Probabilidad y Estadística (Finanzas Cuantitativas)

2022

MFIN – Universidad Torcuato Di Tella
Prof. Sebastián Auguste
sauguste@utdt.edu

Indice

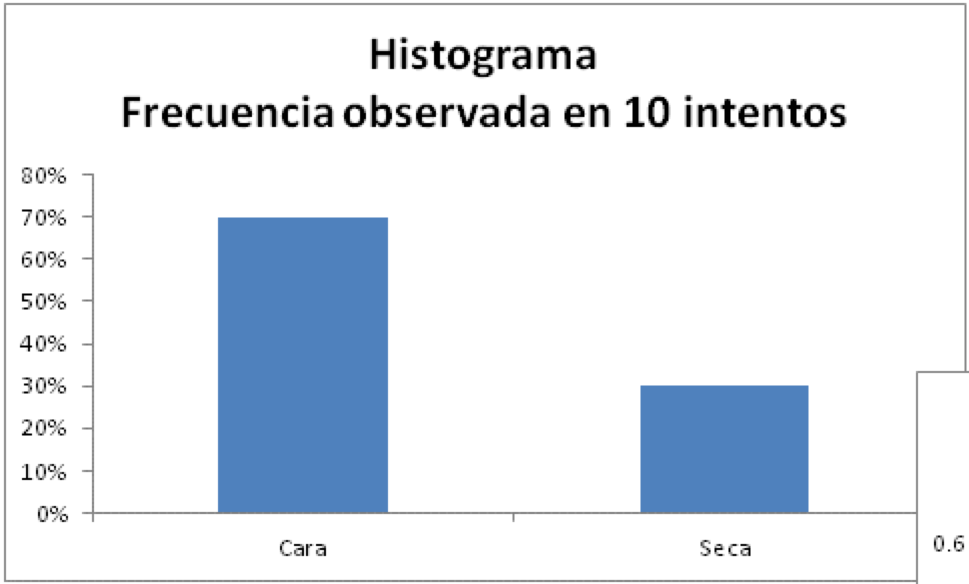
Índice

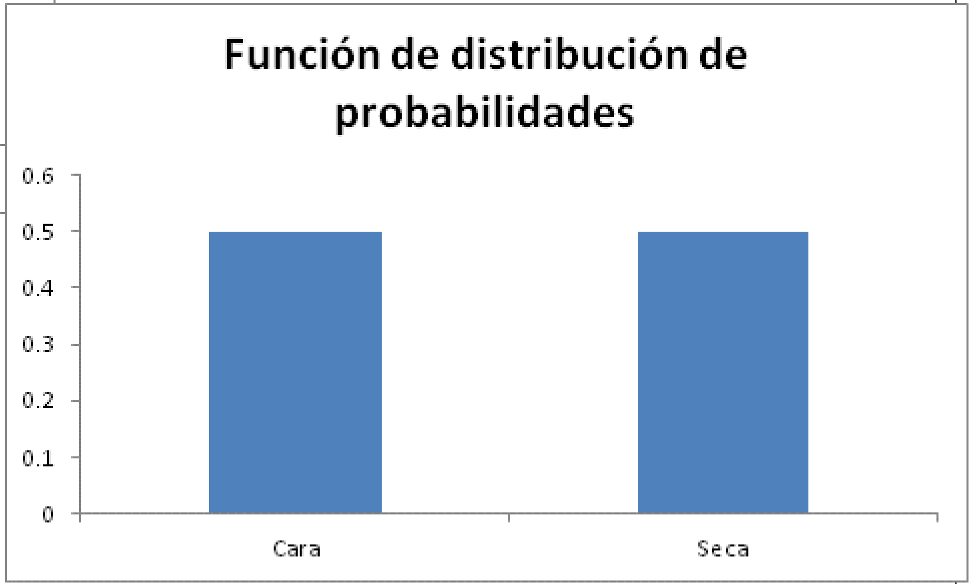
1. Distribución de probabilidades
2. Variables aleatorias continuas
3. Distribución Normal
4. Aplicaciones

- Lectura: Defusco et al., cap. 5.3.1 a 5.3.3

1. VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Histograma vs Distribución de Probabilidades





- Histograma: gráfico de barras que para cada categoría (o intervalo de valores para las continuas) me dice la frecuencia observada (valor absoluto o relativo)
- Distribución de probabilidades: gráfico de barras que para cada categoría me indica la probabilidad
- Función de distribución de probabilidades: función matemática que define la distribución
- Existen funciones de distribución ya conocidas que tienen nombre

Distribución de Bernoulli

- X es una variable aleatoria discreta de Bernoulli si toma valor 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad (1-p). L
- a función de distribución de probabilidades de Bernoulli es:

$$f(x)=\begin{cases} p & \text{if } X=1 \\ 1-p & \text{if } X=0 \end{cases}$$

- Cualquier evento del tipo pasa o no pasa es Bernoulli. Ejemplos de Finanzas:
  - Paga o no paga
  - Acepta o no acepta
  - Cheque rechazado o no
  - Sube o baja el precio de una acción

Ejercicio

- Se lanzara una moneda tres veces al aire, ¿cuál es la probabilidad de sacar exactamente una cara?

  (a) 0.125

  (b) 0.250

  (c) 0.333

  (d) 0.375

  (e) 0.500

  (f) Ni idea

- Tirar una moneda es Bernoulli, pero si lo que me interesa es tirar varias monedas y ver el resultado agregado, la distribución es Binomial.
- 8 posibles resultados: HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT
- 3 casos con exactamente una cara: HTT, THT, and TTH
- Prob=3/8=0.375

- El error fue no dares cuenta que en tantos intentos hay varias formas de sacar una cara (combinaciones).
- Para computer esto correctamente sin tener que andar hacienda todas las combinaciones existe el concepto matemático de combinatoria

COMBINATORIA

- Si en n intentos de Bernoulli (pasa o no pasa) quiero ver cuantas combinaciones me dan exactamente k caras, uso la siguiente fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Donde "!" es el factorial, es decir:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1) \times n$$

- En el ejemplo n=3, k=1
  - 3!=1x2x3=6
  - 1!=1
  - 2!=1x2=2
  - 6/2= 3   hay 3 combinaciones que dan 1 cara en tres intentos

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- X sigue una distribución Binomial si lo que mide es la cantidad de éxitos k en n intentos de Bernoulli con probabilidad de éxito p.
- La función de distribución Binomial es:

$$\Pr ob(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

En Excel es muy fácil

Prob(X=x): BINOM.DIST(x; n ;p; FALSE)
Prob(X≤x): BINOM.DIST(x; n ;p ; TRUE)

O bien
Prob(X=x): DISTR.BINOM(x, n ,p, FALSO)

En el ejemplo tengo +DISTR.BINOM(1,3,0.5,FALSO)=0.375

MINICASO. FRAGAVELIA

El Directorio de Fragavelia, cadena de venta de electrodomésticos, está analizando la situación financiera de su empresa para 2020. El negocio de esta empresa es la venta a crédito de electrodomésticos. Se sabe que la probabilidad de impago de cada crédito otorgado es históricamente del 2%, en dicho caso Fragavelia debe absorber todas las pérdidas. La cadena acaba de comprar 10 multiprocesadoras a $50 cada una, y el precio de venta es de $120. Ha hecho una previsión equivalente a 2 ventas

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga más de dos incobrables, y que por ende la previsión no alcance?

b) Si por la crisis y el corte en la cadena de pagos la probabilidad de impago pasa a ser del 15%, ¿Cómo afecta esto a la probabilidad de tener más de 2 incobrables?

c) Compute el valor esperado de las ganancias para el caso a y el b.

DISTRIBUCIÓN POISSON

- La distribución de probabilidades de Poisson es para variables aleatorias discretas, de conteo (en una unidad de tiempo n). Por ejemplo, pedidos en el día, clientes que caen por hora.
- Depende de un único parámetro lambda que es el valor esperado y la varianza a la vez.

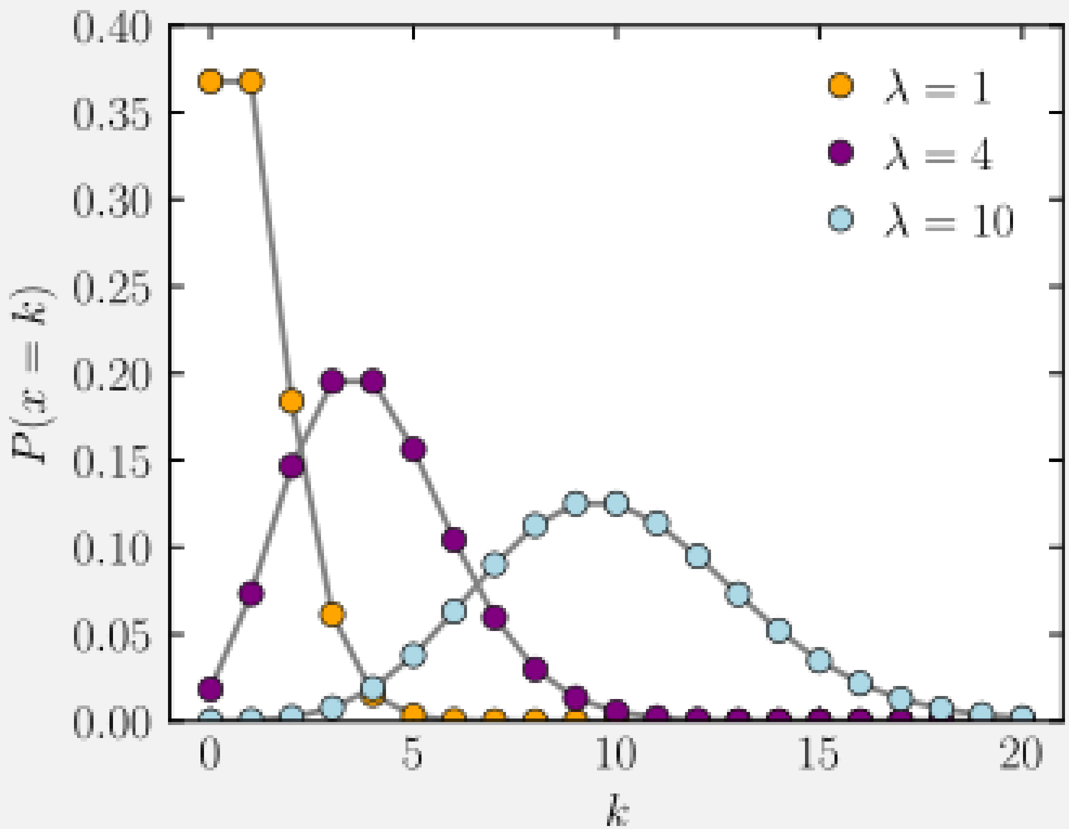
$$\lambda = \mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X).$$

- Su función de distribución de probabilidades es:

$$f(k;\lambda) = \Pr(X{=}k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

- El comando en Excel es poissondist

- ¿Cuándo se usa?: cuando es una variable de conteo con un valor esperado bajo.
- ¿Por qué? Si es un valor esperado alto se la puede aproximar por una Normal porque su forma se empieza a parecer mucho.
- Parámetros claves: probabilidad de ocurrencia y ventana n de conteo



EJEMPLOS POISSON

- Cantidad de clientes que llegan al negocio durante una hora.
- Cantidad de llamadas telefónicas que se reciben en un día.
- defectos en manufactura de papel por cada metro producido.-
- Cantidad de envases llenados fuera de los límites por cada 100 galones de producto terminado.
- Número de fallas en la superficie de una cerámica rectangular.-
- Número de bacterias en un volumen de un m3 de agua.-
- Número de accidentes de trabajo que ocurren en una fábrica durante una semana.
- Clave: que el conteo esperado (lambda) sea bajo.

PROPIEDADES DE UN PROCESO DE POISSON

- La probabilidad de observar exactamente un éxito en el segmento o tamaño de muestra n es constante.
- El evento debe considerarse un suceso raro (baja probabilidad de ocurrencia)
- El evento debe ser aleatorio e independiente de otros eventos (que caiga un paciente en un hora es independiente que caiga un segundo paciente)

- Suma de Poisson es Poisson.

EJERCICIOS POISSON

- La probabilidad de que haya un accidente de trabajo en una compañía de manufactura es de 0,02 por día. Si se trabajan 300 días al año, ¿cuál es la probabilidad de tener 3 accidentes?
- La probabilidad de que un producto salga defectuoso es de 0,012. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 800 productos ya fabricados hayan 5 defectuosos?

