Tema 7. Complexitat

Estructures de Dades i Algorismes

FIB

Transparències d' Antoni Lozano
(amb edicions menors d'altres professors)

Q1 2019–2020

Classes

- L' anàlisi d'algorismes estudia la quantitat de recursos que necessita un algorisme per resoldre un problema.
- La teoria de la complexitat considera els algorismes possibles que resolen un mateix problema.
- Mentre l'anàlisi d'algorismes se centra en els algorismes, la teoria de la complexitat s'interessa pels problemes.
- Veurem les eines més bàsiques per classificar els problemes segons la seva complexitat.

Problemes decisionals

Per classificar els problemes, considerarem les seves versions decisionals.

Definició

Un problema decisional és un problema en el qual la sortida és sí o no

Equivalentment, un problema és decisional quan s'ha de determinar si l'entrada (també anomenada instància) satisfà o no una certa propietat.

Problemes decisionals

Molts problemes vistos fins ara són decisionals:

- **connectivitat**: donat un graf, decidir si és connex.
- **3-colorabilitat**: donat un graf, decidir si és 3-colorable.
- **accessibilitat**: donat un graf $G = (V, E)$ i dos vèrtexs $i, j \in V$, decidir si hi ha un camí a G entre i i j.

o es poden transformar en decisionals:

- **camí curt**: donat un graf $G = (V, E)$, dos vèrtexs $i, j \in V$ i un natural k, decidir si hi ha un camí a G entre i i j de longitud màxima k.

Problemes decisionals

Certes versions decisionals d'alguns problemes no tenen gaire sentit.

Problema de les n-reines decisional (1a versió)

Donat un natural n, decidir si es poden col·locar n reines en un tauler $n \times n$ sense que cap n'amenaci cap altra.

Se sap que hi ha solucions per a tot $n \neq 2, 3$.
Per tant, l'algorisme següent decideix el problema en temps $\Theta(1)$.

```
REINES(n)
    si n = 2 o n = 3 llavors
        retornar FALS
    si no
        retornar CERT
```

Problemes decisionals

El que ens interessa és trobar una solució, no saber si existeix.

Problema de les n-reines decisional (2a versió)

Donat un natural n i k valors $r_1, \ldots r_k$, amb $k \leq n$, decidir si es poden col·locar n reines en un tauler $n \times n$ sense que cap n'amenaci cap altra i de manera que per a tot i tal que $1 \leq i \leq k$, la reina de la fila i ocupi la columna r_i.

Aquesta versió, tot i ser decisional, permet trobar una solució amb

$$n + (n-1) + (n-2) \cdots + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

execucions de l'algorisme que el resol.

Problemes decisionals

Altres problemes decisionals:

1. **primalitat**: donat un natural, decidir si és primer.
2. **viatjant de comerç**: donades n ciutats, les distàncies entre elles i un nombre de kilòmetres k, decidir si hi ha un recorregut d'un màxim de k kilòmetres que passi per totes i torni a l'origen.
3. **aturada fitada:** donats un natural k, un programa P i una entrada pel programa e, determinar si quan executem P amb entrada e, el programa s'atura en com a molt k passos.

Problemes decisionals

Un problema decisional es representa formalment mitjançant un conjunt:
el conjunt de les entrades amb resposta sí

Per exemple, el conjunt que representa el problema de connectivitat
és el conjunt dels grafs connexos.

I el conjunt que representa el problema de primalitat
és el conjunt dels nombres primers.

En general, si T és una propietat que els elements d'un conjunt d'entrades E poden tenir o no, i ens plantegem el següent problema decisional:

> **Problema A**
> Donat $x \in E$, determinar si es compleix $T(x)$

aleshores podem descriure formalment A com el conjunt:

$$A = \{ \ x \in E \mid T(x) \ \} \ .$$

Problemes decisionals

Les entrades dels problemes pertanyeran a certs dominis de dades (és a dir, conjunts que podem representar en un ordinador).

Per exemple:

- els nombres naturals
- les tuples de naturals
- els grafs
- els dags amb pesos en els arcs
- les fórmules booleanes

En cada cas, considerarem una funció de mida.

Funció de mida

Donat un $x \in E$, on E és un domini de dades, la mida de x, representada amb $|x|$, és el nombre de símbols necessaris per codificar x.

Problemes decisionals

Donat un problema A definit sobre un conjunt d'entrades E, distingirem entre:

- les entrades positives: les que pertanyen a A
- les entrades negatives: les que pertanyen a $E - A$

Primalitat

El problema de la primalitat el podem descriure informalment així:

> **Primalitat**
> Donat un natural x, determinar si x és primer.

O bé formalment com el conjunt de les entrades positives:

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ és primer } \}.$$

Un exemple de funció de mida per als naturals és la que compta el nombre de dígits de la representació binària:

$$|x| = \text{ nombre de dígits de } x \text{ en binari} = \lfloor \log_2 x \rfloor + 1.$$

Problemes decisionals

Donat un problema A definit sobre un conjunt d'entrades E, distingirem entre:

- les entrades positives: les que pertanyen a A
- les entrades negatives: les que pertanyen a $E - A$

Primalitat

El problema de la primalitat el podem descriure informalment així:

> **Primalitat**
> Donat un natural x, determinar si x és primer.

O bé formalment com el conjunt de les entrades positives:

$$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ és primer } \}.$$

Un exemple de funció de mida per als naturals és la que compta el nombre de dígits de la representació binària:

$$|x| = \text{ nombre de dígits de } x \text{ en binari} = \lfloor \log_2 x \rfloor + 1.$$

Problemes decisionals

Ara que ja podem descriure els problemes com a objectes matemàtics, els podem agrupar en classes en funció de la seva complexitat.

- Considerarem classes de problemes segons els recursos necessaris per resoldre'ls.
- Una classe agrupa problemes, de la mateixa manera que un problema agrupa entrades.
- Cal distingir entre tres nivells d'abstracció:
  - Les entrades
    Per exemple, les seqüències d'enters
  - Els problemes: conjunts d'entrades
    Per exemple, les seqüències d'enters ordenades
  - Les classes: conjunts de problemes
    Per exemple, els que podem resoldre en temps lineal

Temps polinòmic i exponencial

Suposem que $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és una funció.

Algorismes de cost t

Diem que un algorisme $\mathcal{A}$ té cost t si el seu cost en cas pitjor pertany a $\mathcal{O}(t)$.

Problemes decidibles en temps t

Si un algorisme $\mathcal{A}$ rep entrades d'un conjunt E i té una sortida binària, escriurem:

$$\mathcal{A} : E \to \{0, 1\}.$$

Diem que un problema decisional A és decidible en temps t si existeix un algorisme de cost t que el decideix (el resol); és a dir, si existeix $\mathcal{A} : E \to \{0, 1\}$ de cost t tal que, per a tot $x \in E$:

$$x \in A \Rightarrow \mathcal{A}(x) = 1$$

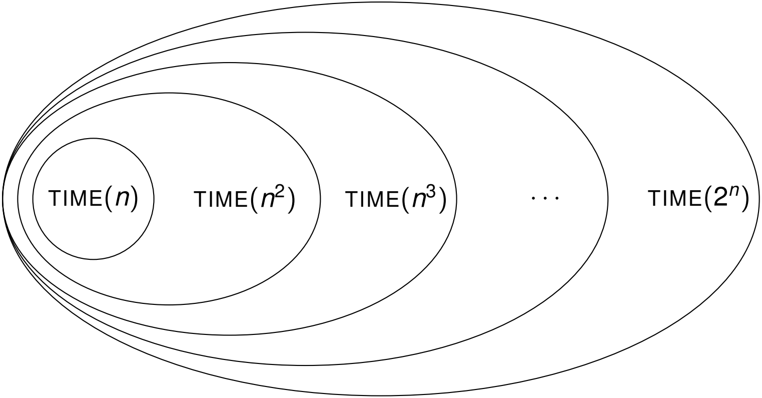
$$x \notin A \Rightarrow \mathcal{A}(x) = 0$$

Temps polinòmic i exponencial

Classe TIME(t)

Donada una funció $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, agrupem els problemes decidibles en temps t:

$$\text{TIME}(t) = \{A \mid A \text{ és decidible en temps } t\}.$$



Recordem que hi ha una gran diferència entre tenir un algorisme polinòmic o un d'exponencial per a un problema.

En el tema 1 havíem vist les dues taules següents que assenyalen diferències quantitatives entre polinomis i exponencials.

