Recetario de procedimientos

Fundamentos Lógicos de la Informática
Curso 2018-2019

LUIS DANIEL HERNÁNDEZ MOLINERO HERNÁNDEZ

23 de octubre de 2019

Última impresión, 23 de octubre de 2019

Índice

Prólogo

- Estos apuntes son una **guía de contenidos** para el estudio. Esto no es un libro, pero los libros te ayudarán a entender lo que aquí se dice.
- Todos los conceptos y procedimientos que se mencionan se explican en clase.
- Si tienes dudas en cualquier frase, ¡busca, consulta, pregunta y estudia! hasta que la entiendas.
- Estos apuntes, las transparencias y tus notas de clase te permitirán desarrollar el temario completo de la asignatura.
- Un tema estará estudiado cuando
  - se entiende todo lo que se dice en cada una de las páginas de estos apuntes,
  - conoces la relación de lo explicado con los temas anteriores, y
  - eres capaz de explicarlo a un compañero.
- La mejor forma de aprender lógica es desarrollando tu propio material.

1 Formalización

1.1 Proceso General

- Leer el párrafo cuantas veces sean necesarias para entenderlo perfectamente.
- Las oraciones deben entenderse e interpretarse correctamente.

  No hagas tus interpretaciones: no intentes nunca buscar condiciones, premisas o supuestos que te ayuden a entender la oración, o añadir conocimiento derivado de tu conocimiento. Limítate a lo escrito. Recuerda: "la interpretación no es interpretable".
- Identificar las sentencias atómicas (oraciones lógicas) que componen la oración buscando todos los posibles indicadores, en este orden:
  - Identificadores de los argumentos: indicadores de premisas e indicadores de conclusión.
  - Identificadores de las sentencias compuestas: indicadores de conjunciones, disyunciones, implicaciones y doble implicación.
  - Identificadores de literales: indicador de negación.

  Es preferible que cada sentencia atómica se corresponda con un enunciado afirmativo. Deja la versión negativa para usar el conectivo $\neg$.
- Identificar los objetos de los que se habla haciendo pregunta del tipo ¿de quién se habla?
  - Determinar cada uno de los dominios/colectivos que involucren las oraciones.
  - Identificar los objetos concretos (constantes) a los que se haga referencia, que son distinguibles del resto, y asignarle un dominio.
- Identificar las propiedades y relaciones entre dominios haciendo preguntas del tipo ¿de qué se habla?

  Ayuda el identificar:
  - Las acciones (verbos) de las oraciones.
  - Las propiedades de los objetos
  - Las relaciones entre objetos y su aridad.
- Solo para Lógica de Predicados.

  Construir inicialmente todas las oraciones con variables libres. Posterioremente añadir la cuantificación adecuado dependiendo de los argumentos.
  - Las frases con cuantificador existencia principal que relacionan dos categorías tienen el patrón: "existe un objeto x del tipo T que (además) cumple las propiedades α"; es decir:

$$\exists x(Tipo(x) \wedge Propiedades(x))$$

- Las frases con cuantificador universal principal que relacionan dos categorías tienen el patrón: "Todo objeto x del tipo T también cumple las propiedades α"; es decir:

$$\forall x(Tipo(x) \to Propiedades(x))$$

- Sea cual sea el cuantificador identifique:
  - El dominio de x.
  - Las oraciones que componen $Tipo(x)$.
  - Las oraciones que componen $Propiedades(x)$.
- Los patrones de las forma normales categóricas son útiles cuando se relaciones predicados. Los predicados representan a conjuntos, incluidas las relaciones. Si se relacionan dos predicados se podrá ajustar a los patrones anteriores: cuantificador universal con condicional material y cuantificador existencial con conjunción.
- Analiza cuidadosamente la situación.
  - Las situaciones $Tipo(x)$ o $Propiedades(x)$ pueden ser oraciones complejas.
    Todos los alumnos tienen algún profesor. $\forall x(A(x) \to \exists y P(y, x))$
  - Puede que $Propiedades(x)$ no se presente.
    Todas son figuras cuadradas: $\forall x(P(x) \land C(x))$
  - Puede que tengas variables libres.
    Algunos son más bajos (que él): $\exists x B(x, y)$

- Prestar especial atención en distinguir una argumentación ($\models$) de la conectiva implicación ($\to$).
- Identificar los signos de puntuación (puntos, comas y puntos y comas).

  Tener en cuenta que un signo de puntuación o puede identificar un argumento o puede identificar alguna conectiva o nos puede decir cómo deberán colocarse los paréntesis.

1.2 Indicadores en Argumentaciones

1.2.1 Indicadores de argumentos completos, $\alpha \models \beta$

- α, por tanto β
- α, en conclusión β
- Si tenemos α como consecuencia tenemos β
- Si tenemos α podemos concluir β
- De α se deduce β.

