solide.

- (a) celles qui s'appliquent aux *frontières externes* du domaine total.
 - (b) celles qui s'appliquent à l'*interface* entre le fluide et le solide.
- Elles contiennent une condition cinématique qui exprime la continuité du vecteur vitesse au passage de l'interface et une condition dynamique qui exprime la continuité du vecteur contrainte. Elles s'expriment respectivement par

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \xi(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad (1.35)$$

et

$$[-p(\underline{x}, t) \underline{1} + 2\mu \underline{d}(\underline{x}, t)] \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (1.36)$$

où

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{U} + \nabla \underline{U}). \quad (1.37)$$

Ces conditions d'interface sont bien sûr vérifiées sur la configuration actuelle. Ainsi, la normale à l'interface \underline{n} est en général différente de la normale initiale \underline{n}_0 , figure (1.1). Dans la suite de ce texte, la normale \underline{n} sera orientée du solide vers le fluide.

1.2.3 Analyse découpée

Supposons tout d'abord l'absence de couplage mécanique entre les milieux, par exemple en bloquant l'interface avec une condition

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \xi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{0}. \quad (1.38)$$

Les équations fondamentales du fluide peuvent s'adimensionner à l'aide des variables suivantes [18]

$$\tilde{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \tilde{t} = \frac{U_0 t}{L}; \quad \tilde{\underline{U}} = \frac{\underline{U}}{U_0}; \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_F U_0^2}. \quad (1.39)$$

Elles deviennent

$$\operatorname{div} \tilde{\underline{U}} = 0 \quad (1.40)$$

et

$$\frac{d \tilde{U}}{d \tilde{t}} = -\frac{1}{F_R^2} \underline{e}_z - \underline{\text{grad}} \cdot \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \Delta \tilde{U}. \quad (1.41)$$

où les dérivations spatiales sont par rapport à \underline{x} . Dans la suite, la notation (\cdot) fera toujours référence aux échelles du fluide. Les conditions initiales et les conditions aux limites sont elles-mêmes adimensionnées. La forme ci-dessus fait clairement apparaître la signification des nombres de Froude et de Reynolds, et leur influence pour des valeurs limites $F_R \rightarrow \infty$ ou $R_E \rightarrow \infty$. Le nombre adimensionnel restant, $\Pi = \rho_F U_0^2 / p_0$ n'apparaît pas explicitement, la pression n'intervenant que par son gradient.

Dans le solide, on définit également des variables adimensionnelles qui ne sont pas a priori liées aux précédentes. Nous les notons (\cdot) pour les distinguer de (\cdot) pour le fluide. On peut prendre par exemple :

$$\underline{x} = \frac{\underline{x}}{L}; \quad \tilde{t} = \frac{t \sqrt{E/\rho_S}}{L}, \quad \underline{\xi} = \frac{\underline{\xi}}{\xi_0}; \quad \underline{\sigma} = \frac{\underline{\sigma}}{E}. \quad (1.42)$$

Avec ce changement de variables les équations (1.32) à (1.34) deviennent

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial \tilde{t}^2} = -\mathcal{G} \underline{e}_z + \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (1.43)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}) = (1 + \nu) \underline{\sigma} - \nu \underline{\text{Tr}}(\underline{\sigma}) \underline{1}. \quad (1.44)$$

Les nombres adimensionnels obtenus plus haut pour le solide seul apparaissent clairement : ν , \mathcal{D} et \mathcal{G} .

1.2.4 Analyse couplée

Si l'on considère maintenant l'ensemble du système fluide-solide, on peut également chercher à construire une forme adimensionnelle de l'ensemble des équations de conservation et des conditions d'interfaces.

Pour la variable d'espace, nous utilisons la même définition dans les deux milieux, soit

$$\underline{x} = \tilde{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{L}. \quad (1.45)$$

Pour la variable temps il nous faut choisir entre \tilde{t} , qui est à l'échelle de temps du fluide et \tilde{t} qui est à l'échelle de la dynamique du solide. Nous choisissons ici cette dernière

$$\tilde{t} = \frac{t \sqrt{E/\rho_S}}{L} = \frac{\sqrt{E/\rho_S}}{U_0} \tilde{t}. \quad (1.46)$$

On voit apparaître la vitesse réduite déjà évoquée plus haut, rapport des deux échelles de temps

$$U_R = \frac{U_0}{\sqrt{E/\rho_S}}. \quad (1.47)$$

1.3. CONCLUSION

Les autres variables se définissent naturellement selon le milieu où elles sont définies

$$\underline{U}; \quad \tilde{p}; \quad \underline{\xi}; \quad \underline{\sigma}. \quad (1.48)$$

Avec ces changements de variables on obtient pour le fluide

$$\underline{\text{div}} \underline{U} = 0 \quad (1.49)$$

et

$$\frac{1}{U_R} \frac{d \underline{U}}{d \tilde{t}} = -\frac{1}{F_R^2} \underline{e}_z - \underline{\text{grad}} \cdot \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \Delta \underline{U}. \quad (1.50)$$

Pour le solide, les équations sont inchangées, mais nous pouvons remplacer le nombre \mathcal{G} par U_R^2/F_R^2 , soit

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial \tilde{t}^2} = -\frac{U_R^2}{F_R^2} \underline{e}_z + \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \quad (1.51)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}) = (1 + \nu) \underline{\sigma} - \nu \underline{\text{Tr}}(\underline{\sigma}) \underline{1}. \quad (1.52)$$

On doit également écrire les conditions d'interfaces avec ces variables, en explicitant les coordonnées $\underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}$. La condition cinématique s'écrit

$$U_R \underline{U}(\tilde{\underline{x}}) = \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \tilde{t}}(\underline{X}, t) \quad (1.53)$$

et la condition dynamique

$$C_Y [-\tilde{p}(\tilde{\underline{x}}) \underline{1} + \frac{2}{R_E} \tilde{d}(\tilde{\underline{x}})] \cdot \underline{n}(\tilde{\underline{x}}) = \underline{\sigma}(\tilde{\underline{x}}) \cdot \underline{n}(\tilde{\underline{x}}) \quad (1.54)$$

où il faut noter que

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{X} + \mathcal{D} \underline{\xi}. \quad (1.55)$$

On voit là encore apparaître les nouveaux paramètres identifiés dans la première partie de ce chapitre, U_R et C_Y . L'interprétation de leur rôle est plus complexe, comme on le verra par la suite. On peut cependant déjà voir que si le nombre de Cauchy est très faible (solide très rigide ou fluide peu dense), la condition (1.54) est à peu près équivalente à une condition de frontière libre

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0, \quad (1.56)$$

sur le solide qui ne "voit" donc pas le fluide.

1.3 Conclusion

Il apparaît que les nombres adimensionnels permettant d'analyser un problème d'interaction fluide-solide sont nombreux. Les hypothèses très

simplificatrices que nous avons faites sur le comportement du fluide et du solide nous ont amenés à considérer :

(a) ceux propres au fluide (ici le nombre de Reynolds R_E et le nombre de Froude F_R),

(b) ceux propres au solide (ici le nombre de déplacement $\mathcal{D} = \xi_0/L$ et le nombre de gravité $\mathcal{G} = \rho_S^0 g L/E$),

(c) des nombres propres à l'interaction (ici le nombre de masse $\mathcal{M} = \rho_F^0 / \rho_S^0$).

Ces nombres varient donc a priori dans un espace de dimension cinq, au lieu de deux pour le fluide et deux le solide s'ils n'interagissaient pas. Dans les chapitres qui suivent, on va explorer certaines zones de cette espace, où des modélisations simples et utiles peuvent se construire.

Nous travaillerons essentiellement par la suite avec le nombre de Reynolds R_E , le nombre de Froude F_R , le nombre de déplacement \mathcal{D} , le nombre de masse \mathcal{M} , la vitesse réduite U_R et le nombre de Cauchy C_Y . Nous allons principalement étudier l'influence de la vitesse U_R .

Chapitre 2

FLUIDE AU REPOS

Comme je descendais des fleuves impassibles,...

Arthur Rimbaud, Le bateau ivre, 1871.

Nous analysons dans ce chapitre les mécanismes d'interactions entre le fluide et le solide lorsque la vitesse réduite est faible, soit, figure (2.1),

$$U_R = \frac{U_0}{c_s} \ll 1. \quad (2.1)$$

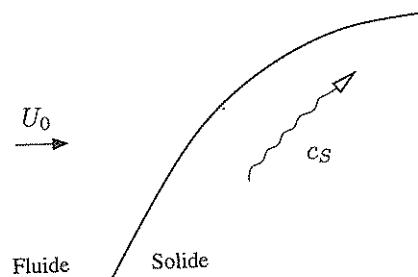


FIG. 2.1: Faibles vitesses réduites, $U_0 \ll c_s$.

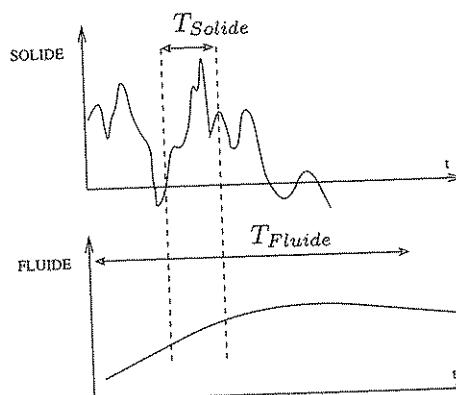


FIG. 2.2: Faibles vitesses réduites, $T_{\text{Solide}} \ll T_{\text{Fluide}}$.

Il faut prendre ici la notion de vitesse des ondes dans le solide, c_s au sens large : réécrivons donc plutôt la relation (2.1) sous la forme

$$U_R = \frac{U_0 T_{\text{Solide}}}{L} = \frac{T_{\text{Solide}}}{T_{\text{Fluide}}} \ll 1, \quad (2.2)$$

où T_{Fluide} est l'ordre de grandeur du temps que met le fluide à parcourir le solide et T_{Solide} est un temps caractéristique de la dynamique du solide. La relation (2.2) signifie que à l'échelle de temps du mouvement solide, le fluide est immobile, figure (2.2). Il s'agit ici bien sûr du mouvement fluide associé à la donnée U_0 .

Parmi les exemples proposés dans l'introduction, le cas du barrage souple en est une illustration : bien que des courants existent dans l'eau

2.1. ANALYSE DIMENSIONNELLE

retenue par le barrage, on ne les prendrait pas en compte pour calculer les oscillations de celui-ci.

Nous allons tout d'abord traduire cette hypothèse en terme de nombres adimensionnels et envisager ses conséquences sur les ordres de grandeurs relatifs des termes des équations.

L'hypothèse des petites perturbations nous permettra de relier les fluctuations dans le fluide aux mouvements du solide. Les effets de raideur et de masse ajoutée, de viscosité et de surface libre pourront alors être étudiés.

2.1 Analyse dimensionnelle

2.1.1 Nombres sans dimension

Avant même de considérer les conséquences de l'hypothèse (2.1), il faut reconstruire le choix des nombres adimensionnels qui seront utilisés pour analyser le problème d'interaction fluide-solide. Dans le premier chapitre, la donnée de vitesse U_0 avait permis de construire les nombres de Froude, de Reynolds et de Cauchy

$$F_R = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}; R_E = \frac{\rho_F U_0 L}{\mu}; C_Y = \frac{\rho_F U_0^2}{E}. \quad (2.3)$$

Ici, U_0 n'est plus une échelle pertinente de vitesse. Nous la remplaçons donc naturellement dans ces nombres adimensionnels par c_s ce qui permet de définir :

- un nombre de *Froude Dynamique*

$$F_D = \frac{c_s}{\sqrt{gL}} \quad (= \frac{F_R}{U_R}), \quad (2.4)$$

qui exprime le rapport entre la vitesse de propagation des ondes dans le solide et la vitesse des ondes de surface, $c_g = \sqrt{gL}$,

- un nombre de *Stokes* (ou nombre de Reynolds dynamique)

$$S_T = \frac{\rho_F c_s L}{\mu} \quad (= \frac{R_E}{U_R}), \quad (2.5)$$

qui exprime le rapport entre la vitesse de propagation des ondes dans le solide et la vitesse de diffusion visqueuse, $c_v = \mu/\rho_F L$,

- un nombre de *masse*

$$\mathcal{M} = \frac{\rho_F c_s^2}{E} = \frac{\rho_F}{\rho_S} \quad (= \frac{C_Y}{U_R^2}). \quad (2.6)$$

2.1.2 Variables sans dimension

Le même raisonnement nous conduit à prendre comme variables adimensionnelles non pas, comme dans le chapitre précédent celles

construites avec la vitesse U_0 ,

$$\bar{U} = \frac{U}{U_0}; \bar{p} = \frac{p}{\rho_F U_0^2} \quad (2.7)$$

mais plutôt avec la vitesse c_S ,

$$\bar{U} = \frac{U}{c_S}; \bar{p} = \frac{p}{\rho_F c_S^2}. \quad (2.8)$$

Par contre l'échelle de temps

$$\bar{t} = \frac{t c_S}{L} \quad (2.9)$$

convient. Avec ces nouvelles variables, les équations de champ pour le fluide deviennent

$$\operatorname{div} \bar{U} = 0 \quad (2.10)$$

et

$$\frac{d \bar{U}}{d \bar{t}} = -\frac{1}{F_D^2} \underline{\epsilon}_z - \underline{\operatorname{grad}} \bar{p} + \frac{1}{S_T} \Delta \bar{U}. \quad (2.11)$$

où les nombres de Stokes et de Froude dynamique définis plus haut apparaissent naturellement. Pour le solide, on obtient

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{t}^2} = -\frac{1}{F_D^2} \underline{\epsilon}_z + \operatorname{div} \bar{\underline{\sigma}} \quad (2.12)$$

et

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \bar{\xi} + \nabla \bar{\xi}) = (1 + \nu) \bar{\underline{\sigma}} - \nu \operatorname{Tr}(\bar{\underline{\sigma}}) \underline{1}. \quad (2.13)$$

Les conditions d'interface s'expriment sous la forme

$$\tilde{U}(\tilde{x}) = \mathcal{D} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}}(\tilde{X}), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{M} [-\tilde{p}(\tilde{x}) \underline{1} + \frac{2}{S_T} \tilde{d}(\tilde{x})] \cdot \underline{n}(\tilde{x}) = \bar{\underline{\sigma}}(\tilde{x}) \cdot \underline{n}(\tilde{x}). \quad (2.15)$$

Enfin, la condition qui a permis de définir la référence U_0 a pour ordre de grandeur

$$U = \mathcal{O}(U_0) \quad (2.16)$$

et s'écrit donc sous forme adimensionnelle

$$\bar{U} = \mathcal{O}\left(\frac{U_0}{c_S}\right). \quad (2.17)$$

2.1.3 Petites vitesses réduites

Les équations (2.10) à (2.17) ont été établies à partir du cas général par de simples changements d'échelles. Elles sont maintenant sous une forme appropriée pour faire apparaître les conséquences de la condition $U_R \ll 1$ que nous voulons étudier. Comparons les différents ordres de grandeur de vitesse qui sont présents dans le fluide. La condition d'interface (2.14) a pour ordre de grandeur

$$\bar{U} = \mathcal{O}(\mathcal{D} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}}) = \mathcal{O}(\mathcal{D}) \quad (2.18)$$

car \bar{t} est construit sur l'échelle de temps du mouvement du solide, donc des variations de $\bar{\xi}$, ce qui implique que

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} = \mathcal{O}(1). \quad (2.19)$$

Par ailleurs, la condition (2.17) dans le fluide a pour ordre de grandeur

$$\bar{U} = \mathcal{O}(U_R). \quad (2.20)$$

On voit donc que si

$$U_R \ll \mathcal{D} \quad (2.21)$$

la vitesse dans le fluide sera conditionnée par (2.18) plutôt que par (2.20). Cette condition permet de simplifier la modélisation. En effet, on peut alors approcher la condition qui a servi à définir U_0 par

$$\bar{U} = 0 \quad (2.22)$$

puisque cette condition est d'ordre de grandeur très petit devant celui de la condition d'interface. La vitesse réduite n'apparaît plus dans les données et la solution ne dépend plus que des nombres

$$S_T, \mathcal{M}, F_D, \mathcal{D}, \quad (2.23)$$

au lieu de

$$F_R, R_E, U_R, C_Y, \mathcal{D}. \quad (2.24)$$

On peut remarquer que la condition (2.21) est différente de celle que nous avions évoquée en (2.1). Pourquoi? La condition $U_R \ll 1$ porte sur des *échelles de temps caractéristiques*. Elle signifie simplement que les mouvements dans le solide se font sur une échelle de temps courte par rapport au mouvement de convection dans le fluide. La condition $U_R \ll \mathcal{D}$ porte, elle, sur des *échelles de vitesse de l'interface*. Elle signifie que la vitesse du solide à l'interface, et donc celle du fluide à l'interface, est grande par rapport à la vitesse de convection.

2.2 Hypothèse de petits déplacements

2.2.1 Efforts à l'interface

Nous omettons maintenant le symbole d'adimensionnalisation $\bar{\cdot}$.

Dans de nombreuses applications pratiques on s'intéresse aux petits mouvements d'un solide dans un fluide, tels que par exemple des mouvements vibratoires. Nous ferons donc dans ce chapitre l'hypothèse complémentaire de petits déplacements en posant

$$\mathcal{D} \ll 1. \quad (2.25)$$

Nous prenons comme état de référence un état d'équilibre du système dans lequel le fluide est au repos, $\underline{U} = \underline{0}$, $P = P_0$. Il est alors naturel de développer à l'ordre 1 les variables dans le fluide en fonction du petit paramètre $\lambda = \mathcal{D}$, soit

$$\underline{U} = \underline{0} + \lambda \underline{u}; \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}_0 + \lambda \underline{\sigma}, \quad (2.26)$$

où $\underline{\Sigma}$ est la contrainte dans le fluide. On a ici

$$\underline{\Sigma}_0 = -P_0 \underline{1} \quad (2.27)$$

et

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1} + \frac{2}{S_T} \underline{d}. \quad (2.28)$$

En substituant ces variables dans les équations de conservation pour le fluide, on obtient à l'ordre zéro en λ

$$\operatorname{div} \underline{0} = 0, \quad (2.29)$$

$$\underline{0} = -\frac{1}{F_D^2} \underline{\epsilon}_z - \underline{\operatorname{grad}} P. \quad (2.30)$$

En poursuivant à l'ordre 1 en λ le développement, il vient

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \frac{1}{S_T} \Delta \underline{u}. \quad (2.32)$$

A l'ordre 1 en λ la condition cinématique d'interface est simplement ici

$$\underline{u} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Par contre la condition dynamique est plus délicate à écrire du fait de l'existence du champ de précontrainte $\underline{\Sigma}_0$ et des variations géométriques de l'interface. Considérons pour cela la force élémentaire adimensionnée s'exerçant sur une surface orientée \underline{dA} de l'interface fluide-solide, figure (2.3),

$$d\underline{F} = \mathcal{M} \underline{\Sigma} \cdot \underline{dA} = \mathcal{M} (\underline{\Sigma} \cdot \underline{n}) dA \quad (2.34)$$

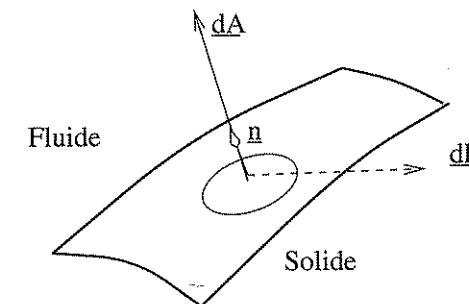


FIG. 2.3 : Force élémentaire

En prenant par exemple \underline{dA} orientée du solide vers le fluide, $d\underline{F}$ est bien la force élémentaire exercée par le fluide sur le solide. Comparons cette force élémentaire au cours du mouvement à celle qui existe dans l'état de référence. Dans ce dernier, on a

$$d\underline{F}_0 = \mathcal{M} \underline{\Sigma}_0^X \cdot \underline{dA}^X = \mathcal{M} (-P_0^X) \underline{dA}^X. \quad (2.35)$$

où $(\cdot)^X$ signifie la valeur en X de la quantité (\cdot) . Au cours du mouvement le point matériel se situe en

$$x = X + \lambda \xi. \quad (2.36)$$

Par ailleurs, le mouvement du solide dans le fluide peut entraîner des modifications du champ de contrainte dans ce dernier, en créant un écoulement ou en modifiant le niveau libre, par exemple. La force élémentaire vaut alors

$$d\underline{F} = \mathcal{M} [\underline{\Sigma}_0 + \lambda \underline{\sigma}]^{X+\lambda\xi} \cdot \underline{dA}^{X+\lambda\xi}. \quad (2.37)$$

En développant au premier ordre en λ et en posant

$$d\underline{F} = d\underline{F}_0 + \lambda d\underline{f}; \underline{dA}^{X+\lambda\xi} = \underline{dA}^X + \lambda \underline{da}^X, \quad (2.38)$$

on obtient l'expression de la fluctuation de la force élémentaire

$$d\underline{f} = \mathcal{M} [\underline{\sigma}^X \cdot \underline{dA}^X + (-(\nabla P_0)^X \cdot \underline{\xi}) \cdot \underline{dA}^X + (-P_0)^X \cdot \underline{da}^X]. \quad (2.39)$$

Le premier terme exprime la conséquence de la variation de contrainte dans le fluide, elle-même consécutive au mouvement du solide. Cette variation sera obtenue par la résolution d'un problème de fluctuation dont nous donnerons plusieurs exemples.

Le deuxième terme montre que la force élémentaire peut varier simplement par déplacement du solide à l'intérieur d'un champ de pression statique non uniforme.

Le dernier terme fait apparaître la déformation de la surface orientée élémentaire dont le transport s'écrit [23]

$$\underline{dA} = J [\underline{F}^{-1}]^t \cdot \underline{dA}^X \quad (2.40)$$

où \underline{F} est le gradient de la transformation et J le Jacobien. Dans le cas des petits déplacements, il reste

$$J = 1 + \operatorname{div}(\lambda \underline{\xi}); [\underline{F}^{-1}]^t = \underline{1} - [\nabla(\lambda \underline{\xi})]^t \quad (2.41)$$

d'où

$$\underline{da} = [(div \underline{\xi}) \underline{1} - [\nabla \underline{\xi}]^t] \cdot \underline{dA}^X. \quad (2.42)$$

Par conséquent l'expression générale du vecteur contrainte fluctuant \underline{T} défini par

$$\underline{df} = \underline{T} \underline{dA}^X \quad (2.43)$$

avec

$$\underline{dA}^X = \underline{dA}^X \cdot \underline{n}_0 \quad (2.44)$$

est

$$\underline{T} = \mathcal{M} \left[\underline{g} + (-\nabla P_0) \underline{\xi} \underline{1} - P_0 \cdot (\operatorname{div} \underline{\xi} \underline{1} - (\nabla \underline{\xi})^t) \right] \cdot \underline{n}_0. \quad (2.45)$$

Cette expression du vecteur contrainte fluctuant est équivalente à celle donnée dans [17], dans laquelle les déformations de l'interface sont développées en terme d'opérateurs surfaciques et de rayons de courbures. En l'absence de champ de précontrainte on retrouve la forme naturelle

$$\mathcal{M} \left(-p \underline{1} + \frac{2}{S_T} \underline{d} \right) \cdot \underline{n}_0 = \underline{T}. \quad (2.46)$$

On peut utiliser (2.45) pour retrouver la condition classique de surface libre en prenant comme solide l'atmosphère au repos, soit

$$P_0 = -\frac{1}{F_D^2} z; \underline{n}_0 = \underline{e}_Z; \underline{T} = \underline{0}, \quad (2.47)$$

ce qui donne [18]

$$-p + \frac{1}{F_D^2} \underline{\xi} \cdot \underline{e}_Z = 0. \quad (2.48)$$

2.2.2 Projection de l'effort

Considérons le cas simple où la dynamique du solide est décrite par une seule fonction du temps, c'est à dire que le déplacement élémentaire intervenant dans l'équation 2.36 s'écrit

$$\underline{\xi}(X, t) = q(t) \underline{\varphi}(X) \quad (2.49)$$

et donc

$$\underline{x} = \underline{X} + \lambda q(t) \underline{\varphi}(X). \quad (2.50)$$

où λ est le petit paramètre. On s'intéresse alors à la projection sur le déplacement $\underline{\varphi}(X)$ des efforts exercés par le fluide à l'interface, soit

$$F_{FS} = \int_{\partial \Omega_{FS}} \underline{\varphi} \cdot \underline{dF} \quad (2.51)$$

où \underline{dF} est définie par (2.34). Comme pour la force \underline{dF} , nous pouvons exprimer la dépendance spatiale du déplacement $\underline{\varphi}$ au premier ordre. La quantité $\underline{\varphi} \cdot \underline{dF}$ n'étant définie que sur l'interface, il convient de ne considérer que les variations surfaciques de $\underline{\varphi}$, soit

$$\underline{\varphi}^{X+\lambda \underline{\xi}} \simeq \underline{\varphi}^X + \lambda (\nabla \underline{\varphi})^X \cdot [\underline{\xi} - (\underline{\xi} \cdot \underline{n}_0) \underline{n}_0]. \quad (2.52)$$

La fluctuation de la force projetée, f_{FS} , définie par

$$F_{FS} = F_{FS}^0 + \lambda f_{FS} \quad (2.53)$$

vaut donc, à l'aide des équations (2.43), (2.38); (2.52),

$$f_{FS} = \mathcal{M} \int_{\partial \Omega_{FS}} [\underline{\varphi} \cdot \underline{T} - q(t) P_0 \underline{n} \cdot (\nabla \underline{\varphi}) \cdot [\underline{\varphi} - (\underline{\varphi} \cdot \underline{n}) \underline{n}]] dA \quad (2.54)$$

où toutes les grandeurs sont dorénavant celles au point X . En développant le premier terme à l'aide de l'équation 2.45, il reste

$$\begin{aligned} f_{FS} &= \mathcal{M} \int_{\partial \Omega_{FS}} \underline{\varphi} \cdot \underline{g} \cdot \underline{n} dA \\ &- q(t) \mathcal{M} \int_{\partial \Omega_{FS}} [(\underline{\varphi} \cdot \underline{n})(\nabla P_0 \cdot \underline{\varphi}) + (\underline{\varphi} \cdot \underline{n}) P_0 [\operatorname{div} \underline{\varphi} - \underline{n} \cdot (\nabla \underline{\varphi}) \underline{n}]] dA. \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.3 Raideur ajoutée

Le second terme de l'équation (2.55) est proportionnel au déplacement $q(t)$ et peut donc s'interpréter comme un effet de raideur apparente du fluide, due à deux mécanismes bien distincts que nous allons détailler. Il faut noter que ces raideurs induites par la présence du fluide ne sont pas nécessairement positives, et que des instabilités statiques peuvent se produire.

2.3.1 Raideur de gradient

La raideur ajoutée

$$k_A^G = \mathcal{M} \int_{\partial \Omega_{FS}} (\underline{\varphi} \cdot \underline{n})(\nabla P_0 \cdot \underline{\varphi}) dA \quad (2.56)$$

exprime le fait que le déplacement de l'interface peut l'amener en un point où la pression est différente. Pour illustrer cet effet, considérons l'exemple simple d'un corps cubique flottant, immergé dans un fluide au repos sur une profondeur adimensionnelle h , animé d'un petit mouvement vertical $\underline{\xi} = q(t) \underline{e}_Z$, figure (2.4a). Le champ de pression hydrostatique dans le fluide est obtenu par l'équation (2.30)

$$P_0 = -\frac{z}{F_D^2} \quad (2.57)$$

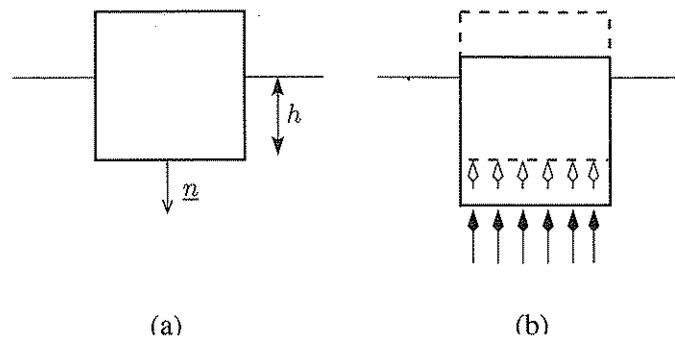


FIG. 2.4: Effet de raideur ajoutée due au gradient de pression : (a) position d'équilibre (b) force de rappel dans un mouvement vertical

et sa résultante est bien sûr la poussée d'Archimède

$$F_{FS}^0 = \frac{\mathcal{M}}{F_D^2} h e_Z. \quad (2.58)$$

La position d'équilibre est définie par

$$\frac{\mathcal{M}}{F_D^2} h - \frac{1}{F_D^2} = 0 \quad (2.59)$$

soit $h = 1/\mathcal{M}$, pour $\mathcal{M} > 1$.

