Probabilidad y Estadística (Finanzas Cuantitativas)

2022

MFIN – Universidad Torcuato Di Tella
Prof. Sebastián Auguste
sauguste@utdt.edu

On Value at Risk

Índice

1. Distribución de probabilidades
2. Variables aleatorias continuas
3. Distribución Normal
4. Aplicaciones

- Lectura: Defusco et al., cap. 5.3.1 a 5.3.3

Prof. Sebastián Auguste
Universidad Torcuato Di Tella

1. INTRO

Indice

1. Introdución a Value at Risk
2. Metodologías VaR
3. Tipos alternativos de VaR

HISTORIA DEL VAR (DE LA CALLE A LA ACADEMIA)

- Si bien el concepto estuvo dando vueltas al menos desde 1922, se empieza a usar en el mercado financiero a fines de los 1980s, cuando firmas financieras comienzan a usar el concepto para estimar capital requirements (e.g. Kenneth Garbade de Bankers Trust)
- En 1993 Dennis Weatherstone, JP Morgan chairman, publica un informe llamado G-30 Report donde aparece por primera vez el nombre Value at Risk (reporte 4:15, en una página tenía que resumir todo el riesgo de la compañía a los 15 minutos que cerraba el mercado).
- Hoy:
  - Uso amplio en el mercado
  - Uso para fines regulatorios

DEFINICIÓN

- El VaR es muy utilizado porque en una simple pregunta resume la idea del riesgo asociado: ¿Qué es lo peor que me puede pasar?

- Jorion define el VaR como:
  - la peor pérdida esperada
  - en un período dado de tiempo
  - con cierto grado de confianza (o tolerancia al riesgo)
  - bajo condiciones normales de mercado

OTRAS DEFINICIONES

- "an attempt to provide a single number for senior management summarizing the total risk in a portfolio of assets"

  – Hull, OF&OD

- "an estimate, with a given degree of confidence, of how much one can lose from one's portfolio over a given time horizon"

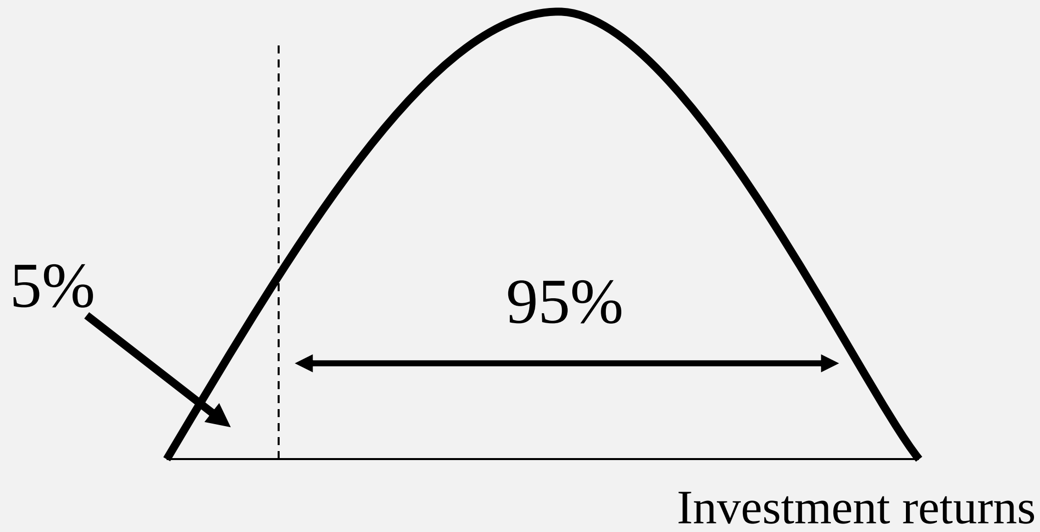
  – Wilmott, PWOQF

VALUE AT RISK

- Concepto de: "Tormenta perfecta" o el "riesgo de matarte"
- Se mide en plata. Sea R el retorno VaR, Mo el monto invertido en este active, el VaR es:

