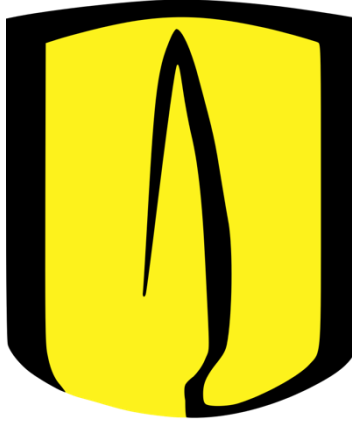


UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE SISTEMAS
Y COMPUTACIÓN



Proyecto 1

ISIS-3302 – MODELADO, OPTMIZACIÓN Y SIMULACIÓN

2025-10

Profesor del Laboratorio: Juan Andrés Méndez

Grupo 5

Miguel Arturo Reina 202014739

Daniel Felipe Ortiz 202221234

Juan Diego Osorio 202220148

1) Formulación Matemática

1.1. Definición de Conjuntos:

- **Conjunto de Centros de Distribución:** El conjunto D representa los centros de distribución de la empresa. Cada centro tiene una ubicación geográfica determinada por latitud y longitud, y una capacidad de almacenamiento que define el límite de inventario que puede manejar. El conjunto D está compuesto por los elementos:

$$D = \{D1, D2, D3\}$$

- **Conjunto de Clientes:** El conjunto C agrupa a los clientes o zonas de entrega que requieren recibir productos desde los centros de distribución. Cada cliente tiene una ubicación geográfica definida por su latitud y longitud, así como una demanda específica de productos. El conjunto C está compuesto por los elementos:

$$C = \{C1, C2, C3\}$$

- **Conjunto de vehículos:** El conjunto V representa la flota de vehículos disponibles para la distribución de productos. Cada vehículo tiene una capacidad de carga limitada y un rango útil que determina la distancia máxima que puede recorrer sin necesidad de repostar combustible. El conjunto V está compuesto por los siguientes elementos:

$$V = \{V1, V2, V3\}$$

Cada conjunto está asociado con un índice que lo representa. El índice i se usa para el conjunto D , el índice j se usa para el conjunto C y el índice k se usa para el conjunto V .

1.2. Definición de Parámetros

Ubicación geográfica de los Centros de Distribución y Clientes:

- $lat(i)$: Representa la latitud geográfica en la que está cada centro de distribución $i \in D$.
- $lon(i)$: Representa la longitud geográfica de cada centro de distribución $i \in D$.
- $lat(j)$: Representa la latitud geográfica en la que está cada cliente $j \in C$.
- $lon(j)$: Representa la longitud geográfica de cada cliente $j \in C$.
- $distancia(lat(i), lon(i), lat(j), lon(j))$: Representa la distancia que hay entre un Centro de Distribución $i \in D$ y un Cliente $j \in C$, utilizando la función Euclidiana. Para simplificar en las ecuaciones, se llamará $distancia(i, j)$

Capacidad y Demanda de los Centros de Distribución, Clientes y Vehículos:

- $capacidad(i)$: Representa la capacidad máxima en kg de productos que cada centro de distribución $i \in D$ puede almacenar.
- $capacidad(k)$: Representa la capacidad máxima en unidades de productos que cada vehículo $k \in V$ puede tener.

- $demanda(j)$: Representa la demanda en unidades de producto que un cliente requiere.

Distancia de los Vehículos:

- $rango(k)$: Representa la distancia máxima en kilómetros que puede recorrer el vehículo $k \in V$ con el tanque completo de gasolina

Costo de Gasolina y Consumo por Vehículo:

- G : Precio de la gasolina por galón en pesos colombianos. Para este modelo el precio está en:

$$G = \$15.753 \text{ COP}$$

Para este modelo, se asume que un galón de gasolina permite que un vehículo recorra 30 km. Esta suposición se fundamenta en un análisis basado en la información disponible en diversas fuentes de internet, que reportan el promedio de rendimiento de combustible de un automóvil estándar.

