Boletín 7

Lógica de Predicados: Satisfacibilidad

Ejercicio 64.
Responde a las siguientes preguntas:

1. En un sistema deductivo, ¿para qué sirven los axiomas? ¿cuántas reglas debe tener?
2. Define los siguientes conceptos: razonamiento, razonamiento válido, deducción, consecuencia lógica, teorema (por deducción).
3. Indica qué relación hay entre ellos y bajo qué condiciones.
4. Define los siguientes conceptos: sistema consistente, sistema inconsistente, teoría no contradictoria, teoría contradictoria.
5. Indica qué relación hay entre ellos y bajo qué condiciones.
6. Indique si las técnicas estudiadas a lo largo del curso le permite definir un sistema deductivo: Tablas de verdad, DPLL, resolución, árboles semánticos, tableaux en L0, tableaux en L1, DN en L0, DN en L1.

   Si es así, indique cuáles son las reglas (sintácticas) de inferencia. Justifique si dicho sistema es sólido (correcto) o/y completo.
7. Indica en qué contexto "nos movemos" (si semántico o deductivo o en ambos) cuando decimos las siguientes afirmaciones:

   a) la oración se infiere.
   b) la oración es un teorema.
   c) la oración es demostrable.
   d) la oración es consecuencia.
   e) la oración es una deducción.
   f) la oración es una conclusión.
8. ¿En cualquier teoría se cumple la completitud sintáctica?

Ejercicio 65.
Responde a las siguientes preguntas:

1. Explica en qué consiste cada una de las siguientes propiedades de los sistemas deductivos: solidez, completitud, consistencia, decidibilidad.
2. Sobre la decidibilidad ¿cómo es la lógica de predicados de primer orden? ¿Y eso qué significa?
3. ¿En la lógica matemática pueden existir sistemas deductivos completos y consistentes simultáneamente? ¿Qué consecuencias tiene?
4. En los tableaux semánticos en L1 se habla de 4 tipos de reglas pero el término "regla" lo usamos para sistemas deductivos. ¿Eso quiere decir que la técnica de los tableaux es un sistema deductivo? Si es así ¿qué puedes decir de su solidez y completitud?
5. ¿Cumple el sistema de deducción natural el teorema de la deducción (sintáctica)?

Ejercicio 66.
Comprobar si son válidas las siguientes consecuencias lógicas, aplicando tableaux semánticos como técnica de satisfacibilidad:

1. $\exists x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ Q(y)) \quad \models \quad \forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge \neg Q(y))$
2. $\forall x P(x)\ \vee\ \forall y Q(y) \quad \models \quad \forall x P(x)\ \vee\ Q(x))$
3. $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \quad \models \quad \exists x P(x)\ \wedge\ \exists y Q(y)$
4. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(X)) \quad \models \quad \forall P(x)\ \rightarrow\ \forall x Q(x)$
5. $\exists y\ \forall x R(x, Y) \quad \models \quad \forall x\ \exists y R(x, y)$
6. $\forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ \exists y(R(y)\ \wedge\ Q(x, y));\ \exists x P(x) \quad \models \quad \exists x\ \exists\ y Q(x, y)$

Boletín 8

Lógica de Predicados: Deducción Natural

Ejercicio 67.
Formaliza y comprueba que es correcta la siguiente deducción, aplicando DN:

- Primera premisa: Sólo los tontos alimentan a los osos salvajes
- Segunda premisa: Cristina alimenta a Nicolás, pero no es tonta
- Conclusión: Nicolás no es un oso salvaje

Ejercicio 68.
Formaliza y comprueba que es correcta la siguiente deducción, aplicando DN:

- Primera premisa: A ningún pescador le gustan los paletos
- Segunda premisa: Todos los habitantes del pueblo son paletos
- Conclusión: A ningún pescador le gustan los habitantes del pueblo

Ejercicio 69.
Comprueba que es correcta la siguiente deducción, aplicando DN:

- Primera premisa: $P(n, g)$
- Segunda premisa: $\forall x(L(x) \rightarrow \neg P(n, x))$
- Tercera premisa: $L(a)$
- Cuarta premisa: $\forall x \forall y(L(x) \wedge P(n, y) \rightarrow O(x, y))$
- Conclusión: $O(a, g)$.

Ejercicio 70.
Comprueba si es correcta la siguiente deducción, aplicando DN:

- Primera premisa: $\exists x(F(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow L(x, y))$
- Segunda premisa: $\forall x \forall y(F(x) \wedge C(y) \rightarrow \neg L(x, y))$
- Conclusión: $\forall x(E(x) \rightarrow \neg C(x))$.

Ejercicio 71.
Formaliza y prueba las siguientes deducciones expresadas en lenguaje natural:

- Ningún P es Q, por tanto no es cierto que algunos P son Q.
- Si todos no son P, entonces todos no son Q. Por tanto, si alguno es P, entonces alguno es Q.
- Ninguno es P y ninguno es Q. Así, no es cierto que haya alguno que sea o P o Q.
- Todos no son P y Q. Por tanto no es cierto que un individuo sea P y Q.
- Si para cualquier pareja de objetos (x, y) se cumple que si x está relacionada con y entonces y no está relacionada con x, podemos concluir que todos los objetos no están relacionados consigo mismo.
- Cuando todos no son P, se concluye que ningún P es Q.

Ejercicio 72.
Deduzca usando las reglas del sistema de Deducción Natural las siguientes afirmaciones:

- $\forall x(P(x) \to R(x)) \vdash \forall x P(x) \to \forall x R(x)$
- $\forall x(G(x) \to M(x), \exists x(M(x) \to F(x)) \vdash \exists x(G(x) \to F(x))$
- $\forall x(P(x) \to Q(x) \vee R(x)), \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x P(x) \to \forall x R(x)$

Ejercicio 73.
Demuestre los siguiente teoremas.

- $\vdash \neg \forall x(P(x) \wedge \exists x \neg P(x))$
- $\vdash \forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$
- $\vdash (\forall x P(x) \to \neg Q(x)) \leftrightarrow \neg \exists (P(x) \wedge Q(x))$

Ejercicio 74.
Demuestra como teoremas las sentencias tautológicas que hayas determinado en el **Ejercicio 63**.