$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pivote

$$\begin{array}{ccc} & \text{no} & \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \\ \text{pivote} & & \text{pivote} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & \text{no} & \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

pivote

$$\begin{array}{ccccc} \text{no} & & \text{no} & \text{no} & \\ \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right] \\ & \text{pivote} & & & \text{pivote} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & \text{NO} & \text{NO} \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right] \\ \text{pivote} & \text{pivote} & & \end{array}$$

Fórmulas

Inversa Izq. de B.

$P_{B' \cdot B} = \Delta B'$

$M_{B_1 B_2} = B_2^{-1} \cdot M(f) \cdot B_1$

$M_{B_1 I_4} = M(f) \cdot M_{B_1}$

$M_{I_2 B_2} = B_2^{-1} \cdot M(f)$.

$P_{B_1 B_2} = B_2^{-1} \cdot B_1$

$M_{B_2 B_3}(f \circ g)$
$= B_3^{-1} \cdot M(f) \cdot M(g) \cdot B_2$.

Calcula $M(f)$.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$[B | y]$

Si es imagen reduces

y si es S.C. está en la imagen y.

$B \cdot y$ = Si da columnas de 0 está en el núcleo.

~~Ker f =~~

$M_{B_1 B_2}(f \circ g) = \cancel{M_{B_1 B_2}(f)}$

Para hallar una base cuando te dan esto

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

C D

$B \cdot D = C$

$B = C \cdot D^{-1}$

$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
$B_3$ $B_2$ $B_1$

$M_{B_3 B_1}(f \circ g) = M_{B_2 B_1}(f)\ M_{B_3 B_2}(g)$

Núcleo de f = anulador por la derecha de f. → pones la matriz B y una de coef = 0

Imagen = espacio columnas de f.

$B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$.

Para estar contenido $U \subseteq V$
$A$ $B$

$B \cdot D = 0$

$U+V$ en paramétricas

$N(U)$ $C(B)$

Se pasa la matriz $N(U)$ a paramétricas (con la traspuesta) y se  reduce con la id.

$$\left[\begin{array}{c|c} N_U & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$$

1. De paramétricas a implícitas $[B|I] \xrightarrow[\text{filas}]{\text{red}} \left[\begin{array}{c|c} R & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right] \rightarrow$ implícita.
2. De implícitas a paramétricas $[N^T|I] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} R & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$

- Base del espacio anulador por la derecha
  - (1) Si es S.C.D, la base es conjunto vacío.
  - (2) Si es SCI, base es 0 en columnas pivote y si da todo 0 $x_n = a$ $\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - (3) Si es S.I. no tiene.

la columna no pivote es $= a$.

- Para las inversas.

Si tiene más filas $\rightarrow [B|I] \xrightarrow[\text{filas}]{\text{red}} \left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ Calcular todas las inv. izq $P + C \cdot Q$
lin. indep
izquierda

Si tiene más columnas $\rightarrow [B^T|I] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$
derecha generadoras.

Generadora $\Rightarrow$ ran(B) = nº filas

Lin. indep $\Rightarrow$ nº columnas = ran(B).

---

$U+V$ en paramétricas.

el anulador se pasa a paramétricas (implícitas)

$[N^T|I] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & B^T \end{array}\right]$ se traspone otra vez.

$U+V = C([B|N])$

$U+V$ en implícita

al revés, param. a impl:

$[B|I] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & N \end{array}\right] \rightarrow U+V = C([B|N])$.

$U \cap V$ en impli.

pasar B a impli.

