Instrumentos de Mercado de Capitales

Clase 3

Analisis de datos

En finanzas, el analisis de series de datos esta relacionado con la evaluacion empirica de valuacion de activos.

Finanzas, tanto su teoria como su analisis empirico, contienen un elemento de incertidumbe. Ejemplo, como definer volatilidad.

Hoy vamos a ver/repasar algunos conceptos utiles relacionados con series de tiempo para finanzas, con las que vamos a encontrarnos luego a lo largo del curso. Los conceptos basicos que tienen que quiero que se lleven entendidos de esta clase son:

i) Retorno efectivo y su diferencia con retorno esperado (distribucion de probabilidad)
ii) Volatilidad de retornos
iii) Beta de una regresion OLS
iv) Anualizacion de retornos (composicion discreta vs continua)
v) Principal components.

.

Retorno efectivo discreto

La mayor parte del analisis financiero se concentra en mirar retornos, en lugar de precios, de activos.

Esto es asi porque el retorno es un resumen complet, libre de escala, de la performance del acivo y de su oportunidad de inversion. Tambien, las series de retornos tienen propiedades estadisticas mas atractivas que las series de precios.

Definiciones de retornos

P_t es el precio de un activo en fecha t. Asumamos este es un activo que no tiene pagos (dividendos/intereses). Fecha t puede ser un dia, un mes, un año.

Retorno efectivo de un periodo: el retorno de tener un activo un periodo (de fecha t-1 a t) es:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$ (retorno bruto)

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$ (retorno neto)

Retorno efectivo discreto II

Retorno efectivo de mas de un periodo: el retorno de tener un activo k periodos (entre t-k y t) es:

.

$$
\begin{aligned}
1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\
&= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}) \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}).
\end{aligned}
$$

→ El retorno efectivo de tener un activo k periodos es el producto de de los k retornos de un periodo: retorno compuesto.

El retorno simple de tener el activo k periodos es: $R_t[k] = (P_t - P_{t-k})/P_{t-k}$

Para hacer esto hay que definer que intervalo de tiempo estamos usando (son retornos mensuales, diarios, anuales?). En general si no se dice, se asume implicitamente que es anual.

Periodo de holding y tasa de interes

Un bono cupon cero es un bono que se vende a descuento de su valor par y provee la totalidad de su retorno de la diferencia entre el precio de compra y el repago de su valor par.

Es decir, dado un precio de comrpa P(T), un bono con valor par de $100, y un vencimiento a T años, calculamos el retorno total del bono para el periodo de T años como:

$$r_f(T) = \frac{100}{P(T)} - 1$$

Si T=1, este es el retorno de la inversion para el periodo de 1 año.

Ejemplo para distintos plazos de inversion:

Horizon, *T*	**Price, *P*(*T*)**	**[100/*P*(*T*)] − 1**	**Risk-Free Return for Given Horizon**
Half-year	$97.36	100/97.36 − 1 = .0271	$r_f(.5) = 2.71\%$
1 year	$95.52	100/95.52 − 1 = .0469	$r_f(1) = 4.69\%$
25 years	$23.30	100/23.30 − 1 = 3.2918	$r_f(25) = 329.18\%$

Naturalmente, los periodos de inversion mas largos dan retornos totales mayores. Como compararlos?

Anualizacion de retornos (composicion)

El retorno anualizado (promedio) de un activo que tenemos en cartera k años es:

$R_t(k)$ anualizado promedio geometrico= $\left[\prod_{j=0}^{k-1}(1+R_{t-j})\right]^{1/k} - 1$

Es el promedio geometrico de k retornos efectivos de un periodo. Tambien puede calcularse como:

$R_t(k)$ anualizado = $\exp\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\ln(1+R_{t-j})\right] - 1$

El retorno promedio geometrico a veces se aproxima por el promedio simple de los retornos de un periodo

Rt(k) anualizado promedio simple $\approx \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j}$

Tasa de interes efectiva anual (TEA)

- Esto lo llamamos Tasa de interes efectiva anual; permite comparar retornos de inversiones con diferentes plazos.

- Implica expresar el retorno total de cada inversion como una tasa de retorno por un plazo comun a todas. Tipicamente, para un periodo anual.

- Para una inversion a 1 año: la TEA es igual al retorno total $r_f(1)$.

- Para una inversion menor a 1 año: se compone el retorno por periodo de inversion para todo 1 año. Ejemplo, para un bono cupon cero a 6 meses:

$$(1+r_f(0.5))\ \hat{}\ (1/0.5) = (1.0271)^2 = 1.0549 = 5.49\%$$

- Para una inversion mayor a un año: la convencion es expresar la TEA como una tasa anual que se compone para llegar al valor total de la inversion. Ejemplo, para una inversion a 25 años en el ejemplo anterior:

$$(1+r_f(25))\ \hat{}\ (1/25) = (4.2918)^{1/25} = 1.0600 = 6.0\%$$

En resumen, podemos relacionar la TEA con el retorno total de una inversion con plazo T con:

$$1 + TEA = (1+r_f(T))^{1/T}$$

Diferencia promedio aritmetico vs geometrico

Ejemplo: retorno anual de un fondo comun de inversion, tras invertir $100 el 01/01/2015; Calcular retorno promedio aritmetico y retorno geometrico y comparar

Periodo	Retorno	Capital fin de año
2015	-11.89%	88.11
2016	-22.10%	68.64
2017	28.69%	88.33
2018	10.88%	97.94
2019	4.91%	102.75

Retorno promedio artimetico = $\frac{(-11.89\% + (-22.1\%) + 28.69\% + 10.88\% + 4.91\%)}{5}$ = **2.10%**

Retorno promedio geometrico = $(102.75/100)^{(1/5)} - 1 = (1.0275)^{(1/5)} - 1$ = **0.54%**

Diferencia promedio aritmetico vs geometrico

Retorno promedio artimetico = promedio simple de retornos anuales. Se usa como proyeccion del retorno esperado anual futuro.

Retorno promedio geometrico = tasa anual fija que iguala al retorno del la vida total de la inversion Es una medida precisa del retorno efectivo anual durante la vida de la inversion.

- La diferencia entre ambos es grande (2.1% vs 0.54% en el ejemplo anterior).

- La diferencia se debe a que el promedio aritmetico simple ignora diferencias en el valor incial del capital en cada periodo. Ej: 2016-2017 en el ejemplo anterior. Retorno promedio simple es (-22.1%+28.69%)/2 = 3.295%. Sin embargo, valor del capital es casi el mismo que el capital en 2015. Capital inicial en 2017 ya no es 100, es $77.90. La menor base requiere retornos mayores el año subsecuente para volver al nivel de capital inicial.

- A mayor volatilidad en la tasa de retorno, mayor la discrepancia entre el promedio artimetico de los retornos anuales y el promedio geometrico compuesto.

Composicion discreta vs continua

Ejemplo: Un deposito paga tasa interes 10% anual.

i) Si la paga una vez al año (al final del año), el valor de $1 depositado se convierte en: (1+0.1)= 1.1

ii) Si lo paga dos veces al año, la tasa efectiva semianual es 10%/2 y el valor del deposito despues de un año es: $(1+0.05)^2$

iii) Generalizando, si el interes es pagado m veces en un año, la tasa efectiva para un periodo de 12/m meses es 10%/m y el valor del deposito despues de un año es: (1+10%/m)m

Type	Number of Payments	Interest Rate per Period	Net Value
Annual	1	0.1	$1.10000
Semiannual	2	0.05	$1.10250
Quarterly	4	0.025	$1.10381
Monthly	12	0.0083	$1.10471
Weekly	52	0.1/52	$1.10506
Daily	365	0.1/365	$1.10516
Continuously	∞		$1.10517

[a]The time interval is 1 year and the interest rate is 10% per annum.

Composicion discreta vs continua II

El valor del deposito se va acercando a 1.052. El valor del deposito despues de un año como resultado de composicion continua es: exp(10%)=1.0517. De forma mas general es:

$A=C*\exp(r*n)$

donde n es la cantidad de años en el periodo, r es la tasa de interes anual, y C es el capital inicial. A es el valor final de ese deposito despues de n años.

