# Tema 4. Cues amb prioritat

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Antoni Lozano

Q2 2018–2019

Versió de 28 de març de 2019

# Tema 4. Cues amb prioritat


1. Preliminars matemàtics
2. Cues amb prioritat
   - Introducció
   - *Heaps*
   - Operacions bàsiques
   - Implementació recursiva
   - Implementació iterativa
3. *Heapsort*
   - Algorisme bàsic
   - Implementació sobre vector únic
   - Construcció d'un *heap* en temps lineal
4. Altres aplicacions
   - El problema de selecció

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritat
- Introducció
- *Heaps*
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 *Heapsort*
- Algorisme bàsic
- Implementació sobre vector únic
- Construcció d'un *heap* en temps lineal

4 Altres aplicacions
- El problema de selecció

# Arbres binaris perfectes

**Definició**

El nivell d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

**Definició**

Un arbre binari és perfecte si tots els nodes interns tenen dos fills i totes les fulles són al mateix nivell.

**Exemples**



**Definició**

L' alçària d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

# Arbres binaris perfectes

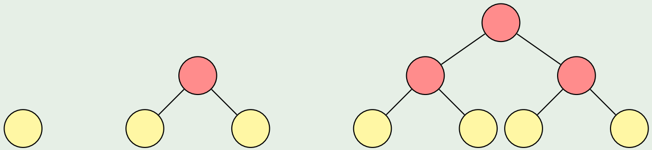
**Definició**

El nivell d’un node en un arbre és la distància de l’arrel al node.

**Definició**

Un arbre binari és perfecte si tots els nodes interns tenen dos fills i totes les fulles són al mateix nivell.

**Exemples**



**Definició**

L’ alçària d’un arbre és el nivell màxim dels nodes.

# Arbres binaris perfectes

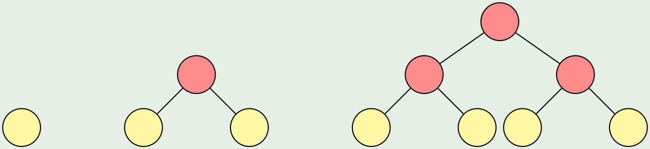
**Definició**

El nivell d'un node en un arbre és la distància de l'arrel al node.

**Definició**

Un arbre binari és perfecte si tots els nodes interns tenen dos fills i totes les fulles són al mateix nivell.

**Exemples**



**Definició**

L' alçària d'un arbre és el nivell màxim dels nodes.

# Arbres binaris perfectes

**Proposició**

Un arbre binari perfecte d'alçària $h$ té $2^{h+1} - 1$ nodes.

**Demostració**

Fem inducció en l'alçària. Sigui $T$ un arbre binari perfecte d'alçària $h$.

- Base d'inducció: $h = 0$.
  L'arbre té un sol node, i $1 = 2^{0+1} - 1$.
- Pas d'inducció: $h > 0$.
  Els subarbres esquerre i dret tenen alçària $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de $T$ és la suma d'aquests nodes més un (l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

# Arbres binaris perfectes

### Proposició

Un arbre binari perfecte d'alçària $h$ té $2^{h+1} - 1$ nodes.

### Demostració

Fem inducció en l'alçària. Sigui $T$ un arbre binari perfecte d'alçària $h$.

- Base d'inducció: $h = 0$.
  L'arbre té un sol node, i $1 = 2^{0+1} - 1$.
- Pas d'inducció: $h > 0$.
  Els subarbres esquerre i dret tenen alçària $h - 1$ i, per hipòtesi d'inducció, cadascun té $2^h - 1$ nodes. El nombre de nodes de $T$ és la suma d'aquests nodes més un (l'arrel):

$$\text{nodes de } T = 2(2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1.$$

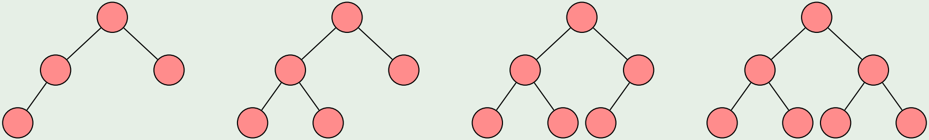
# Arbres binaris complets

## Definició

Un arbre binari d'alçària $h$ és complet si

1. hi ha tots els nodes possibles amb nivells $0 \ldots h-1$
2. tots els nodes de nivell $h$ són el màxim a l'esquerra

## Exemple: arbres binaris complets d'alçària 2



# Arbres binaris complets

**Proposició**

Un arbre binari complet d'alçària $h$ té entre $2^h$ i $2^{h+1} - 1$ nodes.

**Demostració**

Sigui $T$ un arbre binari complet d'alçària $h$:

- El mínim nombre de nodes de $T$ es produeix quan té un sol node a nivell $h$. Com que fins a nivell $h-1$, $T$ té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a nivell $h$, s'obtenen $2^h$ nodes.
- El màxim nombre de nodes de $T$ correspon a un arbre perfecte d'alçària $h$, que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

# Arbres binaris complets

## Proposició

Un arbre binari complet d'alçària $h$ té entre $2^h$ i $2^{h+1} - 1$ nodes.

## Demostració

Sigui $T$ un arbre binari complet d'alçària $h$:

- El mínim nombre de nodes de $T$ es produeix quan té un sol node a nivell $h$. Com que fins a nivell $h - 1$, $T$ té $2^h - 1$ nodes, sumant l'únic node a nivell $h$, s'obtenen $2^h$ nodes.
- El màxim nombre de nodes de $T$ correspon a un arbre perfecte d'alçària $h$, que té $2^{h+1} - 1$ nodes.

# Arbres binaris complets

## Corol·lari

L'alçària d'un arbre binari complet de $n$ nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

## Demostració

Per la proposició anterior, un arbre binari complet d'alçària $h$ i $n$ nodes compleix:

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

# Arbres binaris complets

## Corol·lari

L'alçària d'un arbre binari complet de $n$ nodes és $\lfloor \log n \rfloor \in \Theta(\log n)$.

