2 Logica Proposicional

La lógica proposicional estudia las proposiciones, sus interrelaciones y los razonamientos con proposiciones. A esta lógica también la denotaremos por L0.

Proposición es el nombre que se da a una oración lógica en el contexto de la lógica proposicional. Desde el punto de vista de nuestro lenguaje natural, las proposiciones atómicas se corresponden con las oraciones simples (las que tienen una sola forma verbal). Desde el punto de vista de la lógica, y según el tema anterior, no te costará entonces saber qué es una proposición atómica ¿lo sabes? Así, una proposición se corresponde o bien a una proposición atómica, o bien a una "composición" de oraciones atómicas.

2.1 Formalización

En lógica proposicional, las proposiciones atómicas se denotan por una secuencia de letras, si bien, por comodidad, esta secuencia no suele estar formada por más de una letra. No importa si está en mayúscula o en minúscula. Así, p, q, Pq representan a proposiciones atómicas. Cuando la proposición está formada por una composición de proposiciones atómicas se utilizan conectivas, que vienen a ser los nexos que se utilizan en el lenguaje natural para construir oraciones compuestas. Las conectivas binarias de la lógica proposicional que permiten "conectar" dos proposiciones son: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. También se considera proposición compuesta la resultante de negar cualquier proposición. Para la negación se utiliza la conectiva monaria $\neg$. Cuando se construye correctamente una proposición según las reglas del lenguaje utilizando las conectivas, se dice que la expresión obtenida es una fórmula bien formada.

En el proceso de formalización no siempre está claro qué conectiva binaria debe utilizarse. Es decir, no existe un procedimiento establecido que diga "cuando tengas una oración de tal forma en el lenguaje natural, entonces debes escribirla así en el lenguaje formal de la lógica proposicional". No obstante, la lógica proposicional es la más sencilla y la más estudiada por lo que en, algunos casos, sí que existe tales procedimientos cuando las oraciones del lenguaje natural presenta un patrón particular (ver transparencias). Así, un "truco" para formalizar correctamente en L0 es transformar nuestras oraciones naturales a algunos de esos patrones conocidos para, a continuación, realizar la formalización de ese patrón.

Como ejemplo, formalicemos la siguiente oración: "El que un alumno suspenda no significa que sea mal estudiante". Esta oración la puedo transformar en: "No es cierto que, si un alumno suspende entonces es un mal estudiante". Esta a su vez en: "No es cierto que , si [el alumno suspende] entonces [el alumno es un mal estudiante]". Lo que permite escribir la siguiente secuencia de expresiones (mezclando lenguaje natural y formal, y formalizando patrones conocidos): "No es cierto que, si p entonces q", "No es cierto que $p \rightarrow q$", $\neg(p \rightarrow q)$. Siendo esta última fórmula la formalización de la oración natural de partida.

2.2 Interpretación

En general, la interpretación es el procedimiento por el cuál somos capaces de identificar una proposición con una oración del lenguaje natural. En general, la oración obtenida en el lenguaje natural realmente es una composición de oraciones simples, las cuales se expresa según los patrones conocidos de formalización. Es decir, la interpretación de la oración formal pasa por transformar la expresión a un patrón conocido del lenguaje natural previa identificación de las proposiciones atómicas con oraciones simples.

Por ejemplo, utilizando para $p \to q$ el patrón "Siempre que p entonces q" e interpretando p por "Hay humo" y q por "Hay fuego", la interpretación final es "Siempre que hay humo entonces hay fuego". Sin embargo si para las mismas interpretaciones de las proposiciones atómicas usamos el patrón "No p a menos que q" interpretaríamos de $p \to q$ ahora es "no hay fuego a menos que haya humo".

La evaluación es el proceso por el que obtenemos el valor de verdad de una oración formal para una interpretación en un mundo o universo dado. Es decir, para una interpretación dada determinamos si la oración es verdadera o falsa. Nota: siempre hay que decir: "la evaluación para la interpretación tal". No puede existir evaluación sin antes interpretar.

La evaluación de una proposición compleja viene dada por la evaluación de sus subfórmulas, y éstas a su vez por la evaluación de sus subsubfórmulas, y así sucesivamente. En última instancia, la evaluación de una proposición compleja viene dada por la evaluación de sus proposiciones atómicas (las asignaciones) y la evaluación que se define sobre los conectivos (tablas de verdad). Por tanto, la evaluación de una proposición queda determinada por una definición recursiva.

Si bien conceptualmente, dada una oración compleja, *interpretar sus proposición atómicas* y realizar una *asignación de sus proposiciones atómicas* son conceptos diferentes, en lógica proposicional se identifican.

