



Probabilidad y Estadística (Finanzas Cuantitativas)

2022

MFIN – Universidad Torcuato Di Tella

Prof. Sebastián Auguste

sauguste@utdt.edu

CLASE DE HOY

1. [Valor Esperado y Riesgo](#)
2. [¿Como incorporar el riesgo en las decisiones bajo incertidumbre? El enfoque de Utilidad Esperada](#)
3. [Aplicaciones](#)

I. VALOR ESPERADO Y RIESGO

[Volver al índice](#)

Deciamos antes que la relación ente $E(X)$ y X raya es:

Experimento. Tirar una moneda balanceada gano \$1 cara, gano \$2 seca

- Muestra: 10 tiradas
- $X=1,2,2,1,2,2,1,2,2,1$

- Media muestral $\bar{X} =$

- Salieron 6 dos, y 4 unos

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{6 \times 2 + 4 \times 1}{10} \\ &= 0.6 \times 2 + 0.4 \times 1 \\ &= 1.6\end{aligned}$$

- X toma valores en el conjunto $\{1,2\}$

- $f(X=x)=0.5$

- Media μ_X

$$\mu_X = x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

$$\mu_X = 0.5 \times 2 + 0.5 \times 1 = 1.5$$

- Podemos interpretar el valor esperado como un promedio de largo plazo: lo que obtendríamos en promedio si el juego se juega muchas veces.
- Para un diariero que quiere decidir cuantos diarios comprar, usar el valor esperado para definir su inventario tiene sentido, porque un día estará por arriba, otro por debajo, pero al cerrar el año su ganancia promedio será muy similar al valor esperado.
- Pero... a menudo decidimos sobre situaciones que nunca más van a pasar, y me puede interesar tener una idea que cuanto se puede desviar el valor que puedo obtener de lo que espero, con qué riesgo obtengo ese valor esperado
- El riesgo dependerá del rango de valores que pueden suceder (sus desvíos desde lo que espero) y sus probabilidades.

¿QUÉ ES EL “RIESGO”?

Decíamos que hay varias mediciones que no todas nos dicen lo mismo:

1. Varianza/Desvío Estándar: Riesgo (absoluto) de errarle a la media
2. Coeficiente de Variación: Riesgo relativo de errarle a la media
3. Value at Risk (VaR): “Riesgo de matarte”. el valor que puedo llegar a perder en el peor escenario en cierto período de tiempo bajo condiciones normales del mercado
4. Riesgo de asimetría
5. Riesgo de curtosis (fat tails o exceso de curtosis)
6. Beta CAPM

Beta CAPM: riesgo sistémico. Ve el riesgo del activo i no como el desvío estándar individual, sino como su aporte al riesgo del portafolio de mercado que contiene a todos los activos (concepto de riesgo sistémico o no diversificable)

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{var(R_m)}$$

PARA PENSAR

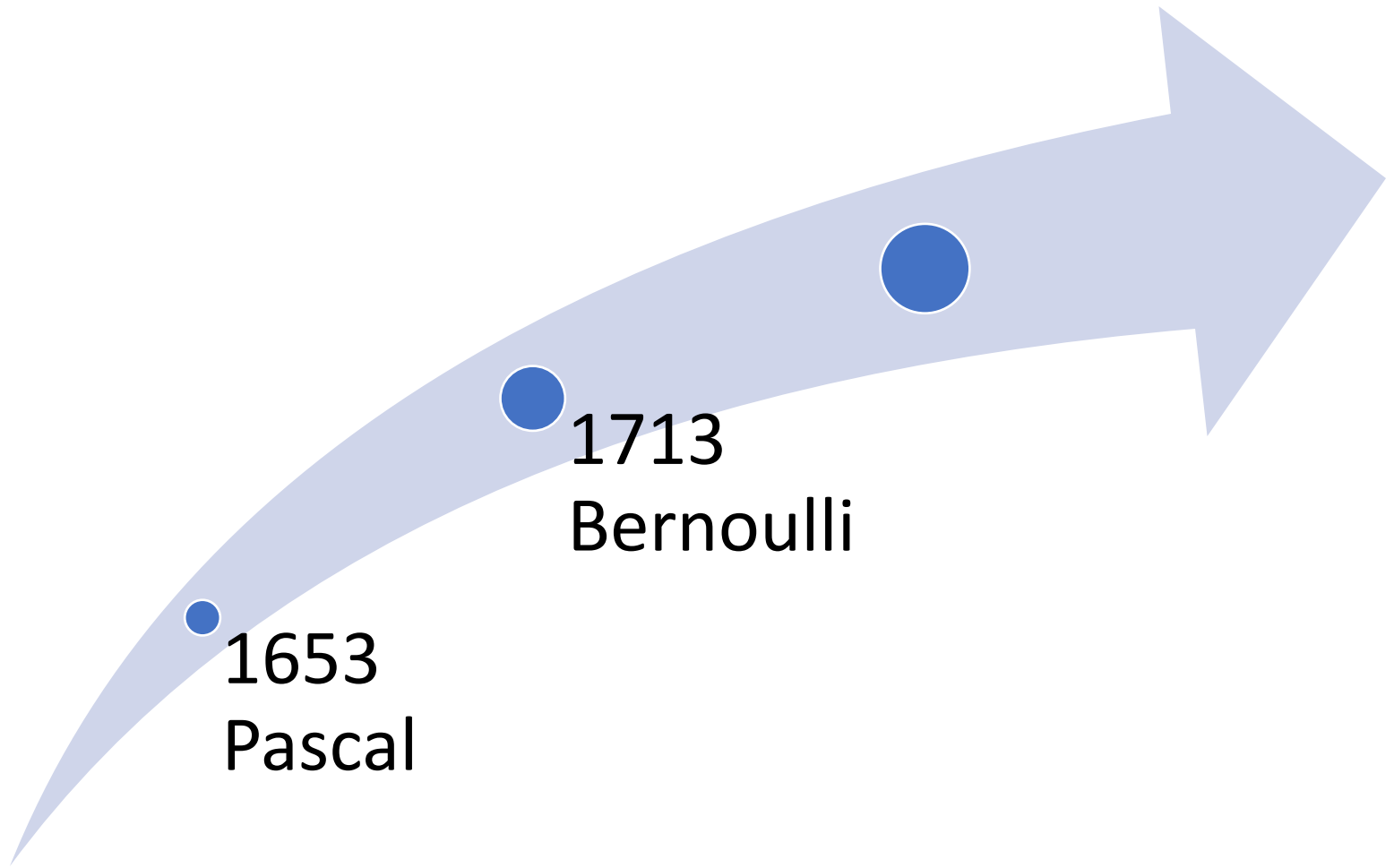
- La empresa petrolera XXX tiene un fondo muy grande en tesorería, cerca de 5 billones de USD, que los invierte en forma muy conservadora en bonos del tesoro.
- Esta misma empresa, cuando está evaluando si sigue o no explorando en un pozo para encontrar petróleo utiliza árboles de decisiones usando Valor Esperado
- ¿es esto una paradoja?

NO POR 2 RAZONES

- Razón I: la exploración es su core business, lo que repite todo el tiempo, y por ende podría apuntar a maximizar solo el valor esperado sin importarle el riesgo. Las finanzas no son su core business, y esos fondos los tiene en forma precautoria por si surge alguna inversión.
- Razón II: el mercado paga por riesgo no diversificable, y no le gusta que las empresas se embarquen en negocios que no son su core business y que agregan incertidumbre y complejidad.

2. ¿COMO INCORPORAR EL RIESGO EN LAS DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE? EL ENFOQUE DE VALOR ESPERADO

[Volver al índice](#)



PARADOJA DE SAN PETERSBURGO



- Nicolás Bernoulli (1713) plantea:

“El casino de San Petersburgo lanza un nuevo juego en el cual un jugador individual lanza repetidamente una moneda hasta que salga cara por primera vez, el pago es 2^n ducados siendo n el último lanzamiento.”

- ¿Cuál es la disposición máxima a pagar (DAP) por jugar este juego?

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \dots$$

- Daniel Bernoulli (1738), primo de Nicolás, plantea una solución a la paradoja en Specimen theoriae novae de mensura sortis



“The determination of the value of an item must not be based on the price, but rather on the utility it yields....There is no doubt that a gain of one thousand ducats is more significant to the pauper than to a rich man though both gain the same amount.”

- Gabriel Cramer (1728) propuso antes algo similar: “the mathematicians estimate money in proportion to its quantity, and men of good sense in proportion to the usage that they may make of it.”



- Resolución a la paradoja: utilidad esperada en lugar de valor monetario esperado

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2) + \dots + x_n p(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \end{aligned}$$

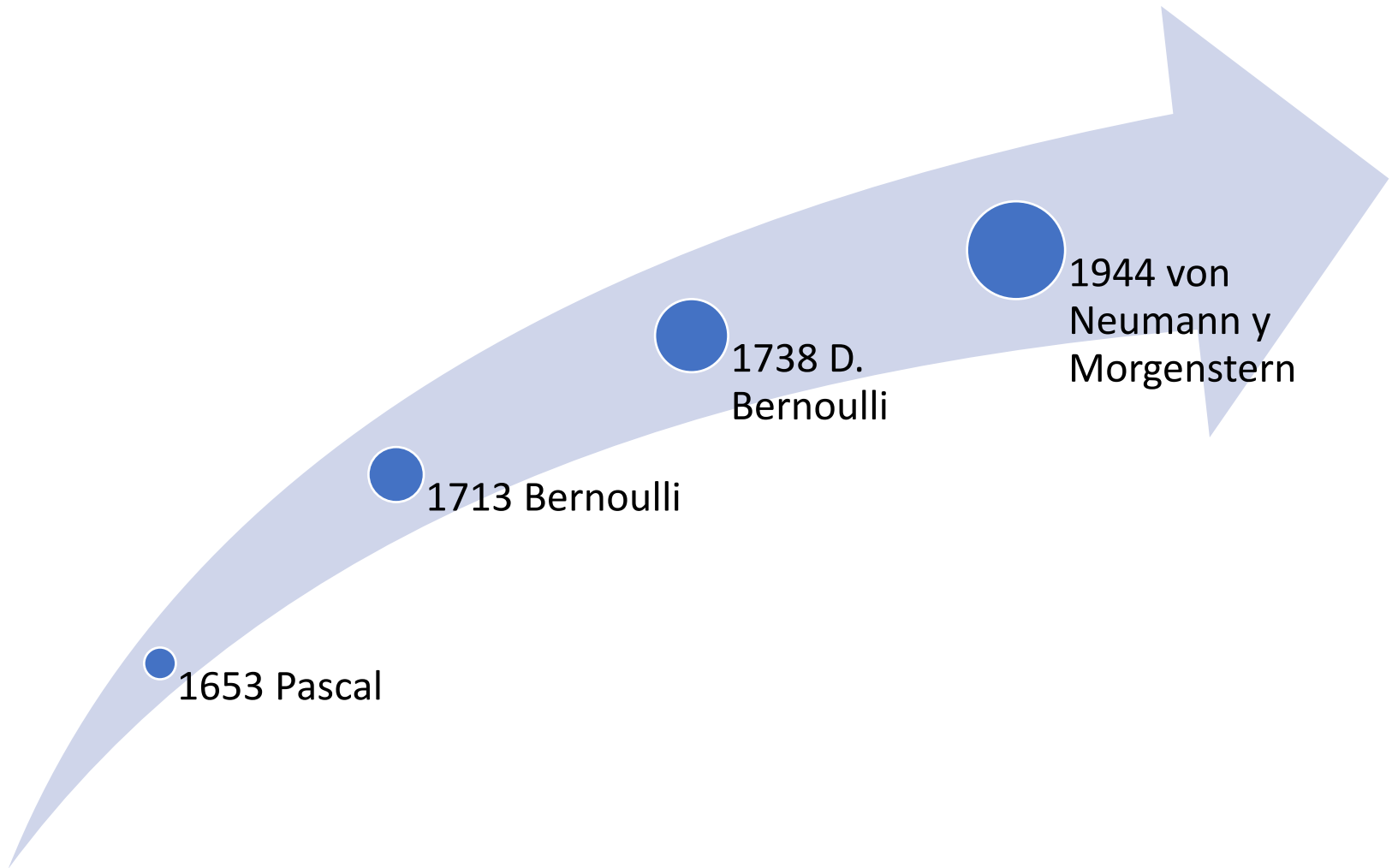
$$\begin{aligned} UE(X) &= u(x_1) p(X = x_1) + u(x_2) p(X = x_2) + \dots + u(x_n) p(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n u(x_i) p(x_i) \end{aligned}$$

