

# Modelado de un motorDC

Félix Monasterio-Huelin & Álvaro Gutiérrez

29 de enero de 2021

## Índice

Índice	1
Índice de Figuras	2
1. Introduccion	3
2. Modelado analítico de un motor DC	3
2.1. Motor DC	3
2.2. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor	6
2.3. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación del polo no dominante	7
2.4. Estimación del coeficiente de fricción viscosa $B_m$	7
2.5. Ejemplo de modelado analítico de un motor DC	8
3. Modelado experimental de un motor DC	9
3.1. Introducción al modelado experimental de un motor DC	9
3.2. Algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado $(K, p)$ del motor	11
3.2.1. <b>Primera Fase:</b> Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente	13
3.2.2. <b>Segunda Fase:</b> Cálculo del polo medio de varianza mínima	13
3.2.3. <b>Tercera Fase:</b> cálculo de $K$ y de la tensión de entrada equivalente	16
3.2.4. <b>Cuarta Fase:</b> Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica	18
3.3. Ejemplo de modelado experimental de un motor DC	19
3.4. Ejemplo de diseño de un controlador no lineal de posición angular de un motor DC mediante linealización por inversión de la entrada equivalente	23
3.5. Programas Matlab para el modelado de un motor DC	25
3.5.1. ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m	26
A. Etapa de potencia	31
B. Tipos de PWM	33
C. Modelo CVS de fricción de un motor DC	36
D. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad	38
E. Obtención analítica del polo del motor con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas	40
F. Obtención analítica del polo del motor con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas	41
G. Obtención analítica del polo del motor con una señal de entrada cuadrada	43

H. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas	44
I. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas	45
J. Discretización del polo del motor obtenido con una señal de entrada cuadrada	46

## Índice de Figuras

2.1. MotorDC	3
2.2. Eje, Reductora y Carga del MotorDC	3
3.1. Esquema general para el modelado de un motor DC	9
3.2. Modelo no lineal de un motor DC	10
3.3. Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D	10
3.4. Modelo no lineal de motor DC	11
3.5. Número de pulsos en el eje de un motor DC real	11
3.6. Velocidad angular en el eje de un motor DC real	12
3.7. Velocidad angular en el eje de un motor DC real	20
3.8. Varianza y polo medio $pS_j$ en cada intervalo de tiempo	20
3.9. Valores de p y K obtenidos en las tres primeras fases	21
3.10. Respuestas del motor (explicación en el texto)	22
3.11. Polinomio de interpolación impar de grado (a) 17 y (b) 23.	22
3.12. Sistema de control realimentado no lineal con controlador proporcional	23
3.13. Polinomio de interpolación (a) $f^{-1}$ y (b) $f^{-1}$ extendido	25
A.1. Puente en H	31
A.2. Zona $Z^+$	31
A.3. Zona $Z^-$	32
B.1. Ejemplo de señal PWM unipolar ideal	33
B.2. Ejemplo de señal PWM unipolar ideal	34
B.3. Ejemplo de señal PWM bipolar ideal	34
B.4. Secuencia lógica del puente en H con PWM bipolar ideal	35
C.1. Par de fricción dado por C.5 en función de $\dot{\theta}_m$	36

# 1. Introduccion

El objetivo principal de este documento es obtener un modelo de un motor de corriente continua (motor DC) que sea útil para realizar el diseño e implementación de un sistema de control realimentado.

En la Sección 2 se describe el procedimiento para modelar un motor DC mediante las especificaciones del fabricante, en el caso en el que estén disponibles. Se estudian las ecuaciones electromecánicas de un motor DC hasta la obtención de su función de transferencia y su simplificación a un sistema dinámico de primer orden, y orden relativo la unidad. Al finalizar la sección, se mostrará un ejemplo de modelado de un motor DC comercial, a partir de las características que ofrece el fabricante.

En la Sección 3 se describe un procedimiento de modelado experimental de un motor DC, ya sea porque el fabricante no proporciona las especificaciones del motor, o porque se requiera comprobar el modelado analítico con respecto al funcionamiento en el laboratorio.

En el Apéndice A se hace una introducción a una etapa de potencia, basada en la técnica de Modulación de Anchura de Pulso (PWM, de sus siglas en inglés) (ver Apéndice B), necesaria para acondicionar la señal de control obtenida con un controlador digital a la señal de entrada física del motor DC.

## 2. Modelado analítico de un motor DC

### 2.1. Motor DC

En las Figuras 2.1 y 2.2 se representan esquemáticamente un motor DC, la Reductora y la Carga del motor.

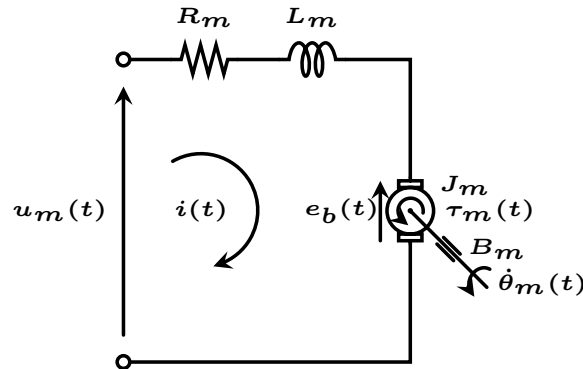


Figura 2.1: MotorDC

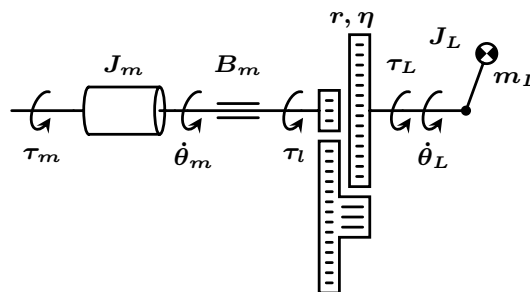


Figura 2.2: Eje, Reductora y Carga del MotorDC

La ecuación eléctrica del motor tiene la forma,

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + e_b(t) \quad (2.1)$$

donde  $u_m(t)$  representa la tensión de entrada al motor,  $i(t)$  la corriente eléctrica del motor,  $e_b(t)$  la fuerza contraelectromotriz,  $R_m$  la resistencia terminal y  $L_m$  la inductancia del rotor.

La ecuación mecánica del motor es

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) + \tau_f(t) \quad (2.2)$$

donde  $\tau_m(t)$  representa el par motor,  $\ddot{\theta}_m(t)$  la aceleración angular del motor,  $J_m$  la inercia del rotor,  $\tau_l(t)$  el par de la carga visto desde el eje del motor y  $\tau_f(t)$  el par de fricción.

En el Apéndice C se presenta un modelo de fricción, que nos permite escribir la ecuación mecánica en la forma

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + \tau_c(t) \quad (2.3)$$

donde  $\dot{\theta}_m(t)$  es la velocidad angular del motor,  $B_m \dot{\theta}_m(t)$  el par de fricción viscosa con  $B_m$  la constante de fricción viscosa (damping viscous constant), y  $\tau_c(t)$  el par que incorpora la carga y la fricción, a excepción del par de fricción viscosa.

En lo que sigue consideraremos un motor DC que satisface las siguientes relaciones de acoplo electromecánico:

$$e_b = k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (2.4a)$$

$$\tau_m = k_m i(t) \quad (2.4b)$$

donde  $k_b$  y  $k_m$  son constantes del motor, constante de la fuerza contraelectromotriz (back-EMF constant) y constante de par (torque constant) respectivamente. Cuando se expresan en el mismo sistema de unidades,  $k_b = k_m$ .

Con estas ecuaciones y relaciones pueden obtenerse diversas funciones de transferencia del motor sin carga. Las más importantes son las que relacionan la velocidad angular  $\dot{\theta}_m(t)$ , la posición angular  $\theta_m(t)$  y la corriente eléctrica  $i(t)$  con la tensión de entrada  $u_m(t)$ . Las escribiremos como  $G_{\dot{\theta}_m}(s)$ ,  $G_{\theta_m}(s)$  y  $G_I(s)$  respectivamente.

Para ello consideraremos las ecuaciones que solo incorporen la fricción viscosa,

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (2.5a)$$

$$k_m i(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) \quad (2.5b)$$

Puesto que  $\dot{\theta}_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$  se cumple, bajo condiciones iniciales nulas, que

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = s G_{\theta_m}(s) \quad (2.6)$$

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones del motor bajo condiciones iniciales nulas, y eliminando la variable de la corriente eléctrica  $I(s)$  se obtiene la función de transferencia del motor:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{k_m}{(J_m s + B_m)(L_m s + R_m) + k_b k_m} \quad (2.7)$$

Se define la **constante de velocidad del motor**  $k_n$  como la ganancia a bajas frecuencias del motor. Utilizando la expresión 2.8,

$$k_n = G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (2.8)$$

No obstante, es habitual definir  $k_n$  despreciando la constante de fricción viscosa, es decir, mediante la relación  $k_n = \frac{1}{k_b}$ .

Para obtener  $G_I(s)$  puede hacerse lo siguiente. Primero aplicar la Transformada de Laplace, bajo condiciones iniciales nulas, a la ecuación mecánica dada por 2.5b,

$$k_m I(s) = (J_m s + B_m) \dot{\theta}_m(s) \quad (2.9)$$

donde  $\dot{\theta}_m(s) = \mathcal{L}_- \{ \dot{\theta}_m(t) \}$

Como  $\dot{\theta}_m(s) = G_{\dot{\theta}_m}(s)U_m(s)$  e  $I(s) = G_I(s)U_m(s)$ , se obtiene que

$$G_I(s) = \frac{J_m s + B_m}{(J_m s + B_m)(L_m s + R_m) + k_b k_m} \quad (2.10)$$

A la corriente en régimen permanente, cuando la entrada al motor carga es la **tensión nominal**  $u_m(t) = U_N$  (nominal voltage), se la denomina **corriente del motor sin carga**  $I_0$  (no-load current). Esta puede obtenerse aplicando el teorema del valor final a  $I(s) = G_I(s)U_m(s)$ ,

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s G_I(s) \frac{U_N}{s} = U_N G_I(0) = \frac{B_m U_N}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (2.11)$$

Hay que tener en cuenta que se han despreciado todos los pares de fricción a excepción de la fricción viscosa, por lo que relación 2.11 es una expresión aproximada de  $I_0$ .

Podemos comprobar que se cumple que

$$k_m I_0 = B_m \dot{\theta}_{mN} \quad (2.12)$$

donde  $\dot{\theta}_{mN}$  es la **velocidad angular nominal del motor sin carga** (no-load speed), que, normalmente, se escribe como  $n_0$ . Este valor puede obtenerse aplicando el teorema del valor final a  $G_{\dot{\theta}_m}(s)$  dado por 2.8, cuando la entrada es la tensión nominal  $u_m(t) = U_N$ ,

$$\dot{\theta}_{mN} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{\dot{\theta}_m}(s) \frac{U_N}{s} = U_N G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m U_N}{B_m R_m + k_b k_m} \quad (2.13)$$

Se denomina **constante de tiempo eléctrica**  $t_e$  (cuya unidad en el sistema internacional es de segundos  $s$ ), a la siguiente relación:

$$t_e = \frac{L_m}{R_m} \quad (2.14)$$

Esta relación se obtiene de eliminar el acoplo mecánico ( $k_b = 0$ ) en la ecuación eléctrica del motor dada por 2.5a. Entonces  $G_I(s)$  dado por 2.10 tiene la forma  $\frac{1}{L_m s + R_m}$  cuyo polo es  $-1/t_e$ .

Se denomina **constante de tiempo mecánica**  $t_m$ , a la constante de tiempo obtenida suponiendo que la constante de tiempo eléctrica es despreciable, es decir, haciendo  $L_m = 0$ . Más adelante, en la subsección 2.2, se demuestra que queda definida por la siguiente expresión:

$$t_m = \frac{R_m J_m}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (2.15)$$

Puede comprobarse que la función de transferencia de velocidad angular dada por 2.8 tiene dos polos reales (cuyas unidades en el sistema internacional son  $s^{-1}$ ) dados por la relación siguiente:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_e} + \frac{1}{t'_m} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{1}{t_e} - \frac{1}{t'_m} \right)^2 - 4 \frac{k_m k_b}{J_m L_m}} \quad (2.16)$$

donde  $t'_m = \frac{J_m}{B_m}$ , que algunos autores también denominan constante de tiempo mecánica, puesto que se obtiene eliminando el acoplo eléctrico en las ecuaciones del motor. En este escrito se utilizará la definición dada por la relación 2.15 ya que es la que suelen utilizar los fabricantes.

Podemos entonces escribir la función de transferencia en la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (2.17)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son los polos dados por la relación 2.16, y

$$K'_m = \frac{k_m}{J_m L_m} \quad (2.18)$$

Normalmente los motores DC cumplen que  $t_e \ll t_m$ , además de que  $p_1 \ll p_2$ . Estos hechos sugieren dos métodos distintos de simplificación de las ecuaciones del motor: eliminar la constante

de tiempo eléctrica  $t_e$  (dando lugar a la definición de constante de tiempo mecánica) (subsección 2.2) o eliminar el polo no dominante  $p_1$  (subsección 2.3). Los resultados serán distintos, aunque similares, pero ambos métodos reducen el orden de las funciones de transferencia del motor a la forma:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K}{s + p} \quad (2.19)$$

donde  $K$  y  $p$  son constantes.

