Tema 6. Cerca exhaustiva

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Antoni Lozano

Q2 2018–2019

Versió de 24 d'abril de 2019

1 Força bruta i cerca amb retrocés
- Algorismes de força bruta
- Cerca amb retrocés
- Algorisme genèric

2 Problemes
- La reconstrucció Turnpike
- Les *n* reines
- El quadrat llatí
- Els salts de cavall
- Graf hamiltonià
- Problema del viatjant
- La motxilla

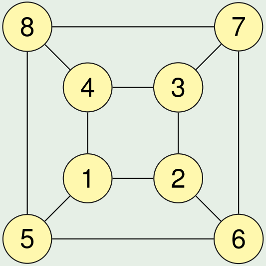
3 El principi minimax

Algorismes de força bruta

Hem tractat problemes combinatoris (per exemple, **cicle hamiltonià**) definits per una sèrie de regles o restriccions que defineixen un espai de solucions.

Tot sovint, l'única manera de resoldre un d'aquests problemes és provar totes les possibilitats per trobar una solució que satisfà les restriccions.

Exemple: Cicle hamiltonià



Les *possibilitats* són totes les permutacions de vèrtexs:

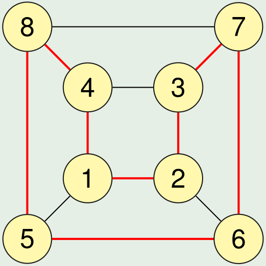
$$(12345678), (12345687), \ldots, (12376584), \ldots$$

Algorismes de força bruta

Hem tractat problemes combinatoris (per exemple, **cicle hamiltonià**) definits per una sèrie de regles o restriccions que defineixen un espai de solucions.

Tot sovint, l'única manera de resoldre un d'aquests problemes és provar totes les possibilitats per trobar una solució que satisfà les restriccions.

Exemple: Cicle hamiltonià



Les *possibilitats* són totes les permutacions de vèrtexs:

$$(12345678), (12345687), \ldots, (12376584), \ldots$$

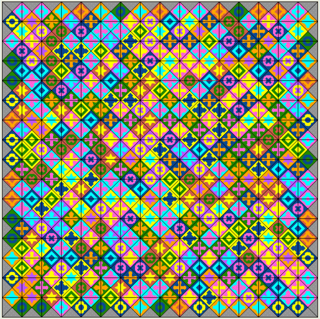
Exemple: Puzzle *Eternity II*

- Dissenyat per Lord Monckton, que va oferir 2M$ del 2007 al 2010 per una solució completa
- El puzzle era del tipus d'aparellament d'arestes
- El premi va quedar desert, però es van concedir 10.000$ a una solució parcial de 467 peces del total de 480

Algorismes de força bruta

Exemple: Puzzle *Eternity II*

- Dissenyat per Lord Monckton, que va oferir 2M$ del 2007 al 2010 per una solució completa
- El puzzle era del tipus d'aparellament d'arestes
- El premi va quedar desert, però es van concedir 10.000$ a una solució parcial de 467 peces del total de 480



Algorismes de força bruta

Exemple: Puzzle *Eternity II*

- Dissenyat per Lord Monckton, que va oferir 2M$ del 2007 al 2010 per una solució completa
- El puzzle era del tipus d'aparellament d'arestes
- El premi va quedar desert, però es van concedir 10.000$ a una solució parcial de 467 peces del total de 480

Our calculations are that if you used the world's most powerful computer and let it run from now until the projected end of the universe, it might not stumble across one of the solutions.

Lord Monckton, 2005, The Times

Algorismes de força bruta

De l'estratègia d'explorar sistemàticament un espai de solucions en diem força bruta o cerca exhaustiva:

- Acostuma a ser exponencial
- Pot ser lenta, però és millor que no tenir solució
- Pot arribar a ser pràctica amb entrades petites
- Es pot ajudar d'altres tècniques
  (com dividir i vèncer o algorismes voraços)
- Pot tenir com a objectiu trobar totes les solucions, trobat la solució òptima, determinar l'existència d'alguna solució, etc.

Algorismes de força bruta

Suposem que volem processar totes les cadenes de zeros i uns de mida n.

Disposem d'un procediment PROCESSAR(C) que fa el tractament desitjat del vector C.

BINARI(n)
(processar totes les cadenes binàries de mida n)
  si $n = 0$ **llavors**
    PROCESSAR(C)
  si no
    $C[n] \leftarrow 0$; BINARI($n - 1$)
    $C[n] \leftarrow 1$; BINARI($n - 1$)

El cost ve donat per $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$. Pel teorema mestre I:

$$T(n) \in \Theta(2^n).$$

Algorismes de força bruta

Suposem que volem processar totes les cadenes de zeros i uns de mida n.

Disposem d'un procediment PROCESSAR(C) que fa el tractament desitjat del vector C.

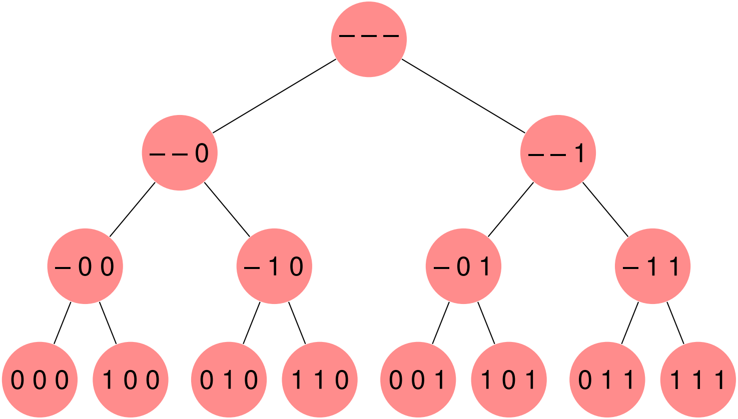
```
BINARI(n)
(processar totes les cadenes binàries de mida n)
    si n = 0 llavors
        PROCESSAR(C)
    si no
        C[n] ← 0; BINARI(n − 1)
        C[n] ← 1; BINARI(n − 1)
```

El cost ve donat per $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$. Pel teorema mestre I:

$$T(n) \in \Theta(2^n).$$

Algorismes de força bruta

Per a $n = 3$, s'obté l'arbre de recursió:



Algorismes de força bruta

Podem considerar un algorisme genèric iteratiu de cerca exhaustiva que fa servir els procediments:

- PRIMER(x): genera un primer candidat
- SEGÜENT(x, c): genera el candidat següent a c
- VÀLID(x, c): comprova si el candidat c és solució
- NUL(c): diu si c és un candidat "nul"

Algorisme genèric de força bruta

```
FORÇA BRUTA(x)
  c ← PRIMER(x)
  mentre no (NUL(c))
    si VALID(x, c) llavors
      PROCESSAR(c)
    c ← SEGÜENT(x, c)
```

Algorismes de força bruta

Quin cost té la cerca exhaustiva?

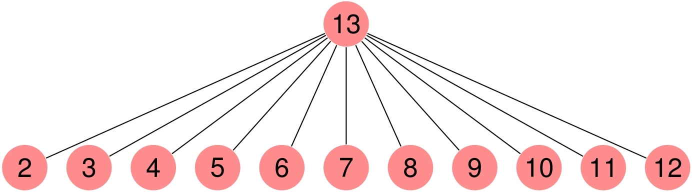
Per exemple, les cerques en profunditat (DFS) i amplada (BFS) en grafs també són cerques exhaustives:

- si el graf ve donat a l'entrada, són cerques polinòmiques
- si hi ha un arbre o graf implícit, normalment són exponencials

Exemple: nombres primers

```
bool es_primer (int x) {
    if (x <= 1) return false;
    for (int i = 2; i < n; ++i)
        if (x % i == 0) return false;
    return true; }
```

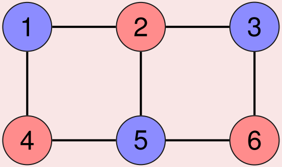
Nombre màxim d'iteracions: $(x-1)-2+1 = x-2$.
Cost en funció de x: $\Theta(x)$.
Cost en funció de $n = |x|$: $\Theta(2^n)$.



Arbre implícit per a $x = 13$

Exercici: Recobriment

Un *recobriment de vèrtexs* d'un graf $G = (V, E)$ és un subconjunt $U \subseteq V$ tal que per a cada aresta $\{u, v\} \in E$, almenys un dels extrems u o v pertany a U. La mida d'un recobriment U és $|U|$. Per exemple, el graf següent té dos recobriments de mida 3: $\{1, 3, 5\}$ i $\{2, 4, 6\}$:



Dissenyeu i analitzeu un algorisme que, donat un graf G i un natural k, determini si G té un recobriment de vèrtexs de mida k.

Definició

Es defineix el nombre de Ramsey $R(k, l)$ com el natural n més petit tal que tot graf de n vèrtexs conté un subgraf complet de k vèrtexs o un conjunt independent de l vèrtexs.

Definició

Es defineix el nombre de Ramsey $R(k, l)$ com el natural n més petit tal que tot graf de n vèrtexs conté un subgraf complet de k vèrtexs o un conjunt independent de l vèrtexs.

Propietats

Observeu que:

- $R(k, l) \geq \max\{k, l\}$
- $R(3, 3) \geq 6$

Definició

Es defineix el nombre de Ramsey $R(k, l)$ com el natural n més petit tal que tot graf de n vèrtexs conté un subgraf complet de k vèrtexs o un conjunt independent de l vèrtexs.

Alguns nombres de Ramsey

- $R(3, 3) = 6$
- $R(4, 4) = 18$
- $43 \leq R(5, 5) \leq 49$
- $102 \leq R(6, 6) \leq 165$

Algorismes de força bruta

Definició

Es defineix el nombre de Ramsey $R(k, l)$ com el natural n més petit tal que tot graf de n vèrtexs conté un subgraf complet de k vèrtexs o un conjunt independent de l vèrtexs.

Alguns nombres de Ramsey

- $R(3, 3) = 6$
- $R(4, 4) = 18$
- $43 \leq R(5, 5) \leq 49$
- $102 \leq R(6, 6) \leq 165$

Exercici: Cost del càlcul dels nombres de Ramsey

Dissenyeu a grans trets un algorisme per calcular $R(k, l)$ donats k i l i estimeu una fita superior del seu cost.

Cerca amb retrocés

Un algorisme de cerca amb retrocés (o tornada enrere) funciona com una cerca exhaustiva, però s'atura quan troba una solució parcial que no es pot estendre a una solució.

L'esquema de cerca amb retrocés:

- es pot veure com una implementació intel·ligent de la cerca exhaustiva amb un cost millorat, però sovint encara exponencial
- en anglès, s'anomena *backtracking*

Cerca amb retrocés

Un algorisme de cerca amb retrocés (o tornada enrere) funciona com una cerca exhaustiva, però s'atura quan troba una solució parcial que no es pot estendre a una solució.

L'esquema de cerca amb retrocés:

- es pot veure com una implementació intel·ligent de la cerca exhaustiva amb un cost millorat, però sovint encara exponencial
- en anglès, s'anomena *backtracking*

Cerca amb retrocés

Exemple: moblar un pis

- Estratègia de força bruta: provar totes les configuracions dels mobles en tots els espais
- L'estratègia de cerca amb retrocés aprofita que:
  - cada moble acostuma a anar a un espai concret
    (no posarem el sofà a la cuina)
  - hi ha mobles que van junts
    (cadires i taula, llit i tauletes)
  - si una subdistribució no és satisfactòria, no considerarem la distribució que la conté
    (si no ens agrada posar un moble davant d'una finestra, ja no explorarem a partir d'aquí)

Eliminar un gran grup de possibilitats en un pas es coneix com a **poda**.

Cerca amb retrocés

Exemple: moblar un pis

- Estratègia de força bruta: provar totes les configuracions dels mobles en tots els espais
- L'estratègia de cerca amb retrocés aprofita que:
  - cada moble acostuma a anar a un espai concret
    (no posarem el sofà a la cuina)
  - hi ha mobles que van junts
    (cadires i taula, llit i tauletes)
  - si una subdistribució no és satisfactòria, no considerarem la distribució que la conté
    (si no ens agrada posar un moble davant d'una finestra, ja no explorarem a partir d'aquí)

Eliminar un gran grup de possibilitats en un pas es coneix com a **poda**.

Cerca amb retrocés

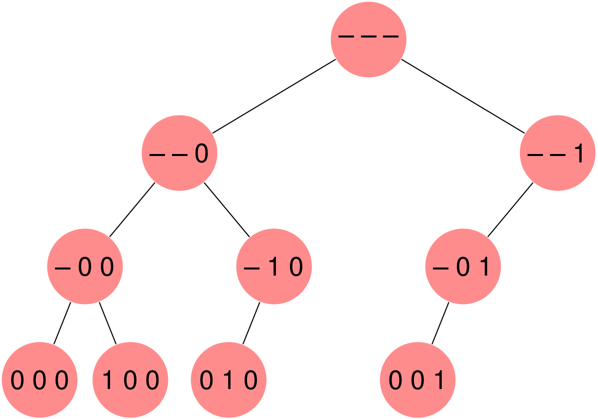
Suposem que volem totes les cadenes de zeros i uns de mida n que contenen un màxim de k uns. Podem modificar l'algorisme vist abans de manera que eviti la recursió dels subarbres que contenen més de k uns.

