

# Robótica Móvil

Segundo cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Robótica Probabilística - clase 11

Filtro de Kalman y Filtro Extendido de Kalman

## Repaso: Regla de Bayes

Cuando el robot sensa no hace otra cosa que aplicar el teorema de Bayes:

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)}$$

$P(x|z)$  : probabilidad a Posteriori (Posterior Belief) dado que sensé  $z$

$P(z|x)$  : verosimilitud de medición dado (o suponiendo) que estoy en  $x$

$P(x)$  : probabilidad a Priori de estar en  $x$

$P(z)$  : probabilidad de sensar  $z$  independientemente de donde esté.

Para hallar  $P(z)$  usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(z) = \sum_{x_i} P(z|x)P(x)$$

Entonces podemos reescribir la regla de Bayes como:

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)} = \eta P(z|x)P(x)$$

$$\text{donde } \eta = P(z)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(z|x)P(x)}$$

**Nota:**  $\eta$  es el término de normalización que usamos para que el posterior belief sea una probabilidad bien definida (esté entre 0 y 1).

# Repaso: Filtro Bayesiano

Dado un conjunto de observaciones y acciones de control del robot para moverse:

$$d_t = \{u_1, z_1, \dots, u_t, z_t\}$$

- El modelo de sensado es  $p(z_t|x_t)$
- El modelo de movimiento es  $p(x_t|u_t, x_{t-1})$
- La probabilidad a priori del estado del sistema es  $p(x_t)$

Lo que queremos es estimar el estado de nuestro sistema a posterior de la acción y del sensado, o el posterior belief

$$bel(x_t) = p(x_t|u_1, z_1 \dots, u_t, z_t)$$

## Repaso: Filtro Bayesiano

$$bel(x_t) = p(x_t | u_1, z_1 \dots, u_t, z_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

$$\text{(por Bayes)} = \eta p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$\text{(por Markov)} = \eta p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$\text{(por Prob. Total)} = \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}, x_{t-1}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}$$

$$\text{(por Markov)} = \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}$$

$$\begin{aligned} \text{(por Markov)} &= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \\ &= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1} \end{aligned}$$

## Repaso: Filtro Bayesiano

El algoritmo de Bayes recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

---

Algoritmo del Filtro de Bayes( $bel(x_{t-1}), u_t, z_t$ )

---

- 1: **for**  $x_t$  **do**
  - 2:    $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$
  - 3:    $bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \overline{bel}(x_t)$
  - 4: **end for**
  - 5: **return**  $bel(x_t)$
- 

donde  $\eta$  es el término de normalización y  $\overline{bel}(x_t)$  es el prior belief del estado  $x_t$ , i.e. la *predicción* del estado  $x_t$  antes de la *medición*  $z_t$ .

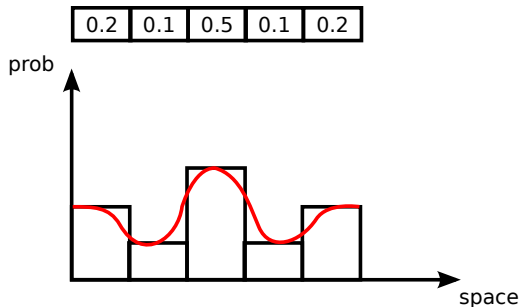
- ¿Cómo calculamos el integral recorriendo todos los estados?
- ¿Cuáles son las funciones de densidad de probabilidad?

# Estimadores Probabilísticos

- Queremos representar el estado del robot como una estimación probabilística.
- El Filtro de Kalman propone representar las funciones de densidad de probabilidad con una función Gaussiana
- Hay otras alternativas, por ejemplo podríamos dividir el mundo en una grilla de celdas, y a cada celda se le asigna una probabilidad contruyendo un Histograma (método de Monte Carlo).

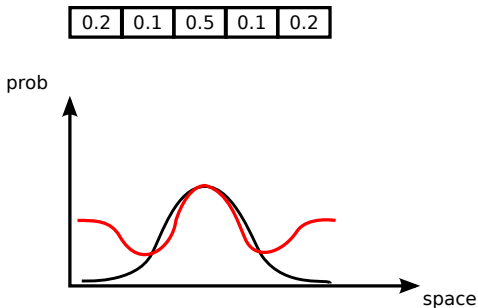
# Método de Monte Carlo

Con un histograma podemos aproximación (de manera discreta) la función de densidad continua que queremos modelar.



## Filtro de Kalman: idea

El Filtro de Kalman propone usar una función Gaussiana como función de densidad para estimar la función de densidad real.





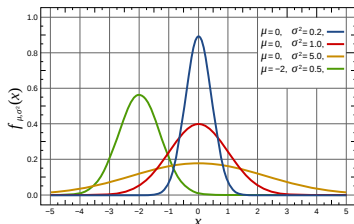
# Filtro de Kalman: distribución gaussiana

$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$



Recordemos que:

- $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  es la forma de representar una distribución normal, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- La varianza  $\sigma^2$  es una medida de dispersión de una variable aleatoria  $X$  definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media  $\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2]$
- $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i)$  para el caso discreto y  $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$  para el continuo.

