Guia 6 Complejidad Computacional 1 Cuatrimestre 2025

Juan DElia

Ejercicio 2 Probar que si $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ para algun $k \in \mathbb{N}$, entonces PH $= \Sigma_k^p$

Recordar que PH es la union de todo Σ_k^p

Probar esto es probar que toda la jerarquia colapsa en ese k. Porque $\Sigma_{i \leq k} \subseteq \Sigma_k$, como todos los mas chicos ya sabemos que estan en Σ_k basta con ver que los mas grande tambien.

Veamos por induccion que $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+n}^p$

CB, n=0

$\Sigma_k^p = \Sigma_k^p$

Trivial, vale.

Paso inductivo

HI: $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+n}^p$

Quiero ver que: $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+n+1}^p$

Reemplazando la izquierda del igual por la *HI* es lo mismo que ver:

$\Sigma_{k+n}^p = \Sigma_{k+n+1}^p$

Ya sabemos que vale $\Sigma_{k+n}^p \subseteq \Sigma_{k+n+1}^p$

Veamos la otra contencion, tomo L $\in \Sigma_{k+n+1}^p$:

$$x \in L \iff \exists y_1 \forall y_2 ... Q_{k+n+1} y_{k+n+1} P(y_1, y_2, ..., y_{k+n+1})$$

El ultimo cuantificador dependiendo de la paridad de los literales puede ser un $\exists$ o un $\forall$. Vimos en la teorica que cuando tenemos bloques de cuantificadores repetidos se pueden juntar en un unico cuantificador manteniendo asi la alternancia.

Si el cuantificador anterior al ultimo Q es el mismo que este Q los puedo juntar en uno mismo, asi manteniendo la alternancia y teniendo una variable cuantificada menos.

El otro caso seria que el cuantificador anterior sea distinto al ultimo, a priori no podriamos juntarlos. Pero por la hipotesis del enunciado $\Sigma = \Pi$ para algun k (ademas aca por HI tenemos que $\Sigma_{k+n} = \Sigma_k$). Entonces podemos invertir el orden de los cuantificadores y usar la misma idea, junto los del final.

Por lo tanto en cualquier caso puedo reescribir:

$$x \in L \iff Q_1 y_1 Q_2 y_2 ... Q_{k+n} y'_{k+n} P(y_1, ..., y'_{k+n})$$

Con esto puedo concluir que para cierto k, $\Sigma_k^p = \Sigma_{k+n}^p$

Y por lo que explique al principio PH = Σ_k^p

Ejercicio 3 Probar que si SAT $\leq_P$ ¬ SAT entonces PH = NP

Por hipotesis puedo decir que $NP \subseteq coNP$, pues cualquier problema de NP seria menor o igual de dificil que uno de coNP.

Ademas la reduccion lo que me dice es $\phi \in SAT \iff f(\phi) \in \neg SAT$

Que es lo mismo (por como es SAT) que $\neg\phi \in \neg SAT \iff \neg f(\phi) \in SAT$

Es decir:

$$\neg SAT \leq_p SAT$$

Que al igual que antes implica que (not SAT es coNP completo) $coNP \subseteq NP$

Por lo tanto coNP = NP

Con esto en mente recordemos del ejercicio anterior que:

Si para algun k $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ entonces PH = Σ_k^p

Tomando k=1:

$$\Sigma_1^p = NP = coNP = \Pi_1^p \Rightarrow PH = NP$$