## Demostració

Per la proposició anterior, un arbre binari complet d'alçària $h$ i $n$ nodes compleix:

$$2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1.$$

Si prenem logaritmes en base 2, tenim

$$h \leq \log n < h + 1.$$

I prenent la part baixa del logaritme,

$$h = \lfloor \log n \rfloor.$$

Per tant, $h \in \Theta(\log n)$.

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritat
- Introducció
- *Heaps*
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 *Heapsort*
- Algorisme bàsic
- Implementació sobre vector únic
- Construcció d'un *heap* en temps lineal

4 Altres aplicacions
- El problema de selecció

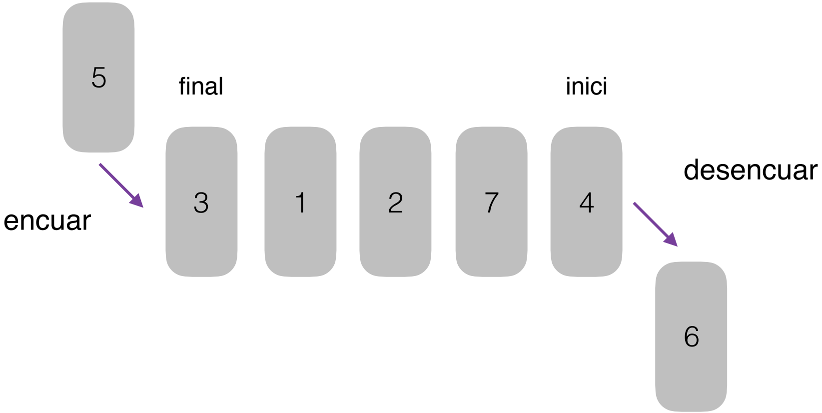
# Introducció

Moltes aplicacions requereixen processar les entrades seguint un ordre parcial donat per certes prioritats.

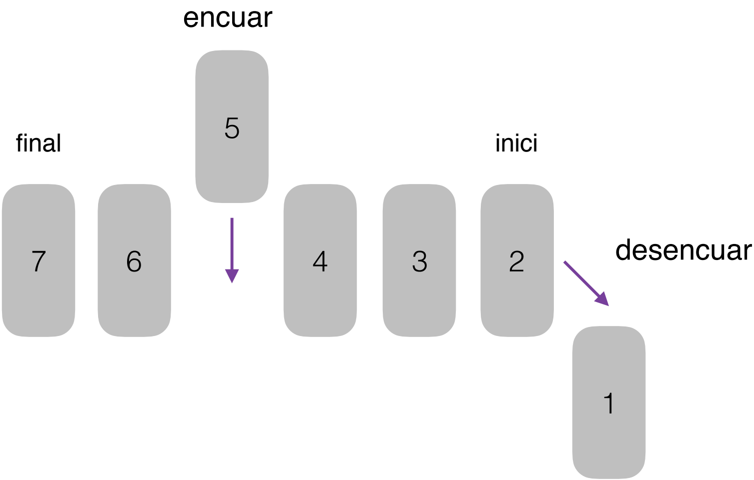
- Programació de tasques en sistemes d'ordinador: convé executar abans les més curtes
- Sistemes de simulació on convé simular els esdeveniments en ordre cronològic
- Algorismes d'ordenació que insereixen primer totes les entrades i després extreuen sempre la mínima de les que queden

L'estructura de dades adequada és la cua amb prioritat, una eina bàsica en el disseny d'algorismes.

# Cua



## Cua amb prioritat



# Operacions

**Definició**

Una cua amb prioritat és una estructura de dades que disposa de dues operacions bàsiques:

- **afegir**: inserir un element (clau més informació)
- **treure_min** (**treure_max**): esborrar i retornar l'element amb la clau més petita (més gran)

# Cues amb prioritat de l'STL

## Descripció

- La implementació fa servir *heaps*
- Per defecte, *max-heaps* (clau més alta disponible amb cost $\Theta(1)$)
- Mètodes: `push`, `pop`, `top`, `empty`, `size`

## Exemple: *max-heap*

```
#include <queue>
int main() {
    priority_queue<int> Q;
    Q.push(5);
    Q.push(3);
    cout << Q.top();
    Q.pop();
}
```

S'obté 5 al canal de sortida.

# Cues amb prioritat de l'STL

## Descripció

- La implementació fa servir *heaps*
- Per defecte, *max-heaps* (clau més alta disponible amb cost $\Theta(1)$)
- Mètodes: `push`, `pop`, `top`, `empty`, `size`

## Exemple: *min-heap*

```
#include <queue>
int main() {
    priority_queue<int, vector<int>, greater<int> > Q;
    Q.push(5);
    Q.push(3);
    cout << Q.top();
    Q.pop();
}
```

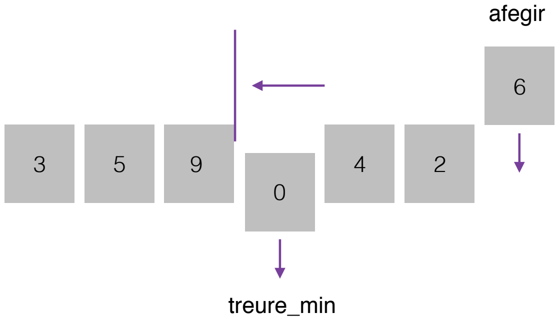
S'obté 3 al canal de sortida.

