Instrumentos de Mercado de Capitales

Clase 4 y 5

Carteras

- Dijimos que para una cartera de 2 activos con retornos inciertos:

$$E(R_c) = \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) = \omega_1 E(R_1) + (1-\omega_1)E(R_2),$$

$$\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12}$$

$$\begin{aligned}\sigma_c &= [\omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_{12}]^{1/2} = \\ &= [\omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]^{1/2}.\end{aligned}$$

- Analizacemos tres casos sobre posibles movimientos comunes entre los rendimienos de los dos activos. Supongamos que los rendimienlos esperados y volatilidades de los activos son:

Activos	Rendimiento esperado	Volatilidad
1	16%	10%
2	10%	4%

Caso 1: $\rho_{12}=1$

- Supongamos correlacion perfecta y positiva entre los rendimientos de ambos activos.

- El desvio de la cartera quedaria:

$$\sigma_c = [\omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}.$$

$$\sigma_c = \left\{[\omega_1\sigma_1 + (1-\omega_1)\sigma_2]^2\right\}^{1/2}$$

$$\sigma_c = \omega_1\sigma_1 + (1-\omega_1)\sigma_2$$

→ el desvio estandar de una cartera de activos perfecta y positivamente correlacionados es una combinacion lineal del desvio estandar de cada activo.

El retorno de una cartera siempre es una combinacion lineal de los retornos individuales. En el caso del desvio estandar, esto solo es asi cuando la correlacion entre los activos es 1.

Caso 1: ρ_{12}=1

- Dado que cuando ρ_{12}=1 el rendimiento esperado y el desvio estandar son combinaciones lineales de los rendimientos y desvios individuales, todas las posibles combinaciones de ambos activos en el espacio media-desvio estandar estan situadas en una linea recta.

- Usando los datos del ejemplo:

$$E(R_c) = 16\omega_1 + 10(1-\omega_1) = 10 + 6\omega_1$$

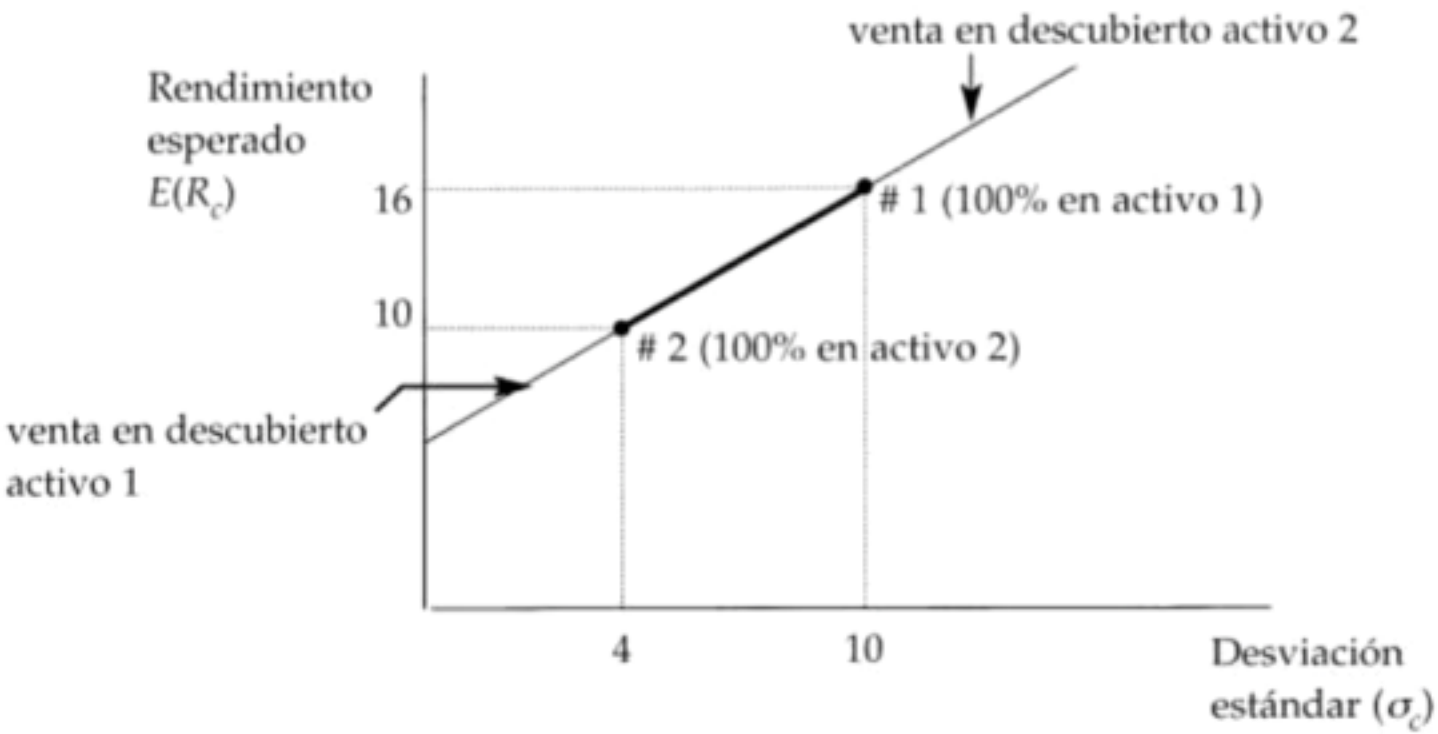
$$\sigma_c = 10\omega_1 + 4(1-\omega_1) = 4 + 6\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_c}{6} - \frac{4}{6}$$

$$E(R_c) = 10 + 6\left(\frac{\sigma_c}{6} - \frac{4}{6}\right) = 6 + \sigma_c$$

→ Podemos encontrar una relacion lineal entre E(Rc) y el desvio de la cartera

Caso 1: ρ_{12}=1

- Graficamente:



- Todas las posibles combinaciones de activo 1 y 2 dan una cartera con retorno esperado y desvio estandar sobre esta linea recta

Cartera de minima varianza

- Cartera de minima varianza: cual es la combinacion de activos que minimiza la varianza de la cartera?

Minimizamos la varianza:

$$\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

$$\frac{d\sigma_c^2}{d\omega_1} = 2\omega_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2\omega_1\sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 4\omega_1\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2 = 0.$$

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

- Ejemplo: para $\rho_{12} = 1$ y las mismas varianzas del ejemplo anterior, la cartera de minima varianza es la que esa invertida w_1=-0.667 en el activo 1 y w_2=1.667 en el activo 2. El rendimiento esperado de la cartera de MV es -0.667*E(R_1)+1.667*E(R_2)=5.99% y la varianza es 0.
- Ejemplo de esto en la practica: una opcion y su activo subyacente
- Ntar: respuesa si no se permite venta en corto es muy distinta.

Venta en corto

- Para ilustrar la mecanica de venta en corto, supongamos que un inversor esta pesimista (“*bearish*”) en la accion XYZ.
- Precio de la accion XYZ = $100.
- El inversor le pide a su broker que venda en corto 1,000 acciones.
- El broker toma prestado 1,000 acciones de XYV de otro inversor u otro broker.
- La venta en corto genera $100,000 que son depositados en la cuenta del inversor.
- El broker tiene un requerimiento de colateral para las ventas en corto de 50%.
- Es decir, el inversor debe tener cash o activos en su cuenta equivalentes por al menos $50,000.
- Supongamos que el precio de la accion XYZ cae a $70.
- Para cerrar la posicion, el inversor tiene que cubrir la venta comprando la accion XYZ por $70,000, usando parte de los $100,000 que fueron acreditados en su cuenta al momento de la venta.
- La ganancia es $100,000 - $70,000 = $30,000.
- Es decir, ganancia = $-(P_{compra} - P_{venta})$*cant de acciones

Valuacion por arbitraje

- La valoracion de activos usa el concepto de ausencia de abitraje como supuesto fundamental.

- Es conceptualmente diferente de la valoracion de activos que resulta de modelos de equilibrio (consumidores que bajo ciertas preferencias y dotaciones, maximizan una funcion de utilidad)

.

- La valuacion mediante arbitraje no hace referencia a las funciones de demanda, preferencias o dotaciones. Simplemente dice que si un conjunto de precios prevalece en el mercado, entonces los precios deben relacionarse de forma que no presenten oportunidades de arbitraje.

- Arbitraje: oportunidad de inversion que permite obtener dinero a cambio de nada. El ejemplo mas sencillo es cuando en dos mercados se estan negociando el mismo activo a precios distintos

- Estrategia de arbiraje consistiria en comprar el activo en el mercado donde se vende mas barato y venderlo simultaneamente en el mercado donde se vende a precio mas alto: **comprar barato y vender caro dos activos/carteras equivalentes.** Esto supone un mercado sin fricciones, impuestos, costos de transaccion, y sin restricciones a la venta en corto.

- **El supuesto es que los precios deben ser tales que no existen oportunidades de arbitraje.**

Ejemplo: opciones

Opcion de compra: contrato que da la opcion al comprador de comprar un activo subyacente a un precio de ejercicio, a cambio de una prima.

- El pago de la opcion a vencimiento es = $max\{P_{AT}-P_{E,}0\}$
- La opcion se compra a un precio *p*.
- Queremos valuar el precio de la opcion de compra (*p*) sobra una accion cuyo precio actual es igual a \$60 (P_{A0}). El valor de la accion al vencimiento de la opcion sera igual a \$75 (P_{ATB}) en el escenario bueno o \$48 en el escenario negativo (P_{ATM}). La tasa libre de riesgo es 3%. El precio de ejercicio de la opcion es \$65 (P_E).
- Una forma de valuar esta opcion es a traves de la construccion de una cartera con varianza 0. Esto se logra con una cartera con posicion en la accion subyacente y en la opcion.
- Supongamos una cartera que tiene una posicion larga en la accion y una posicion corta en la opcion de compra. Debemos calcular la cantidad de acciones por contrato de opcion (Δ) tal que la cartera no tenga riesgo.

Ejemplo: opciones II

- Valor cartera escenario bueno: $75^* \Delta - 10$
- Valor cartera escenario malo: $48^* \Delta$
- Como son activos perfectamente y positivamente correlacionados: cartera de MV = varianza 0 = mismo retorno en todos los escenarios. Entonces:

$$75^* \Delta - 10 = 48^* \Delta$$

$$\Delta = 0.3704$$

→ La cartera de minima varianza tiene riesgo 0 y consiste en una posicion larga en la accion de 0.3704 *y* una posicion corta en la opcion de compra de 1 contrato.

→ Esta cartera da un pago de 17.78 en cualquier escenario. Es libre de riesgo.