  VaR=R*M0

- La pérdida que excede el VaR es conocida como el VaR Break



VENTAJAS DEL VAR

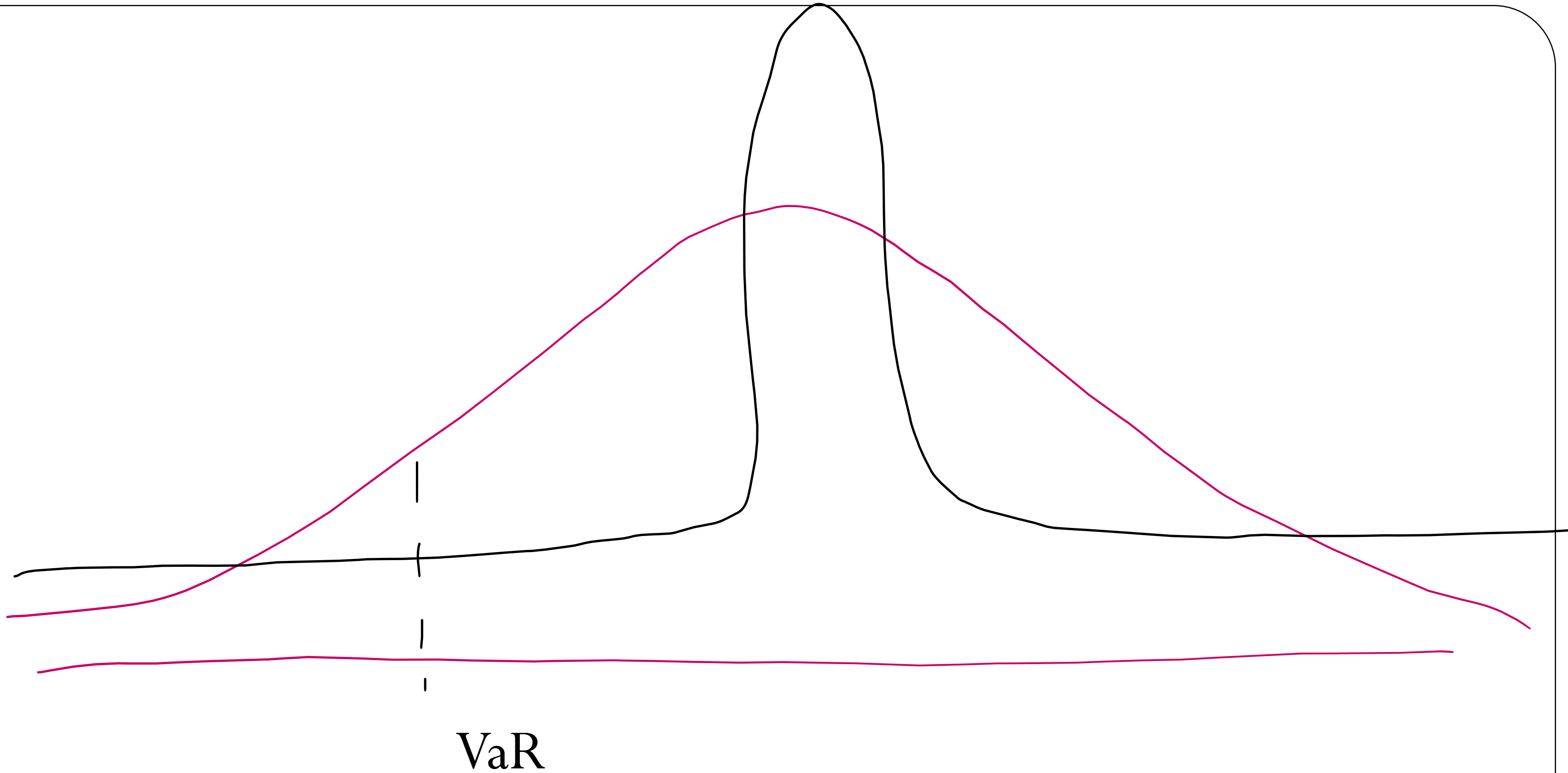
- Medida única de riesgo
- Relativamente libre de modelo y supuestos
- No depende de la aversión al riesgo del inversor
- Fácil de explicar
- Permite desviaciones del modelo Normal
- Captura el comportamiento en las colas de los retornos del portafolio.
- Puede ser estimada robustamente a partir de los datos, no es muy sensible a outliers. Sólo es sensible al cuartil p de la distribución
- Se aplica a cualquier tipo de activeo y portafolios complejos

DESVENTAJAS DEL VAR

- Si me equivoco en los supuestos (ejemplo: asumo normalidad pero la distribución de retornos tiene colas anchas) me equivoco en la estimación (no es robusto a cambios de supuestos)
- No me dice nada sobre lo que puede pasar cuando "quiebro" el VaR (VaR Condicional)

- Puede dar incentivos inapropiados para risk managers…

http://www.nytimes.com/2009/01/04/magazine/04risk-t.html



- En el ejemplo, ambas distribuciones (roja y negra) tienen el mismo VaR, pero si "quiebro" el VaR la negra pone más peso en eventos más extremos (por lo que luce peor que la roja).