Temps polinòmic i exponencial

Taula 1 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Comparació de funcions polinòmiques i exponencials.

cost	10	20	30	40	50
n	0.00001 s	0.00002 s	0.00003 s	0.00004 s	0.00005 s
n^2	0.0001 s	0.0004 s	0.0009 s	0.0016 s	0.0025 s
n^3	0.001 s	0.008 s	0.027 s	0.064 s	0.125 s
n^5	0.1 s	3.2 s	24.3 s	1.7 min	5.2 min
2^n	0.001 s	1.0 s	17.9 min	12.7 dies	35.7 anys
3^n	0.059 s	58 min	6.5 anys	3855 segles	2×10^8 segles

Temps polinòmic i exponencial

Taula 2 (Garey/Johnson, *Computers and Intractability*)

Efecte de les millores en la tecnologia sobre algorismes polinòmics i exponencials.

cost	tecnologia actual	tecnologia $\times 100$	tecnologia $\times 1000$
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n^2	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n^3	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$
n^5	N_4	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
2^n	N_4	$N_4 + 6.64$	$N_4 + 9.97$
3^n	N_5	$N_5 + 4.19$	$N_5 + 6.29$

Temps polinòmic i exponencial

Classe P

Definim la classe P com la unió de les classes de temps polinòmiques:

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(n^k).$$

És a dir, un problema pertany a P si és decidible en temps n^k per a algun k.

P són els problemes que podem resoldre amb un algorisme polinòmic

Classe EXP

Definim la classe EXP com la unió de les classes de temps exponencials:

$$\mathrm{EXP} = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(2^{n^k}).$$

És a dir, un problema és a EXP si és decidible en temps 2^{n^k} per a algun k.

EXP són els problemes que podem resoldre amb un algorisme exponencial

Temps polinòmic i exponencial

Es considera que els problemes de la classe P són tractables, mentre que els de la classe EXP són intractables

Exemples

- CONNECTIVITAT $\in \mathrm{P}$
- ACCESSIBILITAT $\in \mathrm{P}$
- PRIMALITAT $\in \mathrm{P}$
- CAMÍ CURT $\in \mathrm{P}$
- 2-COLORABILITAT $\in \mathrm{P}$
- 3-COLORABILITAT $\in \mathrm{EXP}$ (no se sap si és a P)
- VIATJANT $\in \mathrm{EXP}$ (no se sap si és a P)
- ATURADA FITADA $\in \mathrm{EXP}$ (i se sap que no és a P)

Temps polinòmic i exponencial

Teorema

$\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXP}$.

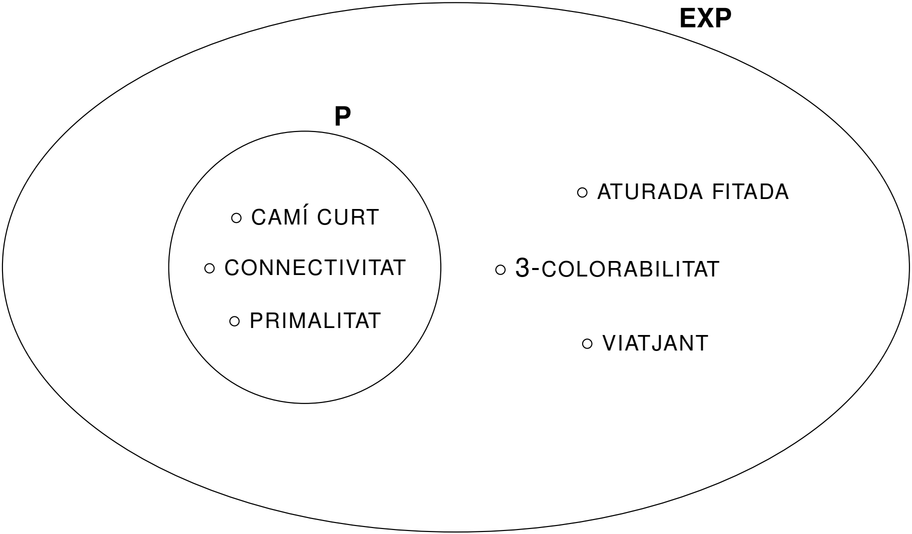
La inclusió estricta del teorema es pot dividir en dues parts:

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{EXP}$. Evident a partir de les definicions:

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(n^k) \subseteq \bigcup_{k>0} \mathsf{TIME}(2^{n^k}) = \mathrm{EXP}$$

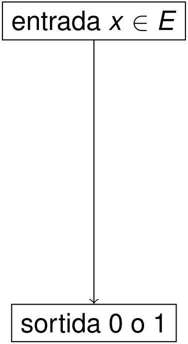
2. $\mathrm{P} \neq \mathrm{EXP}$. La demostració està fora de l'abast de l'assignatura.

Temps polinòmic i exponencial



Indeterminisme

- Els algorismes vistos fins ara són deterministes:
  segueixen un únic camí de càlcul des de l'entrada fins al resultat.
- L'execució d'un algorisme $\mathcal{A} : E \to \{0, 1\}$ per a un conjunt de dades E es pot veure com un camí:



Indeterminisme

Un algorisme indeterminista pot arribar a un resultat a través de diferents camins. El seu funcionament s'assembla més a un arbre.

Un algorisme $\mathcal{A} : E \to \{0,1\}$ és *indeterminista* si pot fer ús d'una nova funció

$$\textsc{Triar}(x)$$

que retorna un nombre y entre 0 i x.

Aleshores:

- $\mathcal{A}$ comença el càlcul de manera determinista fins la primera instrucció TRIAR.
- Per a cada valor retornat per TRIAR,
  el càlcul es divideix en diferents branques amb el valor corresponent.
- Diem que $\mathcal{A}$ retorna 1 si ho fa en alguna de les branques de l'arbre de càlcul.

Exemple: compostos

El problema

$$\text{COMPOSTOS} = \{x \mid \exists y \quad 1 < y < x \ \text{ i } y \text{ divideix } x\ \}$$

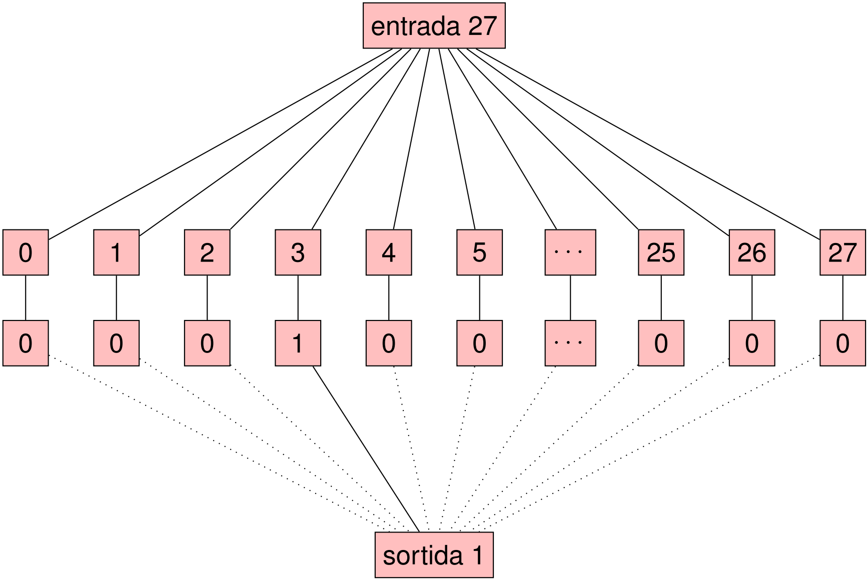
té un algorisme determinista trivial de temps exponencial

> entrada x
> **per a** $y = 2$ **fins** $x - 1$
>   **si** y divideix x **llavors**
>   **retornar** 1
> **retornar** 0

i un algorisme indeterminista de temps polinòmic

> entrada x
> $y \leftarrow \text{TRIAR}(x)$
> **si** $1 < y < x$ **i** y divideix x **llavors**
>   **retornar** 1
> **retornar** 0

Indeterminisme



Indeterminisme

- En l'exemple anterior, diem que el 3 és un testimoni del fet que el nombre 27 és compost.
- És a dir, en el problema COMPOSTOS existeixen:
  - Possibles testimonis ($y < x$) del fet que un nombre x és compost.
    La mida dels testimonis no és més gran que la de l'entrada: $|y| \leq |x|$
  - Un algorisme polinòmic que, donat un y, verifica si y divideix x.
- Hi ha molts problemes per als quals hi ha testimonis curts, que es poden verificar en temps polinòmic.