$U \cap V = N\left(\dfrac{B \text{ en impli.}}{N}\right)$

$U \cap V$ en paramétricas.

mismo que $U+V$ en param.

pero $U \cap V = N\left(\dfrac{B \text{ traspuesta otra vez}}{B}\right)$

# 14. Inclusión e Igualdad de Subespacios.

$U \subseteq V$    $U = C(A)$ paramétricas.    $V = N(B)$ implícitas

$U$ incluido en $V$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \,\middle|\, B\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$U \subseteq V \iff$ los generadores de $U$ cumplen las ecuaciones de $V \iff B\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 0$, $B\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = 0$

$\iff B \cdot A = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

el vector $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ no cumple la ec. $x_1 + x_2 = 0$ $\Rightarrow U \not\subseteq V$

**Prop:** De todo conjunto generador de $V$ se puede extraer una base de $V$

**Dem:** $V = C(A)$ reducimos $A$ y sacamos las columnas de $A$ que corresponden con columnas pivote, estos serán generadores y lin. indep $\Rightarrow$ base de $V$.

**Prop:** Todo conjunto lin. indep. de vectores de $V$ se puede extender a una base de $V$.

**Dem:** $\{v_1, v_2 \dots v_k\}$ lin. indep. en $V$, $\{b_1, b_2 \dots b_n\}$ base de $V$. $\Rightarrow \{v_1, v_2 \dots v_k, b_1, b_2 \dots b_n\}$ generador de $V$

$$\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix} \to \text{reducimos.}$$

(Las $k$ primeras columnas serán pivotes y añadiremos los $b_j$ que salgan pivote al reducir)

**Prop:** Sean $U \subseteq V$ espacios vectoriales tal que $\dim(U) = \dim(V)$ entonces $U = V$.

**Dem:** Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ base de $U$ y $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ base de $V$.

El conjunto $\{u_1, u_2 \dots u_n\}$ es lin. indep y lo podemos extender a una base de $V$ pero como todas las bases tienen el mismo nº de elementos (la dimensión) realmente no podemos añadir nada

$\Rightarrow \{u_1 \dots u_n\}$ base de $V \Rightarrow U = V$.

## 18. Cálculo de las bases de los 4 espacios asociados a una matriz.

$A \in M_{m\times n}(K)$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ $\qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$.

| | |
|---|---|
| $C(A)$ generado por las columnas de $A$. ($K^m$) <br> vectores de $A$ que al reducir se convierten en columnas pivote $\dim(C(A)) = r$. | $C(A^T)$ generado por las filas de $A$. ($K^n$) <br> Base de $C(A^T)$ filas de la matriz reducida dist. de 0 <br> $\dim(C(A^T)) = r$. |
| $N(A^T)$ anulador por la izq. de $A$. <br> $\dim(N(A^T)) = m-r$. | $N(A)$ anulador por la derecha de $A$. <br> $\dim(N(A)) = n-r$. |

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{filas}]{\text{red}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\uparrow v_1 \quad \uparrow v_2 \quad \uparrow v_3$

$v_1, v_2$ son lin. indep

$v_3$ dependiente de $v_1$ y $v_2$.

1. $C(A)$ generado por las columnas

$C(A) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\Rightarrow$ Base de $C(A) = \{v_1, v_2\}$

vectores de $A$ que al reducir se convierten en columnas pivote.

$\dim(C(A)) = $ rango.

dimensión

2. $C(A^T)$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Base de $C(A^T)$ filas de la matriz reducida distintos de 0 $\dim(C(A^T)) = r$.

3. $N(A)$ anulador por la derecha de $A$.

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} / A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$3x_1 + 4x_2 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$
$4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
$4x_1 + x_3 = 0$

sist. ec. equivalente

$x_1 + 4x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$

hacemos parámetros las columnas que no son pivote

$x_3 = \lambda$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\lambda$

Base de $N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Base de $N(A)$ son los vectores asociados a las soluciones del sistema

$\dim(N(A)) = n-r$.

4. Base de $N(A^T)$ anulador por la izq. de $A$

$A^T \cdot v = 0 \iff (A^T \cdot v)^T = 0 \iff v^T \cdot A = 0$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base de $N(A^T)$ filas que aparecen a la derecha de los 0 en la matriz extendida

$\dim(N(A^T)) = m-r$.