→ Su valor presente es por lo tanto:

$$17.78/(1.03)=16.16$$

Para evitar arbitraje, 16.16 debe de ser el precio de comprar esta cartera. Obtenemos asi el precio de la opcion:

$$65^*0.3704-p=16.16$$

$$p=6.06$$

- Tambien se puede obtener este resultado usando el grafico de media-varianza, conociendo la volatilidad de la opcion y de la accion subyacente.

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Supongamos ahora correlacion perfecta y negativa entre los rendimientos de ambos activos.

- El desvio de la cartera quedaria:

$$\sigma_c = \left[\omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2\sigma_2^2 - 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_1\sigma_2\right]^{1/2},$$

$$\sigma_c = \left\{\left[\omega_1\sigma_1 - (1-\omega_1)\sigma_2\right]^2\right\}^{1/2} \text{ o,}$$
$$= \left\{\left[-\omega_1\sigma_1 + (1-\omega_1)\sigma_2\right]^2\right\}^{1/2},$$

$$\sigma_c = \omega_1\sigma_1 - (1-\omega_1)\sigma_2 \text{ o,}$$
$$\sigma_c = -\omega_1\sigma_1 + (1-\omega_1)\sigma_2.$$

→ todas las posibles combinaciones de rendimiento esperado-volatilidad que podemos conseguir con ambos activos cuando ρ_{12} = - 1 estan situadas en una linea recta con dos tramos. EN que tramo nos situamos depende del valor de w_1

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Recordar que la cartera de MV daba:

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

- Sustituyendo para ρ_{12}=-1:

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2(\sigma_2 + \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

- Como sigue siendo cierto en una linea recta que la cartera de MV tiene desvio 0, para el primer tramo de la recta tenemos que:

$$\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2 = \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 = 0,$$

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Para obtener una volatilidad mayor 0 igual a cero, debe ser cierto que el primer tramo de la recta sea mayor o igual al de MV:

$$\sigma_c = \omega_1\sigma_1 - (1-\omega_1)\sigma_2 \ \text{ si } \ \omega_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

- Similar para el segundo tramo de la recta:

$$\sigma_c = -\omega_1\sigma_1 + (1-\omega_1)\sigma_2 \ \text{ si } \ \omega_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

- Notar que en este caso no es necesario la venta en corto para obtener una cartera con riesgo 0, ya que en este caso cartera de MV es con $0 \leq w_1 \leq 1$.

- Ejemplo: Una opcion de venta tiene una correlacion igual a **- 1** con su accion subyacente. Combinando una opcion de venta con su accion subyacente, con ponderaciones positivas, se cancela completamenle el riesgo de la cartera con las ponderadones de varianza minima

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Ejemplo con los activos de la tabla anterior y ρ_{12}=-1, el conjunto de oportunidades de inversion en el plano de media-desvio:

$$E(R_c) = 10 + 6\omega_1$$
$$\sigma_c = 10\omega_1 - 4(1-\omega_1) \text{ o,}$$
$$\sigma_c = -10\omega_1 + 4(1-\omega_1).$$

- La cartera de minima varianza (riesgo nulo en este caso) es:

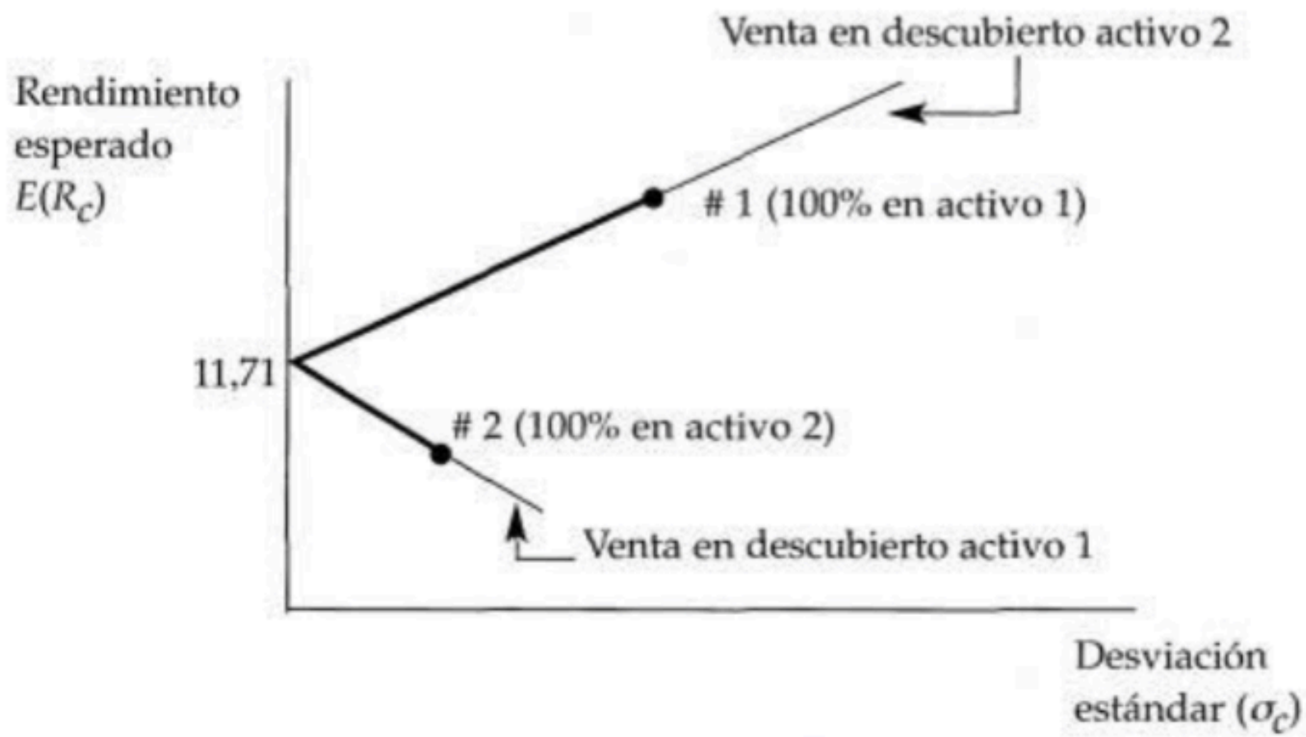
$$\omega_1^* = \frac{4}{10+4} = 0{,}2857$$
$$\omega_2^* = 0{,}7143.$$

- El rendimiento esperado y volatilidad de la cartera de minima varianza son

$$E(R_c) = 10 + 6(0{,}2857) = 11{,}71$$
$$\sigma_c = 10(0{,}2857) - 4(0{,}7143) = 0 \text{ o,}$$
$$\sigma_c = -10(0{,}2857) + 4(0{,}7143) = 0.$$

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Graficamente:



- Las posibilidades de diversificacion son maximas, ya que los movimientos de los rendimientos tienden a cancelarse de manera que es posible combinar los dos activos sin necesitar venta en corto y eliminar completamente el riesgo de la cartera.

Caso 2: ρ_{12}=-1

- Posibles combinaciones de retorno esperado y desvio para distintos w_1:

ω_1 (%)	0	15	25	28,57	35	50	70	100
$E(R_c)$ (%)	10,00	10,90	11,50	11,71	12,10	13,00	14,20	16,00
σ_c (%)	4,00	1,90	0,50	0	0,90	2,00	5,80	10,00

- Notar que a lo largo del tramo con pendiente negativa, podemos aumentar el rendimiento esperado y, al mismo tiempo, disminuir la volatilidad de la cartera. En el tramo positivo, mas rendimiento esperado viene de la mano de mas volatilidad.

- Las ecuaciones de ambos tramos (con pendientes positiva y negativa) se obtienen al sustituir las dos ecuaciones de la volatilidad en la ecuacion del rendimiento esperado:

$$E(R_c) = 11{,}71 + (3/7)\sigma_c$$
$$E(R_c) = 11{,}71 - (3/7)\sigma_c.$$

Caso 3: $-1<\rho_{12}<1$

- Este es el caso mas comun. Todas las combinaciones posibles de rendimiento esperado-volatilidad estan situadas a lo largo de una hiperbola. Recordar que:

$$\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12},$$

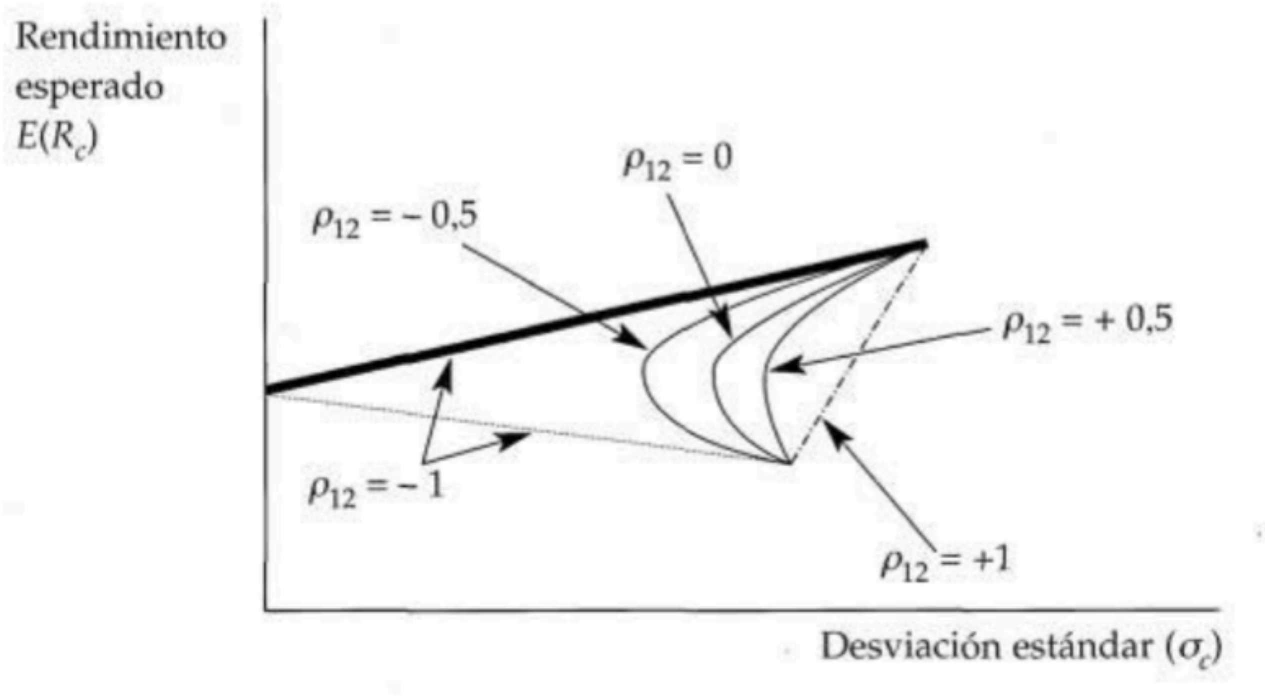
$$\text{cov}(R_1, R_2) \equiv \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

- La volatildiad de la cartera es mas chica cuanto menor es $\rho_{12:}$: el desvio estandar de una cartera con dos activos y ponderaciones positivas es menor que el promedio ponderado de las volatilidades de los activos que la componen.