EN EL JUEGO

$$E(X) = 2 \frac{1}{2} + 2^2 \frac{1}{2^2} + 2^3 \frac{1}{2^3} \dots = \infty$$

- Pero

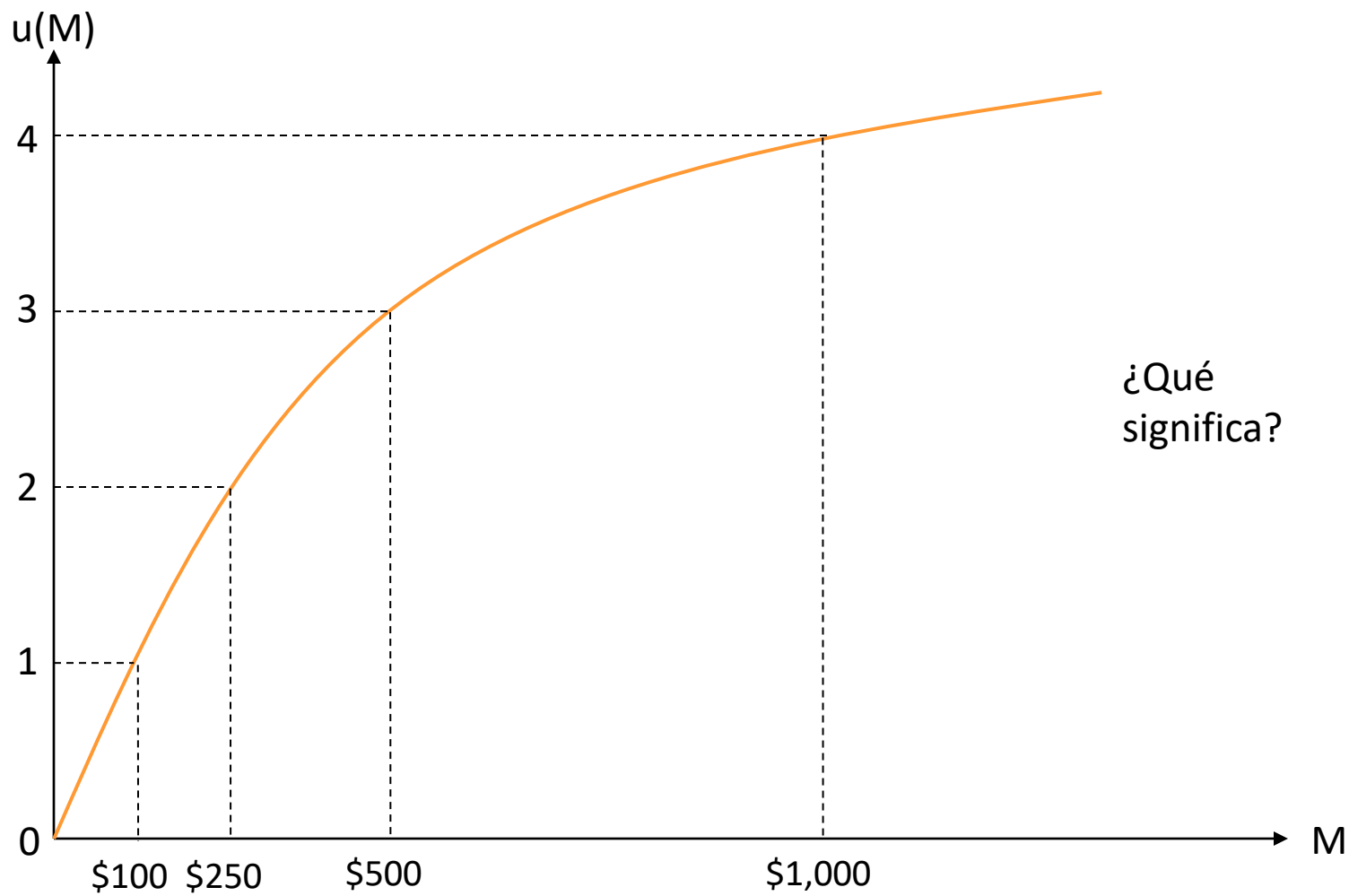
$$\begin{aligned} UE(X) &= \sqrt{2} \frac{1}{2} + \sqrt{2^2} \frac{1}{2^2} + \sqrt{2^3} \frac{1}{2^3} + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 + \dots \approx 2.4142 \end{aligned}$$



AXIOMAS DE UTILIDAD ESPERADA

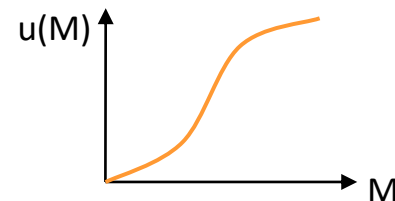
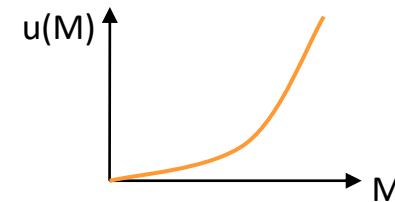
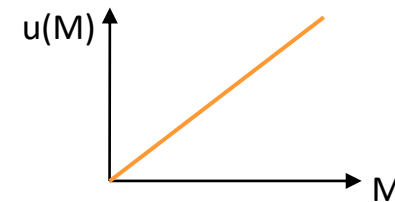
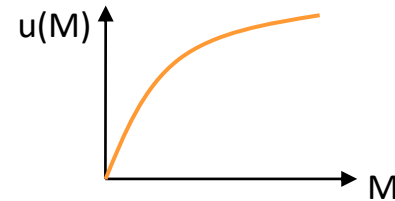
- Preferencias sobre loterías deben ser:
 - Completas
 - Transitivas
 - Continuas
- Satisfacer el Axioma de Independencia de la Alternativa Irrelevante
 - Si agrego una lotería irrelevante, el consumidor no se confunde en su decisión
 - Puede computar correctamente probabilidades

- Si se cumplen los axiomas previos, la gente elige bajo incertidumbre como se maximizara una función de utilidad esperada.
- $\text{Max } EU(x) = p u(x_1) + (1-p) u(x_2)$
- En finanzas todo es “Decisión bajo Incertidumbre”
- u es la utilidad usual que se ve bajo certidumbre (la que te da el bien X_1 , en este caso se´ria el consumo en el estado 1 de la naturaleza)
- Se puede probar que si u es cuadrática, la decisión depende sólo de la media y varianza (una justificación del two-parameter model, la otra es que los retornos siguen distribución Normal)



Preferencias posibles frente al riesgo

- Averso al riesgo
- Neutral al riesgo
- Amante al riesgo
- Actitud frente al riesgo cambiante con riqueza (Friedman-Savage)



...

PROBLEMA CON EL ENFOQUE

- Requiero conocer las preferencias del decision maker (su función de utilidad)
- A menudo nos conformamos con medir la varianza como una medida de riesgo (amplitud de resultados posibles)
- A menudo se asume la firma es neutral al riesgo (porque ya está diversificada o simplemente porque es su negocio tomar riesgo en esa actividad)
 - Pregunta: ¿por que empresas petroleras hacen actividades de riesgo y usan árboles de decisions pero luego a la hora de manejar su tesorería son muy conservadores?
- Existen métodos para imputar una función de utilidad

FORMAS DE ESTIMAR LA AVERSIÓN AL RIESGO

1. Laboratorio, dándole a la persona a elegir entre distintas loterías para ir construyendo la $u(x)$
2. Calibrando una función (e.g. Exponential Utility Function)
3. Psicometric tests
4. Neurociencia (right inferior frontal gyrus)
5. Econometrics estimar con datos de la realidad

MÉTODO I. LABORATORIO

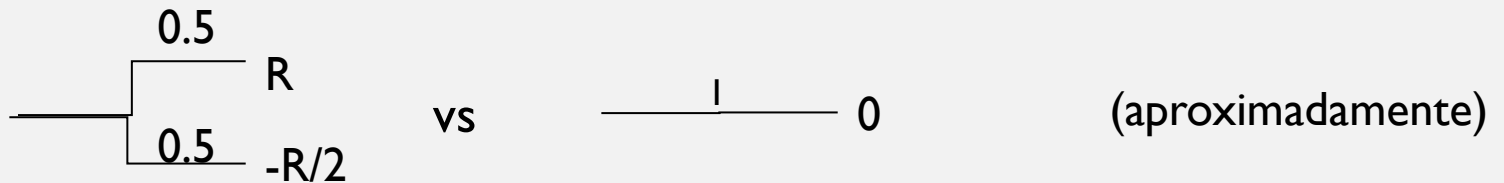
- Son pruebas controladas donde se le dan loterías abstractas.
- La discusión es si las decisiones en este contexto son similares a las que hacen en la vida real.
- Harrison, List & Towe (2007) dice que para juegos sencillos sí, pero no para nonmonetary outcomes.