De forma inversa, el valor presente de un activo que vale A en n años es:

$C = A*\exp(-r*n)$

Retorno efectivo con composicion continua

Por que a veces usamos logaritmo natural para calcular retornos?

El logaritmo natural del retorno efectivo bruto de un activo es el retorno con composicion continua:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \qquad p_t = \ln(P_t)$$

Usar composicion continua (logaritmos) tiene algunas ventajas respecto a usar retornos en tiempo discreto. Por ejemplo, al calcular retornos a lo largo de mas de un periodo:

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}. \end{aligned}$$

El retorno con composicion continua es simplemente la suma de los retornos continuos de un periodo. No requiere hacer una composicion geometrica, es mas simple el calculo. Tambien vamos a ver que las propiedades estadisticas de los retornos en tiempo continuo son mejores.

Retorno de un portafolio, dividendos

El retorno efectivo neto de un portafolio de N activos es el promedio ponderado de los retornos efectivos netos de los N activos. La ponderacion de cada activo es el porcentaje del valor del portafolio invertido en el activo i.

Retorno de portafolio: $R_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} w_{i,p} R_{i,t}$

Para los retornos con composicion continua es igual.

Retornos con pagos de dividendos/intereses

Calculado en un periodo, Dt es el pago de dividendos entre t-1 y t. Pt es el precio en t despues del pago de dividendos (no esta en el precio):

$$R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1, \qquad r_t = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1}).$$

.

Retorno excedente

Por retorno excedente se entiende la diferencia entre el retorno de un activo y un activo de referencia (en general, active libre de riesgo):

Retorno excedente: $R_{i,t} - r_f$

En teoria de portafolio y modelos de factores, el retorno excedente se lo piensa como el pago de un portafolio que toma una posicion larga en el activo i y una posicion corta en el active libre de riesgo.

Posicion larga = tener el activo en el portafolio

Posicion corta = vender un activo que uno no tiene en el portafolio, tomandolo prestado de otro inversor. En una fecha futura pactada, el tomador de la posicion en corto debe comprar las acciones en el mercado y devolverselas al prestador. Una caida de precio beneficia al que toma la posicion en corto.

.

Resumen relacion retorno discreto vs continuo

$$r_t = \ln(1 + R_t), \qquad R_t = e^{r_t} - 1.$$

Si R_t y r_t son porcentajes:

$$r_t = 100 \ln\left(1 + \frac{R_t}{100}\right), \quad R_t = 100(e^{r_t/100} - 1)$$

Para retornos de varios periodos:

$$1 + R_t[k] = (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-k+1}),$$
$$r_t[k] = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-k+1}.$$

Para una tasa anual con composicion continua r, el valor future y presente de un activo es:

$$A = C \exp(r \times n), \quad C = A \exp(-r \times n).$$

Ejemplo 1. Si el retorno mensual de un activo en logs es 4.46%, el retorno mensual simple es: 100*(exp(4.46/100)-1)=4.56%. Si l retorno mensual a lo lago de un trimester es 4.46%, -7.34% y 10.77%, el retorno trimestral es: (4.46-7.34+10.77)%=7.89%

Propiedades de la distribucion de los retornos

Los retornos de activos son variables estocasticas. Para estudiarlos, se analizan la propiedad de su distribucion de probabilidades a lo largo del tiempo.

Momentos de una variable continua:

Primer momento es la media o esperanza de X. En tiempo continuo:

$$m'_\ell = E(X^\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\ell f(x)\, dx,$$

El momento *l* centrado en la media poblacional es:

$$m_\ell = E[(X - \mu_x)^\ell] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^\ell f(x)\, dx$$

.

Propiedades de la distribucion de los retornos II

- El Segundo momento es la varianza de X, su desviacion de la media (positiva o negativa por igual). En tiempo continuo:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

- El tercer momento,sesgo, mide la simetria de X respecto a su media:

$$S = E\left(\frac{\left(R_{i,t}-\mu_i\right)^3}{\sigma_i^3}\right)$$

- El cuarto momento, kurtosis, mide las colas de la distribucion de X:

$$K = E\left(\frac{\left(R_{i,t}-\mu_i\right)^4}{\sigma_i^4}\right)$$

Propiedades de la distribucion de los retornos III

- Una distibucion con exceso de kurtosois positive tiene “colas pesadas”, implicando que la distribucion pone mas peso en valores extremos que la distribucion normal.

- K(x) – 3 es exceso de kurtosis, porque para una distribucion normal K(x) =3. Si la funcion d distribucion es normal, tanto S(x) como K(x) -3 son 0.

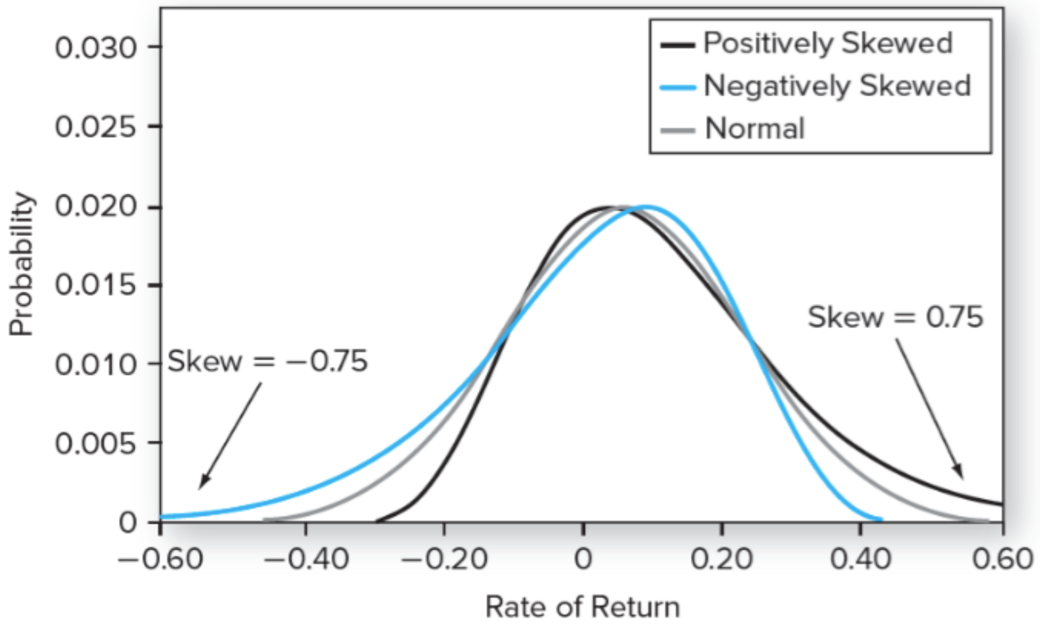
- Bajo el supuesto de distribucion normal, sesgo S(x) y exceso de kurtosis K(x)-3 tienen distribucon normal asintotica con media 0 y varianza 6/t y 24/T respectivamente. Estas propedades asintoticas pueden usarse para testerar normalidad de los retornos.

.