La ecuación diferencial simplificada que representa al motor será por lo tanto de segundo orden en  $\theta(t)$  y de primer orden en  $\dot{\theta}(t)$ ,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = Ku_m(t) \quad (2.20)$$

Las constantes de tiempo eléctrica y mecánica definidas anteriormente son, aproximadamente la inversa de los polos exactos:  $t_e \approx 1/|p_1|$  y  $t_m \approx 1/|p_2|$ , siendo  $p_2$  el polo dominante.

Por otro lado, siempre que se hace alguna simplificación de los modelos matemáticos debe imponerse la restricción de que la ganancia a bajas frecuencias coincida con la del modelo no simplificado, lo que permite calcular el parámetro  $K$  de la expresión 2.19.

Aplicando la transformada de Laplace inversa a la anterior función de transferencia 2.19, teniendo en cuenta condiciones iniciales nulas y una entrada escalón de amplitud  $A$  se obtiene la salida de velocidad angular del motor:

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{AK}{p} (1 - e^{-pt}), \quad t \geq 0 \quad (2.21)$$

Si las condiciones iniciales no son nulas sino  $[\dot{\theta}(0^-)]$ , entonces para una entrada escalón de amplitud  $A$ ,

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{AK}{p} (1 - e^{-pt}) + \dot{\theta}(0^-)e^{-pt}, \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

Si la entrada al motor es nula y las condiciones iniciales no son nulas se obtiene una salida que decae con el tiempo según la ecuación

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}(0^-)e^{-pt}, \quad t \geq 0 \quad (2.23)$$

La relación 2.23 permite obtener experimentalmente el polo dominante del motor. Y con este valor, puede obtenerse  $K$  experimentalmente a partir de la ecuación 2.21 o 2.22 si se conocen las condiciones iniciales.

## 2.2. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor

Las ecuaciones del motor DC pueden simplificarse teniendo en cuenta que la constante eléctrica del motor es mucho menor que la constante mecánica, lo que se traduce en despreciar el factor de la inductancia  $L_m$  en la ecuación eléctrica.

Siguiendo este método de simplificación la ecuación eléctrica dada por 2.5a quedaría en la forma:

$$u_m(t) = R_m i(t) + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (2.24)$$

Despejando la corriente eléctrica  $i(t)$  de la ecuación mecánica 2.5b y substituyendo en la ecuación anterior 2.24, se tiene

$$u_m(t) = \frac{R_m J_m}{k_m} \ddot{\theta}_m(t) + \left( \frac{R_m B_m}{k_m} + k_b \right) \dot{\theta}_m(t) \quad (2.25)$$

La ecuación del motor simplificada dada por 2.25 representa una ecuación diferencial de primer orden para la variable de velocidad angular y de segundo orden para la variable de posición angular.

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene la función de transferencia de velocidad angular en relación a la entrada del motor:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{\dot{\theta}_m(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{R_m J_m s + R_m B_m + k_b k_m} \quad (2.26)$$

Podemos escribir la función de transferencia de velocidad angular en la forma siguiente:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + p_m} \quad (2.27)$$

La ganancia a bajas frecuencias del motor es:

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{k_m}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (2.28)$$

Puede comprobarse que esta constante coincide con la del motor sin simplificar.

Puede verse también que

$$K_m = p_m G_{\dot{\theta}_m}(0) \quad (2.29)$$

La función de transferencia del motor, simplificada por este método, tiene un polo de valor

$$s = -p_m = -\frac{R_m B_m + k_b k_m}{R_m J_m} = -\frac{1}{t_m} \quad (2.30)$$

donde  $t_m$  es, por definición, la constante de tiempo mecánica.

### 2.3. Simplificación de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación del polo no dominante

La función de transferencia de velocidad angular del motor puede expresarse en la forma siguiente:

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K'_m}{(s + |p_1|)(s + |p_2|)} \quad (2.31)$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son los polos dados por la relación 2.16.

La ganancia a bajas frecuencias del motor es,

$$G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{K'_m}{p_1 p_2} \quad (2.32)$$

Normalmente  $p_1 \ll p_2$  por lo que puede simplificarse el modelo matemático despreciando el polo no dominante. Siguiendo este método, la anterior función de transferencia quedará en la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + |p_2|} \quad (2.33)$$

Puesto que se debe cumplir la restricción de ganancia a bajas frecuencias,

$$K_m = |p_2| G_{\dot{\theta}_m}(0) = \frac{K'_m}{|p_1|} \quad (2.34)$$

Teniendo en cuenta la relación 2.18 se cumple que,

$$K_m = \frac{k_m}{J_m L_m |p_1|} \quad (2.35)$$

El polo de la función de transferencia de velocidad angular simplificada por este método será, por diseño, el polo dominante  $-p_2$ .

### 2.4. Estimación del coeficiente de fricción viscosa $B_m$

Los fabricantes no suelen dar la constante de fricción viscosa  $B_m$ , pero sí otras características que permiten estimarla.

Esto puede hacerse de dos formas, según se disponga de una u otra información,

1. Utilizando la ecuación de la constante de tiempo mecánica,  $t_m$ , dada por 2.15,

$$B_m = \frac{J_m}{t_m} - \frac{k_b k_m}{R_m} \quad (2.36)$$

2. Utilizando la ecuación de la corriente del motor sin carga,  $I_0$ , dada por 2.12,

$$B_m = \frac{k_m I_0}{\dot{\theta}_{mN}} \quad (2.37)$$

Ambos métodos son aproximados, ya que en el estudio teórico solo se ha tenido en cuenta, del par de fricción, la fricción viscosa.

## 2.5. Ejemplo de modelado analítico de un motor DC

La Tabla 2.1 recoge las características de un motor comercial<sup>1</sup>

Parámetro	Valor	Unidades
$U_N$	12	V
$R_m$	5,3	$\Omega$
$L_m$	580	$\mu H$
$J_m$	14	$g\,cm^2$
$t_m$	15	$ms$
$k_b$	2,3	$mV/rpm$
$k_m$	22	$mNm/A$
$I_0$	0,05	A
$n_0$	5100	$rpm$

Tabla 2.1: Características del fabricante.

Con esta información puede calcularse la constante eléctrica del motor  $t_e$  utilizando la relación 2.14, obteniendo  $t_e = 109,43\mu s$ . Como vemos  $t_e \ll t_m$ .

Será necesario expresar todos estos parámetros en las mismas unidades. Utilizaremos el SI de unidades como se muestra en la Tabla 2.2.

Parámetro	Valor	Unidades
$R_m$	5,3	$\Omega$
$L_m$	$5,8 \times 10^{-4}$	H
$J_m$	$1,4 \times 10^{-6}$	$kg\,m^2$
$t_m$	$1,5 \times 10^{-2}$	s
$t_e$	$1,1 \times 10^{-4}$	s
$k_b$	$2,2 \times 10^{-2}$	$V\,s/rad$
$k_m$	$2,2 \times 10^{-2}$	$Nm/A$
$I_0$	0,05	A
$n_0$	534,071	$rad/s$

Tabla 2.2: Características de un motor DC en el Sistema Internacional de unidades.

Podemos observar que las constantes del par y de la fuerza contraelectromotriz coinciden,  $k_m = k_b$ , cuando se expresan en el mismo sistema de unidades.

Puede ahora estimarse el coeficiente de fricción viscosa,  $B_m$ , con cualquiera de los métodos descritos en la Sección 2.4. Con el método de la constante de tiempo mecánica se obtiene el valor  $B_m = 2,01 \times 10^{-6}$  Nms, y con el método de la corriente del motor sin carga  $B_m = 2,06 \times 10^{-6}$  Nms.

Puede comprobarse con la expresión 2.16, que los polos del motor, utilizando el valor de  $B_m$  obtenido por el método de la corriente del motor sin carga, son

$$\begin{aligned} p_1 &= -9025 \\ p_2 &= -67,53 \end{aligned}$$

El polo dominante es  $p_2$  que además cumple que  $|p_2| \ll |p_1|$ .

Calculando  $K_m$  con la expresión dada por 2.18, el modelo del motor con los dos polos tiene la forma

$$G_{\Theta_m}(s) = \frac{27093596,06}{(s + 9025)(s + 67,53)} \quad (2.38)$$

Utilizando el método de simplificación de eliminación de la constante eléctrica del motor, se obtiene  $p_m = -66,67$  utilizando la expresión  $1/t_m$  dada en 2.30.

<sup>1</sup>Se trata del motor 2842 – 012C de Minimotor.



Ambos modelos simplificados deberán cumplir la condición de que la ganancia a bajas frecuencias sea la misma. En ambos casos se obtendrá un modelo de la forma

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{K_m}{s + p_m} \quad (2.39)$$

1. Modelo simplificado del motor por el método de eliminación de la constante de tiempo eléctrica.

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{2963,8}{s + 66,67} \quad (2.40)$$

2. Modelo simplificado del motor por el método de eliminación del polo no dominante.

$$G_{\dot{\theta}_m}(s) = \frac{3002,1}{s + 67,53} \quad (2.41)$$

### 3. Modelado experimental de un motor DC

#### 3.1. Introducción al modelado experimental de un motor DC

Los motores DC suelen tener un comportamiento lineal en un rango predefinido de tensiones de entrada. Sin embargo, a bajas velocidades angulares la fricción produce no linealidades, además de que el motor sufre perturbaciones a su entrada y ruido a su salida, normalmente debidas, las primeras al efecto de la carga y la segunda al ruido en la medida de los sensores. También sufre el motor variaciones no lineales cuando se utiliza de forma continua, debido a efectos térmicos produciendo variaciones en la resistencia de la bobina. A tensiones elevadas puede haber una desmagnetización del hierro, lo que supone variaciones en las constantes del motor.

Por otro lado, si se realiza un control digital aparecen errores debidos a la longitud de palabra finita, es decir, errores en los convertidores A/D (sensor de posición angular, por ejemplo) y errores numéricos en el cálculo de las señales de control. Además, la conversión D/A de la señal de control y de la señal continua de entrada al motor nunca puede ser una reconstrucción exacta de una señal muestreada, ya que requeriría un filtro paso bajo ideal, el cual no es realizable físicamente. Y por último, la etapa de potencia, es decir, la electrónica que acondiciona la señal de baja potencia de un microcontrolador a la potencia eléctrica del motor, suele añadir ruido a su salida. Si se utiliza como etapa de potencia un puente en H para la generación de una señal PWM puede ocurrir que la tensión de referencia no sea suficientemente estable, debido al convertor AC/DC. Como consecuencia, la tensión de entrada al motor no sería la deseada, sino que estaría afectada por un ruido difícil de modelar.

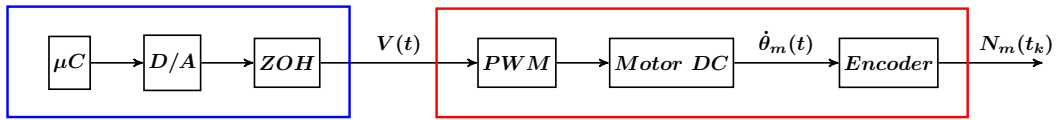


Figura 3.1: Esquema general para el modelado de un motor DC

Todos estos factores hacen difícil un modelado exacto de un motor DC. En lo que sigue llamaremos modelado del motor a lo que realmente sería un modelado del motor que incluya toda la electrónica que será utilizada en un sistema de control realimentado. En la Figura 3.1 se muestra un esquema de bloques con los elementos fundamentales de actuación de un motor DC. En ella,  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor, que permitiría obtener la posición angular en radianes,

$$\theta_m(t_k) = \frac{2\pi N_m(t_k)}{q} \quad (3.1)$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

En esta sección se simplifica enormemente el problema de modelado. En primer lugar, se impondrá que el modelo matemático deseado se corresponda con el de un sistema lineal de primer orden en velocidad angular, de tal manera que el objetivo se reduzca a estimar dos parámetros del motor,  $K$  y  $p$ , donde  $K/p$  sea la ganancia a bajas frecuencias y  $p$  represente el único polo de un sistema de primer orden.

Para ello se harán medidas experimentales de la salida del motor  $N_j$ , para diferentes tensiones de entrada  $V_j$ , y en dos situaciones distintas: bajo condiciones iniciales nulas y bajo condiciones iniciales no nulas. La primera de ellas utilizando una señal de entrada escalón y la segunda con una señal nula a la entrada.

En los Apéndices E y F se realiza un estudio teórico para ambas situaciones y en los Apéndices H y I, se obtiene una discretización aproximada del polo, suponiendo que las señales de entrada al motor se generan mediante un microcontrolador y que la salida de posición angular se mide con un encoder incremental situado en el eje del motor. Estos estudios tienen como finalidad obtener expresiones del polo  $p$  reduciendo al mínimo los errores numéricos debidos a la longitud de palabra finita de un microcontrolador.

En la Sección 3.2 se propone un algoritmo de modelado sencillo, que da lugar al modelo lineal deseado junto con un elemento no lineal de ajuste de la señal de entrada. Este elemento no lineal puede no estar presente en el resultado del modelado si el motor se comporta de manera suficientemente lineal. Pero esto no siempre es así, como se verá en la Sección 3.3 con un ejemplo sobre un motor real.