LO QUE VEREMOS

Metodologías de cómputo

1. Histórico o Empírico (percentil)
2. Covariance approach
   - VaR Normal (tiempo discreto o continuo)
   - VarX (colas anchas)
3. Simulación de Monte Carlo

Distintos tipos de conceptos VaR

1. VaR
2. VaR Marginal
3. VaR Incremental
4. VaR Contribución
5. VaR Condicional

II. METODOLOGÍAS DE CÓMPUTO

CONSIDERACIONES GENERALES DEL CÁLCULO DEL VAR

- La elección del **horizonte temporal** depende de la frecuencia del control, la posibilidad de detectar problemas, el tiempo de liquidación del portfolio y el tiempo para tomar decisiones.
- La medición del retorno debe matchear el período que se quiere predecir el VaR (si quiero el VaR de acá a un mes, debo computar retornos mensuales).
- La elección de usar el método Covariance o el Histórico depende no solo de la disponibilidad de datos históricos sino sobre los supuestos que están detrás (si no estoy seguro que la distribución es Normal y tengo muchos datos históricos, por ahí me convenga el VaR Empírico).

1. VAR HISTÓRICO

- El VaR Histórico o Empírico se computa sobre una serie de retornos históricos.
- Se usa el percentil al nivel deseado (típicamente 1%, 5% o 10%)
- Ventajas: no asume ninguna distribución de probabilidades
- Desventajas:
  - Se requieren series muy largas para estimarlo bien
  - Pueden existir cambios estructurales
  - No siempre cuento con buenos datos históricos

2. VAR COVARIANCE

- Se asume que se conoce la distribución de probabilidades. Típicamente se asume es Normal, pero se podrían usar otras distribuciones, como la t de Student
- Se llama "covariance" porque para poder computarlo se requiere saber las varianzas y covarianzas de los activos que están en el portafolio.
- A menudo se asume que la media del retorno es cero, porque se suele computar mucho para retornos diarios

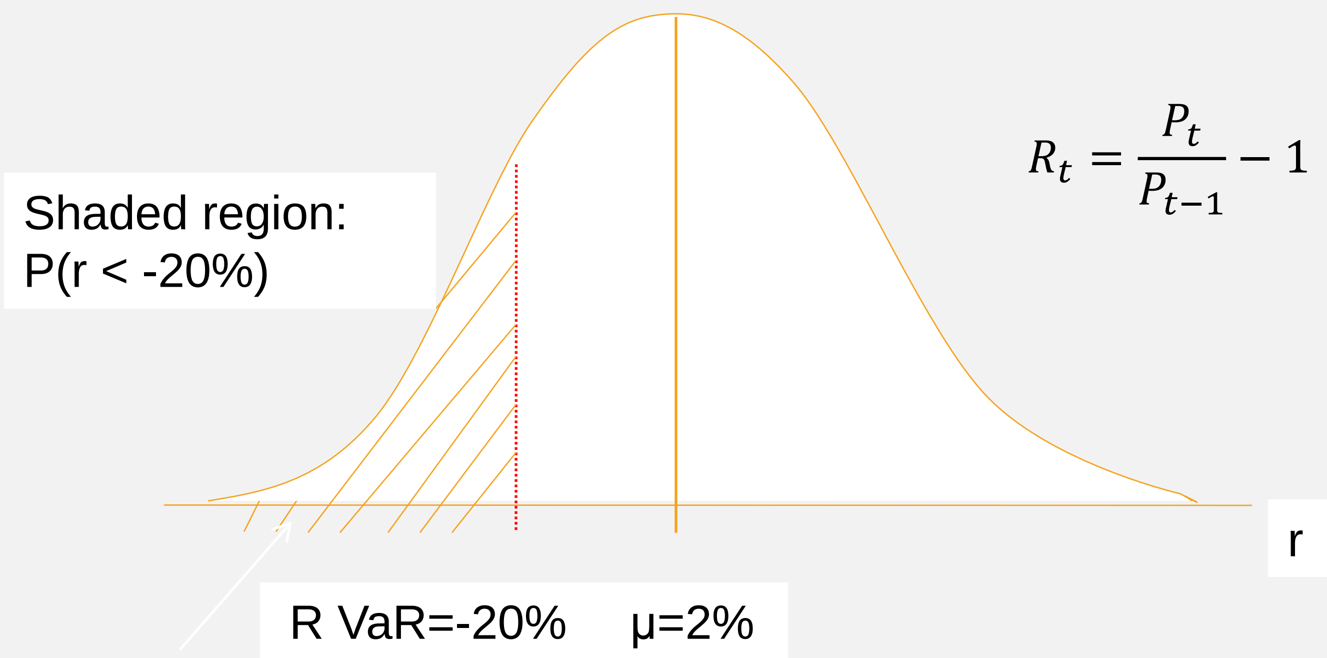
DESVENTAJAS POTENCIALES DEL MÉTODO NORMAL

- **Supuesto incorrecto sobre la distribución de probabilidad**: Si los retornos no fueran normales (muchos outliers) el VaR Normal calculado subestimaría el VaR real.