Sesgo

- El tercer momento,sesgo, mide la simetria de X respecto a su media:

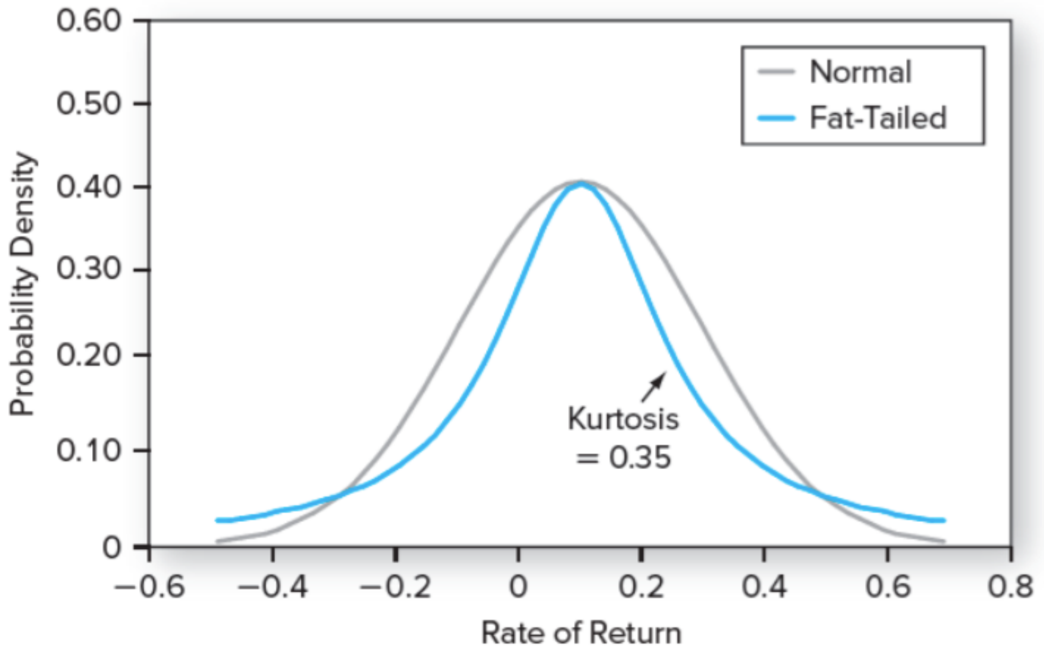
Distribución normal (media=6%, SD=17%) y asimétricas (skewness)



Kurtosis

- Kurtosis graficamente:

Distribución normal (media=10%, SD=20%) y kurtosis (fat-tails)



Estimadores muestrales

- En la practica, los estimadores poblacionales se pueden estimar a traves de sus estimadores muestrales, usando una serie de tiempo:

Media Muestral: $\hat{\mu}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t,$

Varianza Muestral: $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^2,$

Sesgo muestral: $\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^3,$

Kurtosis muestral: $\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^4.$

Ejemplo propiedades de retornos

- Ejemplo: retornos simples diarios de IBM.

Security	Start	Size	Mean	Standard Deviation	Skewness	Excess Kurtosis	Minimum	Maximum
				Daily Simple Returns (%)				
SP	62/7/3	10446	0.033	0.945	−0.95	25.76	−20.47	9.10
VW	62/7/3	10446	0.045	0.794	−0.76	18.32	−17.14	8.66
EW	62/7/3	10446	0.085	0.726	−0.89	13.42	−10.39	6.95
IBM	62/7/3	10446	0.052	1.648	−0.08	10.21	−22.96	13.16
Intel	72/12/15	7828	0.131	2.998	−0.16	5.85	−29.57	26.38
3M	62/7/3	10446	0.054	1.465	−0.28	12.87	−25.98	11.54
Microsoft	86/3/14	4493	0.157	2.505	−0.25	8.75	−30.12	19.57
Citi-Group	86/10/30	4333	0.110	2.289	−0.10	6.79	−21.74	20.76

- El sesgo muestral y la kutosis las podemos obtener como para de las estadisticas desriptivas de cualquier paquete econometrico.
- La kurtosis es claramente alta, sugiriendo que los retornos diaros de estas acciones tienen colas pesadas.
- Para testear la simetria, usamos: *t= 0.08/sqrt(6/10446)=0.08/0.024=3.33* , lo que da un p-valor de 0.001, es decir que los retornos diarios de IBM estan significativamente sesgados a la derecha con una significatividad de 5%.

Modelo de retornos

El modelo mas general para retornos (en logs) es

$F(r_{11},\ldots,r_{N1}; r_{12},\ldots, r_{N2};\ldots.; r_{1t},\ldots, r_{NT};Y;\Theta)$

Y es un vector de estado consisiendo en variables que resumn el estado en el que los retornos de los activos se determinan.

Θ es un vector de parametros qu dterminan la funcon de distribucion.

En muchos modelos de finanzas, Y se toma como dado y el foco esa puesto en la dsitrbucon condicion de los r_{it} dado Y. Se estiman los parametros Θ y las propiedades estadsticas de rit dado una serie historica de reotrnos en logs.

.

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

- Alternativa retorno esperado: $E(R_j) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{js}$

Donde *S* es el numero total de posibles estados de la naturaleza, $\boldsymbol{\pi}_s$ es la probabilidad de que ocurra el estado s, R_{js} es el rendimiento del cativo j en el esado s.

- Ejemplo: Imaginemonos tres estados de la natraleza en el que los rendimientos de 3 activos inciertos vienen dados por:

Situación previsible de la economía	Probabilidad de los estados (π_s)	Rendimiento activo #1 (%)	Rendimiento activo #2 (%)	Rendimiento activo #3 (%)
Buena	1/4	14	17	3
Regular	1/2	8	9	9
Mala	1/4	4	6	15

El rendimiento esperado de cada activo viene dado por:

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

$$E(R_1) = \pi_1 R_{11} + \pi_2 R_{12} + \pi_3 R_{13} = \frac{1}{4}(0.14) + \frac{1}{2}(0.08) + \frac{1}{4}(0.04) = 0.085$$

$\Rightarrow E(R_1) = 8.5\%$

$\Rightarrow E(R_2) = 10.25\%$

$\Rightarrow E(R_3) = 9.0\%.$

El rendimiento observado de una cartera es: $R_c = \sum_{j=1}^{N} \omega_j R_j$

El rendimiento esperado de una cartera es: $E(R_c) = E\left(\sum_{j=1}^{N} \omega_j R_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j E(R_j).$

$$\omega_j = \frac{P_j n_j}{\sum_{j=1}^{N} P_j n_j}$$

n_j= nominales del activo en cartera

P_j*n_j=valor de mercado de la compania/deuda

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

Ej: w_1=40%, w_2=35%, w_3=25%

$$\begin{aligned} E(R_c) &= \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) + \omega_3 E(R_3) \\ &= 0.40(0.085) + 0.35(0.1025) + 0.25(0.09) = 0.0924 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(R_c) = 9.24\%.$$

Wj podrian ser negativo si hay una venta en corto: ej w1=0.9, w2=0.35, w3=-0.25

→ 125% de la cartera esta invertida en los primeros dos activos, financiada con una venta en corto del tercer activo. Toma de un prestamo a traces de un acivo seguro para financiar una inversion puede interpretarse como una ponderacion negativa.

Es dificil determinar cuales son los estados de la naturaleza relevantes hacia adelante. Por eso muchas veces se usan series temporales largas cuando se intenta estimar el rendiemiento esperado de un acivo o cartera. Puede no ser asi en momento qe hay n cambio estructural.

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

- La varianza del rendimiento de un activo individual mide la dispersion de los rendimientos alrededor de su media y nos da una idea de la variabilidad que experimentan los precios de los activos.

$$\sigma_j^2 = E[R_j - E(R_j)]^2 = \sum_{s=1}^{S} \pi_s [R_j - E(R_j)]^2$$

Ejemplo: varianza del activo 1 (ejemplo anterior)

Situación previsible de la economía	Probabilidad de los estados (π_s)	$[R_{js} - E(R_j)]$ (%)	$[R_{js} - E(R_j)]^2$ $(\%)^2$	$\pi_s[R_{js} - E(R_j)]^2$ $(\%)^2$
Buena	1/4	5.5	30,25	7.5625
Regular	1/2	– 0.5	0,25	0.1250
Mala	1/4	– 4.5	20.25	5.0625
				$\sigma_j^2 = \sum_{s=1}^{3} = 12{,}75$

Ejemplo calculo en excel: estado de naturaleza y escenarios

Ejemplo de retornos esperados y desvío estándar

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3	Purchase Price =		$100			T-Bill Rate =	0.04		
4									
5							Squared		Squared
6	State of the		Year-End	Cash		Deviations	Deviations	Excess	Deviations
7	Market	Probability	Price	Dividends	HPR	from Mean	from Mean	Returns	from Mean
8	Excellent	0.25	126.50	4.50	0.3100	0.2124	0.0451	0.2700	0.0451
9	Good	0.45	110.00	4.00	0.1400	0.0424	0.0018	0.1000	0.0018
10	Poor	0.25	89.75	3.50	–0.0675	–0.1651	0.0273	–0.1075	0.0273
11	Crash	0.05	46.00	2.00	–0.5200	–0.6176	0.3815	–0.5600	0.3815
12	Expected Value (mean)	SUMPRODUCT(B8:B11, E8:E11) =			0.0976				
13	Variance of HPR			SUMPRODUCT(B8:B11, G8:G11) =			0.0380		
14	Standard Deviation of HPR					SQRT(G13) =	0.1949		
15	Risk Premium					SUMPRODUCT(B8:B11, H8:H11) =		0.0576	
16	Standard Deviation of Excess Return						SQRT(SUMPRODUCT(B8:B11, I8:I11)) =		0.1949

Retorno excedente y prima de riesgo

Prima de riesgo = retorno esperado – tasa libre de riesgo

- Es el retorno que esperamos provea la inversion relativo a invertir en un activo libre de riesgo.