Exemple: 3-colorabilitat

El problema

$$\text{3-COLORABILITAT} = \{\ G \mid G \text{ és 3-colorable}\ \}$$

també té un algorisme exhaustiu de temps exponencial

entrada $G = (V, E)$
$n \leftarrow |V|$
per a cada tupla $(c_1, \ldots, c_n)$ on $\forall i \leq n\ \ c_i \in \{0, 1, 2\}$
  si $(c_1, \ldots, c_n)$ és una 3-coloració de G **llavors**
    retornar 1
retornar 0

Indeterminisme

Exemple: 3-colorabilitat

i un algorisme indeterminista de temps polinòmic

entrada $G = (V, E)$
$n \leftarrow |V|$
per a $i = 1$ fins n
    $c_i \leftarrow \text{TRIAR}(2)$
si $(c_1, \ldots, c_n)$ és una 3-coloració de G **llavors**
    retornar 1
si no
    retornar 0

Indeterminisme

La definició formal dels algorismes polinòmics indeterministes separa:

- el càlcul del testimoni i
- el càlcul determinista.

Indeterminisme

Decidibilitat en temps polinòmic indeterminista

Un problema decisional A definit sobre un conjunt d'entrades E es diu que és decidible en temps polinòmic indeterminista si existeix

- un algorisme polinòmic $\mathcal{V} : E \times E \to \{0, 1\}$ (anomenat verificador) i
- un polinomi $p(n)$

tals que per a tot $x \in E$, tenim

$$x \in A \Rightarrow \mathcal{V}(x, y) = 1 \text{ per a algun } y \in E \text{ tal que } |y| \leq p(|x|)$$

$$x \notin A \Rightarrow \mathcal{V}(x, y) = 0 \text{ per a tot } y \in E \text{ tal que } |y| \leq p(|x|)$$

Si $x \in A$, els y tals que $\mathcal{V}(x, y) = 1$ se'n diuen testimonis o certificats.

Indeterminisme

Per veure que un problema A és decidible en temps polinòmic indeterminista caldrà comprovar:

1. que les entrades positives de A tenen testimonis de mida polinòmica i que les entrades negatives de A no tenen testimonis de mida polinòmica

   (cal indicar quins són els testimonis)

2. que els testimonis es poden verificar en temps polinòmic

   (cal trobar un verificador)

Indeterminisme

Compostos

Considerem el problema

$$\text{COMPOSTOS} = \{x \mid \exists y \quad 1 < y < x \ \text{ i } y \text{ divideix } x\ \}$$

1. Els testimonis per a x són tots els $y \neq 1, x$ que divideixen x.
2. El polinomi és $p(n) = n$
3. El verificador és

$\mathcal{V}(x, y)$
    si $1 < y < x$ **i** y divideix x **llavors**
        retornar 1
    si no
        retornar 0

COMPOSTOS és decidible en temps polinòmic indeterminista perquè

$$x \in \text{COMPOSTOS} \Leftrightarrow \mathcal{V}(x, y) = 1 \text{ per a algun } y \text{ t.q. } |y| \leq p(|x|).$$

3-colorabilitat

Considerem el problema

$$3\text{-COLOR} = \{\ G \mid G \text{ és 3-colorable}\ \}$$

1. Els testimonis per a $G = (V, E)$ són totes les 3-coloracions C de G de la forma $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, on $n = |V|$ i $c_i \in \{0, 1, 2\}$ per a tot $i \le n$.
2. El polinomi (amb representacions raonables de G i C) pot ser $p(n) = n$
3. El verificador és

$\mathcal{V}(G, C)$
    $n \leftarrow |V|$
    si C és una 3-coloració de G **llavors**
        retornar 1
    si no
        retornar 0

Tots els problemes decidibles en temps polinòmic indeterminista els agrupem en una classe.

Classe NP

Definim la classe NP (de *nondeterministic polynomial time*) com:

$$\mathrm{NP} = \{A \mid A \text{ és decidible en temps polinòmic indeterminista}\}.$$

Com es relaciona NP amb P i EXP?

Indeterminisme

Diferència fonamental entre P i NP:

- els testimonis dels problemes de P es poden trobar en temps polinòmic
- els testimonis dels problemes de NP es poden verificar en temps polinòmic

Quadrats perfectes i compostos

1. QUADRATS $= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \quad 1 \leq y < x \quad \text{i} \quad x = y^2 \}$
2. COMPOSTOS $= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \quad 1 < y < x \quad \text{i} \quad y \text{ divideix } x \}$

2 i 3-colorabilitat

1. 2-COLORABILITAT $= \{ G \mid G \text{ és 2-colorable} \}$
2. 3-COLORABILITAT $= \{ G \mid G \text{ és 3-colorable} \}$

Indeterminisme

Teorema

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Demostració

Tot algorisme determinista també és indeterminista (però no fa ús de la instrucció TRIAR).

Vist d'una altra manera, per a tot $A \in \mathrm{P}$, podem crear verificadors $\mathcal{V}$ tals que

$$\mathcal{V}(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \in A$$

independentment de y. Per tant, $A \in \mathrm{NP}$.

Indeterminisme

Diferència entre NP i EXP:

- els problemes de NP tenen testimonis verificables en temps polinòmic
- els problemes d'EXP poden tenir testimonis exponencialment llargs

Per resoldre els problemes de NP hi ha un algorisme estàndard exponencial que cerca un testimoni i el verifica

Indeterminisme

Teorema

$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{EXP}$.

Demostració

Sigui $A \in \mathrm{NP}$. Llavors, existeix un polinomi $p(n)$ i un verificador $\mathcal{V}$ tals que

$$x \in A \Rightarrow \mathcal{V}(x, y) = 1 \text{ per a algun } y \in E \text{ tal que } |y| \leq p(|x|)$$

$$x \notin A \Rightarrow \mathcal{V}(x, y) = 0 \text{ per a tot } y \in E \text{ tal que } |y| \leq p(|x|)$$

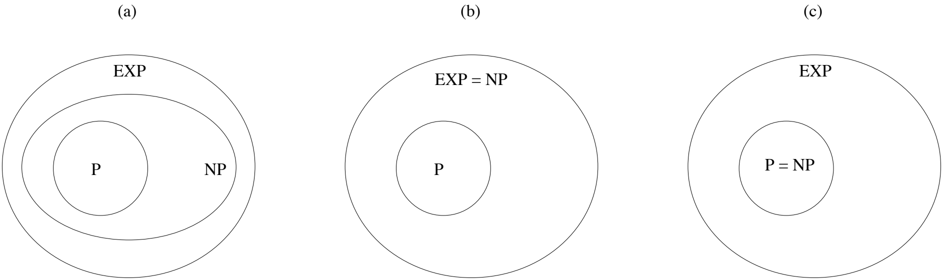
Podem considerar un algorisme exponencial per a A que cerca un testimoni:

> entrada x
> **per a tot** y tal que $|y| \leq p(|x|)$
>   **si** $\mathcal{V}(x, y) = 1$ **llavors**
>   **retornar** 1
> **retornar** 0

És fàcil veure que l'algorisme anterior és exponencial i decideix A.
Per tant, $A \in \mathrm{EXP}$.

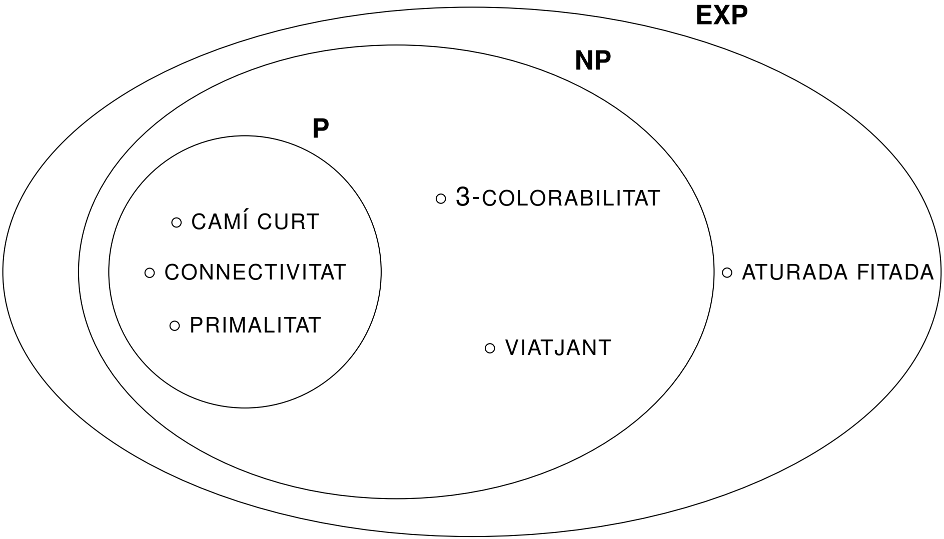
Indeterminisme

- No se sap si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.
- Podem assegurar que $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ o $\mathrm{NP} \neq \mathrm{EXP}$
(perquè se sap que $\mathrm{P} \neq \mathrm{EXP}$).
- Per tant, hi ha tres possibilitats:



Prendrem (a) com a hipòtesi de treball.