# 17. Bases, coordenadas y Dimensión.

Bases.

¿ espacio V generado por las columnas de B.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad V = C(B)$$

cualquier vector $y \in V$ se escribe como $B \cdot x$

si B tiene columnas lin. indep. este x es único

$$Bx = y = Bx' \Rightarrow B(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \in N(B) \Rightarrow x = x'$$

Def: Sea B una matriz. Diremos que las columnas de B son una base del espacio vectorial V si (1) son lin. indep. (2) son generadoras de V ($V = C(B)$).

En este caso todo vector $y \in V$ se escribe de forma única como $y = Bx$. El vector x diremos que es el vector de coordenadas de y en base B ($y = x_B$).

---

coordenadas (1 forma).

sea $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in V$, vamos a calcular las coordenadas de y en base B.

B = igual a anterior.

$$y = Bx \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$

$4x_1 + x_2 = 4$

$x_1 + x_2 = 3$

$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$.

resolvemos el sistema y obtenemos $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = B \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \; B \cdot x \qquad y = B \cdot x$$

> Si no encontrásemos solución, el vector no pertenece al espacio

1.

2 forma.

Reducimos B con matriz ampliada con la identidad.

$$[B|I] \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & \Delta \\ \hline 0 & N \end{array}\right]$$

nos da las ecs. implícitas del espacio independientes

$\Delta$ ← inversa izquierda.

$N$ ← ec. implícitas de N.

$y = Bx$ multiplicamos ambos miembros por $\Delta \Rightarrow \Delta y = \Delta Bx = Ix = x$

Para

Si

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ok.} \qquad y \in V \Leftrightarrow Ny = 0$$

se obtienen las coordenadas.

$y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 = 0$

$2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_5 = 0$

Ec. implícitas.

- Si tenemos 2 inversas laterales $\Delta$ y $\Delta'$, entonces $\Delta = \Delta' + CN \Rightarrow \Delta y = (\Delta' y + \overset{\to 0}{CNy}) = \Delta' y$
(el cálculo no depende de la inversa lateral elegida).

- Supongamos $B$ y $B'$ son bases de $U$, tenemos $x'$ coordenadas de un vector en base $B'$ y las queremos en base $B$.

El vector es $y = B'x'$, queremos $x$ tal que $y = Bx$

$\Rightarrow Bx = B'x' \Rightarrow x = Ix = \Delta Bx = (\Delta \cdot B')x'$.

Multiplicando por $\Delta$ inversa izq. de $B$

Matriz cambio de base $B'$ a $B$

$P_{B'B} = \Delta B'$

**Prop.** Sea $U$ espacio vectorial, $B, B', B''$ tres bases de $U$.

(1) $P_{B'B} = \Delta B'$ siendo $\Delta$ inversa izq. de $B$. (2) las columnas de $P_{B'B}$ son las coordenadas de cada uno de los vectores de la base $B'$ escritos en base $B$.

(3) $P_{BB} = I$ (4) $P_{B'B} \cdot P_{B''B'} = P_{B''B}$ (5) $P_{B'B}$ invertible (6) Todas las bases de $U$ tienen el mismo nº de e

**Def** → El nº de elems. de una base de $U$ se llama dimensión de $U$.

- Sean $U$, $V$ espacios vectoriales con bases $B'$ y $B$
$f: U \to V$ lineal si $f(u+u') = f(u) + f(u')$ y $f(cu) = cf(u)$.

**Def** → Llamaremos matriz de $f$ en las bases $B'$ y $B$, y la denotaremos $M_{B'B}(f)$, a la matriz tal que si $B'x'$ es un vector de $U$ con coordenadas $x'$ en base $B'$, entonces $M_{B'B}(f)x'$ son las coordenadas de $f(B'x')$ en base $B$.