1.2.2 Indicadores de Premisas, $\alpha \models \cdot$

- Para
- Desde
- Como
- Porque
- Ya que

- Suponiendo que
- Al ver que
- Por supuesto que
- Esto es así porque
- La razón es que
- Por la razón de que
- En vista del hecho de que
- Es un hecho que
- Como lo demuestra el hecho de que
- Dado que
- Ya que

1.2.3 Indicadores de Conclusión, $\cdot \models \beta$

- Por lo tanto
- Así
- Por esta razón
- En/como consecuencia
- Por consiguiente
- Siendo así que
- Resulta que
- Como un resultado
- La moraleja es (que)
- Lo que demuestra que
- Lo que significa que
- De la cual se puede inferir que
- En/como conclusión

1.3 Indicadores de conectivas

1.3.1 Indicadores de Conjunción, $\alpha \wedge \beta$

- α y β.
- α pero β.
- α aunque β.

1.3.2 Indicadores de Disyunción, $\alpha \vee \beta$

- O α o β.
- Ya α, ya β, ya ambas.

1.3.3 Indicadores de Implicación, $\alpha \to \beta$

- Si α, β.
- Si α entonces β.
- α sólo si β.

- Sólo α si β.
- Es suficiente α para que β.
- Siempre que α entonces β.
- Es necesario β para que α.
- No α a menos que β.
- A no ser que β no α.

Comentarios

- La expresión $\alpha \to \beta$ indica dos afirmaciones:
  - α es suficiente para β.
  - β es necesario para α.
- Significado.
  - Cuando ocurra α, (seguro que) β ocurrirá.
  - Que ocurra α es suficiente para que ocurra β.
  - Que ocurra α hace que ocurra β necesariamente.
  - α no puede ocurrir sin β.
  - Si β es falso, entonces α tiene que ser falso.
  - Ojo: No es lícito afirmar que cuando se dé β se dará α.
- Algunos indicadores de condición suficiente:
  - Si α, entonces ...
  - ... si α.
  - Cuando α entonces ...
  - ... siempre que α.
  - Basta con que α para que ...
- Algunos indicadores de condición necesaria:
  - ... entonces β.
  - Se debe β para ...
  - Es necesario que β para ...
  - Sólo si/cuando β ...
- No confunda "Se produce β si se da α" ($\alpha \to \beta$) con "Solo se produce β si se da α" ($\beta \to \alpha$).
- Observa "no α a menos que β" y "a no ser que β no α". El hecho de tener negaciones en la oración no significa que $\neg$ aparezca en la implicación material $\alpha \to \beta$.

  Existen expresiones equivalentes para estas oraciones que sí contienen la negación: $\neg\alpha \vee \beta$, $\neg\beta \to \neg\alpha$ y $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$.

1.3.4 Indicadores de doble Implicación, $\alpha \leftrightarrow \beta$

- α si y sólo si β.
- α equivale a β.

- α cuando y sólo cuando β.
- α cuando únicamente β.
- α es condición suficiente y necesaria para que β.

1.3.5 Indicadores de Negación, $\neg\alpha$

- No es el caso de α.
- No α.
- No es cierto que α.
- La negación de α.

1.4 Indicadores de cuantificadores

1.4.1 Indicadores de Cuantificador Universal, $\forall x$

Expresiones que hagan referencia a todos los elementos del dominio.

- Para todos ...
- Para cada ...
- Uno y cada uno ...
- Sin excepción ...

1.4.2 Indicadores de Cuantificador Existencia, $\exists x$

Expresiones que hagan referencia a algunos elementos del dominio.

- Al menos un/uno ...
- Hay algún ...
- Algunos ...

1.4.3 Indicadores de variables libres

Si la expresión hace referencia a algunos individuos pero no está claro a cuantos, dejar la variable libre.

1.5 Importante: No confundir

Presta especial atención a errores comunes.

- No es un error introducir la negación de una oración negativa en la formalización atómica, pero no se aconseja. Se aconseja usar literales positivos para las oraciones lógicas afirmativas, y usar literales negativos para las oraciones lógicas negativas.

  La oración "no llueve" se puede formalizar por p; pero es mejor formalizarla por $\neg p$.

- Los nexos no forman parte de las oraciones.

  En la oración "Si estoy de fiesta, entonces me lo paso bien", las oraciones atómicas son p :"(yo) estoy de fiesta" y q :"(yo) lo paso bien".

  Pero **no** son oraciones ni p :"Si (yo) estoy de fiesta", ni tampoco q :"entonces (yo) lo paso bien".

- Una oración con un NO, no conlleva necesariamente una negación lógica.

  La oración "Las plantas **no** crecerán a menos que llueva" contiene las oraciones atómicas p :"Las plantas crecen" y q :"llueve" y se puede formalizar como $p \to q$.

- Una oración con dos NO, no conlleva necesariamente la aparición de una negación lógica.

  La oración "Las plantas **no** crecerán a **no** ser que llueva" contiene las oraciones atómicas p :"Las plantas crecen" y q :"llueve" y se puede formalizar como $\neg q \to \neg p$ (con negaciones) pero también como $p \to q$ (sin negaciones).

- No confundir, "Si" con "sólo si".