MÉTODO 2. CALIBRANDO. EJEMPLO DE EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION

- Para una persona aversa al riesgo se postula una función

$$u(M) = R \left(1 - e^{-\frac{M}{R}} \right)$$

- Y el parámetro R se obtiene de preguntar: para que R está indiferente entre estas dos loterías?



- Simple Decision Tree usa $u(M) = (1 - e^{-\gamma M})$
- Por lo que $\gamma = 1/R$

MÉTODO 3. PSICOMETRÍA

Risk-Taking Test

58 questions, 30 min.



PROGRESS STATUS:



	Completely agree	Mostly agree	Somewhat agree/disagree	Mostly disagree	Completely disagree
	1	2	3	4	5
1. Whatever plans you make, there is always something unexpected that will interfere with them.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2. I can minimize the consequences of risk-taking by planning ahead and preparing for each outcome.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3. Others consider my lifestyle wild and exciting.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4. I have control over the outcome of my work, even if the project is difficult or demanding.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5. Rules are meant to be broken.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

- <http://testyourself.psychtests.com/testid/2122>
- <http://www.humanmetrics.com/rot/rotqd.asp>

Risk-Taking Test

58 questions, 30 min.



PROGRESS STATUS:



	Completely agree	Mostly agree	Somewhat agree/disagree	Mostly disagree	Completely disagree
	1	2	3	4	5
6. I like my music loud and crazy rather than soft and serene.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7. I am willing to take a chance at failure for the sake of innovation.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8. I would take a risk if there were something in it for me.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9. At an amusement park, I automatically gravitate toward the highest, fastest, most intense rides.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10. You cannot fool your destiny.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Next

Otros ejemplos

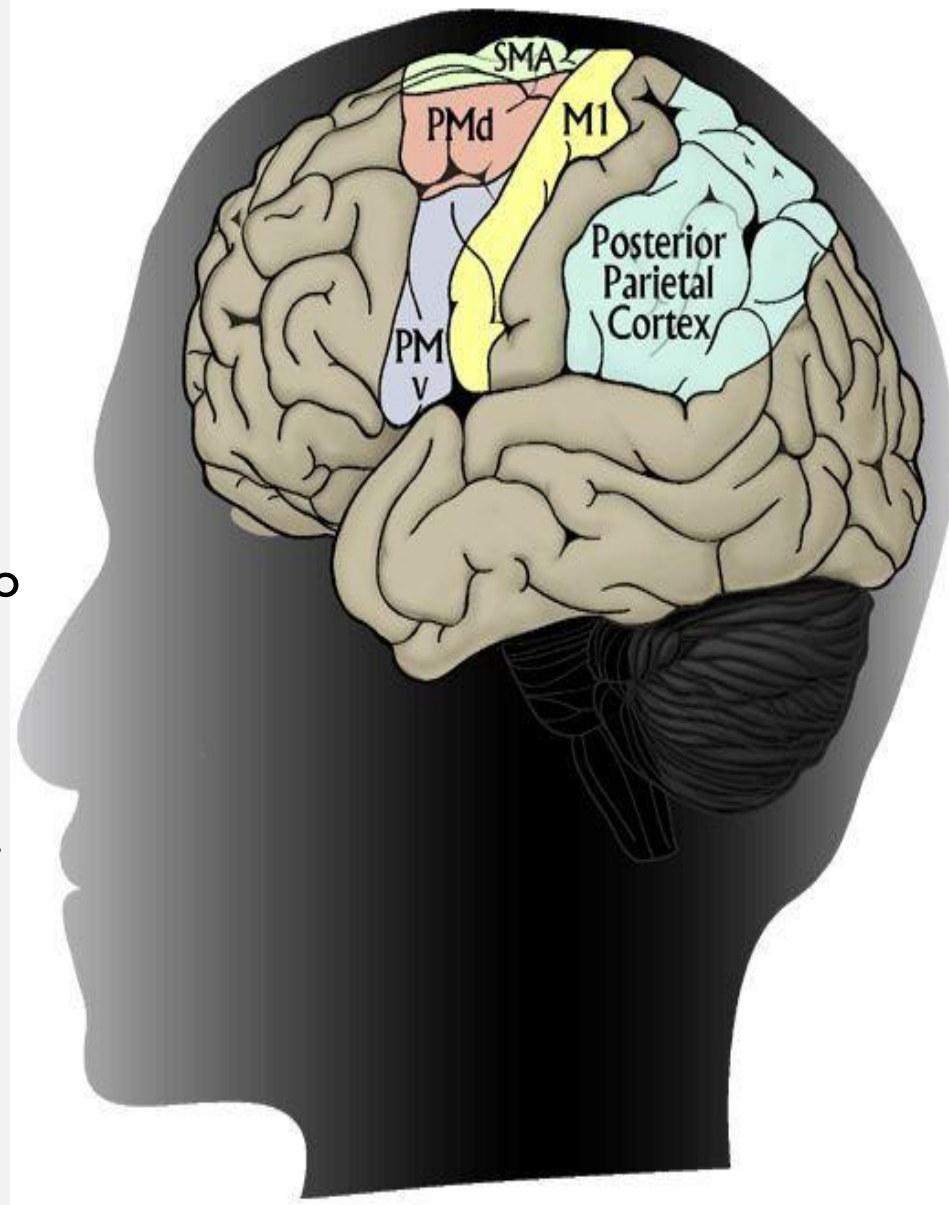
- Perfil del inversor FIMA
 - <http://www.fondosfima.com.ar/personas/herramientas/perfil-del-inversor/>
- CNV
 - <http://www.cnv.gob.ar/EducacionBursatil/testinversor/testinversor.asp?Lang=0>
- Santander Rio
 - <http://www.santanderrio.com.ar/banco/online/personas/inversiones/test-del-inversor>
- <http://njaes.rutgers.edu:8080/money/riskquiz/>

MÉTODO 4. IMÁGENES

El volumen de la materia gris de una región de la corteza parietal posterior derecha es significativamente predictivo de las actitudes de riesgo individuales.

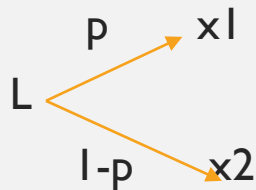
Los hombres y las mujeres con un mayor volumen de materia gris en esta región exhibieron menor aversión al riesgo.

A medida que la gente envejece, se vuelve más aversa al riesgo, y esto está relacionado con el hecho de que la corteza se adelgaza considerablemente con la edad.



AVERSIÓN AL RIESGO

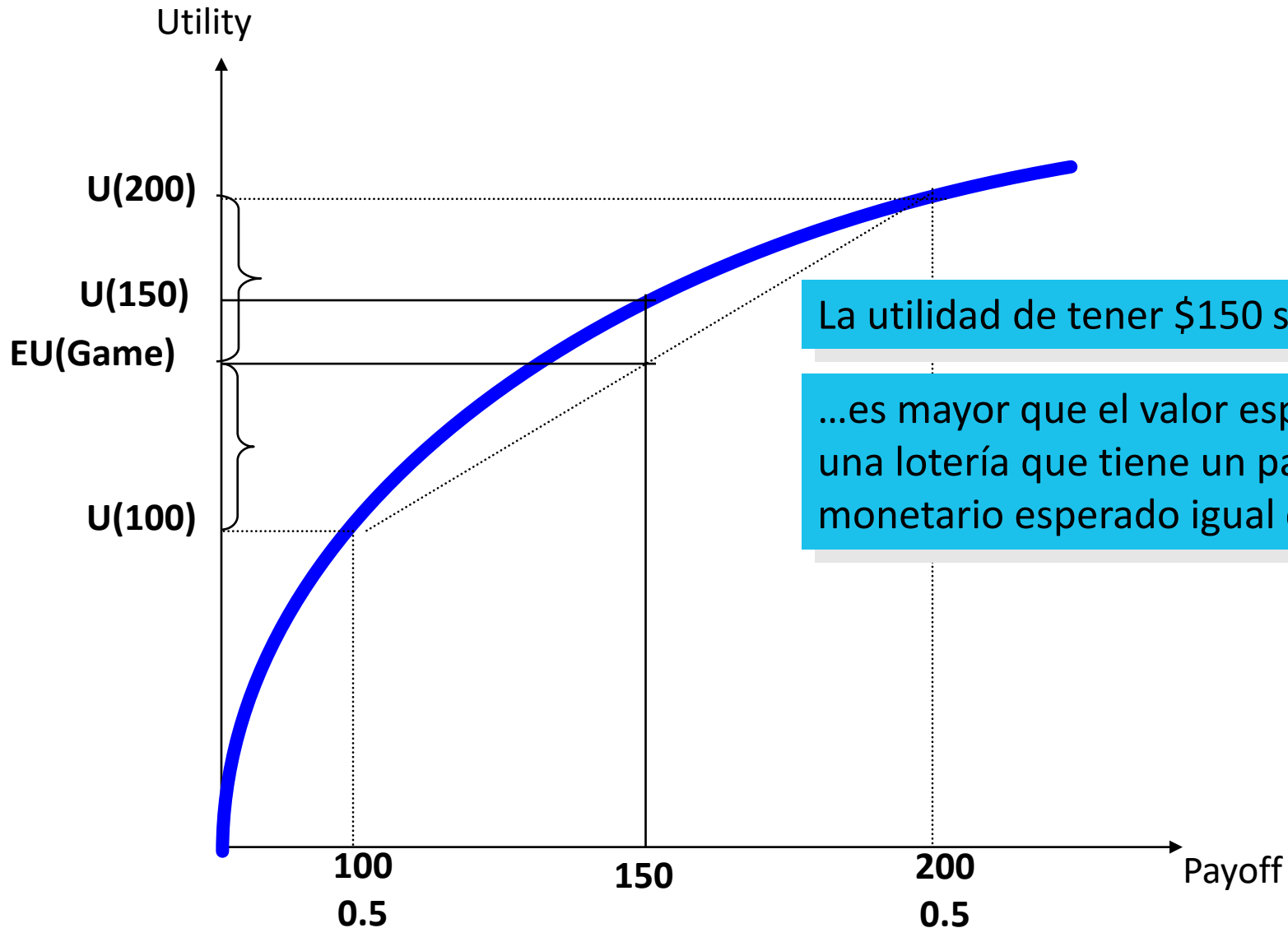
- Una persona es aversa al riesgo si en el momento de enfrentarse a una lotería L ,



prefiere obtener con seguridad una suma de dinero igual a la ganancia esperada de esta lotería.

- Definamos $m = p \cdot x1 + (1-p) \cdot x2$
- Averso al riesgo si $u(m) > p \cdot u(x1) + (1-p) \cdot u(x2)$ (desigualdad de Jensen)

$$EU(x) = p u(x_1) + (1-p) u(x_2)$$



- Prima de riesgo: monto de plata que hay que darle a esta persona para que acepte la lotería L al dinero seguro.