La raideur de gradient vaut ici

$$k_A^G = \mathcal{M} \int_{\partial\Omega_{FS}} (e_Z \cdot n) \left(\frac{-1}{F_D^2} e_Z \cdot e_Z \right) dA = \frac{\mathcal{M}}{F_D^2} \quad (2.60)$$

Elle correspond au déplacement de la face inférieure dans un champ de pression qui croît avec la profondeur, figure (2.4b). En négligeant tout autre effet du fluide, les oscillations verticales du cube sont régies par

$$\ddot{q}(t) = -k_A^G q(t), \quad (2.61)$$

soit

$$\ddot{q}(t) + \frac{\mathcal{M}}{F_D^2} q = 0. \quad (2.62)$$

La pulsation d'oscillation est donc

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{F_D^2}}, \quad (2.63)$$

soit, sous forme dimensionnelle

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_F}{\rho_S}} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2.64)$$

2.3.2 Raideur de forme

Dans l'équation (2.55), la raideur

$$k_A^F = \mathcal{M} \int_{\partial\Omega_{FS}} (\underline{\varphi} \cdot \underline{n}) P_0 [\operatorname{div} \underline{\varphi} - \underline{n} \cdot (\nabla \underline{\varphi}) \underline{n}] dA \quad (2.65)$$

exprime l'effet de la variation de la géométrie de l'interface.

Pour illustrer cet effet, considérons sur une section cylindrique de rayon R dans un champ de pression uniforme de petits mouvements d'expansion et de rotation définis respectivement par

$$\underline{\xi}^{exp} = q(t) e_R; \underline{\xi}^{rot} = q(t) e_\theta \quad (2.66)$$

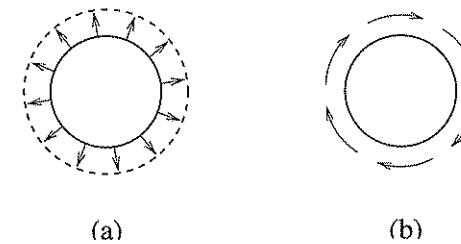


FIG. 2.5: Effets de raideur ajoutée due au changement de forme de l'interface : (a) expansion uniforme (b) rotation uniforme.

Dans le premier cas la raideur ajoutée est

$$k_A^F = 2\pi\mathcal{M}P_0. \quad (2.67)$$

Le calcul direct du travail des forces de pression dans un mouvement $q(t)$ donne, en tenant bien compte du rayon instantané $R + q(t)$,

$$W = \int_0^t 2\pi(R + q(\tau))\mathcal{M}(-P_0)\dot{q}(\tau) d\tau = -2\pi R\mathcal{M}P_0 q - \frac{1}{2}(2\pi\mathcal{M}P_0) q^2. \quad (2.68)$$

Le second terme exprime bien cet effet de raideur, pour lequel on retrouve le coefficient k_A^F ci-dessus.

Dans le cas de la rotation, la raideur calculée par l'équation (2.65) est nulle. Le travail des forces de pression dans un tel mouvement est bien sûr nul, la vitesse locale de l'interface étant constamment perpendiculaire à la force locale. Cet exemple particulier montre la nécessité de prendre en compte la variation spatiale du déplacement $\underline{\varphi}$, équation (2.52) dans la variation de la force projetée. En effet, la seule prise en compte du vecteur fluctuant \underline{T} , ici tangentiel à la paroi, induirait une raideur, non physique. Il faut noter que tout mouvement de corps solide dans un champ uniforme de pression donne une raideur ajoutée nulle.

Les effets de raideur que nous venons d'obtenir ne proviennent que de l'effet direct du champ de pression sur l'interface. D'autres effets de rigidité, indirects, peuvent apparaître, associés au travail des efforts intérieurs en équilibre avec cette pression.

2.4 Masse ajoutée

2.4.1 Pression fluctuante

Nous analysons maintenant le cas le plus simple où le mouvement du solide se fait à une échelle de temps très courte devant le temps de diffusion visqueuse et devant le temps passage des ondes de gravité à la surface du fluide soit

$$S_T \gg 1; F_D \gg 1. \quad (2.69)$$

Ceci signifie également que les vitesses de diffusion visqueuse, c_v , et de propagation des ondes de surface, c_g , sont petites devant c_s , figure (2.6). Nous allons également supposer que les effets de raideurs décrits précédemment sont nuls, ce qui est obtenu en prenant $P_0 = 0$ dans les équations.

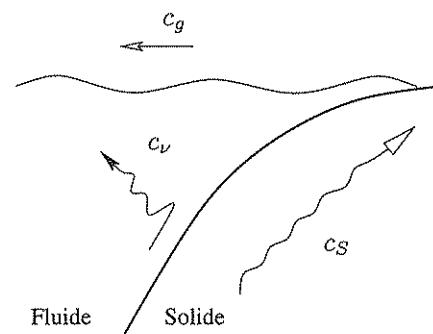


FIG. 2.6: Faibles vitesses de diffusion visqueuse et d'ondes de surface, $S_T \gg 1$ et $F_D \gg 1$.

Les équations régissant les petits mouvements se réduisent pour le fluide à

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p. \quad (2.71)$$

Les conditions d'interface deviennent

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \underline{n}, \quad (2.72)$$

$$\mathcal{M} (-p \underline{n}) = \underline{T}. \quad (2.73)$$

2.4. MASSE AJOUTÉE

Lorsque la dynamique du solide est décrite par un seul paramètre,

$$\xi(\underline{X}, t) = q(t) \varphi(\underline{X}), \quad (2.74)$$

la condition cinématique (2.72) sur l'interface s'écrit simplement

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = \dot{q} \varphi \cdot \underline{n}. \quad (2.75)$$

De par la forme de cette condition cinématique et la linéarité des équations (2.70) à (2.73), on va naturellement chercher des champs de vitesse et de pression dans le fluide de la même forme

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \dot{q}(t) \underline{\varphi}_u(\underline{x}) \quad (2.76)$$

$$p(\underline{x}, t) = \ddot{q}(t) \varphi_p(\underline{x}). \quad (2.77)$$

Les équations à vérifier dans le fluide se réduisent alors à

$$\operatorname{div} \underline{\varphi}_u = 0 \quad (2.78)$$

$$\underline{\varphi}_u = -\operatorname{grad} \varphi_p \quad (2.79)$$

et à l'interface

$$\underline{\varphi}_u \cdot \underline{n} = \underline{\varphi} \cdot \underline{n}. \quad (2.80)$$

Éliminant $\underline{\varphi}_u$ entre (2.78, 2.79, 2.80), il suffit de résoudre un problème de Laplace sur φ_p ,

$$\Delta \varphi_p = 0, \quad (2.81)$$

avec à l'interface

$$-\operatorname{grad} \varphi_p \cdot \underline{n} = \underline{\varphi} \cdot \underline{n}. \quad (2.82)$$

Considérons f_{FS} la projection sur $\underline{\varphi}$ des efforts exercés par le fluide sur l'interface, soit d'après (2.55)

$$f_{FS} = \int_{\partial \Omega_{FS}} \mathcal{M} (-p \underline{n}) \cdot \underline{\varphi} dA. \quad (2.83)$$

La forme (2.77) de la pression donne

$$f_{FS} = \int_{\partial \Omega_{FS}} \mathcal{M} (-\ddot{q} \varphi_p \underline{n}) \cdot \underline{\varphi} dA = -\ddot{q} \left[\int_{\partial \Omega_{FS}} \mathcal{M} \varphi_p \underline{n} \cdot \underline{\varphi} dA \right]. \quad (2.84)$$

Ainsi, on peut assimiler l'effet du fluide sur le solide à une force d'inertie ajoutée

$$f_{FS} = -m_A \ddot{q} \quad (2.85)$$

où l'on définit la masse ajoutée adimensionnelle

$$m_A = \int_{\partial \Omega_{FS}} \mathcal{M} \varphi_p \underline{n} \cdot \underline{\varphi} dA. \quad (2.86)$$

Si l'évolution de $q(t)$ en l'absence de fluide est régie par une équation adimensionnelle d'oscillateur

$$\ddot{q} + q = 0, \quad (2.87)$$

elle devient en présence du fluide

$$(1 + m_A) \ddot{q} + q = 0. \quad (2.88)$$

2.4.2 Interprétation physique

Ces résultats appellent plusieurs remarques :

- Quelle que soit l'évolution temporelle du déplacement du solide, on peut donc calculer l'effet du fluide à partir du résultat d'un seul problème de Laplace. Ceci est la conséquence du fait qu'un fluide parfait répond instantanément et partout à toute modification de ses conditions aux limites. Il n'a aucune constante de temps interne.
- La masse ajoutée m_A n'est pas la masse d'un système physique particulier. Ce n'est qu'un coefficient inertiel qui donne l'amplitude de la force résultante du fluide sur la structure en fonction de l'accélération de celle-ci. Par conséquent elle peut être supérieure ou inférieure à la masse physique du fluide présent dans le domaine d'analyse.
- L'énergie cinétique du fluide à l'instant t s'écrit

$$\mathcal{E}_C = \int_{\Omega_F} \frac{1}{2} \mathcal{M} \|\underline{u}\|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega_F} \mathcal{M} \|\underline{\varphi}_u\|^2 d\Omega \right] \dot{q}^2. \quad (2.89)$$

Or

$$\|\underline{\varphi}_u\|^2 = \|\nabla \varphi_p\|^2 = \operatorname{div}(\varphi_p \nabla \varphi_p) - \varphi_p \Delta \varphi_p. \quad (2.90)$$

Le dernier terme est nul, d'après (2.81) et l'on peut écrire

$$\int_{\Omega_F} \|\underline{\varphi}_u\|^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \varphi_p \nabla \varphi_p \cdot (-\underline{n}) dA. \quad (2.91)$$

A l'aide de la condition d'interface (2.82), et en supposant que les autres frontières du fluide sont immobiles ($\nabla \varphi_p = 0$) ou libres ($\varphi_p = 0$), il reste donc

$$\int_{\Omega_F} \|\underline{\varphi}_u\|^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega_{FS}} \varphi_p \underline{\varphi} \cdot \underline{n} dA. \quad (2.92)$$

L'énergie cinétique devient donc

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \left[\int_{\partial\Omega_{FS}} \mathcal{M} \varphi_p \underline{\varphi} \cdot \underline{n} dS \right] \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m_A \dot{q}^2. \quad (2.93)$$

Ainsi, la masse ajoutée est simplement le coefficient inertiel qui permet d'exprimer l'énergie cinétique du fluide en fonction de la variable qui définit la vitesse du solide.

- De la remarque précédente, on comprend bien que la valeur de la masse ajoutée dépend directement de la forme du champ de vitesse dans le fluide induit par le mouvement du solide. Considérons par exemple un cylindre oscillant près d'une paroi. Pour un mouvement donné, le champ de vitesse dans le fluide dépendra de façon cruciale de la distance entre le cylindre et la paroi. Si le cylindre est loin de la paroi, la vitesse dans le fluide est de l'ordre de grandeur de

celle du solide près de l'interface, puis diminue rapidement quand on s'en éloigne. Le calcul donne

$$m_A = \mathcal{M} \pi R^2. \quad (2.94)$$

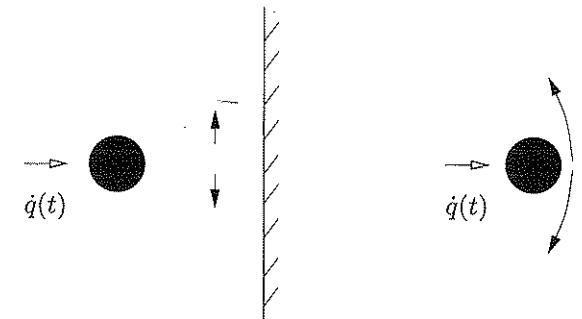


FIG. 2.7: Effet de confinement.

Si le cylindre est proche de la paroi, la conservation de la masse implique des vitesses de fluide très supérieures à la vitesse du solide. Pour une distance à la paroi d'un dixième du rayon du cylindre la masse ajoutée est par exemple 15% plus élevée que celle du cylindre sans la paroi.

- Cet effet purement géométrique sur la masse ajoutée est appelé effet de *confinement*. Il joue un rôle très important en interaction fluide-solide car de nombreux autres effets sont aussi amplifiés par le confinement. On peut aisément comprendre que dans un fluide incompressible la présence de parois immobiles proche de la structure mobile a un effet multiplicateur sur les perturbations de toutes sortes induites dans le fluide.
- La masse ajoutée dépend également du type de mouvement du solide. Par exemple, une plaque infiniment mince n'induit pas de vitesse dans un fluide parfait lors d'un mouvement selon sa tangente et donc pas de masse ajoutée, alors que des mouvements transverses donnent évidemment une masse ajoutée, figure (2.8).
- Dans une description du mouvement par plusieurs paramètres $q_i(t)$ la linéarité des équations permet de superposer les solutions φ_p . Par projection sur chacune des formes $\underline{\varphi}_i$, il en découle une matrice de masse ajoutée qui peut coupler les évolutions des paramètres. Si les $q_i(t)$ représentent des variables modales dont les évolutions sont initialement découpées, les masses ajoutées induites par le fluide couplent ces modes. Il en résulte non seulement une modification des fréquences propres mais aussi une modification des déformées modales.

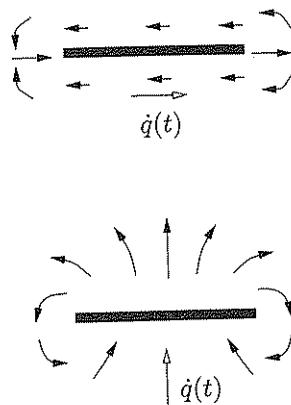


FIG. 2.8: Masse ajoutée directionnelle.

On retiendra donc que dans l'hypothèse de grand nombre de Froude dynamique et de grand nombre de Stokes, le fluide répond instantanément et partout aux mouvements du solide, et les efforts résultants sur le solide sont des efforts d'inertie, d'où une masse ajoutée qui dépend fortement du type de mouvement du solide et de la géométrie du domaine fluide.

2.5 Effets de la viscosité

2.5.1 Nombre de Stokes

Lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse

$$S_T \gg 1, \quad (2.95)$$

les équations précédentes deviennent, toujours pour une description à un seul paramètre du solide

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0, \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{S_T} \Delta \underline{u}, \quad (2.97)$$

avec à l'interface

$$\underline{u} = \dot{q} \varphi \quad (2.98)$$

et la condition dynamique (2.55) exprimée sous forme intégrale

$$\mathcal{M} \int_{\partial \Omega_{FS}} (-p \cdot \underline{n} + \frac{2}{S_T} \underline{d} \cdot \underline{n}) \cdot \varphi dS = f_{FS}. \quad (2.99)$$

Avant toute résolution, on peut faire quelques remarques, en comparaison avec le cas du fluide parfait.

L'équation de Quantité de Mouvement du fluide (2.97) fait intervenir à la fois la vitesse et l'accélération. Il existe donc une échelle de temps *interne* au fluide, qui est ici liée au mécanisme de diffusion visqueuse. Par conséquent, le fluide ne pourra pas répondre instantanément et partout aux mouvements de l'interface. On peut donc s'attendre à une force qui dépende de l'histoire du mouvement

$$f_{FS}(t) = f[q(\tau); \tau \leq t], \quad (2.100)$$

au lieu de

$$f_{FS}(t) = f[q(t)] \quad (2.101)$$

dans le cas d'un fluide parfait. Par ailleurs, le nombre de Stokes apparaît également dans la condition dynamique d'interface, où le cisaillement visqueux peut produire des efforts tangentiels à la paroi, ce qui n'était pas le cas précédemment.

2.5.2 Réponse impulsionale

Pour mettre en évidence simultanément ces deux effets, on va étudier ce que l'on appelle usuellement le "deuxième problème de Stokes", [4], [15], [18]. On considère une paroi plane infinie, qui borne un demi-espace fluide. Cette paroi se déplace tangentiellement de façon rigide

$$\xi(\underline{X}, t) = q(t) \underline{e}_X. \quad (2.102)$$

On recherche la force exercée par le fluide sur la plaque en réaction à ce mouvement. La géométrie particulière du problème permet de chercher un champ de vitesse de la forme

$$\underline{u}(x, y, t) = u(y, t) \underline{e}_X \quad (2.103)$$

et d'exclure le champ de pression. La conservation de la quantité de mouvement devient simplement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S_T} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.104)$$

et la condition cinématique d'interface

$$u(0, t) = \dot{q}(t). \quad (2.105)$$

La force résultante par unité de surface sur la plaque vaut

$$f_{FS} = \frac{\mathcal{M}}{S_T} \frac{\partial u}{\partial y}(0, t) \underline{e}_X. \quad (2.106)$$

On connaît la réponse impulsionale du fluide, c'est à dire la solution pour un déplacement imposé à la paroi

$$q(t) = t; t > 0 \quad (2.107)$$

soit

$$\ddot{q}(t) = \delta(t). \quad (2.108)$$

C'est la forme auto-semblable [18], figure (2.9)

$$u_\delta(y, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2} \sqrt{\frac{S_T}{t}}\right). \quad (2.109)$$

où erf est la fonction erreur définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (2.110)$$

La force associée vaut alors, d'après (2.106)

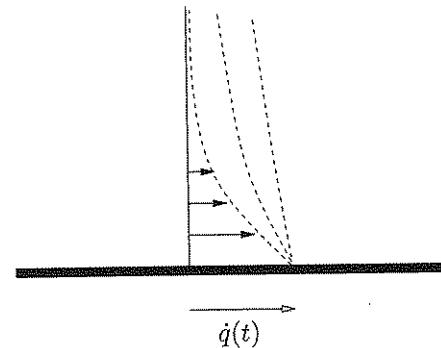


FIG. 2.9 : Réponse impulsionnelle.

$$\underline{f}_\delta(t) = -\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\pi S_T} t} e_X. \quad (2.111)$$

2.5.3 Solution générale

Cette solution particulière permet, grâce à la linéarité du problème, de construire la solution générale pour une évolution $q(t)$ quelconque. Le champ de vitesse correspondant à une succession d'incrément d'accélérations vaut

$$u(y, t) = \int_0^t \ddot{q}(\tau) u_\delta(y, t - \tau) d\tau \quad (2.112)$$

et la force

$$\underline{f}_{FS}(t) = \int_0^t \ddot{q}(\tau) \underline{f}_\delta(t - \tau) d\tau = -\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\pi S_T}} \left[\int_0^t \frac{\ddot{q}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right] e_X. \quad (2.113)$$

Cette solution générale se présente donc sous la forme d'un produit de convolution qui fait dépendre la force exercée par le fluide à un instant donné des mouvements de la paroi aux temps passés. C'est donc un *effet d'histoire*. Cette force n'est donc pas réductible à une masse ajoutée. Elle diminue avec le nombre de Stokes. Elle est nulle dans la limite $S_T \rightarrow \infty$, ce qui est cohérent avec le modèle de fluide parfait étudié précédemment.

2.5.4 Mouvement harmonique

On peut calculer explicitement cette solution pour un mouvement harmonique permanent

$$q(t) = \cos 2\pi t \quad (2.114)$$

dont la période $T = 1$ est l'échelle de temps qui a servi à définir les variables adimensionnelles. L'intégrale de convolution (2.113) qui donne la force, exprimée en fonction de q , vaut

$$\underline{f}_{FS}(t) = -\mathcal{M} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi S_T}} \right) \dot{q}(t) e_X - \mathcal{M} \left(\sqrt{\frac{\pi}{S_T}} \right) \ddot{q}(t) e_X. \quad (2.115)$$

Dans un tel mouvement la force résultante apparaît comme la somme d'un terme opposé à l'accélération à partir duquel nous définissons une masse ajoutée,

$$m_A = \frac{\mathcal{M}}{2\sqrt{\pi S_T}}, \quad (2.116)$$

et d'un terme opposé à la vitesse à partir duquel nous définissons un coefficient d'amortissement visqueux

$$c_A = \mathcal{M} \sqrt{\frac{\pi}{S_T}}. \quad (2.117)$$

Ces deux termes s'annulent bien lorsque le nombre de Stokes tend vers l'infini, le fluide alors parfait n'étant plus entraîné par la plaque dans son mouvement tangent. La vitesse dans le fluide peut également se calculer

$$u(y, t) = -2\pi e^{-y \sqrt{\pi S_T}} \sin(2\pi t - y \sqrt{\pi S_T}). \quad (2.118)$$

Le module de la vitesse décroît exponentiellement avec une longueur

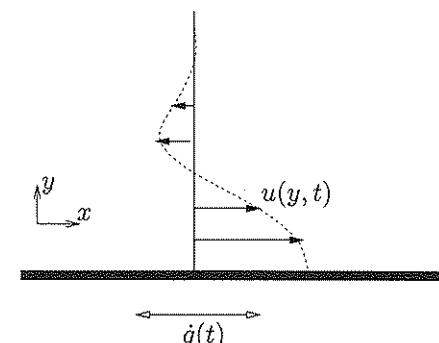


FIG. 2.10 : Oscillation tangente de paroi.

caractéristique qui donne l'échelle de la couche limite oscillante

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi S_T}}, \quad (2.119)$$

et les oscillations de vitesse se propagent vers l'intérieur du fluide à une vitesse de phase

$$c_\varphi = 2 \sqrt{\frac{\pi}{S_T}}. \quad (2.120)$$

On retrouve la longueur caractéristique y_0 dans la masse ajoutée adimensionnelle

$$m_A = M \frac{y_0}{2}, \quad (2.121)$$

et dans le coefficient de viscosité

$$c_A = \frac{M}{S_T} \frac{1}{y_0}. \quad (2.122)$$

En variables dimensionnelles on a

$$Y_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_F \omega}}; C_\varphi = \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\rho_F}} \quad (2.123)$$

où ω est la pulsation d'oscillation. L'épaisseur de fluide entraînée diminue quand la pulsation augmente, mais la vitesse de propagation des ondes de cisaillement augmente.

2.6 Effets de la surface libre

2.6.1 Modes de ballottement

Étudions maintenant le cas où le nombre de Froude dynamique n'est pas très grand devant 1, et où la condition de surface libre s'écrit donc

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{F_D^2} \underline{u} \cdot \underline{e}_z = 0. \quad (2.124)$$

On se restreint par contre au modèle de fluide parfait, $St \gg 1$. A la différence du cas traité dans le paragraphe (2.4) de ce chapitre, le fluide possède maintenant une échelle de temps propre, liée ici aux ondes de surface libre. Plus précisément, pour un domaine fluide fini, ces ondes de surface libre permettent de définir des modes propres d'oscillation, dits modes de ballottement. La différence essentielle avec le cas des effets de viscosité est l'apparition de nouveaux degrés de liberté dans le problème. Le fluide ayant une dynamique modale propre, l'interaction fluide-solide peut être interprétée en terme de couplage entre deux systèmes modaux. On va mettre en évidence et analyser ce couplage sur le cas géométrique simple du réservoir rectangulaire, en se limitant à une description mono-paramétrique de chaque milieu.

On considère tout d'abord un réservoir rectangulaire immobile de profondeur h et de longueur L , contenant un fluide parfait incompressible soumis à la pesanteur.

La pression fluctuante vérifie

$$\Delta p = 0 \quad (2.125)$$

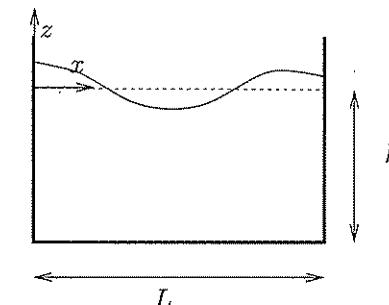


FIG. 2.11: Ballottement de surface libre.

et sur la surface libre $z = 0$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{F_D^2} \underline{\text{grad}} \ p \cdot \underline{e}_z = 0. \quad (2.126)$$

Sur les parois on a

$$\underline{\text{grad}} \ p \cdot \underline{n} = 0. \quad (2.127)$$

En cherchant des solutions de la forme

$$p(x, z, t) = e^{i\omega t} \varphi_p(x, z), \quad (2.128)$$

on obtient la suite des modes de ballottement dont nous ne retenons que le premier, qui est défini par une pulsation propre

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi} \tanh(\pi H)}{F_D}, \quad (2.129)$$

en utilisant la grandeur adimensionnelle $H = h/l$, et un champ de pression modale

$$\varphi_p(x, z) = \cos \pi x \frac{\cosh \pi(H+z)}{\cosh \pi H}. \quad (2.130)$$

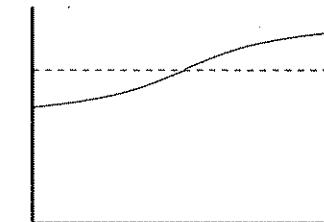


FIG. 2.12: Premier mode de ballottement.

Le déplacement modal associé est

$$\underline{\varphi}_\xi = -\underline{\text{grad}} \ \varphi_p, \quad (2.131)$$

ce qui donne à la surface libre la forme cosinusoidale, figure (2.12),

$$\underline{\varphi}_\xi(x, 0) \cdot \underline{e}_Z = -\cos(\pi x) \pi \tanh(\pi H). \quad (2.132)$$

Un mouvement quelconque de ballottement du fluide, exprimé sur ce mode s'écrit

$$\underline{\xi}_F(x, z, t) = Q(t) \underline{\varphi}_\xi(x, z). \quad (2.133)$$

et la pression associée

$$p = \ddot{Q} \varphi_p. \quad (2.134)$$

Ce paramètre $Q(t)$ a pour équation dynamique celle d'un oscillateur modal

$$M \ddot{Q} + K Q = 0. \quad (2.135)$$

On obtient simplement la masse modale M et la raideur modale K en projetant la condition de surface libre (2.124) sur le champ de pression modale en surface, soit

$$\int_0^1 (-\ddot{Q} \varphi_p) \varphi_p dx + \frac{1}{F_D^2} \int_0^1 (Q \underline{\varphi}_\xi \cdot \underline{e}_Z) \varphi_p dx = 0 \quad (2.136)$$

d'où l'on tire

$$M = \int_0^1 \varphi_p^2 dx = \frac{1}{2}; \quad K = \frac{1}{F_D^2} \int_0^1 (-\underline{\varphi}_\xi \cdot \underline{e}_Z) \varphi_p dx = \frac{\pi \tanh(\pi H)}{2F_D^2}. \quad (2.137)$$

2.6.2 Couplage avec un mouvement du solide

Supposons maintenant que le réservoir vide soit animé d'un mouvement défini lui aussi par un paramètre.

$$\underline{\xi} = q(t) \underline{e}_X, \quad (2.138)$$

où $q(t)$ évolue par exemple suivant une loi d'oscillateur

$$\ddot{q} + q = 0. \quad (2.139)$$

Lorsque le réservoir mobile est rempli à une hauteur H , les deux mouvements $Q(t)$ et $q(t)$ sont couplés. Pour le fluide, les conditions d'interface sur les parois verticales du réservoir deviennent

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = \dot{q} \underline{e}_X \cdot \underline{n} \quad (2.140)$$

soit ici en variable de pression

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0, z, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(1, z, t) = -\ddot{q}. \quad (2.141)$$

Pour satisfaire ces conditions, il faut rajouter à la forme mono-paramétrique (2.134) une pression associée à un mouvement d'ensemble, soit

$$p(x, z, t) = \ddot{Q}(t) \varphi_p(x, z) - \ddot{q} x \quad (2.142)$$

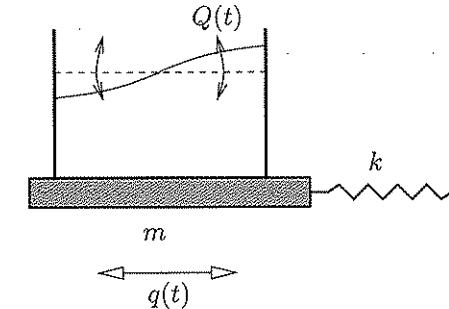


FIG. 2.13: Couplage entre mouvement de ballottement et mouvement du solide.

qui correspond à un champ de déplacement uniforme dans le fluide

$$\underline{\xi}_F(x, z, t) = Q(t) \underline{\varphi}_\xi(x, z) + q \underline{e}_X. \quad (2.143)$$

Par projection sur le premier mode comme précédemment, la condition de surface libre donne l'équation dynamique

$$-\ddot{Q} \left[\int_0^1 \varphi_p^2(x, 0) dx \right] + Q \left[\frac{1}{F_D^2} \int_0^1 (\underline{\varphi}_\xi(x, 0) \cdot \underline{e}_Z) \varphi_p dx \right] = -\ddot{q} \left[\int_0^1 x \varphi_p(x, 0) dx \right] \quad (2.144)$$

soit maintenant

$$M \ddot{Q} + K Q = -M_{SF} \ddot{q} \quad (2.145)$$

où la masse de couplage solide-fluide vaut

$$M_{SF} = \frac{2}{\pi^2}. \quad (2.146)$$

La deuxième condition d'interface donne la force totale sur les parois verticales

$$F_{FS} = \mathcal{M} \left[\int_{-H}^0 -p(0, z) dz + \int_{-H}^0 p(1, z) dz \right] \underline{e}_X \quad (2.147)$$

soit, projetée sur l'axe du mouvement

$$f_{FS} = F_{FS} \cdot \underline{e}_X = -m_{FS} \ddot{Q} - m_F \ddot{q} \quad (2.148)$$

où

$$m_{FS} = 2\mathcal{M} \frac{\tanh \pi H}{\pi}; \quad m_F = \mathcal{M} H, \quad (2.149)$$

cette dernière étant tout simplement la masse du fluide. Ainsi les systèmes fluides et solides ont des dynamiques modales couplées, régies par

$$M \ddot{Q} + K Q = -M_{SF} \ddot{q} \quad (2.150)$$

$$\ddot{q} + q = -m_{FS} \ddot{Q} - m_F \ddot{q}. \quad (2.151)$$

Ce couplage inertiel entre les deux degrés de libertés est formellement identique à celui qui existe entre les angles d'un bi-pendule. En imposant par exemple l'immobilité à la surface du fluide il reste comme effort sur le solide un effet de masse ajoutée égale à la masse de fluide transportée

$$\ddot{q} + q = -m_F \dot{q}. \quad (2.152)$$

C'est également la limite obtenue pour $F_R = 0$.