Crida inicial: $\textsc{Binari}(n, 0)$.

$\textsc{Binari}(n, i)$
(processar totes les cadenes binàries de mida n amb $\leq k$ uns)
  si $n = 0$ **llavors**
    $\textsc{Processar}(C)$
  si no
    $C[n] \leftarrow 0$; $\textsc{Binari}(n-1, i)$
    si $i < k$ **llavors**
      $C[n] \leftarrow 1$; $\textsc{Binari}(n-1, i+1)$

Cerca amb retrocés

Per a $n = 3$ i $k = 1$, s'obté l'arbre de recursió:



És millor que generar totes les possibilitats i després comprovar els uns.

Algorisme genèric

Es pot definir un algorisme genèric de tornada enrere:

- L'espai de solucions d'un problema s'acostuma a organitzar en forma d'arbre de configuracions
- Cada node o configuració de l'arbre es representa amb un vector

  $$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

  que conté les tries ja fetes
- El vector A s'amplia en la fase *avançar* triant un a_{k+1} d'un conjunt de candidats S_{k+1} (explorar en profunditat)
- A es redueix en la fase *retrocedir* (backtrack)

Algorisme genèric

```
TORNADA ENRERE(x)
    calcular S_1 // conjunt de candidats per a a_1
    k ← 1
    mentre k > 0
        mentre S_k ≠ ∅
            a_k ← un element de S_k
            S_k ← S_k − {a_k}
            A ← (a_1, a_2, ..., a_k)
            si SOLUCIÓ(A) llavors
                PROCESSAR(A)
            k ← k + 1 // avançar
            calcular S_k // candidats per a a_k
        k ← k − 1 // retrocedir
```

- Cost en temps: mida de l'arbre (normalment exponencial)
- Cost en espai: profunditat de l'arbre (normalment polinòmic)

Algorisme genèric

Exemple: permutacions de n elements

Quines són les permutacions dels naturals $\{1, \ldots, n\}$?

- Hi ha n possibilitats per al primer
- Fixat el primer, hi ha $n - 1$ possibilitats per al segon
- Repetint el raonament, obtenim

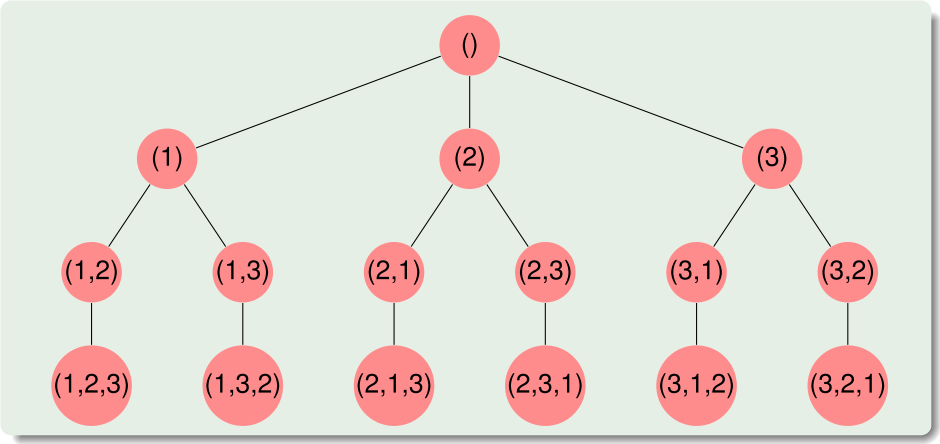
$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Adaptem l'algorisme genèric amb

- $A = (a_1, \ldots, a_k)$, tal que a_i és l'i-èsim element triat
- $S_1 = \{1, \ldots, n\}$ i $S_{k+1} = \{1, \ldots, n\} - A$ per a $k \geq 1$

Algorisme genèric

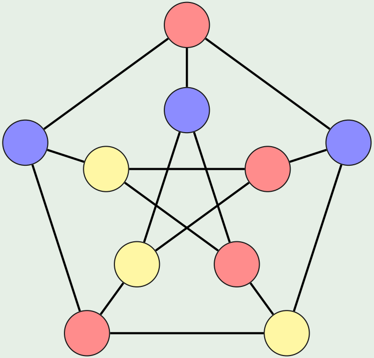
Amb $n = 3$, s'obté l'arbre de configuracions:



Algorisme genèric

Exemple: **3-Colorabilitat**

El problema de la **3-colorabilitat** consisteix a decidir si es pot assignar un color a cada vèrtex d'un total de 3 de manera que els vèrtexs adjacents tinguin colors diferents.

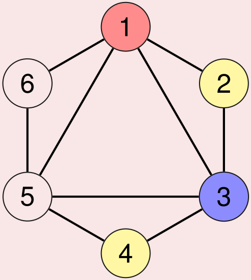


Una 3-coloració del graf de Petersen

Exercici

1. Trobeu un algorisme polinòmic per decidir si un graf té una 2-coloració. (Jutge: *Two colors*)

2. Què impedeix estendre l'algorisme anterior a la 3-colorabilitat? Concretament, donat el graf

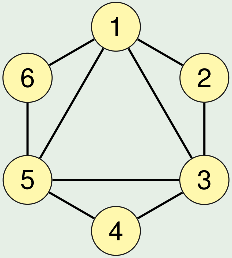


   què hauria de fer un algorisme que hagués assignat, per aquest ordre, el color vermell a 1, el groc a 2, el blau a 3 i el groc a 4?

Algorisme genèric

3-colorabilitat

Donat el graf



- Les configuracions seran assignacions parcials de colors, és a dir,

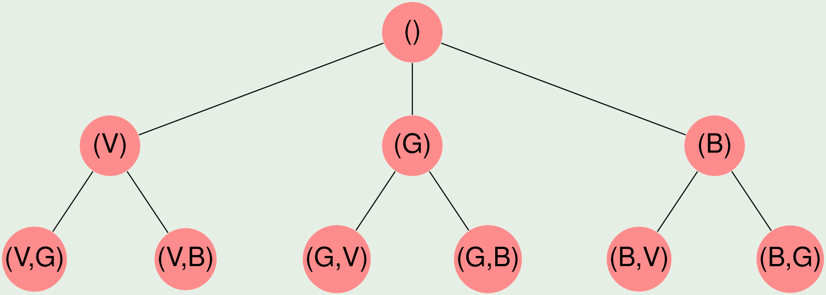
$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

  representarà el fet que el vèrtex i s'acoloreix amb el color $a_i \in \{B, G, V\}$

- El conjunt de candidats S_{k+1} per a a_{k+1} contindrà els colors compatibles amb els veïns que ja han estat acolorits

Algorisme genèric

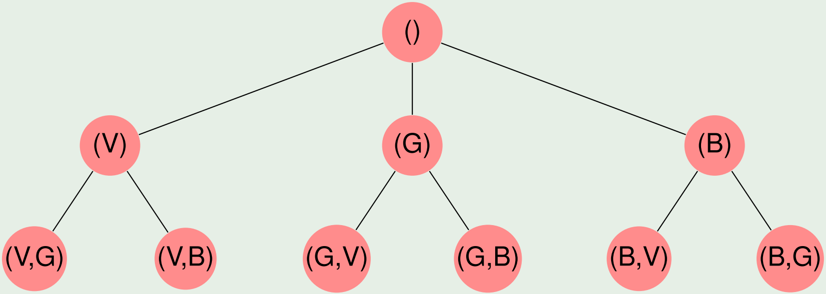
Els 3 primers nivells de l'arbre de configuracions serien:



Però si el que volem és trobar només una solució,

- es pot fixar un color per al vèrtex 1
- es pot fixar un color diferent per al vèrtex 2
- qualsevol altra solució serà simètrica

Els 3 primers nivells de l'arbre de configuracions serien:



Però si el que volem és trobar només una solució,

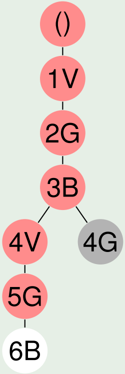
- es pot fixar un color per al vèrtex 1
- es pot fixar un color diferent per al vèrtex 2
- qualsevol altra solució serà simètrica

Algorisme genèric

Fent la tria

- $S_1 = \{V\}$
- $S_2 = \{G\}$

i definint $S_{k+1} = \{c \in \{V, G, B\} \mid \forall i \leq k \ \ (\{i, k+1\} \in A(G) \Rightarrow c \neq a_i)\}$, s'obté l'arbre de configuracions



La reconstrucció Turnpike

Suposem que hi ha n punts sobre l'eix x amb coordenades

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

A més, suposem que tots els valors són naturals i

$$0 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

Els n punts determinen $n(n-1)/2$ distàncies de la forma $|x_i - x_j|$ per a $i \neq j$ (no necessàriament diferents).

Observació

És fàcil construir el conjunt de distàncies a partir del conjunt de punts en temps $\Theta(n^2)$ (ordenades, en temps $\Theta(n^2 \log n)$).

Problema de la reconstrucció Turnpike

Donat el conjunt de distàncies, reconstruir el conjunt de punts.

La reconstrucció Turnpike

Suposem que hi ha n punts sobre l'eix x amb coordenades

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

A més, suposem que tots els valors són naturals i

$$0 = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$$

Els n punts determinen $n(n-1)/2$ distàncies de la forma $|x_i - x_j|$ per a $i \neq j$ (no necessàriament diferents).

Observació

És fàcil construir el conjunt de distàncies a partir del conjunt de punts en temps $\Theta(n^2)$ (ordenades, en temps $\Theta(n^2 \log n)$).

Problema de la reconstrucció Turnpike

Donat el conjunt de distàncies, reconstruir el conjunt de punts.

La reconstrucció Turnpike

Suposem que hi ha n punts sobre l'eix x amb coordenades

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

A més, suposem que tots els valors són naturals i

$$0 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

Els n punts determinen $n(n-1)/2$ distàncies de la forma $|x_i - x_j|$ per a $i \neq j$ (no necessàriament diferents).

Observació

És fàcil construir el conjunt de distàncies a partir del conjunt de punts en temps $\Theta(n^2)$ (ordenades, en temps $\Theta(n^2 \log n)$).

Problema de la reconstrucció Turnpike

Donat el conjunt de distàncies, reconstruir el conjunt de punts.

La reconstrucció Turnpike

Els problemes de reconstrucció acostumen a ser més complexos que els de construcció:

- multiplicar és més fàcil que factoritzar
- reconstruir un graf de n vèrtexs a partir dels seus subgrafs de $n - 1$ vèrtexs és més complex que obtenir aquests subgrafs

Per al problema de la reconstrucció Turnpike

- no es coneix cap algorisme polinòmic
- hi ha un algorisme que normalment funciona en temps $O(n^2 \log n)$ però que en el cas pitjor és exponencial

La reconstrucció Turnpike

Els problemes de reconstrucció acostumen a ser més complexos que els de construcció:

- multiplicar és més fàcil que factoritzar
- reconstruir un graf de n vèrtexs a partir dels seus subgrafs de $n-1$ vèrtexs és més complex que obtenir aquests subgrafs

Per al problema de la reconstrucció Turnpike

- no es coneix cap algorisme polinòmic
- hi ha un algorisme que normalment funciona en temps $O(n^2 \log n)$ però que en el cas pitjor és exponencial

La reconstrucció Turnpike

Exemple amb $D = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 10\}$

Com que $|D| = 15 = n(n-1)/2$, obtenim $n = 6$.

- Comencem fent $x_1 = 0$.
- Clarament, $x_6 = 10$.
- Eliminem 10 de D. Ara,

$$D = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8\}.$$

La reconstrucció Turnpike

$D = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8\}$, eix x: 0 _ _ _ _ 10

- La distància més gran que queda és 8. Per tant,

$$x_2 = 2 \text{ o } x_5 = 8.$$

  Si tenen solució, seran simètriques. Triem $x_5 = 8$.

- Eliminem de D les distàncies $x_6 - x_5 = 2$ i $x_5 - x_1 = 8$. Ara,

$$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\}.$$

La reconstrucció Turnpike

$D = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8\}$, eix x: 0 _ _ _ _ 10

- La distància més gran que queda és 8. Per tant,

  $$x_2 = 2 \text{ o } x_5 = 8.$$

  Si tenen solució, seran simètriques. Triem $x_5 = 8$.

- Eliminem de D les distàncies $x_6 - x_5 = 2$ i $x_5 - x_1 = 8$. Ara,

  $$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\}.$$

$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\}$, eix x: 0 _ _ _ 8 10

- Com que 7 és el valor més alt a D, $x_4 = 7$ o $x_2 = 3$.
  - Si $x_4 = 7$, les distàncies

    $$x_6 - 7 = 3 \text{ i } x_5 - 7 = 1$$

    han de ser a D, i hi són.
  - Si $x_2 = 3$, les distàncies

    $$3 - x_1 = 3 \text{ i } x_5 - 3 = 5$$

    han de ser a D, i també hi són.

  No tenim cap guia per triar. Provarem una opció ($x_4 = 7$) i veurem si porta a una solució. Si no, tornarem enrere.

- Eliminem les distàncies $x_4 - x_1 = 7$, $x_5 - x_4 = 1$ i $x_6 - x_4 = 3$. Ara,

  $$D = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6\}.$$

$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\}$, eix x: 0 _ _ _ 8 10

- Com que 7 és el valor més alt a D, $x_4 = 7$ o $x_2 = 3$.
  - Si $x_4 = 7$, les distàncies

    $$x_6 - 7 = 3 \text{ i } x_5 - 7 = 1$$

    han de ser a D, i hi són.
  - Si $x_2 = 3$, les distàncies

    $$3 - x_1 = 3 \text{ i } x_5 - 3 = 5$$

    han de ser a D, i també hi són.