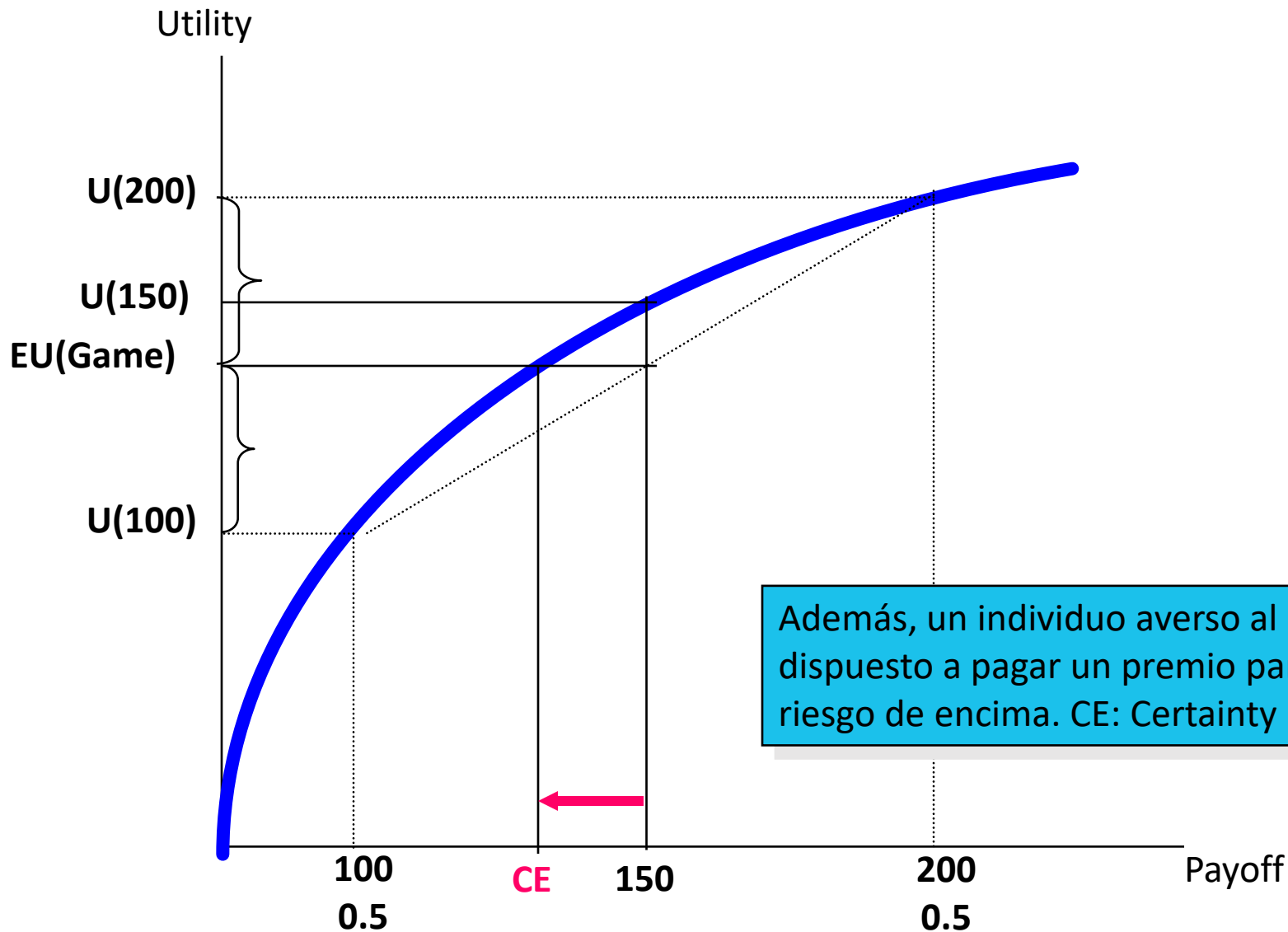
Si $u(m) > p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot u(x_2)$

la prima de riesgo n cumple con:

$$u(m) = p \cdot u(x_1 + n) + (1-p) \cdot u(x_2 + n)$$

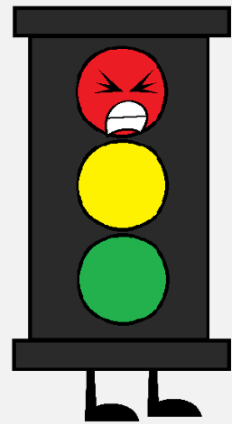
- Equivalente cierto “e”: monto de dinero que la persona aceptaría a cambio de una lotería L

$$u(e) = p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot u(x_2)$$



Además, un individuo averso al riesgo está dispuesto a pagar un premio para sacarse el riesgo de encima. CE: Certainty Equivalente

AVERSIÓN AL RIESGO



Grado de aversión al riesgo varía entre personas

Existen dos formas de medir la aversión

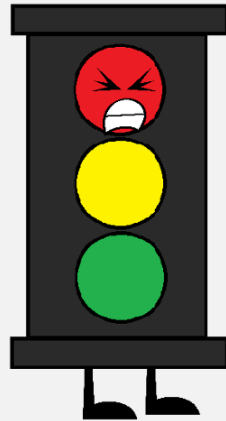
1.Arrow–Pratt measure of absolute risk-aversion (ARA)

$$A(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

2.Arrow–Pratt measure of relative risk-aversion (RRA)

$$R(c) = cA(c) = \frac{-cu''(c)}{u'(c)}$$

EJEMPLOS DE FUNCIONES USUALMENTE UTILIZADAS



- Raíz n-ésima $u(c) = c^n$ donde $0 < n < 1$
- Log utility $u(c) = \log(c)$ (es DARA)
- Exponential utility (es CARA)

$$u(c) = 1 - e^{-\alpha c}$$

- Hyperbolic absolute risk aversion (HARA)

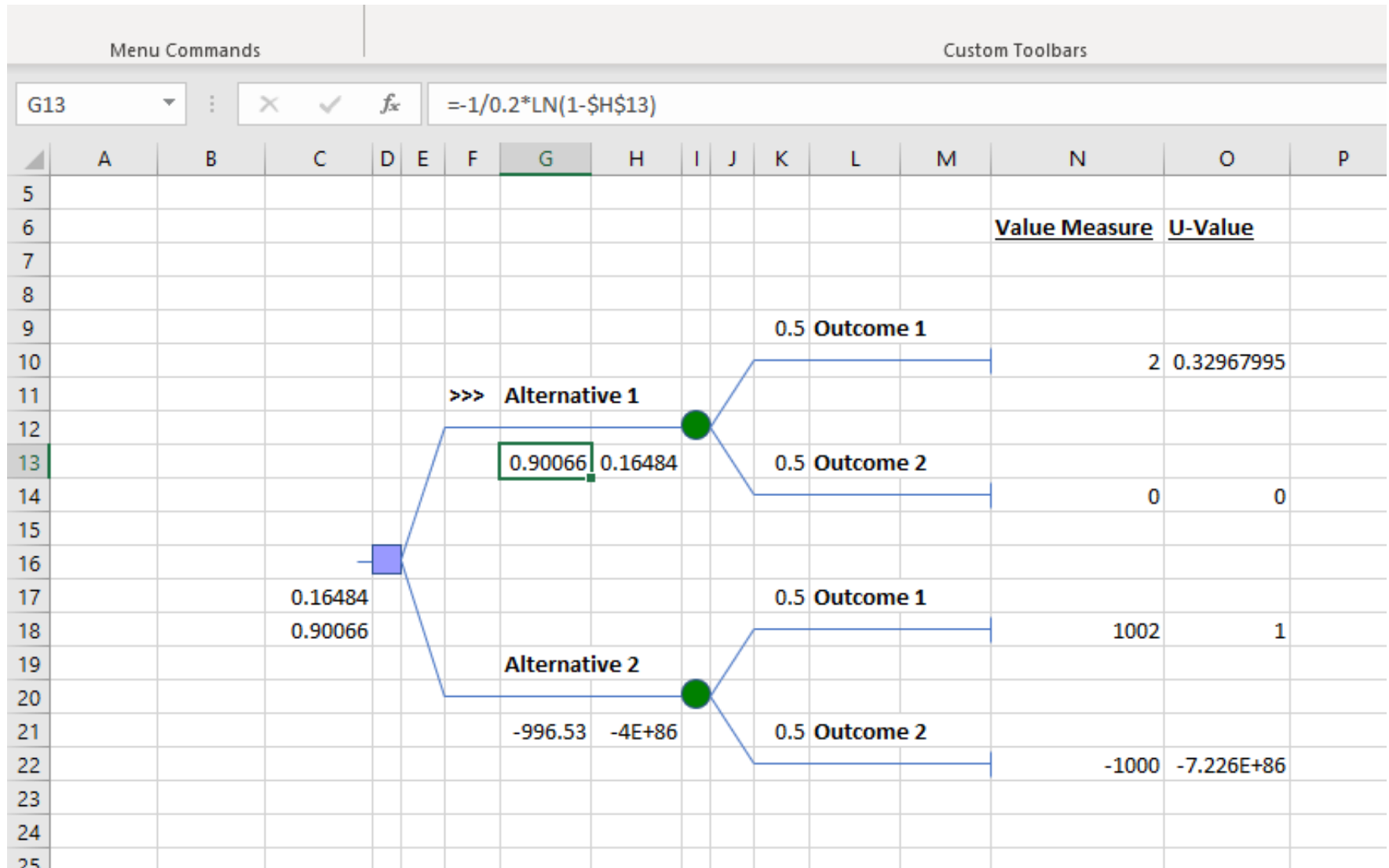
$$U(W) = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \left(\frac{aW}{1 - \gamma} + b \right)^\gamma$$

- <http://testyourself.psychtests.com/testid/2122>
- <http://www.humanmetrics.com/rot/rotqd.asp>

3. APLICACIONES

[Volver al índice](#)

Simple Decision Tree y utilidad Esperada



I. PRICING DE SEGUROS. RELOADED

- La empresa en la que trabaja quiere hacer un envío de mercadería valuada en \$5 millones por camión a Zeta City. Se estima que la probabilidad de que lo roben en el trayecto es de 10%. Tiene que escoger una de las siguientes opciones:
 - a. Comprar un seguro contra robo por una prima de \$ 750.000, que en caso de robo le restituye un total de \$5 millones.
 - b. Contratar un servicio de seguridad, que acompaña al camión en el trayecto, que si bien no elimina por completo el riesgo de robo, reduce la probabilidad de robo, que ahora es de 1% (en lugar de 10%). El costo de esta empresa de seguridad es de \$ 500.000
 - c. No hacer nada (no compra ni seguro ni paga un servicio de seguridad)
- Ahora usted cambió de trabajo y está en Seguros Recontra ¿Cuál es la elección óptima si su empresa es neutral al riesgo? ¿Cuál debería ser el precio de la prima que usted le debería cobrar para que esta empresa compre su seguro? ¿es una prima actuarialmente justa?
- Si la aversión al riesgo de esta empresa cliente suyo fuera de 0.2, ¿cuál es el precio óptimo a cobrar?