2.7 Expériences élémentaires

2.7.1 Effets visqueux

Nous avons montré dans ce chapitre comment la diffusion visqueuse dans le fluide introduit un effet d'histoire du mouvement dans les efforts qu'exercent le fluide sur le solide. Ceci peut se mettre en évidence sur deux expériences simples, utilisées depuis toujours en cuisine pour déterminer si un œuf est cru ou dur, sans le casser. Il s'agit pour cela d'observer la rotation de l'œuf sur un plan rigide, dans différentes conditions, figure (2.14).

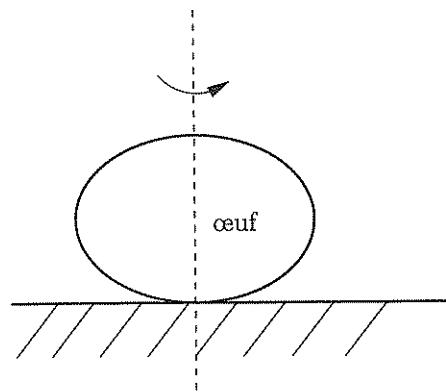


FIG. 2.14: Mise en évidence des effets visqueux dans la mise en rotation d'un œuf.

Dans la première expérience, la plus classique, on donne à l'œuf une impulsion en rotation : l'œuf dur tourne aisément, tandis que l'œuf cru pour une même impulsion se met en mouvement plus difficilement, figure (2.15). La configuration est très proche de celle de la réponse impulsionale du deuxième problème de Stokes, évoqué plus haut : le fluide interne est progressivement entraîné par la rotation des parois. Lorsque la diffusion visqueuse a mis en mouvement tout le liquide interne, l'ensemble tourne comme un corps solide.

La deuxième expérience, plus délicate mais plus probante, consiste à arrêter brutalement avec la main l'œuf en rotation, à le maintenir une ou

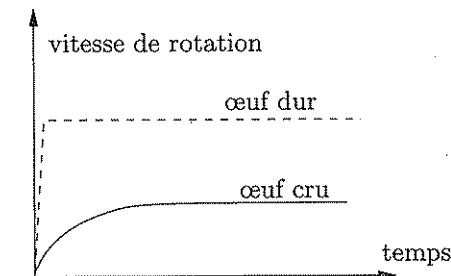


FIG. 2.15: Première expérience : mise en rotation par une impulsion

deux secondes et à le relâcher. L'œuf dur reste alors immobile tandis que l'œuf cru redémarre, figure (2.16). Le liquide interne poursuit en effet son mouvement et entraîne la coquille. Si le temps d'arrêt est long devant le temps de diffusion visqueuse, l'œuf ne redémarre pas, le fluide interne s'étant immobilisé.

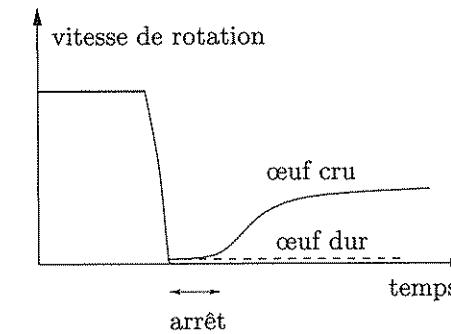


FIG. 2.16: Seconde expérience : Redémarrage après arrêt de la rotation.

Ces effets sont ici observables car le temps de diffusion visqueuse est de l'ordre de la seconde,

$$T_\nu = \mathcal{O}\left(\frac{L}{c_\nu}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{L^2 \rho_F}{\mu}\right). \quad (2.153)$$

De plus, la masse fluide est importante par rapport à celle du solide ($\mathcal{M} \gg 1$) et les frottements externes au contact entre l'œuf et la table sont faibles.

2.7.2 Couplage avec un mode de ballottement

Une expérience de même nature sur le ballottement peut être faite avec une bouteille d'eau minérale cylindrique, partiellement remplie, que

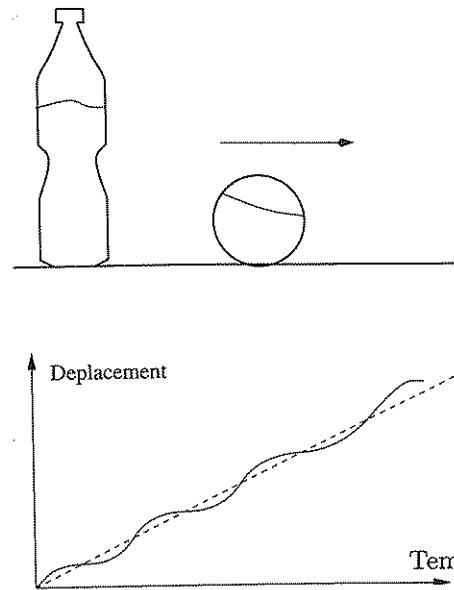


FIG. 2.17: Mise en évidence du couplage de la dynamique du solide avec un mode de ballottement du fluide dans le roulage d'une bouteille partiellement remplie.

l'on fait rouler sur un sol rigide, figure (2.17). Si on lance le mouvement progressivement, celui-ci se poursuit à une vitesse à peu près constante, sans oscillation de liquide à l'intérieur du fluide. A l'inverse, un mouvement lancé brusquement induit des oscillations importantes de la surface du fluide, et un déplacement de la bouteille *par à-coups*.

Ce phénomène s'explique simplement à partir des résultats du paragraphe précédent. Le mouvement du solide n'est retenu par aucune raideur ($k = 0$) et la forme générale des équations (2.150), (2.151) devient

$$(M - M_{SF} \frac{m_{FS}}{1 + m_F})\ddot{Q} + K Q = 0 \quad (2.154)$$

$$\ddot{q} = -\frac{m_{FS}}{1 + m_F} \ddot{Q}. \quad (2.155)$$

La première équation va donner les oscillations de la surface du fluide, $Q = Q_0 \sin \Omega t$. La seconde montre que le déplacement $q(t)$ du solide sera perturbé par une force oscillante issue du fluide et sera donc de la forme

$$q(t) = V_0 t + q_0 \sin \Omega t. \quad (2.156)$$

Les amplitudes q_0 et Q_0 dépendent de la forme de l'impulsion initiale. Ces effets disparaissent lorsque la bouteille, entièrement remplie, ne permet pas aux modes de ballottement d'exister.

2.8 Conclusion

Dans l'hypothèse des petites vitesses réduites, et en se limitant aux petits déplacements des solides, on a donc pu mettre en évidence quatre mécanismes physiques bien distincts d'interaction fluide-solide.

Le premier est un effet de **raideur ajoutée**, associé au gradient de champ de pression dans le fluide et à la déformation de l'interface. Il se traduit par une force proportionnelle au déplacement de la structure.

Le deuxième est un effet de **masse ajoutée**, lié aux variations d'énergie cinétique du fluide lors du mouvement du solide. Il s'oppose à l'accélération de ce dernier.

La diffusion visqueuse, dont une mesure est le nombre de Stokes, a pour conséquence un **effet d'histoire** dans la réaction du fluide au mouvement du solide.

Enfin, l'existence d'une surface libre sur le fluide entraîne des **coupages de modes** entre la dynamique du solide et celle du fluide.

Ces effets ont un caractère générique et ne sont pas, dans leur principe, dépendants des hypothèses restrictives que nous avons faites ou spécifiques aux exemples choisis pour les illustrer. En effet, même en présence de diffusion visqueuse, d'ondes de gravité, de compressibilité et d'écoulement permanent, on a un effet de masse ajoutée apparente sur le solide chaque fois qu'un mouvement de paroi de ce dernier induit une variation d'énergie cinétique du fluide. De même, dès que la vitesse de diffusion visqueuse n'est pas négligeable devant les autres vitesses la force de réaction du fluide sur le solide aura un effet d'histoire. Enfin, chaque fois que le système fluide peut être décrit par des modes propres, l'interaction fluide-solide se traduira par un couplage de modes. C'est aussi le cas du couplage avec les modes acoustiques.

Si nous représentons schématiquement la dynamique du solide par celle d'un pendule (description mono-paramétrique), ces différents effets du fluide peuvent s'illustrer, selon le domaine où ils existent, dans le plan $(1/S_T, 1/F_D)$, figure 2.18.

Chapitre 3

AÉROÉLASTICITÉ

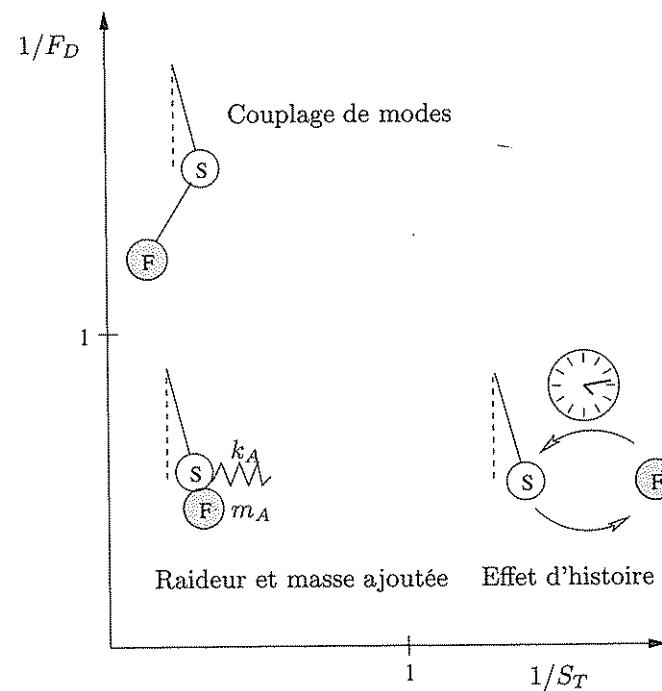


FIG. 2.18 : Effets d'un fluide au repos sur la dynamique d'un solide. S : Solide, F : Fluide.

L'avion n'est pas un but, c'est un outil.

Antoine de Saint-Exupéry, Terre de hommes, 1939.

A la différence du chapitre précédent, considérons maintenant le cas d'une grande vitesse réduite, figure (3.1)

$$U_R = \frac{U_0}{c_s} \gg 1. \quad (3.1)$$

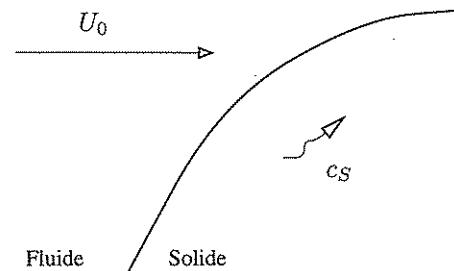


FIG. 3.1: Fortes vitesses réduites, $U_0 \gg c_s$.

En terme de temps caractéristiques tels que définis plus haut, cela signifie que l'échelle de temps du mouvement du solide est beaucoup plus longue que celle du fluide, soit, figure (3.2),

$$U_R = \frac{U_0 T_{Soleil}}{L} = \frac{T_{Soleil}}{T_{Fluide}} \gg 1. \quad (3.2)$$

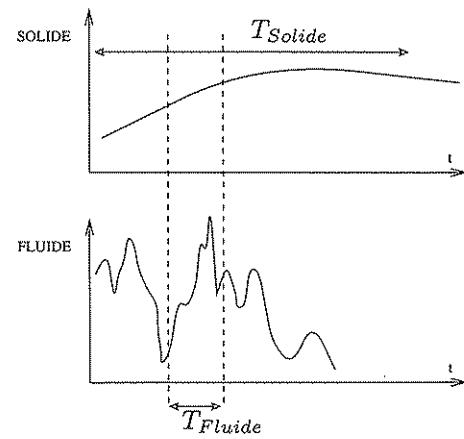


FIG. 3.2: Fortes vitesses réduites, $T_{Soleil} \gg T_{Fluide}$.

Dans ce chapitre nous allons approfondir l'intuition selon laquelle, dans ce cas, à l'échelle de temps du fluide le solide semble immobile.

En premier lieu, nous allons préciser l'expression adimensionnelle de cette hypothèse de forte vitesse réduite et ses conséquences en termes

de conditions aux limites. Nous envisagerons ensuite successivement les instabilités statiques et dynamiques que l'on peut ainsi prévoir. Dans chaque cas nous étudierons le mécanisme générique et quelques exemples classiques d'applications.

Parmi les exemples proposés dans l'introduction, le cas de l'aileron d'avion en est une illustration : bien que cet aileron soit mobile son mouvement est négligeable pendant le temps que met une particule fluide à le parcourir.

3.1 Analyse dimensionnelle

3.1.1 Nombres et variables sans dimension

L'échelle de temps pertinente est maintenant celle du fluide, ce qui nous conduit à utiliser comme temps adimensionnel

$$\tilde{t} = \frac{U_0 t}{L} \quad (3.3)$$

au lieu de

$$\tilde{t} = \frac{c_s t}{L}. \quad (3.4)$$

Nous reprenons également l'usage des nombres définis dans le Chapitre 1,

$$F_R = \frac{U_0}{\sqrt{Lg}} ; R_E = \frac{\rho_F U_0 L}{\mu} ; C_Y = \frac{\rho_F U_0^2}{E}. \quad (3.5)$$

Par rapport au chapitre précédent, seules les dérivées temporelles sont modifiées dans les équations qui définissent l'évolution des variables dans le fluide et dans le solide. On obtient donc pour le fluide

$$\operatorname{div} \underline{\tilde{U}} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d \underline{\tilde{U}}}{d \tilde{t}} = - \frac{1}{F_R^2} \underline{\varepsilon}_z - \operatorname{grad} \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \Delta \underline{\tilde{U}}, \quad (3.7)$$

et pour le solide,

$$U_R^2 \mathcal{D} \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial \tilde{t}^2} = - \frac{U_R^2}{F_R^2} \underline{\varepsilon}_z + \operatorname{div} \underline{\tilde{\sigma}}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{D} \frac{1}{2} (\nabla^t \underline{\xi} + \nabla \underline{\xi}) = (1 + \nu) \underline{\tilde{\sigma}} - \nu \operatorname{Tr}(\underline{\tilde{\sigma}}) \underline{1}. \quad (3.9)$$

Les conditions d'interface deviennent

$$\underline{\tilde{U}}(\underline{\tilde{x}}) = \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \tilde{t}}(\underline{\tilde{X}}, \tilde{t}) \quad (3.10)$$

et

$$C_Y [-\tilde{p}(\underline{\tilde{x}}) \underline{1} + \frac{2}{R_E} \underline{\tilde{d}}(\underline{\tilde{x}})] \cdot \underline{n}(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\tilde{\sigma}}(\underline{\tilde{x}}) \cdot \underline{n}(\underline{\tilde{x}}). \quad (3.11)$$

Enfin, la condition aux limites en vitesse qui a permis de définir la référence U_0 a pour ordre de grandeur

$$\underline{\tilde{U}} = \mathcal{O}(1). \quad (3.12)$$

3.1.2 Grandes vitesses réduites

Comme dans le chapitre précédent on peut comparer l'ordre de grandeur des conditions aux limites à l'interface (3.10) et la référence (3.12). La première a pour ordre de grandeur

$$\tilde{U} \sim D \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{t}} = O(D \frac{1}{(T_S/T_F)}) = O(\frac{D}{U_R}), \quad (3.13)$$

car \tilde{t} est construit à partir de l'échelle de temps du fluide et non du solide. On voit donc que si

$$U_R \gg D \quad (3.14)$$

la vitesse à l'interface sera petite devant 1 et la vitesse dans le fluide sera conditionnée par (3.12) plutôt que par (3.10). On peut donc dire que le fluide, dans son mouvement, percevra le solide comme immobile. La condition d'interface (3.10) peut donc être légitimement remplacée par

$$\Rightarrow \underline{\tilde{U}} = 0. \quad (3.15)$$

On retrouve ainsi une condition aux limites classique qui, avec l'ensemble des équations (3.6), (3.7) forme un problème de Mécanique des fluides bien posé, sur un domaine dont la géométrie peut avoir été modifiée par le déplacement du solide. La résolution de ce problème donne les contraintes fluides à la paroi $\underline{\underline{\sigma}}_F$, et donc le premier membre de la condition dynamique, (1.54). Ceci entraîne une condition aux limites en efforts pour le solide

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = C_Y \underline{\underline{\sigma}}_F \cdot \underline{n} \quad (3.16)$$

qui peut modifier la forme de l'interface. Cette condition dépend des paramètres de l'écoulement et, indirectement, du déplacement de l'interface puisque la condition (3.15) est bien sûr exprimée sur la position actuelle de la paroi, soit

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = C_Y \underline{\underline{\sigma}}_F(R_E, F_R, D, \xi) \cdot \underline{n}. \quad (3.17)$$

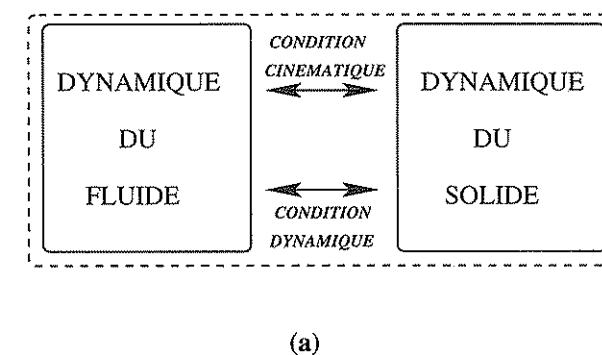
C'est donc en réalité une condition aux limites de type mixte dans laquelle le déplacement ξ et la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ sont reliés. Mais ce lien n'est pas local puisque par l'intermédiaire du fluide le déplacement en un point va induire une contrainte fluide en d'autres points de l'interface.

Ainsi, à la différence du chapitre précédent où les dynamiques du fluide et du solide évoluaient simultanément, on peut se ramener ici à des problèmes plus classiques de Mécanique des fluides et de Mécanique des solides. Ceci est lié à l'existence d'échelles de temps et de vitesse différentes qui font que : (a) pour le fluide, le solide n'a pas de vitesse, étant seulement déformé par les efforts résultant de l'écoulement, (b) pour le solide, le fluide n'est qu'une source d'efforts statiques.

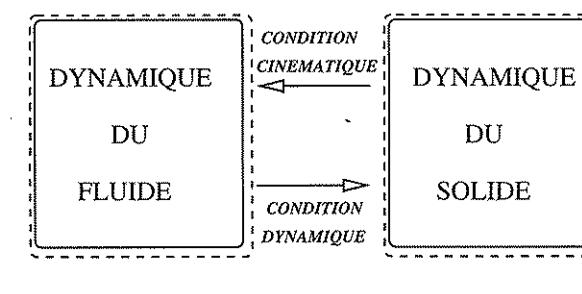
Il faut remarquer ici que nous avons fait l'hypothèse qu'il n'existe pas d'autre échelle de temps caractéristique de l'écoulement, liée par

3.1. ANALYSE DIMENSIONNELLE

exemple à des variations temporelles de conditions aux limites (écoulement pulsé) ou à des fluctuations intrinsèques à l'écoulement (détachement de tourbillons). Comme la condition cinématique simplifiée (3.15) n'introduit plus de dépendance en temps, le problème de Mécanique des fluides peut être considéré comme *stationnaire* et la variable temps disparaît pour le fluide. Le problème totalement couplé initial se réduit donc au couplage de 2 problèmes simples, figure (3.3). L'approximation des



(a)



(b)

FIG. 3.3: (a) Dynamiques couplées dans le cas général (b) Dynamiques découpées dans l'hypothèse des fortes vitesses réduites

grandes vitesses réduites définit ce qui est souvent appelé l'aéroélasticité, ou plus précisément l'aéroélasticité quasi-statique. Elle a beaucoup d'applications pratiques, notamment dans le domaine de l'aéronautique où les vitesses des fluides sont grandes. Grâce à cette hypothèse on peut utiliser les résultats d'essais ou de calculs avec le solide immobile pour estimer le mouvement de ce solide.

Dans la suite de ce chapitre, nous omettrons les (\cdot) et (\cdot) dans la notation des variables adimensionnelles.

3.2 Instabilités statiques

3.2.1 Mécanisme générique

Considérons le cas simple où la dynamique du solide est décrite par un seul paramètre, soit

$$\xi(\underline{X}, t) = q(t) \varphi(\underline{X}). \quad (3.18)$$

L'évolution de $q(t)$, lente à l'échelle de temps considérée, est par exemple régie par une équation d'oscillateur

$$m \ddot{q} + k q = f_{FS} \quad (3.19)$$

soit, sous forme adimensionnelle

$$\ddot{q} + q = f_{FS}. \quad (3.20)$$

L'échelle de temps du solide est $T_S = \sqrt{m/k}$ et f_{FS} est la projection modale des efforts exercés par le fluide sur l'interface, soit ici

$$f_{FS} = \int_{\partial\Omega_{FS}} C_Y (\underline{\sigma}_F \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\varphi} \, dS. \quad (3.21)$$

En utilisant (3.17), cette force s'écrit sous la forme générique

$$f_{FS} = C_Y f[R_E, F_R, q(t)]. \quad (3.22)$$

Elle ne dépend donc que des paramètres adimensionnels C_Y , R_E et F_R et de $q(t)$ qui définit la position instantanée du solide. En développant au premier ordre en q autour de la position $q = 0$, on a

$$\ddot{q} + q = C_Y f^0 + C_Y \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^0 q \quad (3.23)$$

où $(\cdot)^0$ est la valeur en $q = 0$. Ceci fait apparaître la force exercée par le fluide comme la somme d'une composante permanente et d'une force de raideur apparente.

La composante permanente, $C_Y f^0$, qui augmente avec la vitesse d'écoulement U peut induire une déformation importante de la structure.

La force de raideur ajoutée par l'écoulement, $C_Y (\partial f / \partial q)^0 q$, exprime la réaction de l'écoulement à une modification de la géométrie de l'interface. La raideur apparente de l'oscillateur dépend de la vitesse de l'écoulement par l'intermédiaire du nombre de Cauchy. Elle n'est pas forcément positive et une instabilité de flambage par divergence peut apparaître dès qu'elle s'annule, soit lorsque

$$1 - C_Y \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^0 = 0. \quad (3.24)$$

Cette instabilité est appelée *statique* dans la mesure où elle a pour origine l'annulation de la raideur du système et où elle ne dépend pas de l'inertie de celui-ci. L'amplitude q croît alors exponentiellement jusqu'à ce que des effets non-linéaires permettent éventuellement de retrouver une position stable. C'est la porte qui claque !

3.2. INSTABILITÉS STATIQUES

3.2.2 Torsion des ailes

Nous pouvons illustrer ce mécanisme d'instabilité sur le cas d'un profil d'aile ayant un degré de liberté de torsion autour d'un axe situé à une distance x en arrière du point d'application de la portance, figure (3.4). Les oscillations autour de l'angle $\theta = 0$ sont régies par l'équation

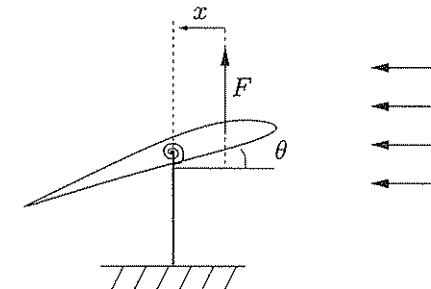


FIG. 3.4 : Torsion d'un profil d'aile.

$$J\ddot{\theta} + C\theta = \frac{1}{2}\rho U^2 L C_L(\theta) x, \quad (3.25)$$

dans laquelle J et C sont respectivement le moment d'inertie et la raideur linéaire de torsion par rapport à l'axe, C_L est le coefficient de portance du profil et L est sa corde. A l'aide du temps adimensionnel défini à partir de la période d'oscillation de l'aile libre, $\bar{t} = t\sqrt{C/J}$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\ddot{\theta} + \theta = C_Y C_L(\theta) \frac{x}{L} \quad (3.26)$$

avec le nombre de Cauchy

$$C_Y = \frac{1}{2} \frac{\rho U^2 L^2}{C}. \quad (3.27)$$

Dans les équations précédentes, nous avons fait l'hypothèse que les efforts exercés par l'écoulement sur le profil d'aile ne dépendent que de l'angle instantané θ . Ceci correspond précisément à l'hypothèse d'aéroélasticité selon laquelle la dynamique du solide est lente par rapport à celle du fluide, ce qui permet de négliger les effets de vitesse de l'interface. Il faut donc que la condition (3.14) soit satisfaite, soit ici simplement

$$U_R = \frac{T_{solide}}{T_{fluide}} = \frac{\sqrt{J/C}}{L/U} = \frac{U}{L} \sqrt{\frac{J}{C}} \gg D. \quad (3.28)$$

Nous allons donc utiliser les résultats classiques sur les coefficients de portance des ailes. Pour un profil symétrique, l'évolution du coefficient

de portance avec l'angle d'incidence a la forme donnée dans la figure (3.5) et la dérivée à l'origine vaut

$$\left[\frac{\partial C_L}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 2 \pi. \quad (3.29)$$

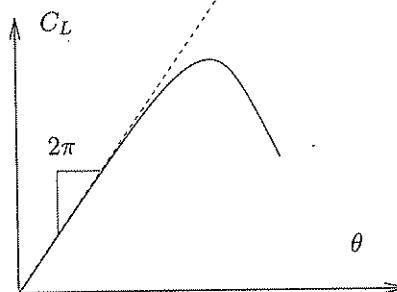


FIG. 3.5 : Coefficient de portance d'un profil d'aile.

Les oscillations de petites amplitudes seront donc régies par l'équation

$$\ddot{\theta} + \left(1 - 2\pi C_Y \frac{x}{L} \right) \theta = 0. \quad (3.30)$$

Si l'axe élastique est en avant du point d'application de la force de portance, c'est-à-dire si $x < 0$, figure 3.4, les oscillations se font à des fréquences de plus en plus élevées quand on augmente la vitesse de l'écoulement. Par contre, lorsque l'axe élastique est en arrière, $x > 0$, la raideur du système diminue quand la vitesse de l'écoulement augmente. La fréquence d'oscillation diminue donc jusqu'à être nulle. Pour une perturbation initiale θ_0 , on observe alors une réponse non plus oscillante mais exponentiellement croissante, figure (3.6). Cette instabilité apparaît au nombre de Cauchy

$$C_Y = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{x} \quad (3.31)$$

c'est à dire à la vitesse

$$U_C = \sqrt{\frac{C}{\pi \rho L x}}. \quad (3.32)$$

Pour une vitesse plus grande que la vitesse critique, le profil d'aile retrouve une position stable à un angle θ beaucoup plus grand, qui sera tel que le moment de la portance sera équilibré par la résistance en torsion de l'axe. Cet angle est défini graphiquement par l'intersection entre la courbe de portance et la courbe de raideur, soit

$$\frac{L\theta}{xC_Y} = C_L(\theta), \quad (3.33)$$

ce qui donne un angle supérieur à l'angle de décrochage, figure (3.7).

