Robótica Móvil

Segundo cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Planificación de movimientos - clase 7

Generación y seguimiento de trayectorias a lazo abierto

Definiciones: camino y trayectoria

¿Queremos que un robot siga un camino o una trayectoria?

- **Camino**: lista ordenada de poses (posición + orientación) por las que quiero que pase el robot. Es una descripción puramente geométrica del movimiento. Pero, ¿cómo lo hago? ¿a qué velocidad?
- **Trayectoria**: lista ordenadas de poses por las que quiero que pase el robot a las cuales les agregamos restricciones de tiempo. Por ejemplo, velocidades, aceleraciones para cada instante de tiempo.
- En la práctica muchas veces se usan estos dos términos como sinónimos informalmente, pero no lo son.
- Cada elemento de estas listas se denominan *waypoints*, puntos de paso, o puntos vía.

Definiciones: planificación, generación y seguimiento

Podemos distinguir tres procesos:

- **Planificación de caminos:** (*path planning*) también se suele mal-llamar planificación de trayectorias. Consiste en encontrar un camino que sea factible (lista de poses que el robot pueda alcanzar) y seguro (libre de colisiones) entre un punto inicial (*home*) y un punto final (*goal*).

- **Generación de trayectorias:** a partir del camino incorporar restricciones de tiempo (velocidades, aceleraciones) para cada punto vía del camino.

- **Seguimiento:** conociendo la trayectoria, interpolar o aproximar mediante alguna función (generalmente polinomios) los valores entre dos puntos vía de la trayectoria y calcular los valores a asignar a los actuadores en cada momento para poder seguirla.

Importante: Si bien los caminos son usualmente obtenidos mediante un planificador, que realiza una búsqueda/optimización en tiempo real, en forma iterativa, por ahora generaremos trayectorias en forma más simple y *manualmente*, asumiendo que no hay obstáculos.

Definiciones: holonómico, no-holonómico, redundante

La generación de trayectorias requiere tener en cuenta el modelo cinemático de cada plataforma que determinan los grados de libertad del robot:

- **Holonómico:** los grados de libertad (DoF) *controlables* son iguales a los *totales* (**espacio de configuración**).
  Ejemplo: robot omnidireccional moviéndose en el plano ($v_x, v_y, \omega \leftrightarrow x, y, \theta$)
- **No-holonómico:** menos grados controlables que totales.
  Ejemplo: robot diferencial en el plano ($v, \omega \leftrightarrow x, y, \theta$), entre muchos otros.
- **Redundante:** más grados controlables que totales.
  Ejemplo: brazo humano o manipulador con más de 6 grados de libertad controlables (asumiendo 6 DoF del espacio 3D)

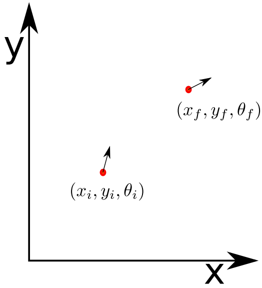
Definiciones: control a lazo abierto y lazo cerrado

Exiten dos formas de controlar el movimiento de un robot:

- **Lazo abierto:** asumo que los actuadores siguen perfectamente las consignas y que la trayectoria sigue perfectamente el movimiento del robot.
- **Lazo cerrado:** observo si el robot está en la pose deseada en cada instante, realimento el error a los controladores de velocidad, aceleración, etc.

Primer caso: vehículo omnidireccional

Queremos ir de una pose (posición + orientación) a otra.



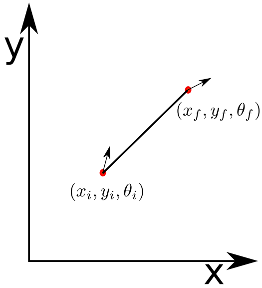
Desde la pose inicial (x_i, y_i, θ_i) queremos ir a la pose final (x_f, y_f, θ_f).

¿Cuál es el camino para hacer esto? ¿Qué velocidades debo asignar en cada momento para hacer esto?

Primer caso: vehículo omnidireccional

Para transformar las velocudades del marco de referencia del robot al marco de referencia inercial, vamos a tener que aplicar sólo una rotación:

$$^{I}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t = {}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)\ {}^{R}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t = {}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)\ (v_x, v_y, \omega)^t$$



Como se trata de un vehículo omnidireccional, tenemos control independiente sobre cada velocidad, podemos tratar cada dimensión por separado, armo un camino rectilíneo. Pero antes de hacer eso...

