Ejercicios Hoja 2

1. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_7^3$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_5^4$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{Z}_3^5$

Solución.-

a) En $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{E_{(1,2)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_{(2)+2(1)} \\ E_{(3)+4(1)}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{E_{(3)+4(2)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 = 6.$$

b) En $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{E_{(1,2)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_{(2)+2(1)} \\ E_{(3)-3(1)} \\ E_{(4)-2(1)}}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_{(2)-2(1)} \\ E_{(3)+3(1)}}}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{E_{(3)+(2)}}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0 = 0.$$

c) En $\mathbb{Z}_3^5$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_{(2)+(1)} \\ E_{(3)+(1)} \\ E_{(4)+2(1)}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{E_{-(2)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{E(5)+(2)}{\overset{E(4)+2(2)}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{E_2(3)}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{E(5)+(3)}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot 2 = -8 = 1.$$

2. Hallar una base $\mathcal{B}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ tal que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Solución.- Tenemos

$$B\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 5/9 \\ -4/9 & 5/9 & 7/9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 8/9 & 13/9 \end{pmatrix}.$$

3. Dadas las aplicaciones

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$ definida por $f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$.

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por $f_4(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_1+2a_2x+3a_3x^2$.

Estudiar si son aplicaciones lineales y, en su caso determinar su matriz asociada $\mathcal{M}(f)$.

Solución:

a) $$f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

f es lineal pues

$$f\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x'_1 \\ \alpha x_2 + \beta x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta x'_1) - (\alpha x_2 + \beta x'_2) \\ 2(\alpha x_1 + \beta x'_1) + (\alpha x_2 + \beta x'_2) \\ (\alpha x_1 + \beta x'_1) + 2(\alpha x_2 + \beta x'_2) \\ 3(\alpha x_1 + \beta x'_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 - \alpha x_2) + (\beta x'_1 - \beta x'_2) \\ (2\alpha x_1 + \alpha x_2) + (2\beta x'_1 + \beta x'_2) \\ (\alpha x_1 + 2\alpha x_2) + (\beta x'_1 + 2\beta x'_2) \\ 3\alpha x_1 + 3\beta x'_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \alpha x_2 \\ 2\alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 + 2\alpha x_2 \\ 3\alpha x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x'_1 - \beta x'_2 \\ 2\beta x'_1 + \beta x'_2 \\ \beta x'_1 + 2\beta x'_2 \\ 3\beta x'_1 \end{pmatrix} = \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta f\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Comprobar que f_2 es lineal es análogo a lo hecho en a).

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) f_3 no es lineal pues $f_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) f_4 es lineal (idem que a) y b))

La base canónica de $P_3(\mathbb{R})$ es $\{1, x, x^2, x^3\}$ luego

$$M(f_4) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$f(1) = 0$ „ $f(x) = 1$ „ $f(x^2) = 2x$ „ $f(x^3) = 3x^2$

En coordenadas

$$M(f_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Dado el sistema de vectores, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y caso de serlo calcular las matrices de paso $\mathcal{P}_{\mathcal{B}C_3}$ y $\mathcal{P}_{C_3\mathcal{B}}$

(**Nota.-** La matriz C_3 denota la base canónica de $\mathbb{Z}_5^3$.)

Solución. Para que B sea base, el nº de pivotes de la reducida por filas de B debe ser 3. Comprobémoslo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E(3)+(1)}{\overset{E(2)-(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{E(2,3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nº pivotes $= 3$, B es base

$$\mathcal{P}_{BC_3} = I_3 \cdot B = B.$$

(I_3 es la inversa por la izqda de C_3)

$$\mathcal{P}_{C_3B} = B^{-1} C_3 = B^{-1}$$

(B^{-1} es la inversa por la izqda. de B)

5. Dados los siguientes conjuntos de vectores, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comprobar si son base y, caso de serlo calcula la matriz de paso $\mathcal{P}_{B_1B_2}$.

Solución.- $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nº pivotes $=3$

B_1 base

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ nº pivotes $= 3$
B_2 base

$$P_{B_1 B_2} = B_2^{-1} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gráficamente

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_5^3 \; \mathcal{B}_1 \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \mathbb{Z}_5^3 \; C_3 \arrow[r, "id"] & \mathbb{Z}_5^3 \; B_2 \end{tikzcd}$$

$$\underset{P_{B_1 B_2}}{\underset{\shortparallel}{M_{B_1 B_2}(id)}} = \underset{B_2^{-1}}{\underset{\shortparallel}{M_{C_3 B_2}(id)}} \cdot \underset{B_1}{M_{B_1 C_3}(id)}$$

6. Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{Z}_5^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^4 \text{ definida por } f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y las bases:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{Z}_5^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{Z}_5^4$$

Calcular las siguientes matrices:

a) $\mathcal{M}_{B_1 C_4}(f)$.
b) $\mathcal{M}_{C_2 B_2}(f)$.
c) $\mathcal{M}_{B_1 B_2}(f)$.