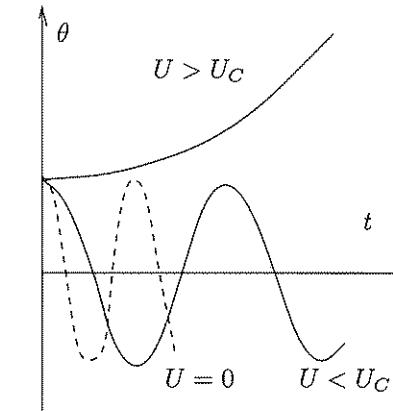


FIG. 3.6 : Oscillations libres d'un profil d'aile sous écoulement. Modification de la fréquence et instabilité statique.

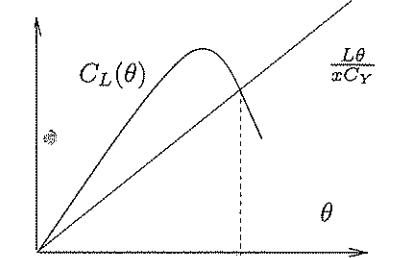


FIG. 3.7 : Nouvelle position d'équilibre après l'instabilité statique de torsion.

3.3 Instabilités dynamiques

3.3.1 Mécanisme générique

Lorsque la dynamique du solide est décrite par deux paramètres, un mécanisme d'instabilité radicalement différent apparaît. Écrivons donc

$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = q_1(t) \underline{\varphi}_1(\underline{X}) + q_2(t) \underline{\varphi}_2(\underline{X}), \quad (3.34)$$

où ces paramètres représentent par exemple la translation et la rotation d'une section d'aile ou le mouvement dans deux directions orthogonales d'un objet. La condition dynamique à l'interface dépend donc des deux paramètres q_1 et q_2 ,

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = C_Y \underline{\sigma}_F(R_E, F_R, \mathcal{D}, q_1, q_2) \cdot \underline{n}. \quad (3.35)$$

En développant comme précédemment au premier ordre en q_1 et q_2 , l'évolution de chaque paramètre est régie par

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 = C_Y f_1^0 + C_Y K_{11} q_1 + C_Y K_{12} q_2, \quad (3.36)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + k_2 q_2 = C_Y f_2^0 + C_Y K_{21} q_1 + C_Y K_{22} q_2, \quad (3.37)$$

où nous définissons les coefficients de raideur

$$C_Y K_{ij} = C_Y \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right)^0 \quad (3.38)$$

à partir des projections sur chaque forme de déplacement $\underline{\varphi}_i$ des efforts exercés par le fluide

$$f_i = \int_{\partial \Omega_{FS}} (\underline{\sigma}_F \cdot \underline{n}) \cdot \underline{\varphi}_i \, dS. \quad (3.39)$$

La variation de la vitesse de l'écoulement va donc modifier les coefficients de raideur $C_Y K_{ij}$ et, comme pour le cas mono-paramétrique, on peut obtenir des instabilités statiques. Par ailleurs, avec l'évolution de la vitesse, les deux oscillateurs qui avaient initialement des pulsations a priori distinctes,

$$\omega_1^0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}; \quad \omega_2^0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (3.40)$$

vont voir celles-ci évoluer. Il est possible que ces pulsations deviennent égales, figure (3.8). C'est la *confusion de fréquence*. On a alors deux oscillateurs de même pulsation, couplés par un second membre.

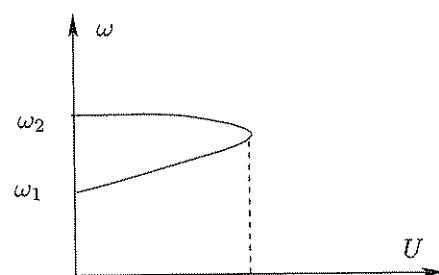


FIG. 3.8: Confusion de fréquence.

Nous allons en étudier le comportement à partir du système modèle

$$\ddot{x} + x = Ay, \quad (3.41)$$

$$\ddot{y} + y = Bx. \quad (3.42)$$

La recherche de solutions harmoniques de la forme $x_0 e^{i\omega t}$, $y_0 e^{i\omega t}$ est particulièrement simple dans le cas d'un faible couplage antisymétrique, soit

$$A = -B = \varepsilon \ll 1. \quad (3.43)$$

3.3. INSTABILITÉS DYNAMIQUES

On obtient un mode amorti

$$x = e^{-\varepsilon t/2} \cos t; \quad y = e^{-\varepsilon t/2} \sin t, \quad (3.44)$$

et surtout un mode instable

$$x = e^{\varepsilon t/2} \cos t; \quad y = -e^{\varepsilon t/2} \sin t. \quad (3.45)$$

que nous représentons dans l'espace (x, y) , figure (3.9).

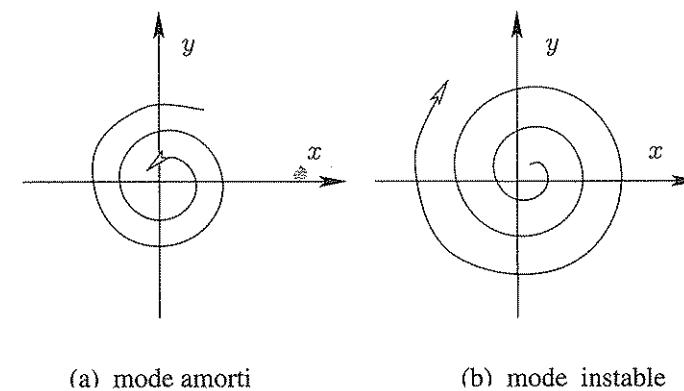


FIG. 3.9: Mode amorti et mode instable dans un couplage antisymétrique.

Au mode instable correspondent des oscillations d'amplitude exponentiellement croissante, qui ne seront limitées que par les non-linéarités du système.

Revenant au cas plus général (3.41), (3.42), on peut calculer le travail exercé par les forces de couplage au cours d'un cycle d'oscillation, soit

$$W = \int_0^T [(Ay)\dot{x} + (Bx)\dot{y}] dt \quad (3.46)$$

qui vaut

$$W = \frac{A+B}{2} [xy]_0^T + \frac{A-B}{2} \int_0^T (y\dot{x} - x\dot{y}) dt. \quad (3.47)$$

Au cours d'un cycle de mouvement périodique, le premier terme est nul, et le second est positif ou négatif selon la valeur de $A - B$ et la phase relative de x et y . Dans le cas simplifié résolu plus haut on obtient pour un mouvement de type $x = \cos t$; $y = \sin t$ un travail au premier ordre en ε égal à

$$W = -2\pi \varepsilon, \quad (3.48)$$

et donc un transfert d'énergie du solide vers le fluide, mais pour un mouvement de type $x = \cos t$; $y = -\sin t$ ce travail vaut

$$W = +2\pi \varepsilon. \quad (3.49)$$

Il y a donc un transfert d'énergie du fluide vers le solide, ce qui est le moteur de l'instabilité oscillante de ce dernier.

Ainsi, le mode instable est le mouvement qui permet au solide d'extraire de l'énergie de l'écoulement.

De façon plus formelle on peut dire que si les coefficients A et B sont égaux la force de couplage, dans l'espace (x, y) , dérive d'un potentiel

$$\Phi = A xy; F_x = A y = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; F_y = A x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.50)$$

Le système est dit conservatif [6], [27], [3]. Après un cycle d'oscillation, qui correspond à un cycle fermé dans l'espace (x, y) , l'énergie totale du solide est inchangée. Si au contraire A et B sont différents le système est non-conservatif et un trajet fermé apporte une énergie proportionnelle à l'aire balayée dans l'espace (x, y) . Cette aire est ici positive pour le mode instable et négative pour le mode amorti (figure 3.9).

On notera enfin que pour que l'instabilité évoquée ici apparaisse il n'est pas strictement nécessaire que les deux oscillateurs aient la même fréquence. Des échanges d'énergie en moyenne non nuls peuvent avoir lieu dès que les paramètres A et B sont différents. Ce type d'instabilité est donc bien lié au caractère non symétrique du couplage entre les deux déplacements. On la désigne fréquemment par le terme *d'instabilité par couplage antisymétrique en raideur*, qui est plus précis que *confusion de fréquence*.

3.3.2 Flottement des ailes d'avion

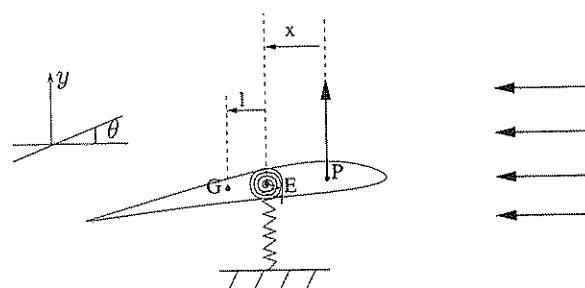


FIG. 3.10 : Torsion et flexion d'une aile.

L'illustration la plus connue et sans doute la plus importante du point de vue technique de ce mécanisme est le flottement des ailes d'avion par couplage des modes de flexion et torsion ("coupled mode flutter" en anglais). Considérons la section d'aile déjà étudiée, dont le mouvement est maintenant défini par deux paramètres, la translation verticale de flexion $y(t)$ et la rotation de torsion $\theta(t)$ associées au point E , figure (3.10). En l'absence d'écoulement, la dynamique des petits mouvements

3.3. INSTABILITÉS DYNAMIQUES

de l'aile est régie par

$$M(\ddot{y} - l\ddot{\theta}) = -Ky, \quad (3.51)$$

$$J\ddot{\theta} = -C\dot{y} - (Ky)l, \quad (3.52)$$

où l est la distance au centre de gravité G , M et J sont les inertie et moment d'inertie par rapport à G , et K et C sont les raideurs élastiques associées à ces deux mouvements. Comme plus haut, dans l'hypothèse d'aéroélasticité nous supposons que l'écoulement a pour effet une force de portance verticale qui vaut

$$F = \frac{1}{2}\rho U^2 L 2\pi \theta, \quad (3.53)$$

et s'applique à la distance x en avant du centre élastique E . Le mouvement de l'aile est alors défini par le système couplé

$$M\ddot{y} - Ml\ddot{\theta} + Ky = \frac{1}{2}\rho U^2 L 2\pi \theta, \quad (3.54)$$

$$J\ddot{\theta} + [C - (\frac{1}{2}\rho U^2 L) 2\pi(l+x)]\theta = -(Kl)y. \quad (3.55)$$

En prenant comme échelle de temps la période des oscillations de torsion, comme précédemment, nous pouvons définir les nombres adimensionnels

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{C}{J}} t; \Omega = \frac{\sqrt{K/M}}{\sqrt{C/J}}. \quad (3.56)$$

La forme adimensionnelle du système couplé est alors

$$\ddot{Y} - \frac{l}{L}\ddot{\theta} + \Omega^2 Y = [\frac{\Omega^2}{k} C_Y 2\pi] \theta, \quad (3.57)$$

$$\ddot{\theta} + (1 - 2\pi C_Y \frac{l+x}{L})\theta = -k \frac{l}{L} Y, \quad (3.58)$$

avec $Y = y/L$, $k = KL^2/C$ et $C_Y = \rho U^2 L^2 / 2C$.

On retrouve l'instabilité statique de torsion pure en éliminant la possibilité de mouvement selon Y , soit avec $\Omega \gg 1$. Le critère de stabilité est alors $x < 0$.

On peut remarquer que la raideur du mode de translation n'est pas modifiée par l'écoulement, ce qui est normal puisque la position verticale y de l'aile n'influe pas sur les efforts aérodynamiques. Ce ne serait pas le cas en présence d'une frontière fixe dans l'écoulement : on peut par exemple avoir une instabilité statique de flexion par effet de sol.

Les équations couplées ci-dessus ont bien la forme générique que nous avons étudiée au paragraphe précédent. La fréquence du mode de torsion évolue avec l'écoulement et une confusion de fréquences est possible. Si le centre de gravité est situé en arrière du centre élastique, $l > 0$, le couplage en raideur entre les deux modes est bien antisymétrique. Une étude plus détaillée du système couplé montre que c'est la condition

nécessaire pour que l'instabilité apparaisse [14]. La figure (3.11) montre un exemple d'évolution des paramètres modaux en fonction du nombre de Cauchy. Après la confusion de fréquence, on trouve deux modes de même fréquence mais l'un des deux est amorti tandis que l'autre est instable, la partie imaginaire de sa pulsation étant négative, $\omega_I < 0$.

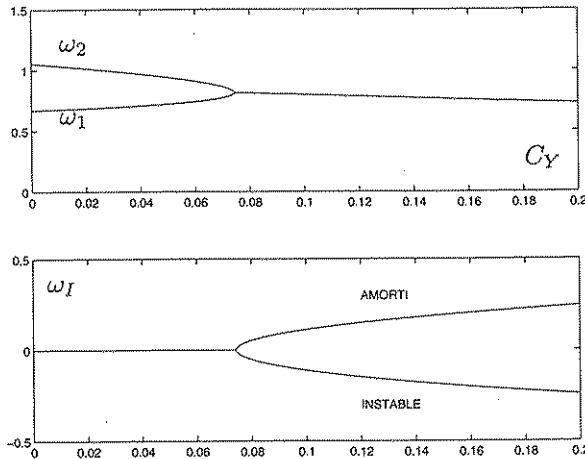


FIG. 3.11 : Évolution des fréquences et amortissements ($l = L/4$, $x = L/4$, $\Omega^2 = 1/2$, $k = 1$).

Le mouvement instable, dessiné dans la figure (3.12,) montre bien que la force de portance peut, dans ce mouvement de nage de l'aile, transférer de l'énergie au solide. Ce mouvement est obtenu par une combinaison de torsion et de flexion de l'aile, déphasées en quadrature, selon le modèle générique décrit plus haut. Inversement, le mode amorti est freiné par l'écoulement. On notera que les modes de translation pure et de rotation pure ont chacun un bilan énergétique nul sur une période et que seule la combinaison synchronisée de ces deux mouvements peut extraire de l'énergie du fluide.

3.3.3 Instabilité du tuyau d'arrosage

Un tuyau flexible dont une extrémité est libre se met à osciller violemment lorsque l'on augmente la vitesse du fluide qui le parcourt. Cette instabilité se manifeste par des oscillations d'amplitude croissante selon un mouvement de fouettement assez complexe. Le premier à étudier en détail ce phénomène a été F. J. Bourrières [8], avant la seconde guerre mondiale. Ses expériences, dans le laboratoire de H. Bénard, ont bien montré l'existence d'une vitesse critique à partir de laquelle les oscillations apparaissent. Par ailleurs, en laissant osciller le tuyau instable sur une table recouverte d'une couche de sable il a pu faire apparaître l'enveloppe du mouvement. Celle-ci dépend fortement du nombre de Masse : à

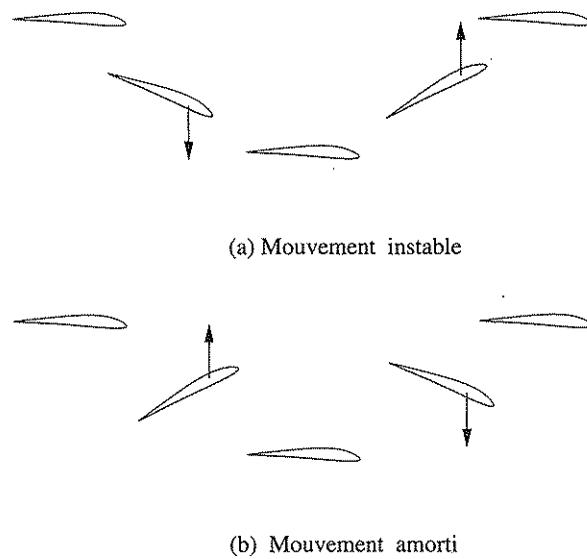


FIG. 3.12 : Mouvement d'un profil d'aile dans une instabilité par couplage entre translation et rotation [14].

grand nombre de masse (fluide lourd) elle est triangulaire, figure (3.13) alors qu'elle ressemble à un « calice de fuchsia » aux faibles nombres de masse (fluide léger), figure (3.14).

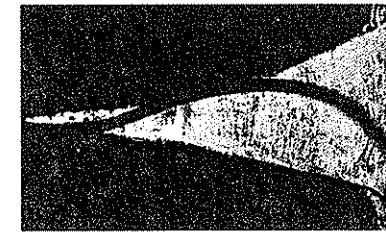


FIG. 3.13 : Expérience de Bourrières (1939) avec un écoulement d'eau dans un tube : l'enveloppe du mouvement est triangulaire.

Il a également établi les équations dynamiques du tuyau parcouru par un fluide. Ces équations n'ont été redécouvertes et résolues qu'en 1966 par Païdoussis [22].

Le cas le plus général est abordé dans le prochain chapitre, mais on peut déjà construire une modélisation approchée de ce phénomène dans le cadre de l'aéroélasticité, selon le mécanisme d'instabilité par couplage antisymétrique. Considérons pour cela le système simplifié formé de deux tuyaux rigides de longueur L et sans masse, avec des articulations élastiques, selon le schéma ci-dessous. Aux articulations sont fixées



FIG. 3.14 : Expérience de Bourrières (1939) avec un écoulement d'air dans un tube : l'enveloppe du mouvement est en forme de «calice de fuchsia».

des masses ponctuelles.

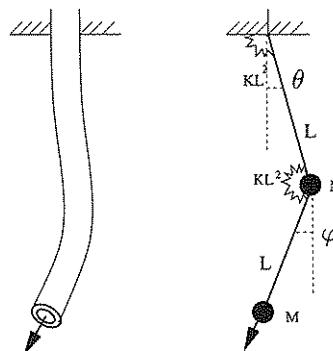


FIG. 3.15 : Modélisation simplifiée d'un tuyau encastré-libre

En l'absence de fluide à l'intérieur du tuyau la dynamique de ce système est définie par une énergie cinétique E_C et une énergie potentielle élastique E_E qui valent

$$E_C = \frac{1}{2} M(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} M(L\dot{\theta} + L\dot{\varphi})^2, \quad (3.59)$$

$$E_E = \frac{1}{2} KL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} KL^2(\theta - \varphi)^2 \quad (3.60)$$

où θ et φ sont les angles, supposés petits, des tuyaux avec la verticale, KL^2 est la raideur de torsion des articulations, et M la valeur des masses ponctuelles. En utilisant les équations de Lagrange, on obtient les équations dynamiques en l'absence d'écoulement, écrites sous forme adimensionnelle à l'aide d'un temps réduit $t = t/\sqrt{M/K}$

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + 2\theta - \varphi = 0, \quad (3.61)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} - \theta + \varphi = 0. \quad (3.62)$$

On en déduit les deux modes propres de pulsations

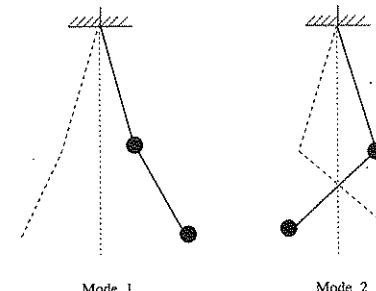


FIG. 3.16 : Modes propres en l'absence d'écoulement

$$\omega_1^0 = \sqrt{2} - 1; \omega_2^0 = \sqrt{2} + 1 \quad (3.63)$$

avec les déformées modales

$$(\theta_1, \varphi_1) = (1, \sqrt{2}); (\theta_2, \varphi_2) = (1, -\sqrt{2}) \quad (3.64)$$

représentées dans la figure (3.16). Dans le cas d'une instabilité par écoulement d'air la vitesse nécessaire est souvent telle qu'un écoulement interne peut se modéliser dans le cadre de l'aéroélasticité, en considérant donc pour le calcul des forces fluides le système comme immobile dans une position (θ, φ) donnée. L'effort résultant de l'écoulement du fluide, que nous supposerons ici parfait, s'obtient aisément à l'aide des formes globales des équations de conservation. Il est directement lié au changement de direction du fluide à l'articulation entre les deux tuyaux, figure (3.17). Il vaut pour des petits angles

$$\underline{F} = \rho A U^2 (\theta - \varphi) \underline{e}_X \quad (3.65)$$

où A est la section de passage du fluide dans le tuyau, et ρ et U sont la masse volumique et la vitesse moyenne du fluide. Il s'applique à cette articulation. Les équations dynamiques précédentes sont modifiées et deviennent

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + 2\theta - \varphi = C_Y(\theta - \varphi), \quad (3.66)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} - \theta + \varphi = 0. \quad (3.67)$$

où l'on a fait apparaître le nombre de Cauchy $C_Y = \rho A U^2 / (KL)$.

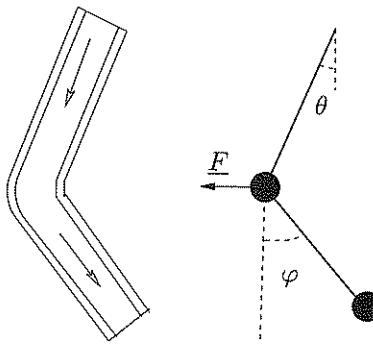


FIG. 3.17: Force exercée par l'écoulement sur le tuyau.

Sous cette forme, le couplage antisymétrique entre les deux degrés de liberté θ et φ n'apparaît pas clairement. Posons plutôt

$$q_1(t) = \frac{2\theta + \sqrt{2} \varphi}{4}; q_2(t) = \frac{2\theta - \sqrt{2} \varphi}{4} \quad (3.68)$$

qui sont simplement les coordonnées de $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ dans la base des deux modes propres sans écoulement. Les équations (3.66) et (3.67) deviennent

$$m_1 \ddot{q}_1 + [k_1 + C_Y(\sqrt{2} - 1)]q_1 = +C_Y(\sqrt{2} + 1)q_2, \quad (3.69)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + [k_2 - C_Y(\sqrt{2} + 1)]q_2 = -C_Y(\sqrt{2} - 1)q_1, \quad (3.70)$$

où $m_1 = 4 + 2\sqrt{2}$, $m_2 = 4 - 2\sqrt{2}$ sont les masses modales et $k_1 = m_1(\omega_1^0)^2$, $k_2 = m_2(\omega_2^0)^2$ les raideurs modales. On voit sur ces équations que l'augmentation de la vitesse d'écoulement augmente la raideur du premier mode et diminue celle du second. Les deux fréquences auront donc tendance à se rapprocher. De plus, les seconds membres donnent un couplage non symétrique entre ces modes. On peut donc prévoir une instabilité par couplage anti-symétrique selon le mécanisme générique décrit plus haut. Celle-ci est effectivement obtenue pour $C_Y = 2$, figure (3.18) selon le mouvement décrit sur la figure (3.19), qui est une combinaison déphasée des deux modes initiaux.

La figure (3.20) montre le mouvement, filmé avec une caméra rapide, d'un tuyau encastré-libre instable avec une vitesse réduite de l'ordre de 10. On voit que le mécanisme d'instabilité est bien celui que nous venons de décrire.

Ce mouvement dans lequel le tuyau serpente permet de comprendre l'origine de l'instabilité. En effet, la force exercée par le fluide au niveau de l'articulation des deux tuyaux rigides travaille, dans ce mouvement, de façon toujours positive, figure (3.21). Sur une période, ce travail vaut

$$W = \int_0^T \rho A U^2 (\theta - \varphi) L \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \rho A U^2 [\theta^2]_0^T - \int_0^T \rho A U^2 L \varphi \dot{\theta} dt. \quad (3.71)$$

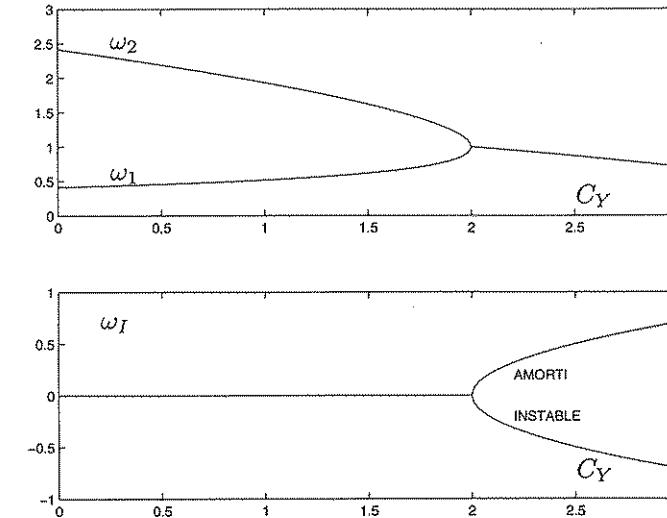


FIG. 3.18: Confusion de fréquences et apparition d'un mode instable pour le tuyau encastré-libre.

Le premier terme est nul et le second est positif lorsque φ et $\dot{\theta}$ sont de signes opposés, ce qui est le cas du mode instable.

On peut également interpréter cette instabilité à l'aide d'un bilan de l'énergie cinétique du fluide, entre l'entrée et la sortie du système. À l'entrée, elle vaut

$$\mathcal{E}_C^E = \frac{1}{2} \rho U^2. \quad (3.72)$$

A la sortie, la conservation de la masse impose une vitesse du fluide, dans le référentiel lié au bout du tuyau, égale à la vitesse d'entrée, soit

$$\underline{V} = U \underline{t}_2 \quad (3.73)$$

où \underline{t}_2 est le vecteur tangent au deuxième tuyau. La vitesse de l'extrémité vaut

$$\underline{W} = L \dot{\theta} \underline{n}_1 + L \dot{\varphi} \underline{n}_2 \quad (3.74)$$

où \underline{n}_1 , \underline{n}_2 sont les vecteurs normaux, figure (3.22). La vitesse absolue du fluide en sortie est donc

$$\underline{V} = \underline{U} + \underline{W} = U \underline{t}_2 + L \dot{\theta} \underline{n}_1 + L \dot{\varphi} \underline{n}_2, \quad (3.75)$$

et l'énergie cinétique associée

$$\mathcal{E}_C^S = \frac{1}{2} \underline{V} \cdot \underline{V} = \frac{1}{2} \rho [U^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\varphi}^2 + 2UL \dot{\theta} \underline{t}_2 \cdot \underline{n}_1 + 2L^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2]. \quad (3.76)$$

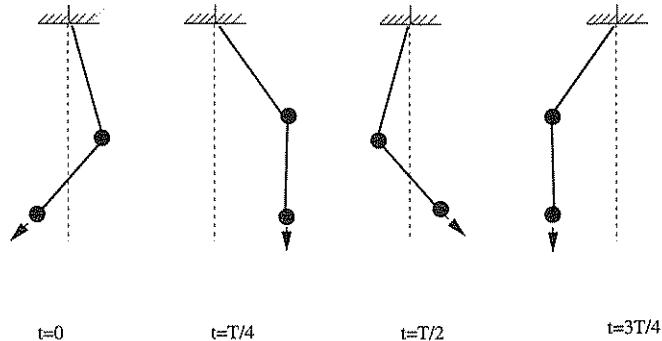
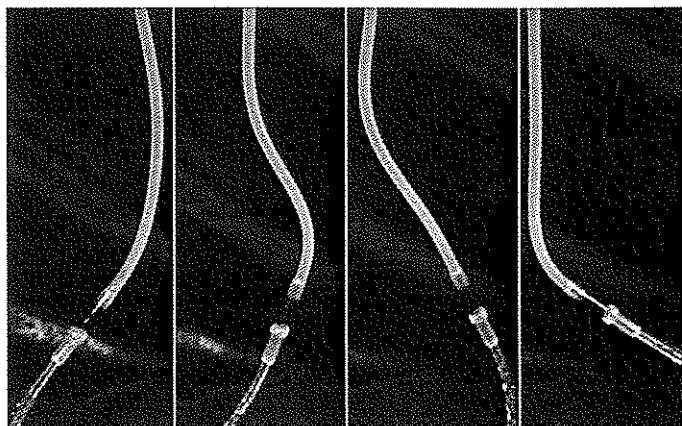


FIG. 3.19 : Mouvement sur une période du mode instable.

FIG. 3.20 : Mouvement observé sur un tuyau encastré-libre. $U_R \simeq 10$.