- Técnicamente la Poisson tiene una limitación, que fuerza a que la media y la varianza coincidan. En negocios, la mayoría de las variables de conteo tienen mayor varianza que media, lo que se conoce como overdispersion. Entonces, si uso una Normal, puedo hacer que la varianza sea distinta a la media. Si quiero seguir con una variable discreta pero que no tenga la limitación de la Poisson, se han desarrollado otras distribuciones de probabilidades como la Negative Binomial

EJEMPLO

- Trabaja en un hospital y quiere saber cuál es la probabilidad de que la Guardia colapse. Puso 3 médicos en la guardia, que pueden atender máximo 2 pacientes cada media hora.
- Se cree que la cantidad de pacientes que caen por hora es en promedio de 5.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la guardia colapse? (es decir, que los médicos no puedan atender a los pacientes porque los superan)

DISTRIBUCIÓN DE POISSON COMO APROXIMACIÓN A BINOMIAL

- La distribución de Poisson se usa en ocasiones para aproximar la distribución binomial cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

$$n \geq 100$$

$$np \leq 10$$

- Si se cumplen, aproximamos con una Poisson donde λ es:

$$\lambda = np$$

APROXIMACIÓN NORMAL DE UNA POISSON

- Si λ es un número muy alto, se puede aproximar el proceso Poisson con una Normal donde la media y varianza sean λ.
- Único inconveniente es que Poisson es discreto y Normal continuo, por lo que luego habrá que redondear el resultado de la Normal sin decimales para "discretizarlo"

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

- Una **variable aleatoria continua** es una función X que asigna a cada resultado posible de un experimento un número real. Si X puede asumir cualquier valor en algún intervalo I (el intervalo puede ser acotado o desacotado), se llama una **variable aleatoria continua.**
- **Puede por lo tanto tomar infinitos valores**
- Aquí probabilidad como frecuencia relativa (#/N) carece de sentido.
- Cuando la variable aleatoria X es continua $Prob(X=x) = 0$

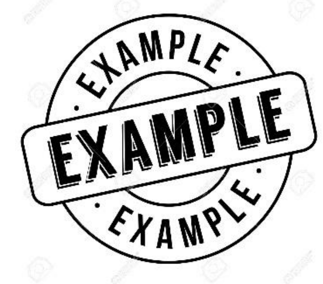
FUNCIONES DE DENSIDAD

- Una **Función de Distribución de Probabilidades *f*(*x*)** me dice cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome valor x.

$$f(x)=\text{Prob}(X=x)$$

- Es una forma sintética de describir todas las probabilidades posibles (probabilidades para cada uno de los resultados posibles).

Ejemplo



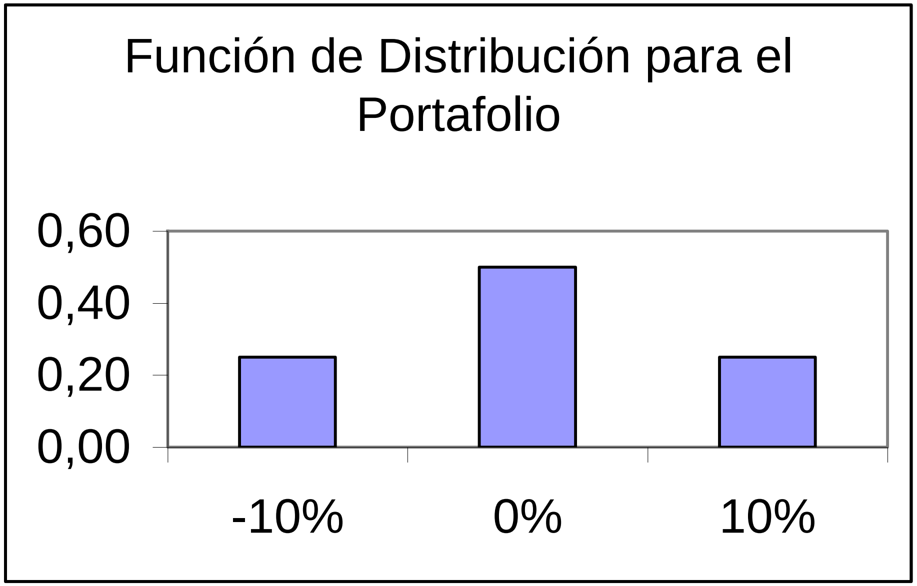
Acciones A y B tienen igual probabilidad de subir o bajar 10%

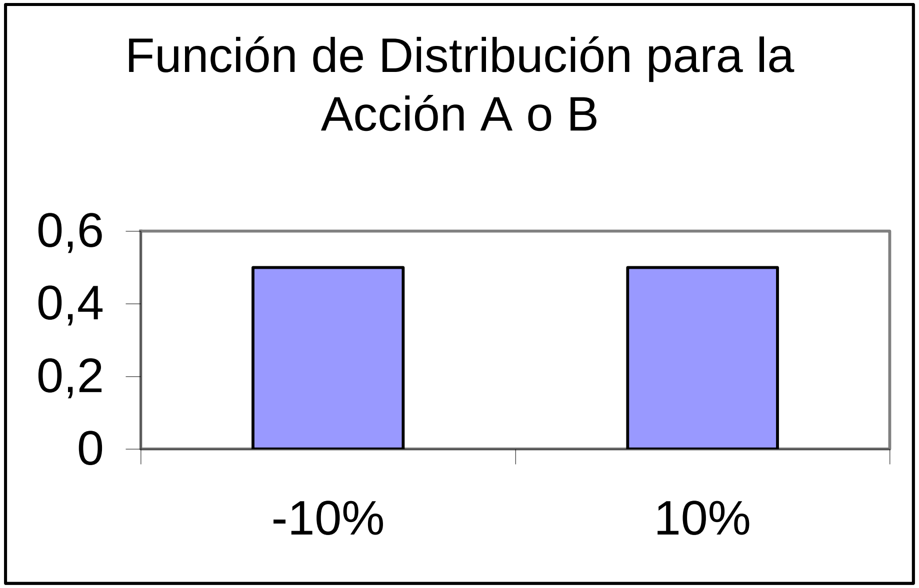
Acción A				Acción B			
S	x	f(x)		S	x	f(x)	
B	-10%	1/2		B	-10%	1/2	
S	10%	1/2		S	10%	1/2	

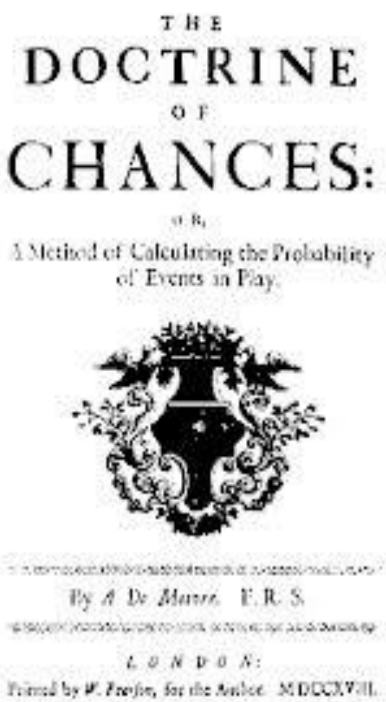
Para el Equal Weighted Portfolio:

S	X	f		Func. De Distrib.		
BB	-10%	1/4		X	f	
SB	0%	1/4		-10%	1/4	
BS	0%	1/4		0%	2/4	
SS	10%	1/4		10%	1/4	

Gráficamente

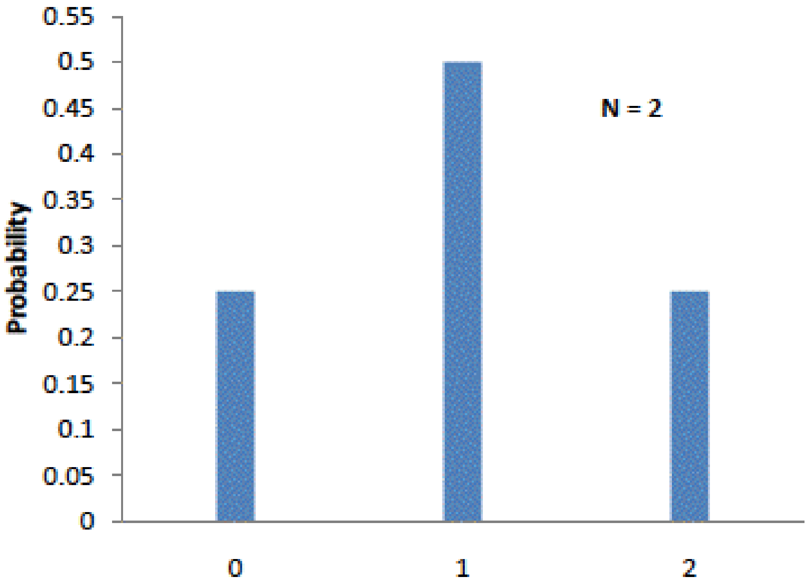


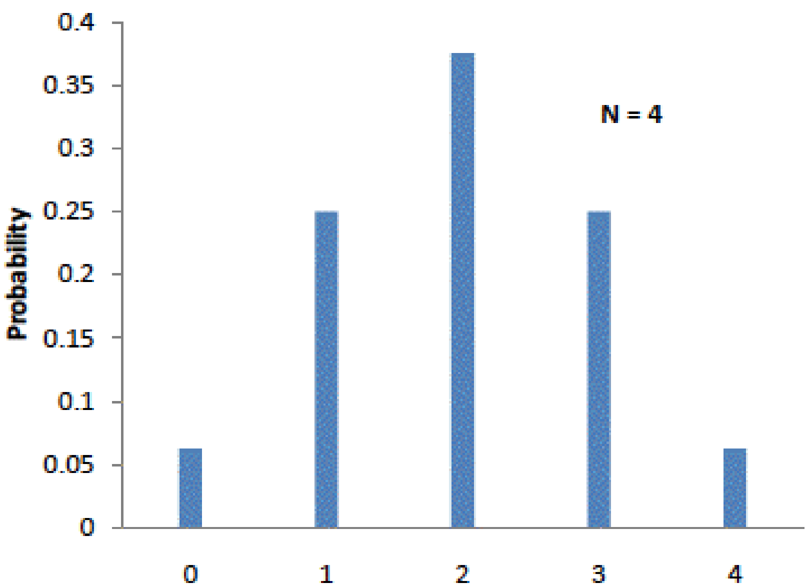


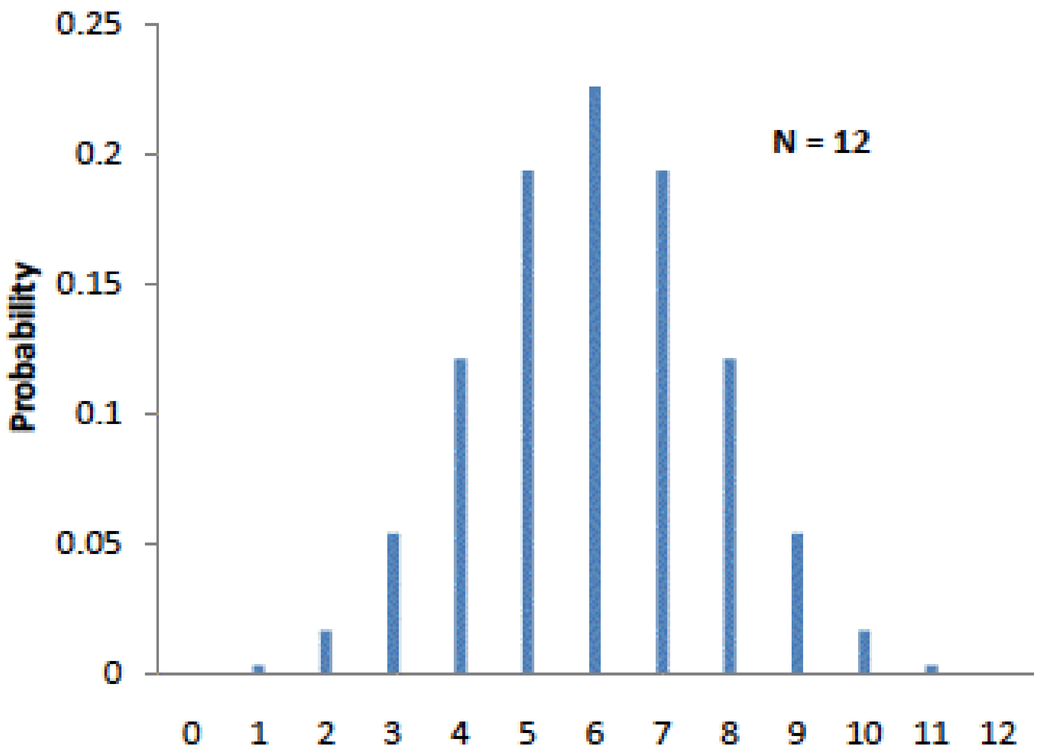


- Abraham de Moivre, aunque sin estudios formales, fue un gran matemático y estadístico (y consultor para salas de juegos) francés del siglo XVIII.
- En 1718 publicó en Londres el primer libro de Teoría de las Probabilidades
- Paradójicamente la religion jugó un rol también aqui. Era Calvinista y se tuvo que refugiar en Londres, donde se hizo amigo de Newton y Halley e intergró la Real Society, esto ayudó a su prolífera producción.

- De Moivre notó que en los juegos, la gente gana o pierde (distribución Bernoulli), y empezó a estudiar que pasaba si jugaba repetidas veces (Binomial).
- Notó lo siguiente:

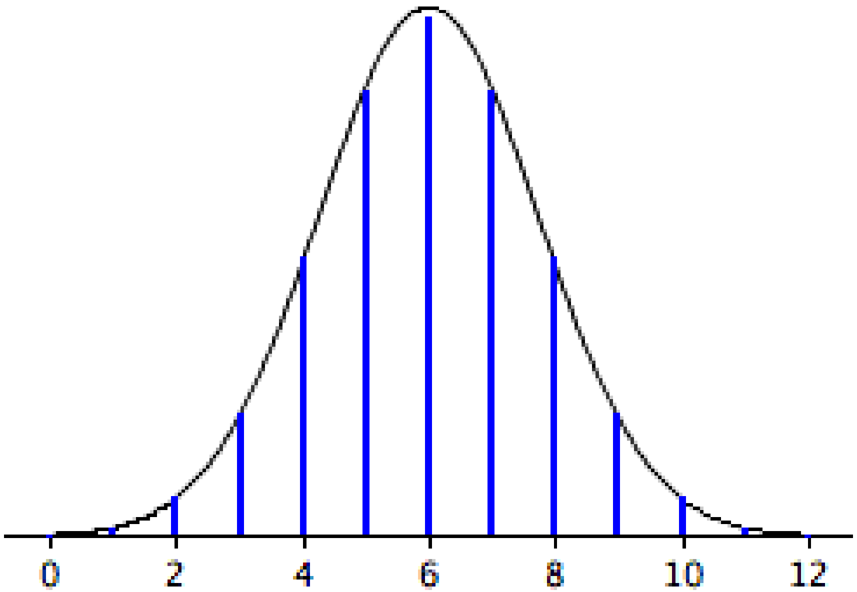






- Distribución Binomial para juegos justos, con igual probabilidad de perder o de ganar, a medida que se repite el N tiene una distribución acampanada

- Como no había computadoras, para juegos con n muy grandes era un problema, y el empezó a usar una distribución acampanada para aproximar estos problemas



- Utilizó esta aproximación continua para otros cálculos, como estimar la fecha exacta de una muerte

- De Moivre publicó un artículo llamado "Annuities upon Lives" donde mostraba que la distribución de las muertes para una edad dada siguen una distribución Normal. Con una formula aproximó el ingreso para una compañía de seguros de los pagos anuales de una persona. Esto es muy similar a lo que aún hoy usan las compañías de seguros.