(**Nota.-** Las matrices C_2 y C_4 denotan las bases canónicas de $\mathbb{Z}_5^2$ y $\mathbb{Z}_5^4$ respectivamente.)

Solución.-

a) $M_{B_1 C_4}(f)$? Nos piden $\underset{B_1}{\mathbb{Z}_5^2} \xrightarrow{f} \underset{C_4}{\mathbb{Z}_5^4}$

Conseguimos dicha aplicación con la siguiente composición.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5^2)_{B_1} \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend right, "f = f\circ id"'] & (\mathbb{Z}_5^2)_{C_2} \arrow[r, "f"] & (\mathbb{Z}_5^4)_{C_4}
\end{tikzcd}$$

$$M_{B_1C_4}(f) = M_{C_2C_4}(f)\cdot M_{B_1C_2}(id)$$

$$= M(f)\cdot P_{B_1C_2} = M(f)\cdot B_1 = \begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\4&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&2\\4&2\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

b) $M_{C_2B_2}(f)$? Nos piden $(\mathbb{Z}_5^2)_{C_2} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_5^4)_{B_2}$

Conseguimos dicha aplicación con la siguiente composición.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5^2)_{C_2} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f = id\circ f"'] & (\mathbb{Z}_5^4)_{C_4} \arrow[r, "id"] & (\mathbb{Z}_5^4)_{B_2}
\end{tikzcd}$$

$$M_{C_2B_2}(f) = M_{C_4B_2}(id)\cdot M_{C_2C_4}(f)$$

$$= P_{C_4B_2}\cdot M(f) = B_2^{-1}\cdot M(f)$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\4&2\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\4&1&1&0\\1&0&4&0\\0&4&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\4&2\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&2\\0&2\\2&0\\4&1\end{pmatrix}$$

c) $M_{B_1B_2}(f)$. Nos piden $(\mathbb{Z}_5^2)_{B_1} \xrightarrow{f} (\mathbb{Z}_5^4)_{B_2}$

Aplicación que conseguimos con la composición

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5^2)_{B_1} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & (\mathbb{Z}_5^2)_{C_2} \arrow[r, "f"] & (\mathbb{Z}_5^4)_{C_4} \arrow[r, "id"] & (\mathbb{Z}_5^4)_{B_2}
\end{tikzcd}$$

$$f = id \circ f \circ id$$

$$M_{B_1B_2}(f) = M_{C_4B_2}(id) \cdot M_{C_2C_4}(f) \cdot M_{B_1C_2}(id)$$

$$= P_{C_4B_2} \cdot M(f) \cdot P_{B_1C_2} = B_2^{-1} \cdot M(f) \cdot B_1 .$$

$$M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Dadas las aplicaciones lineales:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \text{ y } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

definidas por:

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \text{ y } f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

y las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Calcular:

a) $\mathcal{M}_{B_1B_2}(f)$

b) $\mathcal{M}_{B_3B_1}(g)$

c) $\mathcal{M}_{B_2B_3}(f \circ g)$

Solución.– a) $M_{B_1B_2}(f)$.

$$\begin{tikzcd} \underset{B_1}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] & \underset{B_2}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$$M_{B_1B_2}(f) = B_2^{-1} \cdot M(f) \cdot B_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $M_{B_3B_1}(g)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{B_3} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "g = id \circ g \circ id"'] & \mathbb{R}^3_{C_3} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2_{C_2} \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^3_{B_1} \end{tikzcd}$$

$$M_{B_3B_1}(g) = B_1^{-1} \cdot M(g) \cdot B_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $M_{B_2B_3}(f \circ g)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{B_2} \arrow[r, "f \circ g"] & \mathbb{R}^3_{B_3} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{B_2} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R}^3_{C_3} \arrow[r, "f \circ g"] & \mathbb{R}^3_{C_3} \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^3_{B_3} \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2B_3}(f \circ g) = B_3^{-1} \cdot M(f \circ g) \cdot B_2 =$$

$$= B_3^{-1} \cdot M(f) \cdot M(g) \cdot B_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Calcular el núcleo, $\mathrm{Ker}(f)$, y el espacio imagen, $\mathrm{Im}(f)$, de las siguientes aplicaciones lineales:

a) la aplicación dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

b) la aplicación lineal $f : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$$

(**Nota.** $p(x)$ denota en general al polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$)

Solución.- a) El núcleo de la aplicación lineal dada por la matriz A, son las soluciones del sistema homogéneo $A \cdot x = 0$

Reducimos la matriz A

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz del sistema reducido $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$

Si denotamos por f a la aplicación $f(x) = Ax$, entonces $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \middle/ \text{existe } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{verificando } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \middle| \text{existe } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{verificando } x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\}$$

El espacio imagen $\operatorname{Im}(f)$ está formado por todas las combinaciones lineales de las columnas de la matriz A.