Pour de petits angles, $t_2 \cdot n_1 \simeq \varphi - \theta$ et $n_1 \cdot n_2 \simeq 1$ et donc

$$\mathcal{E}_C^S = \frac{1}{2} \rho [U^2 - 2UL\dot{\theta}(\theta - \varphi) + L^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2] \quad (3.77)$$

que nous réécrivons

$$\mathcal{E}_C^S = \frac{1}{2} \rho U^2 [1 - 2\frac{L\dot{\theta}}{U}(\theta - \varphi) + (\frac{L\dot{\theta}}{U} + \frac{L\dot{\varphi}}{U})^2]. \quad (3.78)$$

L'hypothèse des grandes vitesses réduites dans laquelle nous nous plâsons permet de dire que les vitesses des parois sont faibles devant les vitesses du fluide, soit

$$\frac{L\dot{\theta}}{U} \ll 1, \frac{L\dot{\varphi}}{U} \ll 1. \quad (3.79)$$

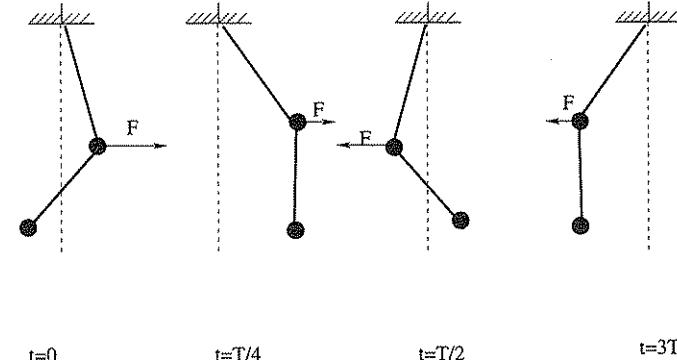


FIG. 3.21 : Travail de la force exercée par le fluide pendant une période du mouvement selon le mode instable.

En ne gardant que les termes d'ordre dominant la différence entre ces deux énergies est donc

$$\mathcal{E}_C^S - \mathcal{E}_C^E \simeq -\rho U L \dot{\theta}(\theta - \varphi). \quad (3.80)$$

Sur une période le premier terme est en moyenne nul tandis que le second peut être négatif si φ et $\dot{\theta}$ sont de signes opposés. Dans ce cas, la vitesse du fluide en sortie est plus faible qu'en entrée car l'extrémité a un mouvement de recul. Le fluide perd de l'énergie cinétique qui est transmise à la structure. C'est bien sûr le travail de l'effort exercé par le fluide, calculé plus haut.

On notera que les équations (3.66) et (3.67) sont identiques à celles obtenues dans la modélisation du système sans écoulement mais avec une force de compression axiale d'intensité $\rho A U^2$, dont l'orientation suivrait l'axe du deuxième tuyau (force dite «suiveuse»), [6], [27], [3]. Cela correspond à une écriture des équations de conservation, sous forme intégrale, mais en considérant comme système mécanique l'ensemble formé du tuyau et du fluide qu'il contient. La résultante des efforts d'interface n'apparaît plus. Elle est remplacée par une «réaction de jet» à l'extrémité.

Dans ce problème d'écoulement interne c'est l'existence d'une extrémité libre qui permet à l'instabilité de se produire. Pour le confirmer, considérons un tuyau encastré à ses deux extrémités, que nous modélisons par un système à deux degrés de liberté formé de trois tuyaux rigides, figure (3.23).

Avec la même approche que précédemment on obtient les équations dynamiques pour les angles θ et φ des deux premiers tuyaux.

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + 2\theta + \varphi = C_Y(2\theta + \varphi) \quad (3.81)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \theta + 5\varphi = C_Y(\theta + 2\varphi). \quad (3.82)$$

En l'absence d'écoulement, $C_Y = 0$, on a deux modes propres $\omega_1^0 = 1$, $\omega_2^0 = 3$ avec pour déformées modales $(\theta_1, \varphi_1) = (1, 0)$ et $(\theta_2, \varphi_2) =$

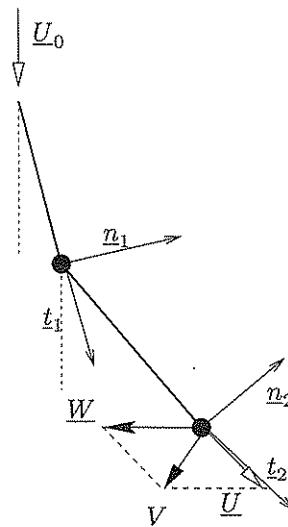


FIG. 3.22: Vitesse absolue du fluide en sortie du tuyau.

(1, -2), figure (3.24). En réécrivant l'équation dynamique dans la base de ces deux modes on obtient simplement

$$\ddot{q}_1 + q_1 = C_Y q_1 \quad (3.83)$$

$$\ddot{q}_2 + 9q_2 = 3C_Y q_2. \quad (3.84)$$

On voit ici que les deux modes ne sont pas couplés par l'écoulement. Chacun évolue vers une instabilité statique, à $C_Y = 1$ pour le premier mode et $C_Y = 3$ pour le second, figure (3.25). En effet, les deux extrémités du système étant immobiles, l'énergie cinétique du fluide en sortie est égale à celle du fluide en entrée. Aucune instabilité dynamique n'est possible. Les équations sont identiques à celles du cas d'une charge axiale de direction constante («flambage d'Euler»).

3.3.4 Instabilité dans un sillage

Le vent transverse sur les lignes à haute tension induit parfois des mouvements de grande amplitude que l'on peut, en première approche, expliquer par le mécanisme de couplage antisymétrique. Il s'agit du mouvement elliptique d'un cylindre situé dans le sillage d'un autre cylindre, immobile, à une dizaine de diamètres de distance et une dizaine de degrés de décalage par rapport à l'axe de l'écoulement (figure 3.26).

Le cylindre aval mobile est soumis à une force dépendant de sa position. Dans le cadre de l'aéroélasticité, cette force est identique à celle qui s'exercerait sur le même cylindre à la même position mais sans vitesse

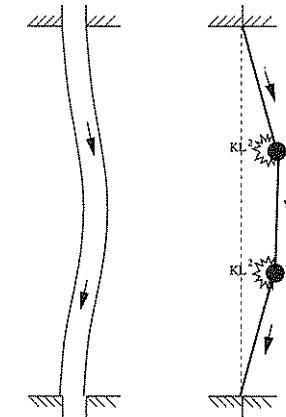


FIG. 3.23: Tuyau encastré-encastré

propre. Elle a une composante de trainée et une composante de portance

$$F_x = \frac{1}{2}\rho U^2 D C_x(x, y); F_y = \frac{1}{2}\rho U^2 D C_y(x, y). \quad (3.85)$$

La cartographie de ces coefficients $C_x(x, y)$ et $C_y(x, y)$ peut se construire en soufflerie autour d'un position proche de la limite du sillage. On obtient les évolutions qualitatives décrites dans la figure (3.27). Lors de petits mouvements autour d'un point (M sur la figure) on peut écrire la force sous la forme

$$F_x = \frac{1}{2}\rho U^2 D[C_x^0 + \frac{\partial C_x}{\partial x}x + \frac{\partial C_x}{\partial y}y]; F_y = \frac{1}{2}\rho U^2 D[C_y^0 + \frac{\partial C_y}{\partial x}x + \frac{\partial C_y}{\partial y}y] \quad (3.86)$$

où C_x^0 et C_y^0 sont les coefficients de portance et de trainée au point M.

Ces mouvements vibratoires seront décrits par le système d'équations adimensionnelles

$$\ddot{x} + x = C_Y \left[\frac{\partial C_x}{\partial x}x + \frac{\partial C_x}{\partial y}y \right] \quad (3.87)$$

$$\ddot{y} + y = C_Y \left[\frac{\partial C_y}{\partial x}x + \frac{\partial C_y}{\partial y}y \right], \quad (3.88)$$

où le nombre de Cauchy a été défini par $C_Y = \frac{1}{2}\rho U^2 D/k$, k étant la raideur linéaire équivalente du câble.

Lorsque le mouvement se fait autour d'un point proche de la limite du sillage, on voit sur les courbes de la figure (3.27) que les coefficients de couplage $\partial C_x/\partial y$ et $\partial C_y/\partial x$ peuvent être de signes opposés. On peut donc obtenir une instabilité par couplage anti-symétrique. Le mode instable correspond à un mouvement elliptique, figure (3.28), sur lequel la force $f = F - F_0$ apporte effectivement un travail positif.

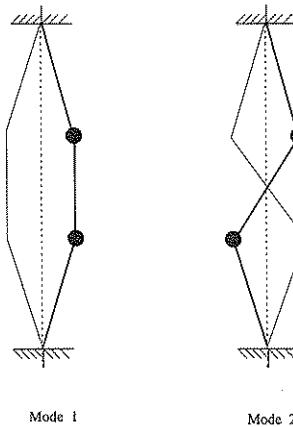


FIG. 3.24 : Modes propres sans écoulement.

L'espace des variables qui sont couplées étant ici l'espace physique (x, y) , ce travail des efforts sur un cycle s'écrit simplement comme

$$W = \int_0^T \underline{f} \cdot \underline{v} dt = \int_{\Gamma} \underline{f} \cdot \underline{t} ds = \int_S \text{rot} \underline{f} \cdot \underline{n} dA, \quad (3.89)$$

où Γ , S et \underline{t} sont respectivement la trajectoire, la surface inscrite dans cette trajectoire et la tangente locale. On retrouve bien le caractère non-conservatif de la force \underline{f} comme origine de l'instabilité. On peut également noter que, la force totale \underline{F} étant orientée selon la vitesse locale de l'écoulement, le rotationnel de cette force est lié à la vorticité.

3.3.5 Panneau souple en écoulement supersonique

Le développement des vols supersoniques a montré l'existence de vibrations locales sur certaines parties des avions. C'est le «flottement de panneau» («pannel flutter» en anglais, [14]) dont la géométrie générique est celle d'une plaque longée par un écoulement supersonique, figure (3.29).

Pour simplifier la modélisation nous reprenons un système de trois plaques rigides sans masse avec des articulations élastiques et des masses à ces articulations. Avec les mêmes variables que dans la section 3.3.3 pour le système de trois tuyaux articulés, les équations dynamiques adimensionnelles en l'absence d'écoulement sont identiques à (3.81, 3.82), M et KL^2 étant ici des grandeurs linéaires. Les modes propres sans écoulement sont donc les mêmes. Dans l'hypothèse d'aéroélasticité, nous ne considérons donc pas la vitesse de ces plaques pour estimer les efforts qui s'y appliquent. Dans l'approximation des petits angles d'incidence, la pression locale ne dépend que de l'angle local de la plaque avec l'écou-

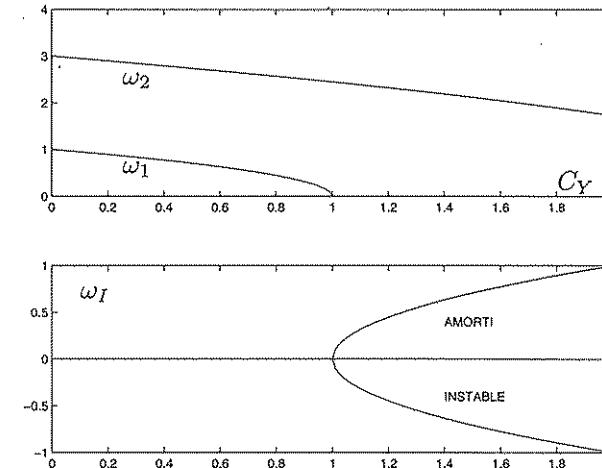


FIG. 3.25 : Instabilité statique du tuyau encastré-encastré.

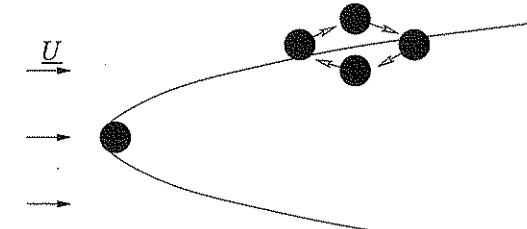


FIG. 3.26 : Mouvement instable dans un sillage.

lement [24]

$$p = \frac{\rho U^2}{\sqrt{M_{ach}^2 - 1}} \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (3.90)$$

Les équations dynamiques deviennent ici

$$2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + 2\theta + \varphi = -\frac{C_Y}{\sqrt{M_{ach}^2 - 1}} \varphi \quad (3.91)$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} + \theta + 5\varphi = +\frac{C_Y}{\sqrt{M_{ach}^2 - 1}} \theta. \quad (3.92)$$

où $C_Y = \rho U^2 L / K$ est le nombre de Cauchy. Exprimée sur les variables modales $q_1 = -\varphi/2$ et $q_2 = \theta + \varphi/2$, elles prennent la forme

$$\ddot{q}_1 + q_1 = +\frac{C_Y}{\sqrt{M_{ach}^2 - 1}} q_2 \quad (3.93)$$

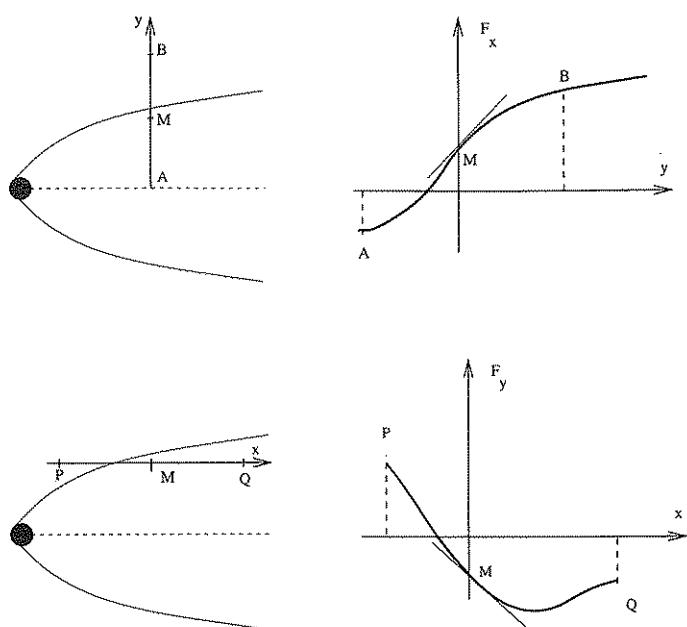


FIG. 3.27 : Forces de portance et de trainée dans un sillage

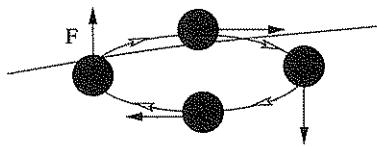


FIG. 3.28 : Travail des forces de portance et de trainée.

$$\ddot{q}_2 + 9 q_2 = -\frac{C_Y}{\sqrt{M_{ach}^2 - 1}} q_1. \quad (3.94)$$

On obtient un fort couplage antisymétrique qui va provoquer une instabilité pour $C_Y / \sqrt{M_{ach}^2 - 1} = 4$.

Il faut noter que dans ce cas précis l'instabilité se produit bien que la raideur de chaque mode ne soit pas modifiée par l'écoulement et que les fréquences ne se rapprochent donc que par l'effet de couplage.

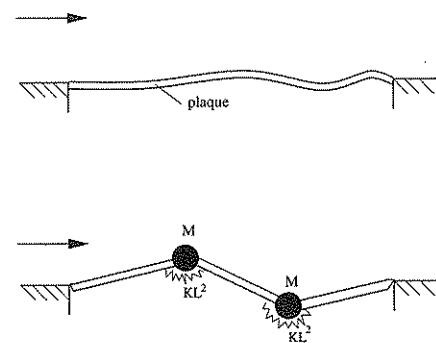


FIG. 3.29 : Flottement de panneau en écoulement supersonique. Modèle simplifié.

3.4 Expériences élémentaires

3.4.1 Instabilité statique

A l'aide d'un sèche-cheveux on crée un écoulement d'air, dont la vitesse diminue avec la distance à l'orifice de sortie, figure (3.31). Pour un objet suffisamment petit, faire varier sa distance au sèche-cheveux est donc équivalent à faire varier la vitesse incidente.

Une première expérience consiste à placer axialement dans l'écoulement une lamelle mince élastique, par exemple un morceau de film de radiographie. On tient la lamelle par son extrémité aval, à une trentaine de centimètres de l'orifice du sèche-cheveux. Si la lamelle est bien dans l'axe de l'écoulement, celui-ci n'induit pas de déflexion. On déplace alors lentement la lamelle vers l'amont. Tout à coup une forte déflexion apparaît sur le côté, figure (3.31). C'est l'instabilité statique. On peut vérifier que cette instabilité est l'aboutissement d'une évolution dans laquelle la fréquence d'oscillation de la lamelle diminue, jusqu'à être nulle. Il suffit pour cela de taper légèrement la base de la lamelle avec un crayon : les oscillations ainsi créées indiquent la fréquence du premier mode propre. Cette fréquence diminue au fur et à mesure que l'on rapproche la lamelle du sèche-cheveux, et donc que l'on augmente la vitesse de l'écoulement.

3.4.2 Instabilité dynamique par couplage antisymétrique

Avec le même système mécanique on peut également mettre en évidence une instabilité dynamique qui fait intervenir le premier mode de flexion et le premier mode de torsion, comme pour un profil d'aile. Il suffit pour cela de placer la lamelle souple en travers de l'écoulement, figure (3.32), et de l'approcher progressivement de l'orifice du sèche-cheveux. Soudain, la lamelle se met à osciller violemment. Une observation au

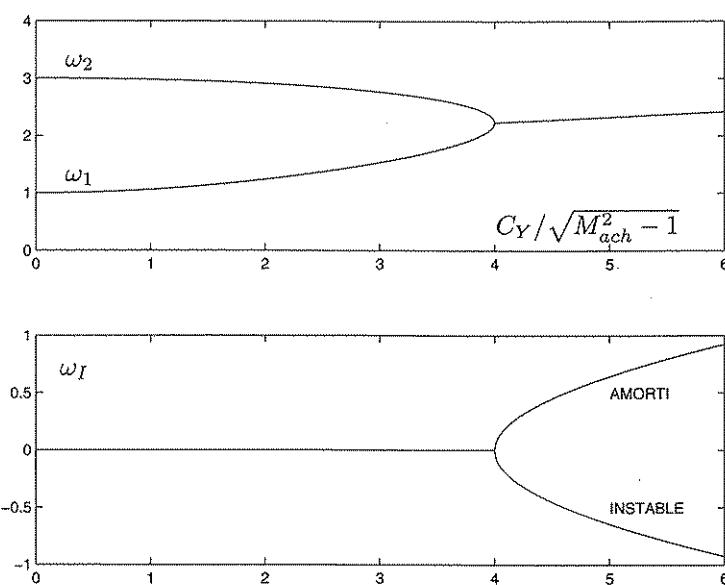


FIG. 3.30 : Confusion de fréquence et instabilité pour le flottement de panneau

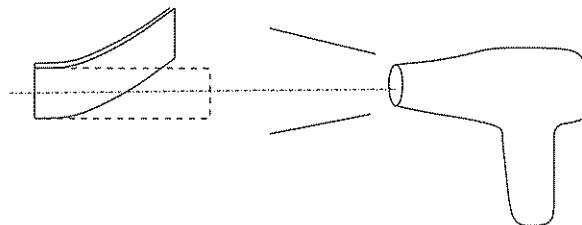


FIG. 3.31 : Expérience d'instabilité statique.

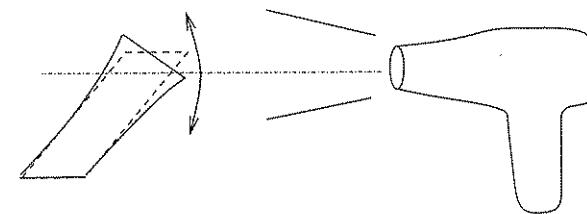


FIG. 3.32 : Expérience d'instabilité dynamique.

stroboscope révèle une combinaison des mouvements de flexion et de torsion.

Ce mouvement instable par couplage antisymétrique peut également s'observer dans les ports de plaisance, lorsqu'un bateau amarré par l'avant subit les effets simultanés du vent et du courant, figure (3.33). Si la distance entre l'avant du bateau et le point d'amarrage est assez grande et si le vent est suffisamment fort, un mouvement oscillant d'une période de plusieurs secondes voire dizaines de secondes se met en place, selon le schéma de la figure (3.33). Les deux degrés de liberté du mouvement du bateau se combinent en un mode instable proche de celui que nous avons étudié pour le tuyau encastré-libre. Ici, le courant apporte la raideur au système (friction sur la coque, qui induit une tension dans l'amarre), tandis que le vent apporte une force non-conservative (portance sur la partie émergée du bateau).

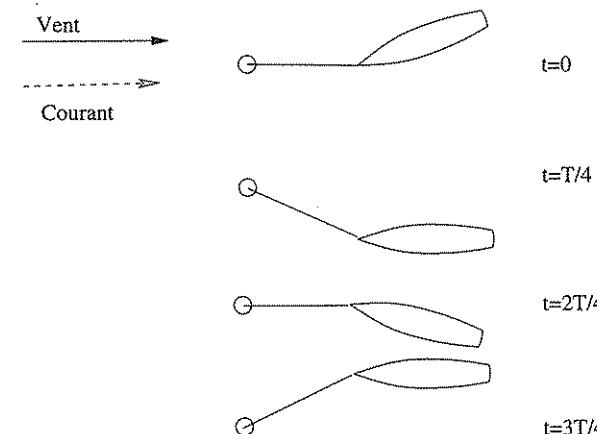


FIG. 3.33 : Instabilité dynamique d'un bateau amarré.

3.5 Conclusion

Dans le domaine des grandes vitesses réduites, l'aéroélasticité, on retiendra principalement que l'on peut se ramener à un problème de Mécanique des fluides *stationnaire*, en prenant en compte la variation de géométrie du solide par un déplacement de l'interface (approche quasi-statique). Il suffit souvent de faire des essais statiques en soufflerie pour connaître la valeur des coefficients qui pilotent les instabilités dynamiques des ailes.

Ainsi, un solide dont le mouvement est décrit par un seul paramètre peut être instable en flambage seulement (instabilité statique).

Par contre, un solide dont le mouvement est décrit par deux paramètres peut de plus être instable en flottement (instabilité dynamique) par couplage antisymétrique des modes.

Les conséquences mécaniques de ces instabilités sont nombreuses. Un flambage peut se traduire par une déformation excessive du solide et parfois des modifications brutales de l'écoulement. Un flottement, même stabilisé à une amplitude faible peut induire de la fatigue vibratoire.

Chapitre 4

COUPLAGES FORTS

Le vent se lève!... Il faut tenter de vivre!

Paul Valéry, Le cimetière marin, 1920.

Nous avons abordé dans les deux chapitres précédents des situations extrêmes dans lesquelles les deux échelles de temps des mouvements solides et fluides sont bien distinctes. Ainsi, dans le chapitre 2 le fluide était considéré comme n'ayant pas de mouvement propre, à l'échelle de temps du solide. A l'opposé, dans le chapitre 3 on a pu calculer les effets de l'écoulement sur la dynamique du solide sans prendre en compte la vitesse de ce dernier. Nous envisageons maintenant le cas d'échelles de temps comparables dans les deux milieux, soit, en terme de paramètres adimensionnels

$$U_R = \frac{U_0}{c_S} = \frac{T_{solide}}{T_{fluide}} = \mathcal{O}(1) \quad (4.1)$$

Dans cette gamme de vitesses réduites intermédiaires, nous dirons que les couplages entre les deux milieux sont *forts*, non pas au sens de l'intensité des efforts mais de la simultanéité des évolutions. Cette situation est illustrée dans les figures (4.1) et (4.2).

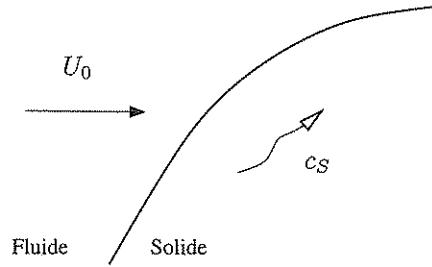


FIG. 4.1: Couplage fort, vitesse réduites intermédiaire, $U_0/c_S = \mathcal{O}(1)$.

Nous allons tout d'abord construire une classe de modèles proches de ceux du chapitre précédent, qui peuvent s'appliquer dans une gamme de vitesses réduites intermédiaires. C'est l'aéroélasticité pseudo-statique. Nous explorerons ensuite quelques résultats classiques de couplage fort, sur des systèmes particuliers, qui illustrent les mécanismes nouveaux liés à cette simultanéité des échelles de temps.

4.1 L'approximation pseudo-statique

4.1.1 Hypothèses

Dans le cadre de l'aéroélasticité quasistatique nous avons vu que la condition nécessaire pour négliger la vitesse du solide à l'interface devant la vitesse de référence du fluide était

$$U_R \gg \mathcal{D}. \quad (4.2)$$

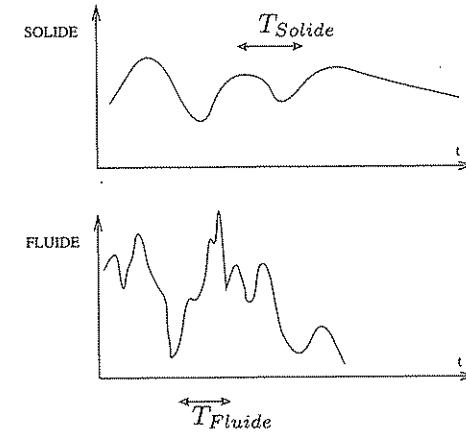


FIG. 4.2: Couplage fort aux vitesses réduites intermédiaires, $T_{solide}/T_{fluide} = \mathcal{O}(1)$

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il faut considérer simultanément la condition aux limites à l'interface

$$\tilde{U} = \mathcal{D} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}}, \quad (4.3)$$

et à l'infini, la condition d'ordre de grandeur

$$\tilde{U} = \mathcal{O}(1). \quad (4.4)$$

La variation de la première condition pendant l'unité de temps de référence, $\Delta \tilde{t} = 1$, vaut

$$\Delta \tilde{U} = \tilde{\gamma} \Delta \tilde{t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}^2} \quad (4.5)$$

et a donc pour ordre de grandeur

$$\Delta \tilde{U} = \mathcal{O}\left(\frac{\mathcal{D}}{U_R^2}\right). \quad (4.6)$$

On pourra ainsi négliger cette variation de vitesse devant la condition à l'infini (4.4) si

$$U_R^2 \gg \mathcal{D}. \quad (4.7)$$

Dans ce cas on peut considérer que la vitesse du solide à l'interface ne varie pas au cours du temps caractéristique de l'écoulement et que la condition cinématique à l'interface est donc indépendante du temps. On retrouve ainsi, comme dans le cas quasi-statique, un problème d'écoulement stationnaire, mais cette fois avec une vitesse non nulle à la paroi.

C'est le cadre de l'aéroélasticité *pseudo-statique*.

Cette hypothèse peut se représenter sous la forme d'une évolution linéaire des variables décrivant la dynamique du solide pendant le temps caractéristique du fluide, figure (4.3).

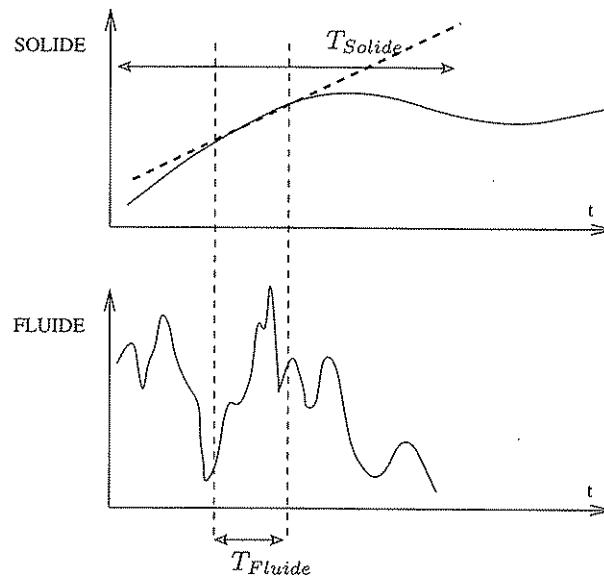


FIG. 4.3 : Aéroélasticité pseudo-statique, $U_R^2 \gg D$.

Dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser l'adimensionnalisation qui fait référence au solide plutôt qu'au fluide. La condition d'interface stationnaire devient

$$\bar{U} = D \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (4.8)$$

et la référence à l'infini

$$\bar{U} = O(U_R). \quad (4.9)$$

Nous omettrons alors les accents ($\bar{\cdot}$). On se limite également à des mouvements simples de translation d'un solide dans un écoulement uniforme à l'infini amont soit

$$\xi(X, t) = q(t) \mathbf{i}; \quad \underline{U} = U_R \underline{e}_X, \quad (4.10)$$

où \mathbf{i} est un vecteur unitaire. La condition cinématique est alors

$$\underline{U} = D \dot{q} \mathbf{i}. \quad (4.11)$$

Il est naturel de faire le changement de variable

$$\underline{V} = \underline{U} - D \dot{q} \mathbf{i} \quad (4.12)$$

4.1. L'APPROXIMATION PSEUDO-STATIQUE

qui définit la vitesse du fluide par rapport au solide, ou "vent relatif". Cette vitesse \underline{V} vérifie les mêmes équations de Navier-Stokes que \underline{U} , mais avec une condition à l'interface,

$$\underline{V} = 0 \quad (4.13)$$

et, à l'infini,

$$\underline{V} = U_R \underline{e}_X - D \dot{q} \mathbf{i}. \quad (4.14)$$

On s'est donc encore une fois ramené à un problème stationnaire de Mécanique des fluides, mais les conditions aux limites ont été modifiées pour prendre en compte la vitesse du solide. Ainsi, les efforts exercés par le fluide dépendront de la vitesse \dot{q} du solide et seront de la forme

$$F(R_E, F_R, q, \dot{q}) \quad (4.15)$$

au lieu de

$$F(R_E, F_R, q) \quad (4.16)$$

dans le cas quasi-statique. Selon la direction \mathbf{i} du mouvement, différents cas sont possibles.

4.1.2 Instabilité par crise de trainée

Si le mouvement se fait selon l'axe de l'écoulement, soit $\mathbf{i} = \underline{e}_X$, la force résultante projetée sur cet axe se déduit du problème en \underline{V} avec une vitesse à l'infini de module

$$U_R - D \dot{q} \quad (4.17)$$

et vaut sous forme adimensionnelle [18]

$$f_{FS} = \frac{1}{2} \mathcal{M} (U_R - D \dot{q})^2 C_D(R_E), \quad (4.18)$$

où C_D est le coefficient de trainée qui dépend du nombre de Reynolds apparent

$$R_E(\dot{q}) = \frac{\rho_F U_0 L}{\mu} \left(1 - D \frac{\dot{q}}{U_R}\right). \quad (4.19)$$

Cette force peut être exprimée au premier ordre en \dot{q} ,

$$f_{FS} \simeq f_{FS}^0 + \dot{q} \left(\frac{\partial f_{FS}}{\partial \dot{q}}\right)^0. \quad (4.20)$$

Si le deuxième terme de la force est opposé à la vitesse, soit

$$\left(\frac{\partial f_{FS}}{\partial \dot{q}}\right)^0 < 0, \quad (4.21)$$

l'écoulement induit une force visqueuse qui a pour conséquence l'amortissement d'éventuelles oscillations. C'est le cas le plus fréquent en pratique, lorsque la dépendance du coefficient de trainée avec le nombre de Reynolds est faible, d'où d'après (4.18)

$$\left(\frac{\partial f_{FS}}{\partial \dot{q}}\right)^0 \simeq -\mathcal{M} D U_R C_D(R_E). \quad (4.22)$$

Inversement, lorsque cette fluctuation de trainée induit une force de même signe que la vitesse, le fluide fournit de l'énergie au solide, d'où un amortissement négatif et une croissance exponentielle des oscillations. Ceci n'est possible que si le coefficient de trainée varie brusquement avec le nombre de Reynolds de telle sorte que la quantité

$$-\mathcal{M}DU_R\mathcal{C}_D(R_E) - \frac{1}{2}\mathcal{M}DU_R R_E \frac{\partial \mathcal{C}_D}{\partial R_E} \quad (4.23)$$

devienne positive, soit

$$\frac{\partial \mathcal{C}_D}{\partial R_E} < -\frac{2\mathcal{C}_D}{R_E}. \quad (4.24)$$

Ceci peut advenir à la crise de trainée, (vers $R_E = 2 \cdot 10^5$ pour un cylindre), lorsque la transition laminaire-turbulent de la couche limite entraîne une chute brutale de la trainée, figure (4.4).

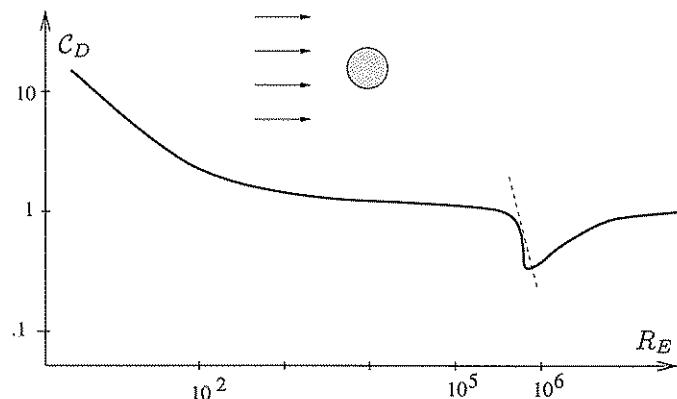


FIG. 4.4: Coefficient de trainée d'un cylindre. Crise de trainée.

Dans un tel cas, la force de trainée est plus faible lorsque le cylindre remonte l'écoulement que quand il le descend. C'est l'*instabilité par crise de trainée*. Elle se rencontre notamment dans les structures flexibles soumises aux courants marins. C'est une instabilité dynamique sur un système à un seul degré de liberté, qui se traduit par des oscillations d'amplitude croissante, figure (4.6), jusqu'à ce que des non-linéarités viennent en limiter les effets déstabilisants.

4.1.3 Instabilité par crise de portance

Considérons un mouvement de translation cette fois perpendiculaire à l'écoulement de référence, soit

$$\xi = q(t) \varepsilon_Y, \quad (4.25)$$

et négligeons les effets de trainée fluctuante. La condition à l'infini (4.14) sur la vitesse relative se traduit, au premier ordre par une modification

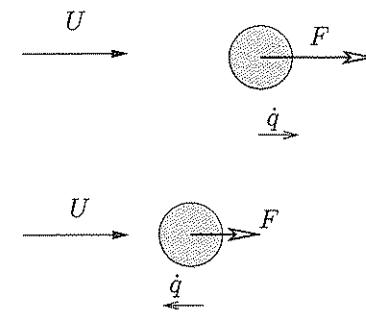


FIG. 4.5: Instabilité par crise de trainée.

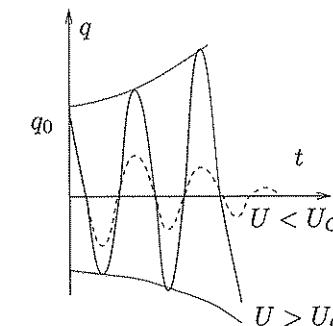


FIG. 4.6: Oscillations dans le sens de l'écoulement dans une instabilité par crise de trainée. Modification de l'amortissement et instabilité dynamique.

de l'angle d'incidence plutôt que de son module. La force de portance, projetée sur l'axe du mouvement est alors

$$f_{FS} = \frac{1}{2}\mathcal{M}U_R^2 \mathcal{C}_L(R_E, \alpha), \quad (4.26)$$

où \mathcal{C}_L est le coefficient de portance qui dépend de l'angle d'incidence de l'écoulement apparent avec l'objet,

$$\tan \alpha = -\mathcal{D} \frac{\dot{q}}{U_R}. \quad (4.27)$$

Au premier ordre en \dot{q} cette force vaut

$$f_{FS} = f_{FS}^0 + \frac{1}{2}\dot{q} \left(-\mathcal{M}DU_R \frac{\partial \mathcal{C}_L}{\partial \alpha} \right). \quad (4.28)$$

Comme précédemment cette force sera stabilisante si le coefficient de \dot{q} est négatif et déstabilisante sinon. La dépendance du coefficient de portance avec l'angle d'incidence est liée à la forme du solide. Cette instabilité par crise de portance est appelée "galloping" en anglais et

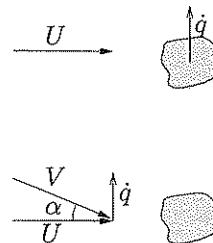


FIG. 4.7: Vitesse relative en aéroélasticité pseudo-statique.

s'observe sur de nombreuses formes. Ainsi, pour une section carrée on a, [5],

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \simeq -5 \quad (4.29)$$

et donc une possibilité d'instabilité. Pour un profil d'aile mince, on a aux incidences faibles [18]

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \simeq 2\pi \quad (4.30)$$

et donc une stabilité naturelle. Par contre, à partir d'une incidence de 12 degrés approximativement, le coefficient de portance chute (c'est le décrochage) et on a typiquement

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \simeq -4 \quad (4.31)$$

et donc un risque d'instabilité.

Pour un profil d'aile, cette instabilité par crise de portance s'appelle "flottement de décrochage" ("stall flutter" en anglais), figure (4.8). Dans le mouvement descendant l'incidence apparente de l'aile augmente, d'où un décrochage et une perte de portance. A la remontée, celle-ci est recouvrée. La portance fluctuante est donc de même signe que la vitesse, d'où un transfert d'énergie du fluide vers le solide.

4.2 Effets instationnaires

Si la condition (4.7) n'est pas respectée, on ne peut réduire le problème couplé à un problème stationnaire en temps. Dans ce cas, la réaction dynamique de l'écoulement aux mouvements du solide dépend fortement de la géométrie, du type de mouvement et du régime d'écoulement.

Une première approche est de considérer la réponse de l'écoulement à un mouvement impulsif du solide. Cette approche, développée aux origines de l'aéroélasticité par Theodorsen, voir [14], a permis d'obtenir des résultats analytiques d'une grande importance pratique et conceptuelle. Cette démarche analytique est assez lourde et nous ne donnons ici qu'une version simplifiée des résultats.

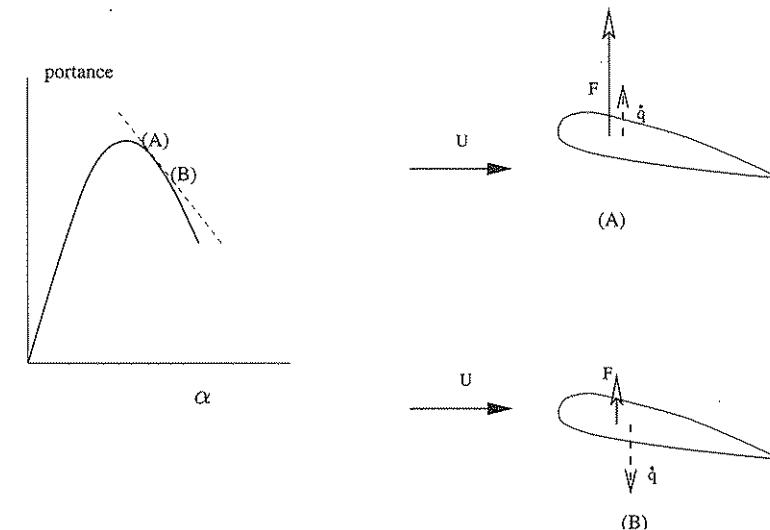


FIG. 4.8: Flottement de décrochage d'une aile.

Considérons une rotation brusque d'un profil d'aile mince placé dans un écoulement uniforme, figure (4.9),

$$\alpha(t) = \alpha_0 H(t) \quad (4.32)$$

avec $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t > 0$. Celle-ci induit une portance instationnaire que l'on peut approcher par

$$\underline{F}^I(t) = \underline{F}_0(1 - e^{-\beta U_R t}) \quad (4.33)$$

où \underline{F}_0 est la portance associée à un profil immobile à incidence α_0 et où $\beta \simeq .2$. La portance s'établit donc progressivement, et d'autant plus vite que la vitesse de l'écoulement est grande. La constante de temps associée à ce transitoire est de l'ordre de cinq passages du fluide le long du profil. On peut relier cet établissement progressif de la portance à l'établissement progressif de la condition de Kutta au bord de fuite, figure (4.10). Cette condition, qui entraîne la portance, est réalisée lorsque l'état initial, qui ne la satisfait pas, a été entraîné en aval par l'écoulement.

Pour de petits mouvements quelconques $\alpha(t)$ du profil, on peut construire la portance qui en résulte par superposition des réponses impulsionales aux variations d'angle soit

$$\underline{F}(t) = \int_0^t \dot{\alpha}(\tau) \frac{1}{\alpha_0} \underline{F}^I(t - \tau) d\tau. \quad (4.34)$$

Explicitons cette convolution pour un mouvement oscillant établi,

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin 2\pi t. \quad (4.35)$$

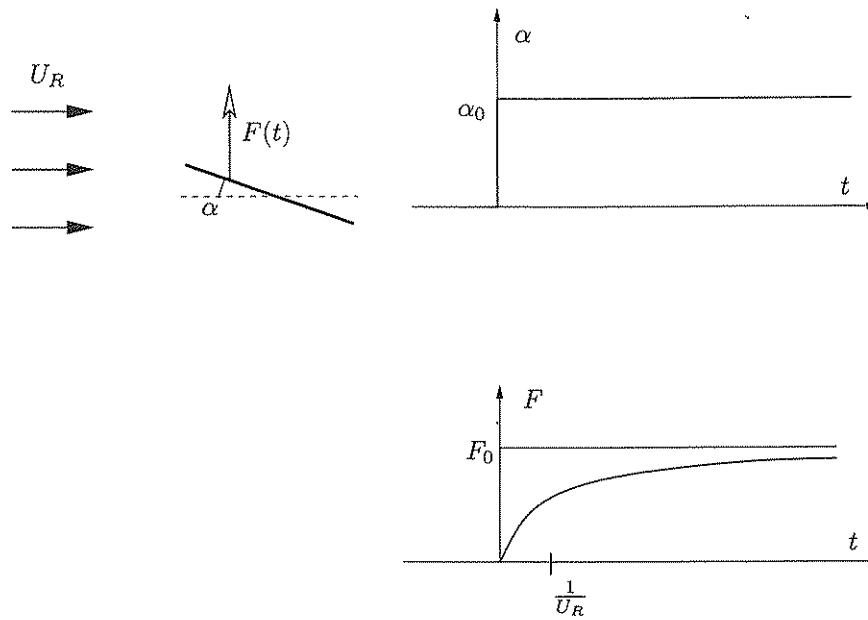


FIG. 4.9: Effet transitoire sur la portance.

On obtient en régime une portance oscillante

$$\underline{F}(t) = \underline{F}_0 \left[\frac{\beta^2 U_R^2}{4\pi^2 + \beta^2 U_R^2} \sin 2\pi t - \frac{2\pi\beta U_R}{4\pi^2 + \beta^2 U_R^2} \cos 2\pi t \right]. \quad (4.36)$$

Celle-ci diffère de la force de portance que l'on aurait obtenue en hypothèse d'aéroélasticité quasistatique,

$$\underline{F}(t) = \underline{F}_0 \sin 2\pi t, \quad (4.37)$$

par une amplitude A et une phase φ qui dépendent de la vitesse réduite

$$\underline{F}(t) = A(U_R) \underline{F}_0 \sin[2\pi t - \varphi(U_R)], \quad (4.38)$$

avec

$$A(U_R) = \frac{\beta^2 U_R^2 \sqrt{1 + (4\pi^2/\beta^2 U_R^2)}}{4\pi^2 + \beta^2 U_R^2}; \tan \varphi(U_R) = \frac{2\pi}{\beta U_R}. \quad (4.39)$$

Aux grandes vitesses réduites, l'amplitude tend vers 1 et la phase vers 0 ce qui est compatible avec l'hypothèse quasistatique. À basse vitesse réduite, le déphasage est de $\pi/2$ et l'amplitude tend vers 0, figure (4.11). Le déphasage qui apparaît entre la portance et la fluctuation d'incidence a pour origine l'existence d'une échelle de temps dans le fluide, qui est ici l'échelle de convection dont U_R est la mesure. Dans le Chapitre 2, le

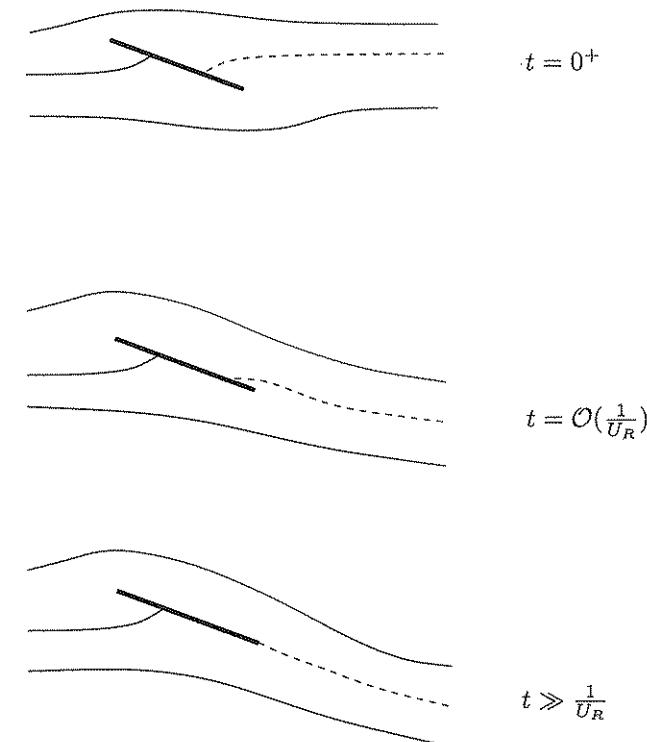


FIG. 4.10: Établissement progressif de la condition de Kutta au bord de fuite.

déphasage entre le mouvement de l'interface et la réponse du fluide visqueux avait pour origine le temps de diffusion visqueuse et pour mesure le nombre de Stokes. Ici, il a pour origine le temps de convection et pour mesure la vitesse réduite.

Ce déphasage peut avoir ici un effet stabilisant ou déstabilisant sur le mouvement de rotation du profil d'aile, selon la position de l'axe de rotation.

Considérons d'abord le cas où la rotation se fait autour du milieu du profil, figure (4.12). On suppose que la force de portance instationnaire a pour point d'application le quart de corde avant, comme la force stationnaire. La composante en phase avec le mouvement

$$\underline{F}_S = \underline{F}_0 \left[\frac{\beta^2 U_R^2}{4\pi^2 + \beta^2 U_R^2} \sin 2\pi t \right] \quad (4.40)$$

peut induire une instabilité statique car la raideur associée (Chapitre 3) est négative. La composante en quadrature de phase,

$$\underline{F}_I = \underline{F}_0 \left[-2\pi \frac{\beta U_R}{4\pi^2 + \beta^2 U_R^2} \cos 2\pi t \right] \quad (4.41)$$

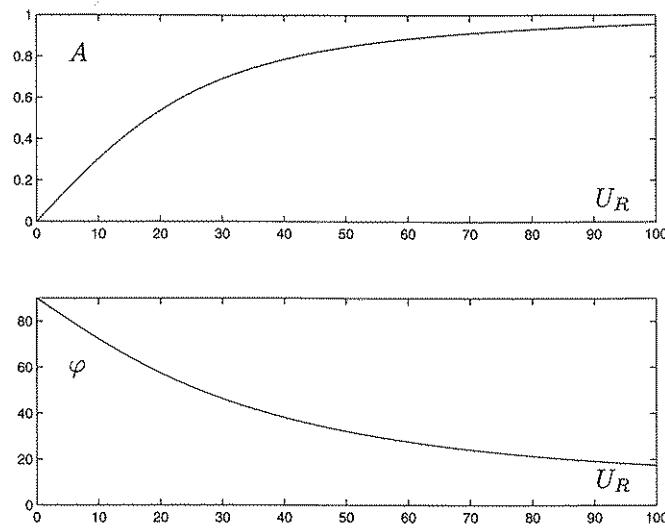


FIG. 4.11: Effet de la vitesse réduite sur l'amplitude de la portance et son déphasage par rapport à l'incidence.

s'oppose à la vitesse du point d'application $\dot{y} = 2\pi \cos 2\pi t \underline{e}_Y$ et agit donc comme une force dissipative. Elle amortira le mouvement. Si par contre la rotation se fait autour de l'avant du profil, la force instationnaire reste identique car elle ne dépend que de l'angle d'incidence alors que la vitesse du point d'application change de signe. La raideur associée à la partie en phase devient stabilisante mais la partie en quadrature peut conduire à une instabilité dynamique. Ce modèle simpliste montre que l'adaptation au cours du temps de l'écoulement au mouvement du solide peut produire des efforts qui déstabilisent ce dernier.

La réponse impulsionnelle présentée ici n'est qu'une approximation grossière, même pour un profil mince. Pour des géométries plus complexes, seule l'expérience permet d'obtenir ces réponses impulsionnelles. Par exemple, pour un profil de pont du type de celui de Tacoma, la réponse impulsionnelle [14] est très différente d'un profil d'aile, figure (4.13). Dans ce cas, les effets instationnaires induisent une augmentation temporaire de la portance, au dessus de la valeur correspondant à un état stationnaire. Ce phénomène, encore mal compris aujourd'hui, est lié à la présence de l'extrémité amont très mal profilée, qui entraîne un décollement de l'écoulement. Même si l'axe de rotation se trouve au milieu du profil, ce qui est le cas pour un mode de torsion de pont, la partie en quadrature de la force peut produire une instabilité dynamique. C'est exactement le mécanisme à l'origine de la rupture du pont de Tacoma [31].

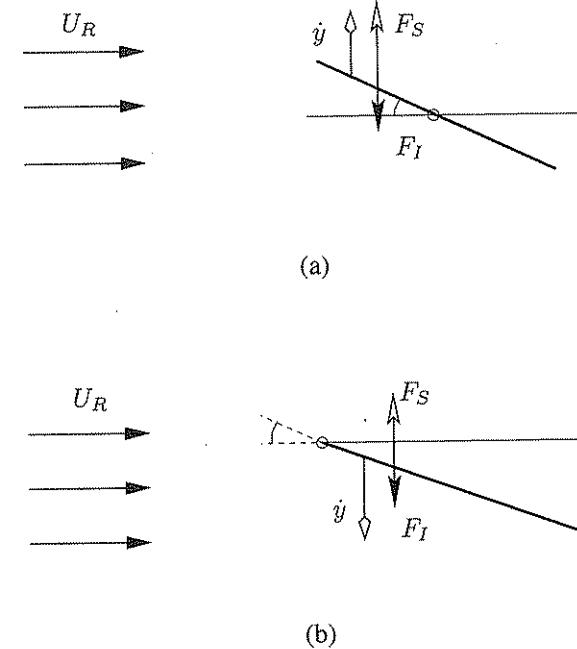


FIG. 4.12: Influence de la position de l'axe de rotation sur la stabilité d'un profil. F_S : force stationnaire, en phase avec le mouvement. F_I : force instationnaire, en quadrature avec le mouvement

4.3 Amortissement de Coriolis

Considérons maintenant un système articulé comparable à celui étudié au chapitre 3, mais avec un seul degré de liberté, figure (4.14). Sa dynamique est régie par l'équation adimensionnelle,

$$\ddot{\theta} + \theta = 0 \quad (4.42)$$

avec pour référence de temps $\sqrt{M/K}$. Dans le cadre de l'aéroélasticité l'effet du fluide sur le mouvement oscillatoire du système est nul. Si l'on ne fait pas cette hypothèse, l'effort résultant du fluide sur le tuyau dans son mouvement peut se calculer à l'aide de la forme intégrale de la conservation de la quantité de mouvement angulaire,

$$\underline{M}_{Fluide-Solide} = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{x} \wedge \mathcal{M} \underline{U}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\underline{x} \wedge \mathcal{M} \underline{U})(\underline{U} \cdot \underline{n}) dS \quad (4.43)$$

où Ω est le domaine fluide, $\partial\Omega$ est sa frontière, $U_R = U \sqrt{M/K}/L$, $\mathcal{M} = \rho S L/M$, x étant la distance à l'articulation. La vitesse du fluide vaut

$$\underline{U} = U_R \underline{i} + x\dot{\theta} \underline{j}. \quad (4.44)$$

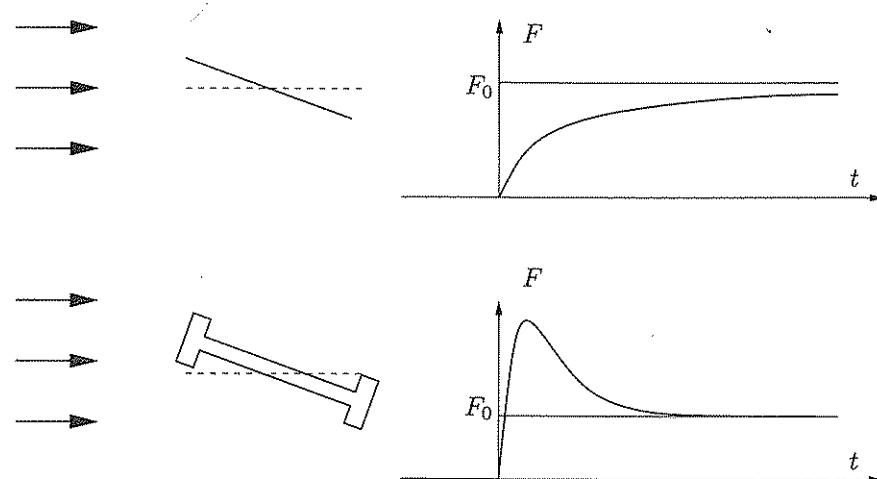


FIG. 4.13 : Influence de la forme du profil sur la réponse impulsionnelle en portance : (a) profil d'aile, stable dynamiquement (b) profil du pont de Tacoma, instable dynamiquement .

Pour ce mouvement pendulaire on obtient un moment par rapport à l'articulation

$$\underline{M}_{Fluide-Solide} = -\mathcal{M}\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta} + U_R \dot{\theta}\right)\underline{k}. \quad (4.45)$$

Le premier terme correspond à un simple effet de masse ajoutée. Le second fait apparaître un effort qui s'oppose à la rotation de la quantité de mouvement. C'est un effet de Coriolis. L'équation dynamique du système articulé devient donc, en présence d'écoulement

$$(1 + \frac{\mathcal{M}}{3}) \ddot{\theta} + \mathcal{M}U_R \dot{\theta} + \theta = 0. \quad (4.46)$$

C'est l'équation d'un oscillateur amorti qui évoluerait suite à un lacher selon une loi

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\mathcal{M}U_R t / \sqrt{1+\mathcal{M}/3}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{1+\mathcal{M}/3}}\right). \quad (4.47)$$

L'amortissement du système est donc ici directement proportionnel au débit de fluide. Ceci s'interprète aisément en calculant la différence entre les énergies cinétiques du fluide en sortie et en entrée,

$$\mathcal{E}_C^S - \mathcal{E}_C^E = \frac{1}{2} \mathcal{M}[\dot{\theta}]^2. \quad (4.48)$$

Cette différence, toujours positive, signifie que le fluide gagne toujours de l'énergie lors de son passage dans le tuyau, et ce nécessairement au détriment de ce dernier.

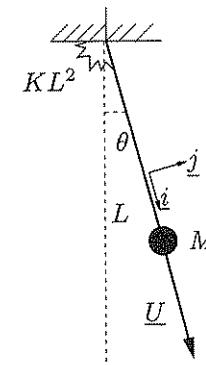


FIG. 4.14: Système à un degré de liberté avec écoulement interne.

Ce mécanisme a un caractère très générique : Chaque fois que le mouvement du solide perturbe l'écoulement en augmentant l'énergie cinétique entre l'amont et l'aval, ce dernier aura un effet amortissant sur le mouvement du solide.

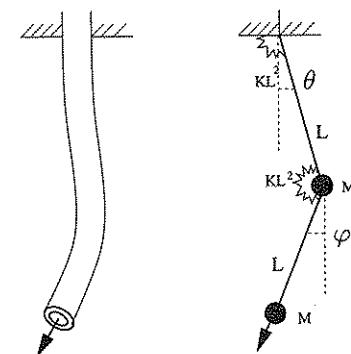


FIG. 4.15 : Modélisation simplifiée d'un tuyau encastré-libre.