¿Por qué con una rotación alcanza para transformar velocidades?

¿Por qué basta una rotación para transformar velocidades?

1. Posición: requiere rotación y traslación

Un punto P tiene coordenadas que puedo referenciar respecto de un marco global (marco inercial) o del marco del robot. Para traducir su pose de un marco a otro, se necesita una **rotación** y una **traslación**:

$$^{I}\boldsymbol{p} = {}^{I}\boldsymbol{R}_{R}\,{}^{R}\boldsymbol{p} + {}^{I}\boldsymbol{t}_{R}.$$

La traslación ${}^{I}\boldsymbol{t}_{R}$ indica dónde está el origen del marco R respecto del inercial I.

2. Velocidad: es un vector libre

Una velocidad describe una **dirección y magnitud**, no una posición en el espacio. Los vectores libres no dependen del origen, solo de la orientación del marco:

$$^{I}\dot{\boldsymbol{p}} = {}^{I}\boldsymbol{R}_{R}\,{}^{R}\dot{\boldsymbol{p}}.$$

Por eso, las velocidades sólo requieren rotación, **no traslación**.

3. Intuición geométrica

El vector de velocidad no tiene “lugar” en el espacio; simplemente se **rota** según la orientación del marco del robot.

$$^{R}\dot{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{I}\dot{\boldsymbol{p}} = {}^{I}\boldsymbol{R}_{R}(\theta)\,{}^{R}\dot{\boldsymbol{p}}.$$

La traslación no cambia la dirección ni la magnitud del vector, por eso no interviene al transformar velocidades.

Primer caso: vehículo omnidireccional

${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ es una matriz de rotación que transforma un vector de velocidades expresado en el marco del robot R al marco inercial I:

$$ {}^{I}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^t = {}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta) \; {}^{R}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^t = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{{}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)} {}^{R}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}^t . $$

Sabemos que en el marco del robot:

$$ \begin{cases} {}^{R}\dot{x} = v_x, \\ {}^{R}\dot{y} = v_y, \\ {}^{R}\dot{\theta} = \omega. \end{cases} $$

Por lo tanto, en el marco inercial:

$$ \begin{cases} {}^{I}\dot{x} = v_x \cos\theta - v_y \sin\theta, \\ {}^{I}\dot{y} = v_x \sin\theta + v_y \cos\theta, \\ {}^{I}\dot{\theta} = \omega. \end{cases} $$

La matriz ${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ resulta cuadrada (3×3). Al ser holonómico, el robot puede controlar de forma independiente sus velocidades lineales (v_x, v_y) y su velocidad angular ω.

Interpretación geométrica

- El robot mide sus velocidades en su propio marco R: ${}^{R}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t = (v_x, v_y, \omega)^t$.
- El entorno o mapa se describe en el marco inercial I: ${}^{I}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t$.
- La matriz ${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ rota el vector de velocidades desde el marco del robot hacia el marco del mundo.
- Si el robot se orienta un ángulo θ respecto del marco inercial, avanzar en su eje x_R implica moverse en una dirección rotada θ respecto al eje x_I.
- El vector de velocidad no tiene "lugar" en el espacio, por eso para traducir las velocidades de un marco a otro sólo aplicamos una matriz de rotación.

Ejemplo numérico: robot omnidireccional

Supongamos que el robot tiene velocidades medidas en su marco local:

$$^{R}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = (v_x, v_y, \omega) = (1 \text{ m/s},\ 0,\ 0{,}1 \text{ rad/s})$$

y una orientación respecto al mundo de $\theta = 90^\circ$. Entonces, transformando las velocidades al marco inercial tenemos que:

$$^{I}\boldsymbol{R}_R(90^\circ) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ^{I}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = {}^{I}\boldsymbol{R}_R(90^\circ) \; ^{R}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

- → El robot avanza a lo largo de su eje x_R, pero en el mundo se desplaza sobre el eje y_I.
- → La orientación θ determina la proyección de las velocidades lineales sobre los ejes globales.
- → La velocidad angular $\dot{\theta}$ (ω en el marco del robot) es la misma en ambos marcos.

Primer caso: vehículo omnidireccional - Interpolación

- Volvamos a nuestro primer problema, tenemos que ir desde una pose a otra con un robot omnidireccional (podemos tratar cada dimensión por separado), entonces armamos un camino rectilíneo.

