Ejercicios Hoja 3

Curso 2020/2021

1. Calcula usando el método de Gram-Schmidt:

   a) base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ partiendo de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   b) base ortonormal del subespacio $\mathbb{R}^5$, $U = C\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

2. Dado el espacio vectorial $W = C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^4$,

   calcula una base ortogonal del subespacio W y la proyección ortogonal de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre W.

3. Para los siguientes subespacios, pon el vector dado como suma de un vector de W y otro perpendicular a W.

   a) En $\mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W = C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

   b) En $\mathbb{R}^4$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $W = C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

   c) En $\mathbb{R}^4$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

4. Para los siguientes subespacios, calcula la mejor aproximación de v por un vector de W:

   a) En $\mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $W = C\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$

b) En $\mathbb{R}^4$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $W = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$

5. Para los siguientes subespacios W, calcula una base ortogonal de su complemento ortogonal $W^{\perp}$

a) $W = C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^2$

b) $W = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^2$

c) $W = C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^3$

d) $W = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^3$

e) $W = N\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^4$

6. Dado el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el espacio

$$W = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

a) Pon v como suma de un vector de W y otro perpendicular a W.

b) Calcula una base de W y otra de $W^{\perp}$. Comprueba si la base obtenida de W junto con la obtenida de $W^{\perp}$ es una base de todo el espacio $\mathbb{R}^4$

7. Calcular bases con las siguientes condiciones:

a) base de $\mathbb{R}^3$ de forma que sea ortonormal y el primer vector esté en la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) base B de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal y tenga sus dos primeros vectores en el plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

c) base B de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal y tenga su último vector en la recta $r = C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

d) base B de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal y tenga su último vector en la recta $r = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

8. Construye una base de $\mathbb{R}^3$ de forma que todos los vectores tengan longitud 1, el primer vector esté en la recta generada por el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los otros dos sean perpendiculares a esa recta y formen entre sí un ángulo de 30°.

9. Construye un vector de $\mathbb{R}^3$ que esté en al plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, forme un ángulo de 15 grados con el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dentro de ese plano y tenga longitud 5.

10. Construye una base de $\mathbb{R}^2$ formada por dos vectores de longitudes 1 y 3 y que formen un ángulo de 45 grados.

11. En el plano $\mathbb{R}^2$ encuentra,

    a) 10 vectores de longitud 1 , de modo que cada uno forme con el anterior un ángulo de 36 grados.

    b) Comprueba que hemos construido un decágono.

    c) Cambia los vectores anteriores de forma que vayan teniendo longitudes $1, 2, \ldots, 10$ y comprueba que hemos construido una espiral.

12. Construye una base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres vectores de longitudes 2, 4 y 3 de forma que el primero y el segundo formen un ángulo de 45 grados y el tercero sea perpendicular a los otros dos.

13. Construye una base B de $\mathbb{R}^3$ de modo que los dos primeros vectores de B estén en el plano $N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right)$, tienen longitud 1 y forman entre sí un ángulo de 60 grados. El tercer vector tiene longitud 4 y está en la recta $r = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

14. Dado el plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^3$, calcula seis puntos del plano que formen un hexágono regular de radio 3.

15. Dado el plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^3$, calcula un vector que forme un ángulo de 60 grados con la perpendicular a ese plano. Haz un cuadrado de lado 2 en ese plano y usa el vector calculado anteriormente para hacer un prisma inclinado con base el cuadrado construido y altura en la dirección de ese vector.

16. Dado el plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, calcula tres vectores del plano que formen un triangulo regular de radio 3. Calcula el vector perpendicular al plano y úsalo para construir un prisma cuya base sea el triangulo anterior y tenga altura 7.

17. Para el plano $\Pi = N\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$,

    a) Calcula seis vectores de longitus 1 en el plano y que formen cada uno de ellos con el anterior un ángulo de 60 grados.

    b) Dibuja el hexágono correspondiente.

    c) Suma a estos seis vectores el vector perpendicular al plano y comprueba que hemos construido un prisma hexagonal cuya base está en el plano.

18. Dada la recta $r = C\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

a) Calcula una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^3$ que tenga su primer vector en la recta.

b) Úsalos para calcular 8 vectores de longitud 1 que sean perpendiculares a la recta y formen cada uno con el anterior un ángulo de 45 grados.

c) Dibuja el octógono correspondiente.

d) Comprueba que los 8 vectores y el doble del vector director de la recta forman una pirámide de base octogonal alrededor de la recta de altura 2.