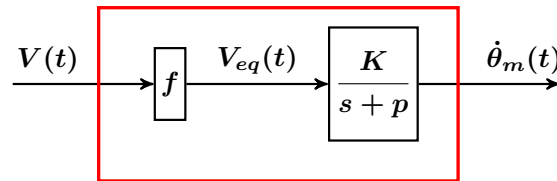


Figura 3.2: Modelo no lineal de un motor DC

En la Figura 3.2 se muestra el esquema de bloques del modelo no lineal, donde  $V(t)$  representa la señal de entrada al motor, y  $V_{eq}(t)$  la señal de entrada a la parte lineal del motor, de tal manera que  $V_{eq}(t) = f(V(t))$  siendo  $f$  la función no lineal resultante del modelado. En el algoritmo que se propone se identifica esta función no lineal  $f$  como un polinomio en  $V(t)$  realizando una interpolación polinómica de las medidas experimentales realizadas.

La idea del algoritmo de modelado es que permita diseñar controladores lineales suponiendo que el motor es lineal, y que se comporta como un sistema de primer orden en velocidad angular. Una vez hecho el diseño del controlador lineal, se implementaría introduciendo la corrección no lineal de la señal de control generada por el controlador.

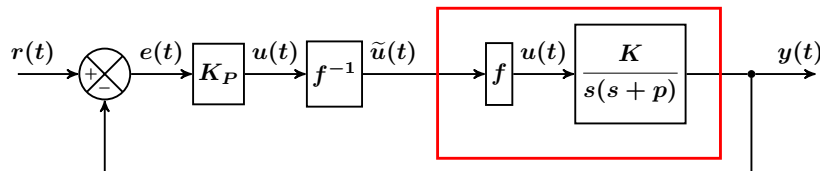


Figura 3.3: Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D

En la Figura 3.3 se muestra un sistema de control realimentado no lineal con un controlador P-D de posición angular del motor ( $y(t) = \theta_m(t)$ ). La parte no lineal del controlador es la inversa de la parte no lineal del motor de tal manera que, si la cancelación es exacta, el motor se comporte como si fuese lineal. O dicho de otra forma, se ha linealizado el motor mediante la función inversa de la no linealidad del motor. En la Sección 3.4 se explica cómo obtener  $f^{-1}$ , que satisfaga que  $\tilde{u}(t) = f^{-1}(u(t))$ , y donde  $u(t) = V_{eq}(t)$  y  $\tilde{u}(t) = V(t)$ , de acuerdo con la notación de la Figura 3.2.

### 3.2. Algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado $(K, p)$ del motor

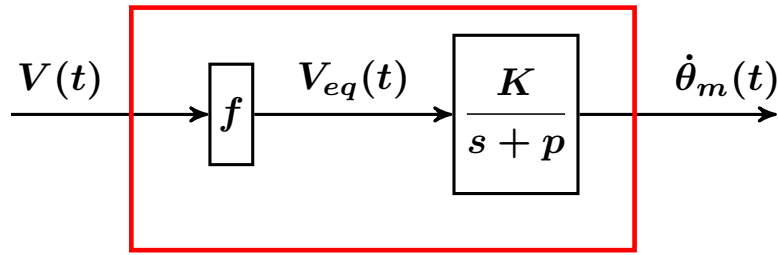


Figura 3.4: Modelo no lineal de motor DC

Se propone, en esta Sección, un algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado de un motor. El objetivo es obtener los parámetros únicos  $(p, K)$  de la parte lineal del modelo, y la función no lineal  $f$ , como se muestra en la Figura 3.4.

En primer lugar, debe realizarse un conjunto de  $P * Q$  experimentos:  $P$  repeticiones de  $Q$  experimentos con valores de entrada un escalón de diferente amplitud.

Las  $P$  repeticiones pueden realizarse como un único experimento con una señal de entrada cuadrada periódica, con un periodo cuya duración sea suficientemente larga como para que se haya alcanzado la velocidad angular de régimen permanente.

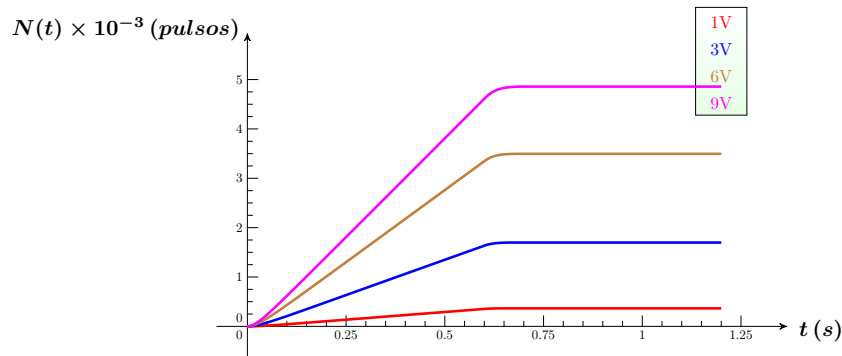


Figura 3.5: Número de pulsos en el eje de un motor DC real

Lo primero que puede hacerse es obtener una única respuesta al escalón de amplitud  $V_j$  con  $j = 1, 2, \dots, Q$ , promediando, en cada instante de tiempo, las  $P$  repeticiones para cada  $V_j$ . De esta manera se realizaría un primer filtrado paso bajo de la respuesta del motor a una entrada cuadrada, suavizando el comportamiento del motor. Para poder hacer este promedio temporal se está suponiendo que todos los experimentos se han realizado con un periodo de muestreo idéntico.

En la Figura 3.5 se muestran las curvas del número de pulsos  $N_j(t)$  promediadas de un motor DC real de  $P = 10$  repeticiones, para cuatro valores distintos de tensión de entrada expresados en voltios,  $V \in \{1, 3, 6, 9\}$ , obtenidos con un encoder cuya resolución es  $q = 12$ , es decir, que tiene una precisión de  $\pm 30^\circ$ , y con un periodo de muestreo  $T = 1ms$ . La señal cuadrada está formada por un escalón de amplitud  $V_j$  y de duración  $0,6s$ , y una bajada de duración  $0,6s$  que comienza tras finalizar el escalón de subida.

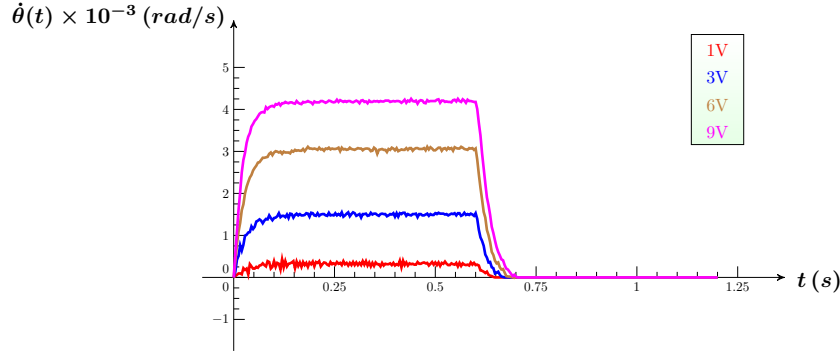


Figura 3.6: Velocidad angular en el eje de un motor DC real

En la Figura 3.6 se muestran las curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}_j(t)$  promediadas de un motor DC real para los cuatro valores de tensión de entrada de la Figura 3.5. La velocidad angular se ha obtenido utilizando la primera aproximación de Euler de la derivada,

$$\dot{\theta}_j(t_k) = \frac{2\pi (N_j(t_k) - N_j(t_{k-1}))}{qT} \quad (3.2)$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) de un encoder incremental,  $T$  es el periodo de muestreo expresado en segundos, y  $N_j(t_k)$  es el número de pulsos obtenidos con el encoder. Puesto que las condiciones iniciales de cada una de las  $P$  repeticiones han sido nulas,  $\dot{\theta}_j(0) = 0$ .

Hecho esto, se tendrán  $Q$  ficheros de datos asociados a un conjunto de valores de entrada,

$$V \in \{V_1, V_2, \dots, V_Q\} \quad (3.3)$$

El algoritmo que se propone consta de cuatro fases que se describen detalladamente en las siguientes subsecciones:

- **Primera Fase. Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente.**

En la Subsección 3.2.1 se calcula, con los datos experimentales, un conjunto de valores medios de velocidad angular,

$$\{\bar{\theta}_1(\infty), \bar{\theta}_2(\infty), \dots, \bar{\theta}_Q(\infty)\} \quad (3.4)$$

- **Segunda Fase. Cálculo del polo medio de varianza mínima.**

En la Subsección 3.2.2 se calcula, con los datos experimentales, un conjunto de valores medios de los polos,

$$\{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \quad (3.5)$$

- **Tercera Fase. Cálculo de  $K$  y de la tensión de entrada equivalente.**

En la Subsección 3.2.3 se calcula el conjunto de valores  $K_j$  a partir de los vectores 3.4 y 3.5,

$$\{K_1, K_2, \dots, K_Q\} \quad (3.6)$$

Puesto que lo que interesa es obtener un modelo del motor cuya parte lineal tenga los parámetros  $(K, p)$  únicos, es necesario obtener la tensión de entrada equivalente que satisfaga las relaciones de proporcionalidad de la ganancia a bajas frecuencias,

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{V_{eq,j}} = \frac{\bar{\theta}_k(\infty)}{V_{eq,k}} \quad (3.7)$$

para cualquier  $j, k \in \{1, 2, \dots, Q\}$ .

En la Figura 3.6 puede apreciarse a simple vista que la proporción entre velocidades angulares del régimen permanente y tensiones no es exacta. Esto significa que el motor DC no se comporta de manera lineal en cuanto a la ganancia a bajas frecuencias  $K/p$ .

Se obtendría en esta fase un vector de tensiones de entrada equivalentes,

$$\{V_{eq,1}, V_{eq,2}, \dots, V_{eq,Q}\} \quad (3.8)$$

En la Subsección 3.2.3 se obtiene una expresión de  $K/p$  utilizando la técnica de optimización del error cuadrático, donde el error viene dado por  $e_j = V_{eq,j} - V_j$ . A partir de este valor se propone una fórmula para el cálculo del polo único  $p$ , y del valor único de  $K$ .

■ **Cuarta Fase. Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica.**

En la Subsección 3.2.4 se obtiene la parte no lineal  $f$  del modelo del motor DC, de tal manera que tenga la siguiente forma polinómica,

$$V_{eq}(t) = a_1 V(t) + a_3 V^3(t) + \dots + a_{2Q-1} V^{2Q-1}(t) \quad (3.9)$$

### 3.2.1. Primera Fase: Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente

Sobre el experimento promedio se obtendría un valor medio de las últimas muestras de las que pueda garantizarse que el motor se encuentra en su régimen permanente.

Si se supone que la discretización del tiempo es uniforme,  $T$ , y el escalón del experimento promedio tuviese una duración  $T_f = (N_f - 1)T$ , se escogerían los valores de las últimas  $N$  muestras. Esta media sería  $\bar{\theta}(\infty)$ ,

$$\bar{\theta}(\infty) = \frac{\sum_{i=1}^N \dot{\theta}_{N_f-N+i}}{N} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, en esta Primera Fase deberá seleccionarse un valor de  $N$  adecuado.

Esto mismo se haría para los  $Q$  valores de la entrada escalón  $V \in \{V_1, V_2, \dots, V_Q\}$ . Se obtendrá entonces, un conjunto de valores medios de velocidad angular,

$$\{\bar{\theta}_1(\infty), \bar{\theta}_2(\infty), \dots, \bar{\theta}_Q(\infty)\} \quad (3.11)$$

Si el motor se comportase linealmente, los valores  $\bar{\theta}_j(\infty)$ , con  $j = 1, 2, \dots, Q$ , serían proporcionales, en el sentido de que

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{\bar{\theta}_k(\infty)} = \frac{V_j}{V_k} \quad (3.12)$$

para cualquier  $j, k \in \{1, 2, \dots, Q\}$ .

### 3.2.2. Segunda Fase: Cálculo del polo medio de varianza mínima

Mientras que para el cálculo de  $\bar{\theta}(\infty)$  se utilizan los valores finales de respuesta del motor a una entrada escalón, para el cálculo del polo deberá estudiarse el comportamiento del motor en el régimen transitorio.

Esta fase se realiza para cada uno de los  $Q$  experimentos utilizando el valor  $\bar{\theta}_j(\infty)$  obtenido en la Primera Fase. De esta forma se obtiene un vector de  $Q$  polos,

$$\{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \quad (3.13)$$

La expresión del polo que puede utilizarse para el transitorio de subida de una señal cuadrada es la expresión dada por H.3 obtenida en el Apéndice H bajo condiciones iniciales nulas,

$$pS_j(k) = \frac{N_j(k) - N_j(k-1)}{T \left( \frac{q\bar{\theta}_j(\infty)}{2\pi} kT - N_j(k) \right)} \quad (3.14)$$

donde  $N_j(k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k = kT$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

El estudio de todo el régimen transitorio del tramo de subida conduciría a errores debido a que el comportamiento del motor a bajas velocidades está muy condicionado por los pares de fricción que no se están considerando en el modelo matemático. Por lo tanto, debe descubrirse el intervalo de tiempo que permita obtener un valor del polo que más se ajuste a los datos experimentales.