# Implementacions senzilles

| implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|
| | | |
| vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |

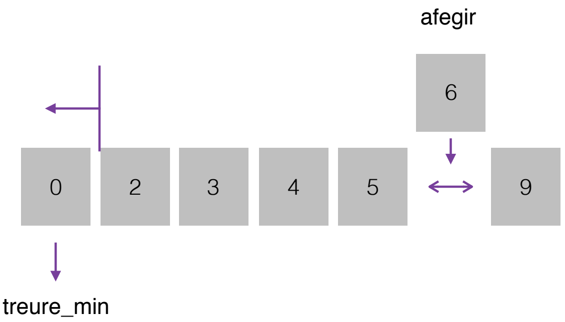
# Implementacions senzilles

| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | | | |
| ▷ | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |



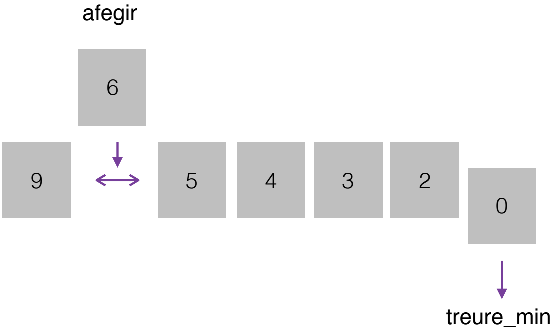
# Implementacions senzilles

| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| ▷ | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |



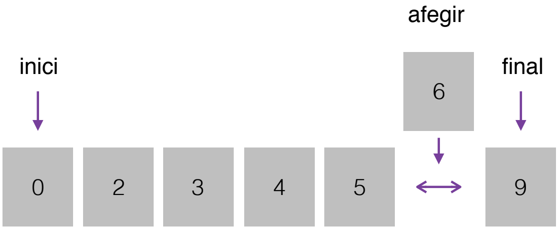
# Implementacions senzilles

| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| ▷ | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |

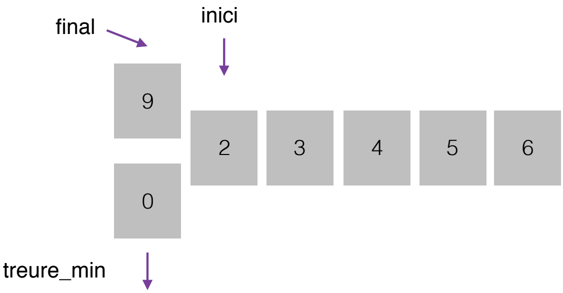


# Implementacions senzilles

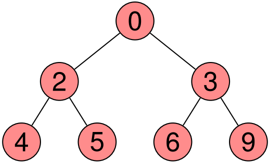
| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| ▷ | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |



| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| $\triangleright$ | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |



| | implementacions | afegir | treure_min |
|---|---|---|---|
| | vector desordenat | $\Theta(1)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| | vector ordenat (decreixent) | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| | vector circular ordenat | $\Theta(n)$ | $\Theta(1)$ |
| ▷ | *heaps* | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |

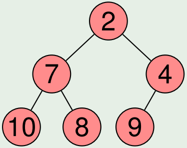


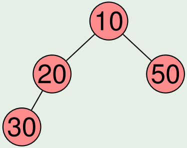
## Definició

Un *min-heap* és un arbre binari complet on la clau d'un node és sempre més petita que les claus dels seus fills.

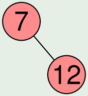
## Exemples

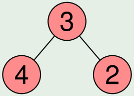
Són *min-heaps*:




No són *min-heaps*:



**Qüestió**

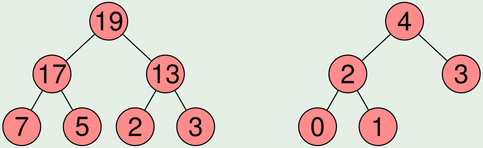
On seria la clau més gran en un *min-heap*? Per què?

### Definició

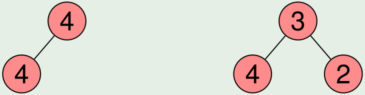
Un *max-heap* és un arbre binari complet on la clau d'un node és sempre més gran que les claus dels seus fills.

### Exemples

Són *max-heaps*:




No són *max-heaps*:



**Qüestió**

Contenen necessàriament les fulles d'un *max-heap* les claus més petites de tot l'arbre? Per què o per què no?

**Terminologia**

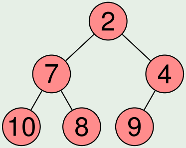
- Quan parlem de *heaps* sense especificar res més, ens referirem als *min-heaps*
- En català, dels *heaps* se'n diu munts o monticles

# Heaps

Els *heaps* es representen de manera compacta mitjançant vectors.

## Representació d'un *heap* mitjançant vectors

El *heap*




es repesenta amb el vector

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | 2 | 7 | 4 | 10 | 8 | 9 |  |  |

No calen apuntadors perquè per a un node en posició $i$:

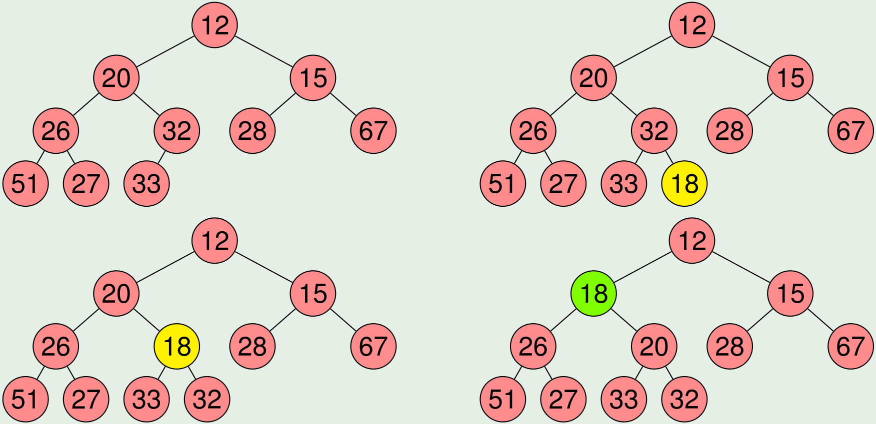
- el pare és a la posició $\lfloor i/2 \rfloor$
- el fill esquerre és a la posició $2i$
- el fill dret és a la posició $2i + 1$

# Operacions bàsiques

## Operació **afegir**

S'afegeix l'element en la següent posició lliure del vector i es fa ascendir fins la posició en què es torna a complir la propietat del *heap*.