- Estos hace aparecer la curvatura de la hiperbola del conjunto de oportunidades de inversion: su curvatura depende del coeficiente de correlacion, cuanto menor la correlacion, mayor curvatura

- Veamos graficamente (sin venta en corto). Dada una determinada ponderacion/rendimiento esperado de la cartera, la correspondiente volatilidad sera menor cuanto mas bajo sea el coeficiente de correlacion. Las ventajas de diversificacion son mayores cuanto mas chica es la correlacion entre activos de una cartera.

Caso 3: $-1<\rho_{12}<1$



Usando los datos del ejemplo en la tabla, el conjunto de posibiliadades de inversion queda:

$$E(R_c) = 10 + 6\omega_1$$

$$\sigma_c = \left[10^2\omega_1^2 + 4^2\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2(10)(4)\rho_{12}\right]^{1/2},$$

Caso 3: $-1<\rho_{12}<1$

- Ejemplos de combinaciones de retorno esperado y desvio para el ejemplo anterior:

ω_1 (%)	0	20	40	60	80	100
$E(R_c)$ (%)	10,00	11,20	12,40	13,60	14,80	16,00
$\rho_{12} = -0,5$ σ_c (%)	4,00	2,80	3,49	5,38	7,63	10,00
$\rho_{12} = 0,0$ σ_c (%)	4,00	3,77	4,66	6,21	8,04	10,00
$\rho_{12} = +0,5$ σ_c (%)	4,00	4,54	5,60	6,94	8,43	10,00

- Nota: el rendimiento esperado de la cartera es independiente del grado de correlacion de los activos, mientras que la volatilidad depende del coeficiente de correlacion supuesto.
- Dada una cartera, su volatilidad aumenta a mayor coeficiente de correlacion. Notar que en la ultima fila del cuadro, cuando el coeficiente de correlacion es +0.5 la inversion en 100% el activo 2 tiene una volatilidad menor que la volatilidad de la cartera que tiene algo del activo 1. Las ventajas de la diversificacion tienden a desaparecer cuanto mas positivamente correlacionados esten los activos de una cartera.

Caso 3: $-1<\rho_{12}<1$

- Ejemplo:

Supongamos que los rendimientos esperados de dos activos inciertos son 10% y 4%, mientras que sus volatilidades son 5% y 2%, respectivamente. Imagine los siguientes tres casos: $\rho_{12} = +1$; $\rho_{12} = 0$; $\rho_{12} = -1$. Suponiendo que no se admiten las ventas al descubierto se pide:

a) La cartera de varianza mínima en cada uno de los tres casos:

La ponderación del activo #1 que nos permite obtener la cartera con volatilidad más pequeña viene dada por la expresión:

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

- $\rho_{12} = +1$: Al no haber ventas al descubierto, la cartera de varianza mínima se obtiene invirtiendo el 100% en el activo #2.
- $\rho_{12} = 0$: En este caso, la expresión de la cartera de mínima varianza es

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{4}{9} = 0{,}138$$

$$\omega_2^* = 0{,}862.$$

- $\rho_{12} = -1$: Ahora, la expresión de la cartera de mínima varianza es

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{2}{7} = 0{,}286$$

$$\omega_2^* = 0{,}714.$$

Caso 3: $-1<\rho_{12}<1$

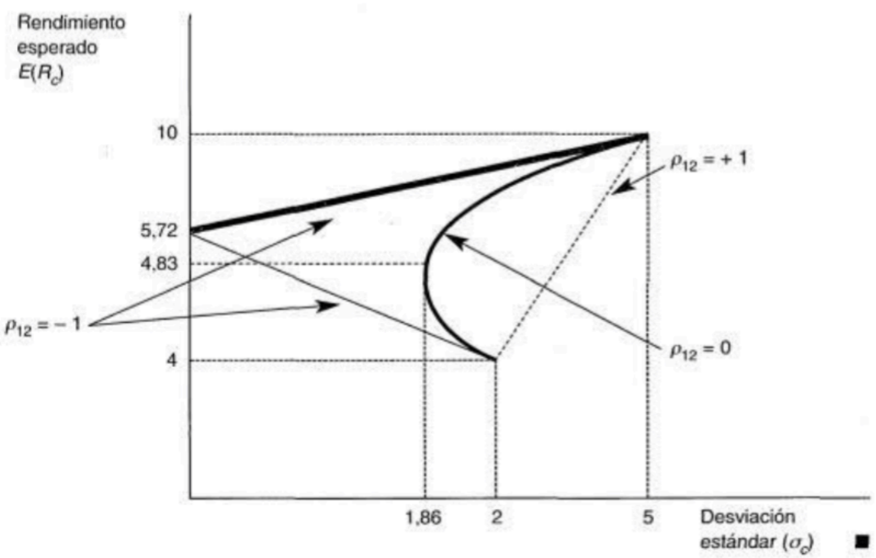
b) El rendimiento esperado y la volatilidad que tiene la cartera con desviación estándar más pequeña en cada uno de los tres niveles del coeficiente de correlación:

- $\rho_{12} = +1$: $E(R_c) = 4\%$ y $\sigma_c = 2\%$
- $\rho_{12} = 0$:

$$E(R_c) = (0{,}138)(10) + (0{,}862)(4) = 4{,}828\%$$

$$\sigma_c^2 = (0{,}138)^2(25) + (0{,}862)^2(4) = 3{,}448 \Rightarrow \sigma_c = 1{,}857\%$$

c) El conjunto de oportunidades de inversión para los tres niveles del coeficiente de correlación:



Carteras con activo libre de riesgo

- Supongamos ahora una caretera compuesta por un activo riesgoso + un activo libre de riesgo

- La varianza de la cartera es:

$$\sigma_2^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2,$$

y su desvio estandar esta dado por dos alternativas dependiendo de si $w_1>0$ o $w_1<0$:

$$\sigma_c = \omega_1 \sigma_1$$

$$\sigma_c = -\,\omega_1 \sigma_1.$$

→ tambien es cierto que el desvio estandar de la cartera es el valor absoluto del promedio ponderado de las volatilidades de ambos activos

- Para cualquier $w_1<1$ la volailidad de la cartera es menor que estar invertido 100% en el activo 1.

- Si la ponderacion en el activo seguro es negativa (una ponderadon mayor que 1 en el activo incierto), la volatilidad de la cartera sera superior a estar 100% invertido en el activo 1 (posicion apalancada).

Carteras con activo libre de riesgo

- El conjuno de oportunidades de inverson es:

$$E(R_c) = \omega_1 E(R_1) + (1 - \omega_1) r$$

$$\sigma_c = (\omega_1^2 \sigma_1^2)^{1/2} = \omega_1 \sigma_1$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_1},$$

- Sustituyendo, obtenemos el conjunto de oportunidades de inversion (todos los pares posibles de rendimiento esperado-volatilidad que pueden alcanzarse combinando un activo incierto y un activo seguro):

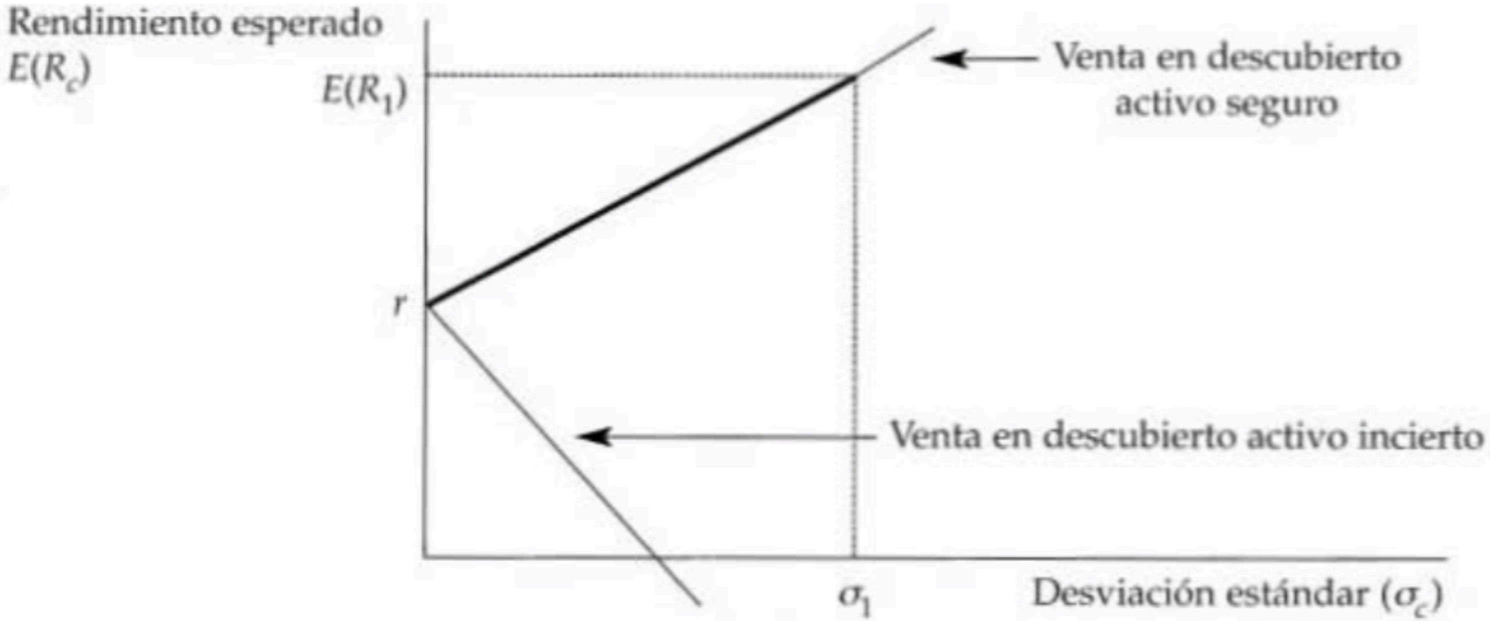
$$E(R_c) = \frac{\sigma_c}{\sigma_1} E(R_1) + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_1}\right) r$$

$$E(R_c) = r + \left[\frac{E(R_1) - r}{\sigma_1}\right] \sigma_c$$

→ el conjunto de oportunidades de inversion estan situadas a lo largo de una linea recta en el espacio rendimiento esperado-desvio estandar.