El método que se propone para el tramo de subida utilizando la expresión 3.14, es calcular el polo medio para un conjunto de intervalos de tiempo  $[t_I, t_F]$ , cuyo instante inicial  $t_I$  y anchura  $t_F - t_I$  sean variables, y elegir el valor del polo medio cuya varianza sea la menor de las varianzas de cada intervalo seleccionado. De esta manera se obtendría  $pS_j$ . Posteriormente se indica un método sencillo para la creación de los intervalos.

Por otro lado, la expresión del polo que puede utilizarse para el transitorio de bajada de una señal cuadrada es la dada por la expresión de valores extremos J.6 del Apéndice J,

$$pB_j = \frac{\frac{q\bar{\theta}_j(\infty)}{2\pi}}{N_j(k_f) - N_j(k_0)} \quad (3.15)$$

donde  $k_f T$  es cualquier instante de tiempo en el cual el motor se encuentra parado.

También puede utilizarse la expresión dada por I.2 obtenida en el Apéndice I bajo condiciones iniciales no nulas, aunque es más complicada que la de valores extremos. Sin embargo, la utilización de la expresión J.1 del Apéndice J es problemática, debido a que exige que  $\dot{\theta}_j(\infty)t_0 = \theta(\infty)$ , lo cual puede no ocurrir en un estudio experimental, dando lugar a errores innecesarios.

Una vez calculados  $pS_j$  y  $pB_j$  se obtendrá un único valor  $p_j$  como una combinación lineal de los anteriores,

$$p_j = \alpha pS_j + (1 - \alpha)pB_j \quad (3.16)$$

donde  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Creación de intervalos** El método que se propone para el tramo de subida utilizando la expresión 3.14, es calcular el polo medio para un conjunto de intervalos de tiempo,

$$[t_I, t_F] \quad (3.17)$$

cuyo instante inicial  $t_I$  y anchura  $t_F - t_I$  sean variables, y elegir el valor del polo medio cuya varianza sea la menor de las varianzas de cada intervalo seleccionado.

Para que este método tenga sentido debe elegirse una anchura de intervalo mínima  $\Delta t$ , es decir que  $t_F \geq t_I + \Delta t$ .

Una forma sencilla de crear los intervalos consiste en elegir cuatro valores,  $t_I$  mínimo y máximo y  $t_F$  mínimo y máximo. Es decir,

$$t_I \in [t_{Im}, t_{IM}] \quad (3.18a)$$

$$t_F \in [t_{Fm}, t_{FM}] \quad (3.18b)$$

Si se supone que la discretización del tiempo es uniforme, el algoritmo puede programarse utilizando dos bucles para la creación del intervalo  $[t_I, t_F]$ , y otro bucle más para el cálculo del polo medio y de la varianza asociada a este intervalo. Conviene, en este caso, expresar los intervalos en función de un índice temporal tal que  $t = kT$ , entonces el intervalo será  $[k_I, k_F]$ .

Una posible selección de  $k_{FM}$  puede ser asignándole el valor  $N_r = N_f - N$  utilizado en la Primera Fase para calcular  $\bar{\theta}(\infty)$ . Puede reducirse el número de intervalos que se inspeccionarán si se hace la siguiente elección:

$$k_{IM} = N_r - n\Delta k \quad (3.19a)$$

$$k_{Fm} = k_I + \Delta k \quad (3.19b)$$

$$k_{FM} = k_I + n\Delta k \quad (3.19c)$$

donde  $n$  es un número entero positivo y  $k_I \in \{k_{Im}, k_{Im} + 1, \dots, k_{IM}\}$ .

El número de intervalos inspeccionados será

$$N_{Interv} = ((n - 1)\Delta k + 1)(N_r - k_{Im} - n\Delta k + 1) \quad (3.20)$$

Esta expresión se obtiene del siguiente razonamiento. El primer bucle, el de  $k_I$ , tiene una longitud fija  $N_I$  y el segundo bucle, el de  $k_F$ , tiene una longitud fija  $N_F$  dados por,

$$N_I = k_{IM} - k_{Im} + 1 = N_r - k_{Im} - n\Delta k + 1 \quad (3.21a)$$

$$N_F = k_{FM} - k_{Fm} + 1 = (n - 1)\Delta k + 1 \quad (3.21b)$$

Por lo tanto  $N_{Interv} = \sum_{i=1}^{N_I} N_F$ . Teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^{N_I} 1 = N_I$  se obtiene la expresión 3.20.

Por otro lado, una vez concluido el proceso de optimización, se tendrá un vector de polos medios y varianzas para cada intervalo y se buscará el valor mínimo. Puede interesar conocer el intervalo óptimo o intervalo de varianza mínima. Si este intervalo ocupa la posición  $q$ -ésima en el vector de varianzas, el intervalo óptimo será  $[k_I(q), k_F(q)]$ ,

$$k_I(q) = k_{Im} + N_I(q) - 1 \quad (3.22a)$$

$$k_F(q) = k_I(q) + \Delta k - 2 + q - \sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F \quad (3.22b)$$

donde el valor de  $N_I(q)$  debe cumplir la condición de que

$$\sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F < q \leq \sum_{i=1}^{N_I(q)} N_F \quad (3.23)$$

Puesto que  $\sum_{i=1}^{N_I(q)} N_F = ((n - 1)\Delta k + 1) N_I(q)$  y  $\sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F = ((n - 1)\Delta k + 1) (N_I(q) - 1)$ , entonces

$$N_I(q) - 1 < \frac{q}{(n - 1)\Delta k + 1} \leq N_I(q) \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta que  $N_I(q)$  debe ser un número entero positivo, se deberá cumplir que

$$N_I(q) = \left\lceil \left( \frac{q}{(n - 1)\Delta k + 1} \right) \right\rceil \quad (3.25)$$

donde  $\lceil x \rceil$  es la función techo de  $x$ , es decir, el primer número entero mayor o igual que  $x$ .

### 3.2.3. Tercera Fase: cálculo de $K$ y de la tensión de entrada equivalente

El cálculo de  $K$  para cada experimento se realiza con la fórmula

$$K_j = \frac{p_j \bar{\theta}_j(\infty)}{V_j} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (3.26)$$

obteniendo el vector

$$\{K_1, K_2, \dots, K_Q\} \quad (3.27)$$

El problema que surge con  $(K_j, p_j)$  es que existiría un modelo de motor para cada entrada al motor.

El objetivo de esta fase es obtener un único modelo lineal junto con una corrección no lineal de la entrada al motor, de tal forma que se conserven las proporciones dadas por 3.12.

Para ello se selecciona, en primer lugar, un polo común a cualquier entrada al motor. Sea  $p$  este polo, entonces,

$$\tilde{K}_j = \frac{p \bar{\theta}_j(\infty)}{V_j} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (3.28)$$

Los valores de  $\tilde{K}_j$  serán, en general, distintos para cada  $j$ , obteniéndose un vector

$$\{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_Q\} \quad (3.29)$$

A partir de este vector puede obtenerse un valor  $K$  común a todas las entradas. La consecuencia es que aparecerá una discrepancia en el valor de  $\bar{\theta}_j(\infty)$ , si el comportamiento del motor no fuese suficientemente lineal,

$$\bar{\theta}_j(\infty) \neq \frac{KV_j}{p} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (3.30)$$

Para corregir esta discrepancia es suficiente obtener una entrada equivalente de valor

$$V_{eq,j} = \frac{\tilde{K}_j V_j}{K} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (3.31)$$

y por lo tanto un vector

$$\{V_{eq,1}, V_{eq,2}, \dots, V_{eq,Q}\} \quad (3.32)$$

Entonces

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{V_{eq,j}} = \frac{K}{p} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (3.33)$$

Con esta nueva entrada  $V_{eq,j}$  se conservarían las proporciones dadas por 3.12 para el mismo valor de  $p$  y  $K$ . Sustituyendo 3.26 y 3.28 en 3.31,  $V_{eq,j}$  puede escribirse en la forma,

$$V_{eq,j} = \frac{K_j V_j}{p_j} \frac{p}{K} \quad (3.34)$$

Posteriormente se propone un método de optimización para el cálculo de  $K$  y  $p$ .

Con esta idea puede hacerse un diseño de controladores lineales suponiendo que el modelo del motor es  $(K, p)$ . Y una vez implementado el controlador, la señal de control  $u(t) = V_{eq}(t)$  generada por el controlador deberá ser corregida a la señal de entrada al motor  $\tilde{u}(t) = V(t)$ .

En la Cuarta Fase final del algoritmo se obtendrá una única función  $f$  tal que  $V_{eq}(t) = f(V(t))$  que satisfaga la condición de que  $V_{eq,j} = f(V_j)$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ . En la Sección 3.4, se detalla cómo obtener la relación no lineal  $u(t)$  versus  $\tilde{u}(t)$ . Concretamente, se obtiene la función inversa de  $f$ , es decir,  $\tilde{u}(t) = f^{-1}(u(t))$ .



**Propuesta para la estimación de los parámetros  $p$  y  $K$  del motor supuestos en la Tercera Fase** En la Tercera Fase se ha supuesto la elección de  $p$  y  $K$  únicos, pero no se ha dicho cómo hacerlo. Un cálculo óptimo sería aquél para el cual las tensiones equivalentes  $V_{eq,j}$  se encuentren lo más cerca posible de las tensiones  $V_j$ , ya que de esta forma la influencia de la parte no lineal sería mínima.

Por lo tanto, debe minimizarse el error  $e_j = V_{eq,j} - V_j$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ ,

$$e_j = \frac{K_j V_j}{p_j} \frac{p}{K} - V_j = \left( \frac{K_j}{p_j} \frac{p}{K} - 1 \right) V_j \quad (3.35)$$

Este error será mínimo si es mínima la diferencia entre ganancias a bajas frecuencias.

Una solución a este problema de optimización consiste en minimizar el error cuadrático, definido como

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q e_j^2 \quad (3.36)$$

Escribiremos  $e_j$  en la forma siguiente,

$$e_j = \alpha_j \frac{p}{K} - V_j \quad (3.37)$$

donde

$$\alpha_j = \frac{K_j V_j}{p_j} = \bar{\theta}_j(\infty) \quad (3.38)$$

Derivando  $J$  con respecto a  $p/K$ , se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial \left( \frac{p}{K} \right)} = \sum_{j=1}^Q \alpha_j \left( \alpha_j \frac{p}{K} - V_j \right) = \frac{p}{K} \sum_{j=1}^Q \alpha_j^2 - \sum_{j=1}^Q \alpha_j V_j \quad (3.39)$$

Igualando a cero esta derivada, despejando  $K/p$  y teniendo en cuenta que  $\alpha_j = \bar{\theta}_j(\infty)$ , se obtiene la expresión,

$$\frac{K}{p} = \frac{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} = \frac{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j \frac{K_j}{p_j}}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} \quad (3.40)$$

Se propone calcular  $1/p$  suponiendo que el motor es lineal, es decir, haciendo  $K_j = K$  en la relación dada por 3.40, por lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{p} = \frac{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j \frac{1}{p_j}}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} \quad (3.41)$$

De esta manera  $K$  quedaría en la forma

$$K = \frac{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2}{\sum_{j=1}^Q \frac{\bar{\theta}_j(\infty) V_j}{p_j}} = \frac{\sum_{j=1}^Q \frac{\bar{\theta}_j(\infty) V_j}{p_j} K_j}{\sum_{j=1}^Q \frac{\bar{\theta}_j(\infty) V_j}{p_j}} \quad (3.42)$$

que también se puede escribir como,

$$\frac{1}{K} = \frac{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2 \frac{1}{K_j}}{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2} \quad (3.43)$$

Como puede observarse, los valores de  $K$  o  $1/K$ ,  $1/p$  y  $K/p$  son medias ponderadas de los vectores  $\{K_j\}$  o  $\{1/K_j\}$ ,  $\{1/p_j\}$  y  $\{K_j/p_j\}$  respectivamente. El valor de  $K$  o de  $p$  puede obtenerse de cualquier otra forma a partir del vector  $\{K_j\}$  o  $\{p_j\}$  respectivamente, dando resultados similares. No haremos aquí un estudio que permita optimizar esta selección de  $K$  o  $p$ .

### 3.2.4. Cuarta Fase: Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica

La parte no lineal del modelo del motor será una función no lineal,  $f$ , tal que

$$V_{eq}(t) = f(V(t)) \quad (3.44)$$

Aquí se propone que la función no lineal  $f$  sea un polinomio de grado  $N = 2Q$ ,

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N \quad (3.45)$$

donde  $a_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ , son  $N$  constantes del modelo que deben ser identificadas.

Si la no linealidad del motor es independiente del signo de su entrada, el polinomio  $f(x)$  será simétrico con respecto al origen, es decir, que  $f(-x) = -f(x)$ . Este hecho permite reducir el grado del polinomio a  $N - 1$ , y el número de coeficientes a  $N/2$ , de tal manera que el polinomio tendría la forma,

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2Q-1}x^{2Q-1} \quad (3.46)$$

Para la identificación de los parámetros constantes  $a_i$ , se utilizarán los  $Q$  experimentos realizados, de tal manera que se cumpla la relación dada por 3.33 para cada uno de ellos. Es decir, que  $f(V_j) = V_{eq,j}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , o lo que es lo mismo, se va a aplicar un método de interpolación polinómica. Por lo tanto se obtendrían  $Q$  ecuaciones lineales con  $N = 2Q$  incógnitas,

$$V_{eq,j} = a_1V_j + a_2V_j^2 + \cdots + a_NV_j^N \quad (3.47)$$

Si se impone la condición de simetría, se tendrían otras  $Q$  ecuaciones lineales de la forma,

$$-V_{eq,j} = -a_1V_j + a_2V_j^2 - a_3V_j^3 + \cdots - a_{N-1}V_j^{N-1} + a_NV_j^N \quad (3.48)$$

De esta manera, se tendrían  $2Q$  ecuaciones lineales con  $2Q$  incógnitas. Este sistema de ecuaciones lineales puede representarse en forma matricial, donde la matriz de la relación es una matriz de Vandermonde, por lo que es invertible.

