

# Fundamentos Lógicos de la Informática

## Lógica Categórica

Grupo docente FLI

Dpto. Ingeniería de al Información y las Comunicaciones  
Facultad de Informática  
Universidad de Murcia

- 1 Introducción
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas

# Desarrollo

- 1 **Introducción**
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas

# Lógica Categórica

- Las oraciones lógicas reciben el nombre de Proposiciones Categóricas.
- Una proposición categórica relaciona los miembros de dos categorías por inclusión.

“Todos los perros son tontos”

- Símbolos similares al álgebra

Álgebra	Lógica Categórica
$f(x) \circ (-g(x))$	$P(x) \rightarrow (\neg Q(x))$

Además se da información sobre cuántos  $x$  están relacionados.

$\forall, \exists$

- Los esquemas lógicos son los Silogismos Categóricos.
  - Dos proposiciones categóricas concluyen una tercera proposición categórica.
  - Son deductivos formalmente válidos 19 de los 64 modos posibles.

# Desarrollo

- 1 Introducción
- 2 Categorías**
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas

# Categorías

Los conjuntos de toda la vida

## Definición (Categoría o Conjunto)

*Cualquier colección no ordenada de individuos forma un **conjunto**.*

## Definición (Elemento)

*Un individuo que se encuentra en esa colección **C** se llama **elemento del conjunto C**, en cuyo caso se dice que **el elemento pertenece al conjunto C**.*

## Notación

- $\text{NombreDelConjunto} = \{\text{elementos que componen el conjunto}\}$
- $x \in \text{NombreDelConjunto}, x \notin \text{NombreDelConjunto}$

# Definición de conjuntos

## Notación

- **Extensional.** Enumerando (nombrar) **cada uno** de sus elementos una sola vez.
  - $\text{NombreDelConjunto} = \{elem_1, elem_2, \dots, elem_n, \dots\}$
- **Intensional.** A partir de una o varias **propiedades** que permitan caracterizar los elementos que lo componen.
  - $\text{NombreDelConjunto} = \{x \mid x \text{ cumple algunas propiedades.}\}$
  - $\text{NombreDelConjunto} = \{x \mid P(x)\}$ 
    - Recibe el nombre de **notación de constructor de conjuntos** (set builder notation).
    - Si  $P$  es un propiedad,  $P(x)$  indica que un individuo  $x$  cumple la propiedad  $P$ .
    - La propiedad  $P$  recibe el nombre de **propiedad característica**, **contenido** o **intensión** del conjunto que define.
- **Por recursión.** Utilizando una **definición recursiva**.
  - $\text{NombreDelConjunto} = \{x \mid R(x)\}$  donde  $R(x)$  indica si  $x$  cumple o no una regla recursiva  $R$ . Es un caso particular de definición por intensión.

# Principio de Extensionalidad

## Principio de Extensionalidad

- Dos conjuntos,  $A$  y  $B$ , son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos (y se nota por  $A = B$ ).
- Alternativamente:  $(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (A = B)$

Ojo con el significado de los símbolos. No confundir:

	Sintaxis	Sobre las expresiones
L0	$p \rightarrow \leftrightarrow \dots$	$\equiv \neq$
Conjuntos	$x \in A \notin$	$= \neq$
En general		$\Rightarrow \Leftarrow \Leftrightarrow \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$



# Conjuntos Especiales

- **Inclusión** de conjuntos: subconjunto, superconjunto.

$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} (x \in A \Rightarrow x \in B)$ . La negación es  $A \not\subseteq B$ .

- **Inclusión estricta** de conjuntos.

$(A \subset B) \stackrel{\text{def}}{\iff} (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$ . La negación es  $A \not\subset B$ .

- **Conjunto Total** (conjunto universal o universo de discurso).

El mayor conjunto posible que pueda considerar para un estudio.  $\mathcal{U}$

- **Conjunto vacío**. El conjunto sin elementos.  $\emptyset, \{\}$ .

¡  $\{\emptyset\}$  NO es el conjunto vacío !

- **Partes de un conjunto**.

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto.