**Prop** → (1) $M_{B'B}(f) = \Delta f(B')$ siendo $\Delta$ cualquier inversa izq. de $B$. (2) Si $v'_1, v'_2 \dots v'_n$ son las columnas de $B'$ entonces $M_{B'B}(f)$ está formado por las coordenadas de $f(v'_1), f(v'_2) \dots f(v'_n)$ en base $B$.

(3)
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] & U \arrow[r, "f"] & V \\ B'' \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & B' & B \end{tikzcd}$$

$M_{B''B}(f\circ g) = M_{B'B}(f) \cdot M_{B''B'}(g)$.

(4) $\underset{B'}{id}: \underset{B'}{V} \to \underset{B}{V}$ $M_{B'B}(id) = P_{B'B}$.

(5) $f: \underset{C'}{K^n} \to \underset{C}{K^m}$ $M(f) = M_{C'C}(f)$

Bases canónicas

**Prop:** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $V = C(A)$ y $B \in \mathbb{K}^m$ entonces $B \in V \Leftrightarrow$ al reducir la matriz $[A|B]$ la columna de $B$ no es pivote.

**Prop:** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $V = C(A)$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $U = C(B)$ entonces $U \subseteq V \Leftrightarrow$ al reducir la matriz $[A|B]$, la columna $B$ no son pivotes.

Ejemplo: $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{Z}_5^4 \quad V = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{filas}]{\text{red}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow U \subseteq V.$$

## 16. Representación implícita y paramétrica de Espacios vectoriales.

Paramétrica $V = \underset{\text{generado por columnas } B}{C(B)}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C(B) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \middle/ \begin{array}{l} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = x_1 + 2x_2 \\ y_3 = 3x_2 \\ y_4 = x_1 + 2x_2 \end{array} \right\}$$

$x_1 x_2$ parámetro libre

Implícita $V = \underset{\text{espacio anulador derecha}}{N(H)}$.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \middle/ \begin{array}{l} 3y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 4y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}$$

¿Cuando $C(B) = N(H)$?

¿Podemos pasar de una a otra?

1. Teor → Sean $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $H \in M_{p\times m}(\mathbb{K})$ entonces $\boxed{C(B) \underset{\text{contenido}}{\subseteq} N(H) \Leftrightarrow H \cdot B = 0.}$

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H.$$

Paramétricas a implícitas.

$$C\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \subseteq N\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{porque} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pero en este caso son iguales porque $y \in N(H)$ el sistema tiene solución

Para pasar de implícitas a paramétricas.

Si tenemos $V = N(H)$. ponemos $H$ en forma traspuesta y reducimos con la identidad $[H^t | I] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|c} R_0 & A \\ \hline 0 & \underset{\text{Paramétrica}}{B} \end{array}\right]$

$H \cdot B = 0$

## 15. Determinantes.

(1) $|E_{\lambda(p)} A| = \lambda |A|$

(2) $|E_{(p)+\lambda(q)} A| = |A|$

(3) $|E_{(p,q)} A| = -|A|$

(4) $|A| = 0$ si tiene una fila de 0.

(5) $|I| = 1$.

Si llegamos a una matriz triangularizada $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \\ 0 & & & \ddots \lambda_n \end{vmatrix} =$

$= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}$.

$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}_{A}$ $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}}_{E_{\frac{1}{\lambda}(1)} A}$

$|A| = |E_{\lambda^{-1}(1)} A| = \lambda^{-1} |A|$.

$|A| = \lambda_1 |E_{\lambda_1(1)} A|$

## 14. Aplicaciones lineales.

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}$

$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$x \quad -2x_3 = 2.$

Def: $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ aplicación lineal si (1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ $\forall u, v \in \mathbb{K}^n$

(2) $f(c \cdot u) = c f(u)$ $\forall c \in \mathbb{K}$ $\forall u \in \mathbb{K}^n$

$id: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $id(u) = u$ $\forall u \in \mathbb{K}^n$ (aplicación identidad).