Variables aleatorias continuas

- Lo que intentó hacer Moivre es obtener un gráfico continuo.
- Las probabilidades ahora se representan por "funciones" (llamadas funciones de densidad). Hay tantas distribuciones como funciones podamos armar (siempre que debajo de la curva el área sume 1)
- Todos los conceptos previos se extienden a variables continuas
- Para una variable continua, que puede tomar infinitos valores, lo que se hace es:

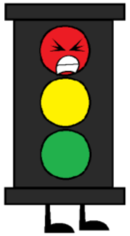
  A) se define un gráfico de distribución de probabilidades (en realidad distribución de densidad)

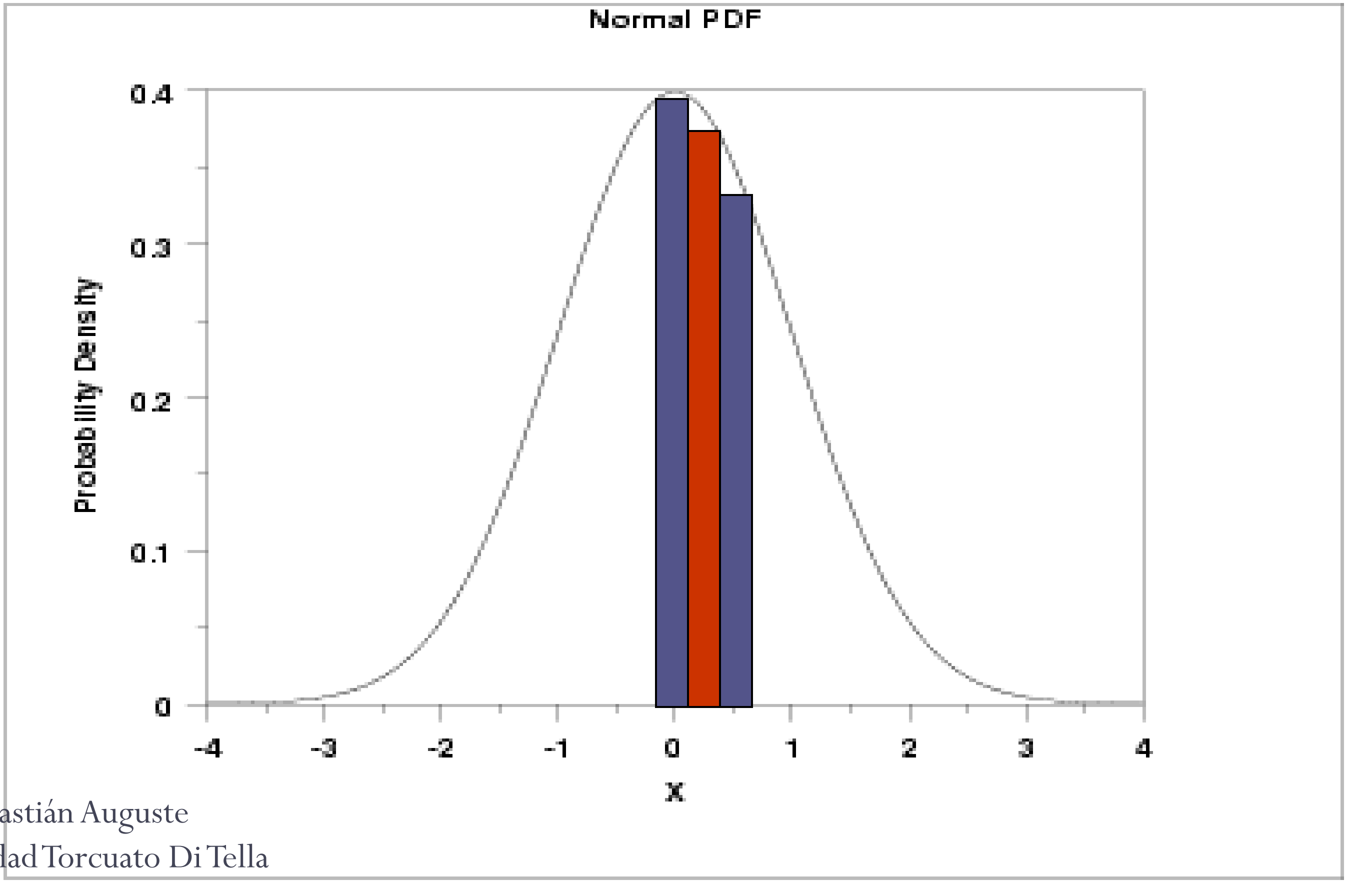
  B) Se computa la probabilidad como el área debajo de la curva entre dos valores

- En el caso de una variable discreta lo que se hace es imputar un valor a la probabilidad. Como son pocas es fácil
- En el caso de una variable continua esto es imposible! Lo que se hace es imputar una función genérica de probabilidades (como la Normal) y luego se "calibra" esa función para que represente el caso. En la Normal, calibrar quiere decir asignarle un valor a la media y la varianza teóricas.
- La función de probabilidades depende de parámetros que hay que calibrar, cada función tiene su propios parámetros

- El área por debajo de una curva f(x) entre -1 y 1 se computa como:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$





Técnicamente…

- La función integrable y no negativa *f (x)* es la función de densidad de la variable continua X si para cualquier intervalo (a; b) se cumple:

$$P(X \in [a, b]) = \int_{b}^{a} f(x)dx$$

- Es decir, la probabilidad de que la variable tome un valor dentro del intervalo (a; b) se puede calcular como el área bajo la función de densidad en el intervalo (a; b).
- f(x) cumple con:

a) $f(x) > 0 \;\; \forall x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Algunas distribuciones de probabilidad/densidad

Discretas:

- Uniforme
- Bernoulli
- Binomial
- Poisson
- Multinomial
- Geometrica
- Hipergeometrica
- …

Continuas:

- Uniforme (continua)
- Normal
- Exponencial
- Gamma
- Beta
- Lognormal
- Weibull
- …

¿Puedo deducir la distribución de una variable desde un histograma?

- Generar 10 números aleatorios de variable normal con media 5000 y desvio 4000
- Hacer histograma: ¿Se parece a la distribición de una variable normal?

- Saque sus conclusiones

3. DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Ya Galileo en el siglo XVII había notado que los errores de medición astronómicos tenían histogramas acampanados.
- Esto se veía en muchas variables.
- Legendré (francés) en 1808 y Gauss (alemán) en 1809 desarrollaron en simultáneo la fórmula de la distribución Normal. Gauss la venía usando en sus trabajos desde 1794, por lo que se llevó los laureles. El tema era encontrar una función matemática de densidad que cumpliera con los siguientes hechos empíricos:
  - Forma de campana, con un único pico
  - Media aritmética=mediana (y justo en el punto máximo del pico)
  - Simetría
  - Relación entre media y desvío estándar (68% en +/- 1 1σ, 95% en +/- 1 2σ, 99% en +/- 1 3σ)

- Johann Carl Friedrich Gauss nació el 30 de april de 1777, hijo de una familia pobre, padre albañil y madre analfabeta.
- Ya de chico mostró una gran inteligencia y se destacó en el colegio. Su padre no quería que estudie, y quería que fuera albañil como él. El duque de Braunschweig financió sus estudios interesado por su gran inteligencia.
- Publicó muy poco, por ser muy perfeccionista, pero sus diarios muestran que descubrió muchas cosas antes que luego fueran publicadas por otros!
- Gauss es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Anécdotas de Gauss

- Hay varias anécdotas de su genialidad. A los 3 años corrigió cuentas matemática de su padre. A los 10 resolvió en segundos un computo difícil. El maestro para ganar tiempo les dio un problema a sus alumnos, que sumen los cien primeros números naturales. A los pocos segundos Gauss levanta la mano y dice: *5.050*. ¿Cómo lo hizo Gauss? se dio cuenta de que la suma del primer término con el último, la del segundo con el penúltimo, y así sucesivamente, era constante:

  1, 2, 3, 4, …, 97, 98, 99, 100

  1+100 = 2+99 = 3+98 = 4+97 =… = 101

- Con los 100 números se pueden formar 50 pares, de forma que la solución final viene dada por el producto
- 101· 50 = 5050
- Fácil no?
- A los 17 dice que descubrió

la Normal!

Prof. Sebastián Auguste
Universidad Torcuato Di Tella

Función de densidad Normal:

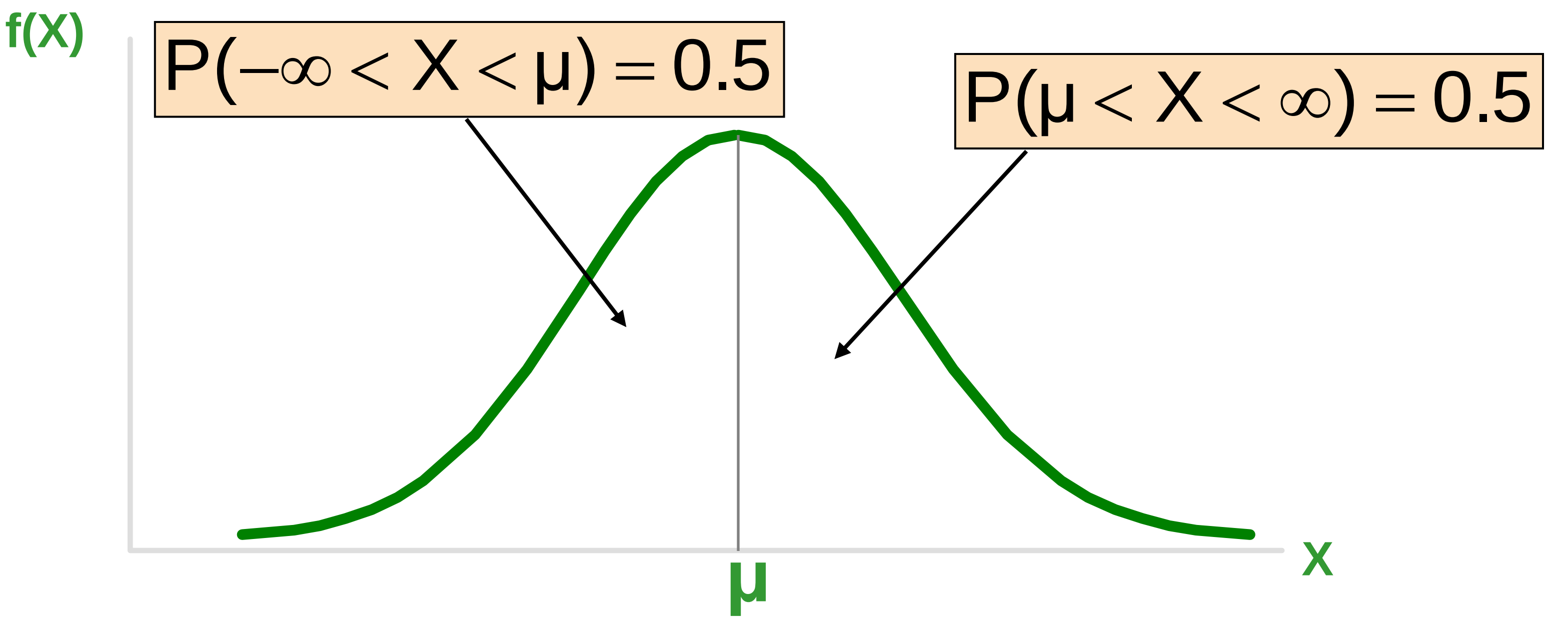
$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

esta forma funcional genera el gráfico de campana

La probablidad se computa como:

$$\Pr ob(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

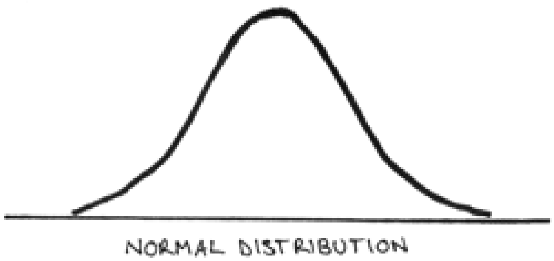
El area total debajo de la curva es 1.0, y la curva es simétrica, tal que la mitad está encima de la media y la mitad debajo



$$P(-\infty < X < \infty) = 1.0$$

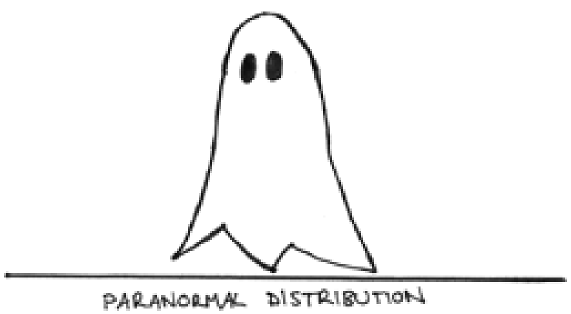
Distribución Normal

- Es la distribución más común (de allí su nombre)
- Tiene forma de campana
- Esta caracterizada por la media y varianza
- Su notación estándar es $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

