Robótica Móvil

Segundo cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Robótica Probabilística - clase 10

Repaso de probabilidad, Regla de Bayes y Filtro Bayesiano

¿Por qué robótica probabilística?

Para realizar una aplicación real con un robot móvil, debemos tratar con incertezas que provienen de distintos factores:

- Los entornos donde operan los robots suelen ser dinámicos, parcialmente observables, no estructurados, no determinísticos (i.e. una porquería).
- Los sensores introducen otras incertezas, producto de los propios límites en las resoluciones con las que trabajan. Además los sensores están sujetos a ruido que también es impredescible y que perturba las mediciones.
- Los actuadores también son imprecisos para moverse. También tenemos ruido en las señales de control, y los mecanismos sufren un desgaste por el uso que es inevitable.
- El software que corre en un robot también introduce incertezas ya que utiliza modelos para representar el mundo que son una abstracción y simplificación del mismo. Además, por restricciones de cómputo (ejecución en tiempo real) también se sacrifica precisión en pos de alzancar un tiempo de respuesta adecuado.

Propuesta de la robótica probabilística

La idea central es contar con una representación explícita de la incerteza usando el cálculo de la Teoría de Probabilidad.

- Percepción = estimación del estado.
- Actuación = optimización de la utilidad de cada acción.

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

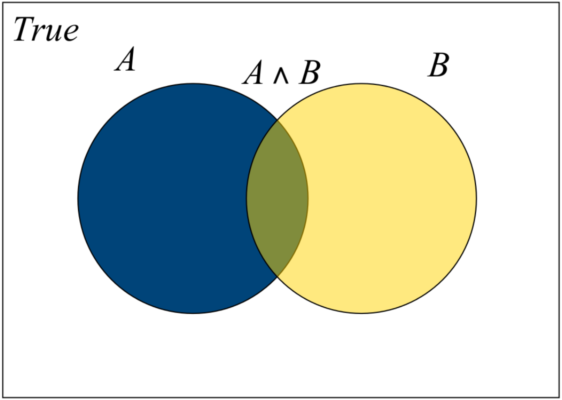
Los siguientes axiomas definen la Teoría de Probabilidad que vamos a usar. Si $P(A)$ denota la probabilidad de que la proposición A sea verdadera, entonces:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(True) = 1$ y $P(False) = 0$
3) $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

Veamos más de cerca el axioma 3:

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$



Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

A partir de los axiomas podemos calcular distintas igualdades:

$$
\begin{aligned}
P(A \vee \neg A) &= P(A) + P(\neg A) - P(A \wedge \neg A) \\
P(\mathit{True}) &= P(A) + P(\neg A) - P(\mathit{False}) \\
1 &= P(A) + P(\neg A) - 0 \\
P(\neg A) &= 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta:

- X puede tomar un valor discreto dentro de $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $P(X = x_i)$ o $P(x_i)$ es la probabilidad de que la variable X tome el valor x_i.
- $P(\cdot)$ se denomina función de masa de probabilidad (o función de probabilidad).
- $\sum_{x_i} P(x_i) = 1$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

Sea X una variable aleatoria continua:

- X puede tomar uno valor cualquiera dentro de un intervalo continuo $[a, b]$.
- $p(X = x)$ o $p(x)$ es la probabilidad de que la variable X tome el valor x.
- $p(\cdot)$ se denomina función de densidad de probabilidad (o función de densidad):

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x)dx$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

Sea X una variable aleatoria continua:

- $F(\cdot)$ se donomina función de distribución de probabilidad (o función de distribución):

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx$$

- $F(\cdot)$ cumple que:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

- Podemos usar la función de distribución para hallar la probabilidad de que $X \in [a, b]$

$$P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

Sean X e Y dos variables aleatorias, entonces:

- $P(X = x \text{ y } Y = y) = P(x, y) = P(y, x)$ se llama probabilidad conjunta.
- Si X e Y son independientes $P(x, y) = P(x)P(y)$.
- $P(x|y)$ es la probabilidad de x dado y o probabilidad condicional:

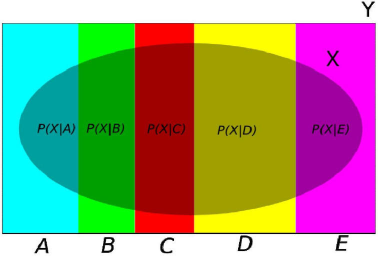
$$P(x|y) = P(x, y)/P(y) \quad (\text{si } P(y) > 0)$$
$$P(x, y) = P(x|y)P(y)$$

- Si X e Y son independientes
  $P(x|y) = P(x, y)/P(y) = P(x)P(y)/P(y) = P(x)$

Un breve repaso de Teoría de Probabilidad

El Teorema de la Probabilidad Total nos dice que:

- Sea $Y_1, ..Y_n$ una partición del espacio muestral y sea X un suceso: $P(X) = \sum_i P(X|Y_i)P(Y_i)$ (caso discreto).
- Sea Y una variable aleatoria continua y sea X un suceso, entonces: $P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(X|Y = y)p(y)dy$ (caso continuo).



