# Fundamentos Lógicos de la Informática

## Lógica de Predicados de Primer Orden

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática
Universidad de Murcia

# Desarrollo

# Lógica de Predicados

- Lógica de Predicados trabaja con las "oraciones lógicas".
  - De Orden Cero. Es la lógica proposicional.
    Oraciones lógicas formadas por proposiciones.
  - De Primer Orden.
    Considera la estructura interna de las proposiciones: los objetos y las relaciones entre ellos. Trabaja con **variables de individuo**.
    - Lógica categórica: Dado un objeto, expresa relaciones entre dos categorías por inclusión de dicho objeto.
    - Lógica de relaciones: Expresa relaciones binarias entre dos objetos por predicados.
    - Lógica de Predicados de Primer Orden: Expresa relaciones de cualquier orden.
  - De Segundo Orden: Extiende la de primer orden, y donde las propiedades, relaciones y funciones también puede ser cuantificadas.
- Símbolos similares al álgebra de conjuntos.
- Los esquemas lógicos que considera son los deductivos formalmente válidos

# Predicados, una extensión natural de categorías

Recuerda: $P = \{x|\ P(x)\}$, es decir $Conj = \{x|x \text{ es Propiedad}\}$

| Expresión natural | Se formaliza: En conjuntos | Se formaliza: En lógica | |
|---|---|---|---|
| "$x$ es $Q$" | $x \in Q$ | $Q(x)$ | Ser alto |
| "$x$ e $y$ son $R$" | $(x, y) \in R$ | $R(x, y)$ | Ser hermanos |
| "$x$, $y$ y $z$ son $S$" | $(x, y, z) \in S$ | $S(x, y, z)$ | Alumno-Curso-Not |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | |
| "Términos" son "Cualidad" | Relaciones ¡Conjuntos! | Predicados | |

- En LC estudiamos conjuntos y después categorías.
- Ahora, en L1, estudiaremos relaciones y después predicados.

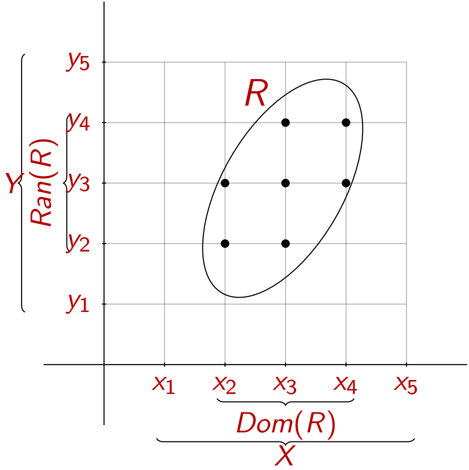
# Desarrollo

# Relaciones Binarias de Conjuntos son Conjuntos

- Dados dos conjuntos $A$ y $B$, se dice que $R$ es una **relación binaria entre** $A$ y $B$ si $R \subseteq A \times B$.
- Si $B = A$, se dice que $R \subseteq A \times A = A^2$ es una *relación sobre* $A$.
- $x$ está relacionado con $y$ por la relación $R$:
$$(x, y) \in R,\ xRy \text{ o } R(x, y).$$
- $x$ **no** está relacionado con $y$ por la relación $R$:
$$(x, y) \notin R,\ x \not R y,\ \neg(xRy),\ \neg R(x, y).$$
- Dada una relación binaria $R$ se define:
  - El dominio de la relación: $Dom(R) = \{x | x \in A,\ xRy \text{ para algún } y\}$
  - El rango de la relación: $Ran(R) = \{y | y \in B,\ xRy \text{ para algún } x\}$
  - El campo de la relación: $Campo(R) = Dom(R) \cup Ran(R)$

# Relaciones Binarias

## Representación cartesiana y por Diagramas de Venn



# Relaciones Binarias

## Representación tabular. Digrafos.

### Ejemplo.

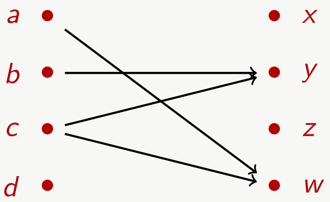
Se consideran $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{w, x, y, z\}$ y $R \subset A \times B$.

$$R = \{(a, w), (b, y), (c, w), (c, y)\}$$

#### Representación tabular

| | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $c$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $d$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

#### Representación con digrafo



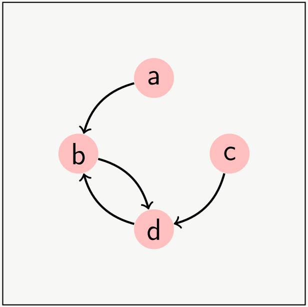
# Relaciones Binarias

## Grafo dirigido

Si la relación binaria $R$ se define sobre **un único conjunto** $A$.