- Pf : Precio de la gasolina por kilómetros en pesos colombianos. Para este modelo el precio está en:

$$Pf = \frac{G}{30} = \$525.1 \text{ COP/km}$$

Tarifa de Mantenimiento y Flete por Vehículo:

- M : Representa el costo de mantenimiento del vehículo, calculado por los siguientes datos:
 - Revisión técnico-mecánica: alrededor de 300.000 pesos
 - Cambio de aceite y filtros: alrededor de 300.000 pesos
 - Alineación y balanceo: entre 65.000 y 85.000 pesos

Considerando que esto se realiza cada año y que en 1 año un vehículo de carga puede hacer 30,000 km. Entonces el costo de mantenimiento por Km es aproximadamente a:

$$M = \$23 \text{ COP/km}$$

- F : Representa la tarifa de Flete. No encontramos una fuente exacta confiable, por lo que optamos por utilizar el valor que nos proporcionan que es:

$$F = \$5 \text{ 000 COP/km}$$

Para el preprocesamiento de los datos, se tomarán cada una de las posiciones dadas en latitud y longitud de los centros de distribución y de las zonas de entrega para obtener una matriz de distancias. En particular, como la escala del problema es a nivel Bogotá, se tomará la distancia **euclidiana** para calcularla.

1.3. Variables de Decisión

Cantidad de Productos Transportados por Vehículo

y_{ijk} : Variable continua entera positiva incluyendo el 0 que representa la cantidad de productos transportados desde el centro de distribución o un cliente $i \in D \cup C$ al cliente $j \in C$.

$$y_{ijk} \in \mathbb{Z}_0^+$$

Esta variable se escogió porque captura la cantidad de productos entregados por un vehículo k en cada viaje desde i hasta j .

Asignación de Vehículo a Rutas

z_{ijk} : Variable binaria que indica si el vehículo $k \in V$ es asignado a la ruta desde el centro de distribución $i \in D$ hasta el cliente $j \in C$.

- $z_{ijk} = 1$: Si el vehículo v es asignado al centro de distribución i y cliente j .
- $z_{ijk} = 0$: Si el vehículo v no es asignado al centro de distribución i y cliente j .

Esta variable se escogió porque se utiliza para asignar vehículos a rutas específicas, asegurando que se cubran todas las entregas de manera eficiente.

Asignación de Vehículo a Rutas

x_{ijk} : Variable binaria que indica si el vehículo $k \in V$ es asignado a la ruta desde un cliente $i \in C$ hasta otro cliente $j \in C$.

- $x_{ijk} = 1$: Si el vehículo v es asignado al cliente i hacia el cliente j .
- $x_{ijk} = 0$: Si el vehículo v no es asignado al centro de distribución i y cliente j .

Esta variable se escogió porque puede haber conexión entre clientes cuando ello contribuya a una mayor eficiencia en la red de entregas.

1.4. Restricciones

Capacidad de los Centros de Distribución: Cada centro de distribución tiene una capacidad máxima de almacenamiento. La cantidad total de productos asignados a cada centro de distribución no debe superar su capacidad de almacenamiento.

$$\sum_{j \in C} \sum_{k \in V} y_{ijk} \leq \text{capacidad}(i) \quad | \quad \forall i \in D$$

Demanda de los Clientes: La demanda de cada cliente debe ser satisfecha completamente. Es decir, la suma de los productos entregados a cada cliente desde los centros de distribución debe igualar la demanda de ese cliente.

$$\sum_{i \in D} \sum_{k \in V} y_{ijk} = demanda(j) \quad | \quad \forall j \in C$$

Capacidad de los Vehículos: Los vehículos tienen una capacidad máxima de carga. La cantidad de productos transportados por un vehículo no puede exceder su capacidad de carga útil.

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in C} y_{ijk} \leq capacidad(k) \quad | \quad \forall k \in V$$

Autonomía de los Vehículos: La distancia recorrida por un vehículo no debe exceder su autonomía máxima. La distancia total recorrida en cada ruta no puede superar el rango útil del vehículo.