  No tenim cap guia per triar. Provarem una opció ($x_4 = 7$) i veurem si porta a una solució. Si no, tornarem enrere.
- Eliminem les distàncies $x_4 - x_1 = 7$, $x_5 - x_4 = 1$ i $x_6 - x_4 = 3$. Ara,

  $$D = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6\}.$$

$D = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6\}$, eix x: 0 _ _ 7 8 10

- La distància més gran és 6. Per tant, $x_3 = 6$ o $x_2 = 4$.
  - Si $x_3 = 6$, llavors $x_4 - x_3 = 1$, que no pertany a D.
  - Si $x_2 = 4$, llavors

    $$x_2 - x_1 = 4 \text{ i } x_5 - x_2 = 4$$

    i això és impossible perquè 4 només apareix un cop a D.

  Aquesta línia de raonament no porta a una solució. Tornem enrere i triem $x_2 = 3$.

- En el conjunt de distàncies anteriors

  $$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\},$$

  eliminem $x_2 - x_1 = 3$, $x_5 - x_2 = 5$ i $x_6 - x_2 = 7$. Ara,

  $$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6\}.$$

La reconstrucció Turnpike

$D = \{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6\}$, eix x: 0 _ _ 7 8 10

- La distància més gran és 6. Per tant, $x_3 = 6$ o $x_2 = 4$.
  - Si $x_3 = 6$, llavors $x_4 - x_3 = 1$, que no pertany a D.
  - Si $x_2 = 4$, llavors

$$x_2 - x_1 = 4 \text{ i } x_5 - x_2 = 4$$

  i això és impossible perquè 4 només apareix un cop a D.

  Aquesta línia de raonament no porta a una solució. Tornem enrere i triem $x_2 = 3$.

- En el conjunt de distàncies anteriors

$$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7\},$$

  eliminem $x_2 - x_1 = 3$, $x_5 - x_2 = 5$ i $x_6 - x_2 = 7$. Ara,

$$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6\}.$$

La reconstrucció Turnpike

$D = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6\}$, eix x: 0 3 _ _ 8 10

- Com que 6 és el valor més alt a D, $x_4 = 6$ o $x_3 = 4$.
  - Si $x_3 = 4$, tant $x_3 - x_1$ com $x_5 - x_3$ valdrien 4, però no és possible perquè D només conté un 4.

  Per tant, $x_4 = 6$ i obtenim

$$D = \{1, 2, 3, 5, 5\}.$$

- Només queda triar $x_3 = 5$. Com que ens queda $D = \emptyset$, tenim una solució:

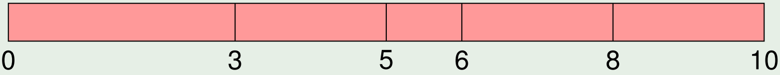
$D = \{1,2,2,3,3,4,5,5,6\}$, eix x: 0 3 _ _ 8 10

- Com que 6 és el valor més alt a D, $x_4 = 6$ o $x_3 = 4$.
  - Si $x_3 = 4$, tant $x_3 - x_1$ com $x_5 - x_3$ valdrien 4, però no és possible perquè D només conté un 4.

Per tant, $x_4 = 6$ i obtenim

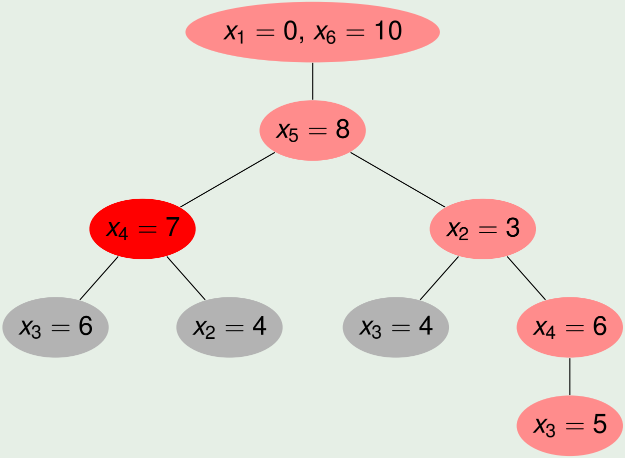
$$D = \{1,2,3,5,5\}.$$

- Només queda triar $x_3 = 5$. Com que ens queda $D = \emptyset$, tenim una solució:



La reconstrucció Turnpike

Arbre de decisió



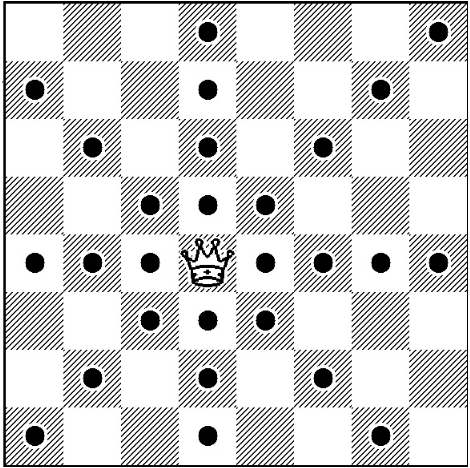
Els nodes grisos indiquen que els punts triats són inconsistents amb les dades. El node vermell no té nodes vàlids com a fills.

La reconstrucció Turnpike

- Aquest mètode dona lloc a un algorisme que, si no es produeix cap tornada enrere, té cost $O(n^2 \log n)$
- Per a punts aleatoris distribuïts de manera uniforme, es produeix com a molt una tornada enrere en tot l'algorisme
- Exemple, amb el codi en C++: Weiss, M.A., *Data Structures and Algorithm Analysis in C++*, 2a edició, Addison-Wesley, 1999

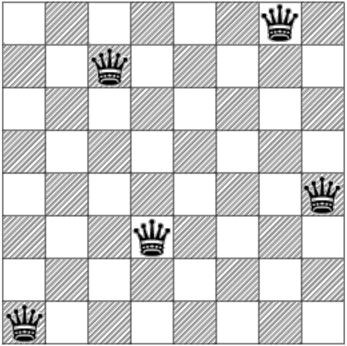
Les *n* reines

Moviments de la reina en el joc dels escacs:



Les *n* reines

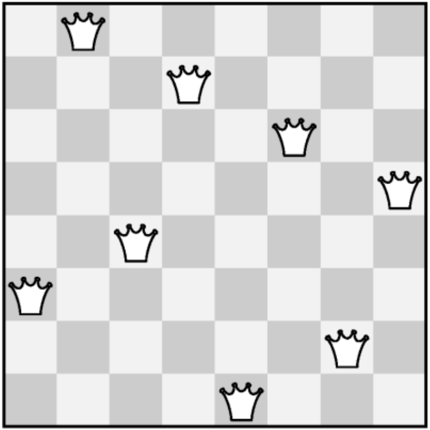
Quantes reines podem col·locar sobre un tauler
sense que n'hi hagi dues que s'amenacin mútuament?
5? 6? 7? 8?



Les *n* reines

Problema de les vuit reines

Col·locar vuit reines en un tauler d'escacs sense que cap amenaci cap altra.



Les *n* reines

Estratègies de resolució per força bruta:

1. Triar 8 posicions diferents del tauler:

$$\binom{64}{8} = 4.426.165.368 \text{ configuracions}$$

2. Triar 8 posicions en files diferents:

$$8^8 = 16.777.216 \text{ configuracions}$$

3. Triar 8 posicions en files i columnes diferents:

$$8! = 40.320 \text{ configuracions}$$

Amb *backtracking* encara es pot millorar més.

Qüestió

Quin és el cost de qualsevol algorisme que resolgui el problema de les vuit reines?

Considerarem el problema generalitzat.

Problema de les *n* reines

Col·locar n reines en un tauler $n \times n$ sense que cap amenaci cap altra.

Les n reines

Qüestió

Quin és el cost de qualsevol algorisme que resolgui el problema de les vuit reines?

Considerarem el problema generalitzat.

Problema de les n reines

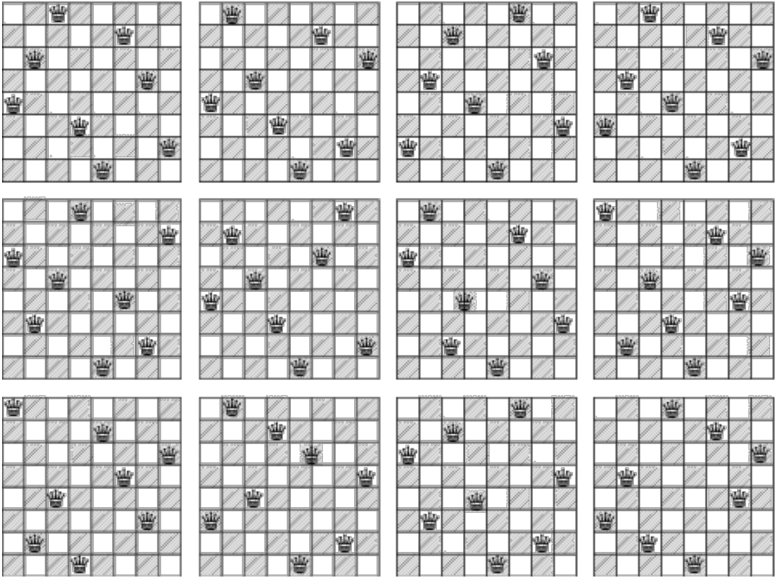
Col·locar n reines en un tauler $n \times n$ sense que cap amenaci cap altra.

Les *n* reines

Nombre de solucions no isomorfes (per rotació o reflexió) de les *n* reines per a $n \in \{1, \ldots, 10\}$:

n	solucions
1	1
2	0
3	0
4	1
5	2
6	1
7	6
8	12
9	46
10	92

Les 12 solucions no isomorfes per a $n = 8$



Les n reines

Exercici

Suposeu que hi ha una reina en la posició $(1, 2)$ (fila 1, columna 2) en un tauler 4×4 i mostreu tots els escacs amenaçats per la reina.

A partir d'aquí, deduïu regles per saber quines

- files
- columnes
- diagonals principals ($\searrow$)
- diagonals secundàries ($\nearrow$)

estan amenaçades.

Les n reines

Primera implementació:

- amb tornada enrere
- amplia la solució parcial sempre que sigui “legal” (que es pugui estendre a una solució completa)
- cost en cas pitjor: $\Theta(n^n)$

Les *n* reines

Implementarem la posició de les reines amb un vector

```
vector<int> T;
```

que indicarà que la reina de la fila i és a la columna $T[i]$.

Per saber si les reines de les files i i k comparteixen

- columna, comprovem si $T[i] = T[k]$
- diagonal principal ($\searrow$), comprovem si $T[i] - i = T[k] - k$
- diagonal secundària ($\nearrow$), comprovem si $T[i] + i = T[k] + k$

Les *n* reines

```
class NReines {

    int n;           // nombre de reines
    vector<int> T; // configuracio actual

    void recursiu(int i) {
        if (i == n) {
            escriure();
        } else {
            for (int j = 0; j < n; ++j) {
                T[i] = j;
                if (legal(i)) {
                    recursiu(i+1);
    }   }  }  }
```

Les *n* reines

```
bool legal(int i) {
// Indica si la config. amb les reines 0..i es legal
// sabent que la config. amb les reines 0..i-1 ho es

    for (int k = 0; k < i; ++k) {
        if (T[k] == T[i] or
            T[i]-i == T[k]-k or T[i]+i == T[k]+k) {
            return false;
    }   }
    return true;
}
```

Les *n* reines

```
  void escriure() {
      for (int i = 0; i < n; ++i) {
          for (int j = 0; j < n; ++j) {
              cout << (T[i] == j ? "O" : "*") ;
          }
          cout << endl;
      }
      cout << endl;
}
```

Les *n* reines

```
public:

  NReines(int n) {
      this->n = n;
      T = vector<int>(n);
      recursiu(0);
  }
};
```

Programa principal

```
int main() {
    int n = readint();
    NReines r(n);
}
```

Les *n* reines

Segona implementació:

- amb tornada enrere
- amplia la solució parcial sempre que sigui “legal”
  (que es pugui estendre a una solució completa)
- amb marcatges
- cost en cas pitjor: $\Theta(n^n)$

Les *n* reines

```
class NReines {
    int n; // nombre de reines
    vector<int> T;         // congiguracio actual
    vector<boolean> mc;   // marca de les columnes
    vector<boolean> md1; // marca de les diagonals 1
    vector<boolean> md2; // marca de les diagonals 2

    inline int diag1(int i, int j) {
        return n-j-1 + i;
    }

    inline int diag2(int i, int j) {
        return i+j;
    }
```

Les *n* reines

```
void recursiu(int i) {
    if (i == n) {
        escriure();
    } else {
        for (int j = 0; j < n; ++j) {
            if (not mc[j] and not md1[diag1(i, j)]
                                and not md2[diag2(i, j)]) {
                T[i] = j;
                mc[j] = true;
                md1[diag1(i, j)] = true;
                md2[diag2(i, j)] = true;
                recursiu(i+1);
                mc[j] = false;
                md1[diag1(i, j)] = false;
                md2[diag2(i, j)] = false;
            }
        }
    }
}
```

