Vamos a considerar "transformaciones geométricas" que vienen definidas por aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o por aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Vamos a ver cómo calcular la matriz de esas aplicaciones lineales en base canónica.

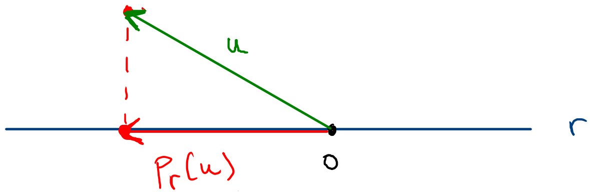
1º) Elegimos una base B (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) de manera que $M_{B,B}(f)$ sea "sencilla" o fácil de determinar.

2º) Calculamos $M(f) = \underbrace{M_{B,C}(id)}_{P_{B,C} = B} \cdot M_{B,B}(f) \cdot \underbrace{M_{C,B}(id)}_{P_{C,B} = B^{-1}} \Longrightarrow$

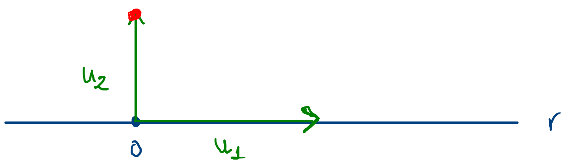
$$\Rightarrow M(f) = B \cdot M_{B,B}(f) \cdot B^{-1} \quad ////$$

$\mathbb{R}^2$

PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA



$P_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección ortogonal sobre la recta r



$P_r(u_1) = u_1$

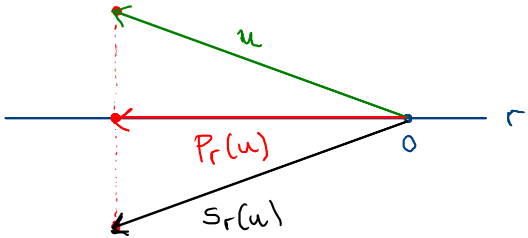
$P_r(u_2) = 0$

Si tomamos la base $B = \{u_1, u_2\}$

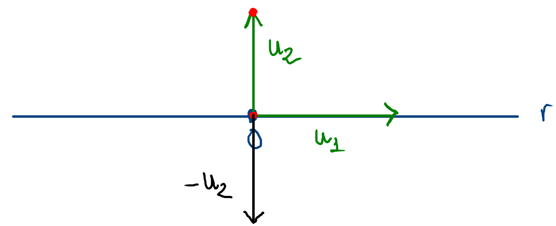
entonces $M_{B,B}(P_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow$ la matriz de P_r en base canónica sería $M(f) = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$.

$\mathbb{R}^2$ SIMETRÍA ORTOGONAL RESPECTO A UNA RECTA



Sea $S_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría ortogonal respecto a la recta r.



→ $S_r(u_1) = u_1$

→ $S_r(u_2) = -u_2$

La matriz de S_r en base $B = \{u_1, u_2\}$ es

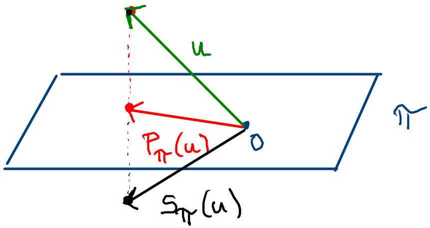
$$M_{B,B}(S_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ La matriz de S_r en base canónica

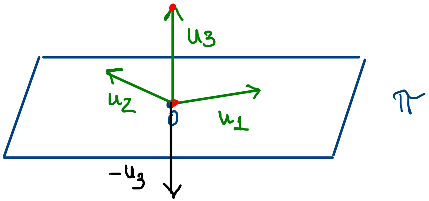
es $M(S_r) = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$.

$\mathbb{R}^3$

SIMETRÍA ORTOGONAL RESPECTO A UN PLANO



Sea $S_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal respecto al plano π.