Carteras con activo libre de riesgo

- Graficamente (interseccion = r, pendiente = $E(R_1)$-r/σ_1):



Carteras con activo libre de riesgo

- Para el tramo con pendiente negativa (w1<0), la volatlidad de la cartera viene dada por:

$$\sigma_c = -\omega_1 \sigma_1,$$

La ponderacion es:

$$\omega_1 = -\frac{\sigma_c}{\sigma_1},$$

Remplazamos en la ecuacion de retorno de la cartera para obtener la ecuacion de la recta del tramo con pendiente negativa:

$$E(R_c) = r - \left[\frac{E(R_1) - r}{\sigma_1}\right]\sigma_c.$$

Ejemplo

- Dos activos inciertos, R_1=-100%, R_2 = 15% con probabilidad 10%, R_1=50%, R_2 = 15% con probabilidad 80%, R_1=50%, R_2 = 165% con probabilidad 10%,

1. Calcular rendimientos esperados, varianzas y covarianzas para cada activo:

$$
\begin{aligned}
E(R_1) &= 0.1(-1.0) + 0.8(0.5) + 0.1(0.5) = 0.35\ (35\%) \\
\mathrm{var}(R_1) &\equiv \sigma_1^2 = 0.1(-1.0 - 0.35)^2 + 0.8(0.5 - 0.35)^2 + 0.1(0.5 - 0.35)^2 = 0.2025 \\
\Rightarrow \sigma_1 &= 0.45\ (45\%)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(R_2) &= 0.1(0.15) + 0.8(0.15) + 0.1(1.65) = 0.30\ (30\%) \\
\mathrm{var}(R_2) &\equiv \sigma_2^2 = 0.2025 \\
\Rightarrow \sigma_2 &= 0.45\ (45\%)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(R_1, R_2) \equiv \sigma_{12} &= 0.1(-1.0 - 0.35)(0.15 - 0.30) \\
&+ 0.8(0.5 - 0.35)(0.15 - 0.30) \\
&+ 0.1(0.5 - 0.35)(1.65 - 0.30) = 0.0225.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

2. Determinar conjuntos de posibilidades de inversion con distintos ponderadores:

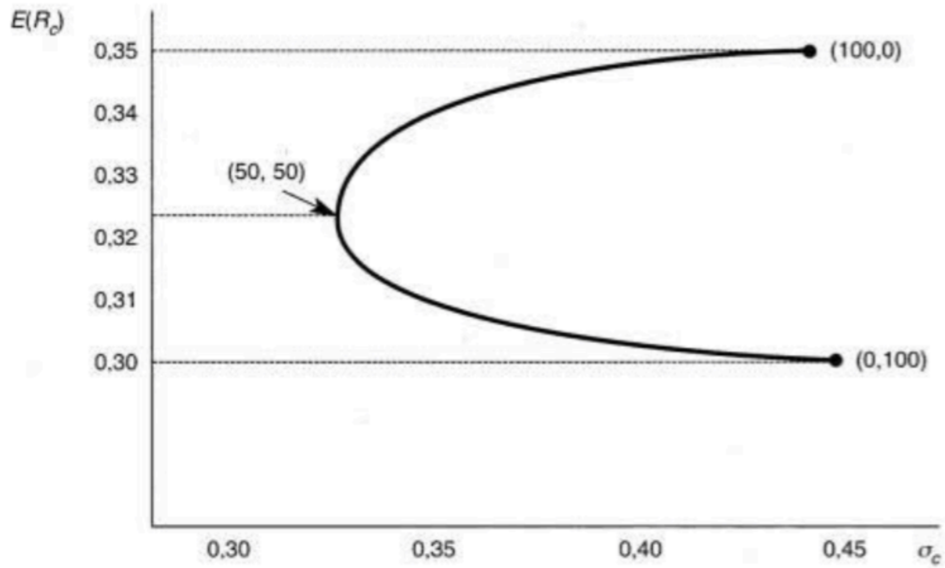
% en #1	% en #2	$E(R_c)$ (%)	σ_c^2	σ_c (%)
100	0	35,00	0,2025	45,0
75	25	33,75	0,1350	36,7
50	50	32,50	0,1125	33,5
25	75	31,25	0,1350	36,7
0	100	30,00	0,2025	45,0

3. Obener la CMV:

$$\omega_1^* = \frac{\sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} = \frac{0{,}2025 - 0{,}0225}{0{,}2025 + 0{,}2025 - (2)(0{,}0225)} = 0{,}50.$$

4. Que carteras son eficientes?
5. El activo 1 domina en media-varianza al activo 2?

Carteras con activo libre de riesgo



- Ej 2: σ_1 = 30%, σ_2 =10%, $E(R_1)$=20%, $E(R_2)$=?. p_{12}=-1, r=10%

Sabemos que si p_{12}=-1 podemos armar una cartera con los dos activos con riesgo nulo.

$$\sigma_c^2 = \omega^2(900) + (1-\omega)^2(100) + 2\omega(1-\omega)(-1)(30)(10) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = 25\%$$

$$\Rightarrow (1-\omega) = 75\%.$$

$$E(R_c) = 0{,}25(20) + 0{,}75E(R_2) = 10$$

$$\Rightarrow E(R_2) = 6{,}67\%. \blacksquare$$

Covarianza como varianza marginal

- La *varianza marginal* es un cambio en la varianza de una cartera ante un aumento infinitesimal en la ponderacion que tiene un determinado activo de la cartera. La covarianza entre el rendimiento de un activo y el rendimiento de la cartera es la varianza marginal.

- Imaginemos que, dada una cartera *c,* compramos una pequeña cantidad adicional del activo *j* y mantenemos constante la inversion en el resto de los activos.

- *Sea z* la cantidad de $ adicionales invertidos en el activo *j* por cada $ invertido en la cartera c. Suponemos que es financiada por una posicion corta en el activo seguro, tal que la suma de las ponderaciones siga siendo igual a 1.

- El nuevo rendimiento de la cartera c y su varianza viene dado por:

$$R_c^* = R_c + z(R_j - r)$$

$$\sigma_c^{2^*} = \sigma_c^2 + z^2\sigma_j^2 + 2z\sigma_{jc}.$$

- La varianza marginal esta dada por la derivada de la varianza de la nueva cartera con la cantidad adicional del activo *j,* evaluada en z=0:

- L

Covarianza como varianza marginal

- Eso da:

$$\frac{\partial \sigma_c^{2*}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 2\sigma_{jc}.$$

→ la covarianza entre el rendimiento del activo *j* y el rendimiento de la cartera puede interpretarse como la contribucion al riesgo de la varianza de una cartera de un pequeño aumento en la cantidad invertida en el activo *j.*

→ la varianza de una cartera sera mayor si se añade un activo cuya correlacion con el rendimiento de la cartera es positivo, mientras que la varianza disminuira si añadimos un activo negativamente correlacionado con el rendimiento de la cartera.

- Este resultado es valido solo cuando el *j* no se convierte en un componente muy importante de la cartera. Es decir, la covarianza representa la varianza marginal solo cuando la cartera esta bien diversificada (no hay un activo que es dominante)

- Si lo financiamos con venta en corto de otro activo incierto, el retorno y varianza de la cartera queda:

$$R_c^* = R_c + z(R_j - R_h),$$

.

Covarianza como varianza marginal

$$\sigma_c^{2^*} = \sigma_c^2 + z^2(\sigma_j^2 + \sigma_h^2 + 2\sigma_{jh}) + 2z\text{cov}(R_c, R_j - R_h).$$

Derivando en z=0:

$$\frac{\partial \sigma_c^{2^*}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 2(\sigma_{jc} - \sigma_{hc}).$$

→ La varianza marginal es la diferencia entre la covarianzas del rendimiento de *j* con la cartera *c* y la covarianza de h con la cartera *c.*

→ si la diferencia entre las covarianzas es positiva, un aumento en la posicion de j en la cartera (reduciendo la posicion de h) aumenta la varianza de la cartera, si la diferencia es negativa, un incremento del activo j en la cartera reduce el riesgo de la cartera.

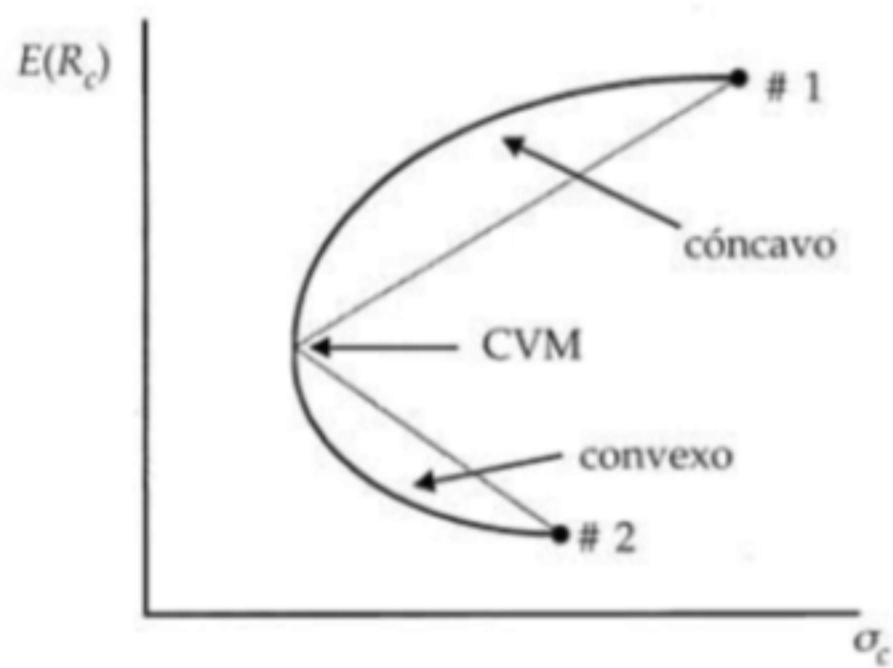
- Esta idea tambien permite calcular la CMV: invertimos una cantidad positiva en el activo que tene menor covarianza con el rendimiento de la cartera financiado por una posicion corta en el activo con mayor covarianza, esto reduce el riesgo de la cartera. Segimos asi hasta q no es mas posible reducir el riesgo de la cartera. Quiere decir que todos los activos tienen igual covariazna con la cartera.