El Teorema de la Probabilidad Marginal nos dice que:

- Sean X e Y variables aleatorias discretas con probabilidad conjunta $P(X, Y)$, entonces: $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$.
- Sean x e y variables aleatorias continuas con probabilidad conjunta $p(x, y)$, entonces: $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy$.

El Teorema de Bayes

Thomas Bayes, 1702-1761.

El Teorema de Bayes nos dice que:

- $P(x, y) = P(y, x)$ por definición la probabilidad conjunta es simétrica.
- $P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$ por definición de probabilidad condicional.
- Luego, despejando tenemos que:

$$P(x|y) = P(y|x)P(x)/P(y)$$

El Teorema de Bayes aplicado a Robótica

Cuando el robot sensa no hace otra cosa que aplicar el teorema de Bayes:

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)}$$

$P(x|z)$: probabilidad a Posteriori (*Posterior Belief*) dado que sensé z.
$P(z|x)$: verosimilitud de Medición dado (o suponiendo) que estoy en x.
$P(x)$: probabilidad a Priori de estar en x.
$P(z)$: probabilidad de sensar z independientemente de donde esté.

Para hallar $P(z)$ usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(z) = \sum_{x} P(z|x)P(x)$$

El Teorema de Bayes aplicado a Robótica

Entonces podemos reescribir el Teorema de Bayes como:

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)} = \eta P(z|x)P(x)$$

$$\text{donde } \eta = P(z)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(z|x)P(x)}$$

Nota: η es el término de normalización que usamos para que el posterior belief sea una probabilidad bien definida.

El problema de la Localización

Es la habilidad que posee un robot de localizarse en el espacio por sí sólo.

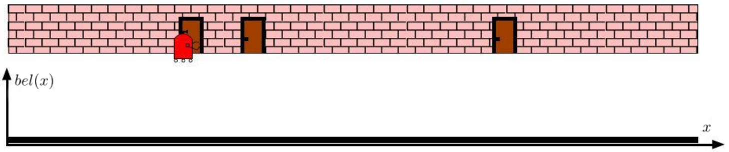
- Es uno de los problemas centrales de la robótica móvil.
- En general, no puede ser resuelto con un sólo (tipo de) sensor.
- Es mejor si utilizamos un enfoque probabilítico para resoler este problema.

Ejemplo de localización

- Tenemos un robot en un mundo de una dimensión.
- El robot se puede mover sólo hacia delante o hacia atrás.
- Tenemos un mapa completo del mundo, pero no sabemos dónde está el robot.
- En el mundo hay tres puertas (landmarks), el robot puede detectar si se encuentra al lado de una puerta o no.

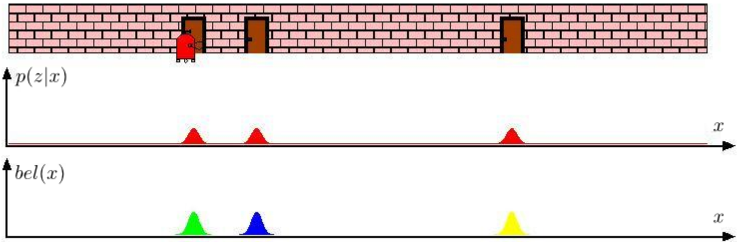
Ejemplo 1: Posición inicial

- Como en un principio el robot desconoce cual es su posición entonces es igualmente posible que se encuentre en cualquier punto del mundo (eso se llama la creencia del robot, o belief).
- Podemos representar esto matemáticamente diciendo que la función de densidad de probabilidad del robot es uniforme sobre el mundo en que se encuentra.



Ejemplo 1: Medición

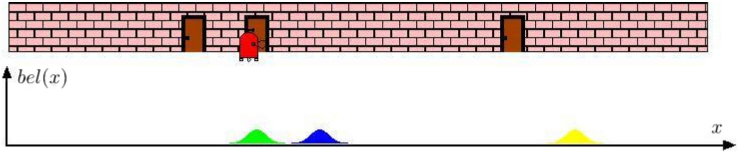
- Si el robot sensa que se encuentra al lado de una puerta entonces la creencia de su ubicación se se ve alterada de alguna manera.
- Esta nueva función representa otra distribución de probabilidades llamada posterior belief.
- La función de posterior belief es la mejor representación de la posición del robot actualmente. Cada pico representa la evaluación de su posición con respecto a una puerta.