- Si asumimos aceleraciones constantes, se puede obtener la velocidad en el tiempo t_j con $t_i \leq t_j \leq t_f$ mediante interpolación lineal:

$$\dot{x}_j = \dot{x}_i + \frac{t_j - t_i}{t_f - t_i}(\dot{x}_f - \dot{x}_i)$$

y lo mismo para $\dot{y}$ y $\dot{\theta}$,

$$\dot{y}_j = \dot{y}_i + \frac{t_j - t_i}{t_f - t_i}(\dot{y}_f - \dot{y}_i), \qquad \dot{\theta}_j = \dot{\theta}_i + \frac{t_j - t_i}{t_f - t_i}(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i)$$

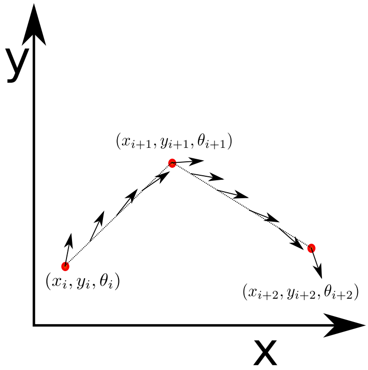
Por lo tanto, quedan definidas las velocidades del robot:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad \omega = \dot{\theta}.$$

Nota: Aca aparece el tiempo en el que recorro el camino: obtengo una *trayectoria*.

Primer caso: vehículo omnidireccional - Interpolación

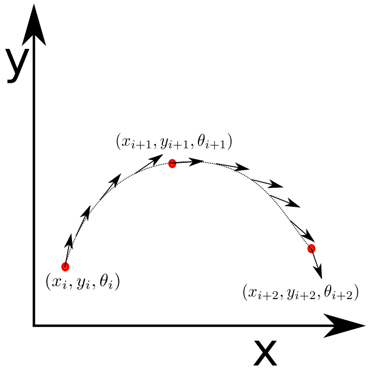
Este enfoque simple se puede extender a un camino arbitrario: aplicamos el método anterior para cada par de puntos dentro del camino.



En cada segmento tengo v_x, v_y, ω constantes.
Pregunta: ¿qué pasa en las uniones?

Primer caso: vehículo omnidireccional - Splines

Quiero una trayectoria suave para que los comandos a los actuadores varíen suavemente y no se asuma una respuesta infinitamente rápida de los mismos (cambios instantáneos de velocidad).



Por ejemplo, podríamos construir un *spline* que una un x_i, y_i, θ_i con $x_{i+1}, y_{i+1}, \theta_{i+1}$. Dado que conozco la derivada del spline, obtengo también $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ sobre cada punto de la trayectoria.

Primer caso: vehículo omnidireccional - Splines

Para generar una trayectoria suave con *splines* es necesario incorporar al menos 4 restricciones:

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f, \quad \dot{x}(t_i) = \dot{x}_i, \quad \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$$

Entonces planteamos que $x(t)$ es un polinomio cúbico de la forma:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

De esta forma, podemos despejar los parámetros a_i:

$$a_0 = x_i$$

$$a_1 = \dot{x}_i$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(x_f - x_i) - \frac{2}{t_f}\dot{x}_i - \frac{1}{t_f}\dot{x}_f$$

$$a_3 = \frac{-2}{t_f^3}(x_f - x_i) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{x}_f - \dot{x}_i)$$

Haciendo esto mismo para $y(t)$ y $\theta(t)$ obtenemos una trayectoria y consignas de velocidad suaves.

Segundo caso: vehículo diferencial - Splines

Hasta ahora asumimos un vehículo holonómico (robot omnidireccional en el plano). Con un vehículo diferencial (por ser no-holonómico) el problema es más complejo:

- → La matriz que me relaciona las velocidades en el sistema inercial con las velocidades del robot no es cuadrada, no puedo resolver el sistema directamente.
- → No puedo tratar cada dimensión por separado: incluso con $\omega = 0$, mi nueva posición no solo depende de v sino de θ.

$$^{I}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t = {}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)\ {}^{R}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^t = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^{R}(v, \omega)^t$$

¿De dónde sale esta $^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ para el caso diferencial?