### Ejemplo.

Dado $A = \{a, b, c, d\}$ se define $R = \{(a, b), (b, d), (c, d), (d, b)\} \subseteq A \times A$.



# Relación $n$-aria son Conjuntos

Dada una familia de conjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, se define:

- $R$ es una *relación $n$-ária* entre $A_1, A_2 \ldots, A_n$ si $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$.
- Si $\forall i\ A_i = A$, se dice que $R \subseteq \prod_{i=1}^{n} A = A^n$ es una *relación sobre $A$*.
- Si una tupla ordenada $\tilde{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i$, se dice que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están relacionados por la relación $R$ o que la tupla cumple la relación $R$. Otra forma de denotar este hecho es $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- En una relación $n$-aria se define:
  - El dominio de la relación como el conjunto:
    $$Dom(R) = \{\tilde{x}_{n-1} |\ \text{existe } x_n \in A_n \text{ verificando } (\tilde{x}_{n-1}, x_n) \in R\}$$
  - El rango de la relación como el conjunto:
    $$Ran(R) = \{x_n | x_n \in A_n,\ (\tilde{x}_{n-1}, x_n) \in R \text{ para algún } \tilde{x}_{n-1}\}$$
  - El campo de la relación como el conjunto: $Campo(R) = Dom(R) \cup Ran(R)$.

Nota: $(\tilde{x}_{n-1}, x_n) \stackrel{def}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$

# Funciones I

## Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

### Definición (Función)

*Una relación $n$-aria es una función si y sólo si para cada elemento $\tilde{x}_{n-1} \in Dom(R)$ existe un único elemento $y \in Ran(R)$ relacionado con $\tilde{x}_{n-1}$. Es decir, $y$ es el único elemento que verifica $(\tilde{x}_{n-1}, y) \in R$.*

- Se suelen reservar las letras minúsculas $f$, $g$ y $h$ para denotar la relaciones del tipo función.

¿Necesitamos indicar el último elemento? No, cambio de notación:

- En lugar de utilizar la notación $R(\tilde{x}_{n-1}, y)$ o $(\tilde{x}_{n-1}, y) \in R$, se suele utilizar la notación $f(\tilde{x}_{n-1}) = y$
- Igualmente, la forma más usual de denotar una función es mediante la notación $f : \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} A_i \longrightarrow A_n$, en vez de $f \subseteq \prod_{i=1}^{n} A_i$.

# Funciones II

Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

### Definición (Función inyectiva)

*Una función $f$ es inyectiva si verifica que no existen dos elementos diferentes de su dominio que tengan la misma imagen.*

$$f \text{ es inyectiva} \stackrel{def}{\iff} \left| \begin{array}{l} \text{No existen } x, x' \in Dom(f), \\ \text{verificando } x \neq x' \text{ y } f(x) = f(x') \end{array} \right.$$

Así, para demostrar si una función inyectiva, deberá considera dos elementos $x, x' \in Dom(f)$ y comprobar algunas de estas implicaciones:

- O bien, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- O bien, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Observa: $x$ puede ser un objeto, una pareja, una terna, ..., depende.

# Funciones III

Unas relaciones muy especiales, pero conjuntos al fin y al cabo.

**Definición (Función suprayectiva)**

*Una función* $f$ *es suprayectiva si su rango coincide con todo el conjunto sobre el que se define. La función* $f : A \longrightarrow B$ *es suprayectiva si* $Rang(f) = B$.

**Definición (Función biyectiva)**

*Una función* $f$ *es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.*

# Desarrollo

# Sintaxis de la Lógica de Predicados

## Alfabeto o vocabulario

**Constantes.** Son los símbolos reservados *verdadero* (V) y *falso* (F), y secuencia de letras que representan objetos Definidos.