$0: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ $0(u) = 0$ $\forall u \in \mathbb{K}^n$ (apl. nula.

Sea $E$ una op. elemental por filas. Consideramos $E$ aplicado a las matrices $m \times 1$ (vectores), entonces $E$ es una apl. lineal.

Prop: Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, definimos $f(x) = Ax$ para todo vector $x \in \mathbb{K}^n$. Entonces $f$ es una apl. lineal entre $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ ($F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$).

Prop: Sea $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineal, entonces (1) Existe una única matriz, $M(f)$, tal que $f(u) = M(f) u$ $\forall u \in \mathbb{K}^n$

(2) si aplicamos $f$ a multiples columnas de una matriz $B$, entonces $f(B) = M(f) B$

(3) Si aplicamos $f$ a las columnas de la matriz id., $f(I) = M(f) I = M(f)$

(4) La matriz $M(f)$ se llamará matriz asociada a la apl. lineal $f$.

(5) si $f$ ya venía dada por una matriz $A$, $f(x) = Ax$, entonces

$M(f) = f(I) = A \cdot I = A$.

## 12. Matrices inversas e inversas parciales.

**Prop:** Sea $B$ matriz cuadrada, tenemos $[B|I]$ y reducimos por filas $[B|I] \rightsquigarrow [R|P]$

(1) Si $R = I$, entonces $P \cdot B = I$, por tanto $P = B^{-1}$

(2) Si $R \neq I$ $B$ no es invertible

Caso Matriz Cuadrada.

**Prop:** Sea $B$ una matriz $m\times n$ con $m \geq n$, reducimos $[B|I]$ y obtenemos $\left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ entonces los inversas laterales por la izq. son $P + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{columna} \\ \text{parámetros.}}}{C} \cdot Q$ ; si no, no tiene inversas laterales por la izquierda.

**Prop:** Para inversas laterales por la derecha con matriz $m\times n$ con $\overset{\text{filas}}{m} \leq \overset{\text{columnas}}{n}$ ; tomamos la matriz traspuesta.

$[B^t | I] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ $\quad B \cdot P^t = I$.

## 11 Espacios Vectoriales

$$\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}} \underset{v_2}{\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}} \qquad 3v_1 + 2v_2 = 3\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix} = \underset{\text{vectores}}{\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\0&1\end{bmatrix}} \underset{\text{coefi.}}{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}$$

**Def:** Si los $v_i$ son las columnas de una matriz $A$, es decir, $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

El espacio generado por las columnas de $A$ lo denotaremos $C(A) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

**Def.** $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle/\; B\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \right\}$

Espacio anulador por la derecha de $B$.

## 10. Exp. modular.

$$11^{315} \pmod{71} = 11^{70\cdot 4 + 35} = \underbrace{(11^{70})^4}_{1} \cdot 11^{35} \equiv 11^{35} \pmod{71} \underset{\substack{\text{múltiplos} \\ \text{de 2.}}}{\overset{\text{hacer}}{\rightsquigarrow}} 11 \cdot 11^{2\cdot 17} = 11 \cdot (\overset{\substack{\text{calcula} \\ \downarrow}}{11^2})^{17} = 11\cdot 50^{17} = 11\cdot 50 (\overset{\substack{\text{calcular} \\ \downarrow}}{50^2})^8$$

$$= 11 \cdot 50 \cdot 15^8 = 11\cdot 50 \cdot (15^2)^4 = 11\cdot 50\cdot (12^2)^2$$

$$= 11\cdot 50 \cdot 2^2 = 2200 \equiv 70 \pmod{71}.$$

1. Formula euler.

$\varphi(71) = 70 \;//\; 11^{70} \equiv 1 \pmod{71}$

Ejem: (vectores fila)

$[1\ 2\ 1]$ $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ $\quad [1\ 2\ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + 2x_2 + x_3$