Es decir, en L0, y solo en L0, la interpretación de una oración es el procedimiento por el que se establece el valor de verdad de cada uno de las proposiciones atómicas que la componen. En otras palabras, una interpretación de cierta fbf es una de las posibles asignaciones que se pueden hacer a todos los elementos atómicos de dicha fbf. Si una fbf está formada por n proposiciones atómica, dicha fbf tendrá 2^n posibles interpretaciones (o asignaciones).

Se puede obtener la evaluación de una oración en todas sus interpretaciones construyendo un tabla de verdad. Para construir una tabla de verdad es muy importante seguir escrupulosamente el orden de prioridad de los conectivos. Según la tabla de verdad obtenida, **una proposición** puede ser satisfacible o insatisfacible o falseable o válidas.

2.3 Equivalencias

También hay que destacar que existen muchas formas de escribir una proposición compleja, de la misma forma que en el lenguaje natural usamos oraciones diferentes para decir lo mismo. Todas las proposiciones que adoptan las mismas evaluaciones para las mismas interpretaciones se dicen que son equivalentes. Debes aprender las reglas de equivalencia: su nombre, sus variantes y su uso. Por ejemplo ¿qué regla es ésta: $\neg\neg p \equiv p$? ¿cuántas leyes de absorción existen?

2.4 Sobre los conectivos

A poco que se estudie cuántas relaciones binarias pueden establecerse con dos proposiciones, se comprueba que pueden construirse un total de $2^{2^2} = 16$ relaciones. De entre las 16, solo usaras 4: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Como operador monario solo usarás $\neg$. La pregunta es ¿y por qué no más o menos?

No se usan más porque estos 5 permiten modelar todos los demás. Es decir, nuestros 5 operadores permiten reconstruir de forma adecuada los 12 operadores binarios. Por ejemplo, el "o exclusivo" se puede modelar con la composición adecuada de una disyunción inclusiva, dos conjunciones y una negación

¿serías capaz de construirlo?

Se pueden usar menos, de hecho más adelante cuando estudiemos formas normales conjuntivas usaremos menos ¿podrías determinar cuantos conjuntos de operadores minimales existen que permitan reconstruir a los demás operadores?

Entonces ¿por qué no usamos menos? Porque nosotros, en el lenguaje hablado, aunque somos austeros en las expresiones, tampoco estamos dispuestos reducir en exceso nuestras palabras.

Lo explicamos con un ejemplo. Si quisieras expresar "el nieto del sobrino de Daniel es alto" en un lenguaje en el que no existe la palabra nieto pero sí las palabras hijo/a tendrías que decir "el hijo del hijo o de la hija del sobrino de Daniel es alto"; y si en el lenguaje tampoco existiera la palabra sobrino pero si la palabra hermano/a, tendrías que decir "el hijo del hijo o de la hija del hijo/a de un hermano o de una hermana de Daniel es alto".

El hecho de elegir los operadores que se indican es porque permiten expresar nuestras oraciones del lenguaje natural con una longitud y forma adecuada. Si usaras más, tus expresiones serían demasiado cortas para que se entiendan; y si usas menos, la longitud de tus expresiones se harían demasiado largas o poco compresibles.

Pongamos un último ejemplo. Imagina que formalizas la expresión "si este ruido sigue así llamarán a la policía". Recurriendo a la implicación material puede escribirse $r \to p$. Si no se dispusiera de $\to$ se escribiría como $\neg r \vee p$ si se permitier la negación y la disyunción; pero si no se te permitiera la disyunción pero sí la conjunción la expresión sería $\neg(r \wedge \neg p)$ ¿reconoces en esta expresión una implicación?

2.5 Formalización del condicional material

Cuando se empieza con el estudio de la lógica existe mucha dificultad en entender por qué algunas expresiones del lenguaje natural se expresan como un condicional material. Se nos dice que la formalización de las expresiones naturales

- Si P, Q.
- P, luego Q.
- Si P entonces Q.
- P sólo si Q.
- P únicamente si Q.
- P nada más que cuando Q.
- Sólo P si Q.
- Es suficiente P para que Q.
- Siempre que P entonces Q.
- Es necesario Q para que P.
- No P a menos que Q.
- A no ser que Q no P.

se corresponden con la expresión $P \to Q$, y si bien algunas formalizaciones resultan evidentes, otras no lo son tanto.

Las dificultades mayores aparecen cuando aparece una negación, como son los dos últimos casos, o la expresión sólo si. Que pasamos a comentar.