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in C} z_{ijk} \cdot distancia(i, j) + \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} x_{ijk} \cdot distancia(i, j) \leq rango(k) \quad | \quad \forall k \in V$$

Mismo Cliente: Un vehículo no debería ir en círculos he ir al mismo cliente.

$$\sum_{i \in C} x_{iik} = 0 \quad | \quad \forall k \in V$$

$$\sum_{i \in C \cup D | \forall i \in C} y_{iik} = 0 \quad | \quad \forall k \in V$$

2. Función Objetivo y Proceso de indagación:

2.1 Función Objetivo

La **función objetivo** de este modelo busca **minimizar el costo total** asociado con el proceso de distribución de productos, considerando los costos de **flete**, **mantenimiento** y **combustible** de los vehículos. El objetivo principal es lograr una **distribución eficiente**, que permita optimizar el uso de recursos y reducir los gastos operativos de LogistiCo.

$$\min \left(\begin{aligned} & \sum_{i \in D} \sum_{j \in C} \sum_{k \in V} F \cdot z_{ijk} \cdot distancia(i, j) + M \cdot z_{ijk} \cdot distancia(i, j) \\ & + Pf \cdot z_{ijk} \cdot distancia(i, j) \\ & + \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} \sum_{k \in V} F \cdot x_{ijk} \cdot distancia(i, j) + M \cdot x_{ijk} \cdot distancia(i, j) \\ & + Pf \cdot x_{ijk} \cdot distancia(i, j) \end{aligned} \right)$$

El objetivo estratégico de este modelo es reducir los costos operativos asociados con el proceso de distribución de productos. Esto se logra a través de la optimización de las rutas de los vehículos, la gestión eficiente de la capacidad de los centros de distribución y la minimización de los costos de mantenimiento y combustible. Además, el modelo busca garantizar que todas las demandas de los clientes sean satisfechas, sin exceder la capacidad de los vehículos, y minimizando la distancia recorrida por los vehículos, siguiendo el enfoque inspirado en el Problema del Viajante de Comercio (TSP).

3. Preprocesamiento de Datos y Análisis:

Para el preprocesamiento de los datos, utilizamos la API de Openroute Service, específicamente el endpoint el cual nos permite pasarle un array de longitudes y latitudes y nos devuelve la matriz de distancia y la matriz de tiempo entre los puntos, por lo que le pasamos el arreglo con las coordenadas de las bodegas y de los clientes y obtuvimos las matrices para las bodegas entre sí, clientes entre sí y bodegas cruzado con clientes. Las matrices obtenidas son las siguientes:

Matriz de distancias Bodegas en Km

Origen/Destino	Bodega Norte	Bodega Sur	Bodega Este
Bodega Norte	0.0	13.66	13.41
Bodega Sur	15.47	0.0	14.88
Bodega Este	15.62	15.55	0.0

Tabla 1 Matriz de distancias Bodegas en Km

Matriz de tiempos Bodegas en min

Origen/Destino	Bodega Norte	Bodega Sur	Bodega Este
Bodega Norte	0.0	21.6	28.67
Bodega Sur	21.64	0.0	33.54
Bodega Este	29.92	33.82	0.0

Tabla 2 Matriz de tiempos Bodegas en min

Matriz de distancias Clientes en Km

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Catalina	0.0	12.4	9.56
Rodrigo	13.96	0.0	10.64
Luis	10.5	8.86	0.0

Tabla 3 Matriz de distancias Clientes en Km

Matriz de tiempos Cliente en min

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Catalina	0.0	17.74	23.69
Rodrigo	16.73	0.0	25.12
Luis	27.53	24.64	0.0

Tabla 4 Matriz de tiempos Cliente en min

Matriz de distancias Bodega-Clientes en Km

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Bodega Norte	11.92	2.96	7.46
Bodega Sur	7.55	17.77	17.3
Bodega Este	8.81	17.93	12.54

Tabla 5 Matriz de distancias Bodega-Clientes en Km

Matriz de tiempos Bodegas-Clientes Bodegas en min

Origen/Destino	Catalina	Rodrigo	Luis
Bodega Norte	14.04	5.91	19.47
Bodega Sur	13.57	25.89	34.88
Bodega Este	22.36	34.17	34.57

Tabla 6 Matriz de tiempos Bodegas-Clientes Bodegas en min

Una vez obtuvimos estas matrices, nos cercioramos utilizando Google Maps de que las distancias y los tiempos sean correctos, y efectivamente las distancias y tiempos obtenidos por medio de la API son acordes a lo visualizado por medio de Google Maps:

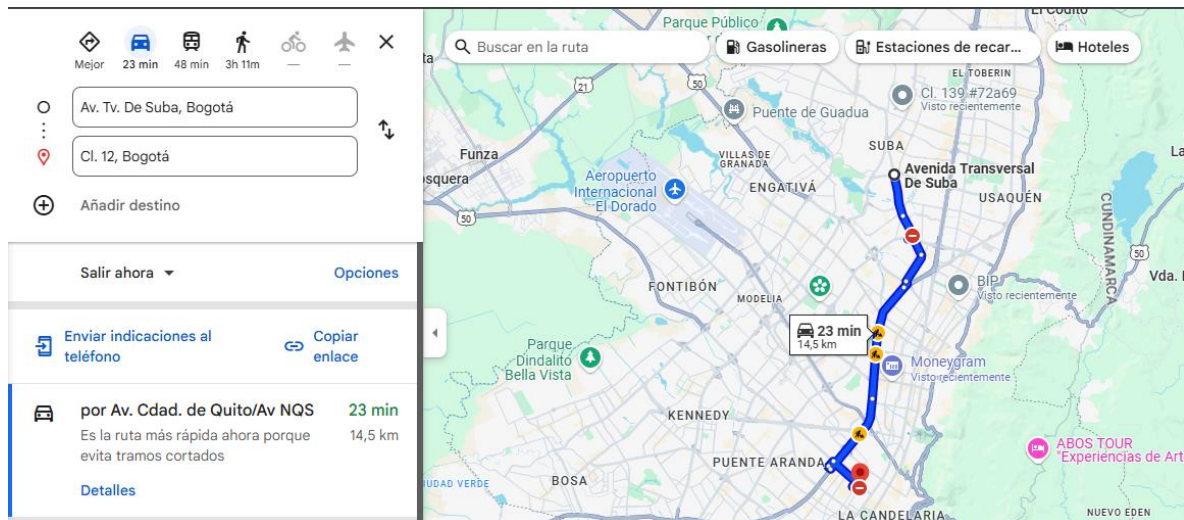


Ilustración 1 Distancia y Tiempo desde Bodega Norte a Bodega Sur

En el ejemplo anterior, podemos observar que el Maps nos arroja una distancia de 14.5 km y la matriz obtenida por la API nos arroja una distancia de 13.66 km, lo cual es menos de 1 km de diferencia, un margen bajo y que para el fin de este proyecto está más que bien, adicionalmente, si nos fijamos en el tiempo, vemos que el Maps nos arroja un tiempo de 23 min y que la API nos da un tiempo de 21.6 min, al igual que en la distancia, es una diferencia que para los fines del proyecto no deberá de afectar.

4. Ejemplos Ilustrativos (10 %):

Presente casos de aplicación del modelo en escenarios de pequeña escala, mostrando tanto los datos de entrada como los resultados obtenidos. Analice la factibilidad y consistencia de la solución propuesta en dichos escenarios.

Ejemplo Ilustrativo 1: Un solo vehículo (V2) y dos clientes (C1 y C2)

Escenario: Un vehículo con capacidad de 80 unidades debe entregar productos a dos clientes: Catalina (C1) que demanda 50 unidades y Rodrigo (C2) que demanda 80 unidades. El vehículo parte del Centro de Distribución Bodega Norte (CD1).

Datos de Entrada:

- Clientes: C1 (Catalina, 50 unidades), C2 (Rodrigo, 80 unidades)
- Vehículo: V2 (Capacidad 80 unidades)
- Centro de Distribución: CD1 (Bodega Norte)
- Matriz de Distancias Bodega-Clientes:
 - CD1 a C1: 11.92 km

- CD1 a C2: 2.96 km
- Matriz de Distancias Clientes:
 - C1 a C2: 12.4 km
 - C2 a C1: 13.96 km
- Costo por Kilómetro: 5548.1 pesos/km

Posible Ruta y Cálculo de Costos:

Consideramos la ruta CD1 -> C1 -> C2 -> CD1.

- Distancia CD1 a C1: 11.92 km
- Distancia C1 a C2: 12.4 km
- Distancia C2 a CD1: 2.96 km
- Distancia Total: $11.92 + 12.4 + 2.96 = 27.28$ km
- El vehículo V2 carga 80 unidades en CD1. Entrega 50 unidades a C1 (quedan 30 unidades en el vehículo). Luego se dirige a C2 y entrega las 30 unidades restantes. La demanda de C2 no se satisface completamente (faltan 50 unidades).
- Costo Total: $27.28 \text{ km} * 5548.1 \text{ pesos/km} = 151,349.97$ pesos

Análisis:

Esta solución es factible en términos de la ruta seguida y la capacidad del vehículo en cada tramo. Sin embargo, no es completamente consistente con el objetivo de satisfacer toda la demanda, ya que el cliente C2 solo recibe 30 de las 80 unidades requeridas. El costo asociado a esta entrega parcial es de 151,349.97 pesos. Para satisfacer completamente la demanda, se requeriría un segundo viaje o la utilización de otro vehículo, lo que implicaría costos adicionales.