Segundo caso: vehículo diferencial - Splines

${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ es una matriz de rotación que transforma un vector de velocidades expresado en el marco del robot R al marco inercial I:

Sabemos que en el marco del robot diferencial vale que:

$$\begin{cases} \dot{x}_R = v \\ \dot{y}_R = 0 \quad \text{(restricción no-holonómica)} \\ \dot{\theta}_R = \omega \end{cases}$$

Entonces, la velocidad lineal proyectada en el marco inercial va a ser:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos(\theta) \\ v\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

y la velocidad angular no cambia de un marco a otro, entonces: $\dot{\theta}_R = \omega$ Si combinamos todo en una sola ecuación matricial, tenemos:

$${}^{I}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^{t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{{}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v\cos(\theta) \\ \dot{y} = v\sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

La primera columna de ${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ proyecta la velocidad v sobre los ejes globales, la segunda aplica la velocidad angular ω. Notar que ${}^{I}\boldsymbol{R}_R(\theta)$ es una matriz de 3×2.

Segundo caso: vehículo diferencial (coordenada x)

Para generar una trayectoria suave con *splines* en un vehículo diferencial, se mantiene la forma cúbica pero cambian las condiciones de borde:

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f, \quad \dot{x}(t_i) = v_i \cos(\theta_i), \quad \dot{x}(t_f) = v_f \cos(\theta_f).$$

Entonces planteamos que $x(t)$ es un polinomio cúbico:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \qquad \dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2.$$

De esta forma, se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_i, \\
a_1 &= v_i \cos(\theta_i), \\
a_2 &= 3(x_f - x_i) - 2v_i \cos(\theta_i) - v_f \cos(\theta_f), \\
a_3 &= -2(x_f - x_i) + v_i \cos(\theta_i) + v_f \cos(\theta_f).
\end{aligned}$$

Interpretación: Los parámetros v_i, v_f pueden verse como *factores de curvatura*: valores más grades implican trayectorias más rectas, valores pequeños implican curvas más cerradas.

Segundo caso: vehículo diferencial (coordenada y)

De manera equivalente, en la coordenada y se mantiene la forma cúbica pero cambian las condiciones de borde:

$$y(t_i) = y_i, \quad y(t_f) = y_f, \quad \dot{y}(t_i) = v_i \sin(\theta_i), \quad \dot{y}(t_f) = v_f \sin(\theta_f).$$

Entonces planteamos que $y(t)$ es un polinomio cúbico:

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \qquad \dot{y}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2.$$

De esta forma, se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned}
b_0 &= y_i, \\
b_1 &= v_i \sin\theta_i, \\
b_2 &= 3(y_f - y_i) - 2v_i \sin(\theta_i) - v_f \sin(\theta_f), \\
b_3 &= -2(y_f - y_i) + v_i \sin(\theta_i) + v_f \sin(\theta_f).
\end{aligned}$$

Interpretación: Al igual que en la coordenada $x(t)$, los parámetros v_i y v_f definen la inclinación inicial y final de la trayectoria. La dependencia con $\sin(\theta)$ refleja que el movimiento en y depende del mismo módulo de velocidad v, pero proyectado sobre el eje y en el marco inercial.

Tercer caso: vehículo diferencial - Trayectoria paramétrica

También podemos considerar un caso más simple agregando restricciones sobre la trayectoria:

Asumamos que el camino a seguir cumple que:

$$y = f(x)$$

y, a su vez, que

$$x = g(t)$$

Con esta restricción, queda que:

$$\dot{x}(t) = \frac{\delta g(t)}{\delta t} = g'(t), \qquad \dot{y}(t) = \frac{\delta f(g(t))}{\delta t} = f'(g(t))g'(t)$$

Por ejemplo para el taller van a considerar $f(x) = sin(x)$ y $g(t) = 2\pi t$, entonces $x(t) = 2\pi t$, $y(t) = sin(2\pi t)$, $\dot{x}(t) = 2\pi$, $\dot{y}(t) = cos(2\pi t)2\pi$.

Esto da un movimiento senoidal en el plano: el robot avanza con velocidad constante en x mientras oscila en y.

Tercer caso: vehículo diferencial - Trayectoria paramétrica

Entonces, conociendo $\dot{x}(t) = g'(t), \dot{y}(t) = f'(g(t))g'(t)$ y sabiendo que:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos(\theta) \\ \dot{y} = v\sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

puedo despejar v como: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2\cos(\theta)^2 + v^2\sin(\theta)^2 = v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = v^2$.