Retorno excedente = retorno observado – tasa libre de riesgo

- Es decir, la prima de riesgo es el valor esperado del retorno excedente. El desvio estander del retorno excedente es una medida de su riesgo.
- Si la prima de riesgo en activos riesgos como acciones fuese 0, los inversores aversos al riesgo no invertirian en ellas.
- Por ende, siempre tiene que haber una prima de riesgo para que los inversores esten dispuestos a tener entre sus inversiones el stock de activos riesgosos.

Ejemplo prima de riesgo

- A prinicpios de 2019, bono soberano argentino cotizaba a $80 cada $100 de valor par.
- A lo largo del año, el bono pagaba intereses por $7.5 por cada $100 de valor par.
- El precio esperado del bono soberano argentino a fin de 2019 dependia de distintos escenarios politicos, resumidos en:

Escenario	Probabilidad	Precio fin 2019
Favorable	0.55	$100
Intermedio	0.30	$58
Desfavorable	0.15	$35

- La inversion alternativa libre de riesgo es un T-bill con rendimiento de 2%.
- Calcular:

i) el retorno total de cada escenario;
ii) el precio esperado a fin de año y el retorno esperado;
iii) la prima de riesgo.

Solucion ejemplo prima de riesgo

Respuestas:

Escenario	Probabilidad	Precio fin 2019	Retorno periodo
Favorable	0.55	$100	=(100+7.5)/80-1 = **34.4%**
Intermedio	0.30	$58	=(58+7.5)/80-1 = **-18.1%**
Desfavorable	0.15	$35	=(35+7.5)/80-1 = **-46.9%**
Valor esperado		=0.55*100+0.3*58+0.15*35 = **$77.65**	=(77.65+7.5)/80-1 = **6.4%**

i) Retorno total en cada escenario: 34.4%, -18.1%, -46.9%

ii) Precio esperado: $77.65, retorno esperado: 6.4%

iii) Prima de riesgo = 6.4% - 2% = **4.4%**

Sharpe ratio

- Podemos asumir que a los inversores les importa la relacion retorno-riesgo de una inversion: no solo el retorno excedente esperado, sino tambien el riesgo incurrido en el retorno excedente.
- Cuan atractiva es una inversion puede medirse como:

$$\textit{Sharpe ratio} = \frac{\textit{prima de riesgo}}{\textit{desvio est. de retorno exc.}}$$

- El sharpe ratio captura este trade off. Es usado para evaluar performance de PMs.

- Ejercicio: calcular el sharpe ratio de la inversion anterior

Solucion:

i) prima de riesgo = 4.4%

ii) Desvio estandar de retorno excedente = 32.2%

iii) **Sharpe ratio = 4.4%/32.2% = 0.14**

- **Nota 1:** un ratio de 0.14 es un ratio bajo. Sugeriria que no es una buena inversion
- **Nota 2:** sin embargo, si bien el sharpe ratio es una medida adecuada del trade off retorno-riesgo para portafolios diversidficados, no es una medida adecuada para activos individuales.

Series de tiempo vs analisis de escenarios

- Un analisis de escenarios de retornos es un ejercicio forward-looking: determinamos un conjunto de escenarios relevantes de retornos, y asignamos probabilidades ex ante a cada escenario. Eso permite computar la prima de riesgo y el desvio estandar de la inversion.

- En contraste, el analisis de series de tiempo de retornos no provee informacion sobre las probabilidades ex ante y los escenarios relevantes esperados por los inversores en cada punto del tiempo.

- Las series de tiempo solo muestran retornos realizados en cada punto del tiempo.

- De estos datos limitados, se busca deducir la distribucion de los retornos (retorno esperado y desvio estandar).

Por que medir retornos en logaritmos

En general, es costumbre tratar a los retornos de acivos como variables aleatorias continuas, particularlmente para indices o retornos de acciones calculados en baja frecuencia.

Para retornos en alta frecuencia, el comportamiento es mas discreto, porque los cambios de precio son en ticks minimos de 1/16 en acciones.

Un supuesto tradicional en el analisis empirico en finanzas es que los retornos simples Rt estan i.i.d con funcion de distribucion normal, con una media y varianza constante. Este supuesto tiene algunos problemas:

i) el minimo valor de retornos es -100%, pero la distrbucion normal asigna probabilidadesa todos los valores , sin minimo

ii) si R_{it} tiene distrubcion normal, los retornos a lo largo de varios periodos no tinne distribucion normal (es multiplos de normales)

iii) Muchos analisis empiricos rechazan la hipotesis de distribucion normal. Tiende a haber kurtosis excesiva positiva.

Por que medir retornos en logaritmos

En general, es costumbre tratar a los retornos de acivos como variables aleatorias continuas, particularlmente para indices o retornos de acciones calculados en baja frecuencia.

Para retornos en alta frecuencia, el comportamiento es mas discreto, porque los cambios de precio son en ticks minimos de 1/16 en acciones.

Un supuesto tradicional en el analisis empirico en finanzas es que los retornos simples Rt estan i.i.d con funcion de distribucion normal, con una media y varianza constante. Este supuesto tiene algunos problemas:

i) el minimo valor de retornos es -100%, pero la distrbucion normal asigna probabilidadesa todos los valores , sin minimo

ii) si R_{it} tiene distrubcion normal, los retornos a lo largo de varios periodos no tienen distribucion normal (es multiplos de normales)

iii) Muchos analisis empiricos rechazan la hipotesis de distribucion normal. Tiende a haber kurtosis excesiva positiva.

Por que medir retornos en logaritmos

En general, es costumbre tratar a los retornos de acivos como variables aleatorias continuas, particularlmente para indices o retornos de acciones calculados en baja frecuencia.

Para retornos en alta frecuencia, el comportamiento es mas discreto, porque los cambios de precio son en ticks minimos de 1/16 en acciones.

Un supuesto tradicional en el analisis empirico en finanzas es que los retornos simples Rt estan i.i.d con funcion de distribucion normal, con una media y varianza constante. Este supuesto tiene algunos problemas:

i) el minimo valor de retornos es -100%, pero la distrbucion normal asigna probabilidadesa todos los valores , sin minimo
ii) si R_{it} tiene distrubcion normal, los retornos a lo largo de varios periodos no tienen distribucion normal (es multiplos de normales)
iii) Muchos analisis empiricos rechazan la hipotesis de distribucion normal. Tiende a haber kurtosis excesiva positiva.

Por que medir retornos en logaritmos II

- Otro supuesto comun es que el logaritmo de los retornos esan i.i.d. con funcion de distribucion normal, con una media y varianza constante. Los retornos simples son entonces i.i.d con **distribucion lognormal.** La media y la varianza de los retornos simples en este caso es:

$$E(R_t) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1, \qquad \mathrm{Var}(R_t) = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1].$$

- Como la suma de variables aleatorias normales i.i.d es normal, $r_t(k)$ (retornos multiperiodos) tambien tienen distribucion normal bajo el supuesto de normalidad de r_t.