Les *n* reines

```
public:

NReines(int n) {
    this->n = n;
    T = vector<int>(n);
    mc = vector<boolean>(n, false);
    md1 = vector<boolean>(2*n-1, false);
    md2 = vector<boolean>(2*n-1, false);
    recursiu(0);
}
};
```

Programa principal

```
int main() {
    int n = readint();
    NReines r(n);
}
```

Les n reines

Tercera implementació:

- amb tornada enrere
- amplia la solució parcial sempre que sigui “legal” (que es pugui estendre a una solució completa)
- amb marcatges
- amb un booleà per finalitzar la cerca
- cost en cas pitjor: $\Theta(n^n)$

Les *n* reines

```
class NReines {
    int n; // nombre de reines
    vector<int> T; // configuracio actual
    bool trobat; // indica si ja s'ha trobat una solucio
    vector<boolean> mc; // marca de les columnes
    vector<boolean> md1; // marca de les diagonals 1
    vector<boolean> md2; // marca de les diagonals 2

    inline int diag1 (int i, int j) {
        return n-j-1 + i;
    }

    inline int diag2 (int i, int j) {
        return i+j;
    }
```

Les *n* reines

```
void recursiu(int i) {
    if (i == n) {
        trobat = true;
        escriure();
    } else {
        for (int j = 0; j < n and not trobat; ++j) {
            if (not mc[j] and not md1[diag1(i, j)]
                      and not md2[diag2(i, j)]) {
                T[i] = j;
                mc[j] = true;
                md1[diag1(i, j)] = true;
                md2[diag2(i, j)] = true;
                recursiu(i+1);
                mc[j] = false;
                md1[diag1(i, j)] = false;
                md2[diag2(i, j)] = false;
} } } }
```

Les *n* reines

```
public:

NReines(int n) {
    this->n = n;
    T = vector<int>(n);
    mc = vector<boolean>(n, false);
    md1 = vector<boolean>(2*n-1, false);
    md2 = vector<boolean>(2*n-1, false);
    trobat = false;
    recursiu(0);
} };
```

Programa principal

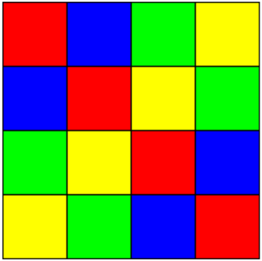
```
int main() {
    int n = readint();
    NReines r(n);
}
```

El quadrat llatí

Quadrat llatí

Un quadrat llatí és qualsevol quadrícula $n \times n$ omplerta amb n símbols diferents cadascun dels quals apareix un cop a cada fila i cada columna.

1	2	3
2	3	1
3	1	2



A	B
B	A

El quadrat llatí

Nombre de quadrats llatins $n \times n$ per a $n \in \{1, \ldots, 11\}$:

n	solucions
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

El quadrat llatí

Solució per tornada enrere amb marcatges.
Cost: $O(n^{n^2})$.

```
class QuadratLlati {
    int n; // nombre de files i columnes
    matrix<int> Q; // el quadrat llati
    matrix<boolean> F; // F[i][c]: c no apareix a la fila i
    matrix<boolean> C; // C[j][c]: c no apareix a la columna j
```

El quadrat llatí

```
void recursiu(int cas) {
    if (cas == n*n) {
        cout << Q << endl;
    } else {
        int i = cas/n;
        int j = cas%n;
        for (int c = 0; c < n; ++c) {
            if (F[i][c] and C[j][c]) {
                Q[i][j] = c;
                F[i][c] = C[j][c] = false;
                recursiu(cas+1);
                F[i][c] = C[j][c] = true;
} } } }
```

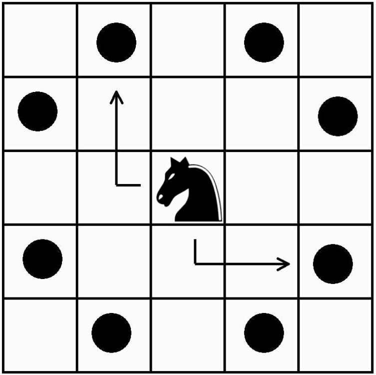
El quadrat llatí

```
public:
    QuadratLlati(int n) {
        this->n = n;
        Q = matrix<int>(n, n);
        F = matrix<boolean>(n, n, true);
        C = matrix<boolean>(n, n, true);
        recursiu(0);
    }
};

int main() {
    int n = readint();
    QuadratLlati ql(n);
}
```

Els salts de cavall

Salts del cavall (*knight's tour*)

Donat un tauler $n \times n$ i la posició d'una casella, trobar, si existeix, un recorregut del cavall d'escacs que visiti totes les caselles sense repeticions.



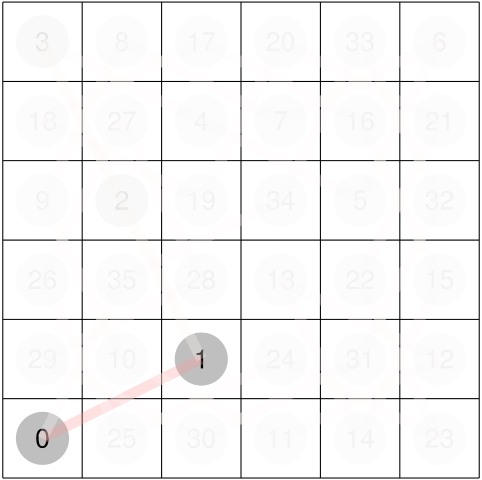
Els moviments del cavall

Els salts de cavall

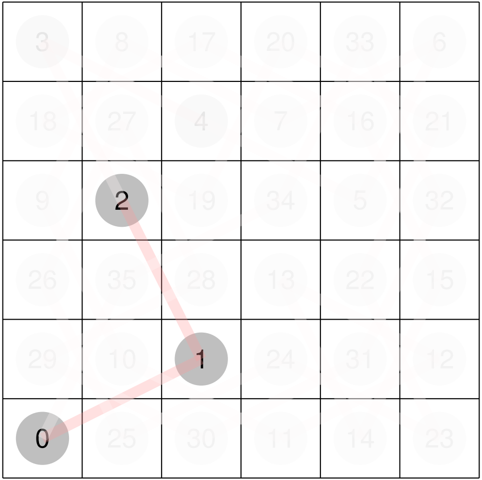
3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

Una solució tancada per al tauler 6×6

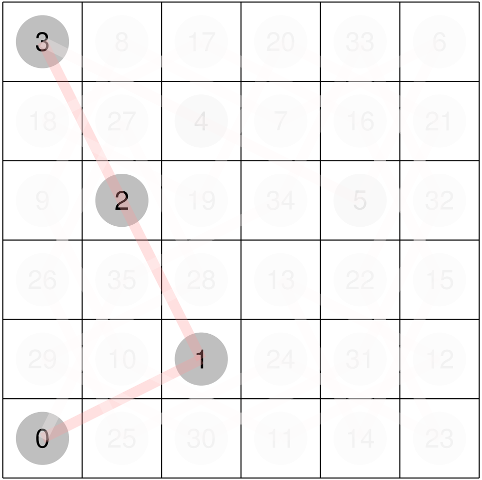
Els salts de cavall



Una solució tancada per al tauler 6×6

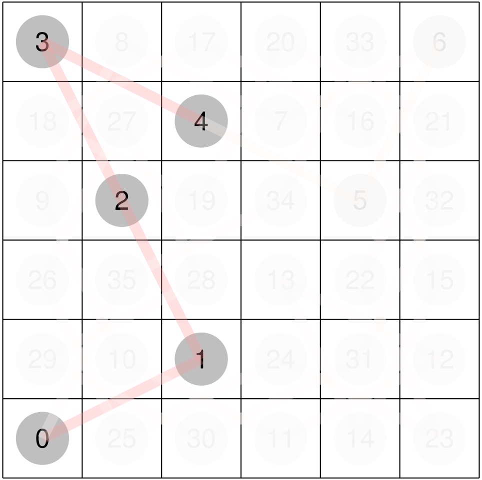


Una solució tancada per al tauler 6×6



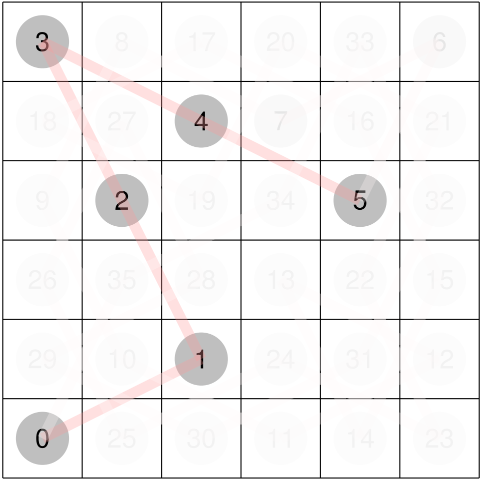
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

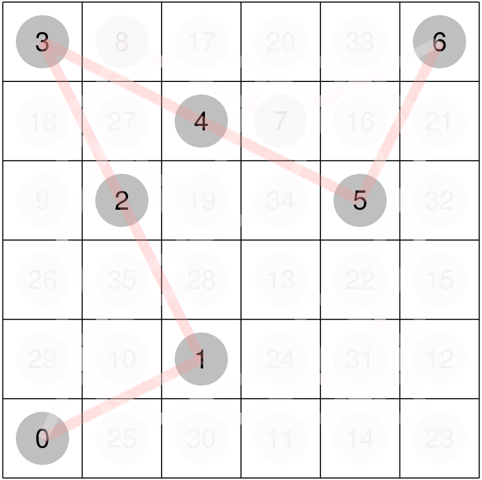


Una solució tancada per al tauler 6×6

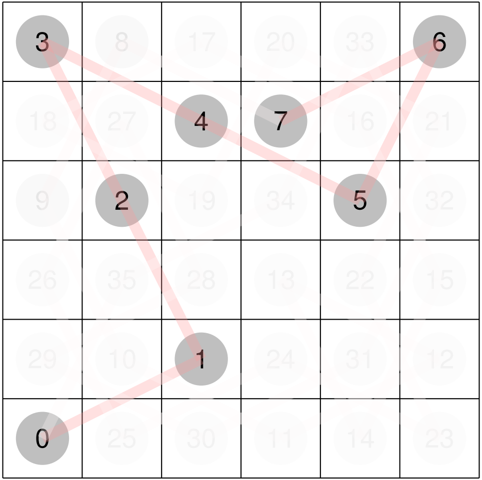
Els salts de cavall



Una solució tancada per al tauler 6×6

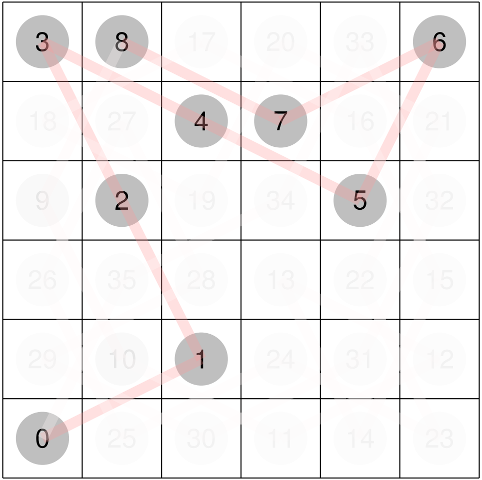


Una solució tancada per al tauler 6×6



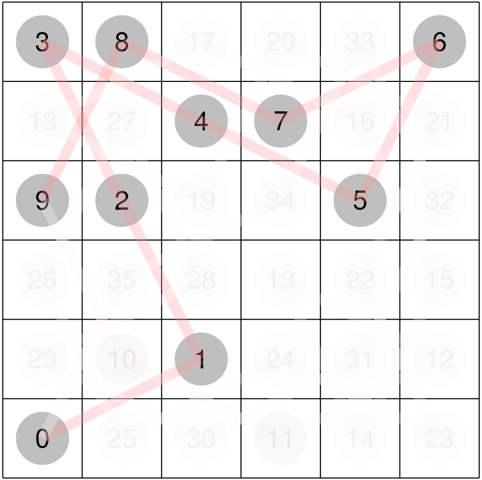
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



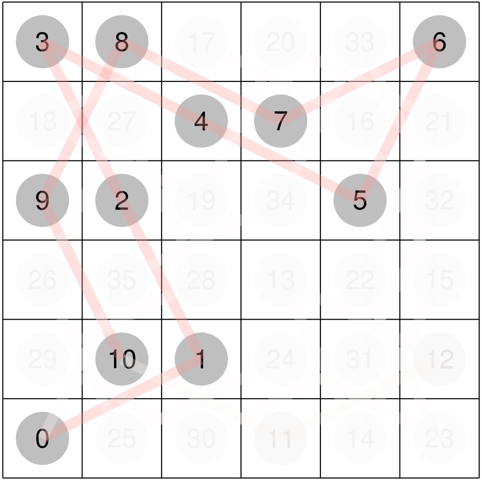
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