  La oración "Si estoy de fiesta, entonces me lo paso bien" se formaliza como $p \to q$, las oraciones atómicas son p :"(yo) estoy de fiesta" y q :"(yo) lo paso bien".

  Pero la oración, "Sólo si estoy de fiesta, entonces me lo paso bien" se formaliza como $q \to p$.

- Son cuantificaciones universales "Todos", "Ninguno", "Solo los".

  Todas las ranas son verdes. $\forall x(Rana(x) \to Verde(x))$

  Ninguna rana es naranja. $\forall x(Rana(x) \to \neg Naranja(x))$

  Solo son verdes las ranas. $\forall x(Rana(x) \to Verde(x))$

- No confundir "Sólo si" con "Sólo los".

  "Sólo si" hace referencia a una condición. "Sólo" hace referencia a un cantidad universal.

  La oración "sólo los ingenieros informáticos fueron a la fiesta" hace referencia a un universo en el que "todos los que fueron a la fiesta eran ingenieros informáticos", y que se puede formalizar como $\forall x(Fiesta(x) \to Inform(x))$.

  La oración "sólo si los ingenieros informáticos fueron a la fiesta ...." está incompleta. Usar "solo si" obliga a usar el nexo "entonces", que es un condicional, como por ejemplo: "sólo si todos los ingenieros informáticos fueron a la fiesta, estaban algunos ordenadores encendidos". $\exists y(Ordenador(y) \wedge Encendido(y)) \to \forall x(Inform(x) \to Fiesta(x))$

- Las oraciones impersonales se deben transformar en predicados en L1.

  Por ejemplo, la oración impersonal "llueve" se puede considerar como un elemento perteneciente a la categoría clima, en cuyo caso una formalización podría ser $Clima(LLuvioso)$.

- En L1, frente a la duda, mejor no cuantificar.

  En la oración "el cuadrado del número es 9" no especifica cuántos números verifican esta igualdad con el 9. Lo correcto sería formalizar como $Igual(f(x), 9)$ siendo $f(x) = x^2$ y x variable libre.

- Es un error pensar que todo cuantificador universal conlleva un condicional. Esto solo es cierto si se establece una oración normal categórica.

  - La oración "todos los perros son ladradores", indica que dado un objeto del tipo perro, ese objeto también ladra. $\forall x(Perro(x) \to Ladra(x))$.

    La oración se puede escribir: "si considero cualquier perro puedo además comprobar que es ladrador". Aquí tenemos una relación de inclusión sobre todos los objetos. Responde a una forma normal categórica.

- La oración "todos son perros ladradores", no responde a una forma normal ("todos ... son ..."), e indica que dado un objeto cumple simultáneamente dos cualidades. $\forall x(Perro(x) \wedge Ladra(x))$

  Aquí el verbo **ser** está para hablar de las propiedades específicas que cumplen los objetos. No responde a forma normal categórica.

- Es un error pensar que toda cuantificación existencial conlleva una conjunción. Esto solo es cierto si se establece una oración normal categórica.
  - $\exists x(Estudiante(x) \wedge Estudioso(x))$ resonde a las oraciones "Algunos estudiantes son estudiosos" o "Hay estudiantes estudiosos" y responde a una forma categórica.
  - $\exists x(Estudiante(x) \rightarrow Estudioso(x))$ responde a "Hay estudiantes necesariamente estudiosos", "algunos no son estudiantes a menos que sean estudiosos". Hay una condición necesaria de inclusión.

- Es un error pensar que toda conjunción cuantificada conlleva un cuantificador existencial. Esto solo es cierto si se establece una oración normal categórica.
  - "Algunos son perros ladradores" se formaliza con $\exists x(Perro(x) \wedge Ladra(x))$
  - Como se ha indicado anteriormente "todos son perros ladradores", indica que todos los objetos cumplen simultáneamente dos cualidades. $\forall x(Perro(x) \wedge Ladra(x))$

- Es un error pensar que toda implicación cuantificada conlleva un cuantificador universal. Esto solo es cierto si se establece una oración normal categórica.

  Basten los ejemplos anteriores.

2 Interpretación

2.1 Proceso General de Tablas de Verdad en L0

- Construir una tabla de doble entrada con filas y columnas a determinar por el siguiente procedimiento.
- Identificar en la f.b.f. las letra atómicas. Suponemos que son n.
- Construir las n columnas de la tabla etiquetando cada columna con una letra atómica.
- Construir 2^n filas en la tabla.
- Escribir las 2^n interpretaciones en las $2^n \times n$ celdillas recién construidas.
- Identificar en la f.b.f los conectivos que aparezcan. Suponemos que son k.
- Enumerar los k conectivos por su orden de cáculos teniendo en cuenta los paréntesis y precedencia de los conectivos.
- Añadir k columnas, y etiquetarlas según el orden de aparición de los operadores de izquierda a derecha, y enumerarlas según el orden del paso anterior.
- Evaluar cada columna, según la enumeración establecida.