- La lognormalidad de los retornos tambien soluciona el hecho de que r_t no tiene valor minimo, y el valor minimo de R_t se satisfice usando $1+R_t=\exp(r_t)$.

- Sin embargo, la lognormalidad sigue sin ser 100% consistente con todas las propedades historicas de los retornos. Sigue sin tener kurtosis excedente positiva.

- Otras distribuciones que si tendria kurtosis positiva (ej Cauchy) tienen varianza infinita.

Minimos cuadrados ordinarios

- Una regresion lineal simple es un modelo estadistico basado en el supuesto de que la relacion entr dos variables puede explicarse con la siguiente formula:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

- El parametro β representa la pendiente de la relacion lineal entre la variable independiente y la variable dependiente. Es la variacion de la variable dependiente cuando la variable independiente cambia en 1 unidad.

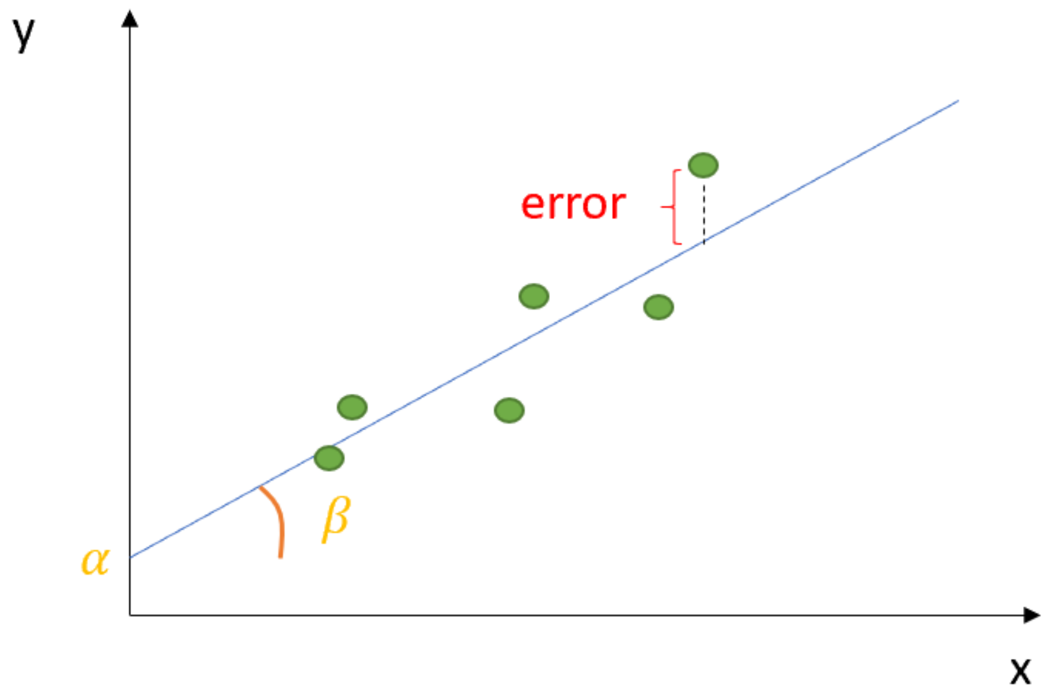
- El parametro α representa el valor de la variable dependiente cuando la independiente es igual a 0.

- La idea de MCO es encontrar los parametros α y β para los que el termino de error se minimiza.

- El modelo minimiza la suma de errores al cuadrado (no queremos que los errores positivos se compensen por los errores negativos, los dos me importan por igual):

Minimos cuadrados ordinarios II

- Graficamente:



- Es decir, MCO busca obtener la linea recta que se acerca lo mas posible a los datos.

Minimos cuadrados ordinarios II

- Es decir:

$$\hat{\alpha} = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$\hat{\beta} = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} * x_i \right)^2 = S\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$$

$$\hat{\beta}: \frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

$$\hat{\alpha}: \frac{\partial S(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} = 0$$

Minimos cuadrados ordinarios

- Resolvemos para β:

.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} * x_i\right)x_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \hat{\alpha} x_i - \hat{\beta} x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \left(\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}\right)x_i - \hat{\beta} x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{y} x_i + \hat{\beta}\bar{x} x_i - \hat{\beta} x_i^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y} + \hat{\beta}\bar{x} - \hat{\beta} x_i\right)x_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y} + \hat{\beta}\left(\bar{x} - x_i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right) = -\hat{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - x_i\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)\left(x_i - \bar{x}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$

Minimos cuadrados ordinarios

- Podemos reexpresar β usando defnicion de covarianza muestral y correlacion muestral:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2} = \rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

- Para α:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} * x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta} * x_i\right) \Rightarrow \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} * \bar{x}$$

- Un vez obtenidos los estimadores de α y β, el modelo queda:

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

- Los coeficientes obtenidos son estimadores insesgados de los verdaderos α y β

PCA

- Un portafolio de activos financieros tiene múltiples activos, y sus retornos están influidos por distintas variables. Para estudiar los retornos de portafolios, usamos análisis multivarial.

- En la practica, las series de retornos que observamos muestran un comportamiento similar entre ellos, sugiriendo que puede que tengan un factor en común que explica esos retornos. Para estudiar el patron común entre retornos de distintos activos, y simplificar el análisis de portafolio, la literatura ha propuesto distintos modelos de factores para analizar múltiples retornos de activos.

- Con múltiples activos en el portafolio, esto hace que el análisis tenga muchas dimensiones y puede ser complejo de procesar. Para simplificar el modelar múltiples retornos, se recurre a métodos de reducir el análisis en menos variables, para entender la estructura subyacente.

- Principal component analysis (PCA) es el método estadistico mas comúnmente usado justamente para reducir la dimensión de las variables a analizar.

PCA II

- PCA se concentra en **analizar la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas** de los k retonos r_{it}, i=1,...,k (retornos mensuales en logs) usando combinaciones lineales de r_i.

- Sea $r = (r_1, r_2,..., r_k)'$ el vector aleatorio de retornos de k activos, y $w_i = (w_{i1}, w_{i2},..., w_{ik})'$ un vector de ponderaciones. Tenemos que:

$$y_i = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{k} w_{ij} r_j$$

y_i es una combinacion lineal del vector aleatorio r. y_i es el retorno de un potafolio que asigna ponderacion w_{ij} al activo j.

Multiplicar el vector wi por una constante no afecta la proporcion asignada a cada activo, standarizamos w_i tal que $\boldsymbol{w}_1'\boldsymbol{w}_1 = 1$, es decir: $\sum_{j=1}^{k} w_{ij}^2 = 1$
Usando propiedades de combinacion lineal de variables aleatorias, tenemos que:

$$\mathrm{Var}(y_i) = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{w}_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \boldsymbol{w}_i'\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{w}_j, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

PCA III

La idea de PCA es encontrar las combinaciones lineales w_i tal que y_i e y_j no estan correlacionados y que las varianzas de yi son lo mayor posible. Es decir:

i) El primer componente principal de r es una combinacion lineal $\mathbf{y_1 = w_1 r}$ que maximiza $Var(y_1)$ sujeto a la restriccion $w_1'w_1 = 1$

ii) El segundo componente principal de r es la combinacion lineal $y_2 = w_2 r$ que maximiza $Var(y_2)$ sujeto a las restricciones $w_2'w_2 = 1$ and $Cov(y_2, y_1) = 0$.

iii) El i componente principal de r es la combinacion lineal $y_i = w_i r$ que maximiza $Var(y_i)$ sujeto a las restricciones $w_i'w_i = 1$ and $Cov(y_i,y_j) = 0$ para todo $j=1,2,\ldots,i-1$.

Como la matriz de varianzas y covarianzas de r es definida no-negativa, se puede factorizar en sus autovalores y autovectores (ver Apendice repaso autovalores y autovectores).