- La covarianza  $\Sigma_{X_1 \dots X_n} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \dots & \sigma_{X_1} \sigma_{X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n} \sigma_{X_1} & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{pmatrix}$

# Filtro de Kalman: transformación lineal

Las transformaciones lineales preservan la distribución normal.

1) En el caso de variables aleatorias de una dimensión:

$$\left. \begin{array}{l} x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ y = ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

2) En el caso de variables aleatorias de varias dimensiones:

$$\left. \begin{array}{l} x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \\ y = Ax + B \end{array} \right\} \Rightarrow y \sim \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^\top)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1) \\ x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2) \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \Sigma_1 + \Sigma_2)$$

## Filtro de Kalman: fusión de fuentes de información

En la actualización bayesiana del Filtro de Kalman, se combinan dos fuentes de información sobre el estado: la distribución previa  $p(x)$  y la verosimilitud  $p(z | x)$ . El producto de ambas (hasta una constante de normalización) da lugar a otra distribución normal:

$$p(x | z) \propto p(z | x) p(x)$$

1) Caso unidimensional (con modelo lineal  $z = ax + v$  y  $v \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$ ):

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = \mathcal{N}(x; \mu_x, \sigma_x^2) \\ p(z | x) = \mathcal{N}(z; ax, \sigma_z^2) \end{array} \right\} \Rightarrow p(x | z) \propto \mathcal{N}\left(x; \frac{az\sigma_x^2 + \mu_x\sigma_z^2}{a^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2}, \left(\frac{a^2}{\sigma_z^2} + \frac{1}{\sigma_x^2}\right)^{-1}\right)$$

2) En el caso multivariado (nuevamente lineal  $z = Hx + v$ ,  $v \sim \mathcal{N}(0, R)$ ):

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = \mathcal{N}(x; \mu_x, \Sigma_x) \\ p(z | x) = \mathcal{N}(z; Hx, \sigma_z^2) \end{array} \right\} \Rightarrow p(x | z) \propto \mathcal{N}(x; \mu_{x|z}, \Sigma_{x|z})$$

$$\text{con } \Sigma_{x|z} = (\Sigma_x^{-1} + H^\top R^{-1} H)^{-1} \quad \text{y} \quad \mu_{x|z} = \Sigma_{x|z} (\Sigma_x^{-1} \mu_x + H^\top R^{-1} z)$$

**Notación:**  $\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$  representa una función de densidad de la variable aleatoria  $x$ , con distribución normal, media  $\mu$  y covarianza  $\Sigma$ .

# Filtro de Kalman: hipótesis

- Asunción de Markov (ya la tenemos por ser un filtro Bayesiano)
- Asunción sobre la transición: la probabilidad de transición de estado (predicción o modelo de movimiento)  $p(x_t|u_t, x_{t-1})$  es lineal en sus parámetros con un ruido gaussiano agregado:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t$$

donde  $A_t$  es una matriz de  $n \times n$  donde  $n$  es la dimensión del vector de estado  $x_t$  y  $B_t$  una matriz de  $n \times m$  donde  $m$  es la dimensión del vector de control  $u_t$ .

$$p(x_t|u_t, x_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|Q_t|}} e^{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^\top Q_t^{-1} (x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)}$$

donde  $w_t$  es un vector variables aleatorias (de la misma dimensión que el vector de estado  $x_t$ ) que modela la incertidumbre del movimiento cuya media es 0 y  $Q_t$  es su matriz de covarianza.

# Filtro de Kalman: hipótesis

- Asunción sobre el sensado: el modelo de sensado  $p(z_t|x_t)$  también es lineal en sus parámetros con un ruido gaussiano agregado:

$$z_t = H_t x_t + v_t$$

donde  $H_t$  es una matriz de  $k \times n$  donde  $k$  es la dimensión del vector de mediciones  $z_t$

$$p(z_t|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|R_t|}} e^{-\frac{1}{2}(z_t - H_t x_t)^\top R_t^{-1}(z_t - H_t x_t)}$$

donde  $v_t$  es un vector variables aleatorias (de la misma dimensión que el vector de mediciones  $z_t$ ) que modela la incertidumbre producto del ruido de las mediciones, cuya media es cero y  $R_t$  es su matriz de covarianza.

- La información *a priori* del estado (el prior belief) debe tener una distribución normal.