→ Igualando las covarianzas de los activos individuales a la cartera podemos obener las ponderaciones de la CMV

.

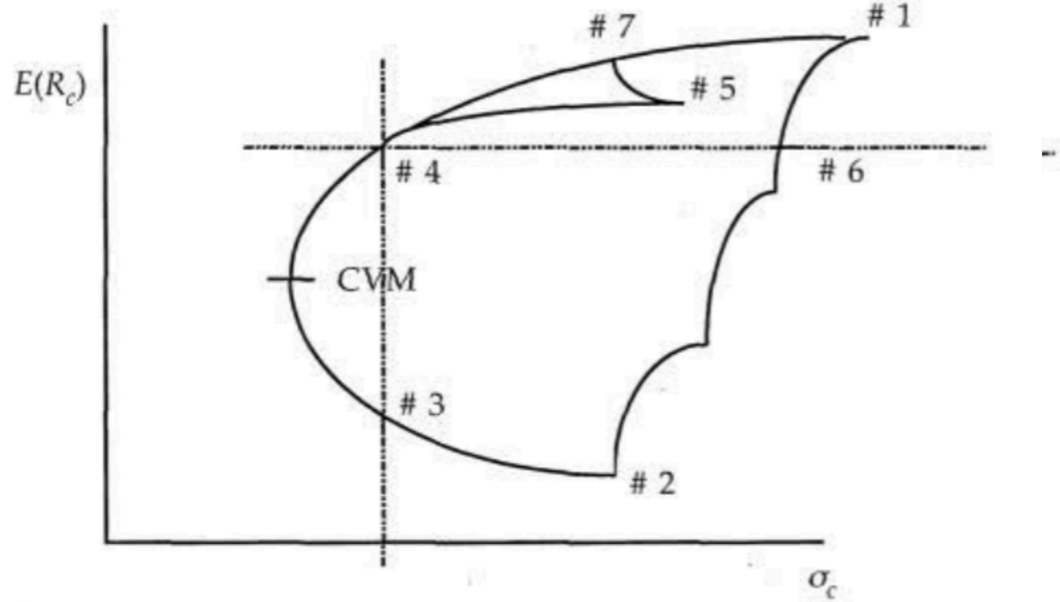
Conjunto de oportunidades de inversion con multiples activos

- Notemos que las combinaciones de dos activos nunca pueden tener mas riesgo que cuando dichas combinaciones estan en una linea recta (cuando la correlacion de ambos activos es 1).
- Esto implica que, cuando existen solo dos activos inciertos, la parte del conjunto de oportunidades de inversion que esta por encima de la cartera de varianza minima es concava, mientras que la que esta por debajo es convexa:



Conjunto de oportunidades de inversion con multiples activos

- Con N>2 activos inciertos, el conjunto de oportunidades de inversion comprende no solo la curva exterior del conjunto de combinaciones rendimiento esperado-volatilidad sino tambien cualquier punto interior:



- La curva exterior es la frontera del conjunto de oportunidades de inversion. La frontera izquierda del conjunto de pares rendimiento esperado-riesgo factibles es el conjunto de carteras de MV para un rendimiento esperado dado (#1-CMV-#2)
- El tramo de pendiente positiva (CMV-#1) se denomina <u>eficiente</u> *(en sentido de media-varianza)*

Conjunto de oportunidades de inversion con multiples activos

- Carteras eficientes: dado un rendimiento esperado, tienen la menor volatilidad y, dada una determinada volatilidad, tienen el mayor rendimiento esperado. Las carteras eficientes no son dominadas en media-varianza por ninguna otra.

- Ej.: La cartera 4 es una cartera eficiente: "domina" en el sentido media-varianza a la cartera #3. Tienen la misma volatilidad, pero # 4 tiene un rendimiento esperado mayor. La cartera # 6 tambien es dominada por # 4 al tener igual rendimiento esperado pero mayor riesgo.

- Cualquier cartera interior tampoco es una cartera eficiente (ej: #5): esta dominada por alguna cartera que esta en la rfrontera eficiente con rendimiento esperado igual pero menor varianza o otra cartera, en la frontera eficiente, con igual riesgo pero mayor rendimiento esperado.

- La frontera de carteras de menor varianza tiene una pendiente que cambia una vez de signo.

- Notar que en el grafico no existen carteras cuya volatilidad sea igual a cero: no hay activos o carteras cuyo coeficiente de correlacion sea -1. Tampoco existen activos en la frontera de menor varianza cuya correlacion sea + 1 al no haber segmentos rectos.

Carteras de MV con multiples activos

- Una cartera es eficiente cuando: i) tiene el rendimiento esperado mas alto posible dada su volatilidad, (ii) tiene la volatilidad mas pequeña dado su rendimiento esperado
- Las carteras que satisfacen (ii) son las carteras de minima varianza. Para multiples activos:

$$\underset{\{\omega_j;\, j=1,2,\ldots,N\}}{\text{minimizar}} \quad \sigma_c^2$$

sujeto a las restricciones,

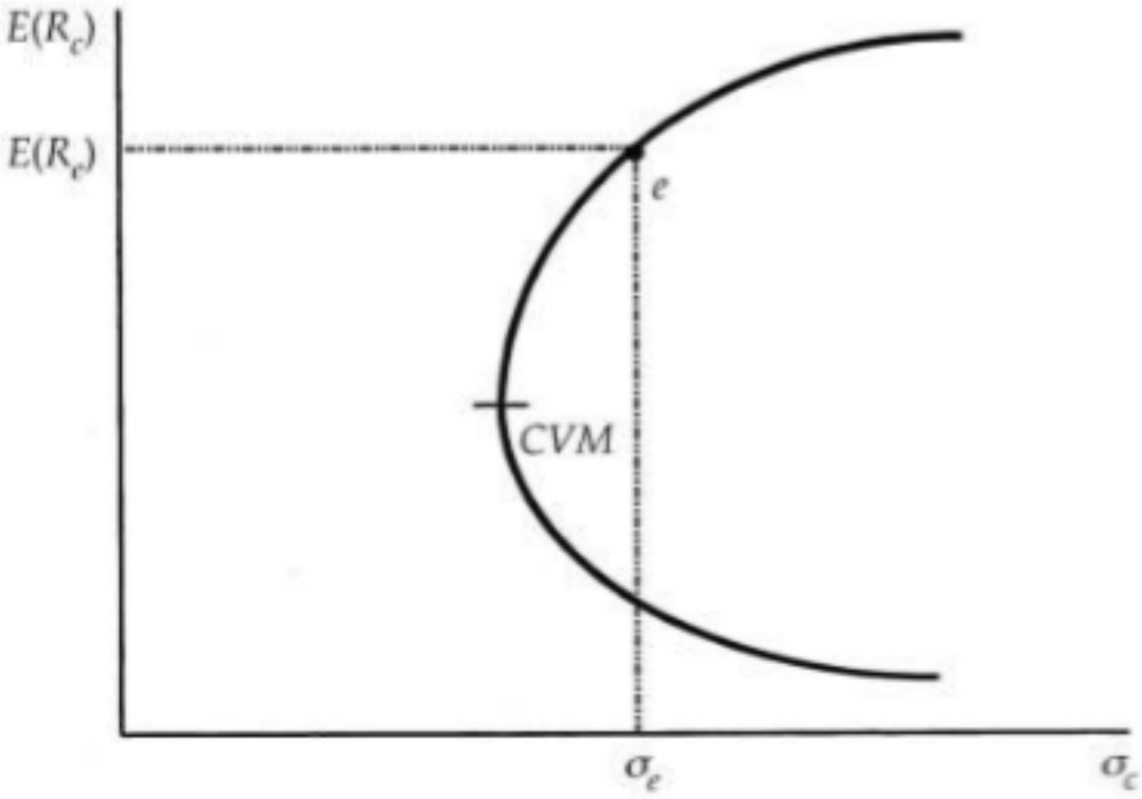
$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j) = E(R_e)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1,$$

- La primera restriccion hace que la solucion del problema sea aquella cartera de menor varianza dado rendimiento esperado *E(Re) dado* y no otro. El resto de las carteras que forman la frontera de carteras de menor varianza se pueden obtener resolviendo el problema anterior de forma repetida y fijando en cada problema un rendimiento esperado diferente.

- Nota: minimizar la varianza de una cartera para un nivel de rendimiento esperado dado tambien permite obtener carteras de MV en el tramo no eficiente (pendiente negativa de la frontera).

Carteras de MV con multiples activos



Carteras de MV con multiples activos

- Para resolver el problema de minimizacion, resolvemos el Lagrangeano:

$$\sigma_c^2 + 2\lambda_1\left[E(R_e) - \sum_{j=1}^{N}\omega_j E(R_j)\right] + 2\lambda_2\left[1 - \sum_{j=1}^{N}\omega_j\right]$$

- Derivando respecto a wj e igualando a 0 obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial\sigma_c^2}{\partial\omega_j} - 2\lambda_1 E(R_j) - 2\lambda_2 = 0.$$

- Como la varianza de una cartera de N activos puede escribirse como:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N}\omega_j^2\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{N}\omega_j\omega_h\sigma_{jh}.$$

- Tenemos que:

$$\frac{\partial\sigma_c^2}{\partial\omega_j} = 2\omega_j\sigma_j^2 + 2\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{N}\omega_h\sigma_{hj} = 2\left[\omega_j\sigma_j^2 + \sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{N}\omega_h\sigma_{hj}\right] = 2\sum_{h=1}^{N}\omega_h\sigma_{jh},$$

Carteras de MV con multiples activos

- Las CPO puden reescribirse como

$$\sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \lambda_1 E(R_j) - \lambda_2 = 0;\ j = 1, 2, \ldots, N,$$

- Las N ecuaciones de la CPO junto con las restricciones determinan los valores de los multiplicadores de Lagrange, *y* las ponderaciones que recibe cada activo individual en la cartera de menor varianza que tiene un rendimiento esperado igual a *E(Re).*

- Escribiendo la ecucacion anterior en notacion matricial:

$$V\omega = \lambda_1 E(R) + \lambda_2 1_N,$$

- donde V es la malriz N x N de varianzas y covarianzas de los rendimentos de los activos que componen la cartera, ω es el vector N X 1 de ponderaciones de cada activo, *E(R)* es el vector NX1 de rendimienlos esperados de los N activos y 1_N es un vector N X 1 de unos.
- Sea V^{-1} la matriz inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos, con elementos dados por u_{ih}. Del sistema anterior podemos obtener el vector de ponderaciones ω:

$$\omega = \lambda_1 V^{-1} E(R) + \lambda_2 V^{-1} 1_N,$$

Carteras de MV con multiples activos

- Obtenemos:

$$\omega_j = \lambda_1 \left[\sum_{h=1}^{N} v_{jh} E(R_h) \right] + \lambda_2 \left[\sum_{h=1}^{N} v_{jh} \right]; \; j = 1, 2, \ldots, N.$$

Esto representa las ponderaciones optimas invertidas en cada activo *j* que definen la cartera de menor varianza de todas las carteras con rendimiento esperado igual a $E(R_e)$.