No obstante, puede demostrarse que debido a la simetría en el origen, este sistema de ecuaciones lineales puede reducirse a otro de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas, donde el polinomio resultante sería de grado  $2Q - 1$ , con la forma dada por 3.46. La demostración es sencilla, ya que si se suman para cada  $j$  las ecuaciones 3.47 y 3.48, se obtendría un sistema de ecuaciones lineales de coeficientes pares igualados a cero, y puesto que los coeficientes  $a_i$  deben ser únicos, la única solución posible es que sean nulos, es decir,  $a_2 = a_4 = \cdots = a_{2Q} = 0$ .

Ahora, restando las ecuaciones 3.47 y 3.48 y dividiendo por dos, se obtendría un sistema de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas,

$$V_{eq,j} = a_1V_j + a_3V_j^3 + \cdots + a_{2Q-1}V_j^{2Q-1} \quad (3.49)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser representado en forma matricial

$$V_{eq} = \mathcal{V}a \quad (3.50)$$

donde

$$V_{eq} = \begin{bmatrix} V_{eq,1} \\ V_{eq,2} \\ \vdots \\ V_{eq,Q} \end{bmatrix} \quad (3.51a)$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (3.51b)$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_1^3 & \cdots & V_1^{2Q-1} \\ V_2 & V_2^3 & \cdots & V_2^{2Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_Q & V_Q^3 & \cdots & V_Q^{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (3.51c)$$

El vector de parámetros  $a$  se obtendría invirtiendo la matriz  $\mathcal{V}$ ,

$$a = \mathcal{V}^{-1}V_{eq} \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $V_{eq,j}$  dada por 3.31, se obtiene el valor de  $\tilde{K}_j$ ,

$$\tilde{K}_j = K \left( a_1 + a_3 V_j^2 + \cdots + a_{2Q-1} V_j^{2Q-2} \right) \quad (3.53)$$

Esta expresión indica claramente que el valor de  $K$  del motor depende de la entrada  $V_j$  si el comportamiento del motor no es suficientemente lineal. Podemos definir, entonces, un valor de  $K_{eq}(t)$ , de la siguiente forma,

$$K_{eq}(t) = K \left( a_1 + a_3 V^2(t) + \cdots + a_{2Q-1} V^{2Q-2}(t) \right) \quad (3.54)$$

cumpliéndose que

$$V_{eq}(t) = \frac{K_{eq}(t)}{K} V(t) \quad (3.55)$$

El problema de utilizar esta técnica de interpolación es que se produce el llamado fenómeno de Runge, que consiste en que para valores elevados de  $Q$  el polinomio puede oscilar mucho entre puntos de datos consecutivos. En la práctica conviene evitar este problema utilizando otras técnicas de interpolación, como por ejemplo, obteniendo polinomios por partes (curvas "spline").

### 3.3. Ejemplo de modelado experimental de un motor DC

En esta Sección se obtiene el modelo de un motor real aplicando el algoritmo detallado en la Sección 3.2.

Los experimentos realizados han consistido en la obtención del número de pulsos proporcionado por un encoder situado en el eje del motor de  $q = 12$  pulsos/vuelta, cuando la entrada es una señal cuadrada periódica de  $P = 10$  y  $Q = 9$  experimentos. La duración del escalón de subida de tensión  $V_j$  con  $j = 1, \dots, Q$ , ha sido de  $0,6s$  y la del escalón nulo también de  $0,6s$ . El periodo de muestreo ha sido de  $T = 1ms$ .

Las tensiones de entrada  $V_j$  voltios han sido las siguientes:

$$V \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (3.56)$$

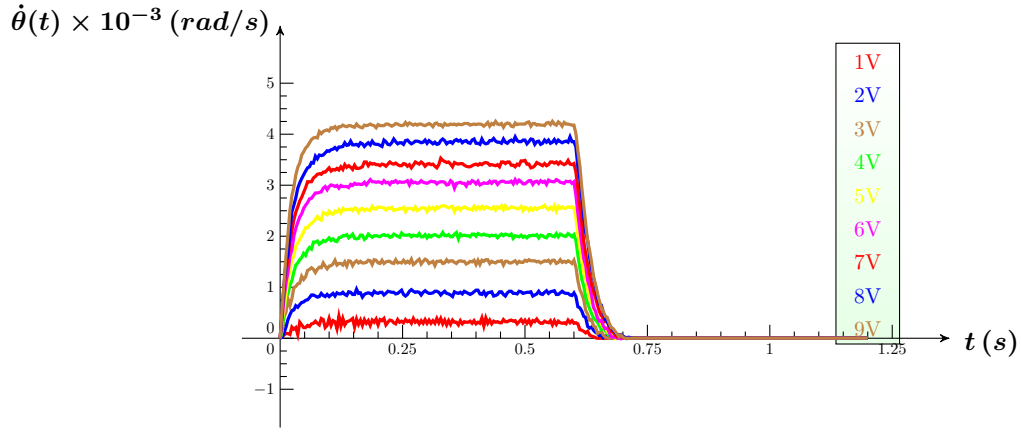


Figura 3.7: Velocidad angular en el eje de un motor DC real

En primer lugar se ha obtenido el promedio temporal de los  $P$  experimentos, obteniendo  $Q$  ficheros de datos. En la Figura 3.7 se muestran las curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}_j(t_k)$  con  $t_k \in \{0, 10^{-3}, \dots, 1200 \times 10^{-3}\}$ , calculados a partir de los datos medidos promediados utilizando la expresión 3.2.

Para el cálculo de la velocidad angular en régimen permanente,  $\bar{\theta}_j(\infty)$  se ha aplicado la fórmula dada por 3.10, donde  $N_f = 601$  y  $N = 200$  que se corresponde con  $t_f = 0,6s$  y  $t_r = 0,4s$  ( $N_r = N_f - N = 401$ ). Es decir, se ha calculado el valor medio de los últimos  $0,2s$  del escalón.

Para el cálculo de  $pS_j$  en el transitorio de subida se ha utilizado la fórmula dada por 3.14 con intervalos variables, como se describe en la Subsección 3.2.2, con  $k_{Im} = 2$  ( $t_{Im} = 0,001s$ ),  $\Delta k = 60$  y  $n = 2$ . Se ha escogido el valor  $pS_j$  del intervalo de varianza mínima.

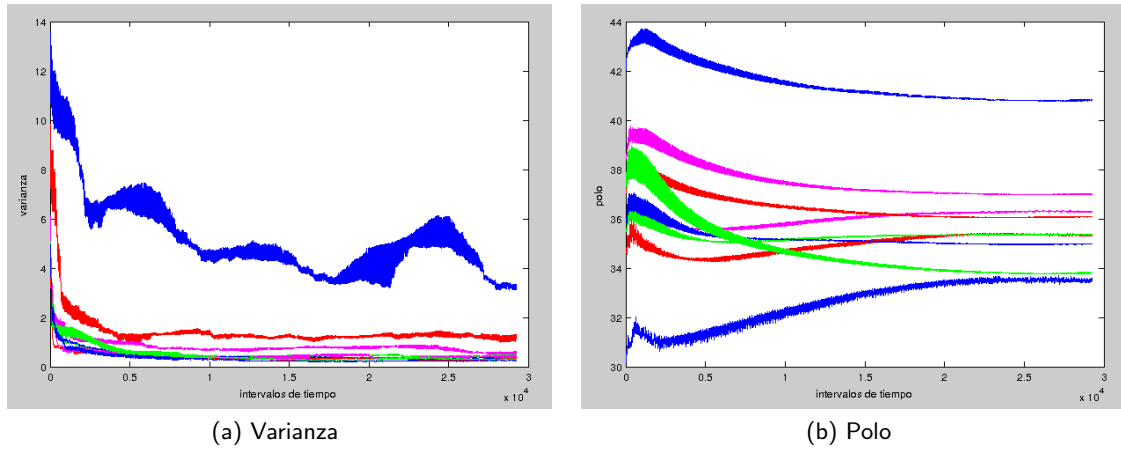


Figura 3.8: Varianza y polo medio  $pS_j$  en cada intervalo de tiempo

En la Figura 3.8 se representan las curvas de varianza y del polo medio en función del intervalo  $[k_I, k_F]$  (eje de abscisas), donde la numeración de los intervalos se ha obtenido de manera consecutiva mediante dos bucles,

```
kIM=Nr-n*Deltak;
for kI=kIm:kIM
    kFm=kI+Deltak;
    kFM=kI+n*Deltak;
    for kF=kFm:kFM
        .
        .
        .
    end
```

end

Las curvas de la Figura 3.8 pretenden ser simplemente indicativas por lo que no se ha puesto leyenda.

Para el cálculo de  $pB_j$  en el transitorio de bajada se ha utilizado la fórmula dada por 3.15 donde  $k_f = 1201$  y  $k_0 = 601$ .

Finalmente, se ha obtenido  $p_j$  como una media de  $pS_j$  y  $pB_j$ , es decir, utilizando la fórmula 3.16 con  $\alpha = 0,5$ .

A partir de este valor de  $p_j$  se obtiene  $K_j$  aplicando la fórmula dada por 3.26.

Para el cálculo de  $p$  y  $K$  se ha seguido el método descrito en la Subsección 3.2.3, lo que permite también obtener la tensión equivalente  $Ve_{qj}$  utilizando la fórmula 3.34. El error cuadrático dado por 3.36 ha sido  $J = 0,2297$ . En la Tablas 3.1 y 3.2 y en la Figura 3.9 se muestran los valores obtenidos.

$V_j$	$Ve_{qj}$
1	0,66687
2	1,8264
3	3,0756
4	4,1367
5	5,2546
6	6,2972
7	7,015
8	7,9544
9	8,6279

Tabla 3.1: Valores de  $Ve_{qj}$  obtenidos en la tercera fase

p	35,9154
K	17461

Tabla 3.2: Valores de  $p$  y  $K$  obtenidos en la tercera fase

$V_j=1; pS_j=33.5058; KS_j \times 10^{-3}=10.8631; pB_j=53.0166; KB_j \times 10^{-3}=17.1888; p_j=43.2612; K_j=7343.9493$
$V_j=2; pS_j=34.2716; KS_j \times 10^{-3}=15.2154; pB_j=44.6466; KB_j \times 10^{-3}=19.8215; p_j=39.4591; K_j=9172.6386$
$V_j=3; pS_j=36.3167; KS_j \times 10^{-3}=18.1009; pB_j=45.2248; KB_j \times 10^{-3}=22.5408; p_j=40.7707; K_j=10639.9646$
$V_j=4; pS_j=35.155; KS_j \times 10^{-3}=17.6754; pB_j=39.7863; KB_j \times 10^{-3}=20.004; p_j=37.4706; K_j=9864.4312$
$V_j=5; pS_j=34.9809; KS_j \times 10^{-3}=17.8727; pB_j=38.1313; KB_j \times 10^{-3}=19.4823; p_j=36.5561; K_j=9779.538$
$V_j=6; pS_j=36.196; KS_j \times 10^{-3}=18.4691; pB_j=39.1242; KB_j \times 10^{-3}=19.9632; p_j=37.6601; K_j=10061.5665$
$V_j=7; pS_j=37.0343; KS_j \times 10^{-3}=18.0435; pB_j=34.5594; KB_j \times 10^{-3}=16.8377; p_j=35.7969; K_j=9131.8899$
$V_j=8; pS_j=34.1663; KS_j \times 10^{-3}=16.5159; pB_j=31.5079; KB_j \times 10^{-3}=15.2308; p_j=32.8371; K_j=8311.283$
$V_j=9; pS_j=40.9653; KS_j \times 10^{-3}=19.0927; pB_j=32.4639; KB_j \times 10^{-3}=15.1304; p_j=36.7146; K_j=8959.5891$

Figura 3.9: Valores de  $p$  y  $K$  obtenidos en las tres primeras fases

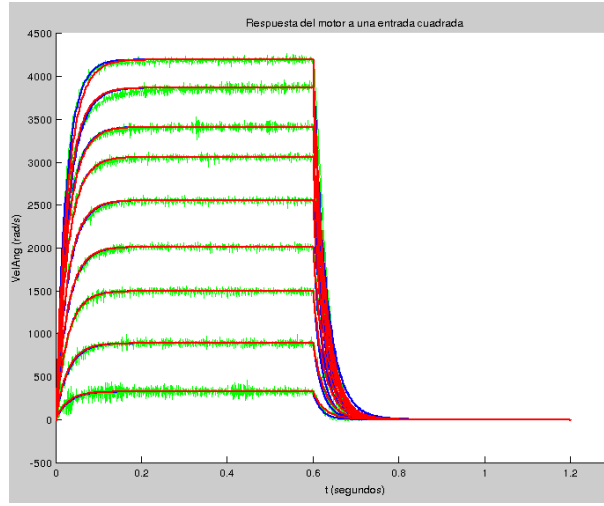


Figura 3.10: Respuestas del motor (explicación en el texto)

En la Figura 3.10 se representan en azul las respuestas de la parte lineal del motor a las señales de entrada cuadrada, donde se ha utilizado  $pS_j$  para el escalón de subida, y  $pB_j$  para el escalón de bajada. Las respuestas a las señales de entrada cuadrada con  $p = 35,9154$  y  $K = 17461$  se representan en color rojo. Todas ellas están superpuestas a las velocidades angulares medidas (color verde), que están representadas también en la Figura 3.7.

