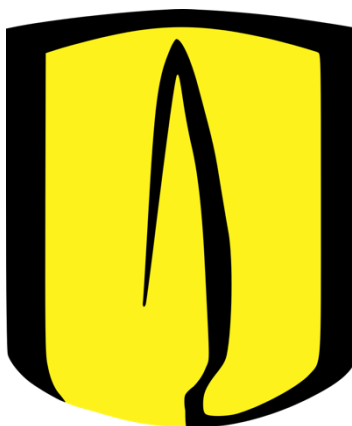


UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS
Y COMPUTACIÓN



Proyecto 1

ISIS-3302 – MODELADO, OPTMIZACIÓN Y SIMULACIÓN

2025-10

Profesor del Laboratorio: Juan Andrés Méndez

Grupo 5

Miguel Arturo Reina 202014739

Daniel Felipe Ortiz 202221234

Juan Diego Osorio 202220148

1) Formulación Matemática

1.1. Definición de Conjuntos:

- **Conjunto de Centros de Distribución:** El conjunto D representa los centros de distribución de la empresa. Cada centro tiene una ubicación geográfica determinada por latitud y longitud, y una capacidad de almacenamiento que define el límite de inventario que puede manejar. El conjunto D está compuesto por los elementos:

$$D = \{D1, D2, D3\}$$

- **Conjunto de Clientes:** El conjunto C agrupa a los clientes o zonas de entrega que requieren recibir productos desde los centros de distribución. Cada cliente tiene una ubicación geográfica definida por su latitud y longitud, así como una demanda específica de productos. El conjunto C está compuesto por los elementos:

$$C = \{C1, C2, C3\}$$

- **Conjunto de vehículos:** El conjunto V representa la flota de vehículos disponibles para la distribución de productos. Cada vehículo tiene una capacidad de carga limitada y un rango útil que determina la distancia máxima que puede recorrer sin necesidad de repostar combustible. El conjunto V está compuesto por los siguientes elementos:

$$V = \{V1, V2, V3\}$$

Cada conjunto está asociado con un índice que lo representa. El índice i se usa para el conjunto D , el índice j se usa para el conjunto C y el índice k se usa para el conjunto V .

1.2. Definición de Parámetros

Ubicación geográfica de los Centros de Distribución y Clientes:

- $lat(i)$: Representa la latitud geográfica en la que está cada centro de distribución $i \in D$.
- $lon(i)$: Representa la longitud geográfica de cada centro de distribución $i \in D$.
- $lat(j)$: Representa la latitud geográfica en la que está cada cliente $j \in C$.
- $lon(j)$: Representa la longitud geográfica de cada cliente $j \in C$.
- $distancia(lat(i), lon(i), lat(j), lon(j))$: Representa la distancia que hay entre un Centro de Distribución $i \in D$ y un Cliente $j \in C$, utilizando la función Euclidiana. Para simplificar en las ecuaciones, se llamará $distancia(i, j)$

Capacidad y Demanda de los Centros de Distribución, Clientes y Vehículos:

- $capacidad(i)$: Representa la capacidad máxima en kg de productos que cada centro de distribución $i \in D$ puede almacenar.

- $capacidad(k)$: Representa la capacidad máxima en unidades de productos que cada vehículo $k \in V$ puede tener.
- $demanda(j)$: Representa la demanda en unidades de producto que un cliente requiere.

Distancia de los Vehículos:

- $rango(k)$: Representa la distancia máxima en kilómetros que puede recorrer el vehículo $k \in V$ con el tanque completo de gasolina

Costo de Gasolina y Consumo por Vehículo:

- Pf : Precio de la gasolina por galón en pesos colombianos. Para este modelo el precio está en:

$$Pf = \$15.753 \text{ COP}$$

- $CostoGasolina(k)$: Representa el costo de gasolina por cada vehículo $k \in V$, calculado a partir de la cantidad de gasolina que consumió ese vehículo al recorrer distancia útil completo.