Indeterminisme



Concepte de reducció

Si hem de resoldre un problema A i disposem d'un algorisme per resoldre B, podem usar-lo per resoldre A?

Reduccions

Siguin A i B dos problemes decisionals amb conjunts d'entrades E i E', resp.

Diem que *A es redueix a B en temps polinòmic* si
existeix un algorisme polinòmic $\mathcal{F} : E \to E'$ tal que

$$x \in A \Rightarrow \mathcal{F}(x) \in B$$

$$x \notin A \Rightarrow \mathcal{F}(x) \notin B$$

En aquest cas, escrivim $A \leq^p B$ (o $A \leq^p B$ *via* $\mathcal{F}$).
Diem que $\mathcal{F}$ és una reducció polinòmica de A a B.

La idea és que si A es redueix a B, podem usar B per resoldre A: composem la reducció de A a B amb l'algorisme per a B.

Si l'algorisme per a B és polinòmic, aquest algorisme per a A també ho és!

Exemple de reducció

Problema de la MOTXILLA (o KNAPSACK)

Donada una motxilla amb capacitat C, un valor V i n objectes amb

- pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- i valors $v_1, v_2, \ldots, v_n$

trobar una selecció $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dels objectes

- que no superi la capacitat de la motxilla: $\sum_{i \in S} p_i \leq C$
- amb valor almenys V: $\sum_{i \in S} v_i \geq V$

Problema d'INEQUACIONS LINEALS 0-1

Donada una matriu A de $m \times n$ enters i donat un vector b de m enters, determinar si existeix un vector $x \in \{0, 1\}^n$ tal que $Ax \geq b$.

Exemple de reducció

Suposem que volem resoldre MOTXILLA,
i tenim un programa per a INEQUACIONS LINEALS 0-1 (p. ex. Maple).

Donada una entrada de MOTXILLA:

- capacitat C
- valor mínim V
- nombre d'objectes n
- pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- valors $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

considerem variables 0-1 x_i que signifiquen "agafo l'i-èsim objecte"

Llavors hi ha subconjunt d'objectes per a l'entrada de MOTXILLA si i només si el següent sistema d'inequacions lineals té solució:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geq V$$

Exemple de reducció

Suposem que volem resoldre MOTXILLA,
i tenim un programa per a INEQUACIONS LINEALS 0-1 (p. ex. Maple).

Donada una entrada de MOTXILLA:

- capacitat C
- valor mínim V
- nombre d'objectes n
- pesos $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- valors $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

considerem variables 0-1 x_i que signifiquen "agafo l'i-èsim objecte"

Llavors hi ha subconjunt d'objectes per a l'entrada de MOTXILLA si i només si el següent sistema d'inequacions lineals té solució:

$$\sum_{i=1}^{n} (-p_i) x_i \geq -C$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geq V$$

Exemple de reducció

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;

int main() {
  int C, V, n;
  cin >> C >> V >> n;
  vector<int> p(n), v(n);
  for (int i = 0; i < n; ++i) cin >> p[i];
  for (int i = 0; i < n; ++i) cin >> v[i];

  // Generem el sistema (entrada per a INEQUACIONS LINEALS 0-1)
  cout << "evalb(nops({isolve}({" << endl;
  for (int i = 0; i < n; ++i)
    cout << "0 <= x" << i << ", x" << i << " <= 1, " << endl;

  for (int i = 0; i < n; ++i) cout << " + (" << -p[i] << ") * x" << i;
  cout << " >= " << -C << "," << endl;

  for (int i = 0; i < n; ++i) cout << " + (" << v[i] << ") * x" << i;
  cout << " >= " << V << endl;

  cout << "})) > 0);" << endl;
}
```

Exemple de reducció

Exemple d'entrada per a MOTXILLA