$M_{1\times 3}(\mathbb{R})$

Prop: Sean $f: K^m \to K^p$ y $g: K^n \to K^m$ $\quad (f \circ g)(u) = f(g(u))$

$$\underbrace{K^n \xrightarrow{g} K^m \xrightarrow{f} K^p}_{f\circ g}$$

Entonces $f \circ g$ es lineal y $M(f\circ g) = M(f) \cdot M(g)$

La imagen de $u$ se calcula, teniendo $M(f)$; imagen $= M(f) \cdot u = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ // $u$ estará en el núcleo si $M(f) \cdot u = 0$

pues es una matriz

La antiimagen de $u$ $\quad M(f) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = u.$

para que esté en la imagen el sistema tiene que ser compatible.

$[M(f) | u]$

$f$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ ran$(A)$ = nº de columnas de $A = 3$ // $\ker f = 0$.

sobreyectiva $\Leftrightarrow$ ran$(A)$ = nº de filas de $A = 4$ // $\operatorname{Im} f = K^m$.

biyectiva $\Leftrightarrow$ $f$ es inyectiva y sobreyectiva.

# 13. Conjuntos linealmente independiente y generadores.

Linealmente indep. si $N(A) = 0$

Si $R$ es reducida

lin. indep $\Leftrightarrow$ nº de pivotes = nº columnas.

si las columnas de $R$ es lin. indep, $R$ tiene inversa por la izq.

Generadoras si $C(A) = K^m$.

Si $R$ es reducida

generadora $\Leftrightarrow$ nº pivotes = nº filas.

si las columnas de $R$ es generadora, $R$ tiene inversa por la derecha

$R$ tiene inversas por ambos lados si sus columnas son lin. indep y generadoras.

## 9. Unidades de $\mathbb{Z}_n$ y fórmula de Euler.

Prop: Sea $n$ entero positivo y $a \in \mathbb{Z}_n$. Entonces $a$ es invertible si y solo si $mcd(a,n)=1$.

Def: $\mathbb{Z}_n^*$ subconjunto de $\mathbb{Z}_n$ formado por sus elementos invertibles.

Prop: Si $p$ es primo, $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo.

Prop: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ si $p$ primo. $\qquad \varphi(15) = \varphi(3\cdot 5) = (3-1)(5-1) = 8$

Sea $a$ tal que $mcd(a,n)=1$, entonces $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

## 8. Teorema chino de los restos.

| Caso 1 | Caso 2 | Caso 3 | Caso 4. |
|---|---|---|---|
| $n \equiv a_1 \pmod{m_1}$ | ← igual | $n \equiv a_1 \pmod{m_1}$ | $b_1 \cdot n \equiv a_1 \pmod{m_1}$ |
| $n \equiv a_2 \pmod{m_2}$ | pero | $n \equiv a_2 \pmod{m_2}$ primero | $b_2 n \equiv a_2 \pmod{m_2}$. |
| $mcd(m_1, m_2) = 1$ | $mcd(m_1,m_2) \neq 1$. | $n \equiv a_3 \pmod{m_3}$ 2º | $2n = 1+5x \Rightarrow 6n = 3+15x$ |
| $n = a_1 + m_1 x$ | | $\vdots$ | $3n = 2+7y \quad 6n = 4+14y$ ... |
| $n = a_2 + m_2 y$ | | | resolver y sustituir en $6n$. Finalmente dividir por 6. |
| $a_1 + m_1 x = a_2 + m_2 y$ | | | |

## 7. Ec. diofántica.

La ecuación diofántica $ax+by=m$ tiene solución si $mcd(a,b)$ es divisor de $m$.

$132x + 27y = 6$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 132 & 1 & 0 \\ 27 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -44 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 132 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$132 \cdot (-1) \cdot 2 + 27 \cdot 5 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6. \qquad x = -2 + 9t$

$132 \cdot 9 \cdot t + 27 \cdot (-44) t = 0 \qquad y = 10 - 44t.$