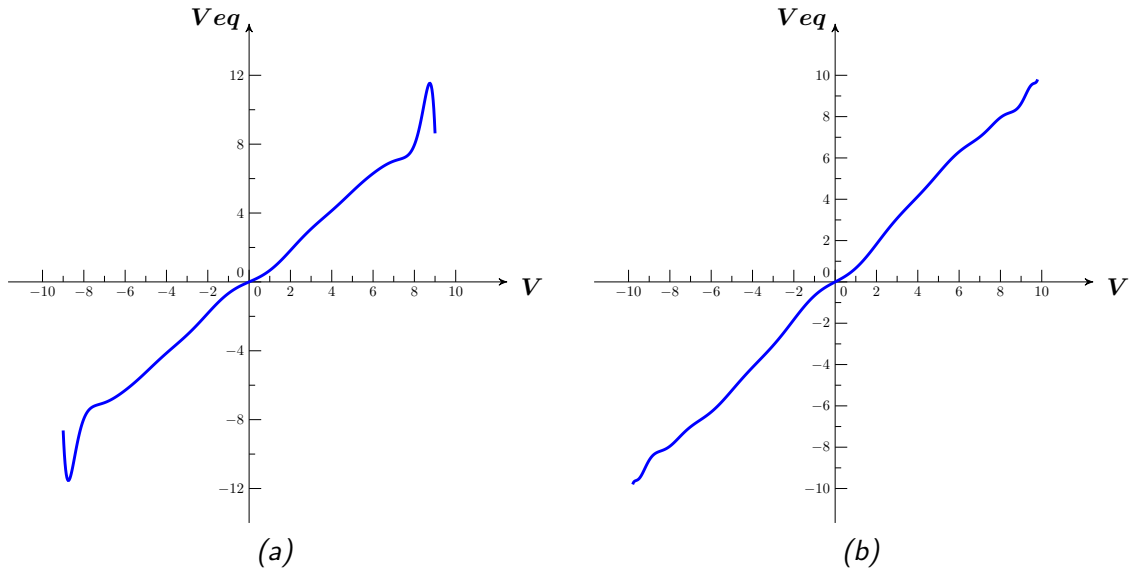


Figura 3.11: Polinomio de interpolación impar de grado (a) 17 y (b) 23.

En la Figura 3.11a se muestra la curva de interpolación polinómica  $V_{eq}$ - $V$  siguiendo el método explicado en la Subsección 3.2.4, obteniendo los valores de los coeficientes del polinomio impar de grado  $2Q - 1$  siguientes,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q-1} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 52597393240172765184,000000 \\ 16027040554921168896,000000 \\ -2073926822836621056,000000 \\ 142493094320705376,000000 \\ -5684644001475050,000000 \\ 136226263708353,671875 \\ -1933315989656,758789 \\ 14934202272,293077 \\ -48181879,170126 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

En la Ecuación 3.57 los coeficientes del polinomio están multiplicados por  $10^{20}$  porque la precisión de estos valores es muy importante para evitar errores numéricos en la interpolación.

Puede apreciarse que para valores entre 8 y 9 voltios la curva oscila excesivamente. Para suavizar el polinomio se ha hecho un estudio empírico, que consiste en añadir puntos  $V_j > 9$  que satisfagan la condición de que  $V_j = V_{eq,j}$ . De esta manera la función de error cuadrático  $J$  de la tercera fase no se ve alterada, permitiendo mantener los mismos valores de  $p$  y  $K$  obtenidos en la tercera fase. En la Figura 3.11b se muestra la curva de interpolación extendida, añadiendo los puntos  $\{9,4; 9,6; 9,8\}$ , cuyos coeficientes son

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q'-1} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 52350607024243171328,000000 \\ 16410636174885726208,000000 \\ -2238536983581650944,000000 \\ 173117348095936288,000000 \\ -8670950267083310,000000 \\ 304718139112955,312500 \\ -7736148426674,490234 \\ 139933770581,362793 \\ -1731851185,361269 \\ 13761981,282901 \\ -62750,253940 \\ 124,193751 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

donde  $Q' = Q + 3$ .

### 3.4. Ejemplo de diseño de un controlador no lineal de posición angular de un motor DC mediante linealización por inversión de la entrada equivalente

En esta Sección se explica una técnica de cómo se puede abordar el diseño de un controlador cuando se conoce el modelo no lineal del sistema que se quiere controlar. La idea es invertir la parte no lineal del modelo, como se muestra en la Figura 3.12 para el ejemplo del motor modelado en la Sección 3.3.

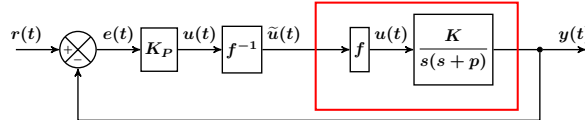


Figura 3.12: Sistema de control realimentado no lineal con controlador proporcional

Para el cálculo de  $f^{-1}$  se seguirá el mismo procedimiento que el seguido en la Cuarta Fase del algoritmo de modelado de la Sección 3.2, es decir, se hará una interpolación polinómica con los datos experimentales. La única diferencia es que ahora la entrada debe ser  $V_{eq,j}$  y la salida debe ser  $V_j$ .

Con los datos experimentales se tendrá un sistema de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas,

$$V_j = b_1 V_{eq,j} + b_2 V_{eq,j}^3 + \dots + b_Q V_{eq,j}^{2Q-1} \quad (3.59)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser representado en forma matricial

$$V = \mathcal{V}_{eq} b \quad (3.60)$$

donde

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_Q \end{bmatrix} \quad (3.61a)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix} \quad (3.61b)$$

$$\mathcal{V}_{eq} = \begin{bmatrix} V_{eq,1} & V_{eq,1}^3 & \cdots & V_{eq,1}^{2Q-1} \\ V_{eq,2} & V_{eq,2}^3 & \cdots & V_{eq,2}^{2Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{eq,Q} & V_{eq,Q}^3 & \cdots & V_{eq,Q}^{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (3.61c)$$

El vector de parámetros  $b$  se obtendría invirtiendo la matriz  $\mathcal{V}_{eq}$ ,

$$b = \mathcal{V}_{eq}^{-1} V \quad (3.62)$$

Utilizando la notación de la Figura 3.12,

$$\tilde{u}(t) = b_1 u(t) + b_2 u^3(t) + \cdots + b_Q u^{2Q-1}(t) \quad (3.63)$$

Para el cálculo de  $b$  se utilizarán los datos del motor estudiado en la Sección 3.3, donde se obtuvo la relación entre  $V$  y  $V_{eq}$  necesarias, recogida en la Tabla 3.1.

Los valores de los parámetros del polinomio  $f^{-1}$  son los siguientes,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 160847196028152414208,000000 \\ -26347922032274841600,000000 \\ 4322322265093997568,000000 \\ -363554628276008320,000000 \\ 17239993144634128,000000 \\ -477930909965441,125000 \\ 7651637860447,907227 \\ -65284920745,084717 \\ 229031063,402778 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

En la Figura 3.13a se muestra la curva del polinomio invertido  $f^{-1}$ . Puede observarse que para valores elevados de  $V_{eq} = u$  se produce una oscilación excesiva, como ocurre con la curva de  $f$  de la Figura 3.11a.



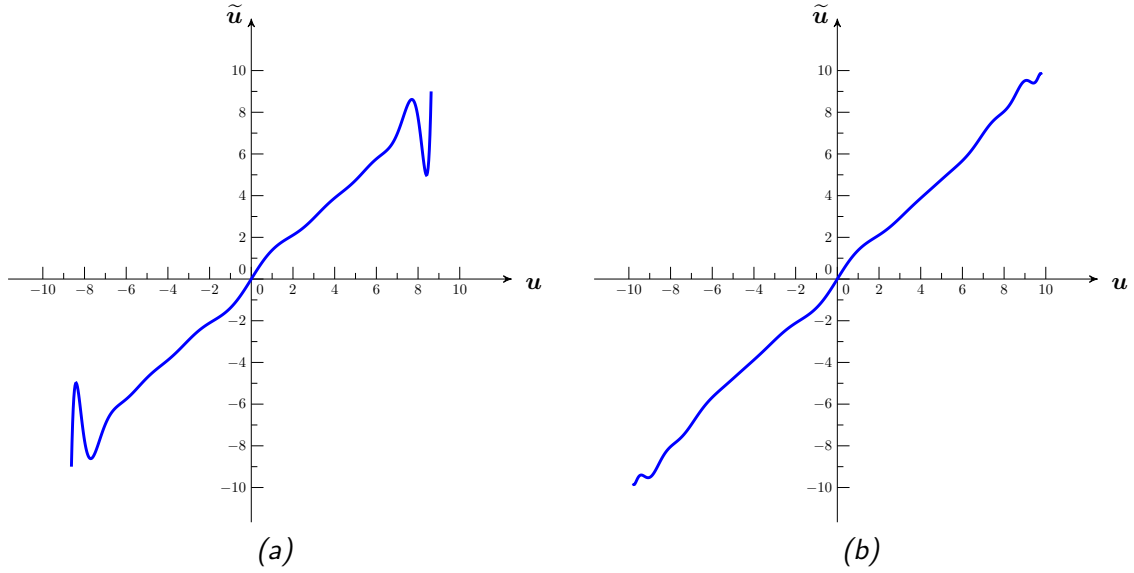


Figura 3.13: Polinomio de interpolación (a)  $f^{-1}$  y (b)  $f^{-1}$  extendido

Para suavizar  $f^{-1}$  puede ampliarse el polinomio, como se hizo en la sección de modelado, obteniendo el vector  $b$  siguiente,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{Q'} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 161420208519579402240,000000 \\ -27972980731616759808,000000 \\ 5147272154662284288,000000 \\ -523422280457548608,000000 \\ 32724482599262236,000000 \\ -1328367048308069,750000 \\ 35901555312352,882812 \\ -649115490056,463867 \\ 7733802412,063457 \\ -58137308,617381 \\ 249474,432325 \\ -465,230157 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

donde  $Q' = Q + 3$ .

En la Figura 3.13b se muestra la curva resultante de  $f^{-1}$  extendido.

### 3.5. Programas Matlab para el modelado de un motor DC

En esta sección se explican los programas Matlab del algoritmo de modelado de un motor DC descrito en la Sección 3.2. A este documento se adjunta el código de cada programa en el fichero comprimido **simulaboModeladoEjemploAlumnos.tgz**. Este documento debe leerse en compañía de cada uno de los programas mencionados aquí, ya que se hace constante referencia a ellos. Cada programa tiene unos comentarios iniciales que explican el significado de las variables principales de entrada y salida, y sin estos comentarios, lo que se dice en este documento estaría incompleto.

En lo que sigue se supone que se han obtenido datos experimentales de la salida de un motor DC real cuando la entrada es una señal cuadrada de amplitud  $V_j, j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , y que estos datos están almacenados en  $Q$  ficheros de texto de dos columnas: la primera representa el número de muestra  $k$ , y la segunda el número de pulsos  $N_j(k)$  obtenido con un encoder situado en el eje del motor. La primera fila de cada fichero representa la condición inicial, con el número de muestra  $k = 0$ , y puesto que se supone que la condición inicial es nula, el número de pulsos  $N_j(0) = 0$ .

Para interpretar correctamente estos ficheros es necesario saber cuál es el periodo de muestreo uniforme  $T$  en segundos utilizado en los experimentos, la resolución del encoder,  $CPR$ , en pulsos/vuelta y los parámetros de la señal cuadrada: la duración del escalón de subida  $t_1$  en segundos, la duración del escalón de bajada  $t_2$  en segundos y la amplitud del escalón de subida  $V_j$  en voltios.

Por ejemplo, si  $t_1 = t_2 = 0,6$  segundos y  $T = 1$  milisegundo, cada fichero tendrá 1201 datos.

El valor de  $CPR$  es necesario para calcular la posición angular  $\theta_j(k)$  en radianes del motor y la velocidad angular del motor,  $\dot{\theta}_j(k)$  en rad/s, a partir del número de pulsos. Puesto que se supone que las condiciones iniciales son nulas,  $\theta_j(0) = \dot{\theta}_j(0) = 0$ .

El cálculo en radianes de  $\theta_j(k)$  se realiza con la siguiente expresión,

$$\theta_j(k) = \frac{2\pi N_j(k)}{q}, \quad k \geq 0 \quad (3.66)$$

donde  $q = CPR$ .

En los programas desarrollados se calcula la velocidad angular  $\dot{\theta}_j(k)$  en rad/s utilizando la primera aproximación de Euler de la derivada,

$$\dot{\theta}_j(k) = \frac{2\pi (N_j(k) - N_j(k-1))}{q}, \quad k \geq 1 \quad (3.67)$$

### 3.5.1. ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m

El programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m** es el programa principal, cuya función es ejecutar todos los programas necesarios para realizar el modelado experimental del motor DC. Estos programas se encuentran en el fichero comprimido **simulaboModeladoEjemploAlumnos.tgz**.