```
3
6
3
1 2 3
2 4 5
```

Entrada generada per a INEQUACIONS LINEALS 0-1

```
evalb(nops({isolve}({
0 <= x0, x0 <= 1,
0 <= x1, x1 <= 1,
0 <= x2, x2 <= 1,
+ (-1) * x0 + (-2) * x1 + (-3) * x2 >= -3,
+ (2) * x0 + (4) * x1 + (5) * x2 >= 6
})) > 0);
```

Exemple de reducció

Podem resoldre MOTXILLA així: donada una entrada *e* de MOTXILLA, generem el sistema d'inequacions, i el passem al programa que el resol. Llavors:

- Si el sistema té solució, $e \in$ MOTXILLA
- Si el sistema no té solució, $e \notin$ MOTXILLA

Com que el programa per generar el sistema d'inequacions funciona en temps polinòmic, tenim que MOTXILLA $\leq^p$ INEQUACIONS LINEALS 0-1

Exemple de reducció

Propietats: reflexivitat

Per a tot A, $A \leq^p A$.

N'hi ha prou a considerar l'algorisme que calcula la funció identitat:

$\mathcal{F}(x)$
  retornar x

És evident que, per a tot x

$$x \in A \Leftrightarrow \mathcal{F}(x) = x \in A.$$

Exemple de reducció

Propietats: transitivitat

Per a tot A, B, C, si $A \leq^p B$ i $B \leq^p C$, llavors $A \leq^p C$.

Si

- $A \leq^p B$ via $\mathcal{F}$ i
- $B \leq^p C$ via $\mathcal{G}$,

llavors la composició $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ demostra que $A \leq^p C$.

Corol·lari

Les reduccions formen, doncs, un preordre.

Exemple de reducció

Tancament de P per reduccions

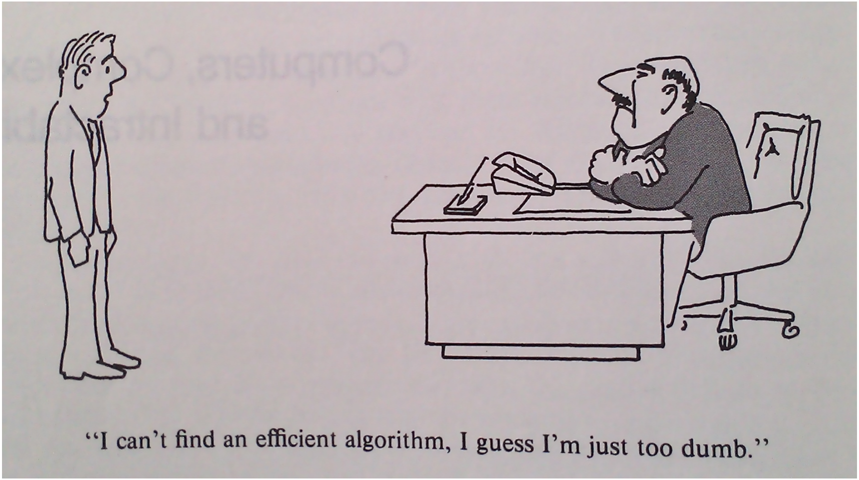
Per a tot A, B, si $A \leq^p B$ i $B \in \mathrm{P}$, llavors $A \in \mathrm{P}$.

Si

- $\mathcal{B}$ és un algorisme polinòmic per a B i
- $\mathcal{F}$ és un algorisme polinòmic que demostra $A \leq^p B$,

llavors la composició $\mathcal{F} \circ \mathcal{B}$ és un algorisme polinòmic per a A.

Teoria de la NP-completesa

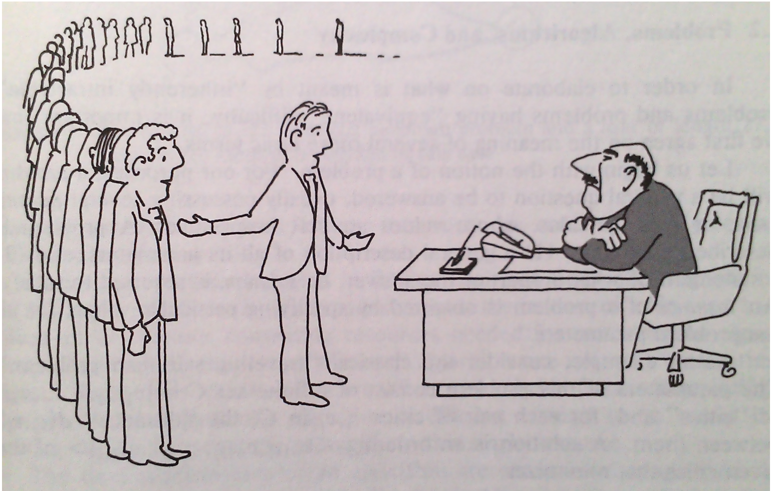


Garey & Johnson, *Computers and Intractability*

"I can't find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!"

Garey & Johnson, *Computers and Intractability*

Teoria de la NP-completesa

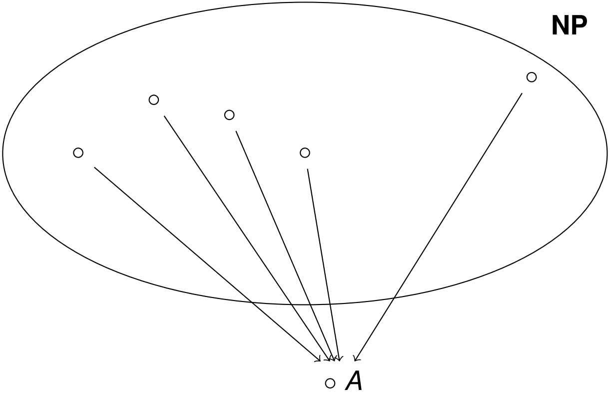


"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

Garey & Johnson, *Computers and Intractability*

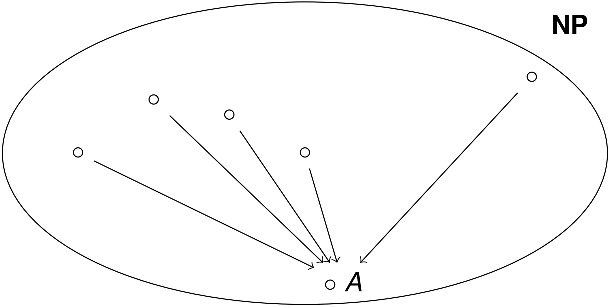
Definició

Un problema A és NP-difícil si per a tot problema $B \in \mathrm{NP}$ tenim que $B \leq^p A$.



Definició

Un problema A és NP-complet si és NP-difícil i $A \in \mathrm{NP}$.



Proposició

Sigui A un problema NP-complet. Llavors, $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ si i només si $A \in \mathrm{P}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Com que A és NP-complet, $A \in \mathrm{NP}$ i, per tant, $A \in \mathrm{P}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sigui $A \in \mathrm{P}$.
Com que A és NP-complet, llavors per a tot $B \in \mathrm{NP}$, $B \le^p A$.
Si $A \in \mathrm{P}$, pel tancament de P per reduccions, llavors $B \in \mathrm{P}$.
Per tant $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$. Com que ja sabem que $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, finalment $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Però... es coneix cap problema NP-complet?

Fórmules booleanes

- Una fórmula booleana és una expressió formada amb connectives $\vee$ (disjunció), $\wedge$ (conjunció) i $\neg$ (negació) i variables booleanes

Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee y \vee \neg z) \wedge \neg(x \wedge y \wedge z)$$

és una fórmula booleana.

Forma normal conjuntiva (CNF)

- Un literal és una variable afirmada o negada (x, $\neg x$)
- Una clàusula és una disjunció de literals ($x \vee \neg y \vee z$)
- Una fórmula booleana està en forma normal conjuntiva (CNF) si és una conjunció de clàusules.

  Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

Satisfactibilitat

Una fórmula booleana és satisfactible si
hi ha una assignació de valors cert/fals a les variables que fa la fórmula certa.

Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

és satisfactible perquè $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ la satisfà: $F(1, 0, 0) = 1$.

Definim

$$\text{SAT} = \{\, F \mid F \text{ és una fórmula booleana satisfactible} \,\}.$$

$$\text{CNF-SAT} = \{\, F \mid F \text{ és una fórmula booleana en CNF satisfactible} \,\}.$$

Teorema de Cook-Levin (1971)

SAT i CNF-SAT són NP-complets.

Satisfactibilitat

Una fórmula booleana és satisfactible si
hi ha una assignació de valors cert/fals a les variables que fa la fórmula certa.

Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

és satisfactible perquè $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ la satisfà: $F(1, 0, 0) = 1$.

Definim

$$\text{SAT} = \{ F \mid F \text{ és una fórmula booleana satisfactible} \}.$$

$$\text{CNF-SAT} = \{ F \mid F \text{ és una fórmula booleana en CNF satisfactible} \}.$$

Teorema de Cook-Levin (1971)

SAT i CNF-SAT són NP-complets.

Demostrarem que CNF-SAT és NP-complet.

Cal veure:

1. CNF-SAT $\in \mathrm{NP}$
2. CNF-SAT és NP-difícil

(1) CNF-SAT $\in \mathrm{NP}$

- Els testimonis són assignacions booleanes a variables que satisfan F
- En tota codificació raonable d'una fórmula F en CNF de n variables, $n \leq |F|$. Com que un testimoni α consta de n bits, $|\alpha| = n \leq |F|$.