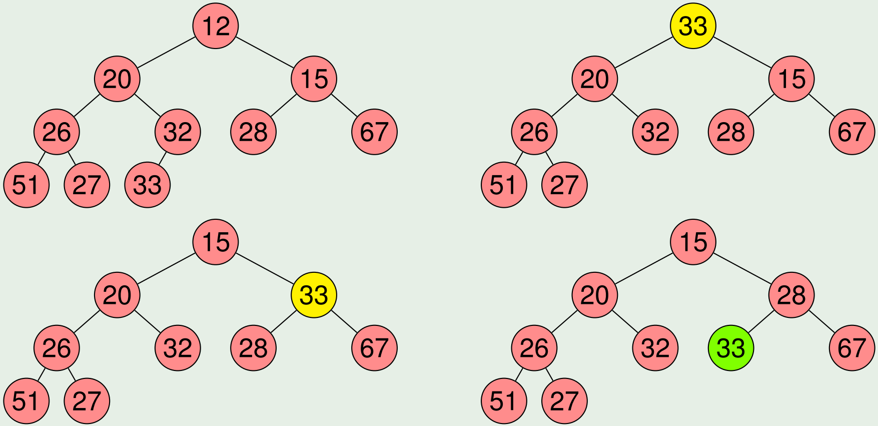
## Exemple: afegir la clau 18



## Operació **treure-min**

L'element en l'última posició del vector es trasllada a la primera i es fa descendir fins que troba la seva posició. Es retorna l'antiga arrel.

## Exemple: esborrar el mínim



## Costos de les operacions en *heaps*

| **operacions** | cas pitjor | cas mitjà |
|---|---|---|
| **afegir** | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(1)$ |
| **treure_min** | $\Theta(\log n)$ | $\Theta(\log n)$ |

# Operacions bàsiques

## Anàlisi del cas pitjor

Donat un *heap* amb $n$ nodes, el cost de `afegir` i `treure_min` és proporcional al nombre d'intercanvis, que està fitat per l'alçària: $\Theta(\log n)$.

## Idea de l'anàlisi del cas mitjà (`afegir`)

Donat un *heap* amb $n$ nodes i distribució uniforme de claus, una nova clau inserida en l'última posició té:

- probabilitat $1/2$ de ser més petita que el pare
- probabilitat $1/2$ de ser més petita que l'avi si és més petita que el pare (en total, $1/4$), i així successivament

Llavors, el nombre esperat d'intercanvis és

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

i, per tant, la inserció té un cost $\Theta(1)$ en mitjana.

# Operacions bàsiques

## Anàlisi del cas pitjor

Donat un *heap* amb $n$ nodes, el cost de `afegir` i `treure_min` és proporcional al nombre d'intercanvis, que està fitat per l'alçària: $\Theta(\log n)$.

## Idea de l'anàlisi del cas mitjà (`afegir`)

Donat un *heap* amb $n$ nodes i distribució uniforme de claus, una nova clau inserida en l'última posició té:

- probabilitat $1/2$ de ser més petita que el pare
- probabilitat $1/2$ de ser més petita que l'avi si és més petita que el pare (en total, $1/4$), i així successivament

Llavors, el nombre esperat d'intercanvis és

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

i, per tant, la inserció té un cost $\Theta(1)$ en mitjana.

# Operacions bàsiques

## Anàlisi del cas pitjor

Donat un *heap* amb $n$ nodes, el cost de `afegir` i `treure_min` és proporcional al nombre d'intercanvis, que està fitat per l'alçària: $\Theta(\log n)$.

## Idea de l'anàlisi del cas mitjà (`afegir`)

Donat un *heap* amb $n$ nodes i distribució uniforme de claus, una nova clau inserida en l'última posició té:

- probabilitat $1/2$ de ser més petita que el pare
- probabilitat $1/2$ de ser més petita que l'avi si és més petita que el pare (en total, $1/4$), i així successivament

Llavors, el nombre esperat d'intercanvis és

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

i, per tant, la inserció té un cost $\Theta(1)$ en mitjana.

## Definició de la classe `CuaPrio`

El *heap* es forma en la taula `t`. La posició 0 no s'utilitza.

```
template <typename Elem>
class CuaPrio {

private:
vector<Elem> t;
```

# Implementació recursiva: funcions públiques

## Constructura

Crea una cua amb prioritat buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
CuaPrio () {
    t.push_back(Elem());
}
```

## Consultar la talla

Retorna la talla de la cua amb prioritat. Cost: $\Theta(1)$.

```
int talla () {
    return t.size()-1;
}
```

# Implementació recursiva: funcions públiques

## Consultar si és buida

Indica si la cua amb prioritat és buida. Cost: $\Theta(1)$.

```
bool buida () {
    return t.talla() == 0;
}
```

## Retornar element mínim

Retorna un element amb prioritat mínima. Cost: $\Theta(1)$.

```
Elem minim () {
    if (buida()) throw "CuaPrio␣buida";
    return t[1];
}
```

# Implementació recursiva: funcions públiques

**afegir**

Afegeix un nou element. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void afegir (Elem& x) {
    t.push_back(x);
    surar(talla());
}
```

# Implementació recursiva: funcions públiques

## treure_min

Treu i retorna l'element mínim. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
Elem treure_min () {
    if (buida()) throw "CuaPrio␣buida";
    Elem x = t[1];
    t[1] = t.back();
    t.pop_back();
    enfonsar(1);
    return x;
}
```

# Implementació recursiva: funcions privades

**surar**

Fer ascendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del *heap*. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void surar (int i) {
    if (i != 1 and t[i/2] > t[i]) {
        swap(t[i],t[i/2]);
        surar(i/2);
}   }
```

# Implementació recursiva: funcions privades

## enfonsar

Fer descendir un element fins que ocupi una posició compatible amb la condició d'ordenació del *heap*. Cost: $\Theta(\log n)$.

```
void enfonsar (int i) {
    int n = talla();
    int c = 2*i;
    if (c <= n) {
        if (c+1 <= n and t[c+1] < t[c]) c++;
        if (t[i] > t[c]) {
            swap(t[i],t[c]);
            enfonsar(c);
} } }
```

# Implementació iterativa

Les operacions que canvien són **afegir** i **treure_min**, on les antigues **surar** i **enfonsar** estan optimitzades.

