Ejercicio 44. *Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:*

(amd-t07)

$$285x + 455y = 6$$

$285 = 3 \cdot 5 \cdot 19$
$455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ $\Big\}$ $\text{mcd}(285, 455) = 5 \nmid 6$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 5 \mid 285 \\ 5 \mid 455 \end{array}\right\} \Longrightarrow 5 \mid 285x + 455y \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}}$$

La ecuación diofántica no tiene solución #

Ejercicio 43. *Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:* $3 \mid -6 \Longrightarrow$ la ec. tiene solución

(amd-t07)

$$-144x+93y=-6$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} -144 & 1 & 0 \\ 93 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{(1)+2(2)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} 42 & 1 & 2 \\ 93 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{(2)-2(1)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} 42 & 1 & 2 \\ 9 & -2 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_{(1)-5(2)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 11 & 17 \\ 9 & -2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{(2)+3(1)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} -3 & 11 & 17 \\ 0 & 31 & 48 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{-(1)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} 3 & -11 & -17 \\ 0 & 31 & 48 \end{array}\right]$$

mcd $(-144, 93)$ = 3

P (matriz de paso) = $\begin{bmatrix} -11 & -17 \\ 31 & 48 \end{bmatrix}$

$$P \cdot \begin{bmatrix} -144 \\ 93 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} (-144)\cdot(-11) + 93\cdot(-17) = 3 \\ (-144)\cdot 31 + 93 \cdot 48 = 0 \end{cases}$$

Bezout: multiplic. por -2

multiplicamos por $t \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} (-144)\cdot 22 + 93 \cdot 34 = -6 \\ (-144)\cdot(31t) + 93\cdot(48t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \leadsto (-144)\cdot(\underbrace{22+31t}_{x}) + 93\cdot(\underbrace{34+48t}_{y}) = -6 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones de la ec. diofántica son de la forma $\begin{cases} x = 22+31t \\ y = 34+48t \end{cases}$ (con $t \in \mathbb{Z}$) #

Ejercicio 13. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que* $n \equiv 9 \pmod{27}$ *y* $n \equiv 1 \pmod{13}$.

(amd-t08)

$\operatorname{mcd}(27,13)=1 \Longrightarrow$ el sistema $\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{27} \\ n \equiv 1 \pmod{13} \end{cases}$ tiene solución.

Paso 1. Planteamos y resolvemos la ecuación diofántica asociada.

$$\begin{array}{l} n \equiv 9 \pmod{27} \iff n = 9+27x \text{ para algún } x \in \mathbb{Z} \\ n \equiv 1 \pmod{13} \iff n = 1+13y \quad \text{"} \quad \text{"} \quad y \in \mathbb{Z} \end{array} \rightsquigarrow 9+27x = 1+13y \iff \underbrace{\boxed{27x - 13y = -8}}_{\text{ec. diofántica asociada}}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 27 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{(1)+2(2)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ -13 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{(2)+13(1)}]{} \left[\begin{array}{c|cc} \overset{\operatorname{mcd}(27,-13)}{1} & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 27 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 13 & 27 \end{matrix}}_{P}$$

$$P \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 27 \cdot 1 + (-13) \cdot 2 = 1 \quad \text{Bezout} \\ 27 \cdot 13 + (-13) \cdot 27 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 27 \cdot (-8) + (-13) \cdot (-16) = -8 \\ 27 \cdot (13t) + (-13) \cdot (27t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow 27 \cdot (\overbrace{-8+13t}^{x}) + (-13)(\overbrace{-16+27t}^{y}) = -8$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$

Paso 2. Sustituimos en cualquiera de . Por ejemplo: $n = 9+27x = 9+27(-8+13t)$

$= 9 - 216 + 351t = \underline{-207 + 351t}$ con $t \in \mathbb{Z}$ $\iff n \equiv -207 \pmod{351}$

$\Updownarrow$

$$\boxed{n \equiv 144 \pmod{351}}$$

#

Ejercicio 16. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que* $n \equiv 30 \pmod{70}$ *y* $n \equiv 35 \pmod{75}$.

(amd-to8)

$\text{mcd}(70,75) = 5$

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
$75 = 3 \cdot 5^2$

Paso 1. Ec. diofántica asociada:

$$\left.\begin{array}{l} n = 30 + 70x \\ n = 35 + 75y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{70x - 75y = 5}$$

Paso 2. Se sustituye la sol. general de la ec. diofántica en $n = 30 + 70x$ o en $n = 35 + 75y$.

$\longmapsto$ Los detalles os los dejo a vosotros.

(Ejercicios 1 2020-2021)

18. Un general quiere distribuir a sus soldados en grupos. Primero dispone a sus soldados en grupos de 11 y le sobran 2. Decide quitar 10 soldados y agruparlos en grupos de 9 y ahora le sobran 3. Finalmente añade de nuevo 4 de los 10 soldados que quitó y, al agruparlos en grupos de 25 le sobra 1. Calcula dos posibles soluciones del número de soldados y comprueba que la primera de ellas cumple las condiciones.

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{11} \\ n \equiv 4 \pmod{9} \\ n \equiv 7 \pmod{25} \end{cases}$$

PASO 1: Resolvemos el sistema $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{11} \\ n \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$

(1.1) Ec. diofántica. $n = 2+11x$; $n = 4+9y \Longrightarrow \boxed{11x - 9y = 2}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 11 \cdot 5 + (-9) \cdot 6 = 1 \\ 11 \cdot 9 + (-9) \cdot 11 = 0 \end{cases}$$

Bezout

$\longrightarrow 11 \cdot 10 + (-9) \cdot 12 = 2$

$\longrightarrow 11 \cdot (9t) + (-9) \cdot (11t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

sumamos $\Longrightarrow$ $11 \cdot \underbrace{(10+9t)}_{x} + (-9) \cdot \underbrace{(12+11t)}_{y} = 2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

(1.2) Sustituyendo $n = 2+11x = 2+11 \cdot (10+9t) = 2+110+99t = 112+99t \quad (t \in \mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \boxed{n \equiv 112 \equiv 13 \pmod{99}}$

PASO 2. Resolvemos el sistema $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{99} \\ n \equiv 7 \pmod{25} \end{cases} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow n \equiv 1932 \pmod{2525}$

#

17. Un programa produce números que se sabe que son siempre múltiplos de 3, que son impares y que el triple de esos números siempre dan resto 2 al dividirlos por 5 ¿ qué forma tienen esos números ?. Calcula dos de ellos y comprueba que cumplen las condiciones.

(Ejercicios 1 2020_2021)

$$\left\{\begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{2} \\ 3n \equiv 2 \pmod{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{2} \\ n \equiv 4 \pmod{5} \end{array}\right\}$$

$$3n \equiv 2 \pmod{5} \Updownarrow 2\cdot 3n \equiv 2\cdot 2 = 4 \pmod{5} \Updownarrow n \equiv 4 \pmod{5}$$

PASO 1. Resolvemos $\left.\begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{2} \end{array}\right\} \leadsto \ldots$

$\ldots \leadsto n \equiv 3 \pmod{6}$

PASO 2. Resolvemos $\left.\begin{array}{l} n \equiv 3 \pmod{6} \\ n \equiv 4 \pmod{5} \end{array}\right\} \leadsto \ldots$

$\ldots \leadsto n \equiv 9 \pmod{30}$ #

Ejemplo: 9, 39 cumplen las condiciones