Si l'on considère maintenant un système à deux degrés de liberté, figure (4.15), mais que, à la différence du Chapitre 4, on ne fait plus l'hypothèse d'aéroélasticité, on obtient toujours une instabilité dynamique lorsque la vitesse réduite est augmentée. Par contre, comme on peut le voir sur la figure (4.16), la présence de l'effet de Coriolis modifie à la fois l'évolution des fréquences et des amortissements. De très nombreux résultats analytiques, numériques et expérimentaux ont été obtenus sur de tels systèmes à nombre de degrés de liberté finis, ou continus. Ils ont permis de faire le lien entre l'aéroélasticité et le comportement à basse vitesse réduite. On consultera avec profit les travaux de Païdoussis [22].

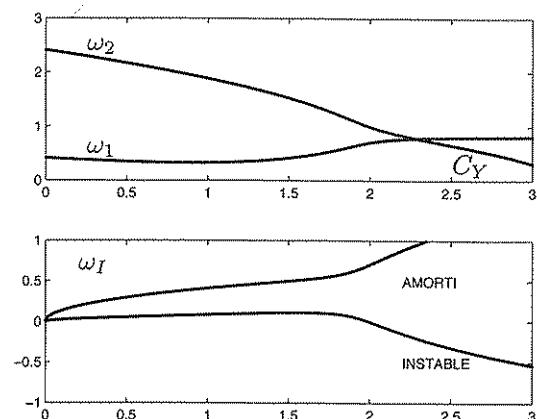


FIG. 4.16: Effets de Coriolis sur l'instabilité du tuyau d'arrosage dans un modèle à deux degrés de liberté. $\mathcal{M} = 1$.

4.4 La corde fluide

Considérons maintenant un tuyau flexible tendu, qui, en l'absence de fluide, répond à l'équation des cordes vibrantes

$$-T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.49)$$

où $y(x, t)$ est son déplacement latéral, T est la tension appliquée et m est la masse linéique. Lorsque ce tuyau est parcouru par un écoulement

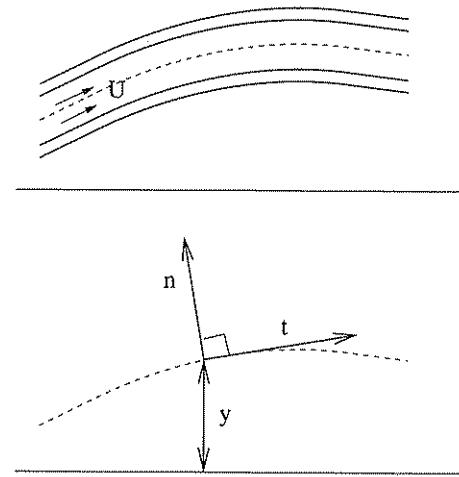


FIG. 4.17: Corde avec écoulement interne.

de fluide parfait à la vitesse U la force linéique exercée par le fluide est

4.4. LA CORDE FLUIDE

la réaction au mouvement local du tuyau. En notant \underline{n} et \underline{t} les normales et tangentes locales au tuyau, figure (4.17), on a au premier ordre

$$\underline{t} = \underline{e}_X + \frac{\partial y}{\partial x} \underline{e}_Y ; \underline{n} = -\frac{\partial y}{\partial x} \underline{e}_X + \underline{e}_Y. \quad (4.50)$$

La vitesse du fluide vaut

$$\underline{U} = \underline{U}_t \underline{t} + \underline{U}_n \underline{n}. \quad (4.51)$$

La conservation de la masse donne

$$\frac{\partial \underline{U}_t}{\partial x} = 0, \quad (4.52)$$

et la condition cinématique à l'interface

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (4.53)$$

Ces équations se résument, en ne gardant que le deux premiers ordres, à

$$\underline{U} = U \underline{e}_X + (U \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}) \underline{e}_Y. \quad (4.54)$$

La conservation de la quantité de mouvement, projetée sur les axes \underline{e}_X et \underline{e}_Y donne

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.55)$$

$$\rho(U \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) + \rho U(U \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4.56)$$

La force linéique exercée par le fluide sur le tuyau s'obtient par intégration de la pression sur la paroi,

$$\underline{F}_{FS} = -\rho A \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (U^2 + \frac{p}{\rho}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]. \quad (4.57)$$

On peut interpréter ces termes comme suit. Le premier traduit l'effet de masse ajoutée dans le mouvement transverse, égale ici à la masse fluide. Le deuxième est le terme de Coriolis déjà évoqué. Le troisième combine l'effet aéroélastique (force d'Euler) et la pression statique, dont nous négligerons les effets. En combinant (4.57) et (4.49) l'équation de la corde vibrante devient, sous forme adimensionnelle

$$(\mathcal{M} U_R^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\mathcal{M} U_R \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (1 + \mathcal{M}) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4.58)$$

avec ici $\mathcal{M} = \rho A/m$, $U_R = U/(\sqrt{T/m})$. On peut chercher comment la propagation d'onde est modifiée par l'écoulement. En l'absence de fluide, l'équation (4.58) admet des solutions propagatives de la forme $y(x, t) = Y(x - C_0 t)$ avec une vitesse de phase qui vaut $C_0 = \pm 1$. En présence de fluide mais sans écoulement, la modification de la masse

linéaire du système modifie ces vitesses en $C_1 = \pm 1/\sqrt{1+\mathcal{M}}$. Avec écoulement, les vitesses de phases C sont solutions de

$$(\mathcal{M}U_R^2 - 1) - 2\mathcal{M}U_R C + (1 + \mathcal{M})C^2 = 0 \quad (4.59)$$

soit

$$C = \frac{\mathcal{M}U_R \pm \sqrt{1 + \mathcal{M} - \mathcal{M}U_R^2}}{1 + \mathcal{M}}. \quad (4.60)$$

Les ondes vers l'amont sont donc progressivement ralenties par l'écoulement, les ondes vers l'aval étant accélérées. A partir d'une valeur critique de

$$U_R = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{M}} + 1}, \quad (4.61)$$

les deux ondes ont la même vitesse vers l'aval (partie réelle de C) et l'équation (4.60) donne une vitesse de phase complexe, c'est le signe d'une instabilité par coalescence dont le mécanisme est proche de la confusion de fréquence étudiée dans le Chapitre 3.

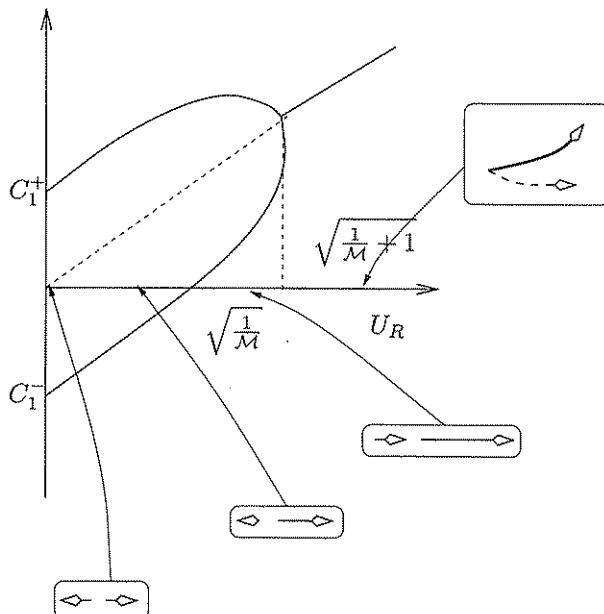


FIG. 4.18: Influence de la vitesse réduite sur la propagation des ondes dans une corde fluide.

Si cette corde fluide est maintenant considérée comme de longueur finie, on peut calculer l'influence de la vitesse de l'écoulement sur les modes propres. Il suffit d'ajouter à l'équation (4.58) les conditions aux limites $y(0) = 0$ et $y(1) = 0$. En l'absence de fluide ($\mathcal{M} = 0$), le premier mode propre est celui de la corde tendue, défini par la pulsation

adimensionnelle $\omega = 1$ et la déformée $\varphi(x) = \sin \pi x$. En présence de fluide immobile ($\mathcal{M} \neq 0$ mais $U_R = 0$), la pulsation devient

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{M}}}, \quad (4.62)$$

tandis que la déformée est inchangée. Il s'agit là d'un simple effet de masse ajoutée. Pour une vitesse U_R non nulle, on ne peut plus trouver de solution de la forme

$$y(x, t) = \varphi(x) e^{i\omega t}, \quad (4.63)$$

à cause du second terme de l'équation (4.58). Il faut chercher des modes de type propagatif (déformée modale complexe), sous la forme

$$y(x, t) = \psi(x) f(t - \frac{x}{c}). \quad (4.64)$$

On trouve ainsi des oscillations décrites par

$$y(x, t) = \sin kx \sin[\omega(t - \frac{x}{c})] \quad (4.65)$$

avec, pour $U_R < U_C = 1/\sqrt{\mathcal{M}}$,

$$k = n\pi; c = \frac{\mathcal{M}U_R^2 - 1}{\mathcal{M}U_R}; \omega = k \frac{1 - \mathcal{M}U_R^2}{\sqrt{1 + \mathcal{M} - \mathcal{M}U_R^2}}. \quad (4.66)$$

Ces oscillations se font à une fréquence de plus en plus faible, qui s'annule à la vitesse critique $U_C = 1/\sqrt{\mathcal{M}}$. On atteint alors une instabilité statique. C'est la perte de raideur du système, le premier terme de l'équation (4.58) s'annulant. Sur la figure (4.18) cela correspond également à l'annulation de la vitesse de l'onde amont ($C_1^+ = 0$). Avant cette instabilité, les oscillations libres de la corde se font selon le schéma de la figure (4.19). Le mouvement devient de plus en plus propagatif au fur et à mesure que l'on se rapproche de la vitesse critique U_C .

4.5 Expériences élémentaires

4.5.1 Amortissement de Coriolis et instabilité par couplage de modes

Pour observer l'effet d'amortissement étudié plus haut, il suffit de prendre un tuyau de douche classique, à enveloppe métallique externe, figure (4.20). En enlevant la pomme de douche on peut observer que les oscillations pendulaires sont fortement amorties dès que l'on fait couler de l'eau à l'intérieur. Pour des vitesses plus grandes une instabilité apparaît. C'est l'évolution décrite dans la figure (4.16).

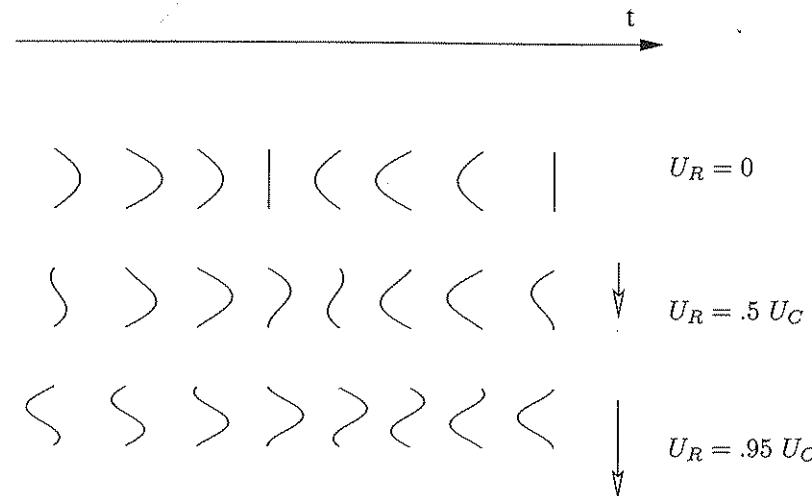


FIG. 4.19 : Influence de la vitesse réduite sur les modes propres d'une corde fluide.

4.5.2 Mode propagatif

Le même tuyau peut être utilisé pour mettre en évidence l'effet de la vitesse de l'écoulement sur un mode propre. Il suffit de maintenir fermement l'extrémité aval du tuyau à la même hauteur que l'extrémité amont, sans tendre le tuyau, figure (4.21). Sans écoulement, le mode de balancement transverse du tuyau ressemble à celui d'une corde à sauter. Pour un écoulement assez fort on voit bien ce mouvement de balancement se transformer pour devenir sinuueux, en serpentant, selon le schéma de la figure (4.19).

4.6 Conclusion

Lorsque les échelles de temps du mouvement du solide et de la convection du fluide sont comparables, on doit donc traiter simultanément ces deux évolutions. A partir des quelques cas simples que nous avons présentés, on retiendra que la convection introduit un décalage en temps entre le mouvement du solide et la force de réaction du fluide. Ce décalage peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant, selon la géométrie du système. Ainsi, selon que l'écoulement voit son énergie cinétique augmenter ou diminuer du fait du mouvement du solide, son action sur ce mouvement sera amortissante ou amplifiante. Dans l'hypothèse pseudo-statique, ces effets peuvent se déduire simplement de l'analyse des effets des écoulements stationnaires sur les solides immobiles.

Nous résumons dans la figure (4.22) l'ensemble des approximations que nous avons construites, selon les valeurs de U_R . On voit que de

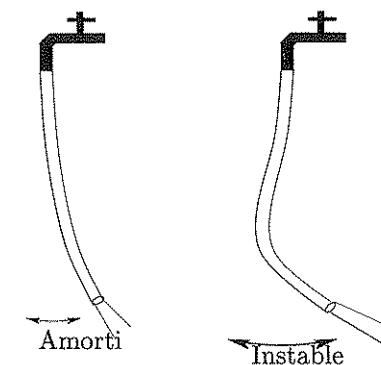


FIG. 4.20 : Amortissement et instabilité d'un tuyau de douche.

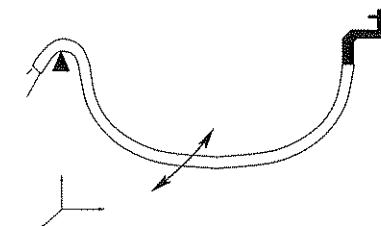


FIG. 4.21 : Mode propagatif sur un tuyau de douche.

grands domaines peuvent être traités à l'aide de modèles simplifiés.

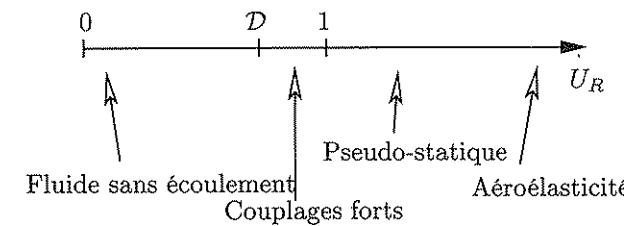


FIG. 4.22 : Approximations possibles en fonction de la vitesse réduite.

Chapitre 5

FORÇAGE PAR L'ÉCOULEMENT

*A vous troupes légères
Qui d'ailes passagères
Par le monde volez
Et d'un sifflant murmure
L'ombrageuse ramure
Doucement ébranlez.*

Joachim du Bellay, Jeux rustiques d'un vanneur de blé [s'adressant aux vents], vers 1550.

Dans tous les chapitres précédents nous avons fait l'hypothèse que la dynamique de l'écoulement était caractérisée par une seule échelle de temps, qui était celle de la convection du fluide le long du solide

$$T_{fluid} = T_{convection} = \frac{L}{U}. \quad (5.1)$$

C'est la comparaison entre cette échelle et celle du mouvement du solide qui nous a amené à distinguer différentes gammes de vitesses réduites et à construire des modèles simplifiés associés. Nous avons notamment supposé que si les conditions aux limites du domaine contenant le fluide ne dépendent pas du temps, l'écoulement n'en dépend pas non plus. D'autres échelles de temps peuvent cependant être présentes dans la dynamique de l'écoulement. Les plus importantes sont celles liées au développement des instabilités dans l'écoulement. Nous les considérons ici schématiquement sous deux formes extrêmes, le détachement tourbillonnaire dans lequel des structures très organisées se déplacent dans le sillage d'un obstacle, puis la turbulence développée dans laquelle des fluctuations aléatoires en temps et en espace sont superposées à un écoulement moyen.

Ces deux types de fluctuations ont une grande importance pratique en interaction fluide-structure. Elles induisent sur les solides des fluctuations d'efforts qui peuvent les faire bouger significativement. Par exemple, le vent sur un gratte-ciel entraîne un sillage avec un détachement alterné de tourbillons à basse fréquence (typiquement 0.1Hz), qui provoque des mouvements lents et très inconfortables pour les occupants, figure (5.1). Ce même vent, en passant sur les constructions en amont de l'immeuble, est devenu fortement turbulent. Les fluctuations de pression associées peuvent également faire vibrer l'immeuble, figure (5.2).

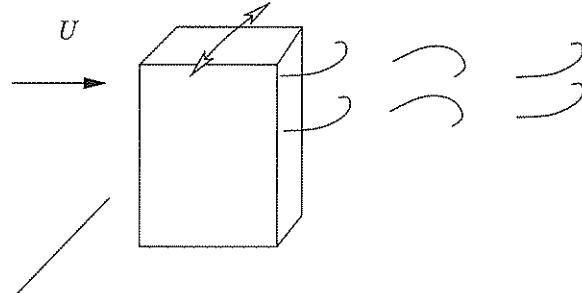


FIG. 5.1: Détachement tourbillonnaire derrière un immeuble. Mouvement induit.

Dans ce chapitre, nous traiterons d'abord le cas du détachement tourbillonnaire derrière un obstacle. La première étape est de considérer l'effet de ce sillage oscillant sur la dynamique de cet obstacle. Nous

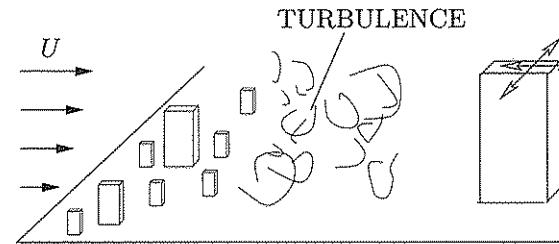


FIG. 5.2: Vent turbulent sur un immeuble. Mouvement induit.

étudierons ensuite dans quelle mesure le mouvement de l'obstacle peut influencer ce même sillage.

L'effet de la turbulence sur les solides, abordée ensuite, procède des mêmes approches, mais avec une complexité supérieure du fait du caractère aléatoire en temps et en espace des fluctuations.

5.1 Effets du sillage sur un cylindre

5.1.1 Caractéristiques des fluctuations dans un sillage

Considérons le cas très générique d'un cylindre placé dans un écoulement transverse. A partir d'un nombre de Reynolds de 40 environ l'écoulement en aval du cylindre varie au cours du temps. Ce sillage, décrit par Bénard (1908) et von Karmann (1912), se présente comme une succession de tourbillons alternés lâchés par le cylindre, selon le schéma ci-dessous. Ces tourbillons sont émis avec une période qui en première approxima-

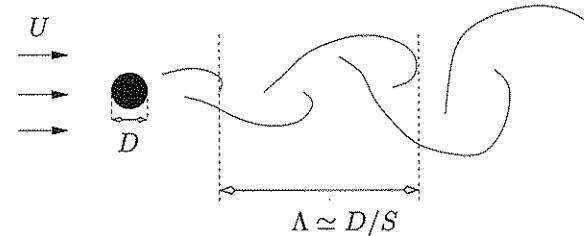


FIG. 5.3: Allée tourbillonnaire derrière un cylindre, [28]

tion ne dépend pas du nombre de Reynolds et est directement reliée au temps de convection du fluide par la loi de Strouhal

$$T_{tourbillons} = \left(\frac{1}{S}\right) T_{convection} = \left(\frac{1}{S}\right) \frac{D}{U} \quad (5.2)$$

où $S \approx 0.2$ est le nombre de Strouhal. Cette loi sur la périodicité des fluctuations temporelles peut se traduire par une loi sur la périodicité en

espace

$$\Lambda = D/S \simeq 5D, \quad (5.3)$$

illustrée sur la figure (5.3). Cette périodicité de l'écoulement n'est pas parfaite. Si l'on observe les oscillations de vitesses en aval d'un cylindre, figure (5.4), [5], on perçoit bien la fréquence dominante donnée par la loi de Strouhal, mais aussi un battement assez irrégulier à plus basse fréquence.

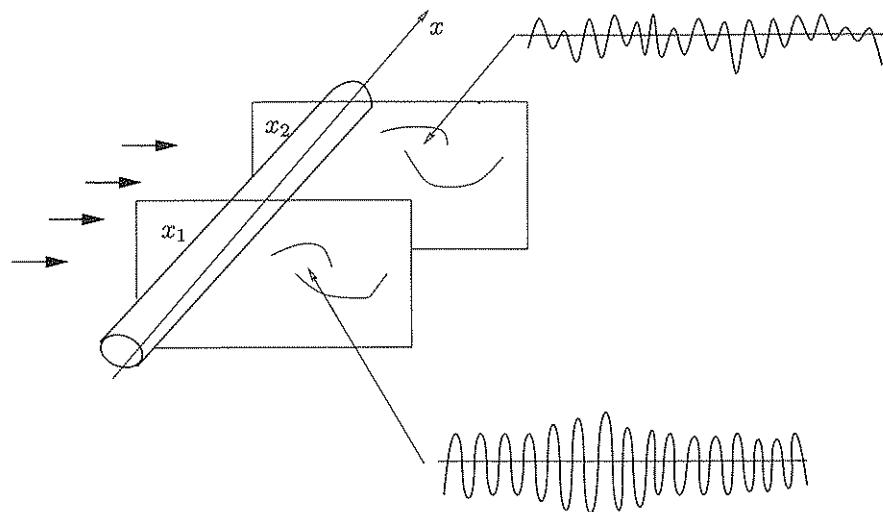


FIG. 5.4: Décorrélation des fluctuations le long d'un cylindre, d'après [5].

Il faut également considérer les aspects tridimensionnels de ce phénomène. En différentes sections d'un cylindre dans un écoulement uniforme les fluctuations se font à des fréquences semblables mais ne sont pas identiques, comme on peut le voir schématiquement sur la figure (5.4). Pour quantifier cet effet, on caractérise la similitude entre deux signaux temporels par la fonction de corrélation, qui va dépendre ici de la distance entre les deux sections,

$$r(x_2 - x_1) = \frac{\langle f(x_1, t) \cdot f(x_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle f^2(x_1, t) \rangle} \sqrt{\langle f^2(x_2, t) \rangle}} \quad (5.4)$$

où $\langle \rangle$ symbolise la moyenne en temps. Cette corrélation vaut $r = 1$ pour deux signaux identiques ou proportionnels, et $r = 0$ pour deux signaux dont, en moyenne, on ne peut pas identifier de lien entre les valeurs. Pour les fluctuations derrière un cylindre cette fonction décroît avec la distance entre les sections, les sillages s'organisant de manière de plus en plus indépendantes. On peut l'approcher ici par

$$r(x_2 - x_1) = e^{-|x_2 - x_1|/\lambda D} \quad (5.5)$$

avec $\lambda \simeq 4$. On retiendra donc qu'il n'y a que très peu de corrélation entre deux points distants de quelques diamètres.

5.1.2 Portance fluctuante

Les alternances de détachement tourbillonnaire entraînent, sur le cylindre qui le provoque, une fluctuation de portance à la même fréquence. La première modélisation qui s'impose est d'exprimer cette force comme étant harmonique, à la fréquence du détachement tourbillonnaire, d'où une force linéique

$$F_{tourbillons}(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \sin 2\pi \frac{t}{T_{tourbillons}} = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \sin 2\pi S \frac{U t}{D} \quad (5.6)$$

où $C_T \simeq 0.3$ est un coefficient de portance fluctuante. Ainsi, la vitesse de l'écoulement influe simultanément sur l'amplitude et la fréquence de la force. Supposons que le mouvement en portance d'une section de cylindre, en l'absence d'écoulement, soit décrit par une loi d'oscillateur

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y = 0 \quad (5.7)$$

où m , c et k sont la masse, l'amortissement et la raideur linéique. L'amplitude de la réponse établie de cet oscillateur à un forçage har-

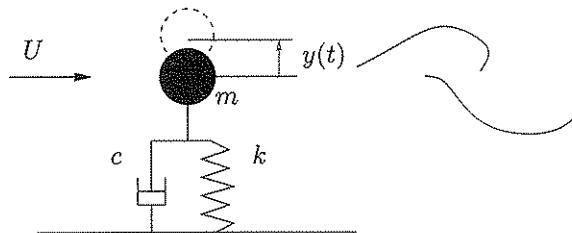


FIG. 5.5: Oscillateur amorti avec détachement tourbillonnaire.

monique (5.6) vaut [12, 17],

$$|y| = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \frac{1}{k} \frac{1}{[(1 - (\omega_F/\omega)^2)^2 + (c\omega_F/k)^2]^{1/2}} \quad (5.8)$$

avec $\omega^2 = k/m$, $\omega_F = 2\pi S U/D$. En posant $T_S = 2\pi/\omega$, $U_R = U T_S/D$, $M = \rho \pi D^2 / 4m$, $Y = |y|/D$, on peut écrire cette amplitude sous forme adimensionnelle,

$$\frac{Y}{M C_T} = \frac{1}{\pi^3} \frac{U_R^2}{[(1 - U_R^2 S^2)^2 + 4\eta^2 U_R^2 S^2]^{1/2}} \quad (5.9)$$

où $\eta = c/2\omega m$ est l'amortissement réduit. L'amplitude évolue donc avec la vitesse de l'écoulement, avec une résonance en $U_R = 1/S$, où la fréquence du détachement tourbillonnaire d'oscillation coincide avec la fréquence de l'oscillateur. L'amortissement du cylindre limite cette amplitude à la résonance, figure (5.6).

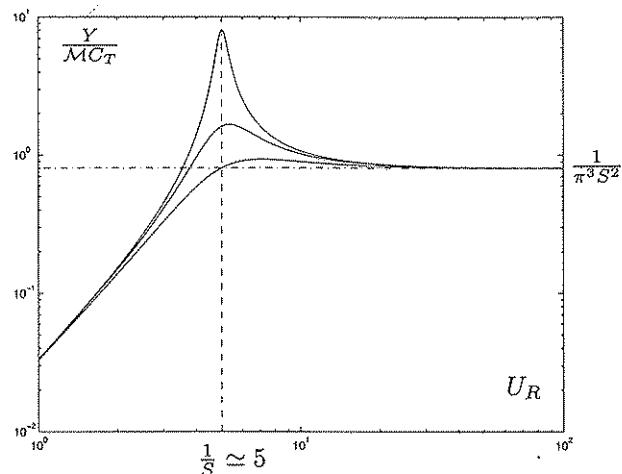


FIG. 5.6: Amplitude vibratoire consécutive au détachement tourbillonnaire. Effet de l'amortissement ($\eta = .01, .05$ et $.1$.)

5.1.3 Effets de corrélation

La solution (5.9) obtenue pour un élément de longueur du cylindre reste valable pour un cylindre de longueur L si la force linéaire est entièrement corrélée. L'équation dynamique est en effet alors

$$mL \ddot{y} + cL \dot{y} + kL y = L F_{tourbillons}(t), \quad (5.10)$$

qui donne évidemment la même solution que précédemment. Dans le cas plus général le mouvement de translation uniforme du cylindre sera régi par

$$mL \ddot{y} + cL \dot{y} + kL y = \int_0^L F_{tourbillons}(x, t) dx. \quad (5.11)$$

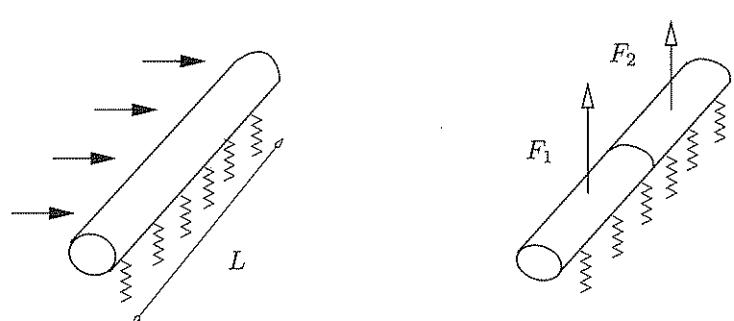


FIG. 5.7: Modèle élémentaire de décorrélation des efforts.