2. MINICASO DELTA AIRLINE

- La compañía Delta fijó el precio de los pasajes para tener cierta ganancia esperada. Los pasajes se venden en su totalidad 3 meses antes que el vuelo salga.
- Su función de ganancias es

Ganancia (G)=precio(P)*cantidad(Q)-litros(l)*precio combustible (P_c) – salario(w)*trabajadores(L)

$$G = P \times \widetilde{Q(P)} - l \times \widetilde{P_c} - w \times L$$

- Al momento 0 (cuando lanzan a la venta los pasajes, 12 meses antes), no sabe cuantos pasajes venderá y cuánto valdrá el combustible (ambas son variables aleatorias). La cantidad de trabajadores es algo que eligen ellos, al igual que el precio (no son variables aleatorias). El salario podríamos pensarlo como una variable aleatoria, porque luego cuando salga el vuelo, podrían cambiar, pero en países estables no se cambian salarios tan seguidos, asumamos eso.
- La marca sobre la letra indica que es una variable aleatoria (que tiene una distribución de densidad o probabilidad, y tiene una media y una varianza)

- Obviamente la cantidad esperada de pasajeros es función del precio. Es decir, Q es una variable aleatoria que depende del precio $Q(P)$ en forma decreciente (también depende de otras variables como el precio de la competencia, salarios de la población, actividad económica, inflación, tasa de desempleo, etc., que para simplificar no las consideraremos).

- A momento 0

$$E[G] = P \times E[Q] - l \times E[P_c] - w \times L$$

- La firma podría elegir un precio para maximizar esta ganancia esperada.
- Asumamos que a los 3 meses ya vendió todos los pasajes, pero todavía le quedan 9 meses para que el vuelo salga.
- A los 3 meses decimos que la demanda ya se “realizó” y la firma ya tiene ese valor. Su ganancia ahora sólo depende de una variable aleatoria, el precio del combustible, ya que el resto son datos. El valor esperado será

$$E[G] = P \times Q - l \times E[P_c] - w \times L$$

- Y la varianza:

$$\text{var}(G) = l^2 \text{var}(P_c)$$

- Enfrenta un riesgo que no es del negocio en sí, venta de pasajes, y está relacionado con el riesgo de cambio de precio del combustible.

- Si la firma compra un contrato futuro para comprar petróleo WTI, en su función de ganancias hay que agregar esto.
- n es la cantidad de contratos que compró, y gana si el precio spot del WTI (P_{WTI}) está por encima del precio del futuro (P_{fut}). En valor esperado

$$E[G] = P \times Q - l \times E[P_c] - w \times L + n \times (E[P_{WTI}] - P_{fut})$$

- Y varianza

$$\text{var}[G] = l^2 \times \text{var}[P_c] + n^2 \times \text{var}[P_{WTI}] - 2 \times l \times n \times \text{cov}(P_c, P_{WTI})$$

- Esto se llama cross hedging, porque hago la cobertura con otro producto que tiene alta correlación.

RENDIMIENTO ESPERADO Y VARIANZA DEL PORTAFOLIO

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i R_i$$

$$E[R_p] = E\left[\sum_{i=1}^N w_i R_i\right] = \sum_{i=1}^N w_i E[R_i]$$

$$\begin{aligned}\text{var}[R_p] &= \text{var}\left[\sum_{i=1}^N w_i R_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^N w_i^2 \text{var}(R_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j)\end{aligned}$$

EXPRESIONES ALTERNATIVAS PARA LA VARIANZA DEL PORTAFOLIO

$$\begin{aligned}\text{var}[R_p] &= \sum_{i=1}^N w_i^2 \text{var}(R_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j) \\ &= \sum_{i=1}^N w_i^2 \text{var}(R_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j\end{aligned}$$

THE POWER OF DIVERSIFICATION

- Las covarianzas juegan un rol importante en la reducción del riesgo de su portafolio.
- Usted puede reducir el riesgo aún si las covarianzas no son negativas
- Ejemplo: Si arma un equal weighted portfolio de N activos donde cada uno tiene igual retorno esperado μ y varianza σ^2 , pero son todos independientes (covarianza nula) tenemos:

Rendimiento esperado y varianza del portafolio

$$E[R_p] = E\left[\sum_{i=1}^N w_i R_i\right] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \mu = \mu$$

$$\begin{aligned}\text{var}[R_p] &= \text{var}\left[\sum_{i=1}^N w_i R_i\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N w_i^2 \text{var}(R_i) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{N}\end{aligned}$$

Logró reducir el riesgo obteniendo igual retorno!

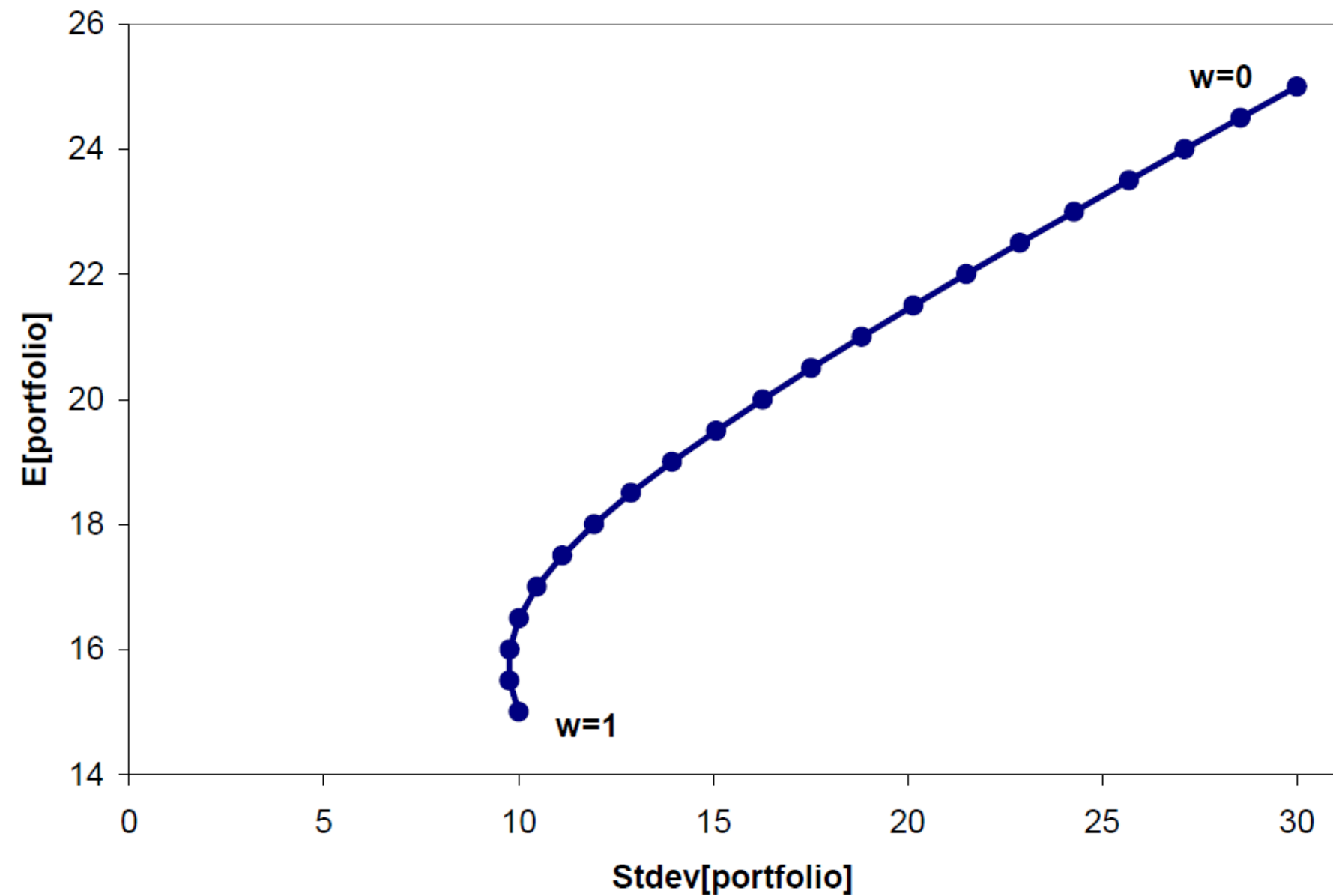
Es una prueba técnica del viejo dicho que “no hay que poner todos los huevos en una misma canasta”