- Per tant, triant $p(n) = n$, tenim que $|\alpha| \leq p(|F|)$.
- Podem verificar si una assignació α satisfà F en temps polinòmic:
  - substituïm les variables pels valors donats per α
  - avaluem les connectives de dins cap a fora

Exemple

En el cas de la fórmula booleana en CNF

$$F(x, y, z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z)$$

i l'assignació $\alpha = 100$ (és a dir, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$), el verificador avaluaria:

- $F(\alpha) = (1 \vee \neg 0 \vee 0) \wedge (1 \vee \neg 0)$ (substituir valors)
- $F(\alpha) = (1 \vee 1 \vee 0) \wedge (1 \vee 1)$ (negacions)
- $F(\alpha) = (1) \wedge (1)$ (disjuncions)
- $F(\alpha) = 1$ (conjuncions)

Teoria de la NP-completesa

La idea principal de la demostració que CNF-SAT és NP-difícil és que qualsevol algorisme es pot implementar eficientment amb un circuit amb portes AND, OR i NOT (= fórmula en CNF) si l'entrada es codifica en binari.

Lema

Donat un algorisme $\mathcal{A} : E \to \{0,1\}$ amb cost en temps polinòmic, podem trobar en temps polinòmic una fórmula booleana en CNF $F_{\mathcal{A}}$ tal que:

$$F_{\mathcal{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(x) = 1 \qquad \text{per a tot } x \in E$$

(2) CNF-SAT és NP-difícil.

Sigui $A \in \mathrm{NP}$. Llavors hi ha un polinomi q i un verificador $\mathcal{V}$ t.q. per a tot x:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y \quad |y| \leq q(|x|) \wedge \mathcal{V}(x,y) = 1.$$

Sigui $\mathcal{V}_x(y)$ un algorisme que comprova $|y| \leq q(|x|)$ i $\mathcal{V}(x,y) = 1$. Llavors,

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y \;\; \mathcal{V}_x(y) \Leftrightarrow \exists y \;\; F_{\mathcal{V}_x}(y) \;\Leftrightarrow F_{\mathcal{V}_x}(y) \in \text{CNF-SAT}.$$

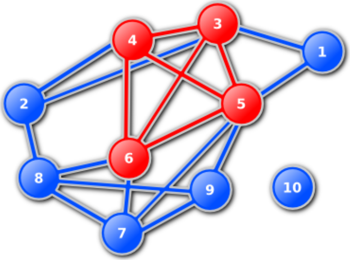
Per tant, $A \leq^p$ CNF-SAT.

Problemes NP-complets

Trobar un primer problema NP-complet permet trobar-ne més, per reduccions.
Recordem

$$\text{CLICA} = \{ (G, k) \mid G \text{ té un subgraf complet de } k \text{ vèrtexs } \}$$

(un graf és complet si conté totes les arestes entre els seus vèrtexs)
Donat el graf G



podem observar que

- $(G, 4) \in \text{CLICA}$
- $(G, 5) \notin \text{CLICA}$

Problemes NP-complets

Teorema

CLICA és NP-complet

Per demostrar la NP-completesa de CLICA cal veure que:

1. CLICA $\in$ NP
2. CLICA és NP-difícil

(1) CLICA $\in$ NP

Sigui (G, k) una entrada de CLICA.

- Els testimonis són els vèrtexs dels subgrafs complets de G de k vèrtexs (en l'exemple anterior, el conjunt $C = \{3, 4, 5, 6\}$.)
- El polinomi $p(n) = n$ és suficient perquè un testimoni C compleix $|C| \leq |(G, k)| = p(|(G, k)|)$.
- Verifiquem en temps polinòmic si un conjunt C de vèrtexs és testimoni: tot parell de vèrtexs de C ha de formar una aresta en G ($\leq n^2$ comprovacions).

Problemes NP-complets

CLICA és NP-difícil

Demostrarem que CNF-SAT $\leq^p$ CLICA.

- Com que CNF-SAT és NP-difícil, tot $S \in \mathrm{NP}$ compleix $S \leq^p$ CNF-SAT.
- Per transitivitat, tot $S \in \mathrm{NP}$ complirà $S \leq^p$ CLICA.
- Per tant, CLICA serà NP-difícil.

Podem expressar aquesta propietat en general.

Proposició

Sigui A un problema NP-complet i B un problema tal que $B \in \mathrm{NP}$ i $A \leq^p B$. Llavors, B també és NP-complet.

Problemes NP-complets

CLICA és NP-difícil

Demostrarem que CNF-SAT $\leq^p$ CLICA.

- Com que CNF-SAT és NP-difícil, tot $S \in \mathrm{NP}$ compleix $S \leq^p$ CNF-SAT.
- Per transitivitat, tot $S \in \mathrm{NP}$ complirà $S \leq^p$ CLICA.
- Per tant, CLICA serà NP-difícil.

Podem expressar aquesta propietat en general.

Proposició

Sigui A un problema NP-complet i B un problema tal que $B \in \mathrm{NP}$ i $A \leq^p B$. Llavors, B també és NP-complet.

CNF-SAT $\leq^p$ CLICA

Sigui F una fórmula booleana en CNF amb:

- clàusules $C_1, \ldots, C_m$
- literals $l_1, \ldots, l_r$

L'algorisme de reducció $\mathcal{R}(F) = (G, m)$, on $G = (V, E)$ és:

- $V = \{(i,j) \mid \ l_i \text{ apareix a } C_j \ \}$
  (Els vèrtexs representen ocurrències de literals en clàusules.)
- $E = \{ \ \{(i,j),(k,l)\} \ \mid \ j \neq l \ \wedge \ \neg l_i \neq l_k \ \}$
  (Les arestes representen parells de literals que poden ser certs alhora.)

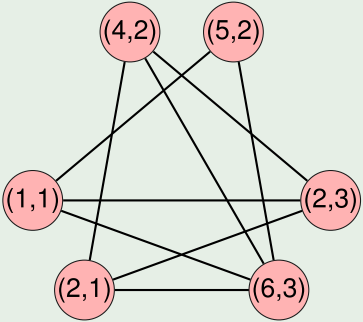
Problemes NP-complets

Exemple

$F(x_1, x_2, x_3) = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$, on

- $C_1 = (x_1 \vee x_2)$, $C_2 = (\neg x_1 \vee \neg x_2)$, $C_3 = (x_2 \vee \neg x_3)$
- $l_1 = x_1$, $l_2 = x_2$, $l_3 = x_3$, $l_4 = \neg x_1$, $l_5 = \neg x_2$, $l_6 = \neg x_3$

La reducció $\mathcal{R}(F) = (G, 3)$, on G és el graf



En general, tenim que

$$F \in \text{CNF-SAT} \Leftrightarrow (G, m) \in \text{CLICA}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sigui α una assignació que satisfà F. Llavors, hi ha m literals que α fa certs alhora i, per tant, formen un subgraf complet en G.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si G té un subgraf complet de m vèrtexs, cada vèrtex ha de correspondre a una clàusula diferent. Per tant, fent cert un literal de cada clàusula alhora satisfem F. O sigui que F és satisfactible.

Problemes NP-complets

Definicions

