Boletín 6

Lógica de Predicados: Interpretaciones

Ejercicio 57.
Indica cuántas interpretaciones posibles se pueden realizar de cada uno de los predicados que aparecen en las siguientes fórmulas:

1. $\forall x \exists y\ (P(x,y) \rightarrow Q(x)$ en $U = \{a,b\}$.
2. $\exists x Q(x) \rightarrow \exists z \forall y (P(x,y) \vee R(x,z,y))$ en $U = \{a,b,c\}$.

Ejercicio 58.
Se considera la siguiente estructura:

- $U = \{1,2,3,4\}$
- $U_P = \{1,2\}$
- $U_Q = \{2,3\}$
- $U_R = \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$
- U_I = el conjunto de la relación "es igual que" entre números naturales: $(n,m) \in U_I$ sii $n = m$
- c es el número 1.

Indicar si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas en la estructura indicada.

1. $\exists x(Q(x) \wedge P(x))$
2. $\exists x R(c,x)$
3. $\neg \exists x R(x,x)$
4. $\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
6. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
7. $\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow I(x,c)$
8. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$

Ejercicio 59.
Probar si las siguientes fórmulas son satisfacibles para las interpretaciones dadas:

1. La fórmula $\forall x(P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow \exists y Q(y))$ en la interpretación:
   - $U = \{a,b,c\}$
   - Predicados:

x	$v(P(x))$	$v(R(y))$	$v(Q(x))$
a	V	F	F
b	V	V	F
c	F	F	F

2. La fórmula $P(x) \wedge \forall x(R(x) \wedge P(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y)$

- $U = \{a, b, c\}$
- Términos libres: $x \hookrightarrow 1$, $y \hookrightarrow 2$
- Predicados:

x	y	$v(P(x))$	$v(P(y))$	$v(Q(x,y))$
1	1	V	F	V
	2			F
2	1	F	V	V
	2			F

Ejercicio 60.
Se considera la oración

$$\forall x[P(x) \wedge (P(x) \rightarrow Q(x, f(x))) \vee \neg T(f(x))]$$

¿Es satisfacible en un universo que contiene a las siguientes relaciones y funciones? ¿Por qué?

- $U = \{a, b, c, d, 1, 2\}$
- $R_1 = \{a, b, c\}$
- $R_2 = \{1\}$
- $R_3 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (a, b), (c, d), (d, d)\}$

Pista: Busca primero las funciones candidatas para $f(x)$.

Ejercicio 61.
Se considera la oración

$$\exists x \forall y \forall z\, [Q(X) \wedge (Q(y) \wedge \neg Q(z) \wedge P(y, x) \wedge P(z, y) \rightarrow P(z, x))]$$

Evaluarla en alguna interpretación sobre el universo que contiene a las siguientes relaciones. ¿Es satisfacible?

- $U = \{a, b, c, d, e\}$
- $R_1 = \{a, b, c\}$
- $R_2 = \{(b, a), (c, a), (d, b), (e, c), (d, a), (e, a)\}$

Ejercicio 62.
Encuentra, si es posible, una estructura en la que la que cada una de las siguientes expresiones sea verdadera y otra estructura en la que sea falsa, si es posible. Si no es posible explique la razón.

1. $\forall x\ (P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$
2. $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \vee R(y, x))$
3. $\forall y\ (\forall x P(x) \leftrightarrow P(y))$
4. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
5. $\forall x\ \forall y R(x, y) \rightarrow \forall x\ \forall y\ R(y, x)$
6. $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

Ejercicio 63.
Determina si las siguientes sentencias son tautologías. Si alguna no lo es, define una estructura en la que sea falsa. En la que sí lo sea, muestra que no puede existir una estructura en la que sea falsa.

1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)))$
2. $\exists x P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
3. $\exists x P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$
4. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$
5. $\forall x P(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

6. $P(a) \wedge Q(a) \to \exists x P(x)$
7. $P(a) \wedge Q(a) \to \exists x(Q(x) \vee \neg P(x))$
8. $P(a) \vee Q(a) \to \exists x Q(x)$
9. $P(a) \wedge Q(a) \to \exists x(Q(x) \vee P(x))$
10. $Q(a) \to \forall x Q(x)$
11. $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x) \to \exists x P(x)$
12. $\forall x(P(x) \to P(x)$
13. $\forall x P(x) \to P(x)$
14. $\forall x P(x) \to (\exists y R(y) \vee \forall x P(x))$
15. $P(x) \to \exists x P(x)$