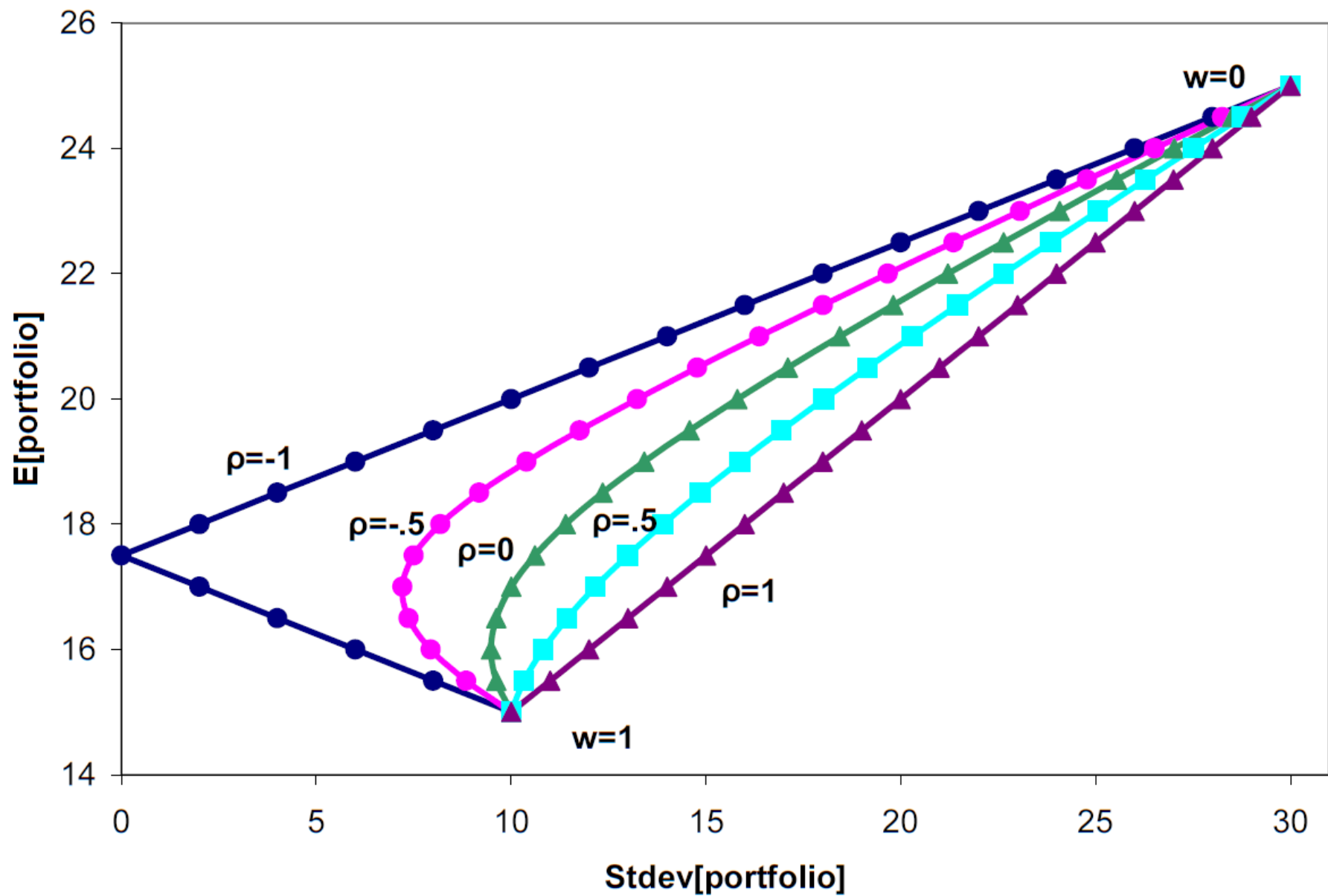
Minicaso. Portfolio Management

- Usted puede comprar dos activos, Apple (A) y Boing (B). Cuenta con la siguiente información sobre sus retornos.

Asset	Expected Return	Standard Deviation	Correlation Coefficient
A	8,0%	8,7%	-0,379
B	10,0%	22,7%	

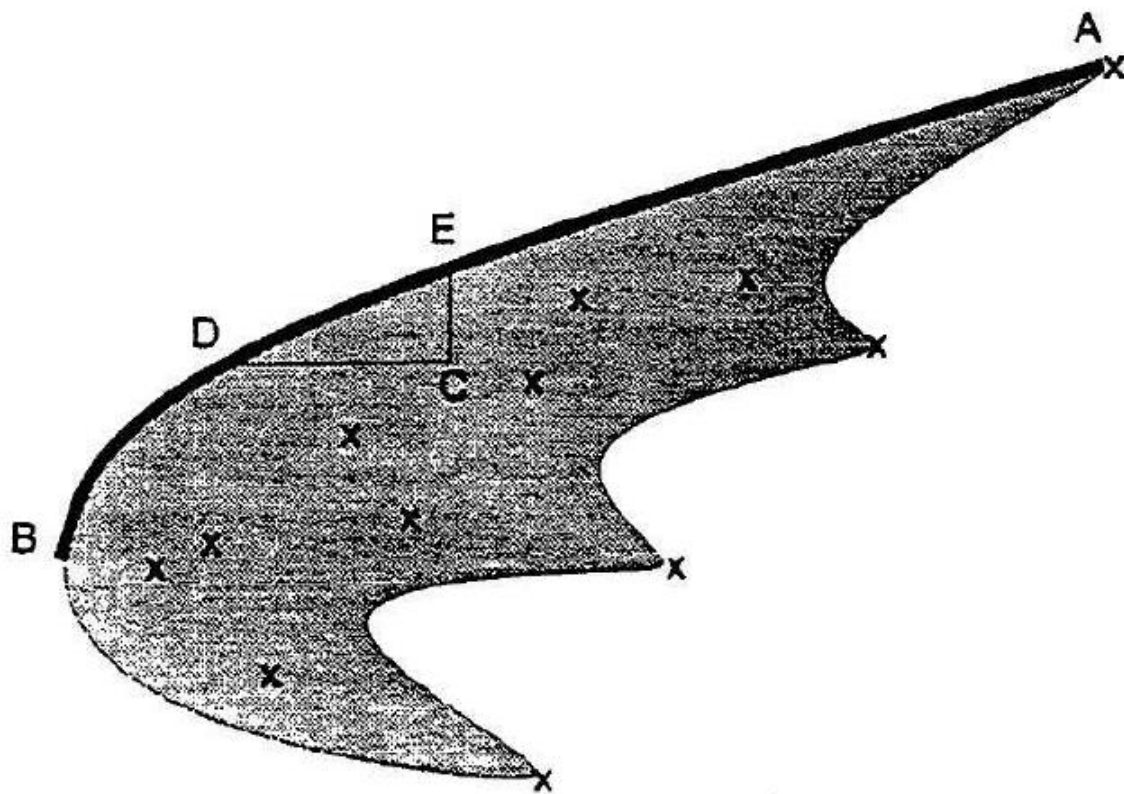
- compute el retorno esperado y el desvío estándar para un portafolio que pone distintos pesos para cada activo (pruebe yendo de un extremo al otro en los pesos).





- Con mas acciones, el mejor portfolio es más difícil de calcular
- Casi cualquier punto en la región representa portfolios
- Frontera eficiente: sugerida por Markowitz en su importante paper del '52 que comenzó con estos modelos (¡le dieron el premio Nobel en 1990 por esto!)

Expected
portfolio
returns
 μ_p



Standard deviation
of returns, σ_p

Problema de Markowitz

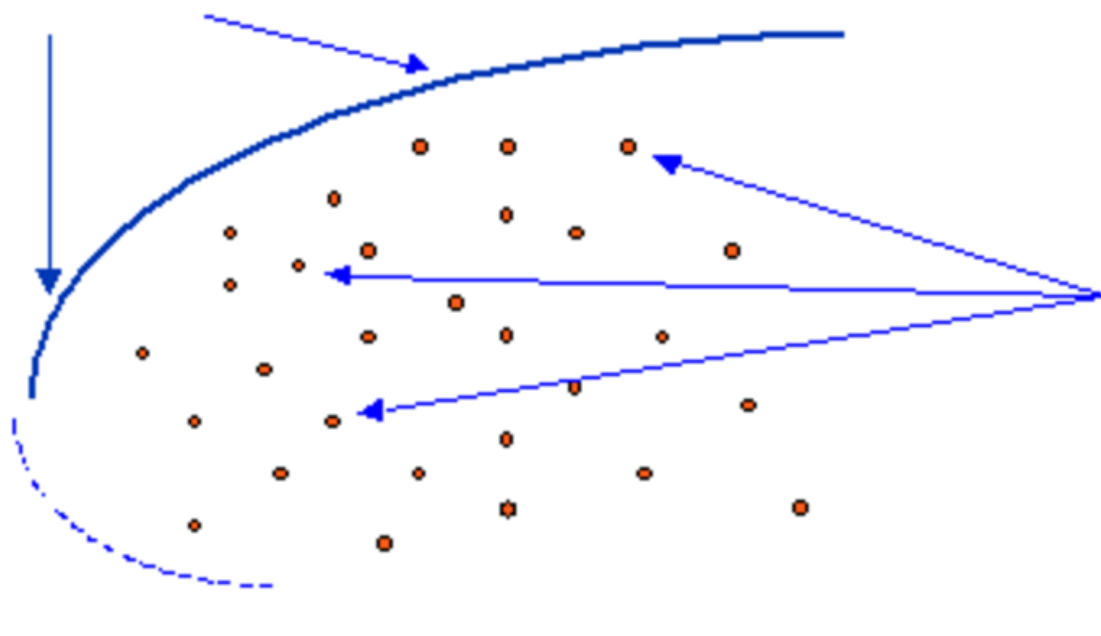
- $\min_{\{w\}} \text{var}(Rp) \quad \text{sa} \quad E(Rp) = \text{constante}$
- Variando la constante que se quiere como retorno se encuentra a la frontera de Markowitz y al algoritmo que surge de este problema se lo llama algoritmo de Markowitz
- Los portafolios sobre el límite superior de la frontera se la conoce como Frontera de Portafolios Eficientes

Efficient Frontier : all portfolios that provide the highest return for a specified level of risk.

Expected Return

Individual Assets

Volatility (Risk)