Els costos asimptòtics no canvien: $\Theta(\log n)$.

**afegir**

```
void afegir (Elem& x) {
    t.push_back(x);
    int i = talla();
    while (i != 1 and t[i/2] > x) {
        t[i] = t[i/2];
        i = i/2;
    }
    t[i] = x;
}
```

# Implementació iterativa

## treure_min

```
Elem treure_min () {
    if (buida()) throw "CuaDePrio␣buida";
    int n = talla();
    Elem e = t[1], x = t[n];
    t.pop_back(); --n;
    int i = 1; c = 2*i;
    while (c <= n) {
        if (c+1 <= n and t[c+1] < t[c]) ++c;
        if (x <= t[c]) break;
        t[i] = t[c];
        i = c;
        c = 2*i;
    }
    t[i] = x;
    return e;
}
```

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritat
- Introducció
- *Heaps*
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 *Heapsort*
- Algorisme bàsic
- Implementació sobre vector únic
- Construcció d'un *heap* en temps lineal

4 Altres aplicacions
- El problema de selecció

# Algorisme bàsic

*Heapsort* és un algorisme d'ordenació basat en les cues amb prioritat.

Donat un vector de $n$ elements,

1. afegeix els $n$ elements a un *heap*: $\Theta(n \log n)$
2. fa $n$ operacions **treure_min** per construir un vector ordenat: $\Theta(n \log n)$

El temps total és $\Theta(n \log n)$, el mínim asimptòtic per a un algorisme d'ordenació.

*Heapsort* va ser inventat per J.W.J. Williams l'any 1964.

# Algorisme bàsic

## *Heapsort*

Amb vectors separats per al *heap* i l'entrada/sortida.
Temps: $\Theta(n \log n)$.
Espai: $\approx 2n$.

```
template <typename elem>
void heapsort (vector<elem>& v) {
    n = v.size();
    CuaPrio<elem> h;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        h.afegir(v[i]);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        v[i] = h.treure_min();
}
```

# Algorisme bàsic

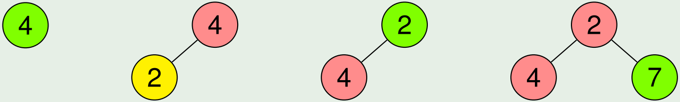
## Exemple

Suposem que partim del vector:

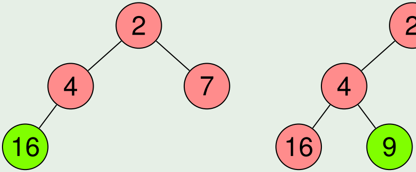
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

i afegim els elements a un *heap*, un per un.

$+4$, $+2$, $+7$:

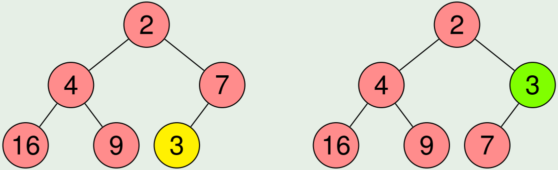



$+16$, $+9$:

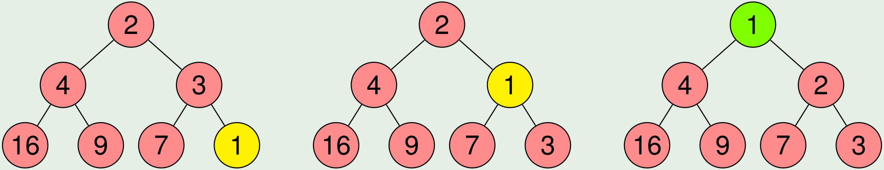


# Algorisme bàsic

$+3$:

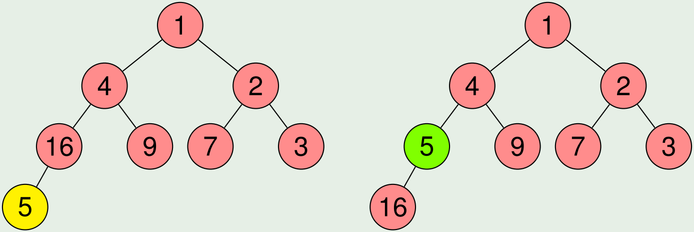



$+1$:



# Algorisme bàsic

$+5$:

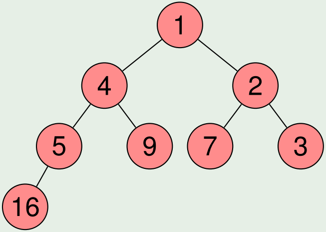



El *heap* resultant s'emmagatzema en el vector:

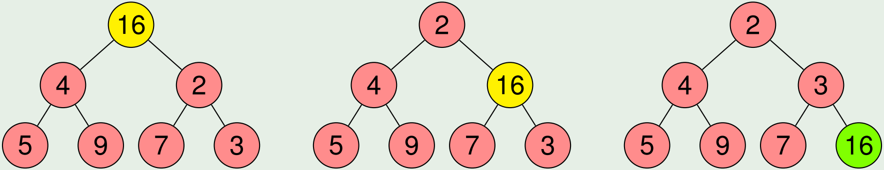
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 9 | 7 | 3 | 16 |

Ara traspassem els elements en ordre al vector original.