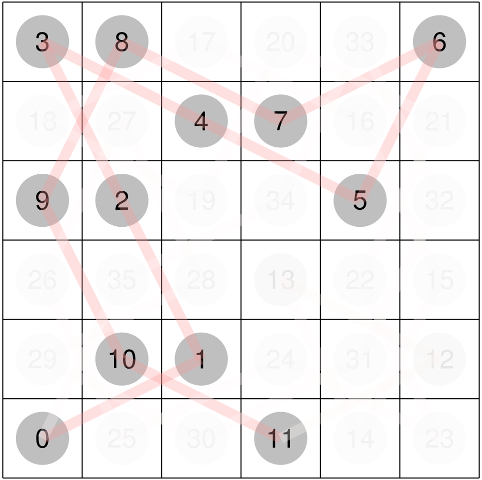


Una solució tancada per al tauler 6×6

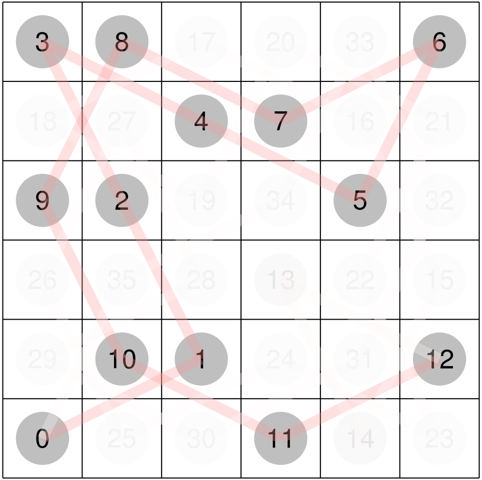
Els salts de cavall



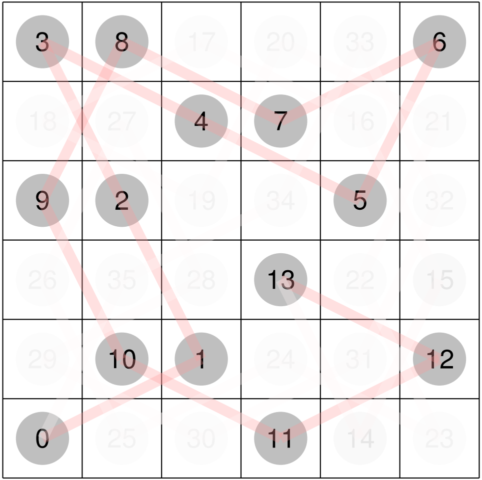
Una solució tancada per al tauler 6×6



Una solució tancada per al tauler 6×6

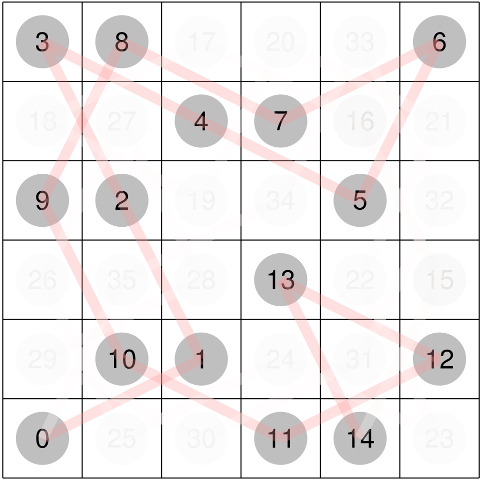


Una solució tancada per al tauler 6×6

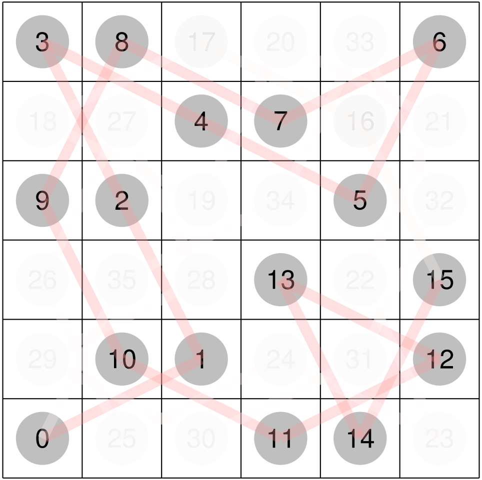


Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

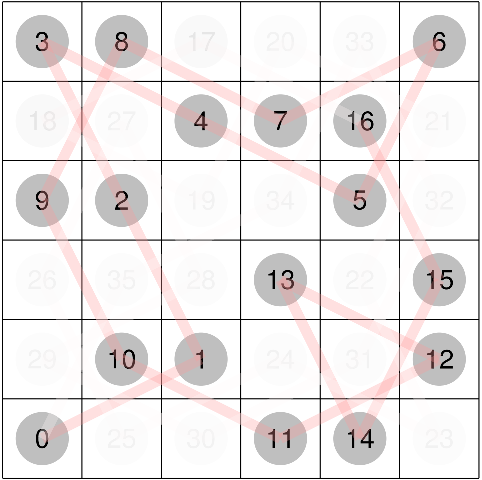


Una solució tancada per al tauler 6×6



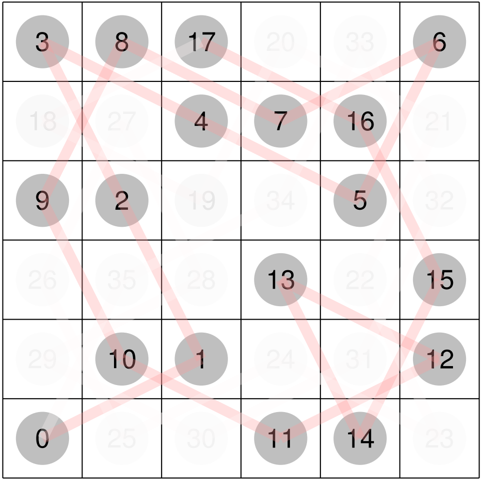
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

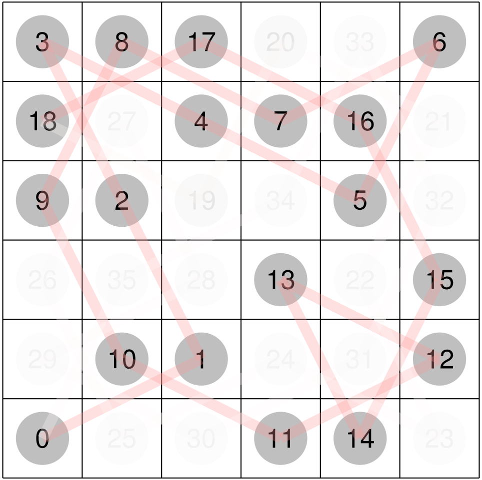


Una solució tancada per al tauler 6×6

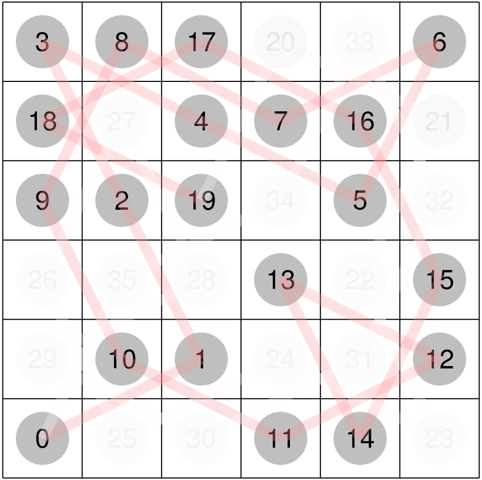
Els salts de cavall



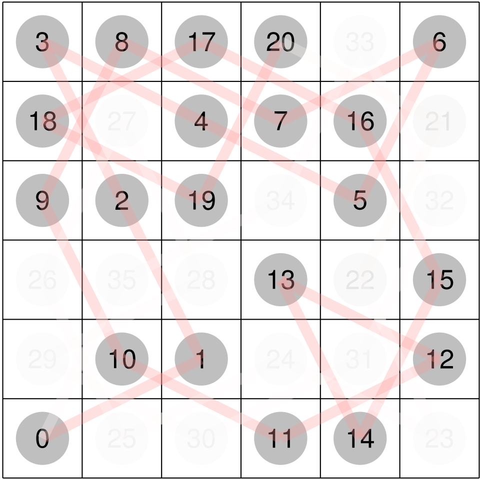
Una solució tancada per al tauler 6×6



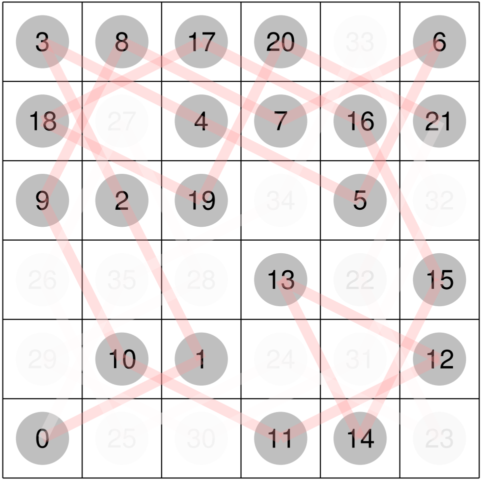
Una solució tancada per al tauler 6×6



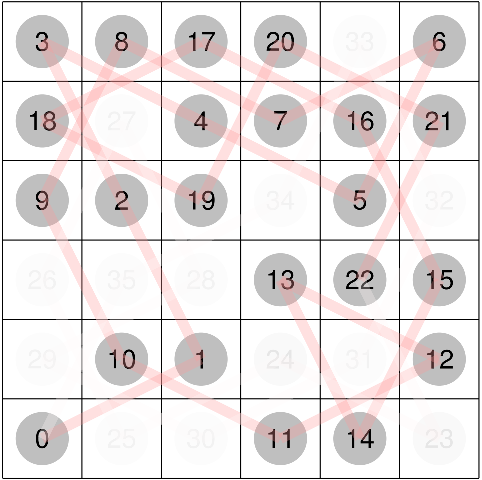
Una solució tancada per al tauler 6×6



Una solució tancada per al tauler 6×6

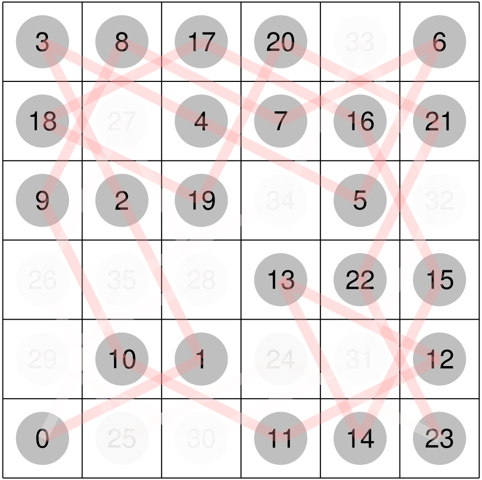


Una solució tancada per al tauler 6×6



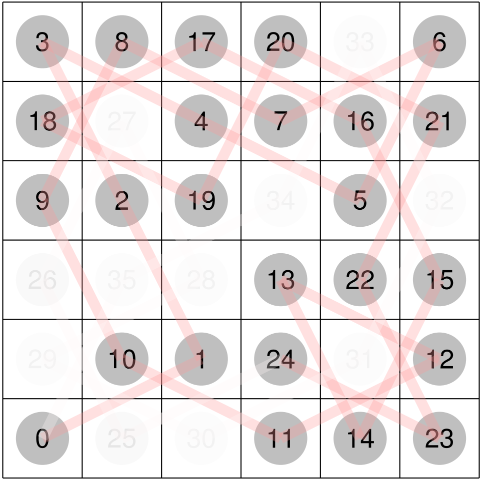
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



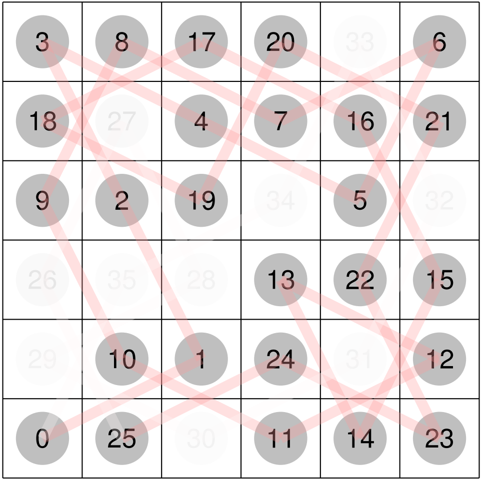
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



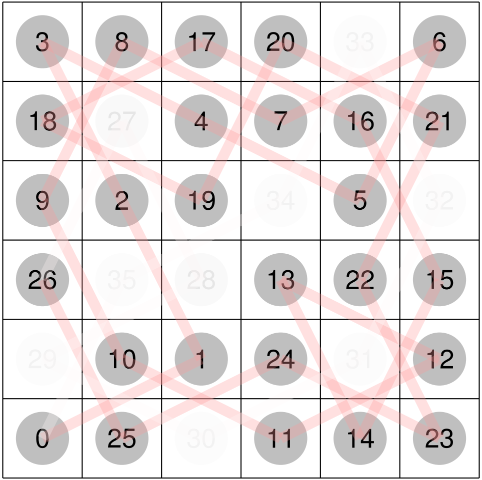
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