- H és subconjunt independent si els vèrtexs no són adjacents dos a dos.
- H és recobriment de vèrtexs si té un extrem de tota aresta del graf.

Exercici

Donats els problemes següents:

- $\text{CLICA} = \{\ (G, k) \mid G$ té un subgraf complet de k vèrtexs $\}$
- $\text{SI} = \{\ (G, k) \mid G$ té un subconjunt independent de k vèrtexs $\}$
- $\text{RV} = \{\ (G, k) \mid G$ té un recobriment de k vèrtexs $\}$

demostreu

1. $\text{CLICA} \leq^p \text{SI}$
2. $\text{SI} \leq^p \text{RV}$

Problemes NP-complets

Molts problemes NP-complets tenen "casos particulars" que són a P.

Per exemple, en CNF-SAT podem fixar el nombre de literals per clàusula per obtenir una família infinita de problemes.

Satisfactibilitat *k*-fitada (k-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb $\leq k$ literals per clàusula, determinar si és satisfactible.

Veurem com classificar k-SAT pels diferents valors de k.

Satisfactibilitat 1-fitada (1-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb 1 literal per clàusula, determinar si és satisfactible.

Per exemple,

$$F(x, y, z, t) = (x) \wedge (\neg y) \wedge (z) \wedge (\neg t).$$

1-SAT és decidible en temps polinòmic amb l'algorisme següent:

entrada F
si F conté dos literals contradictoris **llavors**
  retornar FALS
si no
  retornar CERT

Satisfactibilitat 1-fitada (1-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb 1 literal per clàusula, determinar si és satisfactible.

Per exemple,

$$F(x, y, z, t) = (x) \wedge (\neg y) \wedge (z) \wedge (\neg t).$$

1-SAT és decidible en temps polinòmic amb l'algorisme següent:

entrada F
si F conté dos literals contradictoris **llavors**
  retornar FALS
si no
  retornar CERT

Satisfactibilitat 2-fitada (2-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb ≤ 2 literals per clàusula, determinar si és satisfactible.

Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z).$$

2-SAT és decidible en temps polinòmic

- transformant la fórmula en un graf dirigit
- aplicant al graf un algorisme de camins

Satisfactibilitat 2-fitada (2-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb ≤ 2 literals per clàusula, determinar si és satisfactible.

Per exemple,

$$F(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z).$$

2-SAT és decidible en temps polinòmic

- transformant la fórmula en un graf dirigit
- aplicant al graf un algorisme de camins

Esbós de l'algorisme

Donada una fórmula booleana en 2-CNF

$$F(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z)$$

es reescriu fent servir implicacions

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & (\neg x \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \neg z) \\ & \wedge (\neg y \Rightarrow x) \wedge (\neg x \Rightarrow \neg z) \wedge (\neg y \Rightarrow \neg x) \wedge (z \Rightarrow \neg y) \end{aligned}$$

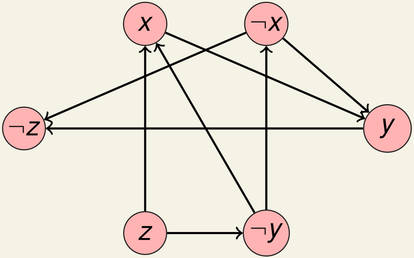
que es basen en les equivalències

- $(a \vee b) \equiv (\neg a \Rightarrow b) \equiv (\neg b \Rightarrow a)$
- $(a) \equiv (a \vee a) \equiv (\neg a \Rightarrow a) \equiv (a \Rightarrow \neg a)$

La fórmula booleana amb implicacions

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) = {} & (\neg x \Rightarrow y) \wedge (z \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \neg z) \\
& \wedge (\neg y \Rightarrow x) \wedge (\neg x \Rightarrow \neg z) \wedge (\neg y \Rightarrow \neg x) \wedge (z \Rightarrow \neg y)
\end{aligned}
$$

es transforma en un digraf G i s'aplica el lema següent.



Lema

F és insatisfactible si i només si $\exists x$ tal que G té camins de x a $\neg x$ i de $\neg x$ a x.

Satisfactibilitat 3**-fitada** (3-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb ≤ 3 literals per clàusula, determinar si és satisfactible.

Teorema

3-SAT és NP-complet.

Per demostrar-ho, cal provar:

1. 3-SAT $\in$ NP (semblant a CNF-SAT)
2. 3-SAT és NP-difícil: reducció CNF-SAT $\leq^p$ 3-SAT

Problemes NP-complets

Satisfactibilitat 3-fitada (3-SAT)
Donada un fórmula booleana en CNF F de n variables amb ≤ 3 literals per clàusula, determinar si és satisfactible.

Teorema

3-SAT és NP-complet.

Per demostrar-ho, cal provar:

1. 3-SAT $\in \mathrm{NP}$ (semblant a CNF-SAT)
2. 3-SAT és NP-difícil: reducció CNF-SAT $\leq^p$ 3-SAT

CNF-SAT $\leq^p$ 3-SAT

El mètode següent transforma una fórmula booleana en CNF en una altra d'equisatisfactible en 3-CNF.

Donada una fórmula booleana F en CNF,

1. Sigui F' la fórmula *cert*
2. Per a cada clàusula $C = (a_1 \vee \cdots \vee a_k)$ de F:
   - si $k \leq 3$, afegir C a F'
   - si $k > 3$, afegir a F' la clàusula

     $$(a_1 \vee a_2 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee a_3 \vee z_3) \wedge (\neg z_3 \vee a_4 \vee z_4) \ldots (\neg z_{k-2} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$

     on $z_2, \ldots, z_{k-2}$ són variables noves.
3. Retornar F'

Exemple

Donada una clàusula de cinc literals $C = (a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \vee a_5)$,
la reducció retorna

$$C' = (a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee a_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee a_4 \vee a_5).$$

- És evident que si C és certa amb una assignació α, C' es pot satisfer amb α i valors adequats de z_1 i z_2.