Ejemplo Ilustrativo 2: Un vehículo (V1) y tres clientes (C1, C2, C3) - considerando una entrega parcial

Escenario: Un vehículo con capacidad de 100 unidades debe intentar entregar productos a tres clientes: Catalina (C1) con 50 unidades, Rodrigo (C2) con 80 unidades, y Luis (C3) con 65 unidades. El vehículo parte del Centro de Distribución Bodega Norte (CD1).

Datos de Entrada:

- Clientes: C1 (50), C2 (80), C3 (65)
- Vehículo: V1 (Capacidad 100 unidades)
- Centro de Distribución: CD1 (Bodega Norte)
- Matriz de Distancias Bodega-Clientes:
 - CD1 a C1: 11.92 km

- CD1 a C2: 2.96 km
- CD1 a C3: 7.46 km
- Matriz de Distancias Clientes:
 - C1 a C3: 9.56 km
 - C3 a C1: 10.5 km
- Costo por Kilómetro: 5548.1 pesos/km

Posible Ruta y Cálculo de Costos:

Consideramos la ruta CD1 -> C1 -> C3 -> CD1, intentando servir a la mayor demanda posible dentro de la capacidad del vehículo V1.

- Distancia CD1 a C1: 11.92 km
- Distancia C1 a C3: 9.56 km
- Distancia C3 a CD1: 7.46 km
- Distancia Total: $11.92 + 9.56 + 7.46 = 28.94$ km
- El vehículo V1 carga 100 unidades en CD1. Entrega 50 unidades a C1 (quedan 50 unidades en el vehículo). Luego se dirige a C3 y entrega las 50 unidades restantes. La demanda de C3 no se satisface completamente (faltan 15 unidades), y la demanda de C2 no se atiende.
- Costo Total: $28.94 \text{ km} * 5548.1 \text{ pesos/km} = 160,515.19$ pesos

Análisis:

Esta solución es factible en términos de ruta y capacidad del vehículo. Sin embargo, solo se satisface completamente la demanda de C1, mientras que la demanda de C3 se cubre parcialmente y la de C2 no se atiende. El costo asociado a esta entrega parcial a dos clientes es de 160,515.19 pesos. Para lograr una cobertura completa, se necesitarían recursos adicionales.

Ejemplo Ilustrativo 3: Un vehículo (V1) sirviendo solo a un cliente (C2) completamente

Escenario: Un vehículo con capacidad de 100 unidades se dedica a entregar la demanda completa de un solo cliente: Rodrigo (C2) que requiere 80 unidades. El vehículo parte del Centro de Distribución Bodega Norte (CD1).

Datos de Entrada:

- Cliente: C2 (80 unidades)
- Vehículo: V1 (Capacidad 100 unidades)
- Centro de Distribución: CD1 (Bodega Norte)
- Matriz de Distancias Bodega-Clientes:
 - CD1 a C2: 2.96 km

- Costo por Kilómetro: 5548.1 pesos/km

Posible Ruta y Cálculo de Costos:

Consideramos la ruta directa CD1 -> C2 -> CD1.

- Distancia CD1 a C2: 2.96 km
- Distancia C2 a CD1: 2.96 km
- Distancia Total: $2.96 + 2.96 = 5.92$ km
- El vehículo V1 carga 80 unidades en CD1 y las entrega completamente a C2.
- Costo Total: $5.92 \text{ km} * 5548.1 \text{ pesos/km} = 32,845.75$ pesos

Análisis:

Esta solución es factible y consistente para el cliente C2, ya que su demanda se satisface completamente dentro de la capacidad del vehículo. El costo asociado a esta entrega es de 32,845.75 pesos. Sin embargo, los clientes C1 y C3 no son atendidos con esta ruta, lo que requeriría viajes adicionales y generaría más costos.