La matriz de S_π en base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es

$$M_{B,B}(S_\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

→ $S_\pi(u_1) = u_1$

→ $S_\pi(u_2) = u_2$

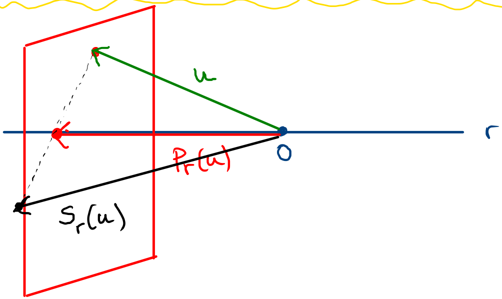
siendo $\{u_1, u_2\}$ una base del plano π

$$\Rightarrow M(S_\pi) = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$$

Elegimos un vector $u_3 \neq 0$ ortogonal a π

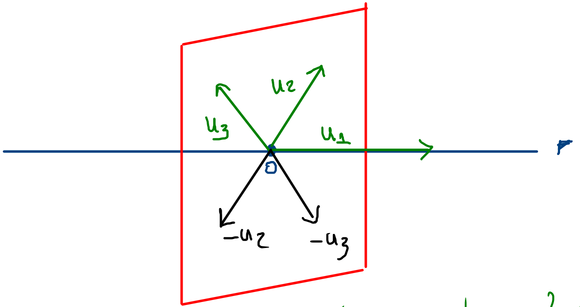
→ $S_\pi(u_3) = -u_3$

$\mathbb{R}^3$ PROYECCIÓN Y SIMETRÍA ORTOGONAL RESPECTO A UNA RECTA



Sea $p_r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre la recta r.

Sea $s_r : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal respecto a la recta r.



Elegimos $\{u_2, u_3\}$ una base del plano ortogonal a r.

Las matrices de p_r y s_r en base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ son:

$$M_{B,B}(p_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

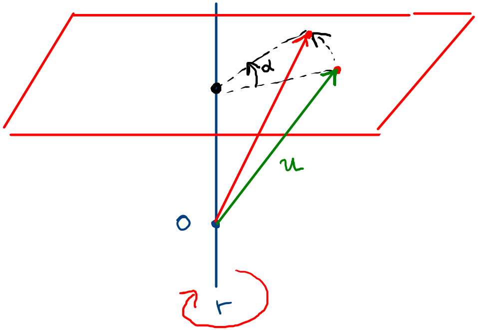
$$M_{B,B}(s_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$p_r(u_1) = u_1$
$p_r(u_2) = 0$
$p_r(u_3) = 0$

$s_r(u_1) = u_1$
$s_r(u_2) = -u_2$
$s_r(u_3) = -u_3$

$\mathbb{R}^3$

GIRO ALREDEDOR DE UNA RECTA

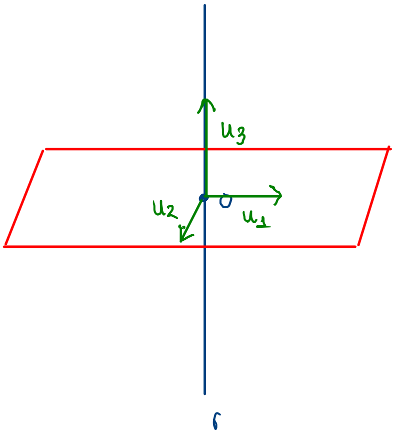


Sea $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
el giro de ángulo α
alrededor de la recta r.

$$g_\alpha(u_1) = \cos\alpha \cdot u_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot u_2$$

$$g_\alpha(u_2) = -\operatorname{sen}\alpha \cdot u_1 + \cos\alpha \cdot u_2$$

$$g_\alpha(u_3) = u_3$$



La matriz de g_α en base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es:

$$M_{B,B}(g_\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elegimos $\{u_1, u_2\}$ una base ORTONORMAL
del plano ortogonal a r.
Elegimos $u_3 \neq 0$ en la recta r