La expresión "si p solo si q" es una expresión condicional con una proposición de exclusividad. La exclusividad es un consecuente de la implicación. Veámoslo con un ejemplo.

La formalización de la expresión "te hablará (p) solo si le das un abrazo (q)" debe ser $p \to q$ pues:

- Partiendo de que **la expresión $p \to q$ es verdadera cuando "le das un abrazo"(q es verdad)**, obliga a que p sea cierto (ver tabla de verdad). Por tanto si la oración es cierta y le das un abrazo, a la fuerza se cumple que "te hablará".
- Por otro lado, el que **la expresión $p \to q$ sea verdadera cuando "no le das un abrazo"(q es falso)**, obliga a que p sea falso. Por tanto si la oración es cierta y no le das un abrazo, a la fuerza se cumple que "no te hablará".

Sin embargo, si la oración se formalizara como $q \to p$ concluímos lo siguiente:

- **Para que $q \to p$ sea verdadera cuando "le das un abrazo"(q es verdad)**, obliga a que p sea cierto. Por tanto si la oración es cierta y le das un abrazo, a la fuerza se cumple que "te hablará".
- Sin embargo, para que **la expresión $q \to p$ sea verdadera cuando "no le das un abrazo"(q es falso)**, NO IMPORTA el valor de p. Por tanto si la oración es cierta y no le das un abrazo, **puede ser que "sí te hable" o que "no te hable"**. Por tanto, con esta formalización podría darse que "te hablará incluso si **no** le das un abrazo. Y no es eso lo que dice la oración de partida, que establece que si no damos tal abrazo no nos deberá hablar.

  Es por este segundo caso que $q \to p$ no vale como formalización.

Las expresiones "no p a menos que q" y "a no ser que q no p" también reflejan exclusividad sobre la expresión de q. Las expresiones "a menos que" y "a no ser que" son equivalentes. También se podrían poner estas expresiones restrictivas como "salvo que", "excepto que". Y todas ellas pueden expresarse en términos de "sólo si".

Los condicionales pueden pensarse en términos de promesa, "si te gradúas, te compro un coche" o en términos de condiciones exclusivas "te compro un coche solo si te gradúas". Cuando formalices, comprueba que mantienes la promesa o la exclusividad en el consecuente.

2.6 Implicaciones

Muchas expresiones contiene la expresión "entonces" o similares como "así", "por tanto", ... Por ejemplo, "si llueve, (entonces) el suelo está mojado", "llueve, (por tanto) el suelo está mojado", "como llueve, (entonces) el suelo está mojado", etc ¿Todas estas expresiones quieren decir lo mismo? Rotundamente no.

En nuestros cimientos, hablando de fórmulas bien formadas, surgió el símbolo $\to$. Es tan importante en lógica que le dimos un apartado a él solo (ver página 7).

La implicación (o condicional) material es un símbolo (de la sintaxis) de la lógica que establece nexos entre oraciones para construir oraciones más complejas, de la misma forma que en el lenguaje natural usamos los nexos para construir oraciones coordinadas.

La expresión condicional $\alpha \to \beta$ es una oración (afirmativa). Si en una interpretación fuese cierta α nada dice sobre β. El hecho de que se produzca α no afecta al hecho de que se dé o no se dé lo condicionado.

Sin embargo existe otro tipo de implicación, la que habla de la verdad de las oraciones. La introduzco considerando la expresión $\neg\alpha \vee \beta$. Denota una oración compleja que, según la interpretación, es verdadera o falsa. Es más,

- si la oración es falsa podemos concluir, por su tabla de verdad, que nos encontramos en una interpretación en la que α es cierta y β es falsa.
- pero si la oración es verdadera solo podemos decir que existen tres posibles interpretaciones bajo las cuales la oración es cierta, nada más. A falta de información complementaria de α o β no podemos decir nada más.

  Considera las 3 interpretaciones en la que $\neg\alpha \vee \beta$ es verdadera. Tenemos dos casos.

  - Si nos dicen que α es verdadera, podemos **concluir** que β debe ser verdadera;
  - pero si nos dicen que β es falsa, podemos **concluir** que α tiene que ser falsa.

Observa que usando la tabla de verdad y el conocimiento de la veracidad de algunas oraciones hemos concluido la veracidad de otras. Ese "concluir", ese "debe ser", el "tiene que ser", es la otra implicación en la que estamos interesados, es la implicación lógica.