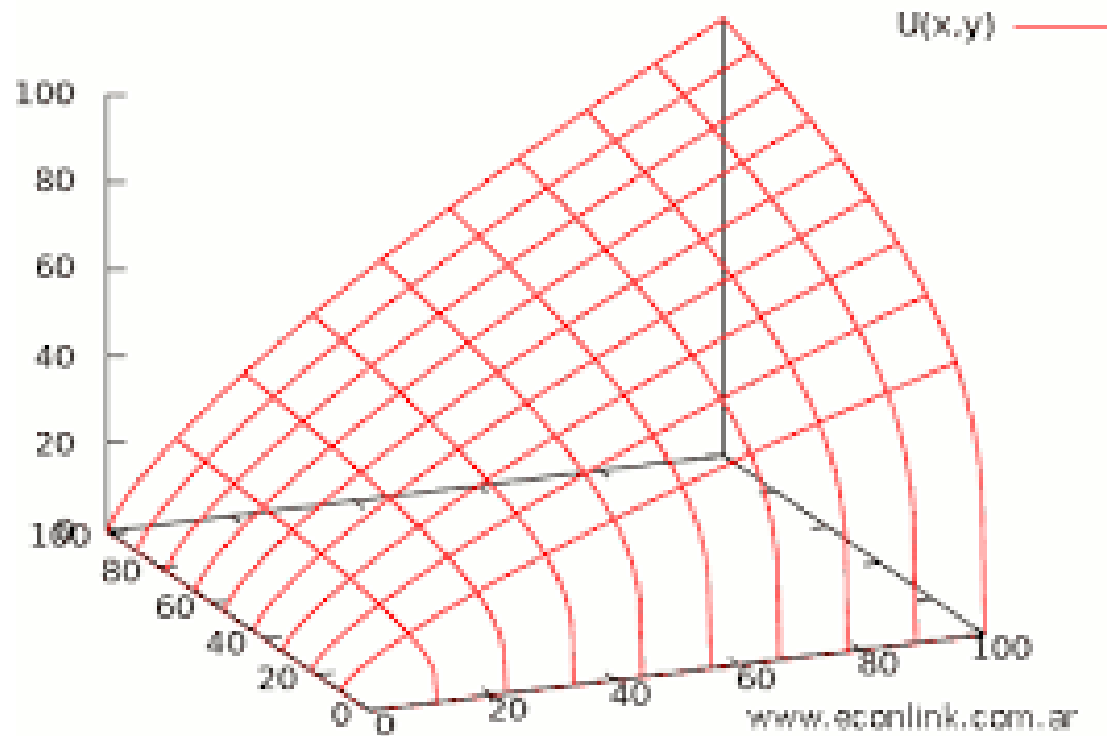


Preferencias frente al riesgo

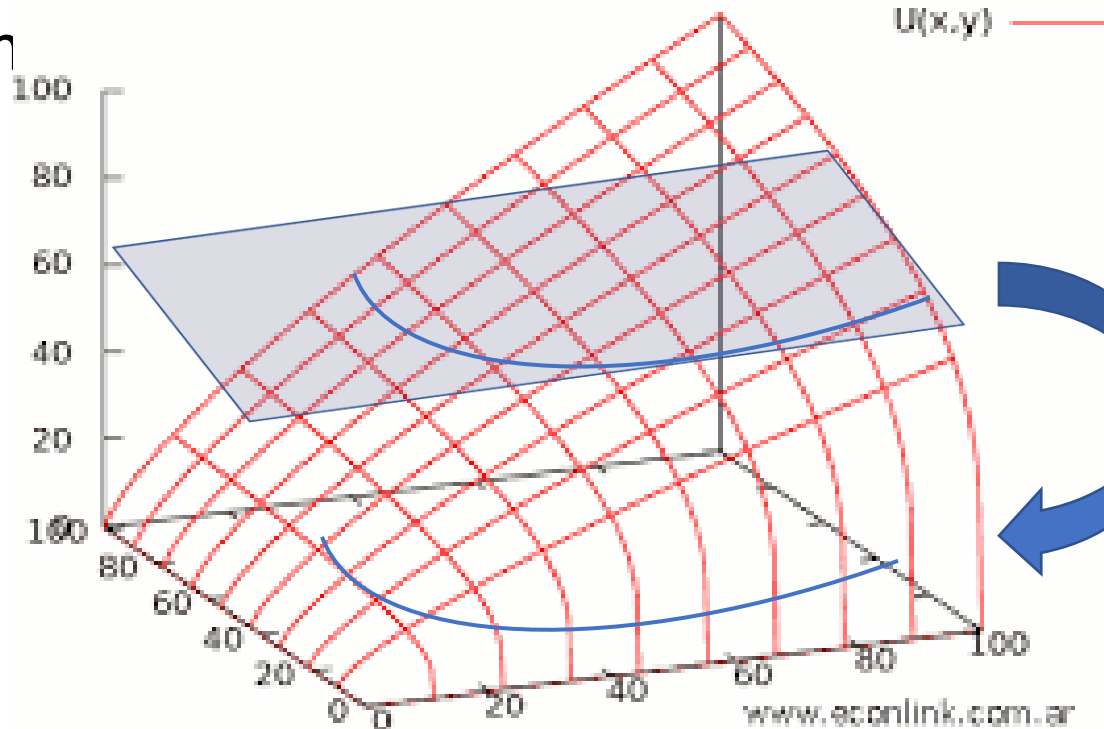
- En el esquema de Markowitz se asume que la gente tiene preferencias frente a dos cosas, el retorno esperado y el riesgo (medido por el desvío estándar).
- Para entender la parte final del gráfico debemos incorporar el concepto de “curvas de indiferencia”

Función de utilidad con dos bienes x e y

- Supongamos x es alimento e y vestimenta

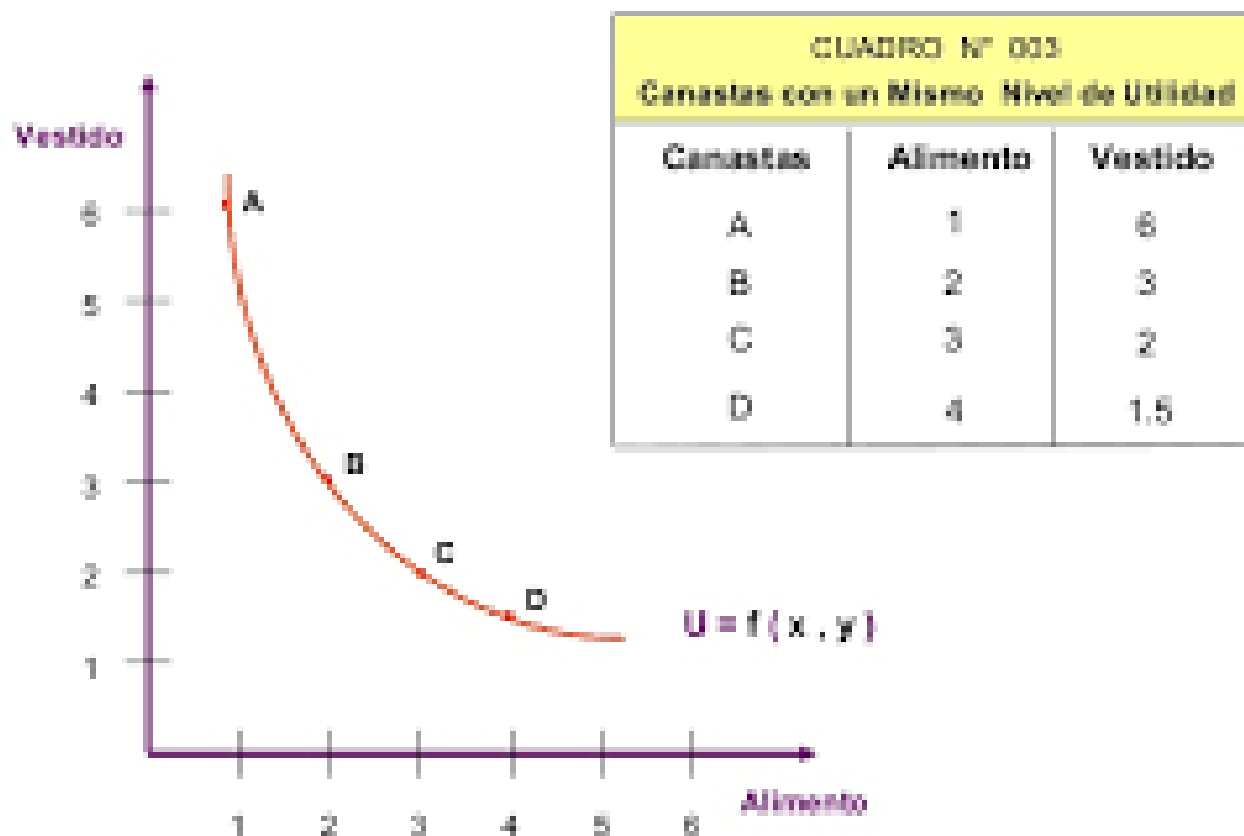


- Si se deja fijo un nivel de utilidad dado, podemos encontrar el locus de puntos que son combinaciones x e y que le dan al consumidor el mismo nivel de utilidad.
- Es como cortar el gráfico anterior en forma horizontal. Eso que nos queda lo podemos reflejar en los dos ejes de abajo y se conoce como curva de indiferencia



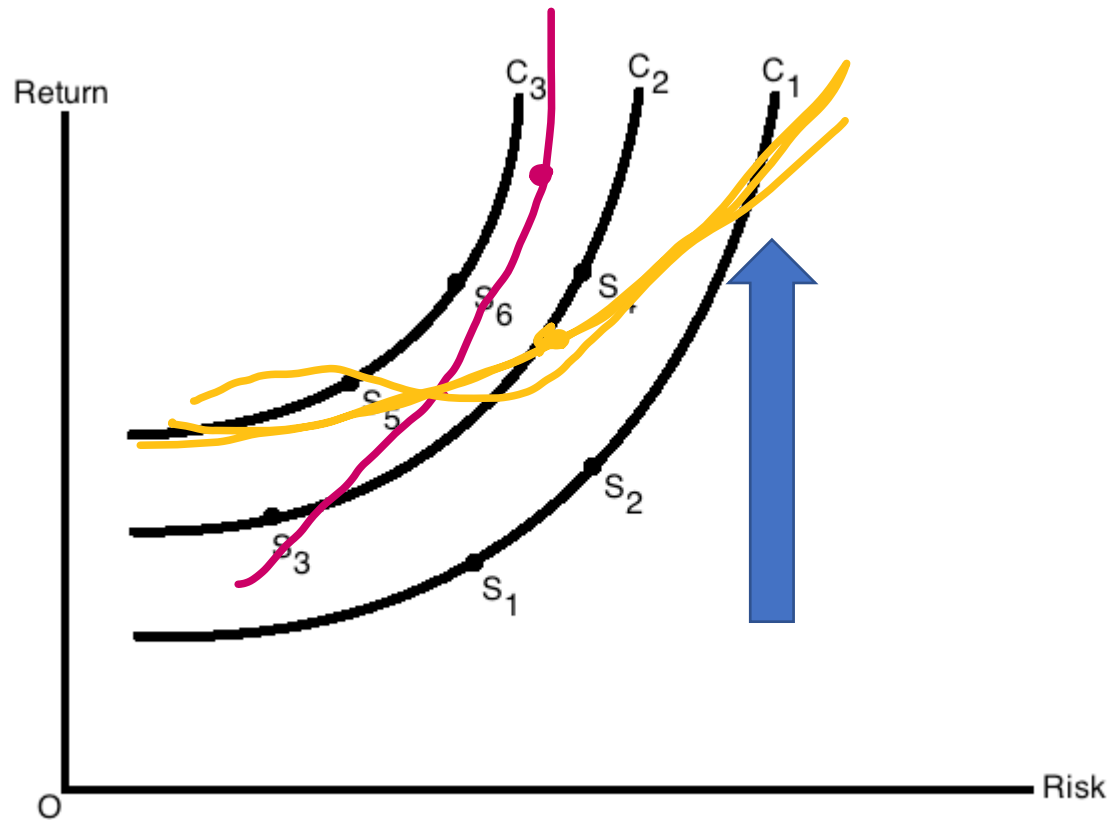
Proyectamos en el plano X,Y la curva de indiferencia