Tarifa de Mantenimiento y Flete por Vehículo:

- M : Representa el costo de mantenimiento del vehículo, calculado por los siguientes datos:
 - Revisión técnico-mecánica: alrededor de 300.000 pesos
 - Cambio de aceite y filtros: alrededor de 300.000 pesos
 - Alineación y balanceo: entre 65.000 y 85.000 pesos

Considerando que esto se realiza cada año y que en 1 año un vehículo de carga puede hacer 30,000 km. Entonces el costo de mantenimiento por Km es aproximadamente a:

$$M = \$23 \text{ COP/km}$$

- F : Representa la tarifa de Flete. No encontramos una fuente exacta confiable, por lo que optamos por utilizar el valor que nos proporcionan que es:

$$F = \$5 \text{ 000 COP/km}$$

Para el preprocesamiento de los datos, se tomarán cada una de las posiciones dadas en latitud y longitud de los centros de distribución y de las zonas de entrega para obtener una matriz de distancias. En particular, como la escala del problema es a nivel Bogotá, se tomará la distancia **euclidiana** para calcularla.

1.3. Variables de Decisión

Cantidad de Productos Transportados por Vehículo

y_{ijk} : Variable continua que representa la cantidad de productos transportados desde el centro de distribución $i \in D$ al cliente $j \in C$.

$$y_{ijk} \geq 0$$

Esta variable se escogió porque captura la cantidad de productos entregados por un vehículo k en cada viaje desde i hasta j .

Vehículo viaja directamente de un nodo a otro

X_{ijk} : Es una variable de decisión binaria:

- $X_{ijk} = 1$ si el vehículo i viaja directamente desde el nodo j al nodo k .
- $X_{ijk} = 0$ en caso contrario.

Distancia Recorrida por Vehículo

d_{ijk} : Variable continua que representa la distancia recorrida por el vehículo $k \in V$ para transportar productos desde el centro de distribución $i \in D$ hacia un cliente $j \in C$.

$$d_{ijk} \geq 0$$

Esta variable se escogió porque se utiliza para calcular el costo de combustible y mantenimiento de cada vehículo, así como para garantizar que el vehículo no exceda su autonomía.

Asignación de Vehículo a Rutas

z_{ijk} : Variable binaria que indica si el vehículo $k \in V$ es asignado a la ruta desde el centro de distribución $i \in D$ hasta el cliente $j \in C$.

- $z_{ijk} = 1$: Si el vehículo v es asignado al centro de distribución i .
- $z_{ijk} = 0$: Si el vehículo v no es asignado al centro de distribución i .

Esta variable se escogió porque se utiliza para asignar vehículos a rutas específicas, asegurando que se cubran todas las entregas de manera eficiente.

1.4. Restricciones

Capacidad de los Centros de Distribución: Cada centro de distribución tiene una capacidad máxima de almacenamiento. La cantidad total de productos asignados a cada centro de distribución no debe superar su capacidad de almacenamiento.

$$\sum_{j \in C} y_{ijk} \leq \text{capacidad}(i) \quad | \quad \forall i \in D, k \in V$$

Demanda de los Clientes: La demanda de cada cliente debe ser satisfecha completamente. Es decir, la suma de los productos entregados a cada cliente desde los centros de distribución debe igualar la demanda de ese cliente.

$$\sum_{i \in D} \sum_{k \in V} y_{ijk} = \text{demanda}(j) \quad | \quad \forall j \in C$$

Capacidad de los Vehículos: Los vehículos tienen una capacidad máxima de carga. La cantidad de productos transportados por un vehículo no puede exceder su capacidad de carga útil.

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in C} y_{ijk} \leq \text{capacidad}(k) \quad | \quad \forall k \in V$$

Asignación de Vehículos a Rutas: Cada vehículo debe ser asignado a una ruta si está involucrado en el proceso de entrega de productos. Un vehículo no puede ser asignado a una ruta de entrega si no transporta productos.

$$\sum_{j \in C} y_{ijk} \leq \text{capacidad}(k) \cdot z_{ik} \quad | \quad \forall k \in V, i \in D$$

Donde z_{ik} es una variable binaria que indica si el vehículo k es asignado al centro de distribución i . Esta restricción garantiza que el vehículo solo sea asignado a rutas en las que efectivamente transporte productos.