- **Error en los inputs o parámetros**: Varianzas y Covarianzas son estimadas en base a datos históricos (la estimación posee std. errors). Recuerde que la matriz de varianzas y covarianzas con n activos tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ coeficientes distintos (n son varianzas y el resto términos de covarianza)

- **Cambios en el tiempo en los parámetros.** Un error relacionado es la inestabilidad de las varianzas y covarianzas en el tiempo. La correlación entre el dólar y el euro no es constante o independiente a la caída del

2.1. VAR NORMAL EN TIEMPO DISCRETO



$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

R VaR : Retorno VaR, para diferenciarlo del VaR en plata que sería la pérdida de la cartera. En el mercado se suele llamar VaR tanto al retorno como a la pérdida monetaria de la cartera sin distinciones

CÓMPUTO DEL VAR NORMAL

- Sea $R \sim N(\mu,\sigma^2)$, queremos encontrar el valor del retorno RVaR tal que Prob(R<RVaR) = α%

$$\Pr ob\left(\frac{R-\mu}{\sigma} < \frac{R_{VaR}-\mu}{\sigma} \right) = \alpha\%$$

$$\Pr ob\left(z < \frac{R_{VaR}-\mu}{\sigma} \right) = \alpha\%$$

$$Z_{\alpha} = \frac{R_{VaR}-\mu}{\sigma}$$

$$R_{VaR} = \mu - Z_{\alpha}\sigma$$

FÓRMULA DEL VAR NORMAL CON T DISCRETO

$$R_{VaR} = \mu - Z_{\alpha}\sigma$$

- A menudo se escribe como

$$R_{VaR} = -Z_{\alpha}\sigma$$

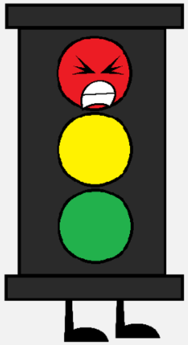
justificado en que son retornos diarios y se podría asumir que su media es cero.

NOTAR que si retornos son Normales, el VaR no me dice algo distinto que yo ya no capture con σ!!!

MINICASO VAR DEL VAN

- Un cliente de su consultora está evaluando una inversión en Indochina que requiere un gasto inicial (período 0) de 10.000, y que luego en los períodos 1 y 2 da un beneficio V_1 y V_2. Asuma que la tasa de descuento para evaluar este proyecto es r=10% (dicha tasa es un valor conocido y no una variable aleatoria). Si los beneficios siguen la siguiente distribución:
- Compute el Value at Risk (VaR) del VAN (Valor Actual Neto) de dicha inversión.
- RESPUESTA: al final de este ppt

2.2. VAR NORMAL CON TIEMPO CONTINUO



- Se usa porque es fácil de cambiar el horizonte temporal (en el VaR con tiempo discreto hay que recomputar los retornos cada vez que se cambia el horizonte, aqui no es necesario (es la gran ventaja)

Retornos Discretos:

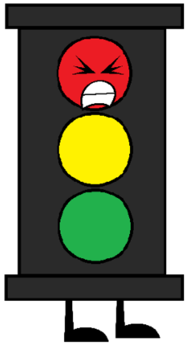
$r_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$ *(sin dividendos)*

Retornos Continuos:

$R_t = \ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(1+r_t)$ *(sin dividendos)*

$P_t = P_{t-1} * \exp(R_t)$

Una ventaja más de modelar retornos en tiempo continuo: si parto de los retornos en mi análisis, los precios con t continuo jamás serán negativos



Retornos Discretos:

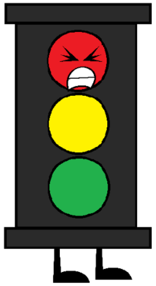
$r_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$ *(sin dividendos)*

$P_t = P_{t-1} * (1+r_t)$ => Como $r \sim N(\mu,\sigma)$, P_t podría ser negativo.

Retornos Continuamente Compuestos:

$R_t = ln(P_t / P_{t-1}) = ln(1+r_t)$ *(sin dividendos)*

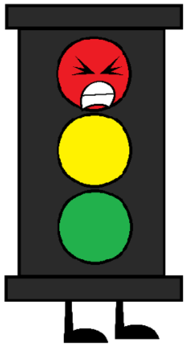
$P_t = P_{t-1} * exp(R_t)$ => P_t nunca podrá ser negativo.



- Retorno Simple $$RS_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$
- Retorno "continuously compounded" $$RC_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + RS_t)$$
- Lo que implica: $$e^{RC_t} = 1 + RS_t$$
- Capitalización discreta $$V_t = (1 + RS)^t V_0$$
- Capitalización continua $$V_t = e^{RC \cdot t} V_0$$

- Si pongo una inversión inicial V_0 a RS por 1 período tendré:

$$V_1 = V_0 + RS \cdot V_0 = (1+RS)V_0$$



- Si reinvierto a RS por un período más tendré:

- Para t períodos: $V_2 = (1+RS)V_1 = (1+RS)^2 V_0$

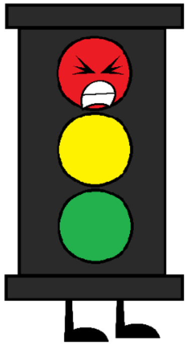
$$V_t = (1+RS)^t V_0$$

- Mi retorno efectivo total será:

$$RE = \frac{V_t}{V_0} - 1 = (1+RS)^t - 1$$

- Si mi inversión capitaliza continuamente:

$$V_t = e^{RC \cdot t} V_0$$

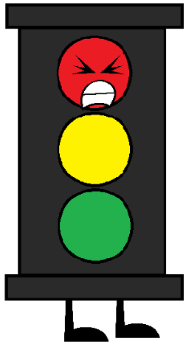


- Analogía:

$$V_t = e^{\ln(S_1 / S_0) \cdot t} V_0$$

$$\ln(S_1 / S_0) \cdot t = \ln\left((S_1 / S_0)^t\right)$$

$$V_t = \left(S_1 / S_0\right)^t V_0 = (1 + RS)^t V_0$$



- La pérdida L de mi portafolio viene dada por:

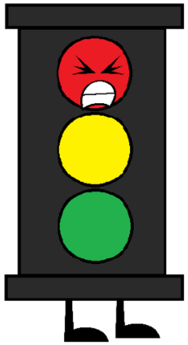
$$L = V_0 - V_1 = V_0 - \left((1 - RS)V_0\right) = RS \cdot V_0$$

Tiempo discreto

$$L = V_0 - V_1 = V_0 - \left(e^{RC} V_0\right) = \left(1 - e^{RC}\right) V_0$$

Tiempo continuo

Log Retornos: Agregación Temporal



En tiempo continuo, el retorno punta contra punta es la suma de retornos:

$$R_{t,t-2} = ln(P_t / P_{t-2}) = ln(P_t / P_{t-1}) + ln(P_{t-1} / P_{t-2}) = R_t + R_{t-1}$$

Si los retornos son iid, los retornos y varianzas son constantes y las covarianzas son 0:

$$E(R(0,T)) = E(R(0,1)) + \ldots + E(R(T-1,T)) = E(R(0,1)) * T$$

$$V(R(0,T)) = V(R(0,1)) + \ldots + V(R(T-1,T)) = V(R(0,1)) * T$$

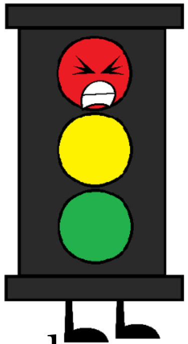
Si los retornos no son independientes:

$$R_t = \rho * R_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$V(R_t + R_{t-1}) = V(R_t) + V(R_{t-1}) + 2\rho \sqrt{V(R_t)} \sqrt{V(R_{t-1})}$$

$$= V(R) + V(R) + 2\rho V(R) = V(R) * 2 * (1 + \rho)$$

Ajuste temporal del VaR



- Es posible también generalizar el cálculo de VaR para periodos diferentes t_1 y t_2:

$$VaR_1 = -W * Z_\alpha * \sigma * \sqrt{t_1}$$

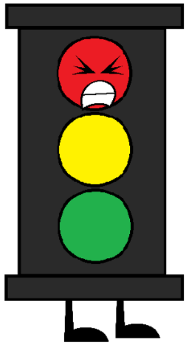
$$VaR_2 = -W * Z_\alpha * \sigma * \sqrt{t_2}$$

Asume μ=0

- De manera que podemos ajustar el VaR para diferentes periodos por:

$$VaR_1 = -W * Z_\alpha * \sigma * \sqrt{t_1}$$

$$VaR_2 = \underbrace{-W * Z_\alpha * \sigma * \sqrt{t_1}}_{VaR_1} * \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} = VaR_1 * \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$$



- En vez de computar el 10-days VaR, la mayoría de los analistas calculan 1-day VaR y ausmen