Variando ƛ generamos los diferentes valores de las ponderaciones de cada activo en las carteras de minima varianza, obtenemos la frontera completa de dichas carteras. Para obtener ƛ, de la CPO:

$$\sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{ih} - \lambda_1 E(R_i) = \sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \lambda_1 E(R_j).$$

Multiplicando por w_i y sumando da:

$$\sigma_e^2 - \lambda_1 E(R_e) = \sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \lambda_1 E(R_j),$$

Carteras de MV con multiples activos

- Despejando E(Ri):

$$E(R_j) - E(R_e) = \frac{1}{\lambda_1}\left[\sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \sigma_e^2\right]; \; j = 1, 2, \ldots, N.$$

- Esta ecuacion indica que la diferencia entre el rendimienlo esperado de cualquier activo *j* y el rendimiento esperado de una cartera de menor varianza es proporcional a la diferencia entre la covarianza del activo *j* y la cartera de menor varianza *e,* y la varianza de la cartera *e.* El factor de proporcionalidad es el multiplicador de lagrange 1.

- Obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\theta_e}{\sigma_e}.$$

es decir, es igual a la pendiente de la frontera de menor varianza en el punto e dividido por la volalilidad de la cartera de menor varianza *e.*

El valor de $ƛ_2$ es el que para un $ƛ_1$ dado la suma de los ponderadores es 1.

Carteras de MV con multiples activos

- Despejando E(Ri):

$$E(R_j) - E(R_e) = \frac{1}{\lambda_1}\left[\sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \sigma_e^2\right]; \; j = 1, 2, \ldots, N.$$

- Esta ecuacion indica que la diferencia entre el rendimienlo esperado de cualquier activo *j* y el rendimiento esperado de una cartera de menor varianza es proporcional a la diferencia entre la covarianza del activo *j* y la cartera de menor varianza *e,* y la varianza de la cartera *e.* El factor de proporcionalidad es el multiplicador de lagrange 1.

- Obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\theta_e}{\sigma_e}.$$

es decir, es igual a la pendiente de la frontera de menor varianza en el punto e dividido por la volalilidad de la cartera de menor varianza *e.*

El valor de λ_2 es el que para un λ_1 dado la suma de los ponderadores es 1.

Separacion de dos fondos

- Cualquier combinacion de dos carteras de menor varianza es una cartera de minima varianza.

- Como dos carteras diferentes de menor varianza tienen rendimientos esperados diferentes, dada una ponderacion para cada cartera, podemos generar una cartera de menor varianza con cualquier nivel de rendimiento esperado

- Es decir, podemos usar dos carteras cualquiera de menor varianza para generar la frontera completa de carteras de MV.

- Esto se conoce como <u>separacion en dos fondos</u>, donde cada fondo hace referencia a las dos carreras de menor varianza que pueden utilizarse para generar la frontera completa.

- Entonces, cualquier combinacion de dos carteras eficientes es una cartera de minima varianza, ya que las carteras eficientes son carteras de minima varianza. Ademas, cualquier combinacion de carteras eficientes, con ponderaciones positivas, es una cartera eficiente.

- Esto es asi, ya que dicha combinacion de carteras eficientes es una cartera de menor varianza que *tiene* un rendimiento esperado dentro del rango de rendimientos esperados que abarca el segmento de carteras eficientes de la frontera de carteras de menor varianza.

Separacion de dos fondos

- Cualquier cartera de minima varianza es el resultado de la combinacion de dos unicas carteras, que son a su vez carteras de minima varianza.

Teorema de separacion de dos fondos: Todas las carteras eficientes en el sentido media-varianza pueden construirse como el promedio ponderado de dos carteras (fondos) cualquiera eficientes.

Ejemplo: 5 acciones

Cartera eficiente 1: w_1=30%, w_2=10%, w_3=10%, w_4=30%, w_5=20%

Cartera eficiente 2: w_1=20%, w_2=20%, w_3=25%, w_4=25%, w_5=10%

Por el teorema de separacion de dos fondos, el resto de las carteras eficientes se construye como n promedio ponderado de estas dos carteras. Sea ω la ponderacion en el primer fondo. Definimos las carteras eficientes obteninedo las ponderaciones de cada activo tal que:

$w_1=0.3^* \omega+0.2^*(1- \omega)$

$w_2=0.1^* \omega+0.2^*(1- \omega)$

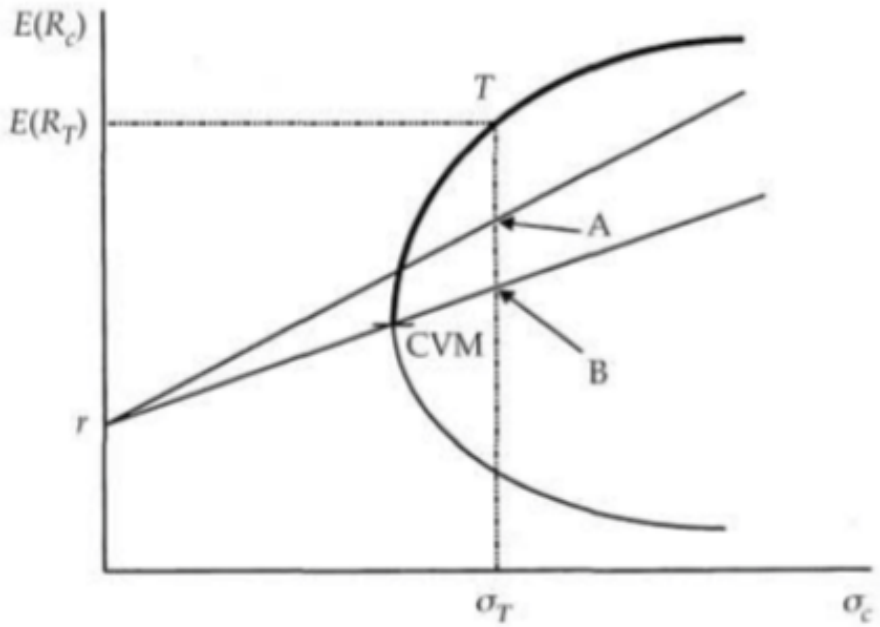
$w_3=0.1^* \omega+0.25^*(1- \omega)$…

Si ej ω =40%, las ponderaciones de cada activo quedarian w_1, = 24%, w_2=16%, w_3=10%, w_4, = 27%, w_5= 23%

Carteras eficientes con activo libre de riesgo

- Supongamos existe la posibilidad de invertir/pedir prestado a una tasa libre de riesgo
- Vamos a ver que al combinar un activo libre de riesgo con una cartera de activos inciertos, los pares factibles de rendimiento esperado-desvio estandar se situan a lo largo de una linea recta.
- En este caso, la cartera de MV es la inversion 100% en el activo libre de riesgo (varianza = 0).
- Por ende, el activo libre de riesgo esta en la frontera eficiente
- Por lo que vimos antes, solo necesitamos encontrar otra cartera compuesta por activos inciertos para que (por el teorema de separacion en dos fondos), generar todo el conjunto de carteras eficientes disponibles cuando existe un activo libre de riesgo.
- Cual *es el* segundo fondo de activos inciertos? Veamoslo graficamente el conjunto de oportunidades de inversion para *N* activos inciertos con la existencia de un activo libre de riesgo cuyo rendimiento es igual a *r*.

Carteras eficientes con activo libre de riesgo



- Dado un activo seguro con rendimiento r, cualquier inversor puede combinar dicho activo y la cartera de varianza minima global. Las combinaciones de rendimiento esperado-riesgo se situan en algun punto de la linea recta que une a r y CVM.
- Un inversor puede combinar la cartera de activos inciertos *T* con el activo seguro y situarse en cualquier punto de la recta r-*T.* No podria situarse en una linea recta con mayor pendiente que r-*T,* porque esas inversiones no existen en el conjunto de oportunidades de inversion

Carteras eficientes con activo libre de riesgo

- La recta *r-T* es la *nueva frontera de carteras eficientes* cuando existen *N* activos riesgosos y un activo seguro con rendimiento *r.* Es la recta de mayor pendiente posible dado el conjunto de *N* activos riesgosos y el activo seguro. *T* es la cartera de activos riesgosos situada en la recta *tangente* a la frontera de carteras eficientes.

- Notar que todos los inversores se situarian en dicha cartera tangente. Es la *unica* cartera de activos riesgosos en la que se posicionaran los inversores, ya que ello les permite colocarse en la nueva frontera de carteras eficientes al combinar la cartera T con el activo seguro.

- Por tanto, en este caso, los dos fondos que generan todo el conjunto de carteras eficientes son el el activo seguro y la cartera tangete *T de activos riesgosos.* Combinando ambos se puede conseguir cualquier par de rendimiento esperado-riesgo que sea eficiente en el sentido de media-varianza (se puede situar en cualquier punto de la recta r-T).

- Este resultado no es mas que una aplicacion del teorema de separacion en dos fondos, donde ahora los dos fondos que generan el resto de carteras eficientes estan perfectamente definidos.

- **La frontera de carteras eficientes representada por la recta *r-T* se denomina linea de mercado de capitales (LMC).**

Ecuacion de la LMC

- En resumen, en el contexto media-varianza, y suponiendo que existe un activo seguro, todos los inversores seleccionaran una cartera situada en la LMC.

- Analiticamente, sea *w* el ponderador de la cartera en la cartera tangente T y 1-*w* el ponderador de la cartera en el activo seguro. El rendimiento esperado y volatilidad son:

$$E(R_c) = \omega E(R_T) + (1 - \omega)r$$

$$\sigma_c = \omega\sigma_T; \; (1 - \omega) \leq 1.$$

- Combinando las dos ecuaciones, obtenemos:

$$E(R_c) = \frac{\sigma_c}{\sigma_T} E(R_T) + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_T}\right) r,$$

que simplificando llegamos a la **ecuacion de la LMC** que expresa la relacion que existe entre el rendimiento esperado y la volatilidad de cualquier cartera eficiente *c:*

$$E(R_c) = r + \left(\frac{E(R_T) - r}{\sigma_T}\right) \sigma_c.$$

Pendiente de LMC

- Por lo tanto, las carteras eficientes se diferencian por el porcentaje que invierten en el fondo seguro y en el fondo tangente incierto *T*, pero todas son combinaciones de ambos fondos. *T* es la unica cartera eficiente formada exclusivamente por activos inciertos.