# Filtro de Kalman: modelo

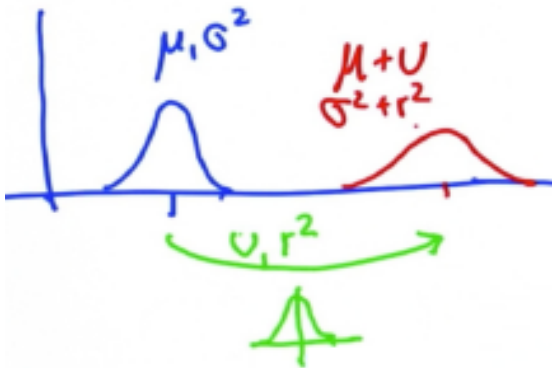
A partir de las hipótesis podemos proponer el modelo del Filtro de Kalman como un caso particular de Filtro Bayesiano donde:

$$\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t | u_t, x_{t-1})}_{\sim \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t)} \underbrace{bel(x_{t-1})}_{\sim \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})} dx_{t-1}$$

$$bel(x_t) = \eta \underbrace{p(z_t | x_t)}_{\sim \mathcal{N}(z_t; H_t x_t, R_t)} \underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{\sim \mathcal{N}(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t)}$$

**Notación:**  $\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$  representa una función de densidad de la variable aleatoria  $x$ , con distribución normal, media  $\mu$  y covarianza  $\Sigma$ .

## Ejemplo: predicción luego del movimiento

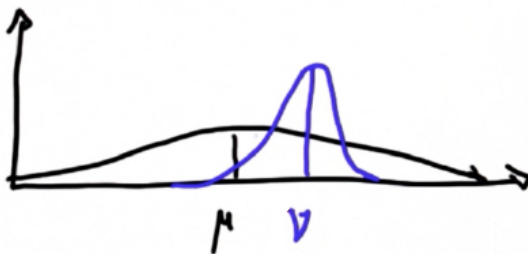


Analíticamente la actualización de los parámetros luego de un movimiento se realiza de la siguiente manera:

$$\mu' = \mu + \nu \quad \sigma'^2 = \sigma^2 + r^2$$

## Ejemplo: actualización luego de la medición

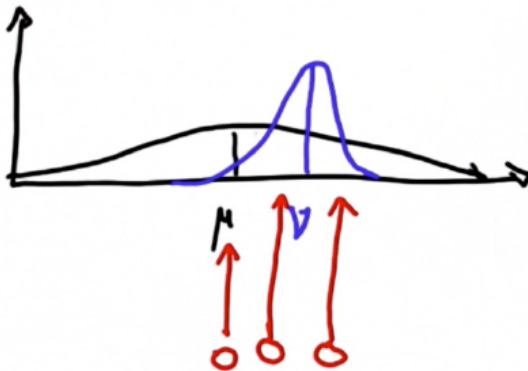
- Pensemos primero un mundo de una sólo dimensión y un robot que se mueve en esa dimensión.
- El vehículo robótico tiene una distribución de probabilidad a priori, en **negro**, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- Realiza una medición obteniendo información de su localización, en **azul**, con media  $\nu$  y varianza  $r^2$ .





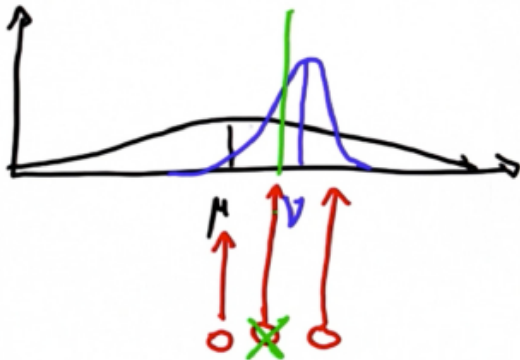
## Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Dónde se va a encontrar la media de la nueva gaussiana?



## Ejemplo: actualización luego de la medición

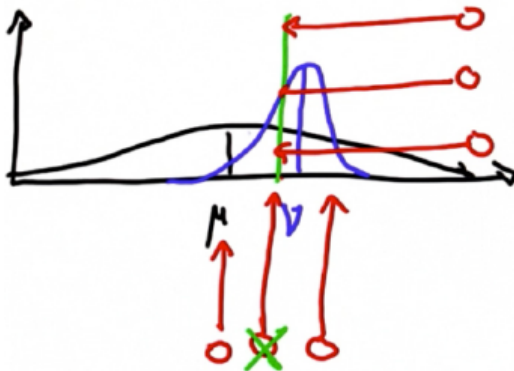
¿Dónde se va a encontrar la media de la nueva gaussiana?



La nueva media se va a ubicar entre las medias  $\mu$  y  $\nu$ . Específicamente, se encontrará más cerca de  $\nu$  ya que la medición es más precisa, acerca de donde está el vehículo, que la distribución a priori.

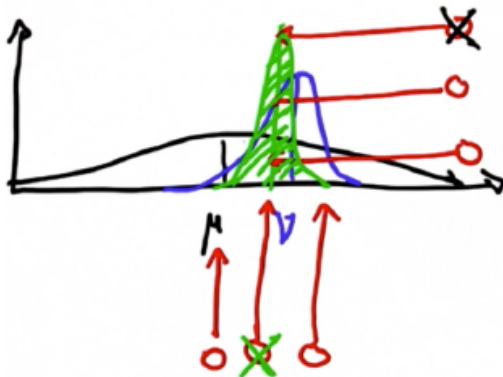
### Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué altura va a tener la nueva gaussiana?