**Variables.** Secuencia de letras que representan objetos Indefinidos. El conjunto de los posibles objetos que puede representar recibe el nombre de **dominio de la variable**.

**Predicados.** Secuencia de letras que representa una propiedad o relación.

**Funciones.** Secuencia de letras que representa una **relación-función**.

**Conectivos** u operadores booleanos.

- $\wedge$ Conjunción (y)
- $\vee$ Disyunción (o)
- $\neg$ Negación (no)
- $\rightarrow$ Implicación (entonces)
- $\leftrightarrow$ Doble implicación (sii)

**Cuantificadores.** Su usan solo dos.

- Cuantificador universal: $\forall$. Se lee *para cada*.
- Cuantificador existencial: $\exists$. Se lee *existe (al menos)*.

**Otros símbolos.** paréntesis '( )', corchetes '[]', llaves '{}'.

# Sintaxis de la Lógica de Predicados I

## Gramática o Sintaxis

### Definición (Construcción de términos)

*Un término es una expresión que se obtiene al aplicar la siguiente definición recursiva:*

- **Regla Base:** *Cualquier símbolo constante que represente a un objeto definido o cualquier símbolo variable es un término.*
- **Regla Recursiva:** *Si* $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ *son términos, también lo son*
  - $f_1(\tau_i)$, *para cualquier función* $f_1$ *de un argumento.*
  - $f_2(\tau_i, \tau_j)$, *para cualquier* $f_2$, *función de dos argumentos.*
  - $\ldots$
  - $f_n(\overbrace{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_n}^{n})$, *para cualquier función* $f_n$ *de* $n$*-argumentos.*

# Sintaxis de la Lógica de Predicados II

## Gramática o Sintaxis

### Definición (Predicado)

*Un predicado es una expresión que consta de un símbolo predicado seguido de una serie de términos.*

$$R(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

### Definición (Elemento Atómico)

*Una expresión se dice que es un átomo si es el símbolo constante* $V$ *o el símbolo constante* $F$ *o un predicado.*

# Sintaxis de la Lógica de Predicados III

## Gramática o Sintaxis

### Definición (Construcción de Fórmulas de Predicados)

*El conjunto de fórmulas, denotado por $\mathcal{F}_1$, es el menor conjunto que se puede obtener al aplicar la siguiente definición recursiva:*

- **Regla Base:** *Cualquier átomo $P \in \mathcal{P}$ (constante o predicado) es una fbf.*
- **Regla Recursiva:** *Si $\alpha$ y $\beta$ son dos fbf también lo son:*
  - $\neg\alpha$, *la negación de la fbf.*
  - $(\alpha \wedge \beta)$, *la conjunción de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \vee \beta)$, *la disyunción de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$, *el condicionamiento de las dos fbfs.*
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, *las dos fbfs son equivalentes.*
  - $(\forall x\ \alpha)$, *para cada $x$ (arbitrario, pero fijo) se cumple $\alpha$.*
  - $(\exists x\ \alpha)$, *existe un $x$ (concreto, fijado) para el que se cumple $\alpha$.*

*Nota: Por comodidad, el último paréntesis no suele ponerse.*

# Algunas definiciones básicas

## Definición (Tipos de variables)

- *Una variable está **ligada** si es una variable que está en un f.b.f. y está cuantificada.*
- *Una variable está **libre** si está en una f.b.f y no está cuatificada.*

## Definición (Tipos de f.b.f.)

- *Una f.b.f. es **cerrada** (o es una sentencia) si todas los símbolos variables están ligados.*
- *Una f.b.f. es **abierta** si al menos un símbolo variable está libre.*
- *Un **literal** es una expresión atómica o su negación.*
- *Una **cláusula** es la dada por la disyunción de uno o más literales.*

# f.b.f. y simplificación de paréntesis

- Una f.b.f. es la que responde a la definición de la transparencia anterior.
- Pero al igual que en L0, se pueden considerar otras expresiones con menos paréntesis que representen a una f.b.f..
- Usaremos este consenso sobre la precedencia de operadores:
  1. $\neg$, $\forall$, $\exists$ (con asociatividad por la derecha)
     $\neg\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \quad \rightsquigarrow \quad (\neg(\forall x P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda $x$ libre.
     $\forall x \neg P(x) \rightarrow Q(x) \quad \rightsquigarrow \quad ((\forall x \neg P(x)) \rightarrow Q(x))$, segunda $x$ libre.
  2. $\wedge$, $\vee$ (con asociatividad por la izquierda)
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (con asociatividad por la izquierda)

Si apareciesen paréntesis se aplicará la asociatividad que indique.