- La pendiente de la LMC esta dada por:

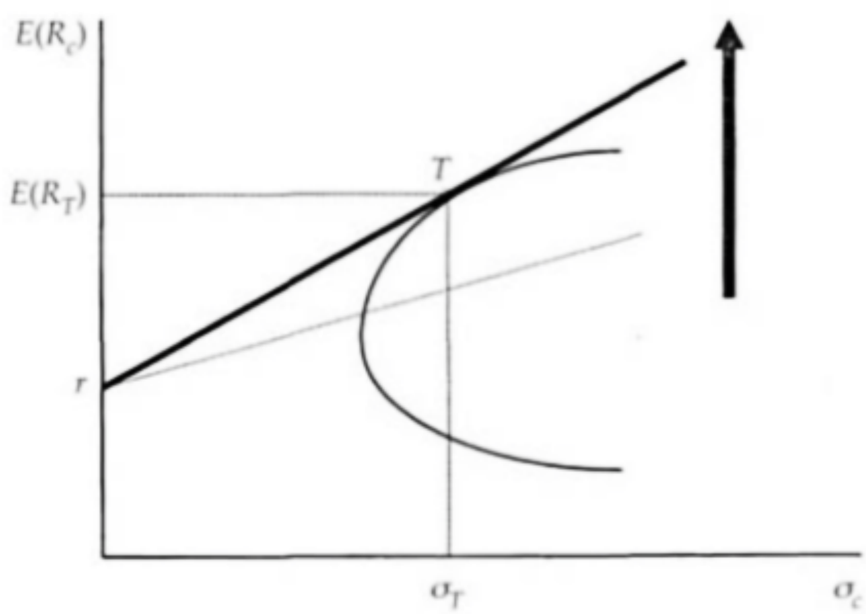
$$\theta_T = \left(\frac{E(R_T) - r}{\sigma_T} \right),$$

- Es el **precio del riesgo de la cartera T o sharpe ratio**: mide el retorno esperado adicional de T al activo seguro (la prima de riesgo de la cartera T) por unidad de riesgo de T. Es la relacion de retorno esperado adicional vs riesgo que puede intercambiarse cuando se elige la cartera de activos inciertos *T*.

- Pendientes de la LMC mas elevadas implican que el conjunto de activos incierto de la cartera tangente *T*, ofrece incrementos de rendimiento mayores para aumentos dados en el riesgo. Pendientes bajas indican que la cartera ofrece incremenlos de rendimiento chicos ante un aumento en el riesgo dado.

Composicion de la cartera tangente T

- Dijimos que la cartera tangente T se obtiene de situarnos en la recta de maxima pendiente tangente al conjunto de posibilidades de inversion en el espacio retorno esperado-volatilidad.



- Analiticamente:

$$\underset{\{\omega_{jT},\, j=1,2,\ldots,N\}}{\text{maximizar}} \quad \theta_T = \left(\frac{E(R_T)-r}{\sigma_T}\right), \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{N} \omega_{jT} = 1.$$

Composicion de la cartera tangente T

- Podemos reexpresarlo como:

$$\max_{\{\omega_{jT}\}} \theta_T = \frac{\sum_{j=1}^{N} \omega_{jT}\left[E(R_j) - r\right]}{\left[\sum_{j=1}^{N} \omega_{jT}^2\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \omega_{jT}\omega_{hT}\sigma_{jh}\right]^{1/2}},$$

- Maximizando y despejando, la CPO da un sistema de N ecuacones con N incognitas (las Z_i):

$$[E(R_j) - r\,] = Z_1\sigma_{1j} + Z_2\sigma_{2j} + \ldots + Z_j\sigma_j^2 + \ldots + Z_N\sigma_{Nj}$$

donde $Z_j = \omega_{jT}*(E(R_T)-r)/\sigma^2$

Esto da: $\omega_{jT} = \frac{Z_j}{\sum_{j=1}^{N} Z_j}$

Composicion de la cartera tangente T

- Ejemplo: $r = 5\%$, $E(R_1) = 20\%$, $E(R_2) = 12\%$, $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\rho_{12} = 30\%$
- Resolvemos:

$\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 180$

$20-5=15 = 900*Z_1+180*Z_2$

$12-5=7= 180*Z_1+400*Z_2$

Resolviendo, obtenemos $Z_1= 0.0145$, $Z_2= 0.011$, y $\sum Z= 0.0255$

Obtenemos los w_i:

$w_{1T} = 0.0145/0.0255 = 0.57$

$w_{2T} = 0.011/0.0255 = 0.43$

El retorno esperado y desvio de la cartera T son:

$E(R_T)=0.57*20+0.43*12=16.56$

$\sigma_T^2 = (0.57)2(900)+(0.43)2(400)+2(0.57)(0.43)(0.3)(30)(20)=454.6$

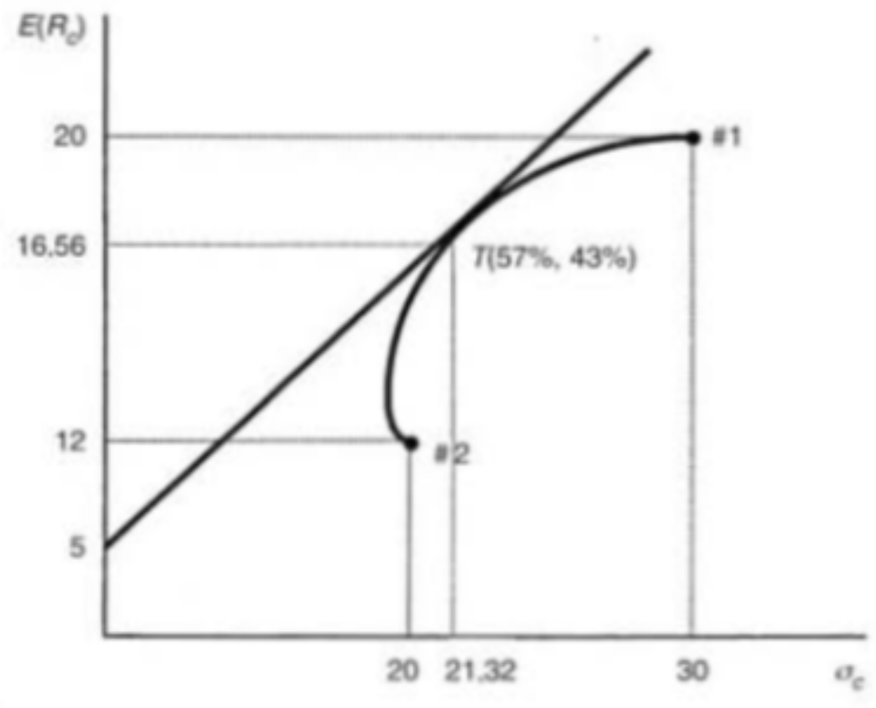
$\sigma_T = 21.3$

Composicion de la cartera tangente T

La pendiente de la LMC da:

$$\frac{E(RT)-r}{\sigma_T} = (16.56-5)/21.32 = 0.54$$

Graficamente:



Composicion de la cartera tangente T

- La pendiente de la LMC (sharpe ratio) es una constante ya que no depende de w_j: una vez determinadas las ponderaciones optimas, la LMC no depende de un determinado activo *i*

- La pendiente de la LMC (el cociente entre prima de riesgo de la cartera T y la varianza de la cartera T) es igual para todo activo j. Es decir:

$$\frac{E(R_j) - r}{\mathrm{cov}(R_j, R_T)} = \frac{E(R_h) - r}{\mathrm{cov}(R_h, R_T)} = \frac{E(R_T) - r}{\sigma_T^2}$$

- Si esto no se cumple, cualquier inversor podria aumentar la relacion prima de riesgo-varianza de su cartera aumentando la ponderacion del activo que con mayor ratio. Pero si esto fuese posible, entonces la cartera *T* no seria la cartera tangente a la LMC.
- Esto permite encontrar la ponderacion que recibe cada activos incierto en la cartera T.

$$\mathrm{cov}(R_j, R_T) = [E(R_j) - r]K$$

$$K = \frac{\sigma_T^2}{[E(R_T) - r]}.$$

Composicion de la cartera tangente T

- Ejemplo: $r = 5\%$, $E(R_1) = 20\%$, $E(R_2) = 12\%$, $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\rho_{12} = 30\%$

Busqumos las ponderaciones de la cartera T.

Metodo 2: igualar covarianzas.

Primero calculamos covarianza:

$\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 180$

Luego buscamos ponderaciones tal que la $cov(R_i,R_T)$ es igual a la prima de riesgo de cada activo:

$cov(R_1,R_T) = 900*Z_1+180*Z_2= 15$

$cov(R_2,R_T) = 180*Z_1+400*Z_2= 7$

Llegamos a que $Z_1= 0.0145$ y $Z_2= 0.011$. Normalizando para que las ponderaciones sumen 1:

$w_{1T} = 0.0145/0.0255 = 0.57$

$w_{1T} = 0.43$

Eleccion de cartera

- Una vez definido el conjunto de portafolios eficientes (LMC) los inversores deben ahora elegir un portfolio, teniendo en cuenta sus preferencias y por ende la relacion retorno-riesgo deseada.
- Inversores con distintos niveles de aversion al riesgo eligen distintos portafolios aun si el conjunto de oportunidades de inversion con el que cuentan es el mismo. Inversores mas aversos al riesgo eligen una cartera que tiene menor proporcion de la cartera de activos incirtos y mas del activo libre de riesgo.
- Los inversores eligen la proporcion *b* de su cartera que tendran en la cartera de activos inciertos vs el activo libre de riesgo maximizando su funcion de utilidad. Sea:

$$E(R_c) = bE(R_T)+(1-b)r_f=r_f+b(E(R_T)-r_f)$$

$$\sigma_C^2 = b^2\sigma_T^2$$

$$U = E(R_c) - \frac{1}{2}\gamma\sigma_C^2$$

Eleccion de cartera

El inversor resuelve:

$$Max\ U = r + b(E(R_T) - r_f) - \frac{1}{2}\gamma(b^2\sigma_T^2)$$

Derivando respecto a *b* e igualando a 0, obtenemos:

$$E(R_T) - r_f - b\gamma\sigma_T^2 = 0$$

$$b^* = \frac{(E(R_T) - r_f)}{\gamma\sigma_T^2}$$

Esta es la ponderacion optima en la cartera de activos inciertos para inversores aversos al riesgo.