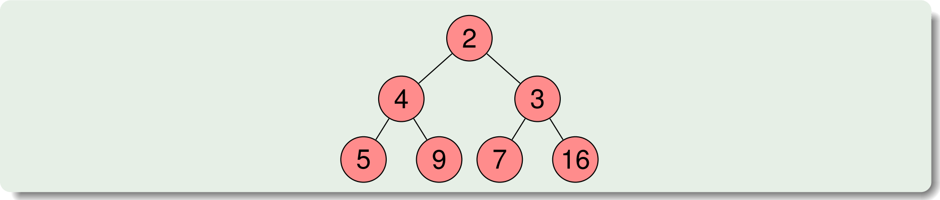
# Algorisme bàsic

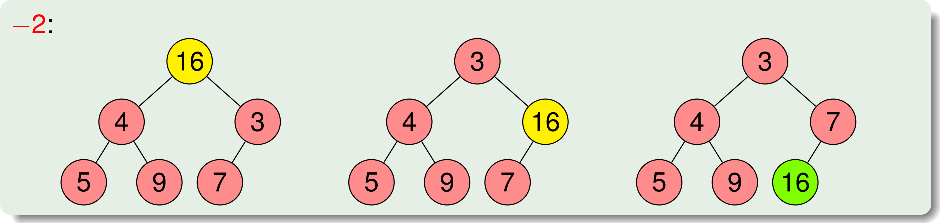



$-1$:

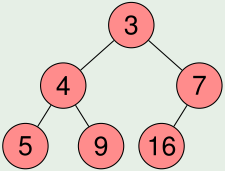


# Algorisme bàsic

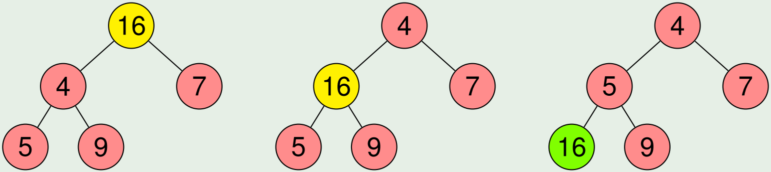


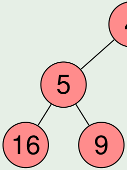
# Algorisme bàsic



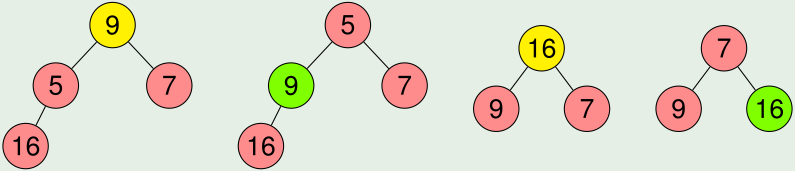

−3:



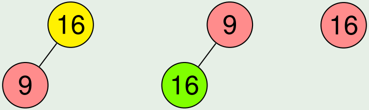
# Algorisme bàsic




$-4$,$-5$:




$-7$,$-9$, $-16$:



# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| 4 | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | | | | |

*heap*

### Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 4 | | | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

**Exemple: evolució dels vectors (operació afegir)**

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 4 | 7 | | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 7 | 16 | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 3 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 4 | 7 | 16 | 9 | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | 5 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 16 | 9 | 7 | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 16 | 9 | 7 | 3 | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **afegir**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 9 | 7 | 3 | 16 |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 9 | 7 | 3 | 16 |

*heap*

# Algorisme bàsic

**Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)**

entrada/sortida

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 5 | 9 | 7 | 16 | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 7 | 5 | 9 | 16 | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 7 | 16 | 9 | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 9 | 7 | 16 | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

**Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)**

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 7 | 9 | 16 | | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | | |

1 2 3 4 5 6 7 8

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 16 | | | | | | |

*heap*

## Exemple: evolució dels vectors (operació **treure_min**)

entrada/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 16 | | | | | | | |

*heap*

# Algorisme bàsic

**Exemple: evolució dels vectors (operació treure_min)**

entrada/sortida

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 16 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

*heap*

# Implementació sobre vector únic

## Idea general

Implementar l'algorisme sobre un únic vector fent una divisió en:

- una part esquerra per mantenir el *heap*
- una part dreta per a l'entrada/sortida

Cada cop que es fa una operació de **treure_min**, s'escriu el mínim com a primer element de la part dreta. Els elements queden ordenats de manera descendent.

Si es volen en ordre ascendent, es pot fer servir un *max-heap*.

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

# Implementació sobre vector únic

### Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 7 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 4 | 16 | 9 | 3 | 1 | 5 |

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 7 | 4 | 2 | 9 | 3 | 1 | 5 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 4 | 2 | 7 | 3 | 1 | 5 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 3 | 2 | 7 | 4 | 1 | 5 |

# Implementació sobre vector únic

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 3 | 2 | 7 | 4 | 1 | 5 |

# Implementació sobre vector únic

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

entrada/*heap*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 3 | 5 | 7 | 4 | 1 | 2 |

# Implementació sobre vector únic

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

### Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 7 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 7 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 7 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

## Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 16 |

# Implementació sobre vector únic

**Exemple: *heapsort* amb *max-heap* sobre vector únic**

*heap*/sortida

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 16 |

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

De vegades un *heap* es construeix a partir d'una col·lecció inicial d'ítems.

- En *heapsort* es fa amb $n$ insercions successives:

```
for (int i = 0; i < n; ++i)
    h.afegir(v[i]);
```

- El cost de cada `afegir` és:
  - $\Theta(1)$ en mitjana
  - $\Theta(\log n)$ en el cas pitjor
- Com que no hi ha altres operacions involucrades, és raonable esperar un cost
  - $\Theta(n)$ en mitjana
  - $\Theta(n \log n)$ en el cas pitjor

  per a les $n$ insercions

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

De vegades un *heap* es construeix a partir d'una col·lecció inicial d'ítems.

