Ejercicio 57. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

(t14)

$K = \mathbb{Z}_3$

$$M(f) = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3) \qquad f: K^3 \longrightarrow K^4$$

$$\boxed{f(u) = M(f) \cdot u = A \cdot u \quad \forall u \in K^3}$$

En particular $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ ran (A) = nº de columnas de $A = 3$

f es sobreyectiva $\Longleftrightarrow$ ran (A) = nº de filas de $A = 4$

f es biyectiva $\Longleftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva

En este ejemplo ran $(A) = 3 \Longrightarrow f$ es inyectiva pero no es sobreyectiva (y así tampoco es biyectiva).

#

Ejercicio 95. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

(t14)

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

$K = \mathbb{Z}_5$

$f : K^2 \longrightarrow K^3$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x & & y & & & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u & & & & & v & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

$\mathrm{Im}(f) = \{ x \in K^3 \;/\; \exists\, u \in K^2 \text{ tal que } f(u) = x \}$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ u \in K^2 \;/\; f(u) = 0 \}$

¿$u \in \mathrm{Ker}(f)$? $\leftarrow$ NO porque $f(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

¿$v \in \mathrm{Ker}(f)$? $\leftarrow$ sí porque $f(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

¿$x \in \mathrm{Im}(f)$? $\leftarrow$ NO porque el sistema con matriz ampliada $[M(f) \mid x]$ es incompatible.

¿$y \in \mathrm{Im}(f)$? sí porque el sistema con matriz ampliada $[M(f) \mid y]$ es compatible.

Ejercicio 144. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5{}^2 \to \mathbb{Z}_5{}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$K = \mathbb{Z}_5$

(t 14)

$$\underbrace{f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right)}_{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{x} \qquad \underbrace{f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y}$$

¿$M(f)$?

$f : K^2 \longrightarrow K^3$

$M(f) \in M_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$

$f(u) = x \iff M(f) \cdot u = x$

$f(v) = y \iff M(f) \cdot v = y$

$$A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{Z}_5)$$

$$B = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(u) = x \\ f(v) = y \end{array}\right\} \iff \boxed{M(f) \cdot A = B}$$

ecuación matricial

A, B conocidas

$M(f)$ incógnita

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hay que calcularla

$$M(f) = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Z}_5) \quad \#$$

matriz asociada a f

$V \leq K^m$ espacio vectorial $(m \in \mathbb{N})$

V puede estar representado como $\boxed{V = C(B)}$ siendo B una matriz $B \in M_{m,p}(K)$

(representación paramétrica)

pero V también puede estar representado como $\boxed{V = N(H)}$ siendo H una matriz, $H \in M_{q,m}(K)$

(representación implícita)

¿Cómo pasamos de una representación a la otra?

Método para pasar <u>de paramétrica a implícita</u>:

Teorema 3. *Sea B una matriz y V el espacio generado por las columnas de B, $C(B)$. Para calcular la representación implícita del espacio V tomaremos la matriz $[B|I]$ y la reduciremos por filas (o la triangularizaremos) para obtener una matriz de la forma* $\left[\begin{array}{c|c} R_0 & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$ *donde en la matriz R_0 todas las filas tienen elemento pivote. Entonces V en forma implícita es $V = N(H)$ para la matriz H que aparece a la derecha de los ceros en esta reducción.*

Ejercicio 52. *Sea V un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz*

(t16)

$K = \mathbb{Z}_3$

$V = C(B)$

$V \leq K^4$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe V en forma implícita.

$$[B \mid I] \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{reducción}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V = N(H)$$

representación implícita

¿Qué quiere decir que $V = N(H)$?

$$\boxed{V = N(H)} = \{ y \in K^4 \mid Hy = 0 \} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in K^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in K^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 + 2y_3 + y_4 \\ y_2 + y_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in K^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} y_1 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}$$

ecuaciones implícitas de V

#

Ejercicio 86. *Sea V un espacio vectorial*

(t16)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \ tal\ que \ \begin{matrix} y_1 + y_4 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

ecuaciones implícitas

$V \leq K^4$ siendo $K = \mathbb{Z}_5$

$V = N(H)$

Escribe V en forma paramétrica.

Objetivo: buscar una matriz $B \in M_{4,p}(K)$ tal que $V = C(B)$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2,4}(K).$$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim [H^T | I] \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{reducción}} \cdots$$

$$\cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim B = J^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4,2}(K)$$

$$V = C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle/ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 4x_1 \\ 4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle/ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 \end{bmatrix} \middle/ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

ecuaciones paramétricas de V #