¿Por qué hay tres picos? ¿Por qué no son puntuales?

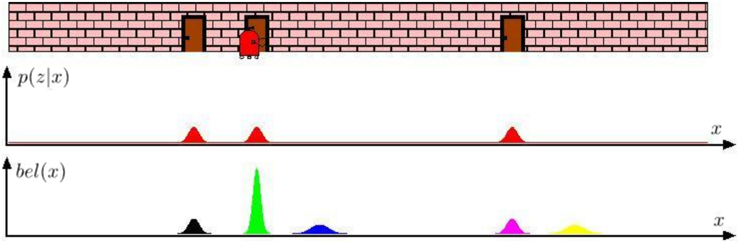
Ejemplo 1: Movimiento

- Si ahora el robot se mueve hacia la derecha la creencia cambia de acuerdo al movimiento.
- Como el movimiento del robot es inexacto, al trasladarse la incertidumbre crece, por lo que los picos se hacen más anchos.
- Este aplanamiento matemáticamente se lleva a cabo por medio de la operación de convolución entre la función de posterior belief y la función que describe el movimiento del robot.



Ejemplo 1: Segunda medición después del movimiento

- Después de haberse movido el robot sensa nuevamente que se encuentre al lado de una puerta
- Entonces, la función de posterior belief se incrementara por un cierto factor que es la función de probabilidad de que hayamos sensado una puerta dado que estamos al lado de una puerta.



Ejemplo 2: Posición inicial

- Un mundo constituido por cinco celdas rojas y verdes $x_{i=1,\ldots,5}$
- Tenemos un mapa del mundo: las celdas x_2 y x_3 son rojas, y el resto verdes.
- Inicialmente el robot desconoce su posición, entonces el belief inicial (probabilidad a priori) inicial es uniforme.

- La probabilidad de que el robot sense correctamente esta dada por la siguiente distribución de probabilidades:

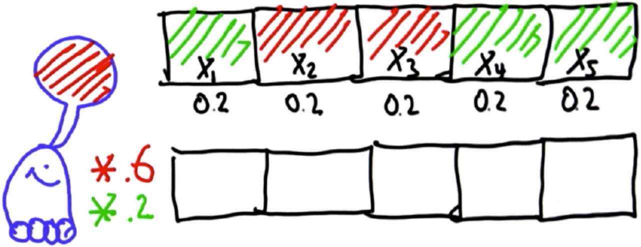
$$P(sensa\ color|x_i = color) = 0{,}6$$

$$P(sensa\ \neg color|x_i = color) = 0{,}2$$

Importante: Observar que esto no es una probabilidad estrictamente ya que la suma debería ser 1 (en realidad es una verosimilitud, luego vamos a transformarla en una probabilidad).

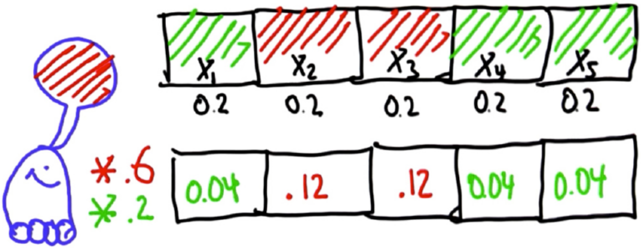
Ejemplo 2: Belief luego de sensar

Si el robot sensa rojo, ¿Cuál es su Posterior belief?



Ejemplo 2: Belief luego de sensar

Si el robot sensa rojo, ¿Cuál es su Posterior belief?



$$P(x_i = rojo|sensa\ rojo) = P(sensa\ rojo|x_i = rojo)P(x_i) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$$

$$P(x_i = verde|sensa\ rojo) = P(sensa\ rojo|x_i = verde)P(x_i) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$$

Ejemplo 2: Belief luego de sensar

$$P(x_i = rojo | sensa\ rojo) = 0{,}12$$

$$P(x_i = verde | sensa\ rojo) = 0{,}04$$

Observar que la función de probabilidad del posterior belief es incorrecta dado que la suma no da 1:

$$\sum_{i=1}^{5} P(x_i) = 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}04 = 0{,}36$$

Vamos a normalizar para que quede una probabilidad bien definida:

$$P(x_i = rojo | sensa\ rojo) = \frac{0{,}12}{0{,}36} = \frac{1}{3}$$

$$P(x_i = verde | sensa\ rojo) = \frac{0{,}04}{0{,}36} = \frac{1}{9}$$

En general, $P(x_i | z)$ es se conoce como Posterior belief del lugar x_i dada la medición z.