- En *heapsort* es fa amb $n$ insercions successives:

```
for (int i = 0; i < n; ++i)
    h.afegir(v[i]);
```

- El cost de cada `afegir` és:
  - $\Theta(1)$ en mitjana
  - $\Theta(\log n)$ en el cas pitjor
- Com que no hi ha altres operacions involucrades, és raonable esperar un cost
  - $\Theta(n)$ en mitjana
  - $\Theta(n \log n)$ en el cas pitjor

  per a les $n$ insercions

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

De vegades un *heap* es construeix a partir d'una col·lecció inicial d'ítems.

- En *heapsort* es fa amb $n$ insercions successives:

```
for (int i = 0; i < n; ++i)
    h.afegir(v[i]);
```

- El cost de cada `afegir` és:
  - $\Theta(1)$ en mitjana
  - $\Theta(\log n)$ en el cas pitjor
- Com que no hi ha altres operacions involucrades, és raonable esperar un cost
  - $\Theta(n)$ en mitjana
  - $\Theta(n \log n)$ en el cas pitjor

  per a les $n$ insercions

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Funció buildHeap

Construir el *heap* en temps $\Theta(n)$ en cas pitjor en lloc de $\Theta(n \log n)$:

1. Introduir els elements en el *heap* en qualsevol ordre (i temps lineal)
2. Si el *heap* té $h$ nivells, per a $i = h-1, h-2, \ldots, 1$:
   - **enfonsar** tots els elements del nivell $i$

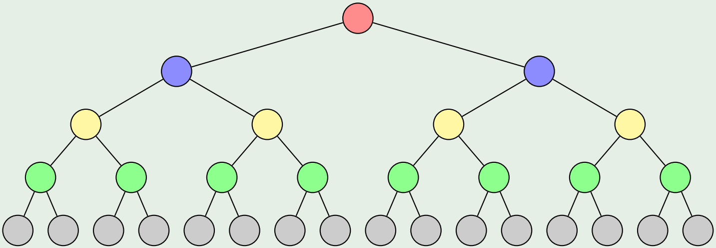
El fet que la majoria de *subheaps* tractats siguin petits fa que el nombre d'intercanvis fets per **enfonsar** sigui lineal.

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Exemple

Per a un *heap* de 31 nodes, hi ha

- 8 *heaps* de mida 3 (arrel en verd)
- 4 *heaps* de mida 7 (arrel en groc)
- 2 *heaps* de mida 15 (arrel en blau)
- 1 *heap* de mida 31 (arrel en vermell)



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

Constructor que pren els elements d'un vector com a entrada.

```
explicit PrioQueue (const vector<Elem>& v)
    : t(v.size()+1) {
    for (int i = 0; i < v.size(); ++i)
        t[i+1] = v[i];
    buildHeap();
}
```

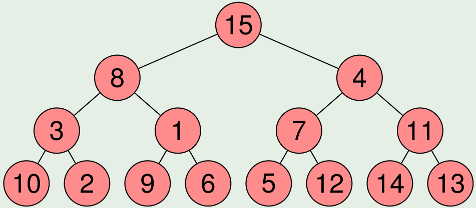
Establir propietat d'ordre del heap a partir d'una ordenació arbitrària d'ítems.

```
void buildHeap () {
    for (int i = size()/2; i > 0; --i)
        enfonsar(i);
}
```

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Exemple de buildHeap

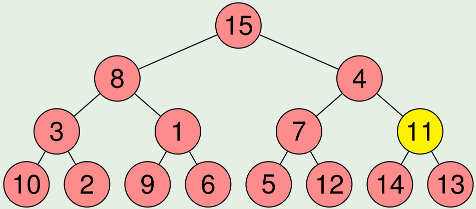
*Heap* inicial



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Exemple de buildHeap

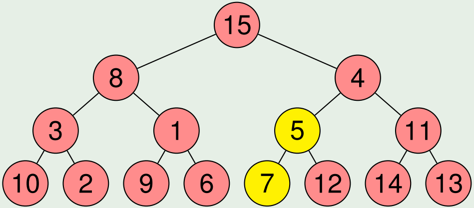
Després de `enfonsar(7)`



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

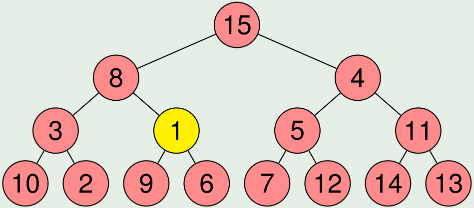
## Exemple de buildHeap

Després de `enfonsar(6)`



## Exemple de buildHeap

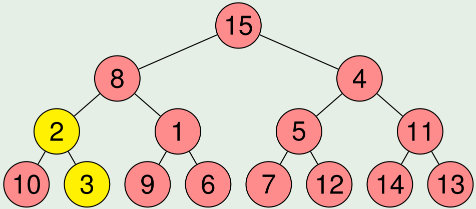
Després de `enfonsar(5)`



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

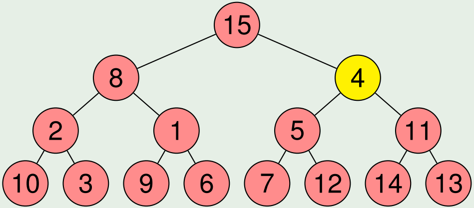
## Exemple de buildHeap

Després de `enfonsar(4)`



## Exemple de buildHeap

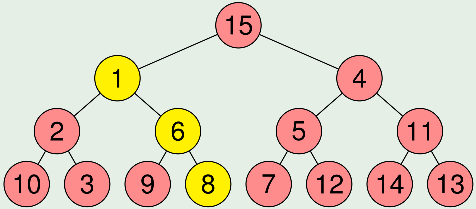
Després de `enfonsar(3)`



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Exemple de buildHeap

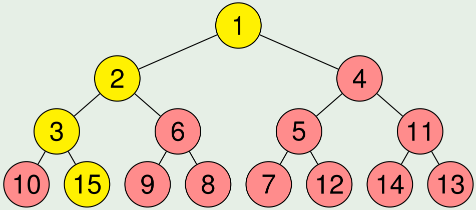
Després de `enfonsar(2)`



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Exemple de buildHeap

Després de `enfonsar(1)`



# Construcció d'un *heap* en temps lineal

El temps de càlcul de `buildHeap` està fitat per la suma de les alçàries de tots els nodes.