Ejemplo: La tabla de verdad, a completar, de $(p \to q) \wedge \neg p$ es

p	q	$\to$	$\wedge$	$\neg$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			
		1	3	2

2.2 Proceso General de Tablas de Verdad en L1

Seguir el proceso general de L0 teniendo en cuenta lo siguiente.

- Añadir además tantas columnas como cuantificadores hayan, en el lugar correspondiente según su lugar de aparición.
- Incluir en la ordenación del cálculo los cuantificadores, indicando en la enumeración de los conectivos de las subfórmulas cuantificadas que dependen del cuantificador.
- Para cada cuantificador añadir una columna para la variable cuantificada y tantas filas como asignaciones de variables sean necesarias para la evaluación del cuantificador.

Ejemplo: Para obtener la tabla de verdad, a completar, de $\forall x(p(x) \to (q(x) \to p(x))) \wedge \exists y \neg p(y)$ en un universal de dos elementos a, b partimos de

$p(x)$	$q(x)$	$\forall$	$\to$	$\to$	$\wedge$	$\exists$	$\neg$
		1	1.2	1.1	3	2	2.1

Para evaluar 1, debe evaluarse, en este orden 1.1 y después 1.2, para las asignaciones de variables pertinentes. Para evaluar 2, debe evaluarse antes 2.1.

Al tener el cuantificador $\forall x$ se añaden dos filas más, tantas como valores puede tomar x. Pero al considerar el cuantificador $\exists y$ cada fila se transforma en dos filas, tantas como valores puede tomar y.

Quedando entonces que la tabla a completar para la expresión $\forall x(p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(x))) \wedge \exists y \neg p(y)$ en un universal de dos elementos a, b es:

x	y	$p(x)$	$q(x)$	$\forall x$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\wedge$	$\exists y$	$\neg$
a	a								
	b								
b	a								
	b								
				1	1.2	1.1	3	2	2.1

En general, en L1 no es recomendable utilizar tablas de verdad salvo que la expresión sea sencilla y el universo considerado reducido. Es mejor aplicar directamente la definición y desarrollar, si fuera necesario, un listado de casos.

Por ejemplo, para la oración $\forall x(p(x) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(x))) \wedge \exists y \neg p(y)$ en el universal de dos elementos $\{a, b\}$ trabajaríamos así. Por ser el operador principal una conjunción, se deberá estudiar por un lado el cuantificador universal $\forall x$ y por otro el cuantificador existencial $\exists y$.

Para el cuantificador universal $\forall x$ desplegamos todas las posibilidades (disyunción de casos):

- Primer caso $x \hookrightarrow a$. Y se pasaría a estudiar la oración $p(a) \rightarrow (q(a) \rightarrow p(a))$
- Segundo caso: $x \hookrightarrow b$, en el que que analizaría la oración: $p(b) \rightarrow (q(b) \rightarrow p(b))$

Para el cuantificador existencial $\exists y$ haría lo mismo:

- Primer caso $x \hookrightarrow a$. Y se pasaría a estudiar la oración $\neg p(a)$
- Segundo caso: $x \hookrightarrow b$, en el que que analizaría la oración: $\neg p(b)$

La cantidad de casos a considerar dependerá de lo que se busque en cada problema concreto. Si busca encontrar un modelo, para un cuantificador universal se desarrollará cada uno de los casos hasta encontrar un caso donde la oración cuantificada sea falsa; y para un cuantificador existencial se desarrollará cada uno de los casos hasta encontrar uno donde la oración cuantificada sea verdadera.

2.3 Evaluación de expresiones por equivalencias

El conocimiento de las leyes de equivalencia facilita el cómputo de la evaluación de una expresión. Se puede usar este conocimiento para, en el mejor de los casos, necesitar la asignación de un solo átomo y con él entonces determinar el valor de verdad de toda la oración. En el peor de los casos, será necesario conocer la asignación de todos los elementos atómicos y proceder como en una tabla de verdad.

Para calcular el valor de verdad de una oración ϕ para una asignación de sus elementos atómicos puedes usar el siguiente procedimiento general:

1. Considera una asignación $v_I(u)$ y quitarla de la lista de asignaciones.

2. Si $v_I(u) = V$, definir $\psi = \phi(u)$ como la fórmula que se obtiene de ϕ bajo el supuesto de que u es cierto. Ir a 4.

3. Si $v_I(u) = F$, definir $\psi = \phi(\neg u)$ como la fórmula que se obtiene de ϕ bajo el supuesto de que u es falso. Ir a 4.

4. Simplificar ψ hasta no tener ni la constante V ni la constante F en la expresión ϕ de partida.

5. Si no se puede concluir el valor de verdad de ψ, redefinir ϕ como ψ y volver al primer paso.

6. Retornar el valor de verdad de ψ.

El cálculo de $\phi(\ell)$ recibe el nombre de **propagación del literal** ℓ.

Como ejemplo, dada la oración $\phi = (p \vee q \vee \neg t) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p) \wedge (r \vee t)$, se quiere determinar su valor para la interpretación $\{v(p) = F, v(q) = V, v(r) = V, v(t) = F\}$.