- Si C' és certa amb una assignació β, algun a_i serà cert i C serà certa amb β.

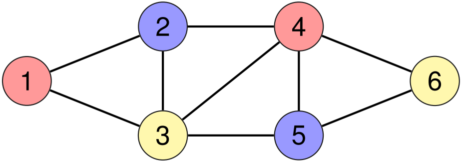
Problemes NP-complets

Definició

Un graf $G = (V, E)$ de n vèrtexs és k-colorable si existeix una funció

$$\chi : V \to \{1, \dots, k\}$$

tal que $\chi(u) \neq \chi(v)$ per a $\{u, v\} \in E$. La funció χ és una k-coloració.



3-coloració

Amb el nombre de colors k com a paràmetre extern, podem plantejar el problema de la colorabilitat en funció de k.

k-**Colorabilitat** (k-COLOR)
Donat un graf G, determinar si és k-colorable.

Per als casos següents se'n coneixen algorismes polinòmics:

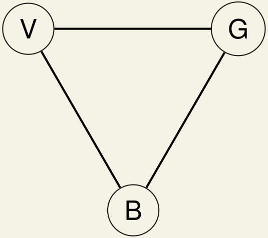
- 1-COLOR
- 2-COLOR

CNF-SAT $\leq^p$ 3-COLOR

Sigui F una fórmula booleana en CNF.

Construirem un graf G que serà 3-colorable si i només si F és satisfactible.

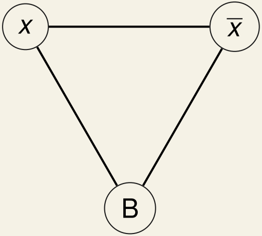
- Hi haurà 3 vèrtexs especials anomenats V, G, B.



Podem suposar que, en qualsevol coloració, tenen els colors:

V $\rightarrow$ vermell, G $\rightarrow$ groc, B $\rightarrow$ blau

- Afegim un vèrtex per cada literal i connectem cada literal i el seu complementari al vèrtex B.



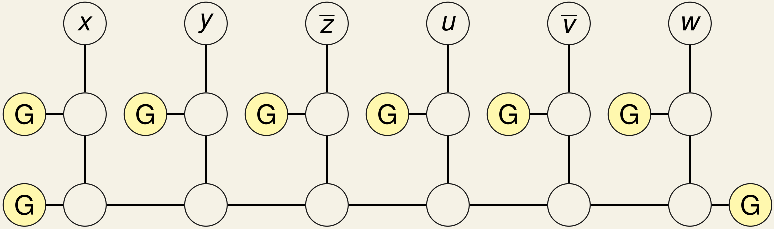
Per cada clàusula, afegim un subgraf.

Suposem que el nombre de literals de la clàusula és parell.

Llavors per exemple per la clàusula

$$(x \vee y \vee \overline{z} \vee u \vee \overline{v} \vee w).$$

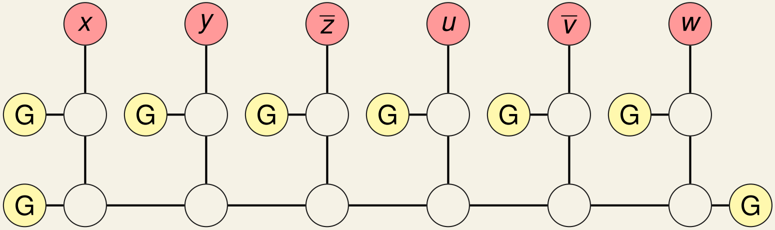
afegim



Propietat: Una coloració dels vèrtexs superiors amb vermell o groc es pot estendre a una 3-coloració global si i només si almenys un és groc.

Problemes NP-complets

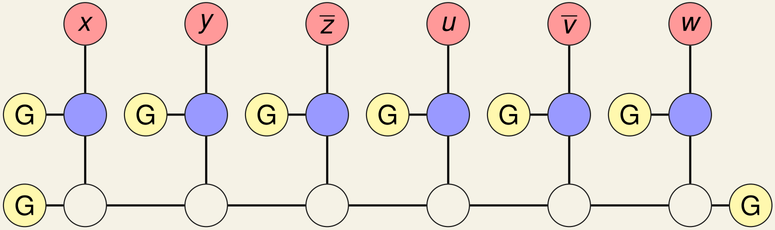
Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

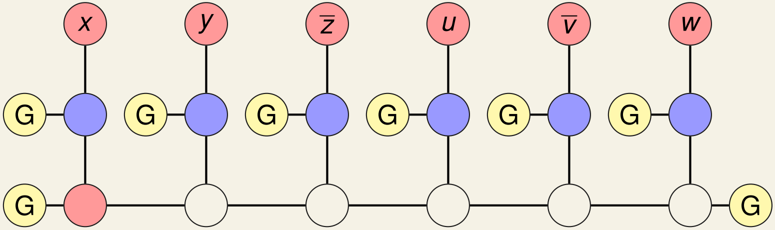
Problemes NP-complets

Si tots els de dalt tenen color vermell...



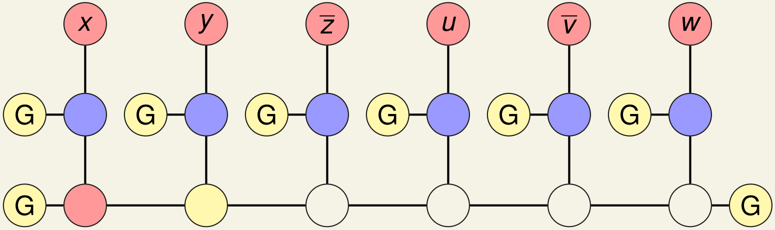
...no podem completar la 3-coloració.

Si tots els de dalt tenen color vermell...



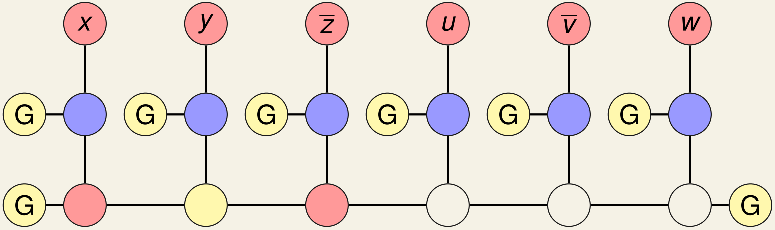
...no podem completar la 3-coloració.

Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

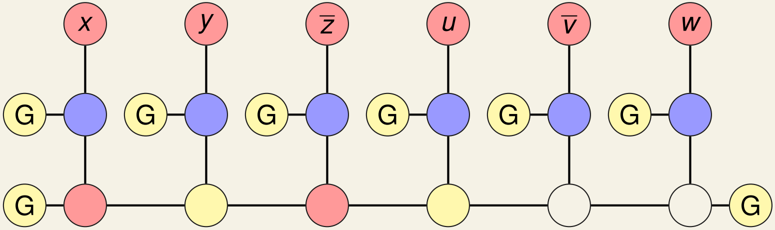
Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

Problemes NP-complets

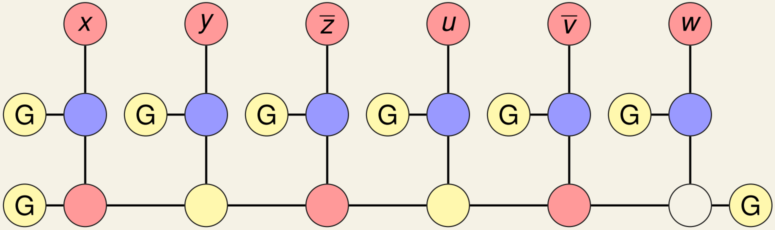
Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

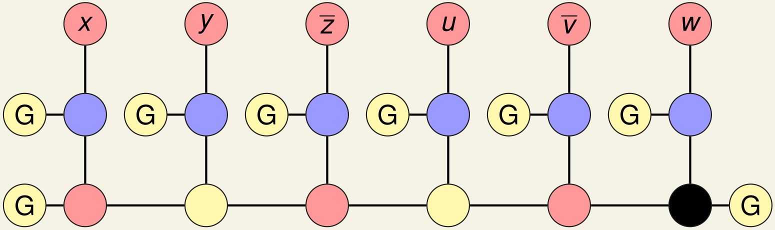
Problemes NP-complets

Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

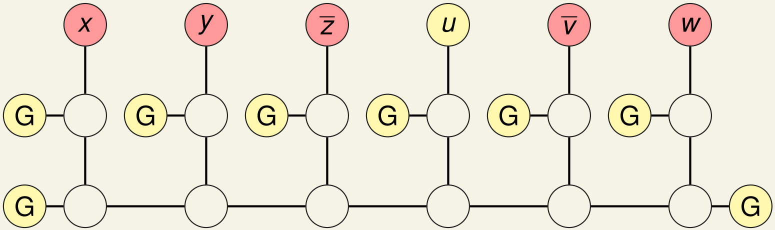
Si tots els de dalt tenen color vermell...



...no podem completar la 3-coloració.

Problemes NP-complets

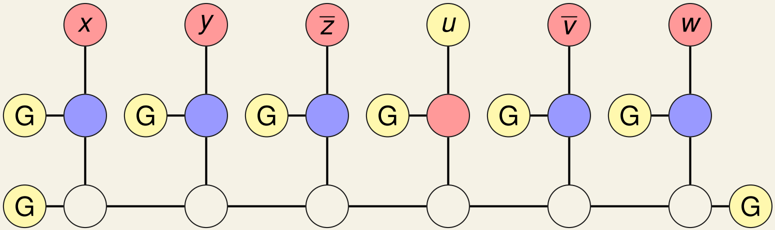
Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

Problemes NP-complets

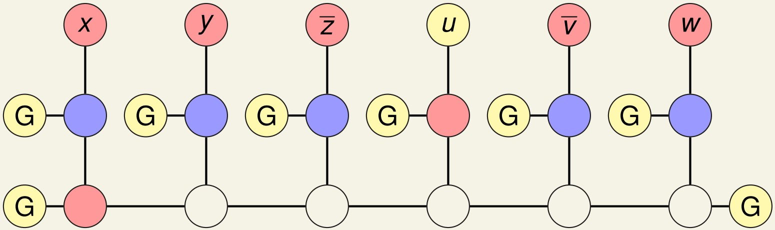
Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

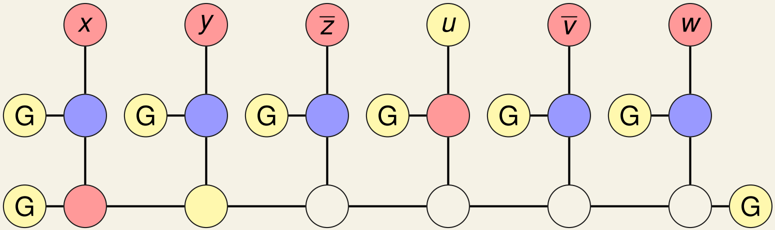
Problemes NP-complets

Si almenys un de dalt té color groc...



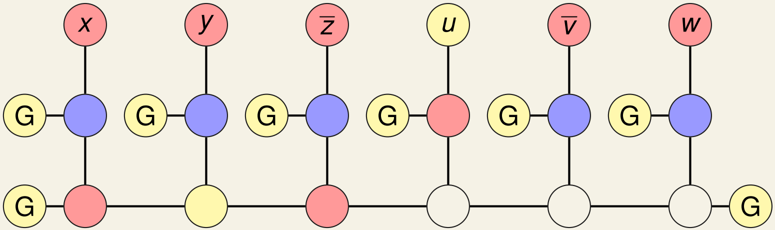
...podem obtenir una 3-coloració global.

Si almenys un de dalt té color groc...



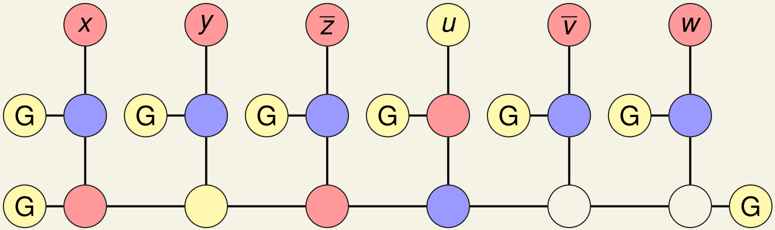
...podem obtenir una 3-coloració global.

Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

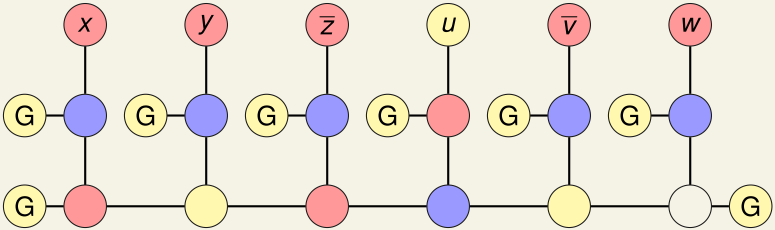
Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

Problemes NP-complets

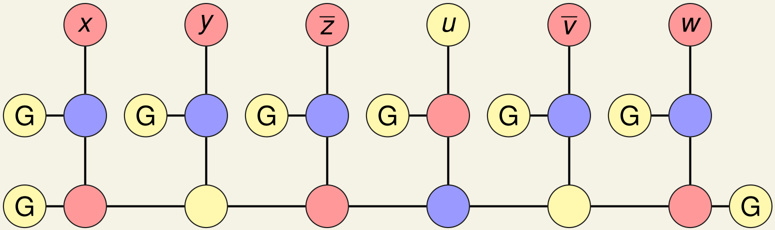
Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

Problemes NP-complets

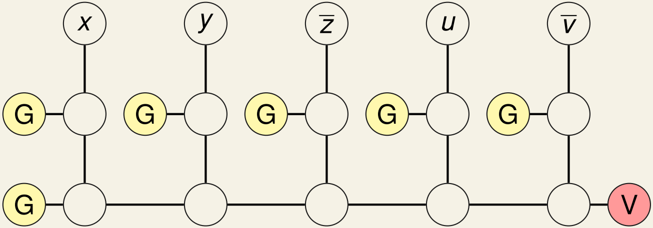
Si almenys un de dalt té color groc...



...podem obtenir una 3-coloració global.

En cas que el nombre de literals sigui senar, el vèrtex de la dreta serà V.
Per exemple,

$$(x \vee y \vee \overline{z} \vee u \vee \overline{v})$$



Problemes NP-complets

Si G és el graf amb tots els vèrtexs i arestes definits abans, llavors

$$F \text{ és satisfactible} \Leftrightarrow G \text{ és 3-colorable.}$$

Si una assignació booleana satisfà F, pintem de color groc els literals que són certs, i de color vermell els que no ho són.

Recíprocament, si G és 3-colorable, llavors cada clàusula ha de tenir almenys un literal de color groc. Aquests són els que fem certs.

Com que G es pot construir en temps polinòmic, tenim que

$$\text{CNF-SAT} \leq^p \text{3-COLOR}.$$

Teorema

3-COLOR és NP-complet.

Problemes NP-complets

Per la resta de problemes k-COLOR, podem observar el següent.

Proposició

Per a tot $k > 3$, 3-COLOR $\leq^p$ k-COLOR.

La reducció consisteix, donat un graf G, a afegir-li un subgraf complet de $k - 3$ vèrtexs connectats a tots els del G.

Corol·lari

Per a tot $k > 3$, k-COLOR és NP-complet.

Per tant, tenim:

- k-COLOR $\in \mathrm{P}$ per a $k \leq 2$
- k-COLOR és NP-complet per a $k \geq 3$

Problemes NP-complets

Per la resta de problemes k-COLOR, podem observar el següent.

Proposició

Per a tot $k > 3$, 3-COLOR $\leq^p$ k-COLOR.

La reducció consisteix, donat un graf G, a afegir-li un subgraf complet de $k - 3$ vèrtexs connectats a tots els del G.

Corol·lari

Per a tot $k > 3$, k-COLOR és NP-complet.

Per tant, tenim:

- k-COLOR $\in \mathrm{P}$ per a $k \leq 2$
- k-COLOR és NP-complet per a $k \geq 3$

Fins ara hem vist l'arbre de reduccions següent.