Disponibilidad de Vehículos: No puede haber más vehículos asignados a las rutas de entrega que la cantidad total de vehículos disponibles en la flota. Esta restricción asegura que no se asignen más vehículos de los que realmente existen.

$$\sum_{i \in D} \sum_i z_{ijk} \leq 1 \quad | \quad \forall k \in V$$

Autonomía de los Vehículos: La distancia recorrida por un vehículo no debe exceder su autonomía máxima. La distancia total recorrida en cada ruta no puede superar el rango útil del vehículo.

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in C} d_{ijk} \leq rango(k) \quad | \quad \forall k \in V$$

2. Función Objetivo y Proceso de indagación (10 %):

Plantee de forma explícita la función a optimizar (por ejemplo, minimizar costos operativos y de transporte), considerando posibles penalizaciones por incumplimiento de restricciones. Describa el proceso de indagación realizado para definir y justificar la función objetivo, incluyendo la revisión de literatura y análisis comparativo con casos de estudio relevantes.

$$\min \left(\sum_{i \in V} \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} C_{jk} X_{ijk} + d_{ijk} \cdot distancia(i, j) \right)$$

Donde cada componente tiene el siguiente significado:

- **$\sum \sum \sum$** : Indica la **suma** de los términos que le siguen a través de todos los vehículos ($i \in V$), todos los nodos de origen ($j \in N$), y todos los nodos de destino ($k \in N$). Se asume que el conjunto de nodos N incluye tanto los centros de distribución como los clientes.
- **C_{jk}** : Representa el **costo** asociado a ir directamente desde el nodo j hasta el nodo k . La unidad y la naturaleza específica de este costo (por ejemplo, monetario, tiempo) dependerán de la definición del problema.
- **X_{ijk}** : Es una **variable de decisión binaria**. Toma el valor de 1 si el vehículo i viaja directamente desde el nodo j hasta el nodo k , y 0 en caso contrario.
- **d_{ijk}** : Es un **coeficiente** que multiplica la distancia. Su significado exacto no es claro dada su dependencia de un vehículo (i) y un nodo de origen (j).
- **$distancia(i, j)$** : Intenta representar la **distancia** entre dos puntos. Sin embargo, con los índices i (vehículo) y j (nodo), la notación es conceptualmente imprecisa para representar una distancia geográfica entre ubicaciones.

En esencia, la función objetivo intenta minimizar la suma de los costos incurridos por los viajes de los vehículos entre diferentes ubicaciones. Sin embargo, la formulación presenta

una ambigüedad en cómo se incorpora la distancia debido a la notación utilizada en el segundo término.

3. Preprocesamiento de Datos y Análisis (20 %):

Describe el proceso utilizado para extraer y procesar datos adicionales, como el cálculo de distancias y tiempos de viaje entre puntos (por ejemplo, utilizando la fórmula de Haversine, herramientas GIS o APIs de mapas). Explique cómo se integró esta información en la formulación del modelo.

Para el preprocesamiento de los datos, utilizamos la API de Openroute Service, específicamente el endpoint el cual nos permite pasarle un array de longitudes y latitudes y nos devuelve la matriz de distancia y la matriz de tiempo entre los puntos, por lo que le pasamos el arreglo con las coordenadas de las bodegas y de los clientes y obtuvimos las matrices para las bodegas entre sí, clientes entre sí y bodegas cruzado con clientes. Las matrices obtenidas son las siguientes:

Matriz de distancias Bodegas en Km

Origen/Destino	Bodega Norte	Bodega Sur	Bodega Este
Bodega Norte	0.0	13.66	13.41
Bodega Sur	15.47	0.0	14.88
Bodega Este	15.62	15.55	0.0

Tabla 1 Matriz de distancias Bodegas en Km

Matriz de tiempos Bodegas en min

Origen/Destino	Bodega Norte	Bodega Sur	Bodega Este
Bodega Norte	0.0	21.6	28.67
Bodega Sur	21.64	0.0	33.54
Bodega Este	29.92	33.82	0.0

Tabla 2 Matriz de tiempos Bodegas en min

Matriz de distancias Clientes en Km

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Catalina	0.0	12.4	9.56
Rodrigo	13.96	0.0	10.64
Luis	10.5	8.86	0.0