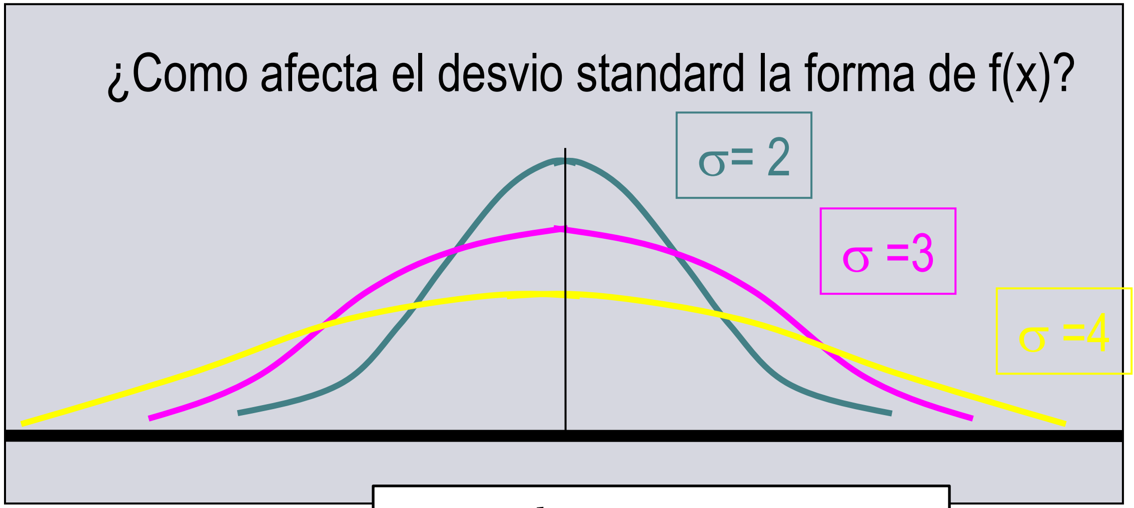


Donde μ es la media (poblacional) y

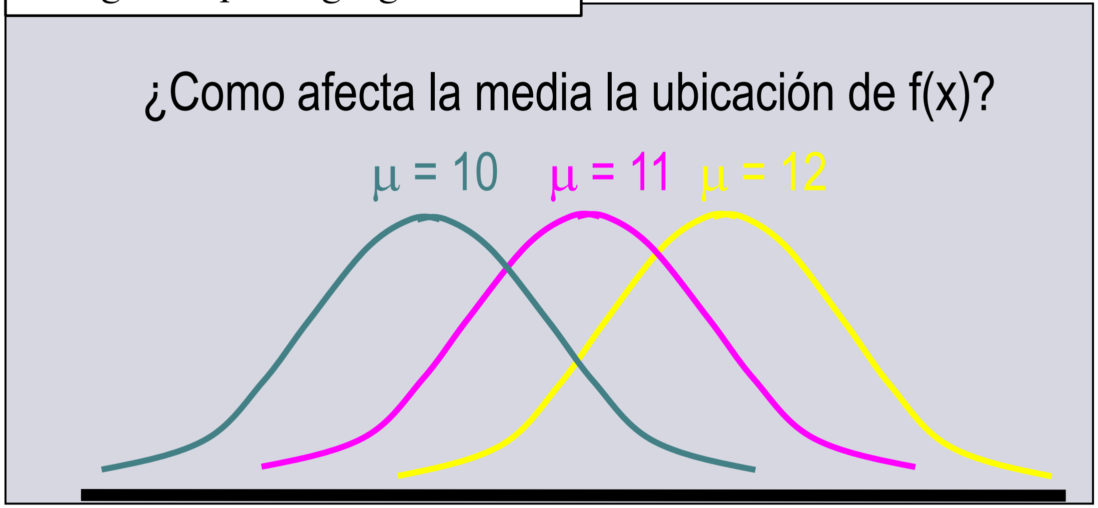
σ^2 la varianza (poblacional)



En la práctica se puede estimar μ con $\overline{X}$, y σ^2 con S^2 o utilizar otras formas de "calibrarla"

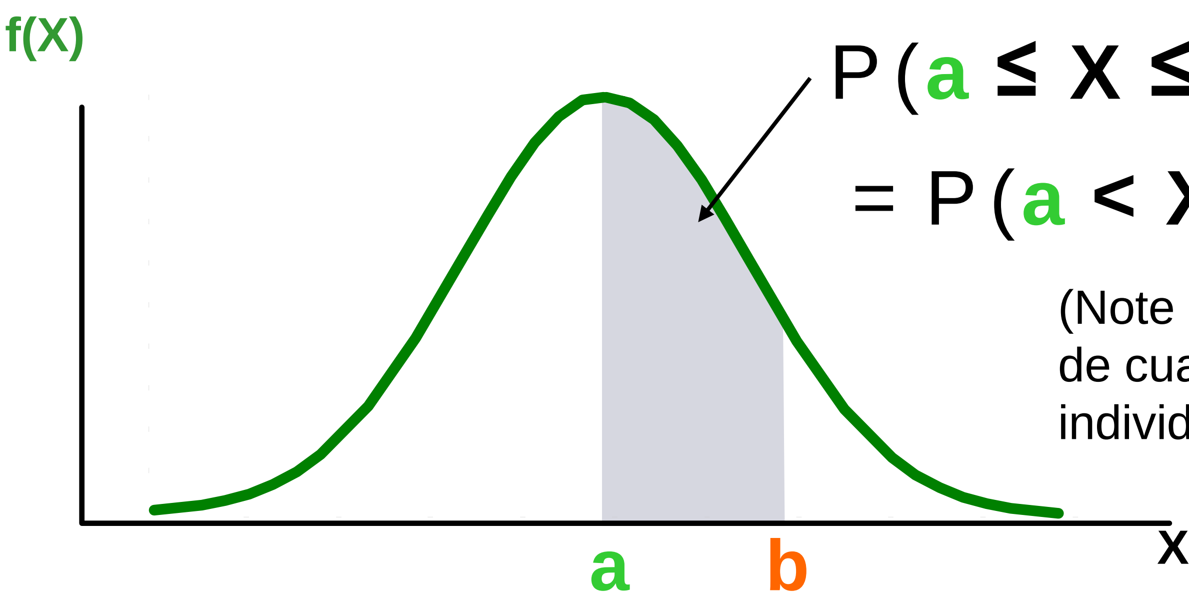


Haga clic para agregar texto



Calculando Probabilidades desde la Normal

La probabilidad se mide como un área debajo de la curva



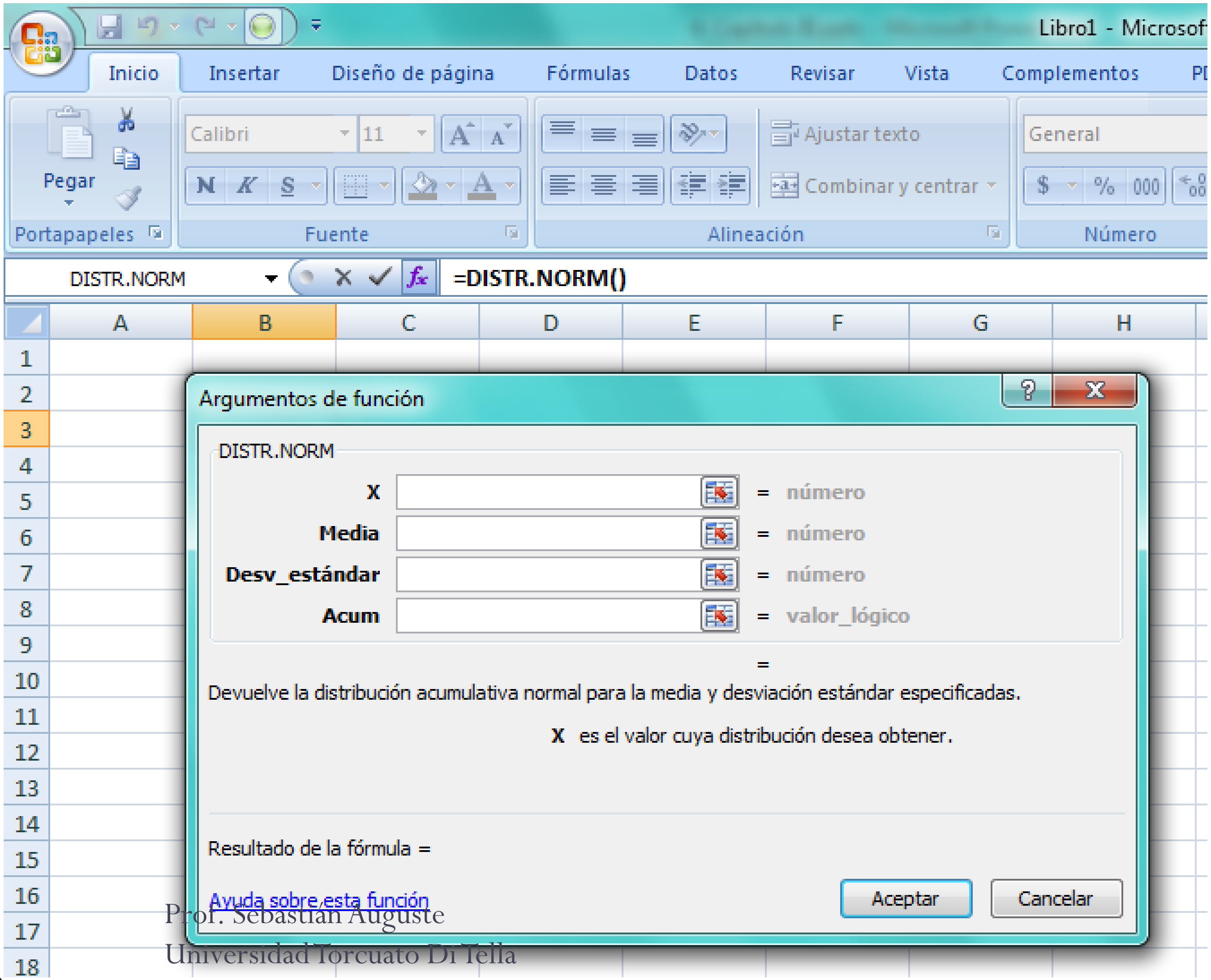
$$P(a \leq X \leq b)$$
$$= P(a < X < b)$$

(Note que la probabilidad de cualquier valor individual es cero)

Prof. Sebastián Auguste
Universidad Torcuato Di Tella

- Antes, computar el área debajo de la curva era difícil de resolver. Con Excel ya no lo es más
- Antes se usaba la propiedad que toda variable normal puede ser reexpresada como una N(0,1) (llamada Normal Estandar), proceso que se denomina **estandarización**.
- De esta forma se computaban tablas de probabilidades para N(0,1) que se pueden usar para cualquier variable Normal

La Normal en Excel



DISTR.NORM()
(o en inglés
NORMDIST()
computa :

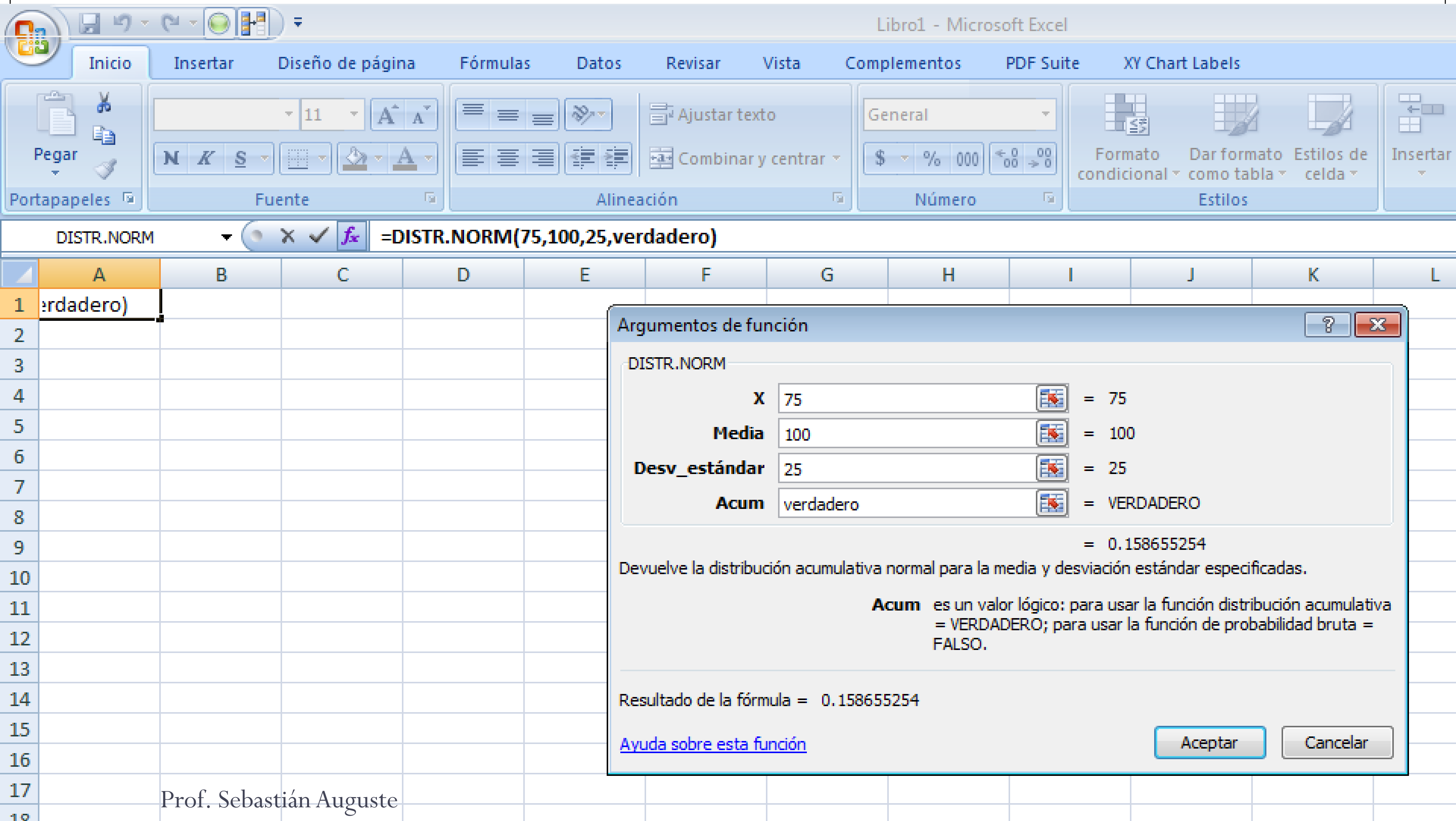
Prob(x≤X)

en Acum ponemos
VERDADERO

Ejemplo

- Supongamos la demanda mensual de cantidad de camisas que tiene un local sigue una distribución Normal con media 100 y desvío estándar 25.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener en un mes una demanda menor a 75 camisas?
- ¿Cuál es la probablidad de tener una demanda mayor a 133 camisas?
- ¿Cuál es la probabilidad de tener una demanda entre 90 y 110 camisas?