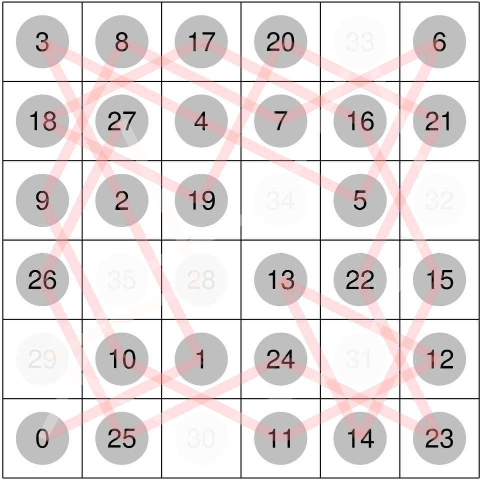
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



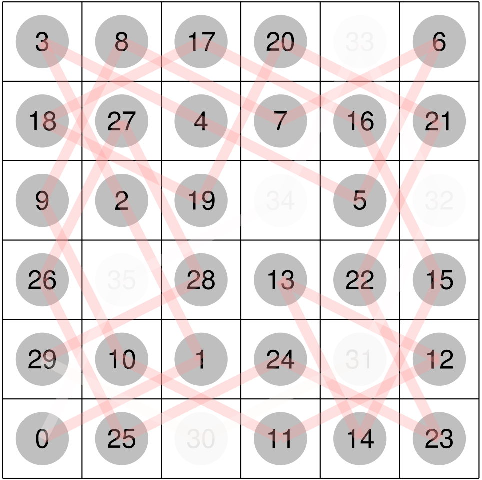
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

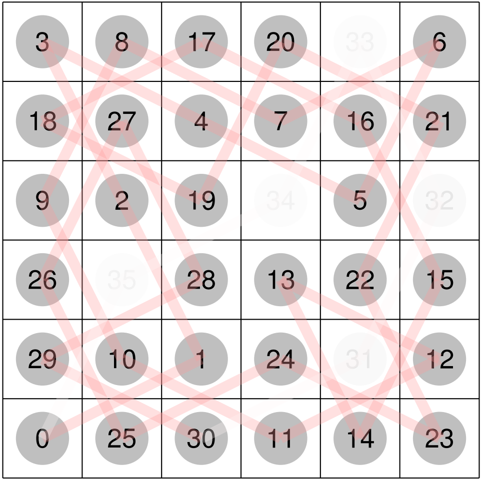
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

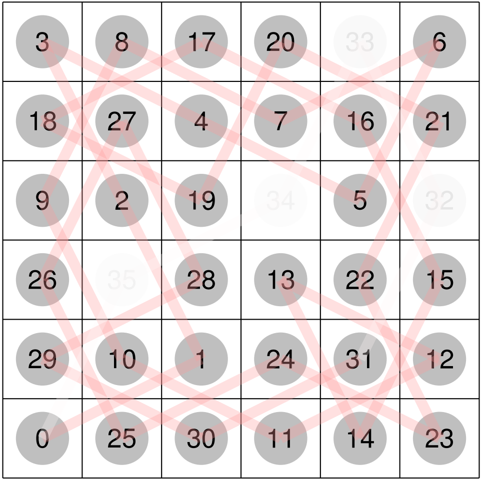


Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



Una solució tancada per al tauler 6×6



Una solució tancada per al tauler 6×6

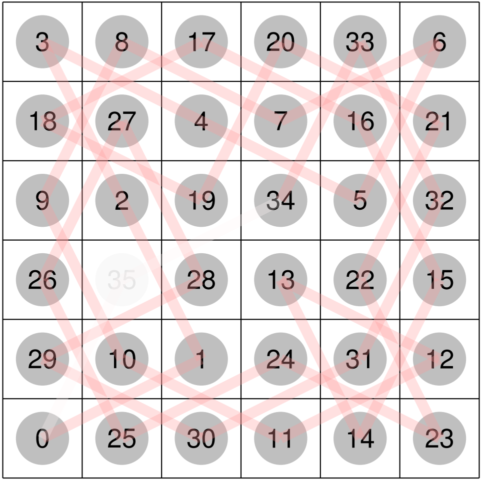
Els salts de cavall

3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

Una solució tancada per al tauler 6 $\times$ 6

3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

Una solució tancada per al tauler 6×6



Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

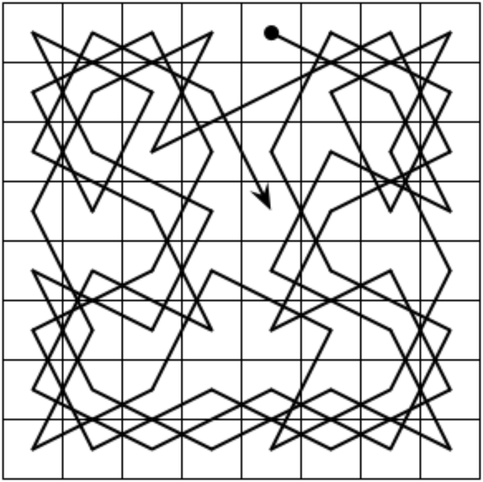
Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall

3	8	17	20	33	6
18	27	4	7	16	21
9	2	19	34	5	32
26	35	28	13	22	15
29	10	1	24	31	12
0	25	30	11	14	23

Una solució tancada per al tauler 6×6

Els salts de cavall



Una solució oberta per al tauler 8×8

Els salts de cavall

El problema dels salts del cavall té una llarga tradició matemàtica. Prové de l'Índia (s. IX d.C.) i el va treballar Euler (s. XVIII).

- Hi ha dues versions:
  - tancada: inici i final a un salt de cavall
  - oberta: inici i final en posicions arbitràries
- Hi ha:
  - 9.862 tours tancats no dirigits en un tauler 6×6
  - 13.267.364.410.532 tours tancats no dirigits en un tauler 8×8
- En la majoria de taulers, es poden trobar tours en temps polinòmic amb l'estratègia de dividir i vèncer

Els salts de cavall

Solució per tornada enrere. Cost $O(2^{3n^2})$.

Cada casella del tauler conté un enter:

- $i \geq 0$ si s'hi arriba en el salt i-èsim del cavall
- -1 si encara no s'ha considerat

```
class SaltsDeCavall {

    typedef matrix<int> matriu;

    int n; // nombre de files i columnes
    int ox,oy; // punt d'origen
    bool trobat; // ja s'ha trobat una solucio
    matriu M; // configuracio actual
    matriu S; // solucio (si trobat)
```

Els salts de cavall

```
inline void provar(int pas, int x, int y) {
    if (not trobat and x >= 0 and x < n
              and y >= 0 and y < n and M[x][y] == -1) {
        M[x][y] = pas+1;
        recursiu(pas+1, x, y);
        M[x][y] = -1;
}   }
```

```
void recursiu(int pas, int x, int y) {
    if (pas == n*n-1) {
        trobat = true;
        S = M;
    } else {
        provar(pas, x+2, y-1); provar(pas, x+2, y+1);
        provar(pas, x+1, y+2); provar(pas, x-1, y+2);
        provar(pas, x-2, y+1); provar(pas, x-2, y-1);
        provar(pas, x-1, y-2); provar(pas, x+1, y-2);
}   }
```

Els salts de cavall

```
public:
    SaltsDeCavall(int n, int ox, int oy) {
        this->n = n;
        this->ox = ox;
        this->oy = oy;
        trobat = false;
        M = matriu(n, n, -1);
        M[ox][oy] = 0;
        recursiu(0, ox, oy);
    }

    bool te_solucio() {
        return trobat;
    }

    matriu solucio() {
        return S;
    }
};
```

Els salts de cavall

Programa principal. Una solució en 6×6 es troba començant en $(0, 1)$.

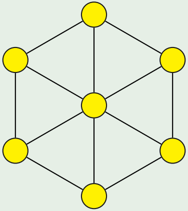
```
int main() {
    int n,ox,oy;
    cin >> n >> ox >> oy;
    SaltsDeCavall sc(n,ox,oy);
    if (sc.te_solucio()) cout << sc.solucio() << endl;
}
```

Graf hamiltonià

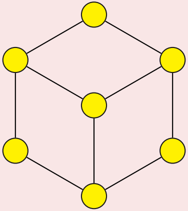
Definition

Un graf és hamiltonià si conté un cicle hamiltonià, és a dir, un cicle que visita cada vèrtex exactament un cop.

Graf hamiltonià

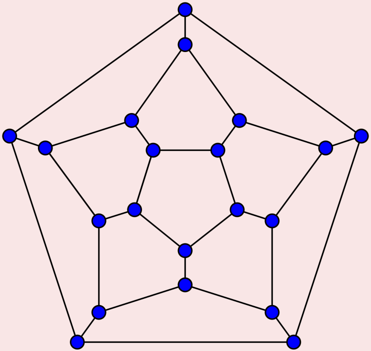


Graf no hamiltonià

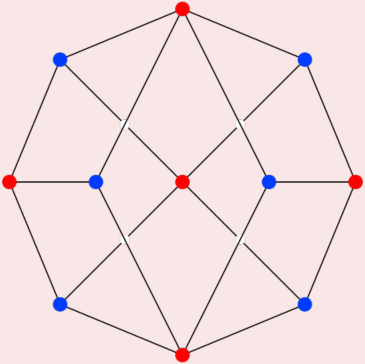


Exercise

Decidiu si els grafs següents són hamiltonians.



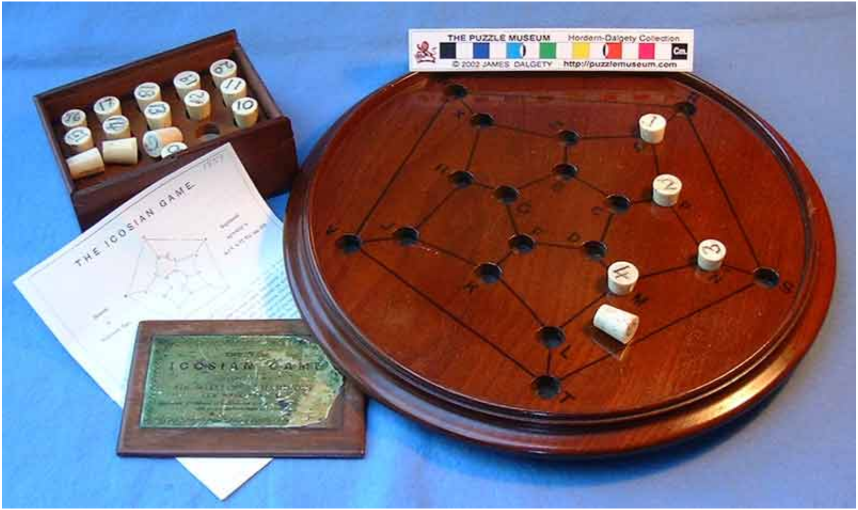
Graph del dodecaedre



Graf de Herschel

Graf hamiltonià

L'origen del terme *hamiltonià* aplicat a grafs i cicles és l'*Icosian game* inventat pel matemàtic William R. Hamilton el 1857.



Graf hamiltonià

Problema del Graf Hamiltonià

Donat un graf, determinar si és hamiltonià.

Backtracking solution

La nostra solució assumeix:

- que el graf donat és connex
- que les llistes d'adjacència estan ordenades

Class HamintonianGraph

```
typedef vector< vector<int> > Graph;
class GrafHamiltonia {
   Graph G;        // el graf
   int n;          // nombre de vertexs
   bool trobat;    // indica si s'ha trobat un cicle
   vector<int> s;  // seguent de cada vertex (-1 si no usat)
   vector<int> S;  // solucio (si trobada)
```

Graf hamiltonià

Problema del Graf Hamiltonià

Donat un graf, determinar si és hamiltonià.

Backtracking solution

La nostra solució assumeix:

- que el graf donat és connex
- que les llistes d'adjacència estan ordenades

Class HamintonianGraph

```
typedef vector< vector<int> > Graph;
class GrafHamiltonia {
   Graph G;          // el graf
   int n;            // nombre de vertexs
   bool trobat;      // indica si s'ha trobat un cicle
   vector<int> s;    // seguent de cada vertex (-1 si no usat)
   vector<int> S;    // solucio (si trobada)
```

Graf hamiltonià

Problema del Graf Hamiltonià

Donat un graf, determinar si és hamiltonià.

Backtracking solution

La nostra solució assumeix:

- que el graf donat és connex
- que les llistes d'adjacència estan ordenades

Class HamintonianGraph

```
typedef vector< vector<int> > Graph;
class GrafHamiltonia {
   Graph G;          // el graf
   int n;            // nombre de vertexs
   bool trobat;      // indica si s'ha trobat un cicle
   vector<int> s; // seguent de cada vertex (-1 si no usat)
   vector<int> S; // solucio (si trobada)
```

Graf hamiltonià

```
void recursiu(int v, int t) {
    // v = darrer vertex del cami
    // t = nombre de vertexs del cami
    if (t == n) {
        // comprova que es pot tancar el cicle
        if (G[v][0] == 0) {
            s[v] = 0;
            trobat = true;
            S = s;
            s[v] = -1;
        }
    } else {
        for (int u : G[v]) {
            if (s[u] == -1) {
                s[v] = u;
                recursiu(u, t+1);
                s[v] = -1;
                if (trobat) return;
    }}}}
```

Graf hamiltonià

```
public:

    GrafHamiltonia(Graph G) {
        this->G = G;
        n = G.size();
        s = vector<int>(n, -1);
        trobat = false;
        recursiu(0, 1);
    }

    bool te_solucio() {
        return trobat;
    }

    vector<int> solucio() {
        return S;
    }
};
```

Main program

La funció `llegir_graf()` llegeix i retorna el graf.
El programa principal llegeix el graf, crea el solucionador i l'executa.

```
int main() {
    GrafHamiltonia ham(llegir_graf());
    if (ham.te_solucio()) {
        vector<int> s = ham.solucio();
        cout << 0 << "␣";
        for (int u = s[0]; u != 0; u = s[u]) {
            cout << u << "␣";
        }
        cout << endl;
    }
}
```

Problema del Viatjant (TSP, de l'anglès *Traveling Salesman Problem*)

Un viatjant visita els clients de n ciutats diferents. L'objectiu del viatjant és sortir de la seva ciutat, visitar exactament un cop cadascuna de les altres i tornar al punt de partida, tot minimitzant la distància total del viatge.