En consecuencia $\operatorname{Im}(f) = C(A)$.

Viendo la reducida de A, deducimos que las columnas de A son una base de $C(A) = \operatorname{Im}(f)$, es decir $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}_5^4$.

b) $P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida

$$f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$$

donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Determinemos en 1er lugar la matriz asociada a f: $M(f)$

$p(x) = 1$ $\qquad f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow p(0) \\ \longleftarrow p(1) \\ \longleftarrow p(2) \\ \longleftarrow p(3) \end{array}$

$$p(x)=x \qquad f(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\longleftarrow p(0)\\ \longleftarrow p(1)\\ \longleftarrow p(2)\\ \longleftarrow p(3)\end{array}$$

$$p(x)=x^2 \qquad f(x^2)=\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\end{pmatrix}\begin{array}{l}\longleftarrow p(0)\\ \longleftarrow p(1)\\ \longleftarrow p(2)\\ \longleftarrow p(3)\end{array}$$

Por tanto

$$M(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \underset{\text{filas } M(f)}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}x_1=0\\x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+4x_3=0\\x_1+3x_2+9x_3=0\end{array}\right\} \underset{\text{sistemas equivalentes}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{array}{r}x_1=0\\x_2+x_3=0\\x_3=0\end{array}\right\} (*)$$

Solución del sistema $(*)$: $x_1=x_2=x_3=0$

$\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$

Espacio $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f)=C\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\underset{\text{red por filas}}{=}\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

9. Sean las bases de $\mathbb{Z}_5^3$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_5^3$ cuya matriz asociada en bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ es:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz del cambio de base $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$

b) Dado el espacio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Hallar una base de U cuyos vectores estén expresados en base canónica.

c) Calcular $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución.—

a) $P_{B_2 B_1} = B_1^{-1} \cdot B_2$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{B_1} \middle/ \; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿ base de U expresados en base canónica?

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 2a - b \\ x_2 &= a \\ x_3 &= b \end{aligned}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} \right\rangle$$

Si llamamos y_1 e y_2 a los vectores que nos piden

$$B_1 \xrightarrow{id} C_3 \qquad P_{B_1 C_3}$$

Tendremos

$$y_1 = B_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = B_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$?

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = M(f)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Calculamos $M(f)$.

$$\begin{array}{c}\mathbb{Z}_5^3 \\ C_3\end{array} \xrightarrow{id} \begin{array}{c}\mathbb{Z}_5^3 \\ B_2\end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c}\mathbb{Z}_5^3 \\ B_1\end{array} \xrightarrow{id} \begin{array}{c}\mathbb{Z}_5^3 \\ C_3\end{array}$$

$$f = id \circ f \circ id$$

$$M(f) = B_1 \cdot M_{B_2B_1}(f)\cdot B_2^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Por tanto

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}.$$

10. Dado el espacio $V = C(B)$ siendo B la matriz, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$,

$$B = \begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&2&4\\1&1&0&2\\3&7&4&6\end{pmatrix}$$

a) Estudia si los vectores son generadores, linealmente independientes o base.
b) Si no son base extrae una base de entre ellos.
c) Calcula unas ecuaciones implícitas de V.
d) Ampliar la base del espacio V, encontrada en el apartado b), añadiéndole los vectores que se necesiten para obtener una base del espacio $\mathbb{R}^4$.

Solución:

a) Reducimos por filas la matriz B

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&4&2&4\\1&1&0&2\\3&7&4&6\end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

nº pivotes $= 3 \neq$ nº columnas $\Longleftrightarrow$ las columnas no son L.I.
$\neq$ nº filas $\Longleftrightarrow$ las columnas no son generadoras

b) Una base de V es el formado por las columnas 1, 2 y 4 de B (columnas pivote en la reducida)

$$\text{base de } V: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Para hallar unas ecuaciones implícitas reducimos la ampliada $(B|I)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{por filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_2 - 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{2x_2 - x_3 - x_4 = 0.}$$

otra forma: Se obtendría el mismo resultado si en vez de considerar todas las columnas de B, hubiésemos ampliado las columnas libres con la matriz identidad.

d) Unimos a los vectores que son base de V, una base de todo el espacio (por ejemplo la base canónica) y reducimos dicha matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

El vector a añadir es: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base de $\mathbb{R}^4$ es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

11. Dados los espacios $U = N(B)$ y $V = N(C)$ siendo B y C las matrices, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5^5$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Estudiar si ambos espacios son iguales o si alguno está contenido en el otro.

b) Ecuaciones implícitas del espacio suma $U + V$ y del espacio intersección $U \cap V$.

c) Bases de los espacios $U + V$ y $U \cap V$.