$$10\text{-day VaR} = \sqrt{10} \times 1\text{-day VaR}$$

- Que es exacto cuando el retorno diario es Normal e iid

2.3. VAR-X (NO NORMAL)

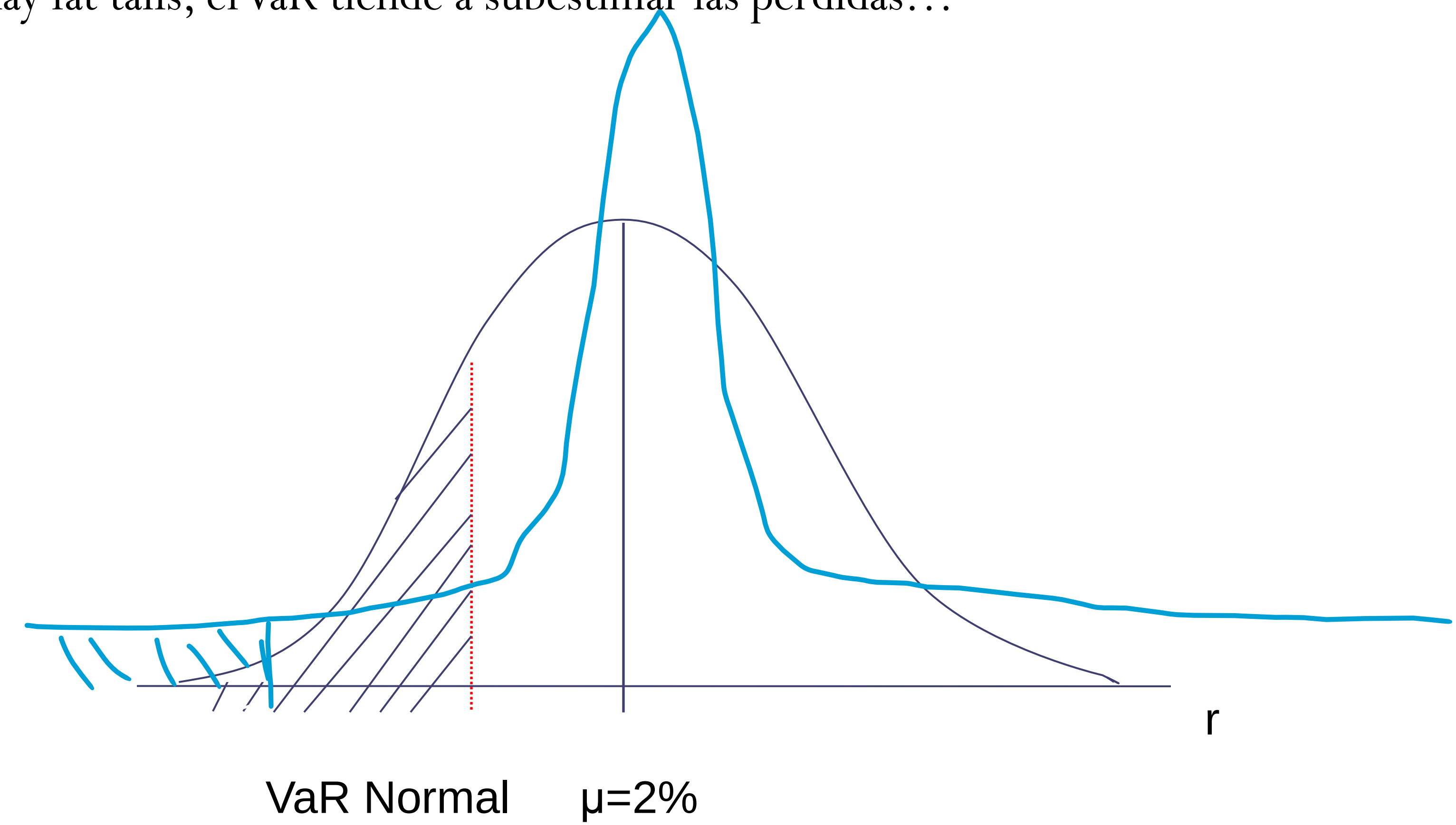
- A menudo la distribuciones de los retornos exhiben fat tails

- La T de Student tiene fat tails (mayor cuanto menos grado de libertad tiene).

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

- tiene la dificultad técnica de que es difícil determinar los grados de libertad en la práctica