En Excel


Libro1 - Microsoft Excel
Inicio
Insertar
Diseño de página
Fórmulas
Datos
Revisar
Vista
Complementos
PDF Suite
XY Chart Labels
Pegar
Portapapeles
Fuente
Ajustar texto
Combinar y centrar
Alineación
General
Número
Formato condicional
Dar formato como tabla
Estilos de celda
Estilos
Insertar
DISTR.NORM
=DISTR.NORM(75,100,25,verdadero)
erdadero)
Argumentos de función
DISTR.NORM
X 75 = 75
Media 100 = 100
Desv_estándar 25 = 25
Acum verdadero = VERDADERO
= 0.158655254
Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.
Acum es un valor lógico: para usar la función distribución acumulativa = VERDADERO; para usar la función de probabilidad bruta = FALSO.
Resultado de la fórmula = 0.158655254
Ayuda sobre esta función
Aceptar
Cancelar

El camino ESTANDARIZADO

- Sea $X : N(\mu_x ; \sigma_X^2)$, el proceso de estandarización de la variable implica realizar la siguiente operación

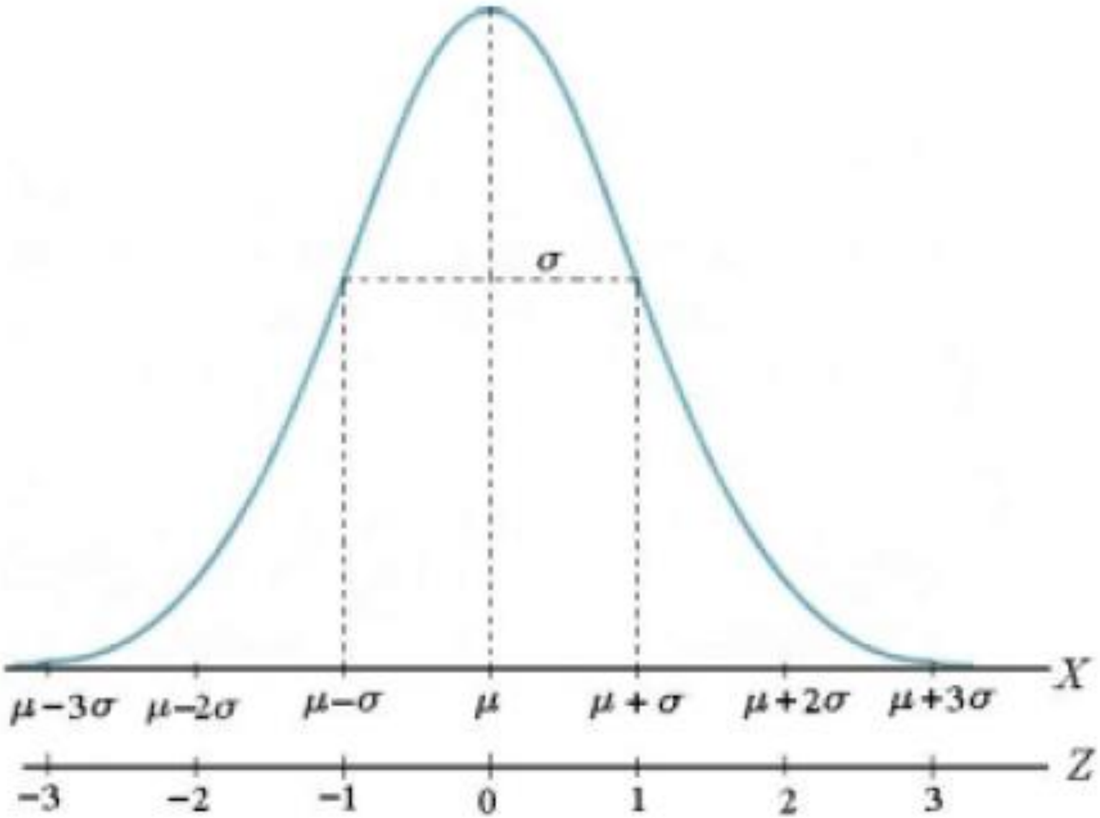
$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

- Tal que

$$\mu_z = 0$$

$$y$$

$$\sigma_z^2 = 1$$

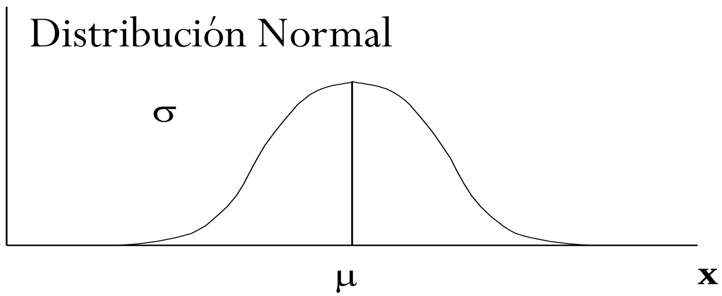


- Para la N(0,1) su p.d.f. se reduce a:

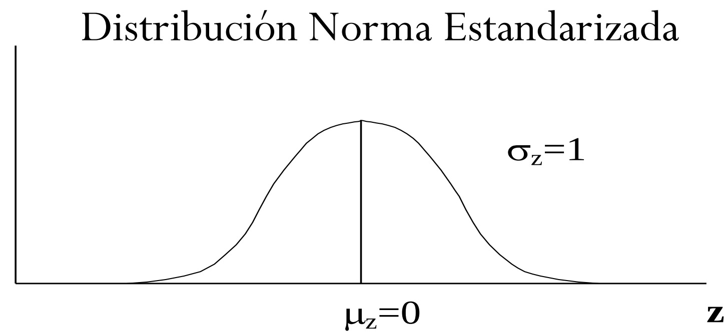
$$\Pr ob(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx$$

$$\Phi(a) = Prob(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx$$

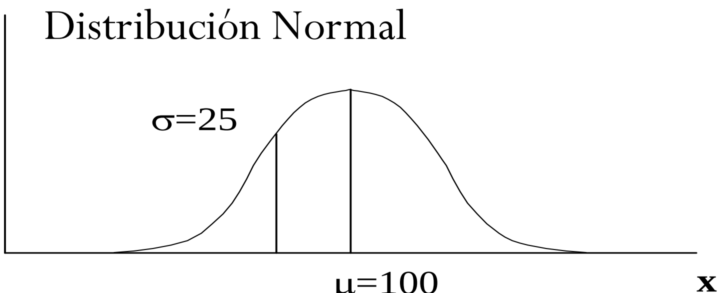
- Para facilitar la comparación entre normales se las "estandariza"

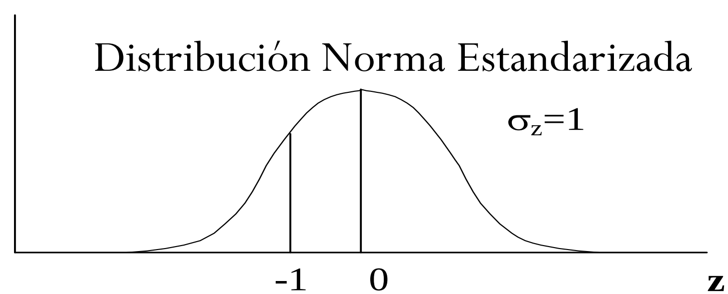


$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



- Ejemplo camisas $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{75 - 100}{25} = -1$





DISTRIBUCION NORMAL ESTANDARIZADA

z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)	z	F(z)
-3.50	0.000	-2.91	0.002	-2.32	0.010	-1.73	0.042	-1.14	0.127	-0.55	0.291
-3.49	0.000	-2.90	0.002	-2.31	0.010	-1.72	0.043	-1.13	0.129	-0.54	0.295
-3.48	0.000	-2.89	0.002	-2.30	0.011	-1.71	0.044	-1.12	0.131	-0.53	0.298
-3.47	0.000	-2.88	0.002	-2.29	0.011	-1.70	0.045	-1.11	0.133	-0.52	0.302
-3.46	0.000	-2.87	0.002	-2.28	0.011	-1.69	0.046	-1.10	0.136	-0.51	0.305
-3.45	0.000	-2.86	0.002	-2.27	0.012	-1.68	0.046	-1.09	0.138	-0.50	0.309
-3.44	0.000	-2.85	0.002	-2.26	0.012	-1.67	0.047	-1.08	0.140	-0.49	0.312
-3.43	0.000	-2.84	0.002	-2.25	0.012	-1.66	0.048	-1.07	0.142	-0.48	0.316
-3.42	0.000	-2.83	0.002	-2.24	0.013	-1.65	0.049	-1.06	0.145	-0.47	0.319
-3.41	0.000	-2.82	0.002	-2.23	0.013	**-1.64**	**0.051**	-1.05	0.147	-0.46	0.323
-3.40	0.000	-2.81	0.002	-2.22	0.013	-1.63	0.052	-1.04	0.149	-0.45	0.326
-3.39	0.000	-2.80	0.003	-2.21	0.014	-1.62	0.053	-1.03	0.152	-0.44	0.330
-3.38	0.000	-2.79	0.003	-2.20	0.014	-1.61	0.054	-1.02	0.154	-0.43	0.334
-3.37	0.000	-2.78	0.003	-2.19	0.014	-1.60	0.055	-1.01	0.156	-0.42	0.337
-3.36	0.000	-2.77	0.003	-2.18	0.015	-1.59	0.056	-1.00	0.159	-0.41	0.341
-3.35	0.000	-2.76	0.003	-2.17	0.015	-1.58	0.057	-0.99	0.161	-0.40	0.345
-3.34	0.000	-2.75	0.003	-2.16	0.015	-1.57	0.058	-0.98	0.164	-0.39	0.348
-3.33	0.000	-2.74	0.003	-2.15	0.016	-1.56	0.059	-0.97	0.166	-0.38	0.352
-3.32	0.000	-2.73	0.003	-2.14	0.016	-1.55	0.061	-0.96	0.169	-0.37	0.356
-3.31	0.000	-2.72	0.003	-2.13	0.017	-1.54	0.062	-0.95	0.171	-0.36	0.359
-3.30	0.000	-2.71	0.003	-2.12	0.017	-1.53	0.063	-0.94	0.174	-0.35	0.363

