# Ejercicios Hoja 2.

① b)

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

zs

$= 0.$

②.

$$B \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

③. b)

$$f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M(f)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Si es lineal porque viene dada por el producto de una matriz.

c)

$$f_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{f_3\left(2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f_3\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2f_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 2 \end{pmatrix}}_{\neq}$$

no es lo mismo ⇒ no es apl. lineal.

d) $f_4 : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad f_4(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$$f_4\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

④.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{red. filas}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{Para saber si son base basta conocer si es invertible}}$

$P_{BI} = I^{-1} \cdot B = B$

$P_{IB} = B^{-1} \cdot I = B^{-1}$

$P_{B'B} = AB'.$

Si el det. es distinto de 0 es una base.

5. $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{R}^3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ // $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$P_{B_1 B_2} = B_2^{-1} \cdot B_1$

5. $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ran$(B_1) = 3$ (son columnas de $B_i$ son base de $\mathbb{R}^3$)

$P_{B_1 B_2} = \boxed{B_2^{-1}} \cdot B_1$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$

6. $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $M_{B_1 C_4}(f) = M(f) \cdot B_1$

b) $M_{C_2 B_2}(f) = B_2^{-1} \cdot M(f)$

c) $M_{B_1 B_2}(f) = B_2^{-1} \cdot M(f) \cdot B_1$

7. $M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $M(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) $M_{B_1 B_2}(f) = B_2^{-1} \cdot M(f) \cdot B_1$

b) $M_{B_3 B_1}(g) = B_1^{-1} \cdot M(g) \cdot B_3$

c) $M_{B_2 B_3}(f \circ g) = B_3^{-1} \cdot M(f) \cdot M(g) \cdot B_2$

8.

a) $M(f) = A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}_5}$ $\quad ker(f) = N(A)$, $Im f = C(A)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 pivotes = nº columnas $\Downarrow$ $C(A)$ tiene dimension 4 $\Downarrow$

f es sobreyectiva $\iff Im f = \mathbb{K}^4 \iff C(A) = \mathbb{K}^4$

Por otro lado, $N(A) = N(B) = \{x \in \mathbb{K}^4 \mid Bx = 0\} = \{0\}$ es decir, $ker(f) = \{0\}$, es decir f es inyectiva.

9.

$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ a) $P_{B_2 B_1} = B_1^{-1} \cdot B_2$

b) $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff u = B_1 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \iff B_1^{-1} \cdot u = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$

Entonces

rep. implícita de U (en base canónica).

$$U = \left\{ u \in \mathbb{K}^3 \,/\, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B_1^{-1}}_{H} u = 0 \right\} = \{u \in \mathbb{K}^3 \mid Hu = 0\} = N(H)$$

Calculamos $H = [4\ 1\ 2] \Rightarrow U = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,/\, 4y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \right\}$

Ahora quedaría calcular una rep. paramétrica de U (Por ejemplo, resolviendo el sistema com. ind. $4y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$)

c) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = M(f) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ¿$M(f)$?

$M(f) = M_{B_1 C_3}(f) \, M_{B_2 B_1}(f) \, M_{C_3 B_2}(id) = etc$

$= B_1 \cdot M_{B_2 B_1} \cdot B_2^{-1}$

(1).

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } C=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Buscamos matrices $B'$ y $C'$ tales que $\begin{cases} U = C(B') \\ V = C(C') \end{cases}$

$U \subseteq V \iff$ las columnas de $B'$ contenidas en $V := N(C)$ $\iff C \cdot B' = 0$

$V \subseteq U \iff$ las columnas de $C'$ están contenidas en $U = N(B)$ $\iff B \cdot C' = 0$.

Sale que $U = V$. ($U \subseteq V$ y $V \subseteq U$) $\Rightarrow U + V = U \cap V = U = V$.