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

# Operaciones de conjuntos

## Diagramas de Venn

**Unión.**  $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$

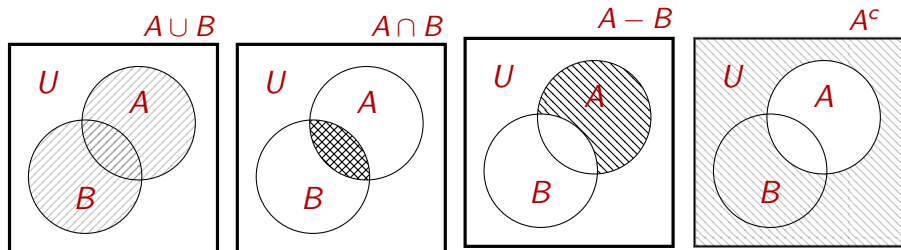
**Intersección.**  $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$

Si  $A \cap B = \emptyset$  se dice que  $A$  y  $B$  son **conjuntos disjuntos**.

**Diferencia.**  $A - B = A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$

**Complemento.**  $\bar{A} = A^c = U - A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U | x \notin A\}$

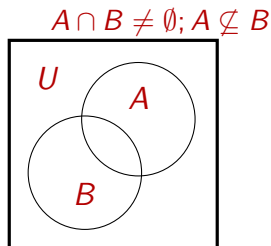
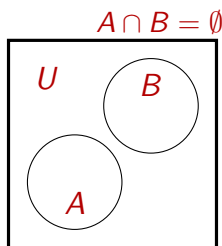
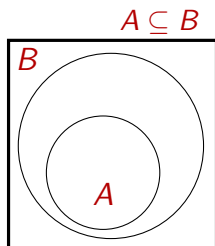
Representación gráfica de 2 conjuntos por Diagramas de Venn



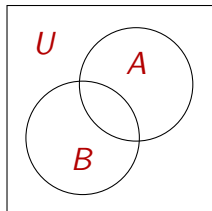
# Diagramas de Euler vs Diagramas de Venn

Para 2 conjuntos

- Diagramas de Euler



- Diagrama de Venn (sombreado adecuadamente)



# Desarrollo

- 1 Introducción
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis**
- 4 Formalización
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas

# Operaciones de conjuntos vs Conectivos lógicos

- La lógica categórica establece relaciones entre categorías.
- Su patrón base es: *objeto es* (está/pertenece a) *Categoría*.  
 $P(x)$  : "x es P",  $R(x)$  : "x es R",  $C(x)$  : "x es C", ...
- Lógica proposicional vs Lógica Categórica

Expresión natural	Se formaliza		
	En conjuntos	En lógica	
		Proposicional	Sujeto/Categoría
"x es P"	$x \in A$	$p$	$P(x)$
"x no es P"	$x \notin A, x \in A^c$	$\neg p$	$\neg P(x)$
"x es P o x es Q"	$x \in A \cup B$	$p \vee q$	$P(x) \vee Q(x)$
"x es P y x es Q"	$x \in A \cap B$	$p \wedge q$	$P(x) \wedge Q(x)$
"Si x es P, x es Q"	$x \in A \text{ y } A \subseteq B$	$p \rightarrow q$	$P(x) \rightarrow Q(x)$
"x es P sii x es Q"	$x \in A \text{ y } A = B$	$p \leftrightarrow q$	$P(x) \leftrightarrow Q(x)$

donde:  $p$  : "x es P",  $q$  : "x es Q",

$P(x)$  : "x es P",  $Q(x)$  : "x es Q",  $A = \{x \mid P(x)\}$ ,  $B = \{x \mid Q(x)\}$

# Sintaxis de la Lógica Categórica

## Alfabeto o vocabulario

**Constantes.** Son los símbolos reservados *verdadero* (V) y *falso* (F).

$$\mathbb{B} = \{V, F\}.$$

**Variables.** Secuencia de letras (normalmente una, suele ser minúscula).  
Representan objetos del universo:  $x, y, \dots$

**Categorías.** Secuencia de letras (normalmente una, suele ser mayúscula).

**Conectivos** u operadores booleanos.

$\wedge$  Conjunción (y)