Sean $(\lambda_1, e_1), \ldots, (\lambda_k, e_k)$ los k autovalores y autovectores de r, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$. Tenemos que:

.

PCA IV

- El <u>“i” componente principal</u> de r es: $y_i = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{k} e_{ij} r_j$ para *i = 1,…,k.*

Ademas:

$$\mathrm{Var}(y_i) = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{e}_i = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = \boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{e}_j = 0, \quad i \neq j.$$

- Por lo tanto, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(r_i) = tr(\boldsymbol{\Sigma}_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(y_i).$$

$$\frac{\mathrm{Var}(y_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}(r_i)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}.$$

→ la proporcion de la varianza total de r explicada por el “i”componente principal es el ratio entre el autovalor “i” y la suma de todos los autovalores de r.

→ Tambien se puede computar el porcentaje acumulado de la varianza total explicada por los i primeros componentes principales: (i.e., $\sum_{j=1}^{i} \lambda_j)/(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j)$).

Aplicación empirica de PCA

- En la practica, se elije un i chico tal que el porcentaje explicado es suficientemente grande. Como $tr(\rho_r) = k$, la proporcion de la varianza explicada por el "i" componente principal es λ_i/k cuando se usa la matriz de correlacion matrix para hacer PCA.

- En la practica, la matriz de varianzas y covarianzas o la matriz de correlaciones de r no las conocemos, pero las podemos estimar calculando la matriz de varianzas y covarianzas mustral:

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_r \equiv [\hat{\sigma}_{ij,r}] = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{r}_t - \overline{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r}_t - \overline{\boldsymbol{r}})', \quad \overline{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{r}_t,$$

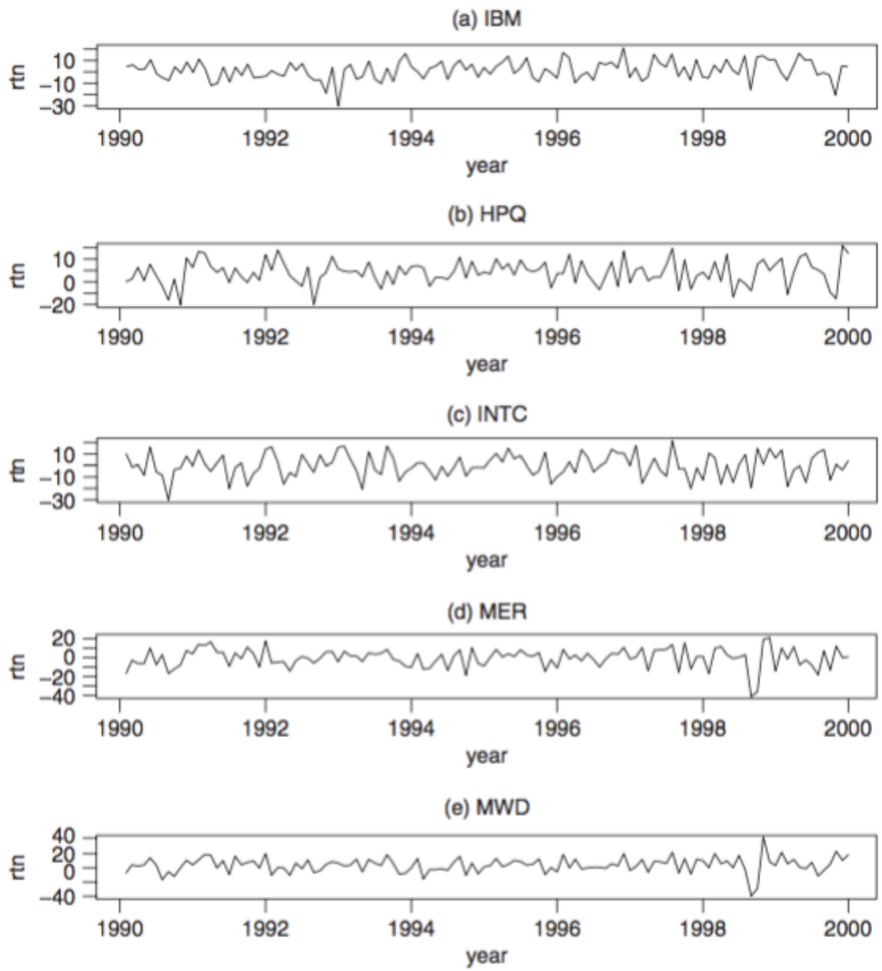
$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_r = \widehat{\boldsymbol{S}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_r\widehat{\boldsymbol{S}}^{-1},$$

para $\{r_t \mid t = 1,\dots,T\}$, donde $\widehat{\boldsymbol{S}} = \mathrm{diag}\{\sqrt{\hat{\sigma}_{11,r}},\dots,\sqrt{\hat{\sigma}_{kk,r}}\}$ es la matriz diagonal de errores muestrales estandar de r_t.

- Metodos para calcular los autovalores y autovecores de una matriz simetrica pueden usarse para calcular PCA. La mayor parte de los paquetes estadisticos tienen funciones para calcular PCA. Tambien pude hacerse en excel (es menos directo)

Ejemplo PCA

- Considere los retornos mensuales (en logs) de IBM, Hewlett-Packard, Intel, Merrill Lynch, y Morgan Stanley. Los retornos incluyen los dividendos pagados. Graficamente:



Ejemplo PCA

- Como se esperaria, los retornos de las acciones del mismo sector industrial exhiben comportamientos similares.
- El vector de retornos medios es r = (1.47, 1.97, 3.05, 2.30, 2.36) y la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_r = \begin{bmatrix} 73.10 & & & & \\ 36.48 & 103.60 & & & \\ 27.08 & 48.86 & 113.96 & & \\ 16.06 & 37.59 & 27.96 & 105.56 & \\ 16.33 & 40.72 & 26.86 & 85.47 & 109.91 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_r = \begin{bmatrix} 1.00 & & & & \\ 0.42 & 1.00 & & & \\ 0.30 & 0.45 & 1.00 & & \\ 0.18 & 0.36 & 0.26 & 1.00 & \\ 0.18 & 0.38 & 0.24 & 0.79 & 1.00 \end{bmatrix}.$$

- Los resutlados de PCA usando tanto la matriz de varianzas y covarianzas como la matriz de correlacion dan:

Ejemplo PCA

- Los primeros dos factores explican 72% de la varianza de los retornos
- El primer componente es aprox el promedio simple de los retornos. Representaria el moviemiento general del mercado ("componente de mercado" o "componente de nivel").
- El segundo componente representa la diferencia entre los dos sectores, industrial vs financiero (componente de industria o pendiente)

		Using Sample Covariance Matrix			
Eigenvalue	256.16	116.14	64.91	46.82	22.11
Proportion	0.506	0.229	0.128	0.093	0.044
Cumulative	0.506	0.736	0.864	0.956	1.000
Eigenvector	0.246	0.327	0.586	−0.700	0.018
	0.461	0.360	0.428	0.687	−0.050
	0.409	0.585	−0.683	−0.153	0.033
	0.522	−0.452	−0.082	−0.115	−0.710
	0.536	−0.467	−0.036	−0.042	0.701
		Using Sample Correlation Matrix			
Eigenvalue	2.456	1.145	0.699	0.495	0.205
Proportion	0.491	0.229	0.140	0.099	0.041
Cumulative	0.491	0.720	0.860	0.959	1.000
Eigenvector	0.342	0.525	0.691	−0.362	−0.012
	0.474	0.314	−0.043	0.820	0.050
	0.387	0.405	−0.717	−0.414	−0.034
	0.503	−0.481	0.052	−0.147	0.701
	0.505	−0.481	0.071	−0.062	−0.711

Ejemplo PCA

- Elegir los primeros “i” componentes principales provee una aproximacion de la varianza total de los datos. Si un i chico puede proveer una buena aproximacion, la simplificacion tiene valor

Anexo: autovalores

- Dada una matriz cuadrada A, un autovalor es un escalar λ tal que det (A – λI) = 0, donde A es una matriz cuadrada k × k y I es la matriz identidad k × k.