Pour illustrer les effets de décroissance de la corrélation le long du cylindre, considérons le cas d'un cylindre rigide de longueur L monté sur ressorts dont on analyse le mouvement en portance. Dans chaque section, on représente les efforts par le modèle de portance fluctuante précédent. Pour représenter la décroissance de la corrélation le long du tube, utilisons le modèle très simple selon lequel l'effort linéique est toujours

$$F_1(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \sin 2\pi S \frac{Ut}{D}, \quad (5.12)$$

mais dans la première moitié seulement, $0 < x < L/2$, et

$$F_2(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \cos 2\pi S \frac{Ut}{D} \quad (5.13)$$

dans la seconde moitié, figure (5.7). Ces deux efforts ont une corrélation nulle, ce qui signifie qu'en moyenne leurs valeurs ne sont pas reliées. En effet à une valeur de F_1 correspond de façon équiprobable une valeur de F_2 ou son opposée. L'équation dynamique du tube est alors

$$mL \ddot{y} + cL \dot{y} + kL y = \frac{1}{2} \rho U^2 D C_T \left[\frac{L}{2} \sin(2\pi S \frac{Ut}{D}) + \frac{L}{2} \cos(2\pi S \frac{Ut}{D}) \right]. \quad (5.14)$$

L'amplitude adimensionnelle du mouvement devient

$$\frac{Y}{MC_T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi^3} \frac{U_R^2}{[(1 - U_R^2 S^2)^2 + 4\eta^2 U_R^2 S^2]^{1/2}}. \quad (5.15)$$

Elle est donc *plus faible* d'un facteur $\sqrt{2}$ que lorsque la corrélation est totale. En généralisant ce modèle à une longueur adimensionnelle

$$L = 2^N \lambda, \quad (5.16)$$

où λ est la longueur sur laquelle la corrélation est totale, on obtient une amplitude de mouvement qui *décroît* avec la longueur du cylindre,

$$\frac{Y}{MC_T} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{L}}. \quad (5.17)$$

5.2 Couplage entre sillage et mouvement

La figure (5.6) montre que l'amplitude du mouvement peut être non négligeable devant le diamètre si les masses du fluide et du solide sont comparables. De plus, la fréquence d'oscillation du cylindre est proche de celle du détachement tourbillonnaire. On peut donc s'attendre à une influence de l'oscillation de l'obstacle sur le sillage. Cette influence est complexe et se manifeste principalement sous trois aspects [5, 21].

Tout d'abord, on observe expérimentalement que le coefficient de portance fluctuante C_T varie avec l'amplitude du mouvement, figure (5.8). Pour de petites amplitudes, $|y|$ de l'ordre de 0.2, le mouvement du cy-

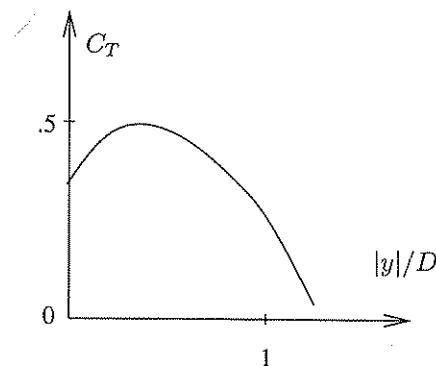
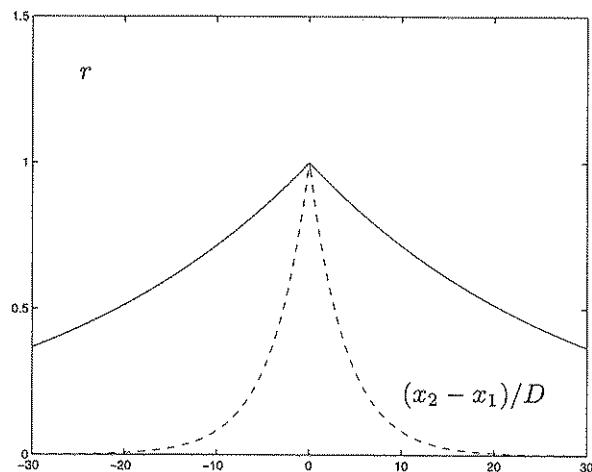


FIG. 5.8 : Effet d'amplitude sur le coefficient de portance fluctuante.

lindre est favorable à l'organisation du sillage et la portance fluctuante est amplifiée. C'est un effet organisateur dans un plan perpendiculaire au cylindre. Pour de plus grands mouvements, le sillage est au contraire perturbé et la portance fluctuante diminue. Cette diminution a pour effet de limiter en pratique l'amplitude des mouvements à approximativement un diamètre.

FIG. 5.9 : Effet de l'amplitude vibratoire sur le coefficient de corrélation longitudinal. Trait pointillé : $|y|/D = 0$. Trait plein : $|y|/D = 1/2$.

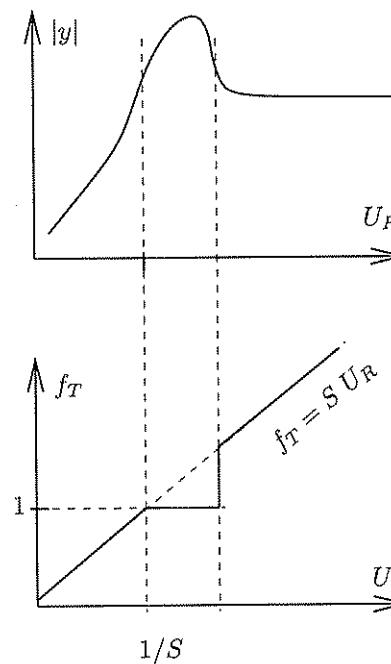
Un deuxième effet s'observe lui sur la longueur de corrélation. Le sillage est également sensible à la cohérence des oscillations le long du cylindre. Des sillages de sections éloignées, initialement décorrélés, se synchronisent par l'intermédiaire du mouvement du cylindre, figure (5.9). Les longueurs de corrélation peuvent passer de $\lambda \approx 4$ à $\lambda \approx 30$ pour des

amplitudes même faibles [5]. Ceci amplifie encore le mouvement vibratoire.

Par ailleurs, on sait que pour un cylindre fixe, l'augmentation de la vitesse d'écoulement entraîne une augmentation de la fréquence adimensionnelle de détachement tourbillonnaire, selon la loi de Strouhal

$$f_T = S U_R. \quad (5.18)$$

Sur un cylindre flexible dont le mouvement est de l'ordre de grandeur

FIG. 5.10 : Accrochage tourbillonnaire à U_R croissante.

d'un dixième de diamètre, on observe cependant un écart à cette loi, vers la résonance

$$U_R = \frac{1}{S}, \quad (5.19)$$

où sont atteintes les plus grandes amplitudes. Le sillage se synchronise alors plutôt sur la fréquence d'oscillation du cylindre. C'est *l'accrochage*, dans lequel la fréquence du sillage et donc du mouvement peuvent différer de plus de 30% de la loi de Strouhal. En augmentant encore la vitesse, l'amplitude chute soudain et l'on retrouve l'évolution classique (5.10).

5.3 Réponse à la turbulence

5.3.1 Caractérisation des efforts

Lorsque des efforts fluctuants aléatoires existent, ayant pour origine la turbulence de l'écoulement incident, il faut les caractériser, comme dans le cas précédent par leur contenu spectral (fréquences, intensité) et leur corrélation le long de l'obstacle. Considérons la force linéique aléatoire de portance, $F(x_1, t)$ qui s'exerce sur l'abscisse x_1 d'un cylindre placé transversalement à l'écoulement. On peut construire la fonction d'intercorrélation entre les forces à deux abscisses x_1 et x_2 sous la forme

$$R(x_1, x_2, \tau) = \langle F(x_1, t)F(x_2, t + \tau) \rangle. \quad (5.20)$$

Le spectre d'intercorrélation des efforts, transformée de Fourier de cette fonction,

$$\Psi(x_1, x_2, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x_1, x_2, \tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau, \quad (5.21)$$

contient toute l'information sur le contenu spectral et la corrélation de ces efforts aléatoires [17, 5]. Dans une première approche, on peut supposer que le niveau de corrélation entre les efforts en deux points ne dépend que de la distance entre ces points, et pas de la fréquence considérée, soit

$$\Psi(x_1, x_2, f) = \Phi(f) e^{-|x_2 - x_1|/\lambda D}, \quad (5.22)$$

où λD est la longueur de corrélation. Le spectre Φ et le coefficient λ sont issus de l'expérience et dépendent fortement des géométries et des écoulements considérés, [5, 1].

5.3.2 Réponse vibratoire

La réponse d'un système linéaire à une telle force linéique est caractérisée par une densité spectrale de puissance (DSP), définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, soit

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle y(t)y(t + \tau) \rangle_t e^{-2i\pi f \tau} d\tau \quad (5.23)$$

et par l'écart type associé

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} S_y(f) df. \quad (5.24)$$

Si les efforts sont entièrement corrélés ($\lambda = \infty$), elle se calcule simplement comme

$$S_y^{\infty}(f) = |H(f)|^2 \Phi(f) L^2 \quad (5.25)$$

où $H(f)$ est la fonction de transfert et L la longueur du tube. Si la dynamique du tube, comme dans la figure (5.7), est définie par un seul

5.3. RÉPONSE À LA TURBULENCE

mode de translation de fréquence f_1 d'amortissement η_1 et de raideur modale $k_1 = kL$, k étant la raideur linéaire du support, on a

$$S_y^{\infty}(f) = \frac{\Phi(f)}{k^2 L^2 [(1 - (f/f_1)^2)^2 + (2\eta_1 f/f_1)^2]} L^2 \quad (5.26)$$

qui ne dépend pas de L . L'écart type du déplacement, σ_{∞} , n'en dépend donc pas non plus. Si l'on prend en compte la corrélation spatiale des efforts il faut écrire, au lieu de (5.25),

$$S_y(f) = \int_0^L \int_0^L |H(f)|^2 \Phi(f) e^{-|x_2 - x_1|/\lambda D} dx_2 dx_1 \quad (5.27)$$

qui se réduit à

$$S_y(f) = S_y^{\infty}(f) \left[\frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L e^{-|x_2 - x_1|/\lambda D} dx_2 dx_1 \right], \quad (5.28)$$

et donne un écart-type

$$\sigma^2 = \sigma_{\infty}^2 J^2 \quad (5.29)$$

avec

$$J^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L e^{-|x_2 - x_1|/\lambda D} dx_2 dx_1. \quad (5.30)$$

Le coefficient adimensionnel de corrélation J^2 traduit l'influence de la corrélation spatiale sur la réponse. Il vaut, figure (5.11),

$$J^2 = 2 \frac{\lambda D}{L} (1 - \frac{\lambda D}{L} (1 - e^{-L/\lambda D})). \quad (5.31)$$

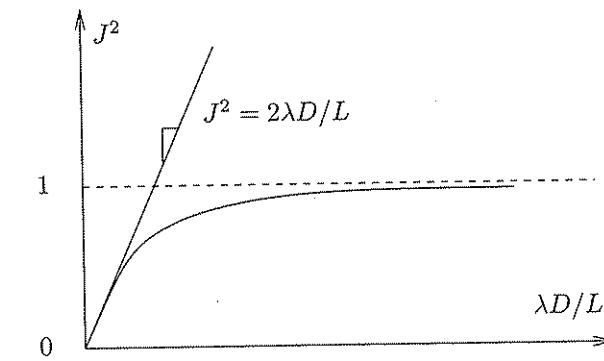


FIG. 5.11 : Coefficient adimensionnel de corrélation.

Pour une faible corrélation, $\lambda D \ll L$, on a

$$J^2 \simeq 2 \frac{\lambda D}{L}. \quad (5.32)$$

L'écart type de la réponse vibratoire évolue alors avec la longueur du système comme

$$\sigma \sim \sqrt{\frac{\lambda}{L}}. \quad (5.33)$$

On retrouve la dépendance évoquée pour la réponse au détachement tourbillonnaire.

5.3.3 Système multimodal

De façon plus générale, si l'on considère un système décrit par N modes, la même approche peut être utilisée, avec quelque modifications de principe.

Si les modes sont bien séparés et que leurs amortissements sont faibles, l'écart type du déplacement en un point s'obtient comme somme d'écart-types modaux,

$$\sigma^2(x) = \sum_1^N \sigma_k^2(x) \quad (5.34)$$

où chaque écart-type modal se calcule selon l'approche précédente.

Par ailleurs, la réponse d'un mode fait intervenir la déformée modale $\varphi_k(x)$ dans le coefficient de corrélation, car la fonction de transfert dépend du point,

$$|H_k(x_1, x_2, f)|^2 = \frac{\varphi_k(x_1)\varphi_k(x_2)}{k^2 L^2 [(1 - (f/f_1)^2)^2 + (2\zeta_1 f/f_1)^2]}. \quad (5.35)$$

On obtient donc un coefficient de corrélation pour chaque mode,

$$J_k^2 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \varphi_k(x_1)\varphi_k(x_2)e^{-|x_2-x_1|/\lambda D} dx_2 dx_1. \quad (5.36)$$

On peut également sans difficulté de principe généraliser cette approche aux cas où le contenu du spectre d'excitation Φ varie le long de l'abscisse x , par exemple du fait d'un écoulement variable en intensité [2].

5.4 Expérience élémentaire

Une manifestation assez spectaculaire et dangereuse de forçage par les fluctuations de l'écoulement s'observe lorsque l'on conduit un véhicule haut (camionnette, minibus,...) juste derrière un camion de grande taille. Le sillage du camion est fortement oscillant, comme on peut le voir par temps de pluie, où les gouttelettes d'eau sont projetées alternativement à la droite et à la gauche du camion.

Si l'on suit ce premier camion à quelques longueurs seulement, dans un véhicule offrant une forte prise au vent latéral et dont le mode de

balancement est d'assez basse fréquence, on perçoit très bien dans la commande de direction les efforts alternés qui en résultent.

La fréquence de ce forçage a pour ordre de grandeur

$$f \simeq S \frac{V}{L}, \quad (5.37)$$

où S est le nombre de Strouhal, V la vitesse du véhicule et L une taille caractéristique de la largeur du camion. Avec $S \simeq .2$, $V \simeq 15 \text{ m/s}$ et $L \simeq 3 \text{ m}$, on obtient $f \simeq 1 \text{ Hz}$, ce qui est tout à fait perceptible.

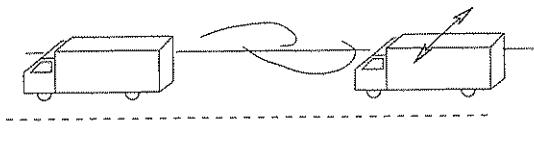


FIG. 5.12: Mouvement de roulis induit par le sillage d'un camion.

5.5 Conclusion

Le nombre de Strouhal permet de relier l'échelle de temps des fluctuations de l'écoulement dans un sillage à l'échelle de temps de la convection. Ces fluctuations se traduisent par des efforts sur les solides, efforts qui sont caractérisés par un contenu fréquentiel et une corrélation spatiale.

Les mouvements des solides qui en résultent dépendent du rapport entre l'échelle de temps des fluctuations et celle propre au solide, du niveau de corrélation de ces efforts, et d'éventuelles rétroactions de ce mouvement sur le sillage lui-même, qui peuvent en augmenter l'effet (organisation du sillage, augmentation de la corrélation, accrochage) ou le diminuer (désorganisation du sillage).

Nous avons présenté ces effets dans le cas d'un cylindre. Pour des obstacles de forme plus complexe on retrouve qualitativement les mêmes phénomènes, mais avec des nombres de Strouhal, des coefficients de portance et de corrélation différents et souvent dépendants du nombre de Reynolds.

Le calcul de la réponse vibratoire d'une structure à une excitation par la turbulence est plus complexe, dans la mesure où l'excitation à un contenu spectral plus riche. Ce contenu spectral est très différent d'un cas à l'autre, selon qu'il s'agit par exemple du vent à basse altitude, d'un jet ou de l'écoulement après un coude. Certaines simplifications peuvent apparaître, mais la démarche générale reste celle que nous venons de décrire.

Bibliographie

- [1] F. Axissa. *Modélisation des systèmes mécaniques. Tome 4 : Vibrations sous écoulement.* Hermès, 2001.
- [2] F. Axissa, J. Antunes, and B. Villard. Overview of numerical methods for predicting flow-induced vibrations. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 110 :7–14, 1988.
- [3] Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur, III, Solides déformables.* Hermann, 1997.
- [4] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge university press, 1967.
- [5] R. D. Blevins. *Flow-Induced Vibration.* Van Nostrand Reinhold, New-York, second edition, 1991.
- [6] V. V. Bolotin. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability.* Pergamon Press, 1963.
- [7] A. Bonnet and J. Luneau. *Théorie de la dynamique des fluides.* Cepadues-Editions, Toulouse, 1989.
- [8] F.J. Bourrières. Sur un phénomène d'oscillation auto-entretenue en mécanique des fluides réels. *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, 147, 1939.
- [9] S. Candel. *Mécanique des fluides.* Dunod, Paris, 1995.
- [10] P.W. Carpenter and A. D. Garrad. The hydrodynamic stability over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :199–232, 1986.
- [11] A. Chaigne. *Ondes acoustiques.* Ecole Polytechnique, 1999.
- [12] R. W. Clough and J. Penzien. *Dynamique des structures.* Pluralis, 1980.
- [13] J. S. Darrozes and C. François. *Mécanique des fluides incompressibles.* Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [14] E. H. Dowell. *A modern course in aeroelasticity.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [15] H. L. Dryden, F. P. Murnaghan, and H. Bateman. *Hydrodynamics.* Dover, 1956.
- [16] Y. C. Fung. *An introduction to the theory of aeroelasticity.* Mc Graw-Hill, New-York, dover edition, 1993 edition, 1955.

- [17] R-J. Gibert. *Vibrations des structures*. Eyrolles, 1988.
- [18] P. Huerre. *Mécanique des fluides*. Ecole Polytechnique, 1998.
- [19] H. J-P. Morand and R. Ohayon. *Interactions Fluides-Structures*. Masson, 1992.
- [20] G.V. Mysore, S. I. Liapis, and R. H. Plaut. Dynamic analysis of single-anchor inflatable dams. *Journal of Sound and Vibration*, 215(2) :251–272, 1998.
- [21] E. Naudasher and D. Rockwell. *Flow-induced vibrations : an engineering guide*. Balkema, 1994.
- [22] M.P. Païdoussis. *Fluid-structure Interactions. Slender Structures and Axial Flow*, volume 1. Academic Press, 1998.
- [23] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Ecole Polytechnique, 2000.
- [24] A. Sellier. *Ecoulements compressibles et fluides hétérogènes*. Ecole Polytechnique, 1999.
- [25] T. Szirtes and P. Rózsa. *Applied dimensional analysis and modeling*. Mc Graw-Hill, 1998.
- [26] P. Le Tallec. *Introduction à la dynamique des structures*. Ecole Polytechnique, 1999.
- [27] S. P. Timoshenko. *Théorie de la stabilité élastique*. Dunod, 1966.
- [28] M. van Dyke. *An album of fluid motion*. The parabolic press, Stanford, 1982.
- [29] M.L. Wald. Fluttery air deflector led to stealth crash. *International Herald Tribune*, september, 17 1997.
- [30] T.P. Witelski. Dynamics of air bearing sliders. *Physics of Fluids*, 10(3) :698–708, 1998.
- [31] K.Y. Yusuf and R. H. Scanlan. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure and undergraduate physics textbook. *American Journal of Physics*, 59(2) :118–124, 1991.

Notations

A	Section de passage du fluide
\bar{A}	Nombre sans dimension
dA	Elément d'aire orienté
c_A	Coefficient d'amortissement ajouté
c_0	Vitesse du son dans le fluide
c_g	Vitesse des ondes de gravité
c_s	Vitesse des ondes élastiques dans le solide
c_ν	Vitesse de diffusion visqueuse
c_φ, C	Vitesse de phase
C_D, C_L	Coefficients de trainée et de portance
C_x, C_y	Coefficients de trainée et de portance
C_T	Coefficient de portance fluctuante
C_Y	Nombre de Cauchy
D	Déplacement réduit
$e_x e_y e_z$	Repère orthonormé
\mathcal{E}	Élancement
\mathcal{E}_C	Énergie cinétique
E	Module d'Young
F_R	Nombre de Froude
F_D	Nombre de Froude dynamique
f	Fréquence
f_T	Fréquence du détachement tourbillonnaire
F_{FS}	Projection modale de la force fluide-structure
F_S, F_I	Partie stationnaire et instationnaire de la force
f_{FS}	Fluctuation de F_{FS}
g	Gravité
\mathcal{G}	Nombre de gravité
i, j	Vecteurs unitaires
J	Moment d'inertie
J_k	Coefficient adimensionnel de corrélation
k	Raideur modale
k_A^G	Raideur ajoutée de gradient
k_A^F	Raideur ajoutée de forme
L	Longueur caractéristique
M	Masse ponctuelle
\mathcal{M}	Nombre de masse
M_{ach}	Nombre de Mach
m	Masse modale
m_A	Masse ajoutée
M_{SF}	Masse de couplage solide-fluide
m_{FS}	Masse de couplage fluide-solide
\underline{n}	Vecteur normal
$\mathcal{O}()$	Ordre de grandeur

P	Pression
p	Fluctuation de pression
p_0	Pression de référence
r	Fonction de corrélation
R_E	Nombre de Reynolds
S	Nombre de Strouhal
$S(f)$	Densité spectrale de puissance
S_T	Nombre de Stokes
\underline{T}	Vecteur contrainte fluctuant
t	Temps
T	Tension
T_{solide}	Temps caractéristique du mouvement du solide
T_{fluide}	Temps caractéristique du mouvement du fluide
\underline{t}	Vecteur tangent
\underline{U}	Vitesse du fluide
\underline{u}	Vitesse fluctuante
U_0	Vitesse de référence
U_C	Vitesse critique
U_R	Vitesse réduite
W	Travail
α	Angle d'incidence
γ	Accélération
δ	Distribution de Dirac
ε	Déformation
η	Amortissement modal
θ	Angle d'incidence
λ	Petit paramètre
λ	Longueur de corrélation
Λ	Périodicité en espace
μ	Viscosité dynamique
ν	Coefficient de Poisson
ξ	Déplacement du solide
ξ_0	Déplacement de référence
Π	Pression réduite
ρ_F	Masse volumique du fluide
ρ_F^0	Masse volumique de référence du fluide
ρ_S	Masse volumique du solide
ρ_S^0	Masse volumique de référence du solide
$\underline{\sigma}$	Contrainte
σ	Ecart-type du déplacement
φ	Déformée modale
φ_P	Déformée de pression
φ_ξ	Déformée de déplacement fluide
$\Phi(f)$	Spectre des efforts
$\Psi(x_1, x_2, f)$	Spectre d'intercorrélation des efforts
ω, Ω	Pulsation

ω_N	Pulsation de mode propre
ω_I	Partie imaginaire de la pulsation
$(\underline{\quad})$	Vecteur
$(\underline{\underline}{\quad})$	Tenseur d'ordre 2
$(\tilde{\quad})$	Variable adimensionnée selon les échelles du solide
$(\tilde{\quad})$	Variable adimensionnée selon les échelles du fluide
$(\dot{\quad})$	Dérivation par rapport au temps
$\langle \rangle$	Moyenne en temps

Index

- aéroélasticité, 57, 59, 65
 - pseudo-statique, 86
 - quasistatique, 57, 84, 92
- accrochage, 113
- aile
 - en torsion, 59
- amortissement, 109
 - de Coriolis, 95
 - visqueux, 43
- ballottement, 44, 49
- barrage souple, 9, 27
- coefficient
 - de raideur, 62
 - de corrélation, 115, 116
 - de Poisson, 13
 - de portance, 59, 75
 - de trainée, 75, 87
- comportement élastique, 20
- condition
 - cinématique, 21, 23, 30, 55
 - d'interface, 21, 29, 46
 - de Kutta, 91
 - de surface libre, 47
 - dynamique, 21, 23, 30, 55, 61
- confinement, 39
- confusion
 - de fréquence, 62, 64
- conservation
 - de la masse, 20
 - de la quantité de mouvement, 20
- couche limite, 43
- couplage
 - antisymétrique, 62, 64, 70, 75
 - inertielle, 39, 46, 49, 51
- crise
 - de portance, 88
 - de trainée, 87
- décomposition modale, 18
- déplacement
 - de référence, 13
 - réduit, 15
- détachement
 - tourbillonnaire, 106
- diffusion visqueuse, 41
- divergence, 58
- écart-type, 114
- effet
 - d'histoire, 42, 48, 51
 - de confinement, 39
 - de Coriolis, 96
- élancement, 18
- énergie cinétique du fluide, 38
- flambage, 58
 - d'Euler, 74
- flottement, 9
 - de décrochage, 90
 - par couplage, 64
- fluide incompressible, 19
- fonction
 - d'auto-corrélation, 114
 - d'intercorrélation, 114
 - de corrélation, 108
- force
 - suiveuse, 73
- fréquence réduite, 19
- gravité , 13
- incidence, 89
- inertie ajoutée, 37

instabilité
dynamique, 94
statique, 58, 65, 101

longueur
de corrélation, 112

masse
ajoutée, 36, 37, 42, 51
de couplage, 47, 49
volumique de référence, 13

mode
amorti, 66
complexe, 101
de ballottement, 44
instable, 64, 66
propagatif, 101
propre, 101, 116

module d'Young, 13, 18

nombre
d'Euler, 14
de Cauchy, 16, 19, 27, 55,
59, 77
de Froude, 15, 27, 55
de Froude dynamique, 27,
28, 44, 51
de gravité, 15
de Mach, 15
de masse, 16, 19, 27
de Reynolds, 15, 27, 55, 87
de Reynolds dynamique, 27
de Stokes, 27, 28, 40, 51
de Strouhal, 19, 107, 113
non-linéarités, 58, 60, 63

peau de dauphin, 10
petits déplacements, 30
pont de Tacoma, 10, 94
portance
fluctuante, 109, 111
poussée d'Archimède, 34
pression
de référence, 13
dynamique réduite, 14
fluctuante, 30
hydrostatique, 33
projection

des efforts, 32
modale, 32

réponse
impulsionnelle, 41, 91, 94

résonance, 109

raideur
ajoutée, 33, 51
ajoutée de forme, 35
ajoutée de gradient, 33
ajoutée par l'écoulement,
58, 65

solide rigide, 18

spectre
d'intercorrélation, 114

surface
libre, 32, 44, 46

système
conservatif, 64

tête de lecture, 10

temps
de convection, 93, 107

théorème π , 14

théorème de Waschy-Buckingham,
14

trainée, 10

transformation infinitésimale, 20

turbulence, 106, 114

tuyau
d'arrosage, 66
de douche, 101

variables
dépendantes, 13
indépendantes, 13

viscosité dynamique, 13

vitesse
de diffusion visqueuse, 27
de phase, 44, 99
de propagation des ondes
dans le solide, 27
de référence, 13
des ondes de surface, 27
du son, 13
fluctuante, 30
réduite, 16, 72, 84, 92, 93

vorticité, 76

Dans la même collection

Chimie moléculaire des éléments de transition - F. Mathey et A. Sevin
300 pages - ISBN 2-7302-0714-7

Cours d'analyse - J.-M. Bony
272 pages - ISBN 2-7302-0775-1

Calcul différentiel et intégral - F. Laudenbach
220 pages - ISBN 2-7302-0724-4

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - J.-M. Bony
217 pages - ISBN 2-7302-0723-6

Une exploration des signaux en ondelettes - S. Mallat
654 pages - ISBN 2-7302-0733-3

Dynamique de l'atmosphère et de l'océan - P. Bougeault et R. Sadourny
312 pages - ISBN 2-7302-0825-X

Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes
A. Sellier - 175 pages - ISBN 2-7302-0764-5

Mécanique des milieux continus - J. Salençon
Tome 1 - Concepts généraux - 360 pages - ISBN 2-7302-0715-5
Tome 2 - Thermoélasticité - 314 pages - ISBN 2-7302-0716-3
Tome 3 - Milieux curvilignes - 152 pages - ISBN 2-7302-0715-5

Énergie nucléaire - J.-L. Basdevant et M. Spiro
274 pages - ISBN 2-7302-0730-9

Introduction à la relativité - A. Rougé
116 pages - ISBN 2-7302-0718-X

Introduction à la physique subatomique - A. Rougé
Tome 1 - 190 pages - ISBN 2-7302-0719-8
Tome 2 - 190 pages - ISBN 2-7302-0720-1

Mécanique quantique - J.-L. Basdevant et J. Dalibard (*accompagné d'un CD-Rom*)
504 pages - ISBN 2-7302-0819-4

Introduction à la microéconomie - N. Curien
110 pages - ISBN 2-7302-0722-8

Penser le XX^e siècle - A. Finkielkraut
96 pages - ISBN 2-7302-0713-9

Groupes finis - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
104 pages - ISBN 2-7302-0751-5

Pavages - N. Berline et C. Sabbah (Comité éditorial)
112 pages - ISBN 2-7302-0855-0

Séminaires, équations aux dérivées partielles - Année 1999-2000
300 pages - ISBN 2-7302-0725-2

Fluides et Solides - E. de Langre
130 pages - ISBN 2-7302-0833-X