- Si hay fat tails, el VaR tiende a subestimar las pérdidas…

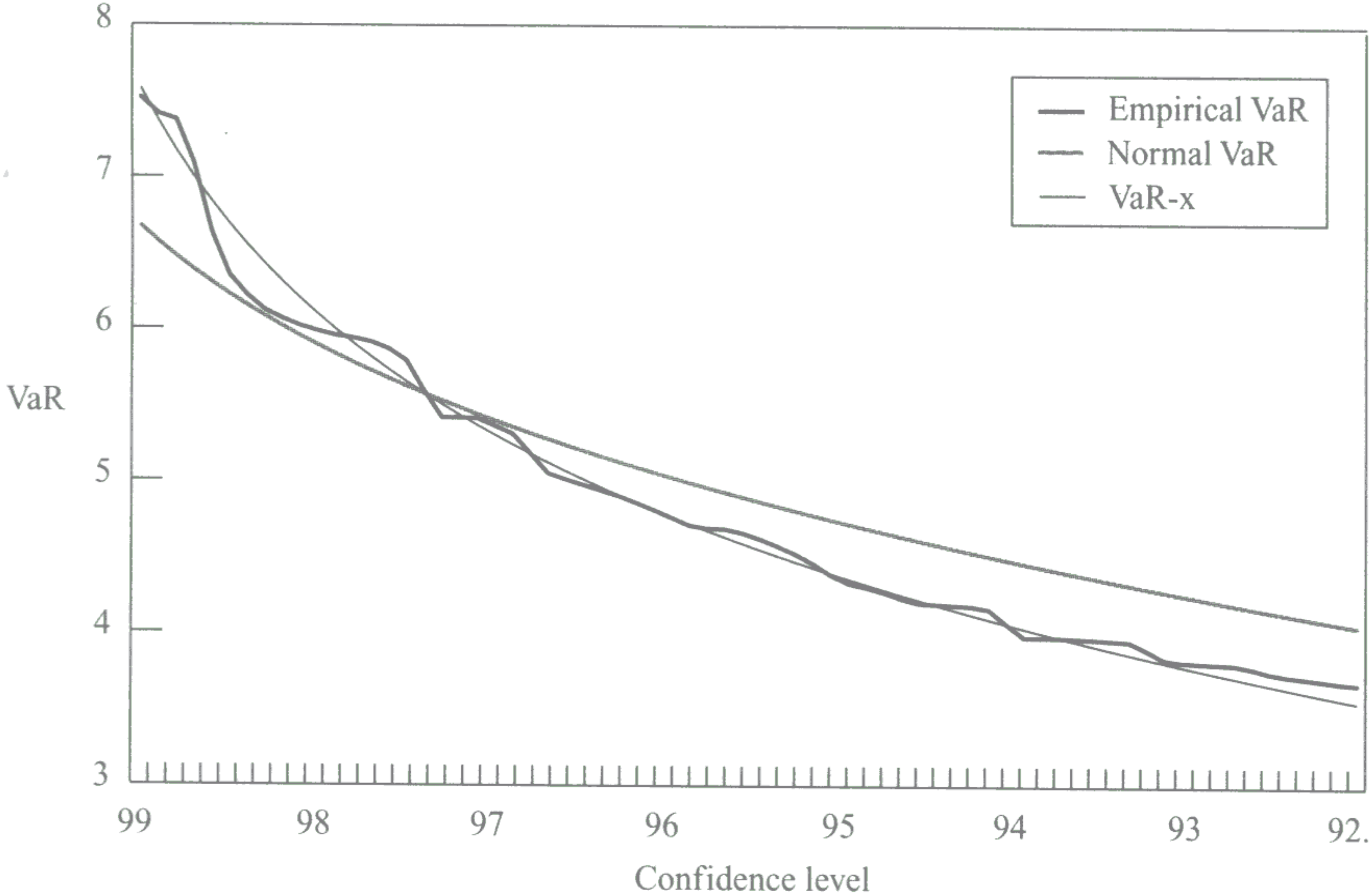


- Si asumo que es Normal, computo el VaR que está en negro, pero si la verdadera distribución exhibe fat tails como la azul, estó subestimando el riesgo de cola (el VaR me da menos malo de lo que es en realidad)
- El método VaR-X propone “castigar” por colas anchas

- Recordar que VaR : $R^* = -ZS^* + \mu$
- VaR-X: $R^* = -\theta S^* + \mu$
- Donde

$$\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha/(\alpha-2)}}$$

- Para ver como computar α ver Huisman et al (en carpeta, opcional)
- En la practica no son tan usados…



Empirical VaR
Normal VaR
VaR-x
VaR
Confidence level
8
7
6
5
4
3
99
98
97
96
95
94
93
92.1