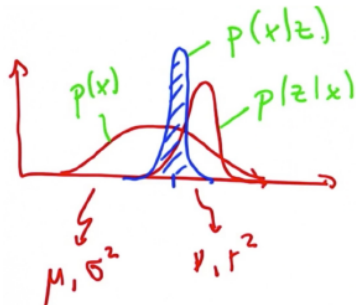
## Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué altura va a tener la nueva gaussiana?



La gaussiana resultante es más “alta” que las dos gaussianas. Esto es, la nueva varianza es menor que las varianzas por separado. Intuitivamente, se gana información teniendo en cuenta el conocimiento previo y la medición.

## Ejemplo: actualización luego de la medición



Analíticamente la actualización de los parámetros luego de una medición se realiza de la siguiente manera:

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{\sigma^2 + r^2} \quad \sigma' = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{r^2}}$$

## Ejemplo: actualización luego de la medición

Supongamos que la probabilidad a priori y la medición están muy apartadas una de la otra, y ambas tienen la misma varianza. ¿Dónde se encontrará la nueva gaussiana?



## Ejemplo: actualización luego de la medición

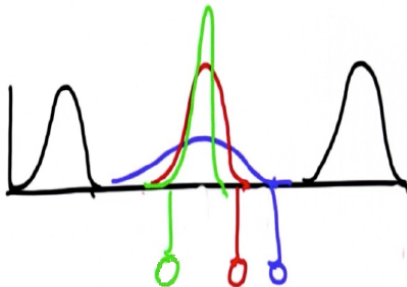
Supongamos que la probabilidad a priori y la medición están muy apartadas una de la otra, y ambas tienen la misma varianza. ¿Dónde se encontrará la nueva gaussiana?



La nueva media está en el medio ya que las varianzas son iguales.

## Ejemplo: actualización luego de la medición

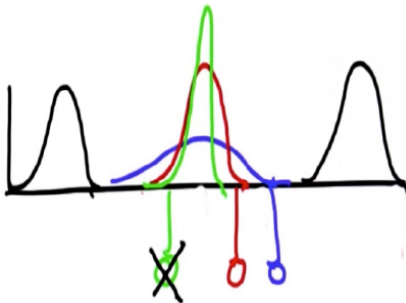
¿Qué forma tendría la gaussiana?





## Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué forma tendría la gaussiana?



La nueva gaussiana sería la de color **verde**, dado que su varianza se obtiene independientemente de las medias. Esto parece anti-intuitivo pero como tenemos dos fuentes de información esperamos que nuestro conocimiento sea mayor.

# Filtro de Kalman: predicción (del modelo al algoritmo)

Predicción = marginalización gaussiana (eliminamos  $x_{t-1}$ )

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

## Modelo lineal-gaussiano

$$p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t), \quad bel(x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$$

## Transformación lineal + ruido gaussiano

Si  $x_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$  y  $x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t$ , con  $w_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ , entonces:

$$x_t \sim \mathcal{N}(A_t \mu_{t-1} + B_t u_t, A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t)$$

## Resultado de la etapa de predicción

$$\overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t, \quad \overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t$$

**Idea:** la marginalización de dos gaussianas (transición y creencia anterior) produce una nueva gaussiana  $\rightarrow$  el “prior” del estado actual.

# Filtro de Kalman: Actualización

## Actualización mediante producto de gaussianas

$$bel(x_t) \propto p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

## Modelo lineal-gaussiano de observación

$$p(z_t | x_t) = \mathcal{N}(z_t; H_t x_t, R_t), \quad \overline{bel}(x_t) = \mathcal{N}(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t)$$

## Producto de dos gaussianas sobre la misma variable

$$p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t) \propto \mathcal{N}(x_t; \mu_t, \Sigma_t)$$

donde

$$\Sigma_t^{-1} = \overline{\Sigma}_t^{-1} + H_t^\top R_t^{-1} H_t, \quad \mu_t = \Sigma_t (\overline{\Sigma}_t^{-1} \overline{\mu}_t + H_t^\top R_t^{-1} z_t)$$

## Forma equivalente (usando la ganancia de Kalman)

$$K_t = \overline{\Sigma}_t H_t^\top (H_t \overline{\Sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1}$$
$$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \overline{\mu}_t), \quad \Sigma_t = (I - K_t H_t) \overline{\Sigma}_t$$

**Idea:** el producto de la verosimilitud y el prior (ambos gaussianos) da un posterior gaussiano;

# Filtro de Kalman (KF)

**Modelos** de actuación (proceso) y sensedado (actualización):

$$\begin{aligned}x_t &= A_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t, & w_t &\sim \mathcal{N}(0, Q_t), & x_{t-1} &\sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) \\z_t &= H_t x_t + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, R_t)\end{aligned}$$

**Predicción:**

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_t &= A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \bar{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t\end{aligned}$$

**Actualización:**

$$\begin{aligned}K_t &= \bar{\Sigma}_t H_t^\top (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1} \\ \mu_t &= \bar{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t &= (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t\end{aligned}$$

# Filtro de Kalman: Algoritmo

El algoritmo del Filtro de Kalman recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

---

Algoritmo del Filtro de Kalman( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ )

---

- 1:  $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
  - 2:  $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t$
  - 3:  $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^\top (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1}$
  - 4:  $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \bar{\mu}_t)$
  - 5:  $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$
  - 6: **return**  $\mu_t, \Sigma_t$
- 

¿Qué función cumple  $K_t$ ? (ganancia de Kalman)

¿Qué pasa si  $\lim_{R_t \rightarrow 0} K_t = H_t^\top$ ?