# Desarrollo

# De lo natural a lo formal - I

Se utilizan las misma orientaciones que las indicadas en la lógica proposicional y en la lógica categórica. Añadir las siguientes:

**Objetos concretos.** Si se mencionan objetos con "nombres y apellidos" formalizarlos con una constante de objeto.

- Juan es amigo de María. Juan se puede formalizar por $J$ y María por $M$.

**Categorías.** Las propiedades quedan formalizadas por un predicado monario (aridad uno), al igual que en la lógica categórica.

- Son listos: $L(x)$ :"$x$ es listo".

**Relaciones.** Las relaciones entre objetos se formaliza con predicados de aridad mayor o igual a 2. P.e. los verbos transitivos.

- Juan compra comida: $C(x, y)$ :"$x$ compra $y$".

# De lo natural a lo formal - II

Se utilizan las misma orientaciones que las indicadas en la lógica proposicional y en la lógica categórica. Añadir las siguientes:

**Variables Libres.** Para hacer referencia a un objeto que puede tomar diferentes valores (es variable), y la fórmula dice algo concerniente a esos valores de la variable sin informar sobre su cantidad (es desconocida).

- Algunas personas se relacionan (con desconocido): $\exists x(P(x) \wedge R(x, y))$
- Todos son mas bajos que él (desconocido): $\forall x B(x, y)$
- El cuadrado del número (desconocido) es 4: $I(f(x), 4)$ ($x^2 = 4$)

**Variables Ligadas.** Si hay indicios de cuántos objetos cumplen un predicado. Introducir palabras como "cada", "todo", "alguno", "hay", ...

- Todas son figuras cuadradas: $\forall x(P(x) \wedge C(x))$
- Si $x$ es un elemento del conjunto lo es de un conjunto mayor: $\forall x(P(x, y) \rightarrow \forall z(P(x, z) \wedge M(z, x)))$ (conjuntos $x$ desconocidos)

Si hay ambigüedad sobre la cuantificación, dejar la variable libre (si no crea una ambigüedad mayor). Ejemplo: Todos aman: $\forall x A(x, y)$. ¿a todos o a algunos? $y$ la dejo libre. Ejemplo: Son figuras cuadradas: $P(x) \wedge C(x)$. ¿todas o algunas? Pero **necesito cuantificador**.

# Desarrollo

# De lo formal a lo natural I

## Definición (Interpretación)

*Una interpretación de cierta expresión* $\alpha$ *en un mundo* $\mathbb{M}$ *es una cuaterna* $\mathcal{I}_\alpha = (\mathbb{D}, \mathcal{C}_\mathbb{D}, \mathcal{F}_\mathbb{D}, \mathcal{R}_\mathbb{D})$*, donde:*

- $\mathbb{D}$*, conjunto no vacío de objetos, llamado dominio de la interpretación.*
- $C_\mathbb{D}$*, conjunto de objetos concretos,* $C_\alpha \longmapsto C_\mathbb{D}$*.*
- $\mathcal{F}_\mathbb{D}$*, conjunto de funciones concretas.* $f_\alpha \longmapsto f_\mathbb{D}$*.*
- $R_\mathbb{D}$*, conjunto de relaciones concretas.* $R_\alpha \longmapsto R_\mathbb{D}$*.*

## Definición (Asignación de variables)

*Dada una interpretación* $\mathcal{I}_\alpha$*, una asignación de variables es* $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{D}$*, función que relaciona cada variable de* $\alpha$ *con un elemento del dominio.*

$\sigma_{\mathcal{I}_\alpha|x \hookrightarrow d}$ *es una asignación de variables definida igual que* $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$ *excepto que a* $x$ *se le asigna el objeto* $d$*.*

