Ejercicio 47. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

(t17)

$K=\mathbb{Z}_5$

$V\leq K^5$

$V=C(B)$

$$B=\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ v_1\ \ v_2\ \ v_3 \end{array} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y=\begin{bmatrix}4\\1\\4\\0\\4\end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Otro método: calculamos una inversa por la izquierda de B,

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y la matriz H que nos da las ecuaciones implícitas de V

$H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$V=N(H)=$

$=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}\in K^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} y_2+3y_3+3y_5=0 \\ y_4=0 \end{array}\right\}$

$Hy=0$ (es decir, y cumple las ecuaciones implícitas) $\Longrightarrow y\in V$

y las coordenadas de y en base B son $Ay=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$ #

Ejercicio 103. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right], \quad B = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

$K = \mathbb{Z}_3$

$V \leq K^4$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B \longleftrightarrow v_1 = u_1 + 2u_2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B \longleftrightarrow v_2 = u_1$$

$$\boxed{P_{B'B}} = A \cdot B' = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \#$$

Siendo A una inversa lateral por la izquierda de B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 133. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

[t17]

$$M_{CC}(f) = \boxed{M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.}$$

$K = \mathbb{Z}_5$

$f : K^2 \longrightarrow K^2$

$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftarrow$ base canónica de K^2

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $\boxed{M_{B'B}(f).}$

Dado $y \in K^2$, sean $x \in K^2$ sus coordenadas en base B', es decir, $y = x_{B'}$, y sean $z \in K^2$ las coordenadas de $f(y)$ en base B, es decir, $f(y) = z_B$.

Entonces: $\boxed{M_{B'B}(f) \cdot x = z}$

$$\begin{tikzcd}
\underset{B'}{K^2} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \underset{C}{K^2} \arrow[r, "f"] & \underset{C}{K^2} \arrow[r, "id"] & \underset{B}{K^2}
\end{tikzcd}$$

conocida

En este caso $M_{B'B}(f) = \underbrace{M_{CB}(id)}_{\substack{P_{CB} \\ \| \\ B^{-1}}} \cdot M(f) \cdot \underbrace{M_{B'C}(id)}_{\substack{P_{B'C} \\ \| \\ B'}} =$

$$= B^{-1} \cdot M(f) \cdot B' = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \#$$

Ejercicio 132. *Consideremos la aplicación lineal* $f:\mathbb{Z}_5^2\to\mathbb{Z}_5^4$ *de la que conocemos que* $\quad K=\mathbb{Z}^5$

(t17)

$$\boxed{M_{C'B_1}(f)=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\\3&4\\1&3\end{bmatrix}.}$$

$f: K^2 \longrightarrow K^4$

$C' = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\} \leftarrow$ base canónica de K^2.

Calcula $M_{C'B_2}$ *siendo* C' *la base canónica y* B_1 *y* B_2 *las bases dadas por las matrices*

$M_{C'B_2}(f)$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&4&4&1\\0&1&2&2\\1&2&1&3\\4&2&4&3\end{bmatrix}\ y\ B_2=\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&2&3\\3&2&0&0\\0&4&2&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & K^4 \arrow[r, "id"] & K^4 \\
C' \arrow[u] & B_1 \arrow[u] & B_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow M_{C'B_2}(f) = \underbrace{M_{B_1B_2}(id)}_{P_{B_1B_2} \,=\, B_2^{-1}\cdot B_1} \cdot \overbrace{M_{C'B_1}(f)}^{\text{conocida}} =$$

$$= B_2^{-1}\cdot B_1\cdot M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix}3&4\\4&2\\3&4\\0&0\end{bmatrix} \quad \#$$

Ejercicio 143. *Consideremos la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ *de la que conocemos que*

(t17)

$K = \mathbb{Z}_5$

$$\boxed{M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}.$$

$f : K^2 \longrightarrow K^3$

$C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(base canónica de K^3).

Calcula $M_{B_2'C}$ *siendo* C *la base canónica y* B_1' *y* B_2' *las bases dadas por las matrices*

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "id"] & K^2 \arrow[r, "f"] & K^3 \\ B_2' \arrow[u] \arrow[rr, bend right, "f"] & B_1' \arrow[u] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f) \cdot \underbrace{M_{B_2'B_1'}(id)}_{P_{B_2'B_1'} = (B_1')^{-1} \cdot B_2'} =$$

$$= M_{B_1'C}(f) \cdot (B_1')^{-1} \cdot B_2' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \ \#$$

Ejercicio 44. *Calcula una base del espacio anulador por la derecha de la matriz:* $K = \mathbb{Z}_3$

(t18)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

3 $N(A) = \{ x \in K^4 \ / \ Rx = 0 \} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in K^4 \ / \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array}$$

Las soluciones del sistema son de la forma:

$x_1 = -2t = t$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2t = t$, $x_4 = t$ con $t \in K$.

$\Longrightarrow N(A) = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ / \ t \in K \right\}$

Luego una base de $N(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(dimensión $= 1 =$ nº de columnas $-$ ran(A))

4 $N(A^T)$? En este caso $N(A^T) = \{0\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\Longrightarrow N(A^T)$ no tiene base (dimensión $= 0 =$ nº de filas $-$ ran(A))

#