¿Qué pasa si  $\lim_{\bar{\Sigma}_t \rightarrow 0} K_t = 0$ ?

¿Por qué la propagación de la media es  $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$ ?

¿Por qué la propagación de la covarianza es  $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t$ ?

# Filtro de Kalman: Propagación de la media e incertidumbre

## Modelo lineal con una sola variable

Si  $y = ax + b$  y  $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$  entonces:

$$y \sim \mathcal{N}(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$$

**Interpretación:** El factor  $a$  amplifica o atenúa la varianza de  $x$ .

## Modelo lineal multivariado

Si  $y = Ax + B$  y  $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$  entonces:

$$y \sim \mathcal{N}(A\mu_x + B, A\Sigma_x A^\top)$$

**Interpretación:** La matriz  $A$  transforma linealmente tanto la media como la forma de la incertidumbre (elipse). La nueva covarianza  $A\Sigma_x A^\top$  representa cómo se transforma la distribución original.

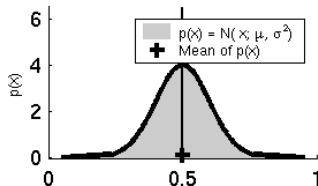
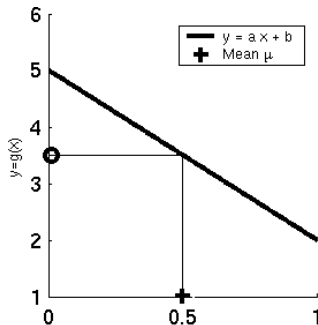
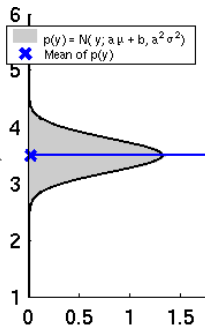
## Modelo lineal multivariado con control y ruido

Si  $x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t$  con  $x_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$  y  $w \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$  entonces:

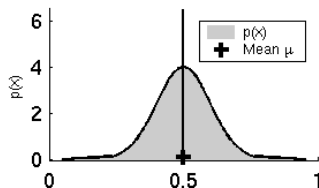
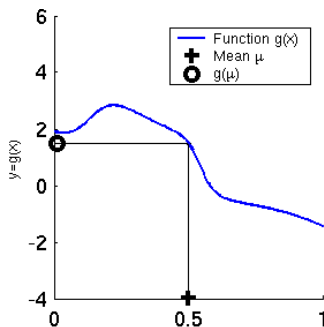
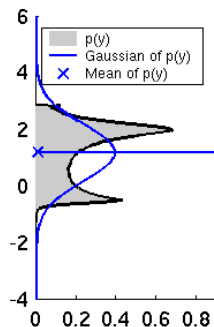
$$x_t \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{A_t \mu_{t-1} + B_t u_t}_{\bar{\mu}_t}, \underbrace{A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t}_{\bar{\Sigma}_t}\right).$$

**Interpretación:** La matriz  $A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top$  propaga la incertidumbre del estado anterior a través de la dinámica,  $Q_t$  agrega la incertidumbre nueva introducida por el ruido del proceso (errores en el modelo y/o el control) y  $B_t u_t$  no genera incertidumbre, porque  $u_t$  es conocido, sino habría que adicionar el término  $B_t \Sigma_{u_t} B_t^\top$  en la covarianza.

# Filtro Extendido de Kalman (EKF)

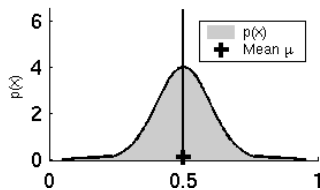
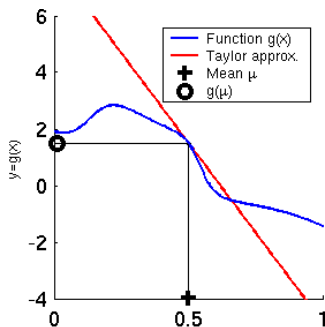
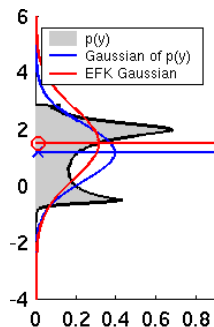