Tabla 3 Matriz de distancias Clientes en Km

Matriz de tiempos Cliente en min

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
----------------	----------	---------	------

Catalina	0.0	17.74	23.69
Rodrigo	16.73	0.0	25.12
Luis	27.53	24.64	0.0

Tabla 4 Matriz de tiempos Cliente en min

Matriz de distancias Bodega-Clientes en Km

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Bodega Norte	11.92	2.96	7.46
Bodega Sur	7.55	17.77	17.3
Bodega Este	8.81	17.93	12.54

Tabla 5 Matriz de distancias Bodega-Clientes en Km

Matriz de tiempos Bodegas-Clientes Bodegas en min

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Bodega Norte	14.04	5.91	19.47
Bodega Sur	13.57	25.89	34.88
Bodega Este	22.36	34.17	34.57

Tabla 6 Matriz de tiempos Bodegas-Clientes Bodegas en min

Una vez obtuvimos estas matrices, nos cercioramos utilizando Google Maps de que las distancias y los tiempos sean correctos, y efectivamente las distancias y tiempos obtenidos por medio de la API son acordes a lo visualizado por medio de Google Maps:

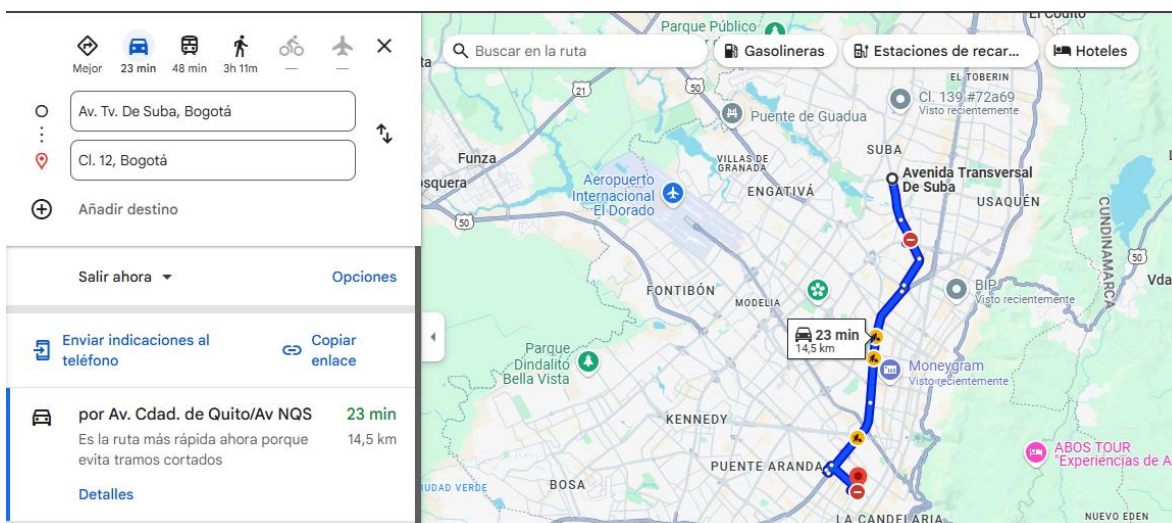


Ilustración 1 Distancia y Tiempo desde Bodega Norte a Bodega Sur

En el ejemplo anterior, podemos observar que el Maps nos arroja una distancia de 14.5 km y la matriz obtenida por la API nos arroja una distancia de 13.66 km, lo cual es menos de 1 km de diferencia, un margen bajo y que para el fin de este proyecto está más que bien, adicionalmente, si nos fijamos en el tiempo, vemos que el Maps

nos arroja un tiempo de 23 min y que la API nos da un tiempo de 21.6 min, al igual que en la distancia, es una diferencia que para los fines del proyecto no deberá de afectar.

4. Ejemplos Ilustrativos (10 %):

Presente casos de aplicación del modelo en escenarios de pequeña escala, mostrando tanto los datos de entrada como los resultados obtenidos. Analice la factibilidad y consistencia de la solución propuesta en dichos escenarios.