- Se considera la asignación $v(p) = F$, y se obtiene $\phi(\neg p) = (q \vee \neg t) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (r \vee t)$, cuyo valor no puede determinarse.
- Se considera $v(q) = V$, obteniendo $\phi(\neg p, q) = r \vee t$, cuyo valor no puede determinarse.
- Se consiedra $v(r) = V$, obteniendo $\phi(\neg p, q, r) = V$, que es el valor que se devolvería como resultado de la evaluación.

  No se ha necesitado tener en cuenta que $v(t) = F$.

Para la misma oración, ϕ, su valor para la interpretación $\{v(p) = V, v(q) = V, v(r) = V, v(t) = F\}$, se corresponde con el de $\phi(\neg p) = F$. No se necesitan las asignaciones de q, r y t.

Siempre que pueda, aplique este procedimiento para calcular la veracidad de las oraciones y evite las tablas de verdad.

2.4 Mal uso de las Tablas de Verdad

La veracidad de una oración depende de la interpretación de sus átomos y viene dada por una **función de verdad** que se define de forma recursiva y dependiendo del operador. Por ejemplo, en la definición recursiva de la conjunción se establece que:

$$\alpha \wedge \beta = \begin{cases} V & \text{si } v(\alpha) = v(\beta) = V \\ F & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A veces, esta definición recursiva se pone en forma de tabla

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

El hecho de ponerlo en forma de tabla, no significa que deban utilizarse tablas, así, sin más, para comprobar las equivalencias de oraciones.

Por ejemplo, no es extraño justificar que $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ escribiendo sin más la tabla:

$$\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & \alpha \to \beta & \neg\alpha \vee \beta \\ \hline V & V & V & V \\ V & F & F & F \\ F & V & V & V \\ F & F & V & V \end{array} \tag{1}$$

Y mostrando la tabla se considera que ya está demostrada la equivalencia, cuando la respuesta es que con la tabla, por sí sola, **NO se ha demostrado absolutamente nada porque no aparecen las interpretaciones**.

No hay que olvidar la definición: Debe cumplirse **para cada interpretación**, v_I, que $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta)$. La tabla puede ayudarnos para este propósito pero, se insiste, la tabla no demuestra nada.

Para demostrar la equivalencia anterior, hemos de partir de una interpretación cualquiera y por disyunción de casos concluir la igualdad. Hagámoslo.

Consideremos una interpretación cualquiera v_I. Ésta asignará valores de verdad a los elementos atómicos de α y β. Aplicando las definiciones recursivas de las funciones de verdad calculamos los valores de verdad $v(\alpha)$ y $v(\beta)$. Supongamos estas situaciones:

de $\to$, $\neg$ y $\vee$,

- Si $v(\beta) = V$, entonces
  - Por la definición recursiva de $\to$, tendremos que $v(\alpha \to \beta) = V$.
  - Por la definición de $\vee$, como $v(\beta) = V$, tendremos que $v(\neg\alpha \vee \beta) = V$

  Concluyendo entonces que **en todas las interpretaciones donde se cumpla que** $v(\beta) = V$, se concluye que $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) = V$

  Se puede **confirmar** mirando la tabla de (1). Para esto sirve esa tabla: para confirmar.

- Si $v(\beta) = F$, entonces distinguimos dos casos:
  - Si $v(\alpha) = V$, entonces $v(\neg\alpha) = F$ y por tanto
    - Por definición de $\to$, $v(\alpha \to \beta) = F$.
    - Por definición de $\vee$, $v(\neg\alpha \vee \beta) = F$

    En toda interpretación v_I se cumpla que $v(\alpha) = V$ y $v(\beta) = F$, se concluye que $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) = F$
  - Si $v(\alpha) = F$, entonces $v(\neg\alpha) = V$ y por tanto
    - Por definición de $\to$, $v(\alpha \to \beta) = V$.
    - Por definición de $\vee$, $v(\neg\alpha \vee \beta) = V$

En toda interpretación v_I donde se cumpla que $v(\alpha) = F$ y $v(\beta) = F$, se concluye que $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) = F$

Concluyendo entonces que **en toda interpretación** donde se cumpla que $v(\beta) = F$ se consigue la igualdad $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) = V$

Por tanto, **en toda interpretación**, ya sea aquellas donde se cumpla que $v(\beta) = F$ o ya sea en las que se cumpla $v(\beta) = F$,, se cumple que $v(\alpha \to \beta) = v(\neg\alpha \vee \beta) = V$.

¿Para qué nos ha servido la tabla (1)? Pues para distinguir los distintos casos de asignación (interpretaciones) y facilitar la demostración de la igualdad de la veracidad de ambas oraciones.

Se insiste, escribir una tabla como (1), sin más, NO demuestra absolutamente nada.

Nota: Desde el punto de vista del sistema deductivo de deducción natural se ha usado la eliminación de la disyunción (disyunción de casos) para comprobar que tanto si se diera una hipótesis como su negada se llega a la misma conlusión. Con lo que la conclusión (de ambas "cajas") es la misma.