En primer lugar deben definirse las constantes necesarias, así como los nombres de los ficheros que deberán escribirse y leerse a lo largo de todo el proceso. Esto debe hacerse manualmente como se explica a continuación. Una vez hecho, puede ejecutarse el programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m** en el entorno de Matlab. Su cabecera es la siguiente:

```
[pM, KM, Gzero, J, VeqV, a, b]=ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB
```

donde  $VeqV$  es el vector de tensiones equivalentes (Sección 3.2.3),  $J$  es el valor de la función de error que permite obtener la ganancia a bajas frecuencias óptima,  $a, b$  son los vectores de parámetros del polinomio de interpolación de la función no lineal  $f$  y  $f^{-1}$  respectivamente, y

$$G(s) = \frac{KM}{s + pM} \quad (3.68a)$$

$$Gzero = G(0) = \frac{KM}{pM} \quad (3.68b)$$

es decir,  $pM$  y  $KM$  son los parámetros estimados de la función de transferencia de la parte lineal del modelo del motor DC.

Los ejemplos que se citen en esta sección, se corresponden con el ejemplo de modelado de la Sección 3.3.

Los programas requieren que se definan algunas constantes cuyos nombres de las variables deben respetarse. Por ejemplo:

```
%%%%%%%%%%%%%%
TensionVector=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
TensionVectorL=length(TensionVector);
DuracionSubida=0.6;% segundos
Periodo=0.001;% en segundos
CPR=12;% pulsos/vuelta
z1=0.5;% ponderación de los polos de subida y bajada
opCurvas=[1 1 1];% se explica en ModeladoMotorDCCurvasB.m
```

A su vez, deben definirse los nombres y ubicaciones de algunos ficheros. Debe haber cuatro tipos de ficheros. En el ejemplo que se pone a continuación tienen extensiones distintas: “.mean”, “.resumen”, “.polo” y “.poli”. A continuación se explica cada uno de ellos.

Lo que debe respetarse son los nombres de las variables de cada uno de ellos: "NomFicheroLecturaMean", "NomFicheroEscrituraResumen", "NomFicheroEscrituraPolo" y "NomFicheroEscrituraPoli". Las variables "NomFicheroLecturaMean" y "NomFicheroEscrituraPolo" tienen la estructura de un vector de celdas ("cell array") ya que hay  $Q$  ficheros de nombres distintos.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ejemplo NOMBRE DE FICHEROS:
%% - con extensiones .mean, .resumen, .polo y .poli,
    que se leen o se escriben en el subdirectorio ./PololuModeladoDat
(que se encuentra en el fichero: simulaboModeladoMotorDC.tar.gz)
%% - ficheros de datos:
% ./PololuModeladoDat/trapXV_0ms600ms600ms_T1ms_ST.mean,
    donde X es la tensión en {1,2,...,9}
%% - restantes ficheros:
% ./PololuModeladoDat/MotorDCPololu.V_0ms600ms600ms_T1ms_ST.XV.polo,
    donde X es la tensión en {1,2,...,9}
% ./PololuModeladoDat/MotorDCPololu.V_0ms600ms600ms_T1ms_ST.resumen
% ./PololuModeladoDat/MotorDCPololu.V_0ms600ms600ms_T1ms_ST.poli
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PrefNomMeanA='./PololuModeladoDat/trap';
PrefNomMeanB='0ms600ms600ms_T1ms_ST.mean';
PrefNomFicheroEscritura='./PololuModeladoDat/MotorDCPololu';
PrefNomFichero2=strcat(PrefNomFicheroEscritura, '.', PrefNomMeanB);
NomFicheroEscrituraResumen=strcat(PrefNomFichero2, '.resumen');
NomFicheroEscrituraPoli=strcat(PrefNomFichero2, '.poli');
NomFicheroLecturaResumen=NomFicheroEscrituraResumen;
for i=1:TensionVectorL
Tension=TensionVector(i);
NTension=num2str(Tension);
NomFicheroEscrituraPolo{i}=strcat(PrefNomFichero2, '.', NTension, 'V.polo');
NomFicheroLecturaMean{i}=strcat(PrefNomMeanA, NTension, 'V_', PrefNomMeanB);
end
NomFicheroLecturaPolo=NomFicheroEscrituraPolo;
```

El Programa principal **ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m** ejecuta los siguientes programas, y en el orden indicado. Todos los programas tienen un comentario inicial que explica su funcionamiento. Solo el programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloB.m** requiere que se introduzcan manualmente valores numéricos para el cálculo de los polos de subida y de bajada.

1. Función **LecturaExperimentoMultiV.m** Lee, en un bucle de longitud **TensionVectorL=Q**, cada uno de los ficheros de datos de los experimentos asociados a la variable de tipo celda ("cell array") "NomFicheroLecturaMean", creando el vector "Tiempo" (número de pulso, índice temporal  $k$ ) y el vector de celdas ("cell array") "Pulsos" (valor del pulso,  $N(k)$ ). Se supone que el vector "Tiempo" es el mismo para los  $Q$  ficheros de datos, por lo que no es necesario que sea un vector de celdas.

```
[Tiempo,Pulsos{i}]=LecturaExperimentoMultiV(TensionVector(i),
NomFicheroLecturaMean{i},Periodo);
```

2. Programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloB.m**. Este programa se ejecuta en un bucle de longitud **TensionVectorL=Q**.

```
ModeladoMotorDCVelAngPoloB(i,TensionVector(i),CPR,Periodo,Tiempo,Pulsos{i},
NomFicheroEscrituraResumen,NomFicheroEscrituraPolo{i});
```

El programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloB.m** requiere que se introduzcan manualmente los valores extremos de los intervalos temporales para el cálculo del polo de varianza mínima de subida, y para el cálculo del polo de bajada, tal y como se describe en la Sección 3.2.2. Un ejemplo es el siguiente:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
IniS=1;% inicial subida
InfS=601;% final subida
InfB=1201;% subida + bajada
kTs=401;% frontera régimen permanente subida
DeltatS=60;
DnS=2;%>=2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Al ejecutar en un bucle el programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloB.m** se crea y actualiza el fichero asociado a la variable “NomFicheroEscrituraResumen” y  $Q$  ficheros asociados a la variable de tipo celda “NomFicheroEscrituraPolo”. El formato de cada uno de estos ficheros se explica en los comentarios iniciales de este programa.

El programa principal **ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m** lee el fichero asociado a la variable “NomFicheroLecturaResumen” (que normalmente coincidirá con el fichero asociado a la variable “NomFicheroEscrituraResumen”) ya que utiliza la información creada en el bucle del programa **ModeladoMotorDCVelAngPoloB.m** para calcular los valores de “pM”, “KM”, “Gzero”, “J” y “VeqV”.

3. Función **InterpolacionPolinomioSimetrico.m**. Calcula el vector de parámetros,  $a$ , del polinomio de interpolación  $f$  de la tensión equivalente y de la tensión experimental, tal y como se explica en la Sección 3.2.4. Permite también obtener el vector de los parámetros,  $b$ , de la función inversa  $f^{-1}$ , necesarios para la implementación del controlador, según se explica en la Sección 3.3.

Para obtener los vectores de parámetros “a” y “b” se ejecutarían las siguientes instrucciones:

```
[a,aR]=InterpolacionPolinomioSimetrico(VeqVP,TensionVectorP);%f
[b,bR]=InterpolacionPolinomioSimetrico(TensionVectorP,VeqVP);%f^{-1}
```

Los vectores “VeqVP” y “TensionVectorP” deben coincidir con los los vectores “VeqV” y “TensionVector” salvo que se pretenda obtener un polinomio de interpolación extendido, como se ha hecho en el ejemplo de modelado de la sección 3 y de diseño del controlador de la Sección 3.3. Por ejemplo, deben definirse los vectores “VeqVP” y “TensionVectorP” antes de ejecutar la función **InterpolacionPolinomioSimetrico.m**:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
TensionVectorP=TensionVector;
VeqVP=VeqV;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Si se hace con un polinomio extendido: por ejemplo,
%V9=[9.4 9.6 9.8]
%TensionVectorP=[TensionVectorP V9];
%VeqVP=[VeqVP V9];
```

Los resultados de la función **InterpolacionPolinomioSimetrico.m** se guardan en el fichero “NomFicheroEscrituraPoli”, operación que se realiza en el mismo programa principal **ModeladoMotorDCVelAngPoloBucleB.m**. El formato de este fichero se explica en los comentarios iniciales de este programa.

4. Programa **ModeladoMotorDCCurvasB.m**. Crea, como máximo, tres tipos de figuras, según se indique en la variable "opCurvas". Por ejemplo, si "opCurvas=[1 0 1]" solo se crearán las figuras de tipo "a" y de tipo "c". En los comentarios iniciales del programa **ModeladoMotorDCCurvasB.m** se explica cada uno de estos tipos.

El programa **ModeladoMotorDCCurvasB.m** tiene la siguiente cabecera:

```
ModeladoMotorDCCurvasB(opCurvas,DuracionSubida,TensionVector,  
    NomFicheroLecturaPolo,Tiempo,PulsosRad,PS,PB,KS,KB,  
    PSB,KSB,VeqV,pM,KM,a,b,TensionVectorP,VeqVP)
```

Este programa tiene una primera instrucción, que puede comentarse si se considera conveniente, que cierra todas las figuras abiertas,

```
delete(findall(0,'Type','figure')) % cierra todas las figuras
```

El programa **ModeladoMotorDCCurvasB.m** ejecuta, como máximo, tres programas, dependiendo del valor de "opCurvas": **ModeladoMotorDCCurvasPolo.m**, **ModeladoMotorDCCurvasVelAng.m** y **ModeladoMotorDCCurvasPoli.m**. El primero de ellos lee datos del conjunto de ficheros asociado a la variable de tipo celda "NomFicheroLecturaPolo", que normalmente coincidirá con el conjunto de ficheros asociados a la variable de tipo celda "NomFicheroEscrituraPolo".

La cabecera del programa **ModeladoMotorDCCurvasPolo.m** es la siguiente:

```
ModeladoMotorDCCurvasPolo(TensionVector,NomFicheroLecturaPolo)
```

La cabecera del programa **ModeladoMotorDCCurvasVelAng.m** es la siguiente:

```
ModeladoMotorDCCurvasVelAng(DuracionSubida,TensionVector,Tiempo,  
    PulsosRad,PS,PB,KS,KB,PSB,KSB,VeqV,pM,KM)
```

La cabecera del programa **ModeladoMotorDCCurvasPoli.m** es la siguiente:

```
ModeladoMotorDCCurvasPoli(a,b,TensionVectorP,VeqVP)
```

# Apéndices

## A. Etapa de potencia

En la Figura A.1 se representa un esquema de la etapa de potencia de un motor DC cuyo objetivo es la generación de una señal modulada en anchura de pulso (señal PWM en lo sucesivo,  $u_m(t)$ ) que se corresponda con la señal de control discreta  $u_k$  generada por un sistema de control digital.

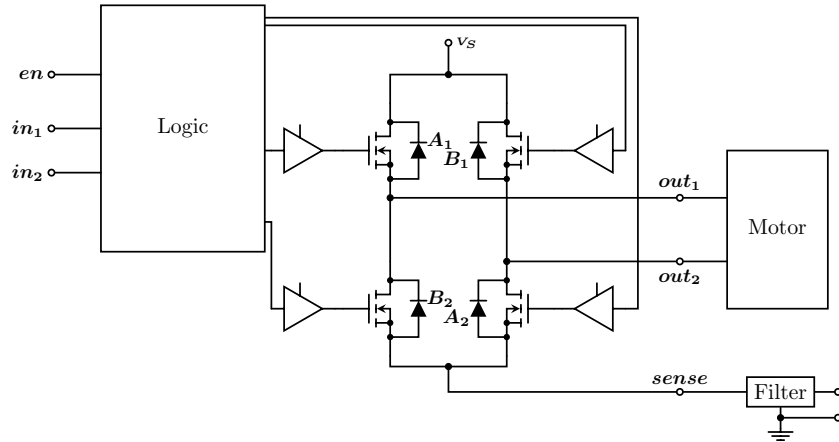


Figura A.1: Puente en H

La implementación hardware consiste en un puente en H de dispositivos MOSFET.

El puente en H tiene dos cargas importantes: la del motor DC cuyas ecuaciones se recogen en la Sección 2.1 y la de un filtro paso bajo cuya finalidad es servir de sensor de la corriente eléctrica en el motor. En este escrito no se estudia este filtro. La carga del motor es fundamentalmente inductiva.

Llamaremos **Zona  $Z^+$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_1$  y  $A_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $B_1$  y  $B_2$  se encuentren en su región de corte, y **Zona  $Z^-$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $B_1$  y  $B_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_1$  y  $A_2$  se encuentren en su región de corte.

En las Figuras A.2 y A.3 se representan las corrientes que circulan por el puente en H cuando los MOSFET se encuentran en las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$  respectivamente.