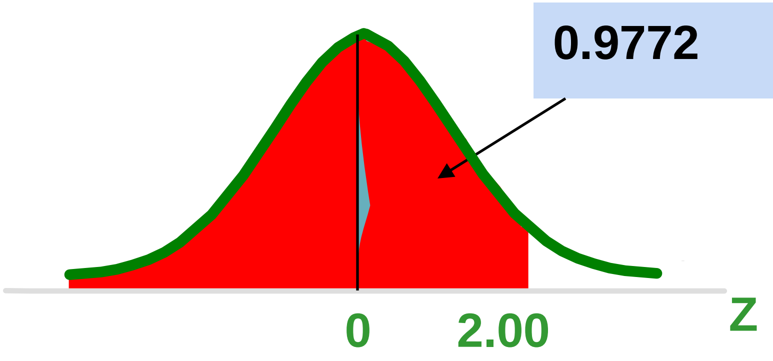
DA
IGUAL

La Tabla de la Normal Estándar

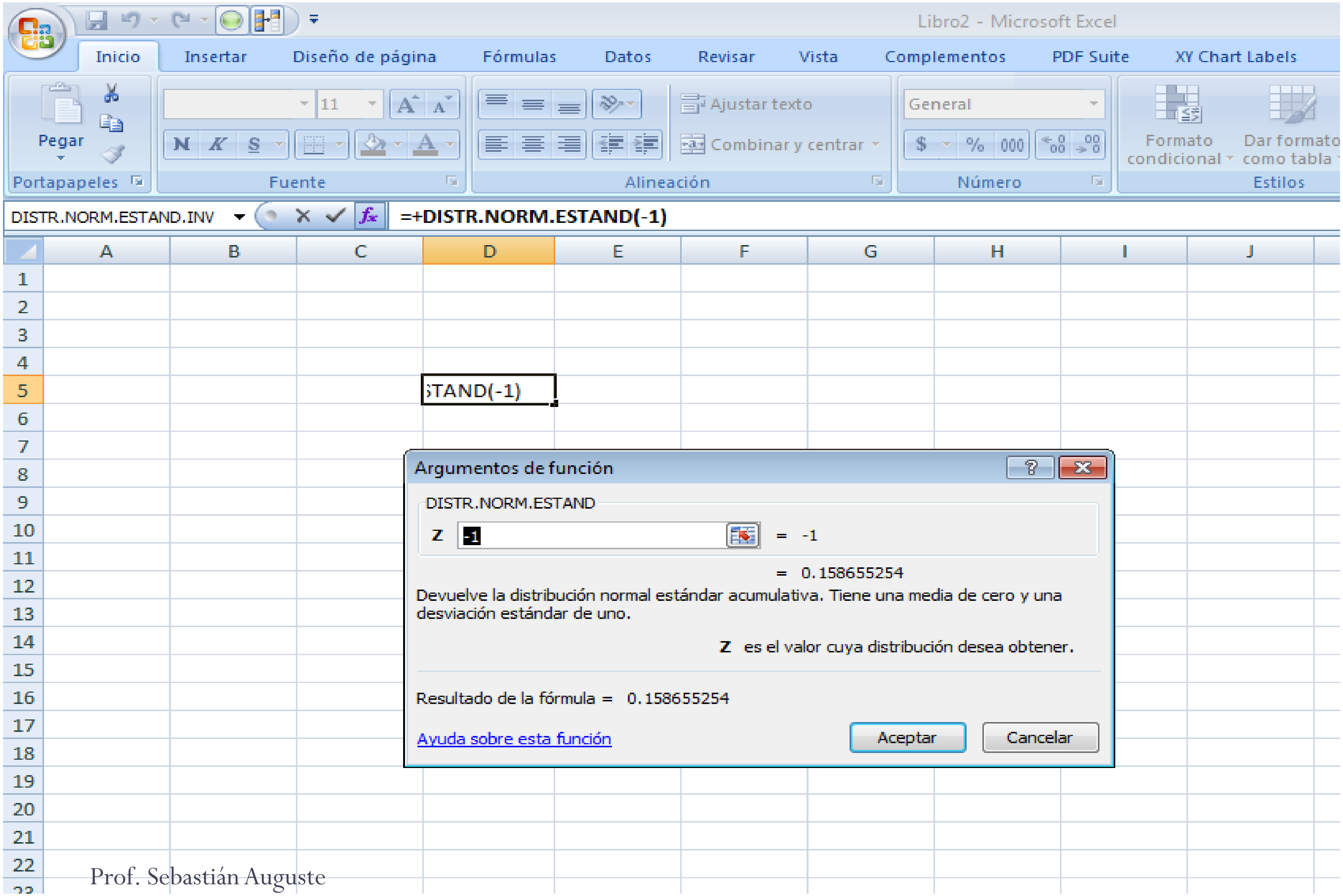
- La tabla de la Distribución Normal Estándar Acumulada da la probabilidad menor o igual a un valor deseado de Z (i.e., desde infinito negativo hasta Z).
- Es de doble entrada, puedo buscar una probabilidad para un Z dado, o puedo al revés buscar para que Z se acumula cierta probabilidad.
- Prob($z \leq -a$)=Prob($z \geq a$) porque la media es cero

Ejemplo:

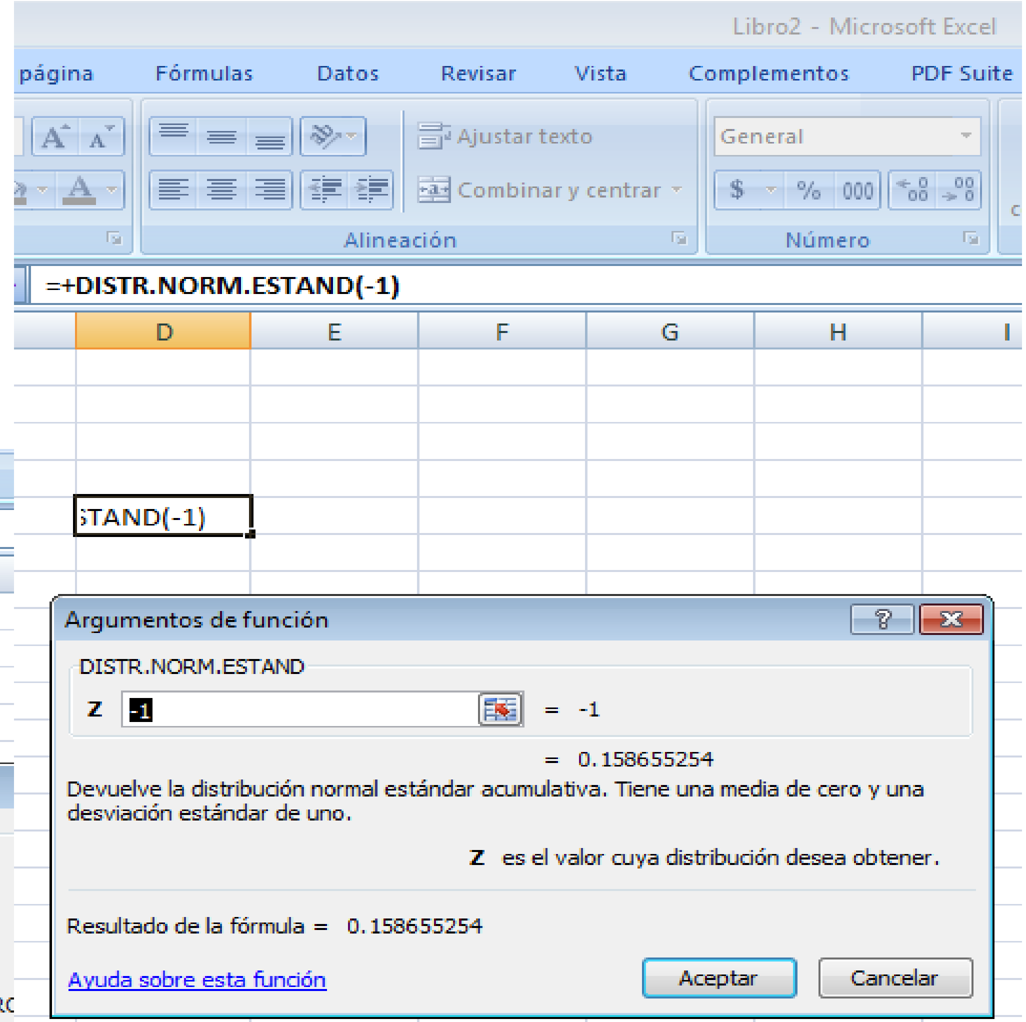
$P(Z < 2.00) = 0.9772$



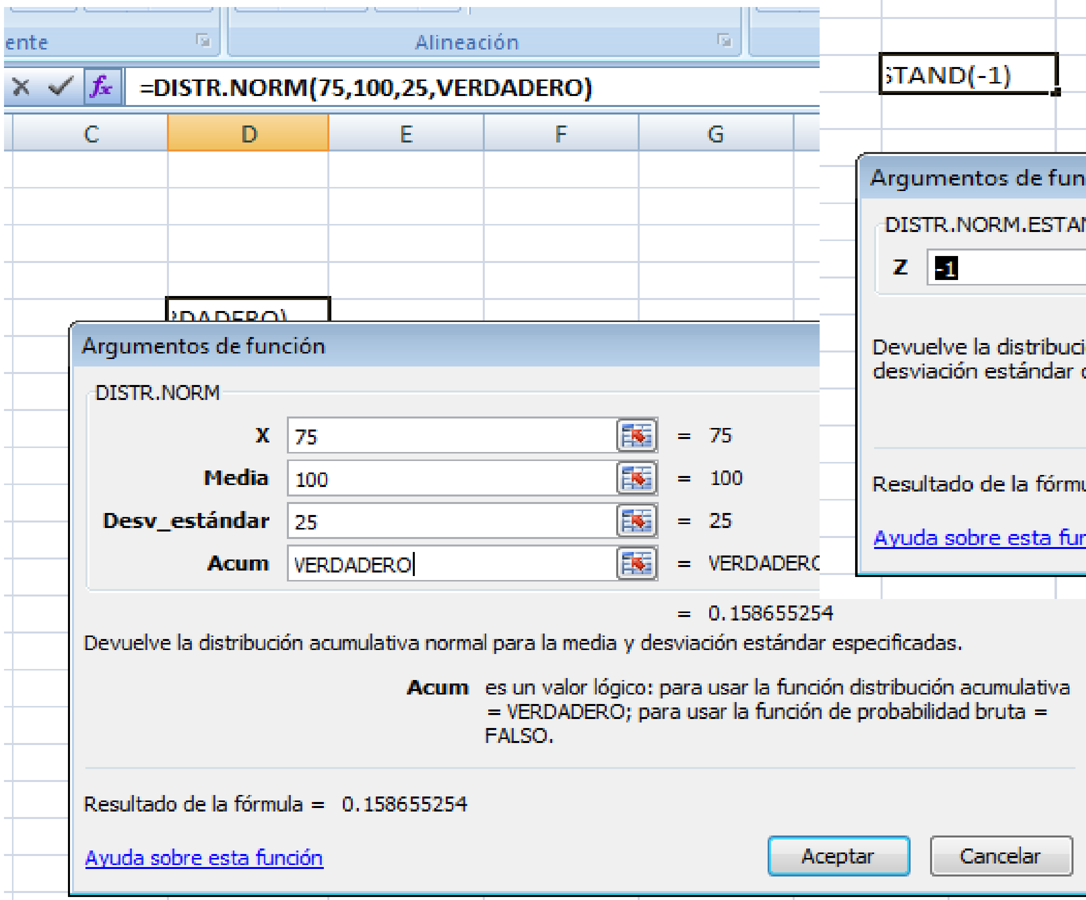
En Excel también está



DAN IGUAL!!



Libro2 - Microsoft Excel
página
Fórmulas
Datos
Revisar
Vista
Complementos
PDF Suite
Ajustar texto
Combinar y centrar
General
Alineación
Número
=+DISTR.NORM.ESTAND(-1)
D
E
F
G
H
I
STAND(-1)
Argumentos de función
DISTR.NORM.ESTAND
Z -1 = -1
= 0.158655254
Devuelve la distribución normal estándar acumulativa. Tiene una media de cero y una desviación estándar de uno.
Z es el valor cuya distribución desea obtener.
Resultado de la fórmula = 0.158655254
Ayuda sobre esta función
Aceptar
Cancelar



Alineación
=DISTR.NORM(75,100,25,VERDADERO)
C
D
E
F
G
Argumentos de función
DISTR.NORM
X 75 = 75
Media 100 = 100
Desv_estándar 25 = 25
Acum VERDADERO = VERDADERO
= 0.158655254
Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.
Acum es un valor lógico: para usar la función distribución acumulativa = VERDADERO; para usar la función de probabilidad bruta = FALSO.
Resultado de la fórmula = 0.158655254
Ayuda sobre esta función
Aceptar
Cancelar

Ejemplo del camino estandarizado

- Sea X~N(μ=2,σ²=4) compute P(X<3)

$$P(X<3)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{3-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X<3) \qquad =P\left(Z<\frac{3-2}{2}=0.5\right)$$

$$P(X<3) \quad =\Phi\left(Z<0.5\right)$$

- En el ejemplo:

$$\Phi(Z < 0.5) = 0.6915$$

$$\textit{por lo que}:$$

$$P(X < 3) = 0.6915$$

Lo llamaremos Problema 1 (encontrar una probabilidad)