Distància mètrica

Donats n punts sobre el pla i una mesura de distància d on $d_{ij} \geq 0$ representa la distància de i a j, diem que la distància és mètrica si:

- és *simètrica*, és a dir, per a tot i, j, $d_{ij} = d_{ji}$ i
- compleix la *desigualtat triangular*, és a dir, per a tot i, j, k, $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$

Problema del Viatjant Mètric (*Metric TSP*)

Resoldre el problema del viatjant quan la distància entre les ciutats és mètrica.

Problema del viatjant

Problema del Viatjant (TSP, de l'anglès *Traveling Salesman Problem*)

Un viatjant visita els clients de n ciutats diferents. L'objectiu del viatjant és sortir de la seva ciutat, visitar exactament un cop cadascuna de les altres i tornar al punt de partida, tot minimitzant la distància total del viatge.

Distància mètrica

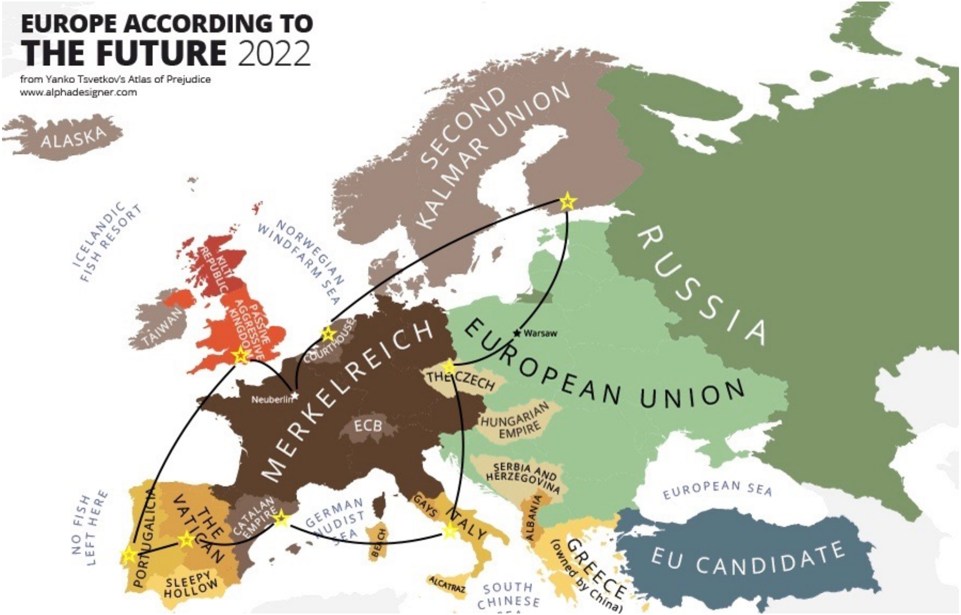
Donats n punts sobre el pla i una mesura de distància d on $d_{ij} \geq 0$ representa la distància de i a j, diem que la distància és mètrica si:

- és *simètrica*, és a dir, per a tot i, j, $d_{ij} = d_{ji}$ i
- compleix la *desigualtat triangular*, és a dir, per a tot i, j, k, $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$

Problema del Viatjant Mètric (*Metric TSP*)

Resoldre el problema del viatjant quan la distància entre les ciutats és mètrica.

Problema del viatjant


EUROPE ACCORDING TO
THE FUTURE 2022
from Yanko Tsvetkov's Atlas of Prejudice
www.alphadesigner.com
ALASKA
ICELANDIC FISH RESORT
NORWEGIAN WINDFARM SEA
SECOND KALMAR UNION
RUSSIA
KILT REPUBLIC
TAIWAN
PASSIVE AGGRESSIVE KINGDOM
COURTHOUSE
MERKELREICH
Neuberlin
ECB
Warsaw
EUROPEAN UNION
THE CZECH
HUNGARIAN EMPIRE
SERBIA AND HERZEGOVINA
ALBANIA
EUROPEAN SEA
EU CANDIDATE
GREECE (owned by China)
NO FISH LEFT HERE
PORTUGALICIA
THE VATICAN
CATALAN EMPIRE
GERMAN NUDIST SEA
BEACH
GAYS
ITALY
SLEEPY HOLLOW
ALCATRAZ
SOUTH CHINESE SEA

Problema del viatjant

Aproximació per al Viatjant Mètric

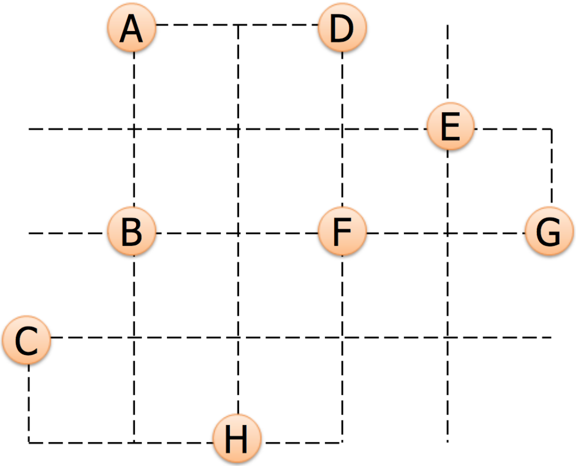
És fàcil produir en temps polinòmic una solució amb cost el doble de l'òptim en el cas pitjor:

1. trobar un arbre d'expansió mínim
2. fer un recorregut de l'arbre
3. obtenir un cicle hamiltonià aplicant dreceres

Mitjançant l'algorisme de Christofides es pot obtenir una solució el 50% més llarga que l'òptima en el cas pitjor. Els algorismes d'aquesta mena (fora del temari del curs) se'n diuen *d'aproximació*.

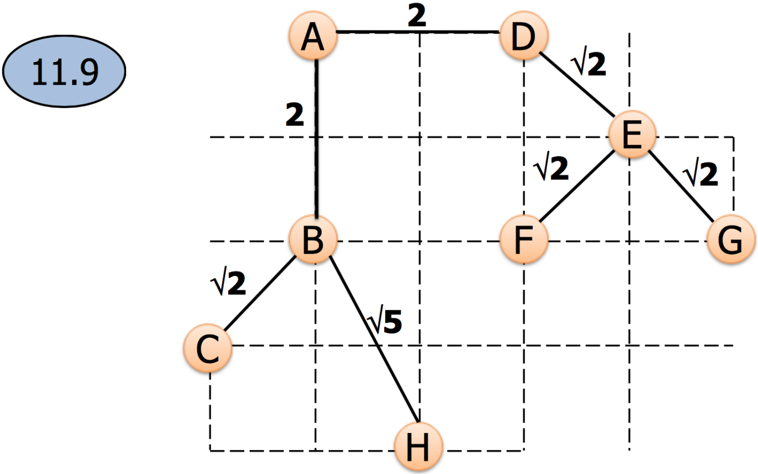
Algorithm example

Graph with N=8 nodes



Algorithm example

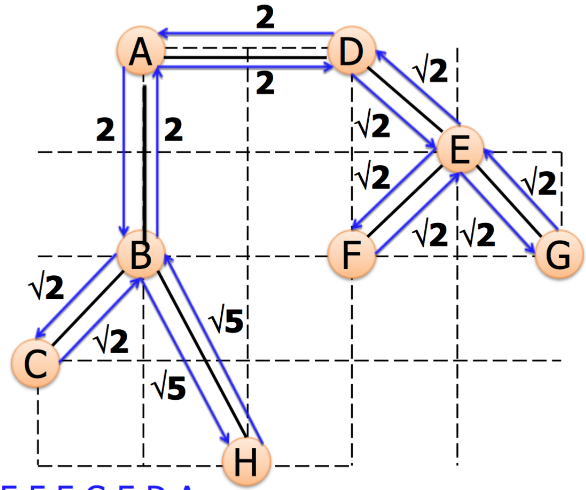
Minimum spanning tree



Algorithm example

Tree traversal

23.8

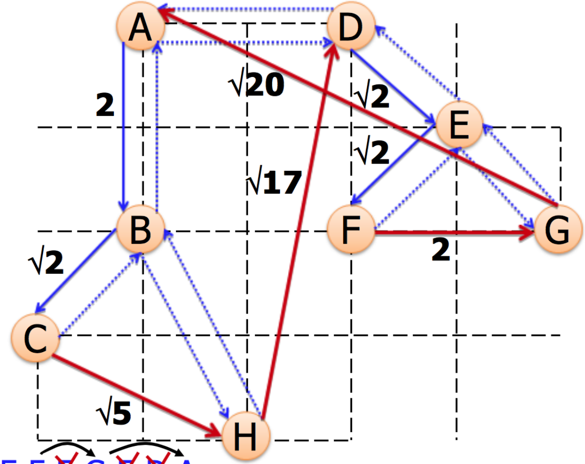


A-B-C-B-H-B-A-D-E-F-E-G-E-D-A

Algorithm example

Shortcuts

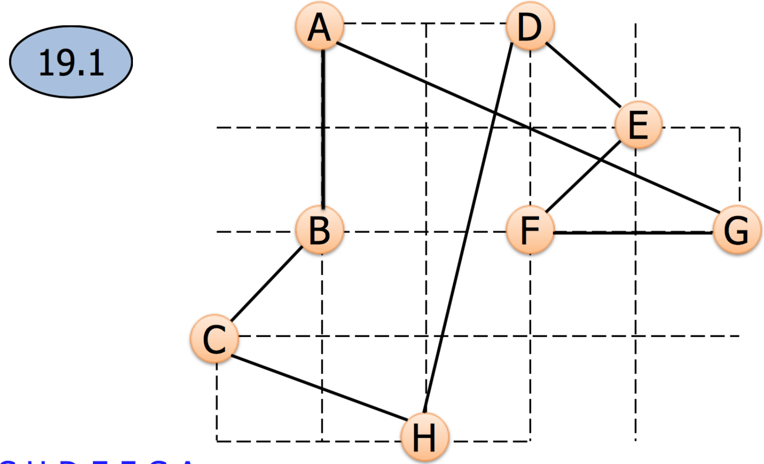
19.1



A-B-C-~~B~~-H-~~B~~-~~A~~-D-E-F-~~E~~-G-~~E~~-~~D~~-A

Algorithm example

Final result



A-B-C-H-D-E-F-G-A

Cost de l'aproximació

1. trobar un arbre d'expansió mínim S
2. fer un recorregut de l'arbre
3. obtenir un cicle hamiltonià T aplicant dreceres

Sigui T^* un recorregut òptim del problema i e una aresta arbitrària de T^*. Llavors,

$$d(T) \leq 2d(S) \leq 2d(T^* - e) \leq 2d(T^*).$$

Problema del viatjant

Qüestió

Trobeu una ruta més curta per a l'exemple anterior i comproveu que la solució de l'algorisme té un cost màxim del doble que la vostra.

Problema del viatjant

Solució per tornada enrere

- troba una ruta òptima
- amb cost exponencial

```
typedef matrix<double> matriu_distancies;

class TSP {
  matriu_distancies M; // matriu de distancies
  int n;               // nombre de ciutats
  vector<int> s; // seguent de cada ciutat (-1 si no usat)
  vector<int> sol_opt; // millor solucio fins ara
  double cost_opt;     // cost de la millor solucio fins ara
```

Problema del viatjant

```
void recursiu(int v, int t, double c) {
    // v = darrer vertex del cami
    // t = nombre de vertexs del cami
    // c = cost fins ara
    if (t == n) {
        c += M[v][0];
        if (c < cost_opt) {
            cost_opt = c;
            sol_opt = s;
            sol_opt[v] = 0;
        }
    } else {
        for (int u = 0; u < n; ++u) {
            if (u != v and s[u] == -1) {
                if (c + M[v][u] < cost_opt) {
                    s[v] = u;
                    recursiu(u, t+1, c+M[v][u]);
                    s[v] = -1;
} } } } }
```

Problema del viatjant

```
public:

  TSP(matriu_distancies M) {
      this->M = M;
      n = M.rows();
      s = vector<int>(n, -1);
      sol_opt = vector<int>(n);
      cost_opt = infinity;
      recursiu(0, 1, 0);
  }
```

Programa principal

- llegeix `n`
- crea una matriu de distàncies `M` amb ciutats situades a l'atzar
- executa `recursiu` (definint `TSP tsp(M)`)
- escriu `cost_opt` (el cost de la solució òptima)

Problema del viatjant

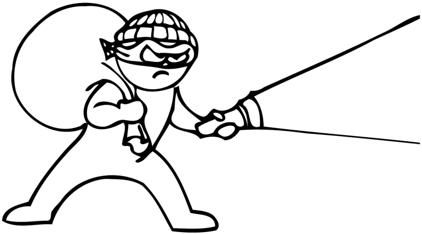
```
public:

  TSP(matriu_distancies M) {
      this->M = M;
      n = M.rows();
      s = vector<int>(n, -1);
      sol_opt = vector<int>(n);
      cost_opt = infinity;
      recursiu(0, 1, 0);
  }
```

Programa principal

- llegeix `n`
- crea una matriu de distàncies `M` amb ciutats situades a l'atzar
- executa `recursiu` (definint `TSP tsp(M)`)
- escriu `cost_opt` (el cost de la solució òptima)

La motxilla

Suposem que un lladre vol entrar en una botiga i carregar al seu sac una combinació d'objectes amb el màxim valor total.