$\vee$  Disyunción (o)

$\neg$  Negación (no)

$\rightarrow$  Implicación (entonces)

**Cuantificadores.**  $\forall, \exists$ . Siempre irán con una variable:

$\forall x$  Para cada/todos los objetos  $x \dots$

$\neg \forall x$  No para cada/todos los objetos  $x \dots$

$\exists x$  Existe/Hay [algún / al menos] objeto  $x \dots$

$\neg \exists x$  Ningún/No existe/No hay objeto  $x \dots$

**Otros símbolos.** paréntesis ' $( )$ ', corchetes ' $[]$ ', etc.

# Sintaxis de la Lógica Categórica

## Gramática o Sintaxis

### Definición (Términos)

*Cualquier símbolo variable es un término.*

### Definición (Categoría)

*Una categoría es una expresión que consta de un símbolo categoría seguido de un término entre paréntesis.*

*$P(x)$ ,  $Alto(y)$ ,  $bajo(x)$ ,  $T(z)$ ,...*

### Definición (Elemento Atómico)

*Una expresión se dice que es un átomo si es un símbolo constante o es una categoría.*

# Formas Normales Categóricas

## Definición (Construcción de Proposiciones Categóricas en forma normal)

Es el menor conjunto de fórmulas, denotado por  $\mathcal{F}_C$ , que responden a los siguientes patrones:

- *Proposición universal afirmativa. Todo S es P.*  $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$
  - *Proposición universal negativa. Ningún S es P.*  $\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$
  - *Proposición particular afirmativa. Algún S es P.*  $\exists x(S(x) \wedge P(x))$
  - *Proposición particular negativa. Algún S no es P.*  $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$
- 
- Siempre con el verbo **ser/estar**.
  - Una categoría puede ser el resultado de combinar varias categorías. Si  $A(x)$  y  $B(x)$  son categorías con la misma variable, se pueden construir las categorías  $\neg A(x)$ ,  $(A(x) \wedge B(x))$ ,  $(A(x) \vee B(x))$ .



# Desarrollo

- 1 Introducción
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización**
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas

## De lo natural a lo formal

- Considerara todas las orientaciones indicadas en la lógica proposicional.
- Expresar la oración con los verbos ser/estar (si es posible) y usar “la construcción de proposiciones categóricas en forma normal” más adecuada, teniendo en cuenta que:

$\forall xP(x)$  puede representar

- Todo objeto cumple la propiedad  $P$ .
- Cualquier individuo verifica  $P$ .
- Cada ente cumple  $P$ .

$\exists xP(x)$  puede representar

- Hay un objeto que cumple la propiedad  $P$ .
- Al menos un individuo verifica  $P$ .
- Existe un objeto cumpliendo  $P$ .

# Desarrollo

- 1 Introducción
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización
- 5 Interpretación**
- 6 Consideraciones Teóricas

# Evaluación I

## Aproximación Intuitiva (No es una definición formal)

La evaluación de una proposición categórica  $\alpha$  interpretada en un mundo  $\mathcal{M}$  viene dado por el siguiente procedimiento:

- Identificar cada categoría de  $\alpha$ ,  $P_\alpha(x)$ , con un conjunto de  $\mathcal{M}$ ,  $P_{\mathcal{M}}$ .
- Lee  $P_\alpha(d)$  como  $d_{\mathcal{M}} \in P_{\mathcal{M}}$ , y si es cierto establece  $v_I(P_\alpha(d)) = V$ .

Que la fórmula  $P(d)$  sea verdadera en un modelo no significa

- ni que el símbolo  $d$  pertenezca al símbolo  $P$ ,
- ni que el símbolo  $d$  pertenezca al conjunto que representa a  $P$ ,
- ni que el objeto que representa al símbolo  $d$  pertenezca al símbolo  $P$ .

Que la fórmula  $P(d)$  sea verdadera en un modelo sí significa que el objeto que representa al símbolo  $d$  pertenezca al conjunto que representa a  $P$ .

