Ejercicio 51. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{Z}_3{}^4$,

(t13)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}_3^4$

ran $(A) = 3 =$ nº de columnas $\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes y

ran $(A) = 3 \neq$ nº de filas $\Longrightarrow$ " <u>no</u> son generadores de $\mathbb{Z}_3$.

\#

Ejercicio 46. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

(E13)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{Z}_5^3$

ran $(A) = 3 =$ nº de filas de A $\Longrightarrow$ v_1, v_2, v_3, v_4 son generadores de $\mathbb{Z}_5^3$.

ran $(A) = 3 \neq$ nº de columnas de A $\Longrightarrow$ " <u>no</u> son linealmente indep. #

Ejercicio 33. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

(t12)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

nº de filas $= 3 > 2 =$ nº de columnas $\Longrightarrow$ B no tiene inversas laterales por la derecha

Pero sí podría tener inversas laterales por la izquierda

$$[B \mid I] \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{reducción}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

I, A, H

Luego las inversas laterales por la izquierda de B son las matrices de la forma

¿fórmula más compacta?

$$\boxed{A + CH} = \begin{bmatrix} -c_0 & 2c_0+1 & -c_0 \\ c_1 & 2c_1+3 & -c_1+2 \end{bmatrix}$$

siendo $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}_5$ arbitrarios. #

$$(A + CH) \cdot B = I$$

Ejercicio 30. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

(E12)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

nº de filas $= 2 < 4 =$ nº de columnas $\Longrightarrow$ B no tiene inversas laterales por la izquierda.

Para ver si tiene inversas laterales por la derecha (y calcularlas) se hace lo siguiente: trabajamos con

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[B^T \mid I \right] \xrightarrow[\text{por filas}]{\text{reducimos}}$$

Buscamos la forma general de las inversas laterales por la izquierda de B^T

Finalmente, se tiene en cuenta que si F es una inversa por la izquierda de B^T (es decir, $F \cdot B^T = I$) $\Longrightarrow$ F^T es una inversa por la derecha de B (es decir, $B \cdot F^T = I$)

#