# De lo formal a lo natural II

## Definición (Asignación)

*Dadas $\mathcal{I}_\alpha$ y $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$, una asignación de valores de verdad es $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}} : \mathcal{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{B}$, función que asigna un valor de verdad a cada elemento atómico de $\alpha$.*

Dado un predicado atómico $R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{P}_\alpha$, de la oración $\alpha$, con términos $t_i$, entonces:

- $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = V$ sii $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in R_\mathbb{D}$, donde
  - $R_\mathbb{D}$ es la relación asociada a $R_\alpha$ por la interpretación $\mathcal{I}_\alpha$.
  - Si $t_i$ es una constante o función, $d_i$ es el que viene determinado por la interpretación $\mathcal{I}_\alpha$.
  - Si $t_i$ es una variable, $d_i$ es el que viene determinado por la asignación de variables $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$.
- $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(R_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = F$ sii $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \notin R_\mathbb{D}$, donde $R_\mathbb{D}$ y $d_i$ se definen como en el caso anterior.

# De lo formal a lo natural III

## Definición (Evaluación)

*Dadas* $\alpha$, $\mathcal{I}_\alpha$, $\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}$ *y* $v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}$ *se define* $v(\alpha)$ *como:*

- **Regla Base:** *Si* $\alpha \in \mathcal{P}$, *entonces* $v(\alpha) = v_{\sigma_{\mathcal{I}_\alpha}}(\alpha)$.
- **Regla Recursiva:** *Si* $\alpha \notin \mathcal{P}$, *entonces:*

| $\alpha$ | $v(\beta)$ | $v(\alpha)$ |
|---|---|---|
| $\neg\beta$ | $V$ | $F$ |
| | $F$ | $V$ |
| $\forall x\ \beta$ | $V$ | si $\forall d \in \mathbb{D},\ v_{\vert x \hookrightarrow d}(\beta) = V$ |
| | $F$ | *en otro caso* |
| $\exists x\ \beta$ | $V$ | si $\exists d \in \mathbb{D},\ v_{\vert x \hookrightarrow d}(\beta) = V$ |
| | $F$ | *en otro caso* |

| $\alpha$ | $v(\beta)$ | $v(\gamma)$ | $v(\alpha)$ |
|---|---|---|---|
| $\beta \wedge \gamma$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| | *otro caso* | | $F$ |
| $\beta \vee \gamma$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| | *otro caso* | | $V$ |
| $\beta \rightarrow \gamma$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| | *otro caso* | | $V$ |
| $\beta \leftrightarrow \gamma$ | $v(\beta) = v(\gamma)$ | | $V$ |
| | *otro caso* | | $F$ |

# Evaluación con variables libres

Cuando una fórmula sea abierta (con variables libres) no se puede decir si es verdadera o falsa, dependerá del valor de las variables libres.
La evaluación de la fórmula consiste en:

1. Asignar valores del dominio a las variables libres y comprobar la satisfacibilidad de la fórmula.
2. Enumerar los valores del dominio que la hacen cierta.
3. Enumerar los valores del dominio que la hacen falsa.

**Ejemplo.**

La evaluación de: $P(x, s(1))$:"$x$ es menor estricto que el siguiente del número $1$", interpretado en el conjunto de los números naturales, hace que la oración sea:

- Verdadera, para todos los $x \in \{1\}$.
- Falsa, para todos los $x \in \{s(1), s(s(1)), \ldots\} = \{2, 3, \ldots\}$.

# Desarrollo

# Equivalencias

Junto a las equivalencia de la lógica proposicional, añadir:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg\exists x \alpha_{[x]} & \equiv & \forall x \neg\alpha_{[x]} \\
\neg\exists x \neg\alpha_{[x]} & \equiv & \forall x \alpha_{[x]} \\
\neg\forall x \alpha_{[x]} & \equiv & \exists x \neg\alpha_{[x]} \\
\neg\forall x \neg\alpha_{[x]} & \equiv & \exists x \alpha_{[x]} \\
\forall x(\alpha_{[x]} \wedge \beta_{[x]}) & \equiv & (\forall x \alpha_{[x]}) \wedge (\forall y \beta_{[y]}) \\
\exists x(\alpha_{[x]} \vee \beta_{[x]}) & \equiv & (\exists x \alpha_{[x]}) \vee (\exists y \beta_{[y]})
\end{array}
$$