Ejemplo: Supongamos $E(R_T) = 9\%$, $r_f = 3\%$, $\sigma_T = 20\%$. Si $\gamma = 4$:

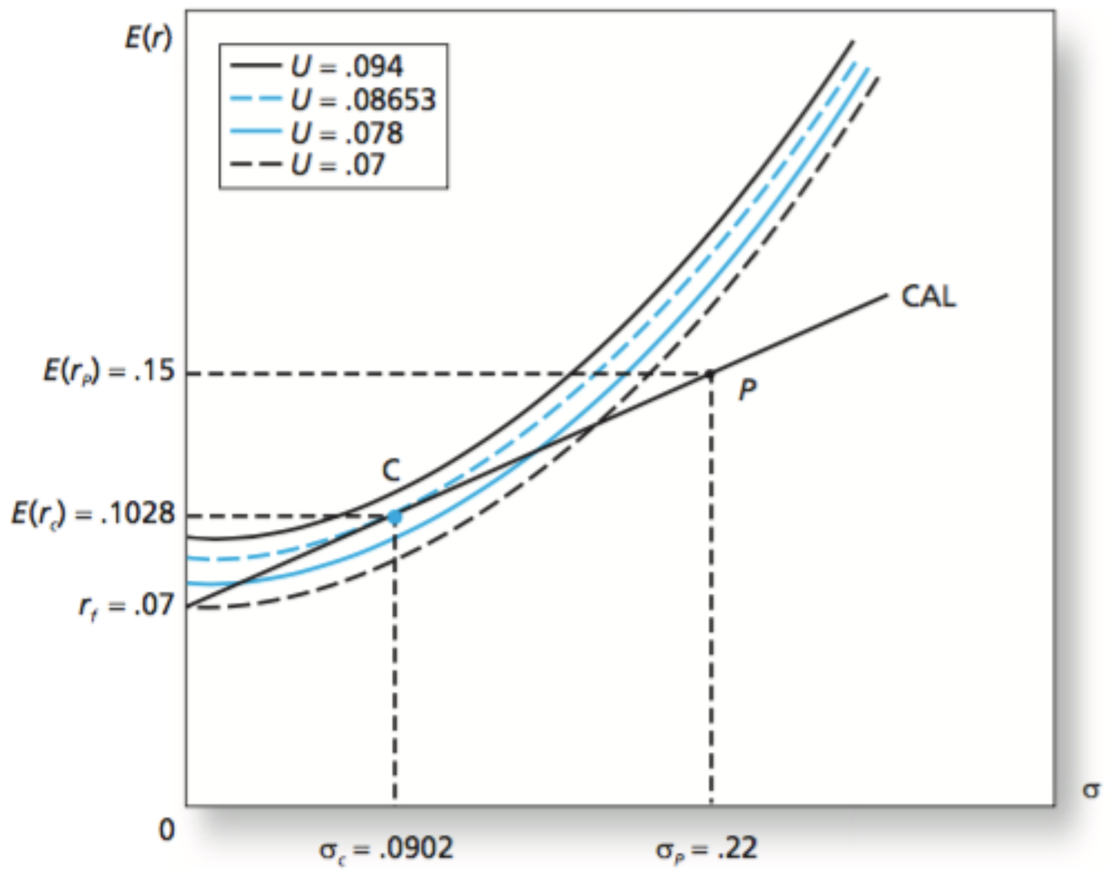
$$b^* = \frac{(9\% - 3\%)}{4*(0.2)^2} = 38\%$$

Si $\gamma = 8$:

$$b^* = \frac{(9\% - 3\%)}{8*(0.2)^2} = 19\%$$

Eleccion de cartera

Graficamente, la eleccion se resume a situarnos en la curva de indiferencia (nivel de utilidad) mas alto posible dada la linea de mercado de capitales:



Eleccion de cartera

Las curvas de indiferencia se dibujan obteniendo el nivel de $E(R_c)$ (y por ende de *b*) para obtener el nivel de uilidad constante a distintos niveles de volatilidad.

Curvas de indiferencia mas altas implican mas retorno esperado para un nivel dado de volatilidad.

Curvas de indferencia con mas pendiente resultan de una aversion al riesgo mas alta

	***A* = 2**		***A* = 4**	
σ	***U* = .05**	***U* = .09**	***U* = .05**	***U* = .09**
0	.0500	.0900	.050	.090
.05	.0525	.0925	.055	.095
.10	.0600	.1000	.070	.110
.15	.0725	.1125	.095	.135
.20	.0900	.1300	.130	.170
.25	.1125	.1525	.175	.215
.30	.1400	.1800	.230	.270
.35	.1725	.2125	.295	.335
.40	.2100	.2500	.370	.410
.45	.2525	.2925	.455	.495
.50	.3000	.3400	.550	.590

El riesgo beta

- Dijimos que los inversores pueden identificar, mediante combinaciones entre dos unicos fondos, todas las carteras eficientes disponibles en el espacio media-desvio estandar.

- Si existe un activo seguro, cualquier cartera eficiente se puede generar a traves de combinaciones del activo seguro y la cartera tangente, combinacion unica de activos inciertos.

- Si existe un activo seguro y las expectativas son homogeneas, solo exisle una cartera efjciente de activos inciertos.

- La volatilidad deI rendimiento de esta cartera eficiente es el riesgo final que le preocupa al inversor.

- De activos individuales, al inversor solo le preocupa como contribuyen al riesgo de la cartera eficiente. Un activo es mas riesgoso si mas contribuye a la variabilidad de la cartera.

- El riesgo de un activo individual se entiende como su contribucion al riesgo de la cartera eficiente y diversificada escogida.

El riesgo beta

- Formalmente, recordemos que:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh}.$$

- Para medir la contribucion de un activo j a la varianza de la cartera, necesitamos saber como varia σ_c ante un cambio en al canidad invertida en el activo j
- Sacando raiz cuadrada y derivando respecto a ω_j

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \omega_j} = \frac{\sum \omega_h \sigma_{jh}}{\sigma_c} = \frac{Cov(R_j, R_c)}{\sigma_c}$$

Como la contribucion suele medirse en terminos proporcionales a la volatilidad de la cartera, tenemos que la contribucion proporcional de j al riesgo de la cartera eficiente c es:

$$\frac{Cov(Rj, Rc)/\sigma_c}{\sigma_c} = \frac{Cov(Rj, Rc)}{\sigma^2{}_c} = \beta_{jc}$$

Esto dice que la medida de riesgo individual de un activo j es el cociente entre la covarianza del rendimiento del activo j y el rendimiento de la cartera eficiente c, y la varianza de la cartera c

Si la cartera de activos eficientes incierta es unica y es la cartera tangente T, entonces el riesgo individual relevante es β_{jT}

La linea de mercado de activos (SML)

- La posibilidad de generar carteras eficientes permite establecer una expresion que relaciona el rendimeinto esperado de un activo con su riesgo.
- Dijimos que en la cartera tangente tiene que ser verdad que:

$$\frac{E(R_j) - r}{cov(R_j, R_T)} = \frac{E(R_T) - r}{{\sigma_T}^2}$$

Lo cual puede escribirse como:

$$E(Rj) - r = \frac{cov(Rj, RT)}{{\sigma_T}^2} E(R_T) - r$$

Dada la definicion de riesgo beta, la prima de riesgo del activo j queda:

$$E(Rj) - r = \beta_{jT}[E(R_T) - r], j=1,\ldots,N$$

Que establece una relacion lineal positiva entre rendimiento esperado y riesgo beta, entendido como la contribucion del activo j al riesgo de la cartera tangente.

La linea de mercado de activos (SML)

- Notar que β_{jT} tambien es la pendiente de una regresion de MCO de la seie de tiempo de los rendimientos del activo j contra los retornos de la cartera tangente

- Esta ecuacion se denomina linea de mercado de activos (SML). Similar a la LMC< tambien es la ecuacion de una recta pero que relaciona $E(R_j)$ con su riesgo, entendido como β_{jT}. La pendiente esta dada por la prima de riesgo de la cartera tangente.

- Usando la SML, el rendimiento esperado de cualquier activo puede replicarse mediante una combinacion lineal de la cartera tangente y el activo libre de riesgo, donde la ponderacion de la cartera tangente de activos inciertos es β_{jT}

Ejercicio

- Tome los activos que conforman el portafolio de Berkshire Hathaway (hasta llegar a al menos 90% de la composición del portafolio)
- Calcule los retornos y desvíos muestrales según los datos de los últimos 10 años
- Grafique los retornos de sus activos en el plano media-desvío
- Obtenga los estadísticos de los portafolios Equally Weighted, Mínima varianza y el de máximo Sharpe Ratio (sin short positions).
- Grafique la frontera de eficiencia y la linea de mercado de capitales (CML)
- Usando el mismo conjuno de activos, obtenga el portafolio optimo para dos agentes con la siguiente función de utilidad (CRRA) con dos grados de aversion al riesgo, $\gamma = 5$ y $\gamma = 10$:

$$U = E(r_p) - \frac{\gamma}{2} var(r_p)$$

- Grafique las curvas de indiferencia.

Ejercicio

Derivamos la CML, teniendo en cuenta que la pendiente será el ratio recompensa-variabilidad (Sharpe ratio) y la ordenada al origen, la tasa de retorno libre de riesgo:

$$r_p = r_f + \left(\frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\right)\sigma_p$$

$$r_p = r_f + S_m \sigma_p$$

La CML me dice que puedo obtener retornos esperados iguales al retorno libre de riesgo, más el riesgo que yo quiera multiplicado por el valor de ese riesgo.

Max: $U = r_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2$ S.a.: $r_p = r_f + S_m \sigma_p$

Max: $U = r_p - \frac{\gamma}{2}\left[\frac{r_p - r_f}{S_m}\right]^2$

CPO: $\frac{dU}{dr_p} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\gamma}{S_m^2}\left(r_p - r_f\right) = 0$

$$r_p = r_f + \frac{S_m^2}{\gamma} \quad \text{y} \quad \sigma_p = \frac{S_m}{\gamma}$$

Obtengo la composición del portafolio:

$$r_p = r_f + \frac{S_m^2}{\gamma} = (1 - w_m) r_f + w_m r_m$$

$$\boxed{\frac{r_m - r_f}{\gamma \sigma_m^2} = w_m}$$