Curva de indiferencia

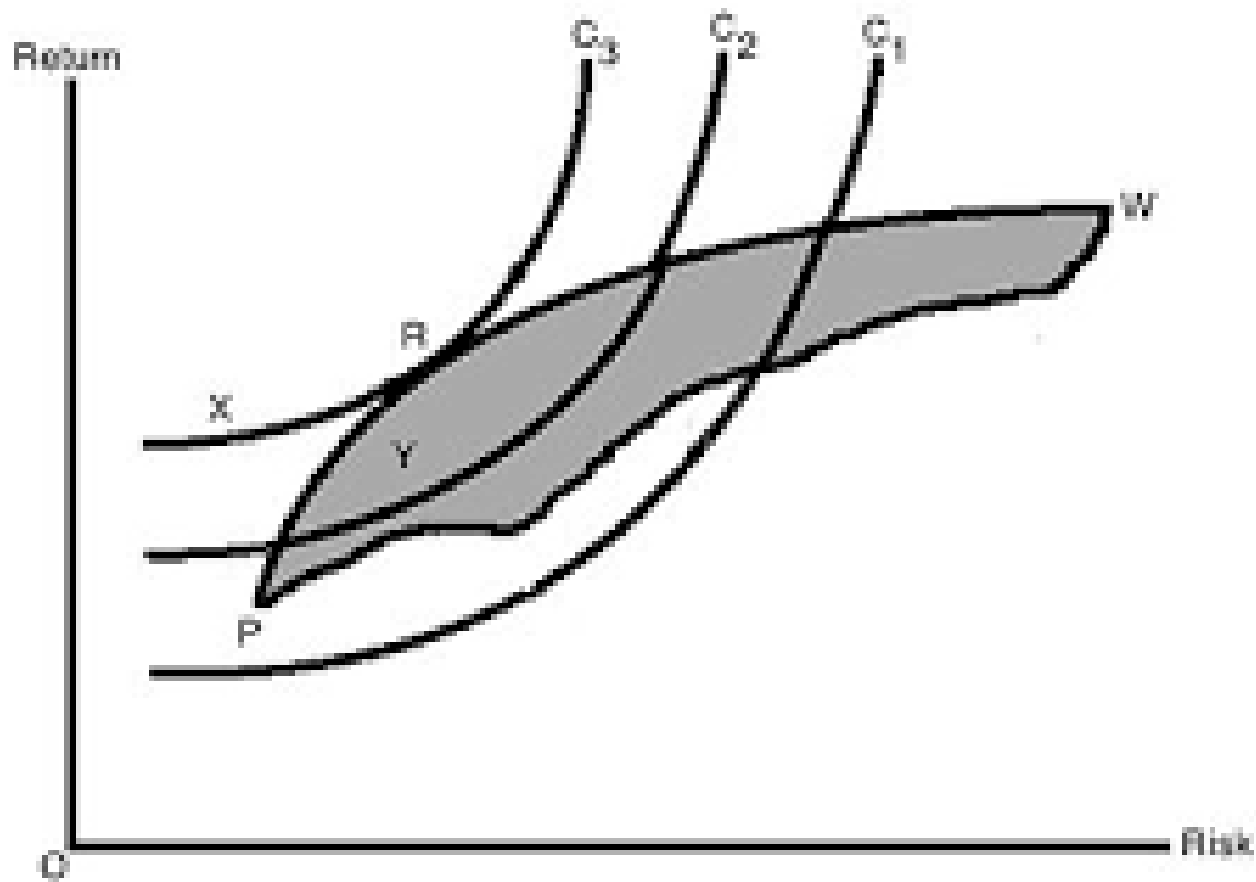


- En el caso de Markowitz se asume que el inversor tiene curvas de indiferencia definidas sobre dos cosas: el retorno esperado (eje de las y) y el riesgo (eje de las x).
- Alguien adverso al riesgo va a percibir el retorno esperado como un bien (más es mejor) y al riesgo como un mal (más es peor)

- Incorporando preferencias al gráfico



Decisión final del inversor



Extra Ball

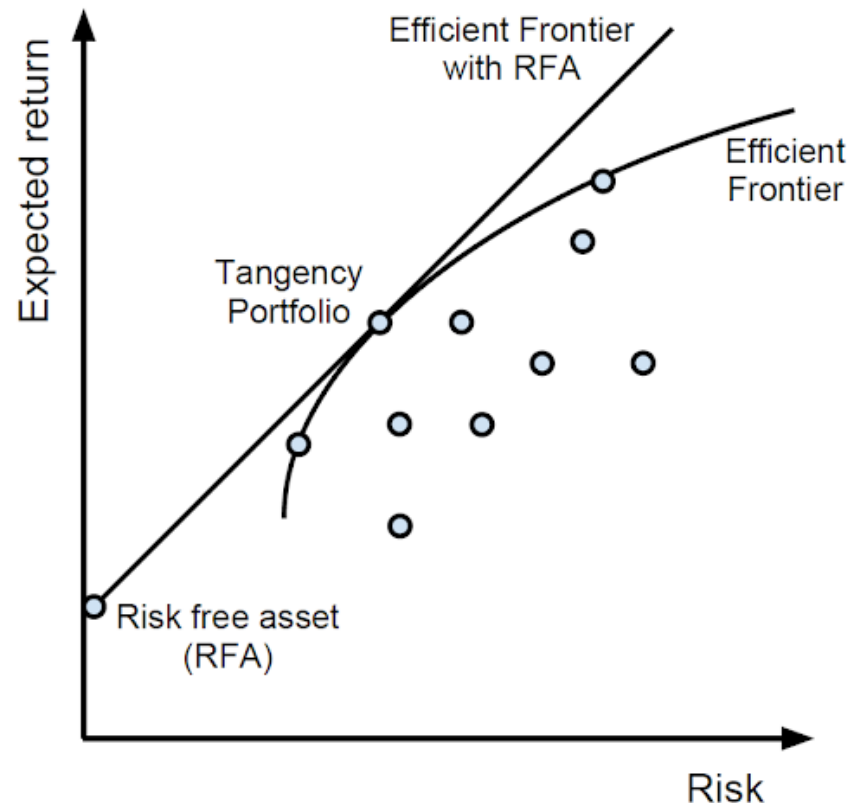
- A continuación les doy una introducción a lo que se conoce como Teoría Moderna de Portafolios, es un tema de la curricula de Instrumentos de Mercados de Capitales, pero como ven es una derivación directa de lo que vimos en clase.

Portfolio Separation Theorem

- En el mundo de dos parámetros (importa la media y la varianza nada más), la decisión de armar portafolios eficientes es independiente de la decisión del inversor de qué portafolio elegir.
- Puedo prescindir de conocer las preferencias de mis clientes e igual armar portafolios eficientes.
- Esto surge directo del gráfico anterior.
- No hay premio en término de retornos por tomar riesgo no sistemático.
- Portafolios dentro de la frontera son ineficientes

Markowitz con risk free asset

- Si dentro de los activos a elegir hay un risk free asset, y las personas se pueden endeudar a esta tasa o bien invertir a esa tasa sin restricciones, entonces la frontera de Markowitz que surge de la optimización se vuelve una recta.



- CAL (Capital Asset Line): es la recta que refleja la combinación portafolios que surgen cuando se incluye un risk free asset y un activo o portafolio con riesgo.
- CML (Capital Market Line): es la CAL tangente a la Frontera Eficiente de Markowitz sin risk free asset. Al portafolio de la frontera que construye esta CAL se lo conoce como Portafolio de Mercado.
- Sobre el Market Portfolio:
 - Está compuesto por todos los activos riesgosos, en teoría tanto financieros como reales
 - Si todo el mundo tiene acceso a la misma Risk Free Asset, todo el mundo compra el mismo portafolio de mercado, y si entonces en ese portafolio no está un activo, no existe, tal activo, porque nadie lo demanda, nadie lo quiere, precio es cero.

Efficient Market Hypothesis

- La hipótesis del mercado eficiente (EMH) fue desarrollada Eugene Fama en su tesis doctoral en los 1960s. Postula que los mercados financieros son informativamente eficientes, esto es, los precios reflejan toda la información relevante. Entonces, cambios en los precios se deben a eventos impredecibles (el cambio en el precio es random walk).
- El EHM asume que todos los actores en el mercado actúan racionalmente de acuerdo con la Hipótesis de Utilidad Esperada.

3 versiones de EMH

- Weak EMH: precios de activos reflejan toda la información pública pasada.
- Semi-strong EMH: que además de reflejar info pública del pasado, los precios reaccionan instantáneamente ante nueva información.
- Strong EMH: que los precios además incluyen instantáneamente información occulta o “insider” information.

La hipótesis del mercado eficiente fue ampliamente aceptada hasta la década de 1990, cuando la economía del comportamiento (behavioral economics) comenzó a ganar terreno.

CAPM

- El Capital Asset Pricing Model es un modelo de equilibrio general para pricing de activos.
- Postula que si todo el mundo accede a la misma información, todo el mundo es racional y por ende se cumple la hipótesis de mercados eficientes, todo el mundo puede acceder a todos los activos sin restricciones y con igual costos, todo el mundo puede invertir o endeudarse a la misma tasa de interés libre de riesgo, y además a todo el mundo sólo le importa la media y la varianza de los activos, entonces todos resuelven el mismo problema de Markowitz y existe una única CML para todo el mundo. Existe un único portafolio de mercado, todos armarán portafolios combinando risk free con el Market Portfolio.
- El precio de un activo estará relacionado con su impacto en el Market Portfolio. Para el inversor sólo importará el riesgo que este activo incluya al market portfolio, y no su desvío estándar individual, porque nadie piensa en ese activo en forma individual sino en el contexto del mismo portafolio de mercado.
- Notar que no pide que los inversores tengan las mismas preferencias, sino que a todos les importe sólo la media y la varianza de los activos. Esto puede pasar teóricamente por dos motivos distintos: a) todos tienen preferencias cuadráticas o b) todos los activos tienen distribución Normal (entonces sólo importa la media y varianza)
- Hoy sabemos que: pedir a no tiene sentido, y que la hipótesis de Normalidad ya no se cumple en carteras donde se pueden tomar posiciones sofisticadas. Pero también es cierto que esto (Hedge Funds investment type) no es accesible a todo el mundo.

- Supongamos que queremos lanzar al mercado un nuevo activo UTDT SA (U). Ya existe un portafolio de mercado M. Si alguien va a demandar a U, entonces todos, y deber estar en el nuevo portafolio de mercado M'.
- $R_{M'} = (1 - w)R_M + wR_U$
- El riesgo del nuevo portafolio es:
- $var(R_{M'}) = (1 - w)^2 var(R_M) + w^2 var(R_U) + 2 \cdot (1 - w) \cdot w \cdot cov(R_M, R_U)$
- Como el peso w de la nueva acción (sería su market cap sobre el total del valor de mercado) es muy chico, w al cuadrado es cero. Entonces lo relevante de la nueva acción en el margen es su covarianza con el resto del mercado.
- Esta es una explicación no técnica para entender porqué la covarianza es lo relevante en términos de riesgo sistémico.
- CAPM postula

$$E[r] = R_{RF} + \beta [E(R_m) - R_{RF}]$$

El CAPM: Capital Asset Pricing Model