- Sea $X \sim N(\mu=2, \sigma^2=4)$, si queremos saber cuál es el valor de X que acumula una probabilidad de 0.25:

$$\Phi(Z < c) = 0.25$$

-4	0	-3	0,0013	-2	0,0228	-1	0,1587	0	0,5
-3,99	0	-2,99	0,0014	-1,99	0,0233	-0,99	0,1611	0,01	0,504
-3,98	0	-2,98	0,0014	-1,98	0,0239	-0,98	0,1635	0,02	0,508
-3,97	0	-2,97	0,0015	-1,97	0,0244	-0,97	0,166	0,03	0,512
-3,96	0	-2,96	0,0015	-1,96	0,025	-0,96	0,1685	0,04	0,516
-3,95	0	-2,95	0,0016	-1,95	0,0256	-0,95	0,1711	0,05	0,5199
-3,94	0	-2,94	0,0016	-1,94	0,0262	-0,94	0,1736	0,06	0,5239
-3,93	0	-2,93	0,0017	-1,93	0,0268	-0,93	0,1762	0,07	0,5279
-3,92	0	-2,92	0,0018	-1,92	0,0274	-0,92	0,1788	0,08	0,5319
-3,91	0	-2,91	0,0018	-1,91	0,0281	-0,91	0,1814	0,09	0,5359
-3,9	0	-2,9	0,0019	-1,9	0,0287	-0,9	0,1841	0,1	0,5398
-3,89	0,0001	-2,89	0,0019	-1,89	0,0294	-0,89	0,1867	0,11	0,5438
-3,88	0,0001	-2,88	0,002	-1,88	0,0301	-0,88	0,1894	0,12	0,5478
-3,87	0,0001	-2,87	0,0021	-1,87	0,0307	-0,87	0,1922	0,13	0,5517
-3,86	0,0001	-2,86	0,0021	-1,86	0,0314	-0,86	0,1949	0,14	0,5557
-3,85	0,0001	-2,85	0,0022	-1,85	0,0322	-0,85	0,1977	0,15	0,5596
-3,84	0,0001	-2,84	0,0023	-1,84	0,0329	-0,84	0,2005	0,16	0,5636
-3,83	0,0001	-2,83	0,0023	-1,83	0,0336	-0,83	0,2033	0,17	0,5675
-3,82	0,0001	-2,82	0,0024	-1,82	0,0344	-0,82	0,2061	0,18	0,5714
-3,81	0,0001	-2,81	0,0025	-1,81	0,0351	-0,81	0,209	0,19	0,5753
-3,8	0,0001	-2,8	0,0026	-1,8	0,0359	-0,8	0,2119	0,2	0,5793
-3,79	0,0001	-2,79	0,0026	-1,79	0,0367	-0,79	0,2148	0,21	0,5832
-3,78	0,0001	-2,78	0,0027	-1,78	0,0375	-0,78	0,2177	0,22	0,5871
-3,77	0,0001	-2,77	0,0028	-1,77	0,0384	-0,77	0,2206	0,23	0,591
-3,76	0,0001	-2,76	0,0029	-1,76	0,0392	-0,76	0,2236	0,24	0,5948
-3,75	0,0001	-2,75	0,003	-1,75	0,0401	-0,75	0,2266	0,25	0,5987
-3,74	0,0001	-2,74	0,0031	-1,74	0,0409	-0,74	0,2296	0,26	0,6026
-3,73	0,0001	-2,73	0,0032	-1,73	0,0418	-0,73	0,2327	0,27	0,6064
-3,72	0,0001	-2,72	0,0033	-1,72	0,0427	-0,72	0,2358	0,28	0,6103
-3,71	0,0001	-2,71	0,0034	-1,71	0,0436	-0,71	0,2389	0,29	0,6141
-3,7	0,0001	-2,7	0,0035	-1,7	0,0446	-0,7	0,242	0,3	0,6179
-3,69	0,0001	-2,69	0,0036	-1,69	0,0455	-0,69	0,2451	0,31	0,6217
-3,68	0,0001	-2,68	0,0037	-1,68	0,0465	-0,68	0,2483	0,32	0,6255
-3,67	0,0001	-2,67	0,0038	-1,67	0,0475	-0,67	0,2514	0,33	0,6293
-3,66	0,0001	-2,66	0,0039	-1,66	0,0485	-0,66	0,2546	0,34	0,6331
-3,65	0,0001	-2,65	0,004	-1,65	0,0495	-0,65	0,2578	0,35	0,6368
-3,64	0,0001	-2,64	0,0041	-1,64	0,0505	-0,64	0,2611	0,36	0,6406
-3,63	0,0001	-2,63	0,0043	-1,63	0,0516	-0,63	0,2643	0,37	0,6443

$$\Phi(Z < c) = 0.25$$

- c=-0.67 para la N(0,1)
- Como habíamos estandarizado, para hallar X hay que hacer el camino inverso:

$$X=\sigma Z+ \mu$$

- Que implica

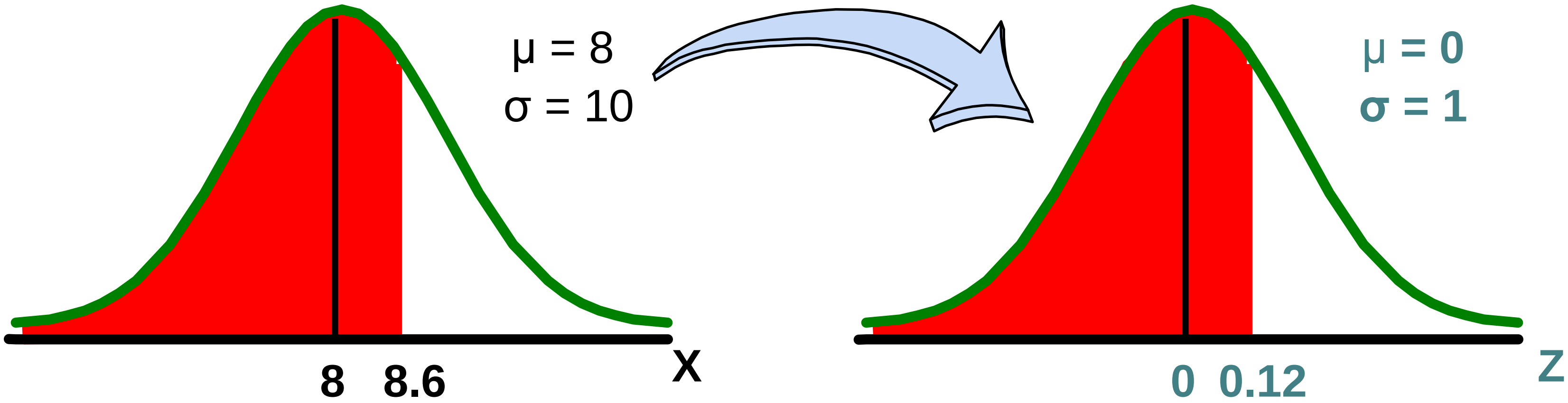
$$X= \sigma C+ \mu =2*(-0.67)+2=0.66$$

Problema 2. Dada una probabilidad, encontrar el x que la acumula

Ejemplos

[1] X~N(8, 25). Encuentre P(X < 8.6)

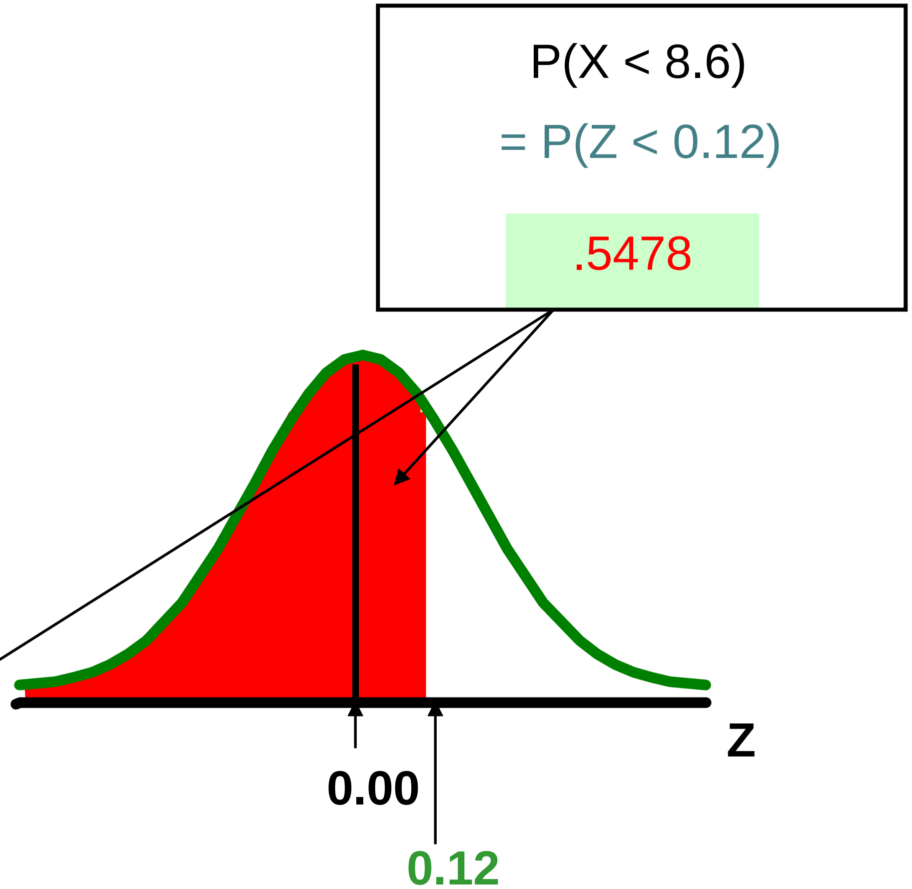
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{8.6 - 8}{5} = 0.12$$



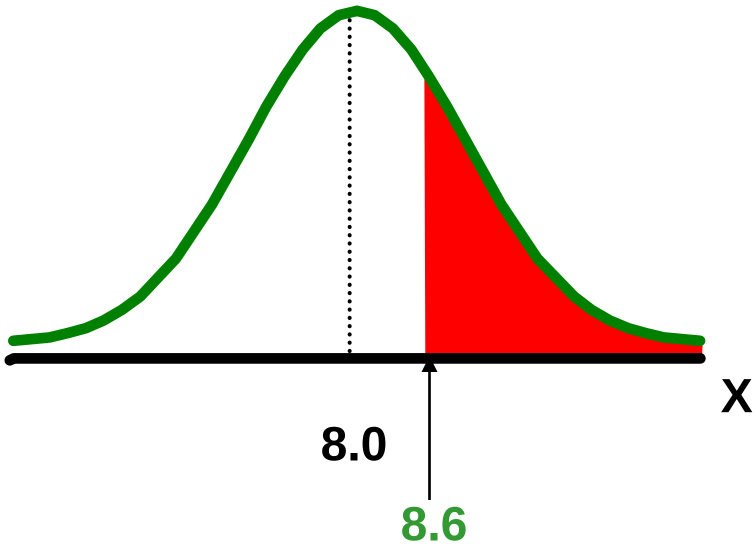
P(X < 8.6)

P(Z < 0.12)

X	Área	X	Área
-1	0,1587	0	0,5
-0,99	0,1611	0,01	0,504
-0,98	0,1635	0,02	0,508
-0,97	0,166	0,03	0,512
-0,96	0,1685	0,04	0,516
-0,95	0,1711	0,05	0,5199
-0,94	0,1736	0,06	0,5239
-0,93	0,1762	0,07	0,5279
-0,92	0,1788	0,08	0,5319
-0,91	0,1814	0,09	0,5359
-0,9	0,1841	0,1	0,5398
-0,89	0,1867	0,11	0,5438
-0,88	0,1894	0,12	0,5478
-0,87	0,1922	0,13	0,5517
-0,86	0,1949	0,14	0,5557
-0,85	0,1977	0,15	0,5596



[2] X~N(8, 25). Encuentre P(X >8.6)



$$P(X > 8.6) = P(Z > 0.12) = 1.0 - P(Z \leq 0.12)$$

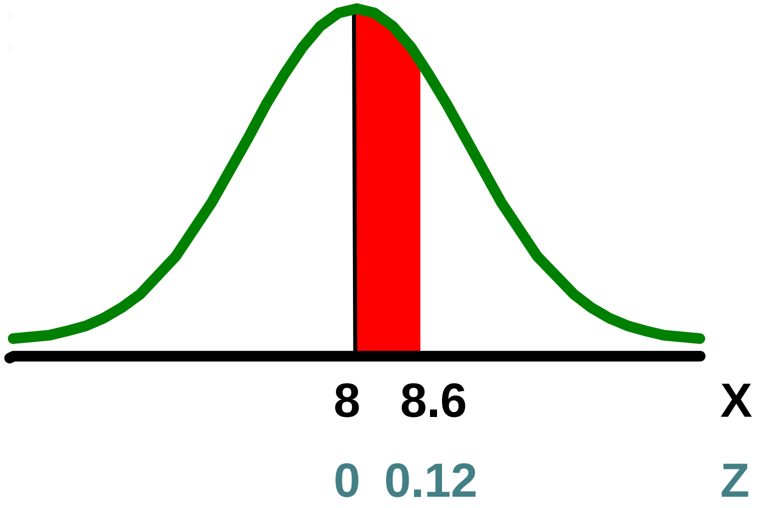
$$= 1.0 - 0.5478 = 0.4522$$

[3] X~N(8, 25). Encuentre P(8 < X < 8.6)

Calcule valores z:

$$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma = \frac{8-8}{5} = 0$$

$$z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma = \frac{8.6-8}{5} = 0.12$$



P(8 < X < 8.6)

= P(0 < Z < 0.12)

Solución: Encontrando $P(0 < Z < 0.12)$

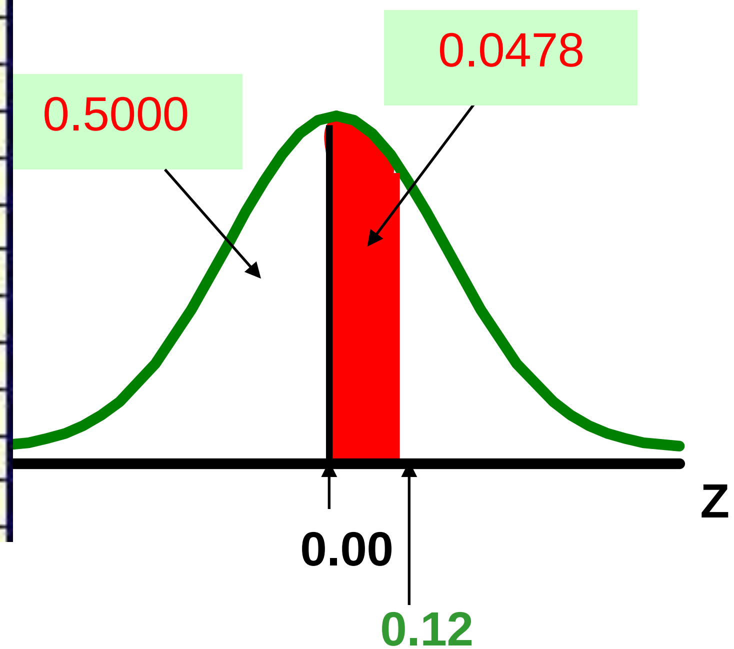
$P(8 < X < 8.6)$

$= P(0 < Z < 0.12)$

$= P(Z < 0.12) - P(Z \leq 0)$

$= 0.5478 - .5000 = 0.0478$

X	Área	X	Área
-1	0,1587	0	0,5
-0,99	0,1611	0,01	0,504
-0,98	0,1635	0,02	0,508
-0,97	0,166	0,03	0,512
-0,96	0,1685	0,04	0,516
-0,95	0,1711	0,05	0,5199
-0,94	0,1736	0,06	0,5239
-0,93	0,1762	0,07	0,5279
-0,92	0,1788	0,08	0,5319
-0,91	0,1814	0,09	0,5359
-0,9	0,1841	0,1	0,5398
-0,89	0,1867	0,11	0,5438
-0,88	0,1894	0,12	0,5478
-0,87	0,1922	0,13	0,5517
-0,86	0,1949	0,14	0,5557
-0,85	0,1977	0,15	0,5596



Encontrando el valor de X para una Probabilidad Conocida

Los pasos para encontrar el X para una probabilidad dada son:

1. Encuentre el valor Z para la probabilidad dada
2. Conviértalo a unidades de X usando la siguiente fórmula:

$$X = \mu + Z\sigma$$

Sport Obermeyer Case

- $D \sim N(1200, 130^2)$
- Problema 1 : Si producimos 1350 parkas, ¿cuál es la probabilidad de vender todo el inventario?