3 Técnicas de Demostración

En un razonamiento (deductivo) válido el objetivo es demostrar que $\alpha \to \beta$ es una tautología o que $\alpha \wedge \neg\beta$ es una contradicción, donde α es la conjunción de la premisas y β es la conclusión lógica. Las estrategias más utilizadas son las siguientes:

- $\boxed{\text{Demostración vacía}}$

  Comprobar si en toda interpretación v_I se cumple que $v(\alpha) = F$ (sin usar β).

  Ejemplo

  2 es un divisor de un número impar $\models$ 2+2=10

  - p:"2 es un divisor de un número impar"
  - q:"2+2=10"

  Como $v(p) = F$, entonces $v(p \to q) = V$, por tanto $p \models q$

- $\boxed{\text{Demostración trivial}}$

  Comprobar si en toda interpretación v_I se cumple que $v(\beta) = V$ (sin usar α).

  Ejemplo

  $$x^2 + y^2 = 4 \models 1^2 = 1$$

  - p:"$x^2 + y^2 = 4$"
  - q:"$1^2 = 1$"

  Como $v(q) = V$, entonces $v(p \to q) = V$, por tanto $p \models q$

- $\boxed{\text{Demostración directa}}$

  - Comprobar que β es una consecuencia lógica de α, utilizando definiciones o teoremas probados con anterioridad (p.e. MP, MT, ...).

  Ejemplo

  $$ab = cb \text{ y } b \neq 0 \models a = c$$

  - p:"$ab = cb$ y $b \neq 0$"
  - q:"$a = c$"

  $$\left.\begin{array}{cl} ab = cb & \text{Hipótesis 1} \\ b \neq 0 & \text{Hipótesis 2} \\ \text{existe } b^{-1} & \text{por Hipótesis 2} \\ (ab)b^{-1} = (cb)b^{-1} & \text{Resultado conocido} \\ a(bb^{-1}) = c(bb^{-1}) & \text{Asociatividad} \\ a \cdot 1 = c \cdot 1 & \text{Definición de inverso} \\ a = c & \text{Definición de elemento neutro} \end{array}\right\} \Rightarrow v(p \to q) = V$$

- $\boxed{\text{Demostración por contrarreciproco (o por contraposición)}}$

  Se trata de utilizar esta equivalencia $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$

Ejemplo

$$n \text{ es impar} \models n+1 \text{ es par}$$

- p:"n es impar"
- q:"$n+1$ es par"

Queremos demostrar que es cierto $\neg q \to \neg p$.
Sabemos por definición que todo número es par o impar (uno es el negado del otro).

$$\left.\begin{array}{cl} \neg q = \neg\text{“}n+1 \text{ es par''} & \text{Hipótesis} \\ n+1 \text{ es impar} & \text{Definición} \\ \exists k \text{ t.q. } n+1 = 2k+1 & \text{Definición} \\ \exists k \text{ t.q. } n+1-1 = 2k+1-1 & \text{Resultado conocido} \\ \exists k \text{ t.q. } n = 2k & \text{Cálculo} \\ \neg p = \text{“}n \text{ es par''} & \text{Conclusión} \end{array}\right\} \Rightarrow v(\neg q \to \neg p) = V$$

- Por Refutación entendemos a cualquiera de estas dos estrategias:
  - $\boxed{\text{Demostración por contradicción}}$ Se basa en la equivalencia $\alpha \to \beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta \to \gamma \wedge \neg\gamma$

    Ejemplo

    $$x+y \geq 2 \models x \geq 1 \text{ o } y \geq 1$$

    - p:"$x+y \geq 2$"
    - q:"$x \geq 1$ o $y \geq 1$"

    Añadimos el negado como hipótesis y buscamos una contradicción.

    $$\left.\begin{array}{cl} p : x+y \geq 2 & \text{Hipótesis} \\ \neg q : \neg(x \geq 1 \text{ o } y \geq 1) & \text{Negado de la tesis} \\ \neg(x \geq 1) \text{ y } \neg(y \geq 1) & \text{D'Morgan} \\ x < 1 \text{ y } y < 1 & \text{Definición} \\ x+y < 1+1 = 2 & \text{Cálculo} \\ (x+y \geq 2) \text{ y } (x+y < 2) & \gamma \wedge \neg\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow v(p \wedge \neg q \to \gamma \wedge \neg\gamma) = V$$

  - $\boxed{\text{Refutación: Búsqueda de contraejemplos}}$

    Hay que encontrar un elemento a t.q. $v(\alpha[a] \to \beta[a]) = F$.

    Ejemplo
    Considerando cualquier conjunto satisfacible de hipótesis, no es puede llegar a estas conclusiones:

    - $\forall x\ x^2 \leq 0$. Es totalmente falsa, basta consderar $x = 1$
    - $\forall x\ \operatorname{sen}^2(x) + cos^2(x) = 2$. Es falsas para $x = 0$, pues $\operatorname{sen}^2(0) + cos^2(0) = 1$.
    - ...