3. TIPOS DE VAR

CVaR . Condicional VaR

VaRC . value at risk contribution

MVaR. marginal value at risk

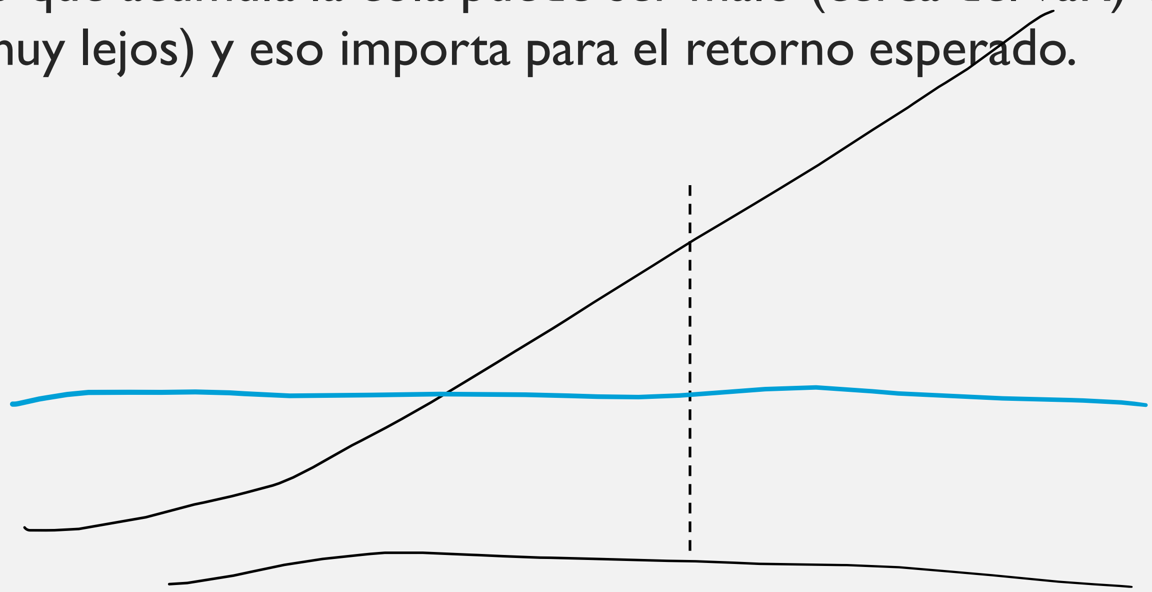
IVaR. Incremental value at risk

OTROS VARES

- Hay dos aspectos muy distintos que nos interesan adem[as del VaR que venimos discutiendo. Uno es conocer major que pasa en la cola mala, si llego a entrar en esa situaci[on anormal de la cola mala, que pasa.
- El otro concepto tiene que ver con la contribución de los activos de mi portafolio al VaR. Esto es importante porque si quiero reducer el riesgo VaR tengo que saber cual o cuales activos están contribuyendo más a este riesgo de cola. Hay varios conceptos para esto
  - **value at risk contribution (VaRC)**
  - **marginal value at risk (MVaR)**
  - **Incremental value at risk (IVaR)**

1. CONDITIONAL VAR (CVAR)

- VAR no nos dice nada acerca de la magnitud de las pérdidas potenciales en casos extremos (cuando caemos en la cola).
- Lo que acumula la cola puede ser malo (cerca del VaR) o pésimo (muy lejos) y eso importa para el retorno esperado.



El gráfico es un ejemplo de dos distribuciones con igual VaR pero con muy distinto riesgo de lo que puede pasar cuando caemos en la cola mala

DEFINICIÓN DE CVAR

- VaR condicional (también conocido como Expected Shortfall o Expected Tail Loss (ETL)) es el valor esperado del retorno condicional a que este sea menor o igual que el VaR. Me dice lo que pasa en la "cola" mala.
- Si es un VaR Empírico, debo hacer el promedio de los retornos condicional (if) son menores que el VaR (en Excel, averageif(, "<VaR")
- Si es un VaR Covariance y la distribución fuera discreta sería multiplicar cada uno de los retornos por debajo del VaR (peores que el VaR) por su probabilidad de ocurrencia). En el caso de retornos continuos es la integral entre el VaR y – infinito.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL CVAR

VENTAJA

- Captura el comportamiento en las colas de los retornos del portafolio más allá del p-quantil.
- La diversificación reduce el CVaR

DESVENTAJA

- CVaR se define como un valor esperado por lo que puede ser sensible a outliers.
- Puede ser difícil de computar en la práctica.

2. VALUE AT RISK CONTRIBUTION (CVAR)

Descompone el VaR del portafolio en un promedio ponderado de los VaR individuales de los activos

$$VaR_p = w_a VaR_a \rho_{ap} + w_b VaR_b \rho_{bp}$$

Donde rho es el coeficiente de correlación del retorno de cada active (a o b) con el retorno del portafolio.
La contribución del activo "a" viene dada por:

$$\frac{w_a VaR_a \rho_{ap}}{VaR_p}$$

3. MARGINAL VAR

- Derivada parcial del VaR en relación a el peso de un activo. Sirve para aproximar el cambio en el VaR para un incremento marginal en el peso de un activo.

- $\Delta VaR = Z\sigma ip / \sigma p$

- Marginal VaR = $\Delta VaR / \Delta Position$

4. INCREMENTAL VAR

- Tiene dos versiones:
  - (Exante) IVaR (a) = VaR (P) – VaR (P - a)
  - (Expost) IVaR (a) = VaR (P + a) – VaR (P)
- VaR (P - a) es el VaR del portafolio sacando la posición a (y reestrucurando los pesos de los activos en forma homogénea). VaR (P + a) es agregando la posición a.
- Me dice como se reduce el VaR si remuevo por completo una posición de mi portafolio (y dejo el resto invertido como está) o bien si agrego una posición a mi portafolio.
- IVaR es usado para determinar los instrumentos (incrementales) que proveeran la mayor cobertura en nuestro portafolio.

FIN

Solución a Minicaso VAN del VaR

- Si cada uno de los flujos del VAN sigue una distribución Normal, tenemos que el VAN va a seguir una Normal también.
- Podemos entonces computar un VaR directamente de esta distribución Normal del VAN, lo que nos falta saber es la media y varianza de este VAN.
- En la próxima hoja estimamos esto usando las reglas del valor esperado y la varianza