- Problema 2 : Calcule el inventario a mantener si queremos satisfacer la demanda con prob. 95%

Problema tipo 1

1. Reconozca que es problema de "tipo 1" $\mathbb{P}(D \leq 1350)?$

2. Caracterice VA normal con sus parámetros $D \sim N(1200, 130^2)$

3. Estandarice $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1350 - 1200}{130}\right)$

4. Calcule la prob. usando la tabla Z Busque $1.15 \rightarrow .8749$

$$\mathbb{P}(D \leq 1350) = \mathbb{P}(Z \leq 1.15)$$

Prof. Sebastián Auguste
Universidad Torcuato Di Tella

- ¿Cuál es la P(demanda sea mayor que 1400)?
- ¿Cuál es la P(demanda sea menor que 1100)?
- ¿Cuál es la P(demanda esté entre 1100 y 1350)?

Problema tipo 2

1. Reconozca que es un problema "tipo 2"

   Qué x t.q.
   $$\mathbb{P}(D \leq x) = .95$$

2. Caracterice qué tipo de normal

   $$D \sim N(1200, 130^2)$$

3. Estandarize

   Qué x t.q.
   $$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - 1200}{130}\right) = .95$$

4. Encuentre x usando la tabla Z

   $$\frac{x - 1200}{130} = 1.645$$

   (En Excel use `NORMINV`(prob,μ,σ))

   $$\Rightarrow x = 1200 + 130 \cdot 1.645$$
   $$= 1414 \text{ parkas}$$

Propiedades de las v.a. Normales

SUMA DE NORMALES ES NORMAL

- La v.a. generada por una suma (finita) de v.a. normales es normal. Es decir, si $X_1, \ldots, X_n$ son todas variables aleatorias Normales, entonces $Y = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ es también una variable aleatoria Normal (para cualquier $a_i \in \Re$).
- Por ser una v.a. continua:

$$\text{Prob}(Z<k)=\text{Prob}(Z\leq k)$$

- Por tener una distribución simétrica:

$$\text{Prob}(Z\leq -k)=\text{Prob}(Z\geq k)$$

Teorema Central del Límite (TCL)

Si X1, . . . ,Xn son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 , entonces la suma es aproximadamente normal (para n suficientemente grande)

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \rightarrow \mathrm{N}(n\mu,\, n^2\, \sigma^2)$$

Observaciones:

- Quizá alguna vez le dijeron "Como regla general, necesitamos que $n \geq 30$". Depende de cada distribución esta convergencia y por lo tanto la cantidad de observaciones para que la aproximación sea buena no puede establecerse de forma general.
- La importancia de la distribución normal está dada por el TCL

4. APLICACIONES

VaR Normal

Inventarios

1. Minicaso European Call Option

- Usted tiene una call option Europea del Citibank que vence en una semana.
- Opción europea: tan sólo se pueden ser ejercidas en una fecha determinada (fecha de ejercicio).
- Opción americana: pueden ser ejercidas a lo largo de su vida hasta la fecha de ejercicio.
- El strike price K es de 44,3 dólares, y la opción es para comprar 1000 acciones en la fecha de vencimiento.
- Para analizar la evolución del precio del Citibank, tenga en cuenta que el precio hoy es 42,85, que el retorno esperado semanal es 0,35%, y el coeficiente de variación es 17,5.
- Compute cual es la probabilidad que se ejecute la opción utilizando la distribución Normal.
- ¿Cuál sería la ganancia esperada en dólares? No lo compute, pero piense cómo lo haría

2. Minicaso West Bank

West Bank le pidió que le ayude a optimizar el funcionamiento de sus cajeros. Tiene información para cada cajero de la demanda de billetes, sabe que es Normal, y conoce la media y su desvío estándar. La regla de stock que están utilizando ahora para cargar cada cajero es la media más 20% de margen de seguridad. Los cajeros tienen 4 o 5 compartimientos (tipo B y A, respectivamente), y pueden cargar hasta 2000 unidades en cada uno de los compartimiento.

a) Realice una crítica a la regla de inventario que utiliza el banco

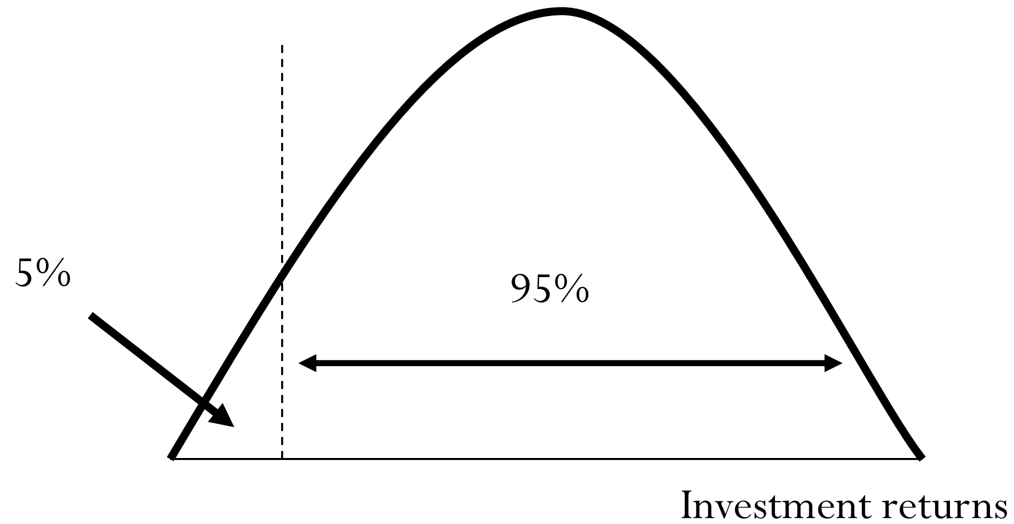
b) Proponga una regla de inventario que sea acorde con el deseo del banco, de quedarse sin billetes sólo el 10% del tiempo. Indique cuál sería la regla y muestre sus nuevos resultados. Compare con la regla que se está usando actualmente.

Tabla 1. Datos por cajero

	Demanda de billetes de $100			
Cajero	Tipo de cajero	E(D)	σ	Stock
1	A	6.750	450	8.100
2	A	7.000	350	8.400
3	B	5.750	1.850	6.900
4	B	3.500	750	4.200
5	B	5.150	2.250	6.180
Total		28.150		33.780

3. Value at Risk

- Definición:
  - Value at Risk es una estimación de la peor pérdida posible de una inversión en un período de tiempo bajo condiciones normales de mercado.
    - El VaR empírico o histórico se computa sobre la based datos históricos usando el concepto de percentil.
    - El VaR Normal computa el valor para el cual la cola de la izquierda acumula un α dado
  - Retorno VaR: llamamos así al computado sobre la distribución del retorno %.
  - VaR: sobre la inversion. $VaR = M * R_{VaR}$



Ejemplo: si un portafolio de acciones tiene un VaR diario al 5% de $1000, digo que bajo "situaciones normales" (95% de las veces) lo máximo que puedo perder es $1000.

Un ejemplo simple

- Portafolio de un único activo que tiene retorno normal con media anual 10% y desvío estándar anual 30%. El valor del portafolio hoy es $100 millones. Queremos saber respecto al retorno al final del año:

1. ¿Cuál es la probabilidad de una pérdida mayor a $20 millones?
2. ¿Cual es el VAR al 1% de confianza?

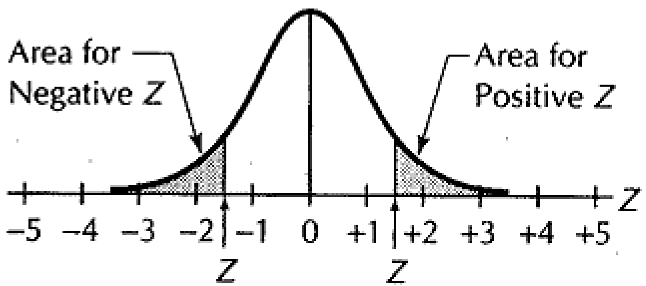
Respuesta

- Transformar $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ en $Z \sim N(0, 1)$

$$Z = \frac{R - \mu}{\sigma}$$

- Entonces $P(R < -20\%) = P(Z < -1)$

$$z = \frac{-20\% - 10\%}{30\%} = -1.0$$



Z (hundredths)

TAIL AREA

Z (tenths)	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681

- Basado en la Z-table P(R < -20%) o P(Losses>$20,000) = 15.87%.

- Para la segunda pregunta VAR(1-year; 99%)=?

  - Encontrar z tal que P(Z < z) = 1% ⇒z = -2.33

  - Recuperar r a partir de z=-2.33:

$$z = \frac{r - 10\%}{30\%} = -2.33 \Rightarrow r = -59.9\%$$

El valor inicial del portfolio es $100,000. Entonces la pérdida es = $59,900.- VAR(1-year; 99%)=59,900.

Fórmula general del VaR Normal

- R, la tasa de retorno de un activo, sigue $R \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- Para resolver el VaR usamos la estandarización

$$Z_\alpha = \frac{R_{VaR} - \mu}{\sigma}$$

- Lo que nos da la fórmula general del VaR:

$$R_{VaR} = \mu - Z_\alpha \times \sigma$$

- En retornos diarios se suele asumir $\mu=0$ y nos queda

$$R_{VaR} = -Z_\alpha \times \sigma$$

Sobre el VaR Normal

- Notar que si R es Normal

$$R_{VaR} = -Z_{\alpha} \times \sigma$$

- Por lo que el VaR es una transformación monótona de σ. En otras palabras, NO nos da una medida distinta de riesgo. Es el σ multiplicado por una constante.
- Resumiendo: si R es Normal, no hay riesgo de asimetría, no hay riesgo de curtosis, y el VaR es lo mismo que , por lo que hay una única medida de riesgo relevante, σ!!

The Two Parameter Model

- Al inversor sólo le importa la media y el desvío estándar de los retornos.
- Dos justificaciones:

a) Retornos Normales (porque aquí sigma es la única medida de riesgo)

b) Función de utilidad cuadrática (porque aquí al inversor sólo le importa la varianza, y ninguna otra medición de riesgo le es relevante)

4. Minicaso. VaR del VAN

- Un cliente de su consultora está evaluando una inversión en Indochina que requiere un gasto inicial (período 0) de 10.000, y que luego en los períodos 1 y 2 da un beneficio V_1 y V_2. Asuma que la tasa de descuento para evaluar este proyecto es r=10% (dicha tasa es un valor conocido y no una variable aleatoria). Si los beneficios siguen la siguiente distribución:
- $\begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 15.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.000.000 & 960.000 \\ 960.000 & 1.440.000 \end{bmatrix} \right)$
- Compute el Value at Risk (VaR) del VAN (Valor Actual Neto) de dicha inversión.

Anexo

Otras Distribuciones Continuas

Chi-cuadrado

- Sean $Z_1, Z_2, ..Z_n$ variables aleatorias independientes normales con media 0 y varianza 1.
- $X_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ tiene distribución Chi-Cuadrado con n grados de libertad.

T-Student

- Sean Z una variables aleatorias normal con media 0 y varianza 1.
- Sea X_n^2 con distribución Chi-Cuadrado con n grados de libertad independiente de Z.
- $T = \frac{z}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}}$ tiene distribución T-Student con n grados de libertad.

F-Snedecor

- Sea $X_{n_1}^2$ con distribución Chi-Cuadrado con n_1 grados de libertad.
- Sea $X_{n_2}^2$ con distribución Chi-Cuadrado con n_2 grados de libertad independiente de $X_{n_1}^2$.
- $F = \frac{\frac{X_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{X_{n_2}^2}{n_2}}$ tiene distribución F_{n_1,n_2}

Uniforme (a,b)

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \, si \; a \leq x \leq b \\ 0 \; en \; caso \; contrario \end{cases}$
- En Excel Rand() genera números aleatorios en el intervalo (0,1).
- Si quieren en el intervalo (a,b) usar Rand()*(b-a)+a.
- La uniforme asigna probabilidad sólo a valores de la variable aleatoria en determinado rango pero sin diferenciar entre ellos.