- $\boxed{\text{Demostración indirecta}}$ Cualquier variante de las anteriores.
  - Si se sabe que $\alpha \models \gamma$, dirigir los esfuerzos para comprobar $\gamma \models \beta$ (usando cualquiera técnica).

4 Deducción Natural

No existe un procedimiento sistemático para obtener la demostración de un teorema en DN. La destreza de la derivación en este sistema la da la ejercitación y la práctica. No obstante se muestran algunas indicaciones y errores comunes que pueden ayudarte a mejorar.

Lo primero que debes tener en el cabeza son estas dos estrategias generales:

- **Estrategia de Deducción Directa**. Intenta alcanzar conclusiones utilizando el menor número de deducciones y de hipótesis posible, aplicando primero las reglas de inferencia que no requieran de supuestos.

  La deducción directa puede hacerse "hacia adelante". Trata de aplicar cualquier regla que obtenga una nueva expresión a partir de las premisas o expresiones obtenidas a su vez por deducción "hacia adelante".

  Pero deducción directa también se puede hacer "hacia atrás", tratando de aplicar cualquier regla que determine las expresiones necesarias que permitan obtener una expresión objetivo.

- **Estrategia de Reducción al Absurdo**. Para demostrar una expresión α se considera como hipótesis $\neg\alpha$ y se busca llegar a una contradicción. O para demostrar una expresión $\neg\alpha$ se considera como hipótesis α y se busca llegar a una contradicción.

Es decir, con el nombre de estrategia por reducción al absurdo se recoge a las reglas $E_\neg$ y $I_\neg$, y con el nombre de deducción directa agrupamos a todas las demás.

Lo siguiente que tienes que hacer es fijarte en el patrón de la conclusión y distinguir si tiene o no cuantificadores.

- Si la conclusión es un elemento atómico, proposición o predicado, aplica, si puedes, deducción directa que elimine conectivos o cuantificadores y si no es posible, aplica reducción al absurdo.

  En esta situación es absurdo aplicar operadores de inclusión de conectivas o cuantificación, el resultado siempre serán una oración más compleja de lo que realmente buscas.

- Si la conclusión tiene una negación, aplica reducción al absurdo ($I_\neg$).
- Si la conclusión es una conjunción, aplica $I_\wedge$. Centra tus esfuerzos en derivar sus subfórmulas.
- Cuando busques una disyunción el problema normalmente se reduce a encontrar una de sus partes pues para $I_\vee$ no necesitas las dos fórmulas. No obstante, a veces, es más fácil de demostrar por reducción al absurdo. Sobre todo si la oración objetivo ya aparece como subfórmula en alguna de las premisas.
- La búsqueda de condicional suele ser de las tareas más fáciles y se basa en aplicar el teorema de la deducción.
- Si el patrón es un bicondicional intenta aplicar dos veces el teorema de la deducción.

- Si la expresión buscada tiene un cuantificador recuerda siempre que el ámbito del cuantificador es sobre toda la fórmula. Las cuatro reglas para cuantificadores operan solo cuando el operador (cuantificador) está en la posición más a la izquierda.

  Antes de aplicar cualquier regla de inclusión de cuantificación para obtener una expresión $Qx\alpha[x]$ busca una instancia de la fórmula cuantificada $\alpha[c]$.

  Ten mucho cuidado con el c elegido para aplicar $I_\forall$. Ese c deberá ser arbitrario, sin restricciones.

4.1 Supuestos

Existe un error generalizado de que el uso de supuesto da validez a las demostraciones. Es normal encontrar razonamientos del tipo "como necesito α, supongo α y como se está dando (lo supongo) ya está demostrado". De ser cierto podríamos hacer razonamientos del tipo: como necesito confirmar que "algún elefante vuela", supongamos que hay uno que vuela, entonces como supongo que es cierto para uno, es cierto para alguno. Estarás conmigo que esto demuestra poca dedicación a este tema de los razonamientos válidos, pero se encuentra en los exámenes más veces de lo deseado.

Los supuestos, asunciones o hipótesis son afirmaciones temporalmente ciertas, no perduran: **todo supuesto debe cancelarse**. Cuando uses una hipótesis debes obtener un resultado que deba seguir siendo cierto cuando la hipótesis haya sido cancelada. Así, si considera que "necesito α" para poder hacer una deducción, nunca supongas α pues lo cancelarás. Si debes hacer una suposición, deberá ser alguna que te "de como resultado α"; así, aún cuando canceles el supuesto que deduce α, α seguirá "existiendo".

Pero demos un paso más, si introduces un supuesto ¿cómo se cancela? ¿cuál es el resultado que obtienes? Es fácil, miremos cuántas reglas trabajan con supuestos.

- Si aplicas $E_\vee$, los supuestos son las subfórmulas de la disyunción, y se cancela llegando a la misma expresión en las dos cajas, sí en las dos. La expresión α que necesitas es esa expresión común.
- Si usas $I_\rightarrow$, el supuesto es la condición suficiente y lo cancela cualquier expresión dentro de la caja. La expresión α que necesitas es una implicación.
- Si aplicas $I_\neg$ o $E_\neg$, el supuesto es el negado y lo cancela una contradicción. La expresión α que necesitas es el negado del supuesto.
- Si utilizas $E_\exists$, el supuesto es cualquier instancia de un existencial y lo cancela cualquier expresión que no contenga a la constante de la instancia. La expresión α que necesitas es algo que se deriva de la matriz del existencial.