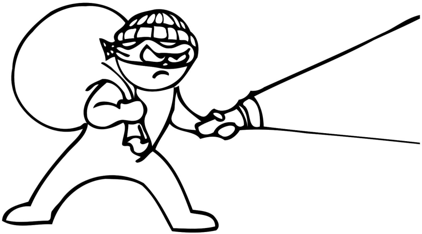


Com pot trobar la millor combinació fent ús de l'algorísmia?

1. fent la llista dels pesos i valors dels objectes i sabent quant pot carregar
2. definint bé el problema
3. escrivint un algorisme que maximitzi el guany

La motxilla

Suposem que un lladre vol entrar en una botiga i carregar al seu sac una combinació d'objectes amb el màxim valor total.



Com pot trobar la millor combinació fent ús de l'algorísmia?

1. fent la llista dels pesos i valors dels objectes i sabent quant pot carregar
2. definint bé el problema
3. escrivint un algorisme que maximitzi el guany

La motxilla

El segon pas és definir bé el problema.

Problema de la motxilla (entera)

Donada una motxilla que pot carregar un pes C i n objectes amb

- pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- i valors $v_1, v_2, \ldots, v_n$

trobar una selecció $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dels objectes

- amb el màxim valor $\sum_{i \in S} v_i$
- que no superi la capacitat de la motxilla:

$$\sum_{i \in S} p_i \leq C$$

La motxilla

Tercer pas: escriure un primer algorisme en C++.

```
class Motxilla {
  int n;                   // nombre d'objectes
  vector<double> p;        // pes de cada objecte
  vector<double> v;        // valor de cada objecte
  double C;                // capacitat de la motxilla
  vector<boolean> s;       // solucio activa
  vector<boolean> sol;     // millor solucio provisional
  double millor;           // cost millor solucio provisional
```

La motxilla

```
void recursiu (int i, double val, double pes) {
    // i = objecte que toca tractar
    // val = valor acumulat
    // pes = pes acumulat
    if (i == n) {
        if (val > millor) {
            millor = val;
            sol = s;
        }
    } else {
        // 1a possibilitat: intentar agafar l'objecte i
        if (pes+p[i] <= C) {
            s[i] = true;
            recursiu(i+1, val+v[i], pes+p[i]);
        }
        // 2a possibilitat: no agafar l'objecte i
        s[i] = false;
        recursiu(i+1, val, pes);
}   }
```

La motxilla

```
public:

  Motxilla (int n, vector<double> p, vector<double> v,
               double C) {
      this->n = n;
      this->p = p;
      this->v = v;
      this->C = C;
      s = sol = vector<boolean>(n);
      millor = 0;
      recursiu(0, 0, 0);
  }

  vector<boolean> solucio () {
      return sol; }

  double cost () {
      return millor; }
};
```

La motxilla

El programa principal llegeix el nombre d'objectes, s'inventa els pesos, els valors i la capacitat, crea el solucionador, l'executa i n'escriu la solució.

```
int main() {
    int n = readint();
    vector<double> p = randvector(n);
    vector<double> v = randvector(n);
    double C = 0.4*n;
    cout << v << endl << p << endl << C << endl;

    Motxilla motx(n, p, v, C);
    cout << motx.cost() << endl;
    cout << motx.solucio() << endl;
}
```

La motxilla

Quart pas: millorar l'algorisme.

Solució amb fita superior. Aquest cop es té en compte la contribució màxima que podrien arribar a tenir tots els objectes a partir de l'$i + 1$ (encara que no càpiguen a la motxilla).

Si fins i tot agafant-los tots no es pogués superar el millor cost trobat fins ara, no cal seguir per aquell camí.

```
class Motxilla {
  int n;                 // nombre d'objectes
  vector<double> p;      // pes de cada objecte
  vector<double> v;      // valor de cada objecte
  double C;              // capacitat de la motxilla
  vector<boolean> s;     // solucio activa
  vector<boolean> sol;// millor solucio provisional
  double millor;         // cost millor solucio provisional
  vector<double> sv;     // suma de valors per fita inferior
```

La motxilla

```
void recursiu (int i, double val, double pes) {
    // i = objecte que toca tractar
    // val = valor acumulat,  pes = pes acumulat
    if (i == n) {
        if (val > millor) {
            millor = val;
            sol = s;
        }
    } else {
        // 1a possibilitat: intentar agafar l'objecte i
        if (pes+p[i] <= C and val+sv[i] > millor) {
            s[i] = true;
            recursiu(i+1, val+v[i], pes+p[i]);
        }
        // 2a possibilitat: no agafar l'objecte i
        if (val+sv[i+1] > millor) {
            s[i] = false;
            recursiu(i+1, val, pes);
}   }   }
```

La motxilla

Són com abans: `solucio`, `cost`, `main`.

```
public:
  Motxilla (int n, vector<double> p, vector<double> v,
                 double C) {
      this->n = n;
      this->p = p;
      this->v = v;
      this->C = C;
      s = sol = vector<boolean>(n);
      millor = 0;
      sv = vector<double>(n+1);
      sv[n] = 0;
      for (int i = n-1; i >= 0; --i) {
          sv[i] = sv[i+1] + v[i];
      }
      recursiu(0, 0, 0);
  }
};
```

La motxilla

Problema de la motxilla fraccional

Donada una motxilla que pot carregar un pes C i n productes amb

- pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- i valors $v_1, v_2, \ldots, v_n$

trobar fraccions $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ dels productes

- amb màxim valor $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$
- que no superin la capacitat de la motxilla:

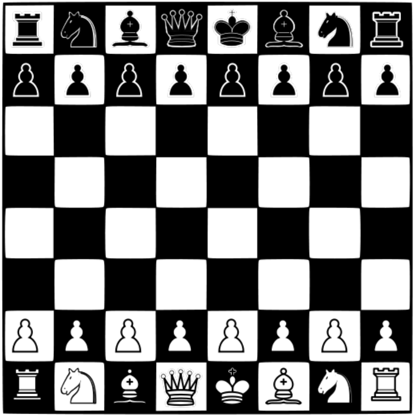
$$\sum_{i \in S} x_i p_i \leq C$$

Exercici

1. Trobeu un algorisme polinòmic per al problema anterior
2. Adapteu l'algorisme a la motxilla entera i digueu si és correcte

El principi minimax

En un joc com els escacs, no es pot pretendre fer una anàlisi exhaustiva de l'arbre de configuracions.



Es calculen 318.979.564.000 maneres de fer els 4 primers moviments

El principi minimax

L'heurística minimax realitza una cerca parcial amb la qual no pot assegurar una estratègia guanyadora però...

- troba una de les millors jugades
- imitant el mètode dels jugadors humans

El principi minimax

Suposem que tenim les blanques i que volem jugar una bona partida.

El primer pas és definir una funció estàtica d'avaluació $\mathrm{AVALUA}(u)$ que assigni un valor a cada situació u.

- Ha de donar valors més alts com més favorable és u per a les blanques
  - valors propers a 0 quan no hi ha avantatge definit
  - grans valors negatius si les negres tenen avantatge
- Ha de tenir en compte factors com
  - el nombre i tipus de peces blanques i negres que queden
  - qui amenaça més peces contràries
  - qui controla el centre
  - la llibertat de moviment
- Al final de la partida, ha de donar
  - $+\infty$ si hi ha escac i mat a les negres
  - 0 si acaba en taules
  - $-\infty$ si hi ha escac i mat a les blanques

El principi minimax

Exemple de funció d'avaluació AVALUA

- si hi ha escac i mat a les negres: $+\infty$
- si hi ha escac i mat a les blanques: $-\infty$
- si no, partint de 0 punts sumem
  - +1 (-1) punt per cada peó blanc (negre)
  - $+3\frac{1}{4}$ ($-3\frac{1}{4}$) punts per cada alfil o cavall blanc (negre)
  - +5 (-5) punts per cada torre blanca (negra)
  - +10 (-10) punts per la reina blanca (negra)

El principi minimax

Si la funció AVALUA(u) fos perfecta, només caldria calcular-la per cada moviment possible de les blanques (en 1 torn).

El millor moviment seria el que portés a una situació v on AVALUA(v) sigui màxim entre les posicions v successores de u.

MINIMAX(u)
    $val \leftarrow -\infty$
    per a cada posició w successora de u **fer**
        si AVALUA(w) $\geq val$ **llavors**
            $val \leftarrow$ AVALUA(w)
            $v \leftarrow w$
    retornar v

Aquesta funció sacrificaria la reina per capturar un peó!

El principi minimax

Si la funció AVALUA(u) fos perfecta, només caldria calcular-la per cada moviment possible de les blanques (en 1 torn).

El millor moviment seria el que portés a una situació v on AVALUA(v) sigui màxim entre les posicions v successores de u.

MINIMAX(u)
    val $\leftarrow -\infty$
    per a cada posició w successora de u **fer**
        si AVALUA(w) $\geq$ *val* **llavors**
            val $\leftarrow$ AVALUA(w)
            $v \leftarrow w$
    retornar v

Aquesta funció sacrificaria la reina per capturar un peó!

El principi minimax

Preveurem la resposta de les negres: suposarem que les negres voldran minimitzar AVALUA.

MINIMAX(u)
    $val \leftarrow -\infty$
    per a cada posició w successora de u **fer**
        si w no té successor **llavors**
            $valw \leftarrow$ AVALUA(w)
        si no
            $valw \leftarrow \min\{$ AVALUA(x) $\mid x$ és successor de w $\}$
        si $valw \geq val$ **llavors**
            $val \leftarrow valw$
            $v \leftarrow w$
    retornar v

Aquesta funció mai no considerarà perdre una peça, tot i que sigui rendible.

El principi minimax

Preveurem la resposta de les negres: suposarem que les negres voldran minimitzar AVALUA.

MINIMAX(u)
    $val \leftarrow -\infty$
    per a cada posició w successora de u **fer**
        si w no té successor **llavors**
            $valw \leftarrow$ AVALUA(w)
        si no
            $valw \leftarrow \min\{$ AVALUA(x) $\mid x$ és successor de $w\ \}$
        si $valw \geq val$ **llavors**
            $val \leftarrow valw$
            $v \leftarrow w$
    retornar v

Aquesta funció mai no considerarà perdre una peça, tot i que sigui rendible.

El principi minimax

És preferible examinar més jugades per avançat! Examinarem n jugades.

MINIMAX(u, n)
    $val \leftarrow -\infty$
    per a cada posició w successora de u **fer**
        $B \leftarrow$ NEGRES(w, n)
        si $B \geq val$ **llavors**
            $val \leftarrow B$
            $v \leftarrow w$
    retornar v

El principi minimax

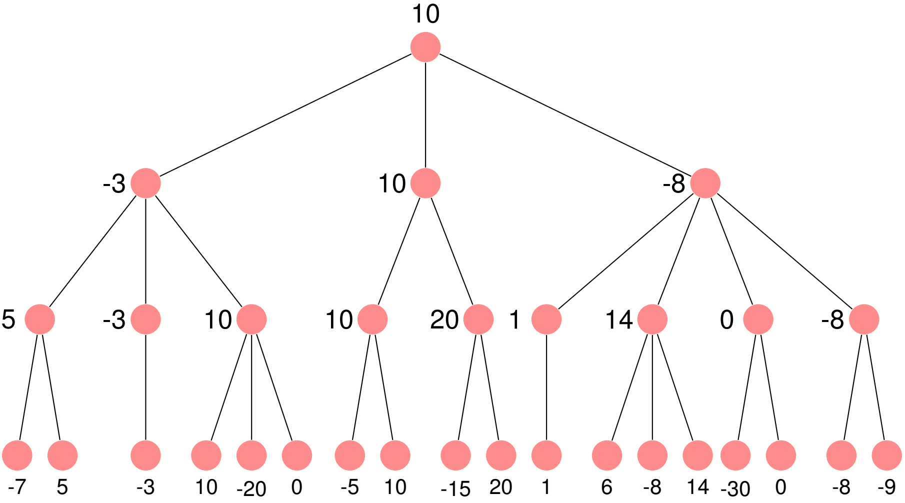
- Les negres intenten minimitzar el guany de les blanques:

  NEGRES(w, n)
      si $n = 0$ **o** w no té successor **llavors**
          retornar AVALUA(w)
      si no
          retornar $\min\{$ BLANQUES$(x, n-1) \mid x$ és successor de $w\}$

- Les blanques intenten maximitzar el seu guany:

  BLANQUES(w, n)
      si $n = 0$ **o** w no té successor **llavors**
          retornar AVALUA(w)
      si no
          retornar $\max\{$ NEGRES$(x, n-1) \mid x$ és successor de $w\}$

El principi minimax



Arbre de configuracions