# Filtro Extendido de Kalman (EKF)





# Filtro Extendido de Kalman (EKF)



# Filtro Extendido de Kalman (EKF)

**Modelos** de actuación (proceso) y sensado (actualización):

$$x_t = f(u_t, x_{t-1}) + w_t \quad \text{donde } w_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t) \text{ y } x_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$$

$$z_t = h(x_t) + v_t \quad \text{donde } v_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$$

**Predicción** linealizo por Taylor alrededor del punto  $x_{t-1} = \mu_{t-1}$ ,  $w_t = 0$ :

$$f(u_t, x_{t-1}) \simeq f(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial f(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}(x_{t-1} - \mu_{t-1}) + \frac{\partial f(u_t, \mu_{t-1})}{\partial w_t}(w_t - 0)$$

$$f(u_t, x_{t-1}) \simeq f(u_t, \mu_{t-1}) + F_t(x_{t-1} - \mu_{t-1}) + W_t w_t$$

**Actualización** linealizo por Taylor alrededor del punto  $x_t = \mu_t$ :

$$h(x_t) \simeq h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}(x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \simeq h(\bar{\mu}_t) + H_t(x_t - \bar{\mu}_t)$$

## EKF: Algoritmo

El algoritmo del Filtro Extendido de Kalman recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

---

Algoritmo del Filtro Extendido de Kalman( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ )

---

- 1:  $\bar{\mu}_t = f(u_t, \mu_{t-1})$
  - 2:  $\bar{\Sigma}_t = F_t \Sigma_{t-1} F_t^\top + Q_t$
  - 3:  $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^\top (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1}$
  - 4:  $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - h(\bar{\mu}_t))$
  - 5:  $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$
  - 6: **return**  $\mu_t, \Sigma_t$
- 

donde:

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}$$
$$F_t = \frac{\partial f(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

# EKF: Propagación de la media e incertidumbre

## Modelo no lineal con una sola variable

Si  $y = f(x)$  y  $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ , entonces se linealiza  $f(x)$  alrededor de  $\mu_x$ :

$$f(x) \approx f(\mu_x) + f'(\mu_x)(x - \mu_x)$$

De modo que:

$$y \sim \mathcal{N}(f(\mu_x), (f'(\mu_x))^2 \sigma_x^2)$$

**Interpretación:** La función  $f(x)$  se aproxima localmente por su tangente en  $\mu_x$ , y la derivada  $f'(\mu_x)$  actúa como el factor que amplifica o atenúa la incertidumbre de  $x$  al propagarse hacia  $y$ .

## Modelo no lineal multivariado

Si  $y = f(x)$  y  $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$ , entonces se linealiza  $f$  alrededor de la media  $\mu_x$ :

$$f(x) \approx f(\mu_x) + F_x(x - \mu_x), \quad F_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\mu_x}.$$

De modo que:

$$y \sim \mathcal{N}(f(\mu_x), F_x \Sigma_x F_x^\top).$$

**Interpretación:** La matriz jacobiana  $F_x$  representa la pendiente local y actúa como una transformación lineal que rota, escala y correlaciona la elipse de incertidumbre original. La nueva covarianza  $F_x \Sigma_x F_x^\top$  describe la forma y orientación de la incertidumbre propagada a través de la función no lineal  $f(x)$ .

# EKF: Propagación de la media e incertidumbre

## Modelo no lineal multivariado con control y ruido

Si  $x_t = f(x_{t-1}, u_t) + w_t$ ,  $w_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ , y  $x_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})$ , entonces se linealiza  $f$  alrededor del punto  $(\mu_{t-1}, u_t)$ :

$$f(x_{t-1}, u_t) \approx f(\mu_{t-1}, u_t) + F_t(x_{t-1} - \mu_{t-1}) + W_t w_t,$$

donde

$$F_t = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\mu_{t-1}, u_t)}, \quad W_t = \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{(\mu_{t-1}, u_t)}.$$

De modo que:

$$x_t \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{f(\mu_{t-1}, u_t)}_{\bar{\mu}_t}, \underbrace{F_t \Sigma_{t-1} F_t^\top + W_t Q_t W_t^\top}_{\bar{\Sigma}_t}\right).$$

### Interpretación:

- El jacobiano  $F_t$  propaga la incertidumbre del estado anterior a través de la dinámica no lineal (linealizada localmente), mientras que  $W_t Q_t W_t^\top$  agrega la incertidumbre del ruido del proceso.
- El control  $u_t$  desplaza la media  $f(\mu_{t-1}, u_t)$  pero no genera incertidumbre porque es conocido, sino se debería adicionar el término  $B_t \Sigma_{u_t} B_t^\top$ .
- Si el ruido  $w_t$  entra aditivamente en el modelo (sumándose sin depender de  $x$  ni de  $u$ ), entonces  $W_t = I$ . Luego:  $\bar{\Sigma}_t = F_t \Sigma_{t-1} F_t^\top + Q_t$  como se ve en la última línea el algoritmo.