Ojo

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x(\alpha_{[x]} \vee \beta_{[x]}) & \not\equiv & (\forall x \alpha_{[x]}) \vee (\forall y \beta_{[y]}) \\
\exists x(\alpha_{[x]} \wedge \beta_{[x]}) & \not\equiv & (\exists x \alpha_{[x]}) \wedge (\exists y \beta_{[y]})
\end{array}
$$

Recuerda el convenio: Letras griegas para oraciones complejas. $\alpha_{[x]}$ NO es una función, es una expresión de L1 en la que aparece la variable $x$.

# Desarrollo

# Sustituciones y Particularizaciones

## Concepto y utilidad

Concepto:

- Asignación de valor en variable: $x \hookrightarrow d$
  Identifica $x$ por un objeto real $d$ de un mundo real.
- Sustitución de variable por término: $\tau/x$
  Sustituye $x$ por otros símbolo (término) del mundo formal.

Aplicaciones:

- Reescribir expresiones. P.e. $P(y)$ en vez de $P(x)$.
- Particularizar variables a constantes, para
  - Aplicar reglas semánticas. P.e. Modus Ponens.
  - Aplicar reglas sintácticas como Deducción Natural.
- Unificación: ¿Son iguales 2 predicados salvo sustitución?
  - Algoritmo de Robinson. P.e. $P(x, y)s = P(A, f(z))$.
  - Sistema deductivos basado en la regla de resolución.

# Sustituciones y Particularizaciones

## Definiciones

- Una **sustitución** es una expresión $s = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ que indica:
  - Todas ocurrencia de la **variable** $v_i$ se debe sustituir por el **término** $t_i$
  - Todas las sustituciones se hacen simultáneamente, no paso a paso.
- Una **particularización por sustitución** de una expresión consiste en sustituir sus variables por términos (variables, constantes o funciones).
- Una **particularización básica** es una particularización por sustitución donde las variables se sutituyen por constantes.
- Una **particularización alfabética** es una particularización por sustitución donde las variables se sutituyen por otras variables.
- Dada una expresión $P$ y una sustitución $s$, la notación $Ps$ indica la **particularización por sustitución** de la expresión $P$ según la sustitución $s$.

# Composición de Sustituciones

## Definición (Composición de sustituciones)

*La composición de las sustituciones $s$ y $t$, $s \cdot t$, es la sustitución obtenida aplicando $t$ a $s$ y añadiendo después los elementos de $t$ que no tiene variables de $s$.*

*Si* $s = \{a_1/x_1, a_2/x_2, \ldots, a_n/x_n\}$ *y* $t = \{b_1/y_1, b_2/y_2, \ldots, b_m/y_m\}$ *con* $X$ *e* $Y$ *los conjuntos de variables sustituidas según* $s$ *y* $t$ *respectivamente, entonces* $s \cdot t = \{(a_i t)/x_i |\ x_i \neq a_i t\} \cup \{b_i/y_i |\ y_i \in Y - X\}$,

Ejemplo: $s = \{f(y)/x, z/y\}$ y $t = \{a/x, y/z, b/y\}$. ¿$s \cdot t$?

1. Defino los conjuntos $X = \{x, y\}$ e $Y = \{x, z, y\}$
2. Construyo la secuencia "inicial":
   $s \cdot t \approx \{f(y)t/x, zt/y\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
3. Aplico $t$ a $s$: $s \cdot t \approx \{f(b)/x, y/y\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
4. Elimino los elementos t.q. $x_i = a_i t$: $s \cdot t \approx \{f(b)/x\} \cup \{a/x, y/z, b/y\}$
5. Suprimo los elementos t.q. $y_i \in Y \cap X$: $s \cdot t \approx \{f(b)/x\} \cup \{y/z\}$
6. **Solución:** $s \cdot t = \{f(b)/x, y/z\}$

# Desarrollo

# Razonamientos Válidos

$\models$ se define igual que en L0, y son válidos:

- Todos los razonamientos válidos indicados en L0.
- Los 19 razonamientos válidos de LC.
- Los razonamientos válidos derivados de las reglas de equivalencia de la sección anterior.
- Los obtenidos por particularizaciones. Ejemplo: Modus Ponens: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), P(K) \models Q(K)$
  1. Supongamos, $v(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) = v(P(K)) = V$
  2. $v([P(x) \rightarrow Q(x)]\{K/x\}) = v(P(K) \rightarrow Q(K)) = V$ y $v(P(K)) = V$
  3. Concluimos, $v(Q(K)) = V$

  **Observa:**

  $K/x$ sustituye $x$ por otros símbolo del mundo formal.

  $x \hookrightarrow d$ identifica $x$ por un objeto real $d$ de un mundo real.
- Y muchos más ...

# Desarrollo

# Relación inversa, complementaria, simétrica y dual

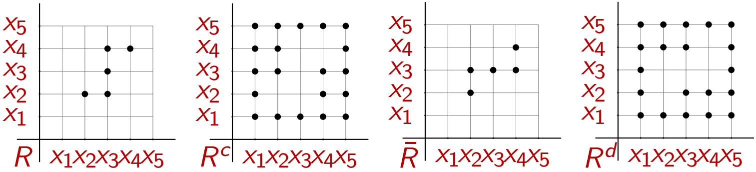
## Definición (Relación inversa)

*Dada* $R \subseteq A \times B$*, se define su relación inversa,* $R^{-1}$*, como* $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A |\ (x, y) \in R\}$*. Es decir* $yR^{-1}x \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} xRy$*.*

## Definición

*Dada una relación* $R \subseteq A \times A$*, se definen:*

- *Relación complementaria* $R^c$*:* $a, b \in A$*,* $aR^c b \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a \not R b$*.*
- *Relación simétrica* $\bar{R}$*: para cualesquiera* $a, b \in A$*,* $a\bar{R}b \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} bRa$*.*
- *Relación dual* $R^d$*: para cualesquiera* $a, b \in A$*,* $aR^d b \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} b \not R a$*.*



# Propiedades importantes

**Irreflexiva** o antirreflexiva. $\forall a \in A \; a \not R a$

**Reflexiva.** $\forall a \in A \; aRa$

**Simétrica.** $\forall a, b \in A$, si $aRb$ entonces $bRa$.

**Transitiva.** $\forall a, b, c \in A$, si $aRb$ y $bRc$ entonces $aRc$.

**Asimétrica.** $\forall a, b \in A$, si $aRb$ entonces $b \not R a$.

**Antisimétrica.** $\forall a, b \in A$, si $aRb$ y $bRa$ entonces $a = b$.

**Intransitiva.** $\forall a, b, c \in A$, si $aRb$ y $bRc$ entonces $a \not R c$.

**Negativamente Transitiva.** $\forall a, b, c \in A$, si $a \not R b$ y $b \not R c$ entonces $a \not R c$.

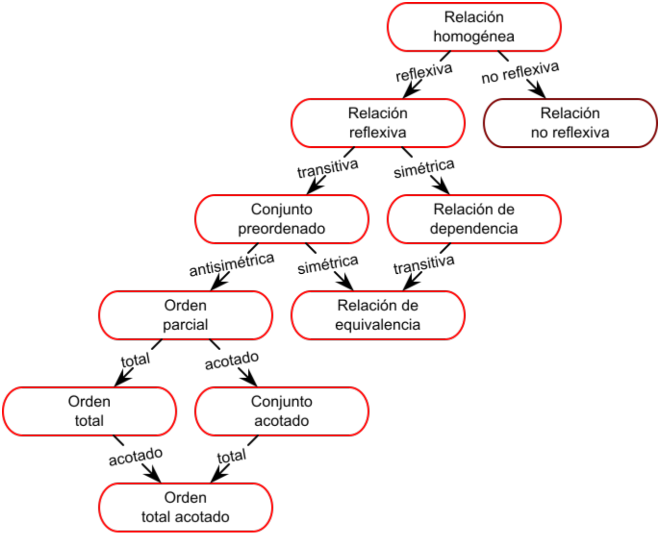
**Completa** o total. $\forall a, b \in A$, o bien $aRb$, o bien $bRa$, o ambas.

