MARTINEZ-CARRASCO RUIZ, JUAN DIEGO
Parcial de Álgebra y Matemática Discreta

Ejercicio 1. *Encuentra todos los valores enteros n tales que se cumplen todas las relaciones siguientes simultáneamente:*

- $n \equiv 0 \pmod{47}$
- $3n \equiv 24 \pmod{31}$
- $n \equiv 0 \pmod{5}$

(todas las cuentas deben hacerse a mano)

Ejercicio 2. *Calcula* $15^{143} \pmod{46}$ *utilizando el algoritmo de exponenciación modular (todas las cuentas deben hacerse a mano).*

Ejercicio 3. *Consideremos los siguientes vectores sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$:*

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Demuestra que B_1 y B_2 son bases del mismo espacio vectorial que llamaremos V. Calcula la matriz de paso $P_{B_1B_2}$ y dado el espacio $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{B_1} : x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$, *calcula una base de U, dando sus vectores en términos de la base B_2 (todas las cuentas deben hacerse a mano)*

Ejercicio 4. *Calcula una base del núcleo y otra de la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$ dada por*

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Amplía la base del núcleo de f a una base de todo $\mathbb{Z}_5^4$ utilizando los vectores que sean necesarios de la base canónica. (las reducciones de matrices se pueden hacer en sage, pero hay que escribir en el papel todo el planteamiento del problema e indicar qué operaciones se hacen, por ejemplo, si se reduce una matriz con sage, se debe poner en el papel la matriz original y la matriz reducida con el comentario de que se ha hecho en sage)

Ejercicio 5. *Consideremos los siguientes espacios de polinomios sobre $\mathbb{Z}_5$ dados por*

$$V = \langle 3x^3 + 2x^2 + x + 1, 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \rangle$$

$$U = \left\{ a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_0 : \begin{array}{r} 2a_4 + 3a_3 + 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ -a_4 - a_3 + 3a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ -a_4 + 2a_3 + 3a_2 - a_1 + 2a_0 = 0 \end{array} \right\}$$

Calcula el espacio $U \cap V$ en implícitas. (las reducciones de matrices se pueden hacer en sage, pero hay que escribir en el papel todo el planteamiento del problema e indicar qué operaciones se hacen, por ejemplo, si se reduce una matriz con sage, se debe poner en el papel la matriz original y la matriz reducida con el comentario de que se ha hecho en sage)

Ejercicio 6. *Calcula el determinante de A sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ con un parámetro libre x, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x+4 & 3 & 0 \\ x+4 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(todas las cuentas deben hacerse a mano)

Todos los ejercicios valen 5 puntos. Los puntos del último ejercicio (el determinante) son puntos de subir nota que sólo se sumarán cuando se apruebe la asignatura.