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose

¿Cuál es el estado?

$$x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el control?

$$u_t = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el modelo de proceso (predicción)?

$$f(x_t, u_t, w) = \begin{pmatrix} x + v\Delta t \cos(\theta) + w_x \\ y + v\Delta t \sin(\theta) + w_y \\ \text{normalizar}(\theta + \omega\Delta t) + w_\theta \end{pmatrix}$$

donde  $w_{x/y/\theta} \sim \mathcal{N}(0, Q)$  es ruido blanco aditivo.

## Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose

¿Cuál es el jacobiano  $F_t = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_{t-1}, u_t)}$ ?

$$F_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v\Delta t \sin(\theta) \\ 0 & 1 & v\Delta t \cos(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la predicción de la pose  $\bar{x}_t$ ?

$$\bar{x}_t = f(x_{t-1}, u_t, 0)$$

¿Cuál es la predicción de la covarianza  $\bar{\Sigma}_t$ ?

$$\bar{\Sigma}_t = F_t \Sigma_{t-1} F_t^\top + Q_t$$

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose

¿Cuál es el modelo de sensado (actualización)?

$$z_{i,t} = h(x_t, m_i) + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$$

donde para cada landmark  $m_i = (m_{i,x}, m_{i,y})$ :

$$h(x_t, m_i) = \begin{pmatrix} r_{i,t} \\ \phi_{i,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \text{atan2}(\Delta y, \Delta x) - \theta_t \end{pmatrix}, \quad \Delta x = m_{i,x} - x_t, \quad \Delta y = m_{i,y} - y_t$$

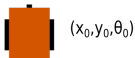
¿Cuál es el jacobiano  $H_t = \frac{\partial h(x_t, m_i)}{\partial x_t} \Big|_{\bar{\mu}_t}$ ?

$$H_t = \frac{\partial h(x_t, m_i)}{\partial x_t} = \begin{pmatrix} \frac{-\Delta x}{r_{i,t}} & \frac{-\Delta y}{r_{i,t}} & 0 \\ \frac{\Delta y}{r_{i,t}^2} & \frac{-\Delta x}{r_{i,t}^2} & -1 \end{pmatrix}$$

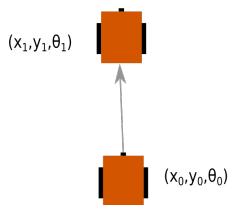


# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose

- Posición inicial  $\mathbf{x}_0 = 0$
- Covarianza inicial  $\mathbf{P}_0 \approx 0$

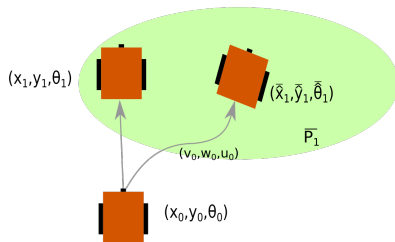


# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



- Aplicamos un control  $\mathbf{u}_0$
- Desplazamiento del robot a  $\mathbf{x}_1$
- Tenemos  $\mathbf{v}_0$  y  $w_0$  mediciones de odometría e IMU

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



Etapas de Predicción:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, 0)$$

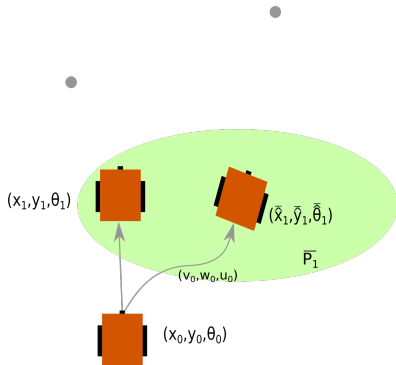
$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_1^\top + \mathbf{W}_1 \mathbf{Q}_0 \mathbf{W}_1^\top$$

donde:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta_0)v_0\Delta t \\ 0 & 1 & \cos(\theta_0)v_0\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

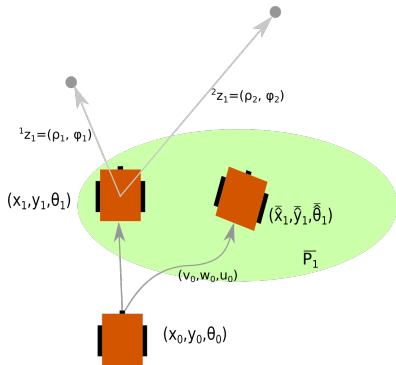
# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



Fase de Actualización

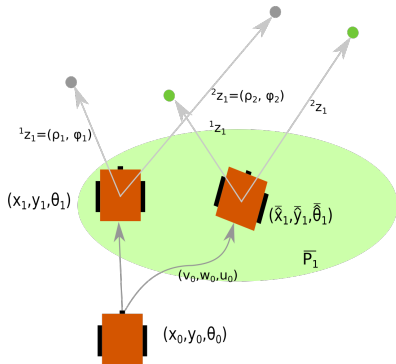
¿Desde donde se miden los postes?

