AMD - Prácticas Subgrupo 3.1 - Tarea Semana 3

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

2. Resuelve, si es posible, la ecuación diofántica

$$-42x + 77y = 112.$$

3. Calcula las inversas laterales por la izquierda de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3).$$

Tarea Semana 3 - Subgrupo 3-1

Ejercicio 1

In [1]:
```
# La matriz de coeficientes es:
```

In [2]:
```
A=matrix(Zmod(5),[[0,3,3,1],[3,0,3,1],[1,1,2,2]]); show(A)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

In [3]:
```
# La matriz columna de los términos independientes es:
```

In [3]:
```
B=column_matrix(Zmod(5),[1,0,1]); show(B)
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In [5]:
```
# Por tanto, la matriz ampliada del sistema es:
```

In [4]:
```
AB=block_matrix([[A,B]]); show(AB)
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

In [7]:
```
# Calculamos su reducida por filas:
```

In [5]:
```
C=AB.echelon_form(); show(C)
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

In [9]:
```
# La columna correspondiente a los términos independientes no es pivote,
# y hay una columna de la parte de los coeficientes que tampoco es pivote,
# luego el sistema es compatible indeterminado.
```

In [18]:
```
# Hacemos parámetro la variable x_3 (corresponde a la columna no pivote)
# y las soluciones del sistema son de la forma:
#         x_1 = 4*a + 4
#         x_2 = 4*a + 1
#         x_3 = a
#         x_4 = 3
# donde a y b toman cualquier valor de Z_5.
```

In [6]:
```
restore('A B AB C') # limpiamos las variables
```

Ejercicio 2

In [7]:
```
A=column_matrix(ZZ,[-42,77]);
AA=block_matrix([[A,1]]); show(AA)
```

$$\left(\begin{array}{r|rr} -42 & 1 & 0 \\ 77 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In [32]:
```
# Calculamos su reducida por filas (trabajando en Z):
```

In [8]:
```
C=AA.echelon_form(); show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

In [24]:
```
# A partir de la reducción anterior, tenemos
# 1º) (-42)*9 + 77*5 = 7 = mcd(-42,77). Como 7 divide a 112 = 7*16, la ecuación diofántic
a tiene solución.
# 2º) (-42)*11 + 77*6 = 0.
```

In [27]:
```
# Por tanto, las soluciones de la ecuación diofántica son de la forma:
# x = 144 + 11*t, y = 80 + 6*t, donde t toma cualquier valor entero.
```

In [9]:
```
restore('A AA C') # limpiamos las variables
```

Ejercicio 3

In [1]:
```
B=matrix(Zmod(3),[[1,0,1],[0,1,1],[2,0,0],[2,1,2]]); show(B)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In [2]:
```
BB=block_matrix([[B,1]]); show(BB)
```

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In [37]:
```
# Calculamos la reducida por filas:
```

In [3]:
```
D=BB.echelon_form(); show(D)
```

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

In [4]:
```
D=copy(D); D.subdivide([3],[3]); show(D)
```

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

In [5]:
```
A=D.subdivision(0,1); H=D.subdivision(1,1); show(A); show(H)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

In [15]:
```
# Las inversas laterales por la izquierda de B son de la forma
# A+C*H, siendo C una matriz de parámetros de tamaño 3x1.
```

In [40]:
```
# Vamos a calcular esto en SAGE:
```

In [6]:
```
R=PolynomialRing(Zmod(3),3,"c") # Llamamos R al anillo de polinomios sobre Z_3 en tres va
riables.
```

In [7]:
```
C=matrix(R,3,1,R.gens()); show(C)
```

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

In [44]:
```
# Así las inversas laterales por la izquierda de B son las matrices:
```

In [8]:
```
show(A+C*H)
```

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_0 & -c_0+2 & -c_0 \\ c_1 & c_1+2 & -c_1+1 & -c_1+2 \\ c_2 & c_2+2 & -c_2+2 & -c_2+1 \end{pmatrix}$$

In [9]:
```
# donde c_0, c_1 y c_2 toman cualquier valor en Z_3.
```

In [11]:
```
show((A+C*H)*B) # comprobación
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$