Ejemplo 3: Posición inicial

Veamos ahora como cambia el belief cuando el robot se mueve:

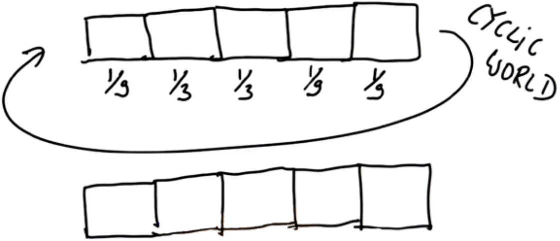
- Supongamos un mundo cíclico constituido por cinco celdas x_i donde $i = 1, \ldots, 5$
- La distribución de probabilidad a priori esta determinada por:

$$P(x_1) = P(x_4) = P(x_5) = \frac{1}{9}$$

$$P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{3}$$

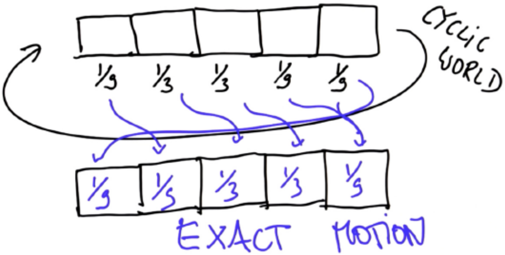
Ejemplo 3: Belief luego del movimiento

Si el robot tiene una motricidad exacta y desea moverse 1 celda a la derecha, ¿Cuál es su Posterior belief?



Ejemplo 3: Belief luego del movimiento

Si el robot tiene una motricidad exacta y desea moverse 1 celda a la derecha, ¿Cuál es su Posterior belief?



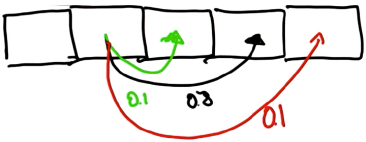
Ejemplo 3: Belief luego del movimiento

Suponiendo ahora que el robot desea moverse 2 celdas a la derecha y tiene una motricidad inexacta con la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(x_{i+1}|x_i) = 0{,}1$$

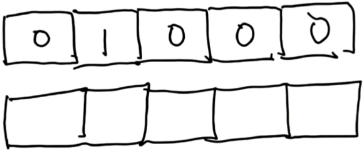
$$P(x_{i+2}|x_i) = 0{,}8$$

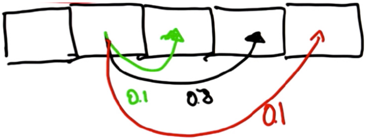
$$P(x_{i+3}|x_i) = 0{,}1$$



Ejemplo: Belief luego del movimiento

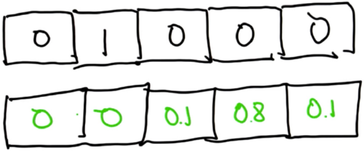
Si el robot conoce exactamente cuál es su posición inicial, ¿Cuál es su posterior belief?

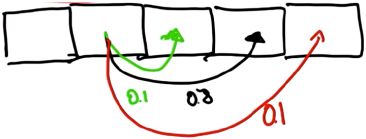




Ejemplo: Belief luego del movimiento

Si el robot conoce exactamente cuál es su posición inicial, ¿Cuál es su posterior belief?



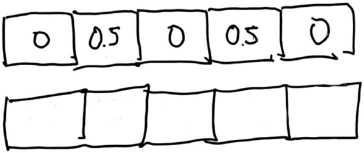


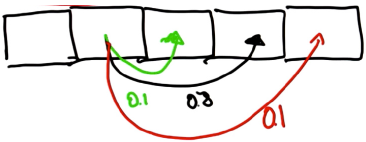
Ejemplo: Belief luego del movimiento

Si el robot tiene como distribución inicial que se encuentra en las celdas x_2 y x_4 con igual probabilidad, formalmente,

$$P(x_2) = P(x_4) = 0{,}5$$

¿Cuál es su Posterior belief?



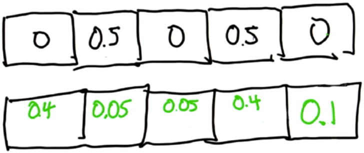


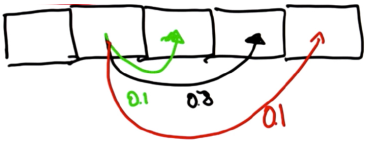
Ejemplo: Belief luego del movimiento

Si el robot tiene como distribución inicial que se encuentra en las celdas x_2 y x_4 con igual probabilidad, formalmente,

$$P(x_2) = P(x_4) = 0{,}5$$

¿Cuál es su Posterior belief?