Por lo tanto:

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

Al mismo tiempo puedo despejar ω a partir de :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v\sin(\theta)}{v\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

$$\theta = \text{atan}(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}) = \text{atan2}(\dot{y}, \dot{x})$$

por ende:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{\delta \text{atan2}(\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\delta t} = g'(t)\,\frac{f''(g(t))}{1 + \big(f'(g(t))\big)^2}$$

O sea, que podemos encontrar las velocidades para el robot para cada instante de tiempo a partir de las funciones f y g.

Tercer caso: vehículo diferencial - Trayectoria paramétrica

Dadas las funciones del taller:

$$f(x) = \sin(x), \qquad g(t) = 2\pi t,$$

obtenemos:

$$\dot{x}(t) = g'(t) = 2\pi, \qquad \dot{y}(t) = f'(g(t))\, g'(t) = \cos(2\pi t)2\pi.$$

Entonces la velocidad lineal viene dada por:

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi\cos(2\pi t))^2} = 2\pi\sqrt{1 + \cos^2(2\pi t)}.$$

Y la velocidad angular viene dada por:

$$\omega(t) = g'(t)\, \frac{f''(g(t))}{1 + \big(f'(g(t))\big)^2} = 2\pi\, \frac{-\sin(2\pi t)}{1 + \cos^2(2\pi t)} = -\, \frac{2\pi\ \sin(2\pi t)}{1 + \cos^2(2\pi t)}.$$

Desde el marco de referencia del robot, el robot avanza con velocidad lineal variable $v(t)$ y con velocidad angular $\omega(t)$, siguiendo una trayectoria senoidal.

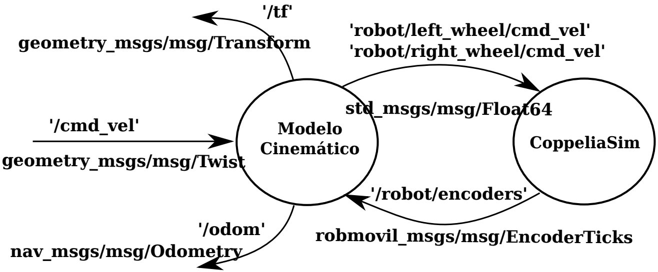
Tercer caso: vehículo diferencial - Trayectoria paramétrica

En resumen:

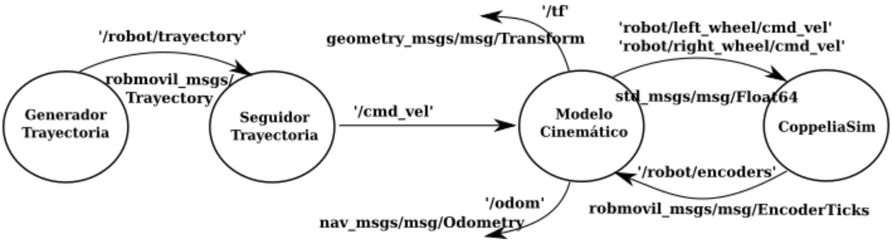
- Teniendo una relación conocida entre x e y y entre x y t, el problema se hace más fácil.
- La forma del camino en función del tiempo viene dado por f y g
- Las derivadas respecto del tiempo son conocidas.
- Las velocidades v, ω quedan determinadas por el modelo cinemático y las derivadas anteriores.
- Para todo esto necesito que f y g sean derivables.

Importante: en el caso general no se tiene una función conocida sino que tengo directamente una trayectoria obtenida por el planificador. Esta trayectoria deberá ser generada de otra forma, muestreando directamente en el espacio de actuación (velocidades) del robot y buscando una trayectoria que se acerque al camino deseado. Lo vamos a ver más adelante en la materia cuando estudiemos **path planning**.

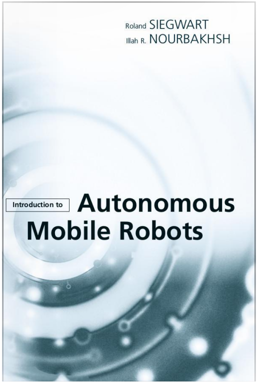
Para el Taller, ¿de dónde venimos?



Para el Taller, ¿qué tenemos que hacer?



Más sobre seguimiento de trayectorias



"Introduction to autonomous mobile robots", Siegwart, Roland, Illah Reza Nourbakhsh, Davide Scaramuzza. MIT press, 2011. **Capítulo 3**