- det (A – λI) = 0 es una ecuacion polinomica de grado k donde la incognita es λ. Las soluciones a esta ecuacion polinomica son los autovalores. Como todo polinomio p(x) de grado k tiene k raices (k soluciones a la ecuacion p(x) = 0), una matriz cuadrada k × k tiene k autovalores.

- Ejemplo 1: encontrar los autovalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Solucion:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & 5 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (13 - \lambda)(4 - \lambda) - 10$$

$$\lambda^2 - 17\lambda + 42 = 0$$

Esta es la ecuacion caracteristica. Resolviendo para λ, obtenemos los autovalores λ = 3 and λ = 14.

Anexo II: autovectores

- Si λ es un autovalor de la matriz cuadrada A k × k, entonces el vector X k × 1 es un autovector que corresponde a λ si (A – λI)X = 0, donde 0 es una matriz nula k × k (i.e. todos 0s). Cada autovalor de una matriz cuadrara tiene un numero infinito de autovectores.

- Ejemplo: Buscamos los autovectores de la matriz A del ejemplo anterior.

$$\begin{bmatrix} 13-\lambda & 5 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$x(13-\lambda) + 5y = 0$$
$$2x + (4-\lambda)y = 0$$

Para λ = 3

$$10x + 5y = 0$$
$$2x + y = 0$$

Es decir, y = -2x, obteniendo el autovector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, o cualquier multiplo escalar de este.

Para λ = 14

$$-x + 5y = 0$$
$$2x - 10y = 0$$

Es decir, x = 5y, obteniendo el autovector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, o cualquier multiplo escalar.

Carteras

- Veamos la importancia que tiene, por motivos de diversificacion del riesgo, armar carteras.

- Para ello, veamos una cartera compuesta unicamente por dos activos inciertos cuyo rendimiento esperado viene dado por:

$$E(R_c) = \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) = \omega_1 E(R_1) + (1 - \omega_1) E(R_2).$$

La varianza es:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(R_c) \equiv \sigma_c^2 &= E\{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - [\omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2)]\}^2 \\
&= E\{\omega_1 [R_1 - E(R_1)] + \omega_2 [R_2 - E(R_2)]\}^2 \\
&= E\{\omega_1^2 [R_1 - E(R_1)]^2 + 2\, \omega_1 \omega_2 [R_1 - E(R_1)][R_2 - E(R_2)] + \omega_2^2 [R_2 - E(R_2)]^2\} \\
&= \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\, \omega_1 \omega_2 \underbrace{E\{[R_1 - E(R_1)][R_2 - E(R_2)]\}}_{\operatorname{cov}(R_1, R_2) \equiv \sigma_{12}}.
\end{aligned}$$

- Es decir, la varianza de una cartera con dos activos es: $\sigma_c^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12},$

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

σ_{12}, es la covarianza entre los rendimientos de los dos activos. La covarianza es una medida de como los rendimientos de los activos tienden a moverse conjuntamente, medida que juega un papel fundamental en la valoracion de activos financieros.

A diferencia de la varianza que nunca puede ser negativa, la covarianza puede serlo cuando los rendimientos de dos activos tienden a moverse en direcciones opuestas.

Resulta muy util normalizar la covarianza de forma que acotemos sus valores entre -1 y 1: para esto basta dividir la covarianza entre el producto de las desviaciones estandar de los dos activos y obtener el denominado *coeficiente de* correlacion.

$$\mathrm{cov}(R_1, R_2) \equiv \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

Observando la ecuacion de la varianza de la cartera, es claro deducir el papel que la correlacion o covarianza juega en la varianza de una catera y por ende el principio de diversificacion y la influencia de activos individuales en una cartera.

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

Recordemos: $\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12},$

i) Si las ponderaciones de los activos de la cartera son positivos, la varianza de la cartera es menor cuanto menor sea la correlacion entre los rendimientos de los activos que la componen.

ii) La varianza de una cartera, a diferencia del rendimiento esperado, **NO** es en general la media ponderada de las varianzas de los rendimentos de los activos individuales. La covarianza entre los rendimientos tambien juega un rol.

Ejemplo: mismos 3 activos y escenarios

Situación de la economía	π_s (1)	$[R_1 - E(R_1)]$ (2)	$[R_2 - E(R_2)]$ (3)	$[R_3 - E(R_3)]$ (4)	(1)(2)(3)	(1)(2)(4)	(1)(3)(4)
Buena	1/4	5,5	6,75	– 6,0	9,2813	– 8,25	– 10,1250
Regular	1/2	– 0,5	– 1,25	0,0	0,3125	0,0	0,0
Mala	1/4	– 4,5	– 4,25	6,0	4,7813	– 6,75	– 6,3750
					$\sigma_{12} = \sum_{s=1}^{3} = 14{,}3751$	$\sigma_{13} = \sum_{s=1}^{3} = -15{,}0$	$\sigma_{23} = \sum_{s=1}^{3} = -16{,}5$

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

Los correspondientes coeficientes de correlación son:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{14{,}3751}{(3{,}5707)(4{,}0853)} = 0{,}9854$$

$$\rho_{13} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{-15{,}0}{(3{,}5707)(4{,}2426)} = -\,0{,}9902$$

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_2\sigma_3} = \frac{-16{,}5}{(4{,}0853)(4{,}2426)} = -\,0{,}9520.$$

.

Los dos primeros activos estan casi perfecta y positivamente correlacionados. El activo 3 esta casi perfecta y negativarnente correlacionado con los dos primeros activos.

Expandiendo para una cartera de tres activos, la varianza es:

$$\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} + 2\omega_1\omega_3\sigma_{13} + 2\omega_2\omega_3\sigma_{23} =$$
$$= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + \underbrace{\omega_1\omega_2\sigma_{12} + \omega_1\omega_3\sigma_{13}}_{A} + \underbrace{\omega_2\omega_1\sigma_{21} + \omega_2\omega_3\sigma_{23}}_{B} + \underbrace{\omega_3\omega_1\sigma_{31} + \omega_3\omega_2\sigma_{32}}_{C},$$

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

- La primera parte del lado derecho de la ecuacion es la suma de las varianzas individuales ponderadas por las respectivas participaciones en la cartera al cuadrado:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2 .$$

- En la segunda parte sumamos tres llaves, A, B y C, donde solo aparecen los terminos de covarianzas. Es decir, la varianza de una cartera se puede descomponer en una parte que contiene terminos de varianzas y en una segunda parte que incluye los terminos de covarianzas.
- Dentro de cada llave, sumamos las covarianzas entre los activos tal que j≠h, en segundo lugar sumamos sobre todos los activos (sumando las tres llaves):

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} .$$

- Asi, generalizando para una cartera de N activos, tenemos que la varianza de los rendimientos de una cartera es la suma:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} ,$$

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

que teniendo en cuenta que $\sigma_j^2 = \sigma_{jj}$ también puede escribirse como:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh}.$$

1. Supongamos j y h son activos independientes (cov=0 para todo j y h), entonces:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2.$$

Si ponderamos a cada activo de la cartera con el mismo peso, de forma tal que w_j=1/N:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} (1/N)^2 \sigma_j^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j^2}{N}\right) = \frac{1}{N}\ \bar{\sigma}_j^2,$$

Por lo tanto, cuando aumenta indefinidamente el numero de activos en la cartera, su varianza tiende a cero. En el caso de activos independientes, diversificando la cartera amentando el numero de activos, se elimina totalmente el riesgo (la variabilidad de los rendimientos de la cartera se anula y su rendimiento esperado se vuelve conocido con certeza):

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_j^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \bar{\sigma}_j^2 = 0.$$

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

2. Consideremos el caso mas realista en que los rendimienos de los activos que componen la cartera no son independientes:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} (1/N)^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} (1/N)(1/N)\sigma_{jh}.$$

Teniendo en cuenta que el producto de ponderaciones dl componente de covarianzas es igual a:

$$\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{(N-1)}{N} \frac{1}{N(N-1)},$$

La varianza de la cartera queda: $\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_j^2 + \frac{(N-1)}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \left(\frac{\sigma_{jh}}{N(N-1)}\right)$

Notar tambien que: $\bar{\sigma}_{jh} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} \left(\frac{\sigma_{jh}}{N(N-1)}\right)$

Para verlo, simplemente tengase en cuenta que existen N^2 terminos de σ_{jh} pero ncluyndo las N varianzas: hay por ende N^2-N covarianzas para $j \neq h$.