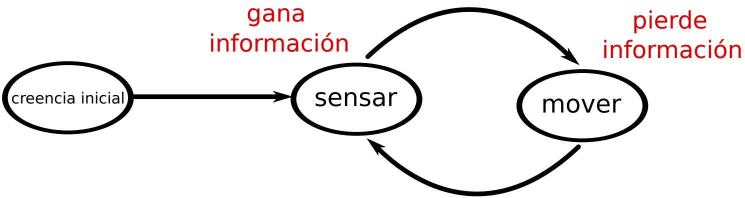




$$
\begin{aligned}
P(x_1) &= P(x_4)P(x_1|x_4) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4 \\
P(x_2) &= P(x_4)P(x_2|x_4) = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05 \\
P(x_3) &= P(x_2)P(x_3|x_2) = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05 \\
P(x_4) &= P(x_2)P(x_4|x_2) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4 \\
P(x_5) &= P(x_2)P(x_5|x_2) + P(x_4)P(x_5|x_4) = 0{,}5 \times +0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}1
\end{aligned}
$$

Ciclo de sensar y mover

Localización no es más que la iteración de dos procesos probabilísticos: sensar el entorno y moverse en el entorno:



Filtro Bayesiano: modelo

Dado un conjunto de obstervaciones y acciones de control del robot para moverse:

$$d_t = \{u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t\}$$

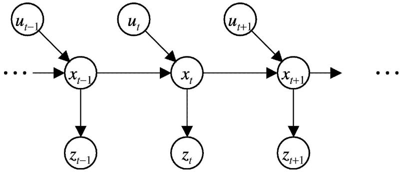
- El modelo de sensado es $p(z_t|x_t)$
- El modelo de movimiento es $p(x_t|u_t, x_{t-1})$
- La probabilidad a priori del estado del sistema es $p(x_t)$

Lo que queremos es estimar el estado de nuestro sistema a posterior de la acción y del sensado, o el posterior belief:

$$bel(x_t) = p(x_t|u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

Filtro Bayesiano: asunción de Markov

Para pasar al próximo estado, basta con conocer el estado anterior y la acción que realiza el robot.



$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$
$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

Filtro Bayesiano: derivación

$$
\begin{aligned}
bel(x_t) &= p(x_t|u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) \\
\text{(por Bayes)} &= \eta p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
\text{(por Markov)} &= \eta p(z_t|x_t) p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
\text{(por Prob. Total)} &= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \\
\text{(por Markov)} &= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \\
&= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \\
&= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}
\end{aligned}
$$

Filtro Bayesiano: algoritmo

El algoritmo de bayes recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

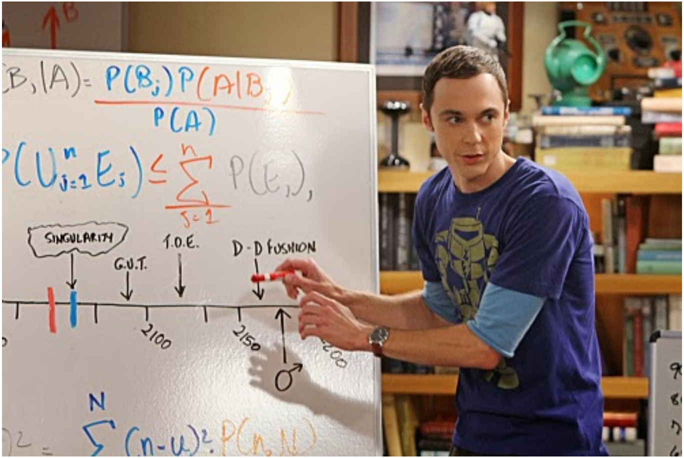
Pseudocódigo del Filtro de Bayes

for x_t **do**
 $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$
 $bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \overline{bel}(x_t)$
end for
return $bel(x_t)$

donde η es el término de normalización y $\overline{bel}(x_t)$ es el prior belief del estado x_t, i.e. la *predicción* del estado x_t antes de la *medición* z_t.

¿Cómo calculamos el integral recorriendo todos los estados?
¿Cuáles son las funciones de densidad de probabilidad?

En la próxima clase...



Más sobre Filtro Bayesiano, Filtro de Kalman y Filtro Extendido de Kalman