**Serial.** $\forall a \in A$, si $a \in A$ entonces existe $b \in A$ verificando $aRb$.

**Euclidea.** $\forall a, b, c \in A$ si $aRb$ y $aRc$ entonces $bRc$.

**Incestuosa.** $\forall a, b, c \in A$, si $aRb$ y $aRc$, existe un $d \in A$ verificando $bRd$, $cRd$.

# Tipos de Relaciones




**Fuente: Wikipedia**

# Relación de Equivalencia I

**Definición (Relación de equivalencia)**

*Una relación $R$ sobre $A$ es una relación binaria que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (en cuyo caso se suele denotar por $\sim$).*

Dada una relación de equivalencia $(A, \sim)$, puede realizar el siguiente proceso:

1. Considerar un elemento $x \in A$ y definir el conjunto $[x] = \emptyset$.
2. Considerar todos los elementos $y \in A$ diferentes de $x$, y si $x \sim y$ entonces añadir $y$ a $[x]$
3. Repetir los dos pasos anteriores hasta que se hayan construido todos los posibles conjuntos $[x]$.

- $[x]$ recibe el nombre de **clase de equivalencia**, que es un conjunto.
- Cualquier $y \in [x]$ es un **representententante de la clase**.

# Relación de Equivalencia II

**Definición (Clase de equivalencia, conjunto cociente, representante.)**

*Dada una relación de equivalencia* $(A, \sim)$,

- *Para cada* $x \in A$ *se define la* ***clase de equivalencia*** *de* $x$ *como el conjunto:*
$$[x] = \{y | y \in A \textit{ verificando } x \sim y\}$$
- *La familia de subconjuntos formada por los subconjuntos de* $A$ *dados por las clases de equivalencia recibe el nombre de* ***conjunto cociente****, que se denota por* $A/\sim$ *y es una partición de* $A$*:*
$$A/\sim = \{[x] |\ x \in A\}$$
- *Si* $C \in A/\sim$*, entonces* $C$ *se corresponde con algún* $[x]$ *(e.d.* $C = [x]$*) y se dice que* $x$ *es un* ***representante*** *de la clase* $C$*. Obviamente, una clase de equivalencia puede tener tantos representantes como elementos componga la clase.*

# Ejemplo de Relación de Equivalencia

**Ejemplo.**

Considere el conjunto de los números naturales y la siguiente relación:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} y - x = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Si realiza el proceso anterior obtendrá dos conjuntos:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} |\ n \text{ es par}\} \text{ y } [1] = \{n \in \mathbb{Z} |\ n \text{ es impar}\}.$$

Debe entender esto:

- Si considera uno de los conjuntos, todos los elementos que pertenecen a él definiría el mismo conjunto. Por ejemplo, los elementos $-2$, $0$ y $2$ pertenecen a $[0]$ y verifican que
  $$\ldots = [-2] = [0] = [2] = \ldots$$
  En definitiva, cualquier $n \in [0]$ representaría al mismo conjunto, sería un representante.
- Los dos conjuntos son disjuntos ($[x] \cap [y] = \emptyset$) y reconstruyen el conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$: ¡es una partición!

# Ejercicios de Relación de Equivalencia

- ¿Es una relación de equivalencia? Dos alumnos están relacionados sii pertenecen al mismo grupo (supuesto que no hay repetidores).
- ¿Es una relación de equivalencia? Dado un conjunto de objetos (p.e. números), $x \sim y$ sii $x = y$.
- Determinar las clases de equivalencia para: Dado un $k$, p.e. $k = 3$, $a \sim b$ sii al dividir $a$ y $b$ por $k$, dan el mismo resto.
- Determinar las clases de equivalencia para: Si $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, $(a, b) \sim (c, d)$ sii $a + d = b + c$.
- Dibuja los grafos para los que se define esta relación entre nodos $n \sim m$ sii $(n, m) \in R$ o existe $r$ t.q. $(n, r), (r, m) \in R$
- Cómo deben ser los grafos para los que se define esta relación? $n \sim m$ sii existe un camino que los une.

Por simplicidad asume que los grafos son no dirigidos.