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

Por ende:

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\bar{\sigma}_j^2 + \frac{(N-1)}{N}\ \bar{\sigma}_{jh} = \frac{1}{N}\,(\bar{\sigma}_j^2 - \bar{\sigma}_{jh}) + \bar{\sigma}_{jh}$$

Cuando crece el numero N de activos en la cartera:

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_c^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\,(\bar{\sigma}_j^2 - \bar{\sigma}_{jh}) + \bar{\sigma}_{jh} = \bar{\sigma}_{jh}$$

La contribucion a la varianza de una cartera de la varianza de los activos individuales que la componen se hace cero cuando *N* es grande. Sin embargo, la contribucion de los terminos de la covarianza se aproxima a la covarianza promedio de los rendimientos individuales cuando *N* es grande.

En general, el riesgo de una cartera (entendido como variabilidad de sus rendimientos) no puede eliminarse completamente y el grado de diversifacion posible depende de cómo se muevan conjuntamente esos rendimientos.

Estados de la naturaleza (analisis de escenarios)

Vamos la covarianza entre el retorno de un activo j y el de un cartera c:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(R_j, R_c) &= \operatorname{cov}\left(R_j, \sum_{h=1}^{N} \omega_h R_h\right) = E[R_j - E(R_j)]\left[\sum_{h=1}^{N} \omega_h R_h - \sum_{h=1}^{N} \omega_h E(R_h)\right] = \\
&= E\left\{[R_j - E(R_j)]\left[\sum_{h=1}^{N} \omega_h [R_h - E(R_h)]\right]\right\} = \\
&= E\left\{\sum_{h=1}^{N} \omega_h [R_j - E(R_j)][R_h - E(R_h)]\right\} = \\
&= \sum_{h=1}^{N} \omega_h E\left\{[R_j - E(R_j)][R_h - E(R_h)]\right\} = \sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh}.
\end{aligned}$$

La expresion dice que la covarianza entre j y c es la suma ponderada de las covarianzas entre cada uno de los activos individuales en la cartera c cpn el activo j.

Este es un resultado relevante para entender el concepto de riesgo de un activo individual como su contribucion al riesgo de una cartera.

Propiedades de retornos de portafolio

Propiedades estadísticas de los retornos del portafolio

- $R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + ... + w_n R_n$
- Media: $E[R_p] = w_1 E[R_1] + w_2 E[R_2] + ... + w_n E[R_n] = \sum w_i \mu_i = \mu p$
- $Var[R_p] = E\left[\left(R_p - \mu_p\right)^2\right] = E\left[\left(w_1(R_1 - \mu_1) + \cdots + w_n(R_n - \mu_n)\right)^2\right]$
- $E\left[w_i w_j (R_i - \mu_i)\left(R_j - \mu_j\right)\right] = w_i w_j Cov\left(R_i, R_j\right)$

Propiedades estadísticas de los retornos individuales

- Media: $E[R_i] = \mu_i$
- Varianza: $Var[R_i] = \sigma_i^2$
- Desvío estandar: $\sqrt{Var[R_i]} = \sigma_i$

Propiedades de retornos de portafolio II

	$\omega_1(R_1-\mu_1)$	$\omega_2(R_2-\mu_2)$	$\cdots$	$\omega_n(R_n-\mu_n)$
$\omega_1(R_1-\mu_1)$	$\omega_1^2\sigma_1^2$	$\omega_1\omega_2\sigma_{12}$	$\cdots$	$\omega_1\omega_n\sigma_{1n}$
$\omega_2(R_2-\mu_2)$	$\omega_2\omega_1\sigma_{21}$	$\omega_2^2\sigma_2^2$	$\cdots$	$\omega_2\omega_n\sigma_{2n}$
$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\omega_n(R_n-\mu_n)$	$\omega_n\omega_1\sigma_{n1}$	$\omega_n\omega_2\sigma_{n2}$	$\cdots$	$\omega_n^2\sigma_n^2$

- Una covarianza positiva **aumenta** la varianza; una covarianza negativa **disminuye** la varianza del portafolio
- La varianza del portafolio es la suma ponderada de todas las **varianzas y covarianzas**; NO es una suma ponderada de **varianzas** (como el retorno). Entonces, **sumar activos me permite obtener portafolios con menor varianza que cada activo tomado por separado**

Ejemplo

Situación previsible de la economía	Probabilidad de los estados (π_s)	Rendimiento activo #1 (%)	Rendimiento activo #2 (%)
1	0,10	20	1
2	0,20	4	– 5
3	0,40	10	10
4	0,20	3	10
5	0,10	8	3

a) Se pide obtener el rendimiento esperado, varianza, desviación estándar (volatilidad), covarianza y coeficiente de correlación para los dos activos:

$\pi_s R_1$	$\pi_s [R_1 - E(R_1)]^2$	$\pi_s R_2$	$\pi_s [R_2 - E(R_2)]^2$	$\pi_s [R_1 - E(R_1)] [R_2 - E(R_2)]$
2	13,92	0,10	1,94	– 5,19
0,8	3,53	– 1,0	21,63	8,74
4	1,30	4	8,46	3,31
0,6	5,41	2	4,23	– 4,78
0,8	0,004	0,3	0,58	0,05
$E(R_1) = \sum_{s=1}^{5} = 8{,}2$	$\sigma_1^2 = \sum_{s=1}^{5} = 24{,}16$	$E(R_2) = \sum_{s=1}^{5} = 5{,}4$	$\sigma_2^2 = \sum_{s=1}^{5} = 36{,}84$	$\sigma_{12} = \sum_{s=1}^{5} = 2{,}13$

Ejemplo

Las desviaciones estándar y el coeficiente de correlación son:

$$\sigma_1 = \sqrt{24{,}16} = 4{,}9153$$

$$\sigma_2 = \sqrt{36{,}84} = 6{,}0696$$

$$\rho_{12} = \frac{2{,}13}{(4{,}9153)(6{,}0696)} = 0{,}0714.$$

b) Se pide calcular la media, varianza y desviación estándar de las siguientes carteras:

• % activo #1	125	100	75	50	25	0	– 25
• % activo #2	– 25	0	25	50	75	100	125

125% en #1 y – 25% en activo #2

$E(R_c) = (1{,}25)(8{,}2) + (-0{,}25)(5{,}4) = 8{,}90$

$\sigma_c^2 = (1{,}25)^2(24{,}16) + (-0{,}25)^2(36{,}84) + 2(1{,}25)(-0{,}25)(2{,}13) = 38{,}72$

$\sigma_c = \sqrt{38{,}72} = 6{,}22.$

Ejemplo

c) Imaginemos que la cartera *A* se compone del 75% en el activo #1 y 25% en el activo #2, mientras que la cartera *B* se compone del 25% en el activo #1 y 75% en el activo #2. Se pide la covarianza y el coeficiente de correlación entre los rendimientos de ambas carteras:

Utilizando la expresión

$$\mathrm{cov}(R_{c1}R_{c2}) = \sigma_{c1c2} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} \omega_j w_h \sigma_{jh},$$

obtenemos

$$\mathrm{cov}(R_A, R_B) = (0{,}75)(0{,}25)(24{,}16) + (0{,}25)(0{,}75)(36{,}84) + $$

$$+ (0{,}75 \times 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}25)(2{,}13) = 12{,}77$$

$$\rho_{AB} = \frac{12{,}77}{(4{,}09)(4{,}80)} = 0{,}65. \blacksquare$$