De la misma forma que la hipótesis no puede "salir de su caja" porque queda cancelada, tienes que recordar que una vez cerrado el supuesto **no se puede usar fórmulas dependientes de él**: no puedes sacar de la caja ninguna expresión que esté dentro de ella, a excepción de la última derivada de las dos cajas que se usan en $E_\vee$.

No te inventes reglas. Fíjate bien que cada regla se usa para construir un patrón. **Primero aplica la regla del patrón y después analiza la situación**. P.e. si tu objetivo es una expresión de la forma

$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ tu objetivo no es buscar una implicación y después la negación. Tu objetivo es llegar a la negación, que es el patrón. Si optas por $I_\neg$ y analizas la situación, ahora tendrás $\alpha \rightarrow \beta$ como hipótesis. Ojo, como hipótesis y no como algo que debe ser deducido. No es extraño ver exámenes en lo que se busca es deducir la implicación aplicando el error anterior de que como supongo $\alpha \rightarrow \beta$ y concluyo $\alpha \rightarrow \beta$ para cerrar la caja; lo que es una regla totalmente inventada sin sentido. Lo correcto es lo siguiente. En aplicación de $I_\neg$ necesitas llegar a una expresión que permita cancelar esta hipótesis (caja): así que tu objetivo será buscar una expresión de la forma $\gamma \wedge \neg\gamma$ para concluir la negación del condicional (que es lo que dice la regla $I_\neg$). Así, tu nuevo patrón es ahora $\gamma \wedge \neg\gamma$ cuyo patrón es una conjunción, y volvemos a repetir el proceso de analizando posibles γ's.

Cuando tengas una disyunción y quieras aplicar $E_\vee$ tendrás que construir siempre dos cajas por separado, una por cada subfórmula de $\vee$ y concluir **la misma expresión** en las dos cajas. No lo confundas con $E_\wedge$, que concluye dos expresiones distintas.

Al aplicar $E_\vee$, en el mejor de los casos, lo que se busca es demostrar una de las subfórmulas. Responde a demostrar $\alpha \vee \beta, \ldots \vdash \alpha$. Es usual encontrar en los exámenes deducciones donde se consideran dos supuestos uno para α y otro para β. Como en uno de ellos ya se tiene α, ya está demostrado. De nuevo, aparece la idea incorrecta de "como necesito α, supongo α". Recuerda, debes cancelar los supuestos y esto solo se hace llegando a la misma expresión en las dos cajas.

Para demostrar $\alpha \vee \beta, \ldots \vdash \alpha$ aplica $E_\vee$ usando dos supuestos uno para α y otro para β. Entonces en la caja de α aplicas IT y tendrás que céntrate en la otra caja para concluir α desde β.

En el peor de los casos, para aplicar $E_\vee$ deberás obtener una fórmula que sea independiente de las hipótesis de las cajas. El problema de esta fórmula "independiente" es que no siempre está clara cuál es. Intenta determinarla mirando en las últimas líneas de la demostración, buscando posibles conclusiones.

5 Software

En las siguientes URL se indica software de lógica que puede ayudar para comprobar las soluciones de los ejercicios. Debe tener en cuenta que lo que se muestra con un software no tiene que coincidir 100 % con lo que se enseña en una pizarra: hay varias formas de expresar los pasos y soluciones de un algoritmo. Así, por ejemplo:

- Es posible que la resolución no se muestre ni como un árbol de resolución ni en notación Fitting.
- Es posible que los tableaux tengan alguna regla diferente a las vistas en clase y que, además, cada nodo se exprese también de forma diferente.
- Es seguro que las reglas de Deducción Natural explicadas en clase no coincidan con las implementadas en el software.
- Incluso dos programas con el mismo propósito también diferirán entre ellos.

Con todo, tiene conocimientos para usar:

- Calcular Tablas de Verdad
  - `http://logictools.org/`
  - `https://www.erpelstolz.at/gateway/formular-uk.html`
- Formas Normales Conjuntivas
  - `http://logictools.org/`
  - `https://www.erpelstolz.at/gateway/formular-uk.html`
- Algoritmo Davis–Putnam–Logemann–Loveland (DPLL)
  - `http://www.inf.ufpr.br/dpasqualin/d3-dpll/`
- Resolución
  - `http://logictools.org`
- Tableaux Semánticos, Árboles de Verdad.
  - `http://www.formallogic.com/`
  - `https://www.umsu.de/trees/`
- Deducción Natural
  - `http://teachinglogic.liglab.fr/DN`
  - `https://www.erpelstolz.at/gateway/formular-uk.html`
  - `https://proofs.openlogicproject.org/` (No resuelve, es para aprender)