Solución:

a) Veamos si $U \subseteq V$. Para ello hallaremos unos generadores de U.

Tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reducimos por filas la matriz $(H^T | I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{filas}]{\text{red.}} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Entonces

$$U = C\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\Bigg]$$

Sabemos que

$$U = C(A) \subseteq V = N(C) \iff C \cdot A = 0$$

Comprobémoslo

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión : $U \subseteq V$.

Veamos sus dimensiones.

$\dim_{\mathbb{Z}_5}(U) = 2$.

Para hallar $\dim_{\mathbb{Z}_5}(V)$, veamos cuántos parámetros tiene el sistema $C \cdot x = 0$

Reducimos por filas la matriz C

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La resolución del sistema requiere dos parametros: $x_4 = a$ y $x_5 = b$. Por tanto $\dim_{\mathbb{Z}_5}(V) = 2$

Como $U \subseteq V$ y $\dim_{\mathbb{Z}_5}(U) = \dim_{\mathbb{Z}_5}(V) \Rightarrow U = V$.

b) Ec. implícitas de $U \cap V$:

Como $U = V$, entonces $U \cap V = U = N(B)$

Ec. implícitas de $U + V$:

Como $U = V$, entonces $U + V = U = N(B)$

c) Bases de $U+V$ y $U \cap V$.

Ambos espacios es U. Y sabemos que

$$U = C\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

Una base de $\mathcal{U}$ es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

12. Dados los espacios de $P_3(\mathbb{R})$

$$U =< 1 - x + x^2 + x^3, x - x^2, -1 + x^2, 2 + x - 2x^2 + x^3 >$$

y

$$V =< 1 - x - x^2 + 2x^3, 2x - 2x^2, 3 - 3x^2, 3 + 2x - 5x^2 > .$$

Se pide:

a) Base y dimensión de U y V.

b) Ecuaciones implícitas de U y V.

c) Estudia si son iguales o si alguno está contenido en el otro.

d) Encuentra un polinomio que esté en V pero no en U. Comprueba que ese polinomio junto con los de la base de U forman una base de $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$.

e) Ecuaciones paramétricas de $U + V$ y de $U \cap V$.

Solución.- Pasando a coordenadas, tenemos entonces que

$$\mathcal{U} = C\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{A} \end{pmatrix} \quad y \quad V = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{B} \end{pmatrix}$$

a) Base y dimensión de $\mathcal{U}$ y V

$\mathcal{U}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) = 3.$

V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{base}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim_{\mathbb{Q}}(V) = 3.$

b) Ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$ y V

Ecuaciones de $\mathcal{U}$: Reducimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Implícitas de $\mathcal{U}$: $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Ecuaciones de V: Reducimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{filas}}{\overset{\text{red}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Implícitas de V: $x_1 + x_2 + x_3 - 1/2\, x_4 = 0$

o equivalentemente $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

c) Reducimos

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\text{por filas}}{\overset{\text{reduc.}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pivote. El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ no pertenece a $\mathcal{U} = C(A)$, por tanto $V \not\subseteq \mathcal{U}$.

Al ser $\mathcal{U}$ y V de igual dimensión, $\mathcal{U} \not\subseteq V$.
(en caso contrario coincidirían y $V \subseteq \mathcal{U}$ lo que es falso)

d) El vector de V que no está en $\mathcal{U}$ es el antes obtenido

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideramos la base de $\mathcal{U}$ juntos con el vector v:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Reduciendo dicha matriz, vemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{por filas}}{\overset{\text{reduc.}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego es una base de $P_3(\mathbb{R})$

e) Paramétricas de $U+V$:

$$U+V = C\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= C\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right].$$

Paramétricas de $U \cap V$:

Sabemos que las ecs. implícitas de $U \cap V$ son:

$$U \cap V = N\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = N[H]$$

obtengamos las paramétricas, reduciendo $(H^T \mid I)$

$$(H^T|I) = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{filas}}{\overset{\text{reduc}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ecuacions paramétricas de $U \cap V$

$$U \cap V = C\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$