# Evaluación II

## Aproximación Intuitiva (No es una definición formal)

- Si  $\alpha$  es una expresión ...
  - ... con cuantificador universal  $\forall x \beta(x)$ , su evaluación viene dada así:

$$v(\alpha) = v(\forall x \beta(x)) = \begin{cases} V & \text{si } v(\beta(d)) = V \text{ para todo } d_{\mathcal{M}} \in \mathbb{D}_{\mathcal{M}} \\ F & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ... con cuantificador existencial  $\exists x \beta(x)$ , su evaluación viene dada así:

$$v(\alpha) = v(\exists x \beta(x)) = \begin{cases} V & \text{si } v(\beta(d)) = V \text{ para algún } d_{\mathcal{M}} \in \mathbb{D}_{\mathcal{M}} \\ F & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ... de otro tipo, aplicar la tabla de verdad de los conectivos de L0.

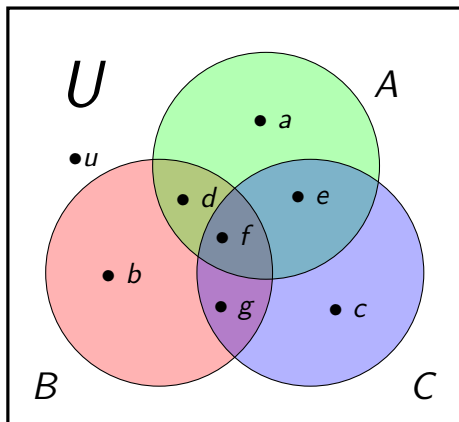
Ojo. Esto no es una definición formal. La definición formal está en L1.

# Desarrollo

- 1 Introducción
- 2 Categorías
- 3 Sintaxis
- 4 Formalización
- 5 Interpretación
- 6 Consideraciones Teóricas**

# Diagramas de Venn vs Diagramas de Euler

Representación de todos los conjuntos con 3 categorías



Región 1:  $u \in U - (A \cup B \cup C) = \neg(A \cup B \cup C)$

Región 2:  $a \in A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ .

Región 3:  $b \in B - (A \cup C) = (B - A) \cap (B - C)$ .

Región 4:  $c \in C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ .

Región 5:  $d \in (A \cap B) - C$ .

Región 6:  $e \in (A \cap C) - B$ .

Región 7:  $f \in (A \cap B \cap C)$ .

Región 8:  $g \in (B \cap C) - A$ .

Los diagramas de Euler no tienen que mostrar todas las intersecciones.

# Familia de Conjuntos

## Definición (Familia de Conjuntos)

*Una familia de conjuntos es un conjunto  $\mathcal{A}$  en el que todos sus elementos son conjuntos.*

**Ejemplo:** Partes de un conjunto (o conjunto potencia).  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

## Definición (Partición de un conjunto)

*Dado un conjunto  $A \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(A)$  es una partición de  $A$  si y sólo si cumple las siguientes condiciones:*

- $\bigcup \mathcal{A} = A$ .
- Si  $B, C \in \mathcal{A}$  y  $B \neq C$ , entonces  $B \cap C = \emptyset$ .



# Propiedades con operaciones de conjuntos I

¡Memoriza!

- Asociativa.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Conmutativa.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Distributiva.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

# Propiedades con operaciones de conjuntos II

¡Memoriza!

- Absorción.

$$A \cup (B \cap A) = A$$

$$A \cap (B \cup A) = A$$

- Idempotencia.

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

---

Además, si se fija un dominio  $U$  pueden comprobarse las siguientes propiedades para subconjuntos dados  $A$  y  $B$  de  $U$ :

# Propiedades con operaciones de conjuntos III

¡Memoriza!

- Leyes de De Morgan.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- Complementación.

$$A \cup (A^c) = U$$

$$A \cap (A^c) = \emptyset$$

- Doble Negación.

$$(A^c)^c = A$$

A esta propiedad también se le conoce como doble complementación.

# Propiedades con operaciones de conjuntos IV

¡Memoriza!

- $\emptyset$  (conjunto vacío) y  $U$  (conjunto total).  $A \subseteq U$ .

$$A \cup U = U$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Estas propiedades también se conocen como las propiedades del cero ( $\emptyset$ ) y uno ( $U$ ).