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



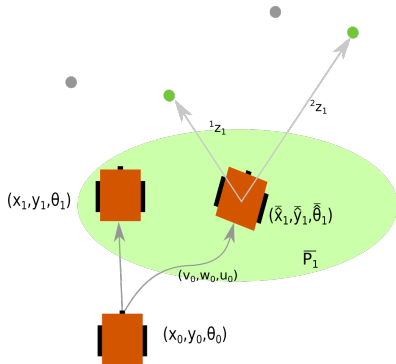
Por c/u de los  $j$  postes que veo tengo una medición  $^jz_1$  respecto del centro del robot.

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



El robot en realidad cree que los postes están en otro lugar. Porque su posición no es correcta.

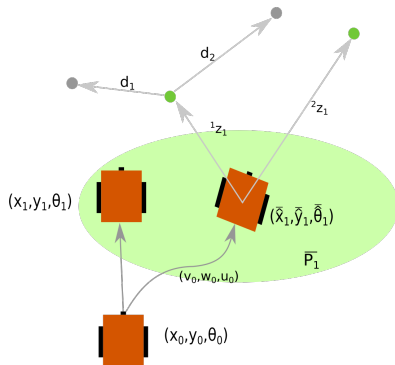
# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



Necesito saber a que poste corresponde cada medición.

¿Cómo lo hago?

## Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose

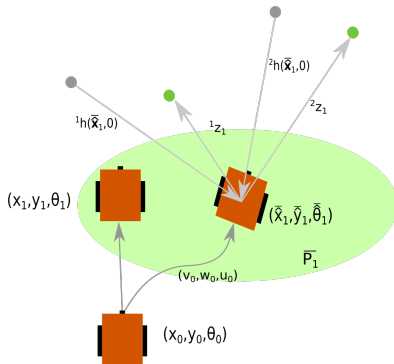


Desde la medición del poste tomo la distancia a c/u de los postes reales y me quedo con el mas cercano.

En este caso,  ${}^1\mathbf{z}_1$  corresponde al poste de la izquierda porque  $d_1 < d_2$ .



# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



Ahora que sabemos a que poste corresponde cada medición, tenemos que proyectar la pose de los postes a la pose estimada del robot, es decir, hallar  $h(\tilde{x}_1, 0)$  para cada poste.

$${}^{rob}\mathbf{l}_j = ({}^m\mathbf{T}_r)^{-1}m\mathbf{l}_j$$

paso a polares:

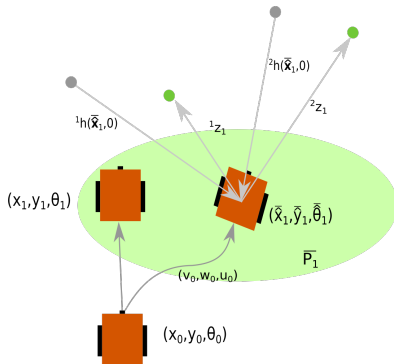
$${}^{rob}\rho_j = ||{}^{rob}\mathbf{l}_j||$$

$${}^{rob}\theta_j = \text{atan2}({}^{rob}\mathbf{l}_j(2), {}^{rob}\mathbf{l}_j(1))$$

De esta forma:

$$h(\tilde{x}_1, 0) = ({}^{rob}\rho_j, {}^{rob}\theta_j)$$

## Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



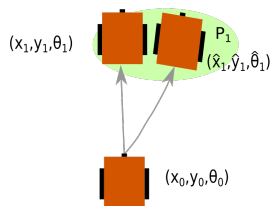
Podemos reescribir  $h$  como:

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_1, 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_l - \bar{x}_1)^2 + (y_l - \bar{y}_1)^2} \\ \text{atan2}(y_l - \bar{y}_1, x_l - \bar{x}_1) - \bar{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

Derivo para obtener  $H$ :

$$\mathbf{H}_I = \frac{\partial \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}_1, 0)}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{pmatrix} \frac{-(x_I - \tilde{x}_1)}{\sqrt{(x_I - \tilde{x}_1)^2 + (y_I - \tilde{y}_1)^2}} & 0 \\ \frac{-(y_I - \tilde{y}_1)}{\sqrt{(x_I - \tilde{x}_1)^2 + (y_I - \tilde{y}_1)^2}} & -1 \end{pmatrix}$$

# Taller: Fusión de sensado con EKF para estimar la pose



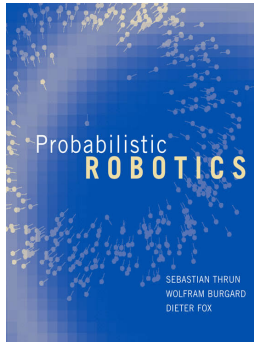
Paso Actualización EKF:

$$\mathbf{K}_1 = \bar{\mathbf{P}}_1 \mathbf{H}_1^\top (\mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{P}}_1 \mathbf{H}_1^\top + \mathbf{V}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_1^\top)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_1 (\mathbf{z}_1 - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}_1, 0))$$

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1) \bar{\mathbf{P}}_1$$

# Más sobre Filtros Bayesianos, Filtro de Kalman y Filtro Extendido de Kalman



“Probabilistics Robotics”, Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox. MIT press, 2006. **Capítulos 1-3**