La implicación lógica es un símbolo (de la semántica) de la lógica que establece nexos entre la veracidad de las oraciones. No hace referencia a aspecto condicionales, hace referencia a conclusiones, a lo que se infiere, a lo que nuestra razón nos obliga a afirmar.

La implicación lógica se indica con el símbolo $\models$. La expresión $\alpha \models \beta$ **no** es una oración, denota una estructura de razonamiento. Si en una interpretación fuese cierta α nos dice todo sobre β: si α es cierta, β tiene que ser cierta. El hecho de que se produzca α sí afecta al hecho de que se dé β.

No confundas nunca
la implicación material, $\alpha \to \beta$ (oración - si α, entonces β),
con la implicación lógica, $\alpha \models \beta$ (razonamiento - si α es cierta, β también).

Ambas implicaciones hacen referencia a dos conceptos y contextos totalmente diferentes. Sin embargo hay un resultado computacional que permite detectar la existencia de una implicación lógica en términos de una implicación material (¡búsquelo!)

2.7 Razonamientos

Un razonamiento es cualquier estructura entre oraciones lógicas que establece un vínculo entre varias oraciones y otra oración. El vínculo se establece mediante la afirmación: "si ciertas oraciones (premisas) son ciertas, la otra oración (la conclusión) también lo es". Observa que es una firmación sobre la verdad de las oraciones. No se dice nada sobre qué pasa cuando cuando se tiene un contramodelo sobre el conjunto de premisas.

Cuando nos dan un esquema de razonamiento, podemos comprobar mediante tablas de verdad si, en efecto, la conclusión es necesariamente cierta a partir de la verdad de las oraciones premisas. De ser así, este tipo de razonamientos se ajustan al concepto que hemos visto en el apartado anterior de implicación lógica. En este caso la consecuencia del razonamiento se dice que es una **consecuencia lógica** y se dice que el razonamiento es un **razonamiento válido**.

Sin embargo, hay razonamientos en los que se puede comprobar que la conclusión puede ser falsa a pesar de que las oraciones premisas sea ciertas. En este caso se dice que el razonamiento es falaz y la consecuencia es una **falacia**.

Nuestro interés está en los razonamientos válidos.

En razonamientos válidos podemos recurrir a implicaciones materiales tautológicas debido al estrecho vínculo que existe entre $\models$ y $\rightarrow$ pero esto conllevaría estar comprobando tautologías - ¿por qué? Busca el teorema de la deducción semántica-. Cabría plantearse no ser tan exigente y hacer razonamientos basados en condicionales no tautológicos. Cuando recurrimos a condicionales, decimos que **los razonamientos válidos se ajustan a razonamientos deductivos**.

Así, en este contexto en el que utilizamos únicamente el concepto de consecuencia lógica y de condicional (implicación material), aparecen algunas estructuras que responden muy bien a nuestra forma de pensar, como son: modus ponens, modus tollens, silogismo hipotético, ... Estas estructuras reciben el nombre de estrategias de razonamiento.

El razonamiento deductivo tiene sus ventajas, pues se reduce a una mero "calculo". Al fin y al cabo, se trata de buscar la satisfacibilidad de una oración. Pero también es un inconveniente, pues como veremos, el problema de buscar un modelo que satisfaga a un conjunto de oraciones (problemas SAT) puede ser en algunos casos muy difícil de resolver (si al final tenemos que buscar la satisfaciblidad en todas sus interpretaciones). Por eso también se buscan **estrategias de razonamiento basadas en la refutación**.

Una refutación es un procedimiento por el que "tumbamos" un razonamiento. Su objetivo es determinar si la estructura dada no responde a un razonamiento deductivo válido. Las refutaciones más importantes son las basadas en la demostración por contradicción y la búsqueda de contrajemplos (o contramodelos).

Frente a los razonamientos deductivos válidos están los razonamientos inductivos válidos, o inductivos completos. Destacan los Principios de Inducción, que son los basados en números naturales.

El principio de inducción matemática figura como quinto axioma en la formulación que enunció Giuseppe Peano para determinar la construcción de los números naturales (al que llamó axioma de inducción completa). Por tanto, como principio, solo hay que creerlo y aceptarlo. El otro matiz de este principio es que es aplicable solo a relaciones numéricas.

El principio de inducción matemática se puede extender para trabajar con objetos matemáticos dependientes de números naturales manteniendo el nombre de principio de inducción, y, que de aplicarse sobre estructuras recursivas dependientes de un cierto argumento n natural, da lugar al principio de inducción estructural. Es curioso observar que los principios de inducción contienen una premisa que hay que demostrar, y esta demostración ¡es deductiva! ¿Dónde se encuentra?