Volem demostrar que aquesta suma és $O(n)$.

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Teorema

Per a l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ i $2^{h+1}-1$ nodes, la suma de les alçàries dels seus nodes és $2^{h+1}-1-(h+1)$.

## Demostració

Com que hi ha $2^i$ nodes d'alçària $h-i$, la suma de totes les alçàries és:

$$S = \sum_{i=0}^{h} 2^i(h-i)$$

$$= h + 2(h-1) + 4(h-2) + 8(h-3) + 16(h-4) + \cdots + 2^{h-1}(1)$$

Multiplicant per 2, tenim

$$2S = 2h + 4(h-1) + 8(h-2) + 16(h-3) + \cdots + 2^h(1)$$

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

## Teorema

Per a l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ i $2^{h+1} - 1$ nodes, la suma de les alçàries dels seus nodes és $2^{h+1} - 1 - (h+1)$.

## Demostració

Ara, a partir de

$$
\begin{aligned}
S &= h + 2(h-1) + 4(h-2) + 8(h-3) + 16(h-4) + \cdots + 2^{h-1}(1) \\
2S &= 2h + 4(h-1) + 8(h-2) + 16(h-3) + \cdots + 2^{h}(1)
\end{aligned}
$$

calculem $2S - S$ i obtenim

$$
\begin{aligned}
S &= -h + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{h-1} + 2^{h} \\
&= -h + (2^{h+1} - 1) - 1 \\
&= 2^{h+1} - 1 - (h+1)
\end{aligned}
$$

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

**Teorema**

Per a l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ i $2^{h+1} - 1$ nodes, la suma de les alçàries dels seus nodes és $2^{h+1} - 1 - (h+1)$.

Donat un arbre binari complet $T$ de $n$ nodes i alçària $h$, hem vist que $2^h \leq n$. Per tant, $2^{h+1} \leq 2n$.

La suma d'alçàries de $T$ és com a màxim la de l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ que, pel teorema, és:

$$\begin{aligned} 2^{h+1} - 1 - (h+1) &< 2^{h+1} \\ &\leq 2n \in O(n). \end{aligned}$$

**Corol·lari**

La suma d'alçàries d'un arbre binari complet de $n$ nodes és $O(n)$.

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

**Teorema**

Per a l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ i $2^{h+1} - 1$ nodes, la suma de les alçàries dels seus nodes és $2^{h+1} - 1 - (h+1)$.

Donat un arbre binari complet $T$ de $n$ nodes i alçària $h$, hem vist que $2^h \leq n$. Per tant, $2^{h+1} \leq 2n$.

La suma d'alçàries de $T$ és com a màxim la de l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ que, pel teorema, és:

$$\begin{aligned} 2^{h+1} - 1 - (h+1) &< 2^{h+1} \\ &\leq 2n \in O(n). \end{aligned}$$

**Corol·lari**

La suma d'alçàries d'un arbre binari complet de $n$ nodes és $O(n)$.

# Construcció d'un *heap* en temps lineal

**Teorema**

Per a l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ i $2^{h+1}-1$ nodes, la suma de les alçàries dels seus nodes és $2^{h+1}-1-(h+1)$.

Donat un arbre binari complet $T$ de $n$ nodes i alçària $h$, hem vist que $2^h \leq n$. Per tant, $2^{h+1} \leq 2n$.

La suma d'alçàries de $T$ és com a màxim la de l'arbre binari perfecte d'alçària $h$ que, pel teorema, és:

$$\begin{aligned} 2^{h+1}-1-(h+1) &< 2^{h+1} \\ &\leq 2n \in O(n). \end{aligned}$$

**Corol·lari**

La suma d'alçàries d'un arbre binari complet de $n$ nodes és $O(n)$.

1 Preliminars matemàtics

2 Cues amb prioritat
- Introducció
- *Heaps*
- Operacions bàsiques
- Implementació recursiva
- Implementació iterativa

3 *Heapsort*
- Algorisme bàsic
- Implementació sobre vector únic
- Construcció d'un *heap* en temps lineal

4 Altres aplicacions
- El problema de selecció

# El problema de selecció

## Problema de selecció

Donada una llista $S$ de naturals i un $k \in \mathbb{N}$, determinar el $k$-èsim element més petit de $S$.

Fent servir *heaps*, podem trobar un nou algorisme:

1. Construir un *min-heap* a partir de $S$ $\longrightarrow \Theta(n)$
2. Efectuar $k$ operacions **treure_min** del *min-heap* $\longrightarrow \Theta(k \log n)$
3. Retornar l'últim element extret $\longrightarrow \Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La mediana correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.
En el cas $k = \frac{n}{\log n}$, el cost és $\Theta(n)$.

# El problema de selecció

**Problema de selecció**

Donada una llista $S$ de naturals i un $k \in \mathbb{N}$, determinar el $k$-èsim element més petit de $S$.

Fent servir *heaps*, podem trobar un nou algorisme:

1. Construir un *min-heap* a partir de $S$ $\longrightarrow \Theta(n)$
2. Efectuar $k$ operacions **treure_min** del *min-heap* $\longrightarrow \Theta(k \log n)$
3. Retornar l'últim element extret $\longrightarrow \Theta(1)$

Cost total: $\Theta(n + k \log n)$.

La mediana correspon a $k = n/2$. Cost: $\Theta(n \log n)$.
En el cas $k = \frac{n}{\log n}$, el cost és $\Theta(n)$.