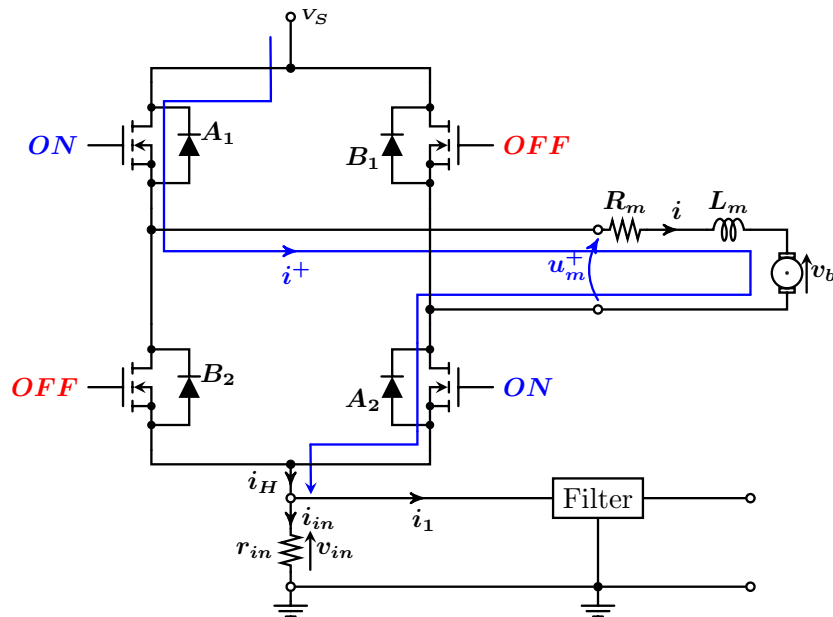


Figura A.2: Zona  $Z^+$

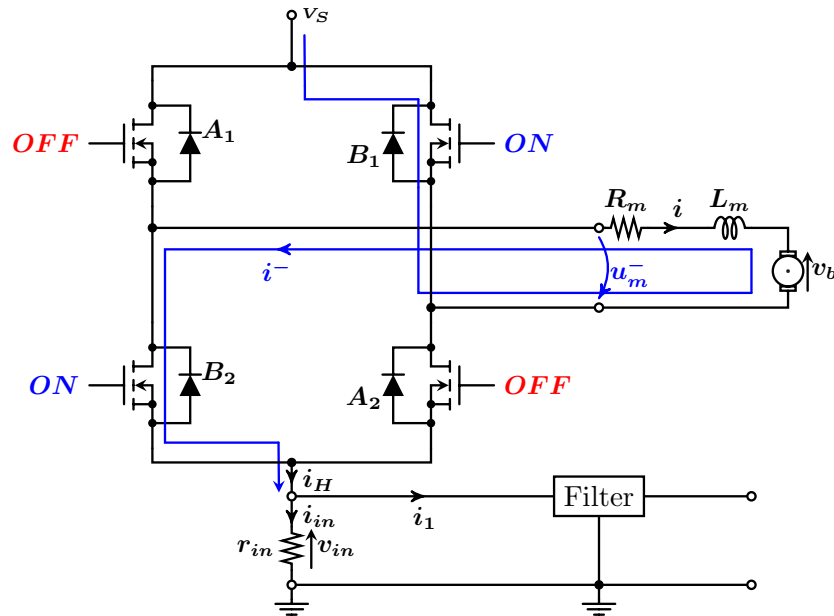


Figura A.3: Zona  $Z^-$

Llamaremos **Zona  $Z_1$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_1$  y  $B_1$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_2$  y  $B_2$  se encuentren en su región de corte, y **Zona  $Z_2$**  al periodo de tiempo en que los MOSFET,s  $A_2$  y  $B_2$  se encuentren en su región óhmica y los MOSFET,s  $A_1$  y  $B_1$  se encuentren en su región de corte.

La zona  $Z_1$  es preferible a la zona  $Z_2$  cuando haya una resistencia para la medida de la corriente, ya que se reducen las pérdidas en ella. No obstante, en ambos casos se logra un cortocircuito entre las bornas del motor, ya que ellas se encuentran, idealmente, a la misma tensión. Hay que tener en cuenta que aunque la tensión sea nula a la entrada del motor, puede circular corriente eléctrica, ya que se trata de un sistema dinámico con condiciones iniciales no nulas.

Lo que nunca se debe hacer es cortocircuitar la fuente de alimentación. Esto puede ocurrir cuando todos los MOSFET,s estén simultáneamente en la región óhmica. Como consecuencia, si se realiza una PWM que exija conmutar de las zonas  $Z^+$  a  $Z^-$  o al revés, se corre el riesgo de que se produzca esta situación. En este caso debe introducirse un tiempo muerto intermedio, definido como la situación en que todos los MOSFET,s se encuentren en corte. Este tiempo muerto debe ser lo más pequeño posible para que no produzca un excesivo rizado en la corriente eléctrica. Por esta razón llamaremos **Zona  $Z_0$**  al periodo de tiempo en que todos los MOSFET,s se encuentren en corte.

La PWM que consideraremos en este escrito, consiste en la conmutación periódica entre algunas de estas zonas. En la Sección siguiente se verán dos tipos de PWM con formas de conmutación distintas.

La parte lógica del puente en H se encarga de generar las señales adecuadas a los MOSFET con el fin de que se encuentren en la región óhmica o en la región de corte, o lo que es lo mismo, de la lógica de conmutación entre zonas. Sus entradas principales son dos señales  $in_1$  e  $in_2$  que representan las señales PWM de baja potencia generadas, normalmente, por un microcontrolador.



## B. Tipos de PWM

Para la generación de la señal PWM es necesario conocer el periodo de modulación constante  $T_m$  y la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ , donde  $\gamma_k \in [0, 1]$ . La anchura del pulso se calcula a partir de la señal generada por el controlador  $u_k$ , de tal manera que la entrada al motor o señal PWM,  $u_m(t)$ , satisfaga ciertas condiciones. En lo que sigue solo se contempla el caso en que el promedio temporal de la señal  $u_m(t)$  coincida con la señal de control  $u_k$  en cada periodo de modulación, es decir, que se satisfaga la relación siguiente:

$$u_k = \frac{1}{T_m} \int_{kT_m}^{(k+1)T_m} u_m(t) dt \quad (\text{B.1})$$

Aplicando este criterio se obtiene la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$  en cada periodo de modulación  $T_m$ . Este criterio solamente garantiza que las señales  $u_m(t)$  y  $u_k$  coinciden a bajas frecuencias, es decir, en el régimen permanente. Normalmente, en la práctica, la señal de control  $u_k$  se mantendrá constante durante un periodo de muestreo  $T$ , donde  $T = NT_m$ , siendo  $N$  una constante. Por lo tanto, se producirá una secuencia de  $N$  pulsos idénticos en la señal  $u_m(t)$ . Si  $N$  es suficientemente elevado el criterio del promedio, dado por B.1, será una buena aproximación de la reconstrucción analógica de la señal muestreada  $u_k$ , ya que la señal PWM será aproximadamente una señal periódica de periodo  $T_m$ , y la PWM funcionará como una aproximación causal de un filtro paso bajo ideal.

Para cualquier tipo de modulación PWM que se considere se producirá una señal discontinua en los instantes de tiempo  $kT_m$ , y un paso por cero en los instantes de tiempo  $\mathcal{T}_k$  excepto en los casos en que  $\gamma_k = 0$  o  $\gamma_k = 1$ ,

$$\mathcal{T}_k = (\gamma_k + k)T_m, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{B.2})$$

La anchura del pulso en cada periodo de modulación es  $\gamma_k T_m = \mathcal{T}_k - kT_m$ .

En este documento se van a considerar dos tipos de PWM, según sea la forma de generar la señal PWM,  $u_m(t)$ .

### 1. PWM de tres niveles o PWM unipolar.

En la Figura B.1 se muestra un ejemplo de señal PWM,  $u_m(t)$ , con PWM unipolar, donde la señal generada por el controlador es  $u_k$ . Esta clase de PWM es de tres niveles  $\{U_m, 0, -U_m\}$ . La señal  $u_m(t)$  es positiva o nula cuando  $u_k \geq 0$ , y es negativa o nula cuando  $u_k \leq 0$ .

Aplicando la expresión dada por B.1 se obtiene la ecuación que permite obtener la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ ,

$$|u_k| = \gamma_k U_m \quad (\text{B.3})$$

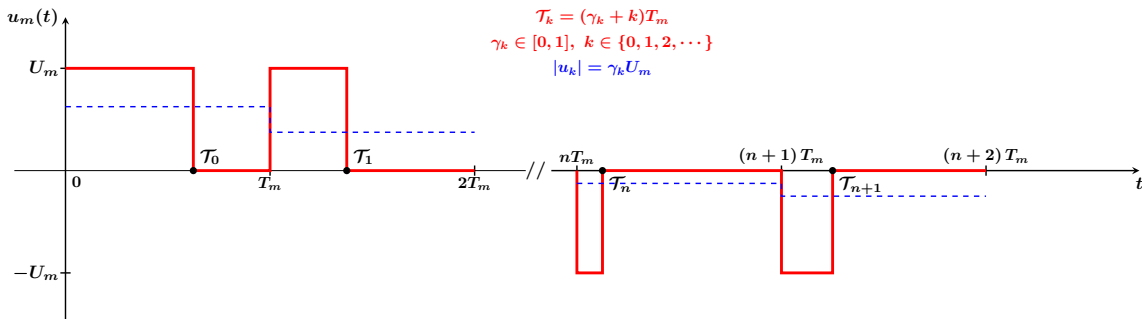


Figura B.1: Ejemplo de señal PWM unipolar ideal

En la Figura B.2 se muestra la secuencia lógica de conmutación de este tipo de PWM ideal. Las zonas  $Z_1$  y  $Z_2$  se han subdividido cada una de ellas en dos zonas, zonas  $Z_1^+$  y  $Z_1^-$  según que se haya dado inmediatamente antes la situación de las zonas  $Z^+$  y  $Z^-$ , respectivamente, y zonas  $Z_2^+$  y  $Z_2^-$  según que se haya dado inmediatamente antes la situación de las zonas  $Z^+$

y  $Z^-$ , respectivamente. La zona  $Z_2^+$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^+$  a  $Z^-$ , y la zona  $Z_2^-$  solo opera cuando se realiza una conmutación de  $Z^-$  a  $Z^+$ .

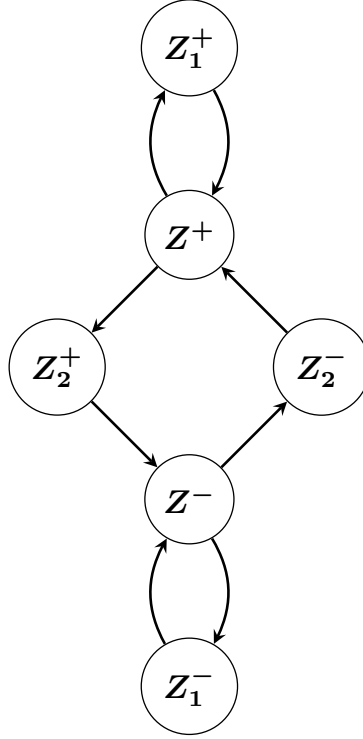


Figura B.2: Ejemplo de señal PWM unipolar ideal

## 2. PWM de dos niveles o PWM bipolar.

En la Figura B.3 se muestra un ejemplo de señal PWM con PWM bipolar, donde la señal generada por el controlador es  $u_k$ . Esta clase de PWM es de dos niveles  $\{U_m, -U_m\}$ .

Aplicando la expresión dada por B.1 se obtiene la ecuación que permite obtener la anchura del pulso  $\gamma_k T_m$ ,

$$u_k = (2\gamma_k - 1)U_m \quad (\text{B.4})$$

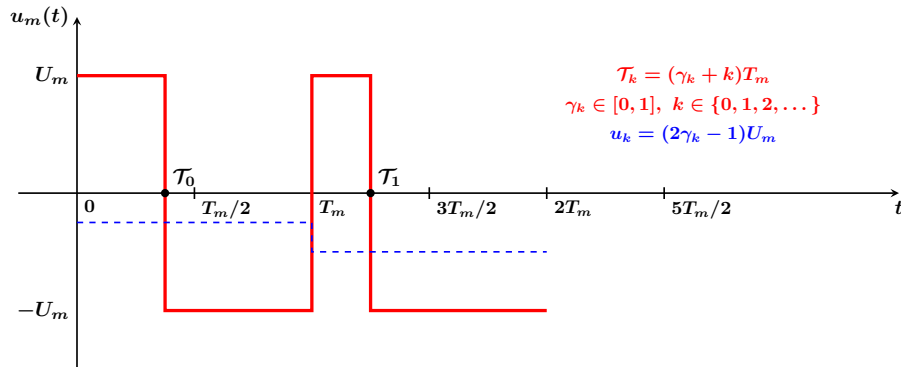


Figura B.3: Ejemplo de señal PWM bipolar ideal

En la Figura B.4 se muestra la secuencia lógica de conmutación de este tipo de PWM ideal.

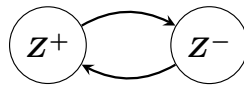


Figura B.4: Secuencia lógica del puente en H con PWM bipolar ideal

## C. Modelo CVS de fricción de un motor DC

El modelo clásico de fricción o **modelo CVS** (Coulomb plus Viscous plus Static friction) consta de tres componentes, el par de fricción seca o fricción de Coulomb  $\tau_{fC}$ , el par de fricción viscosa  $\tau_{fV}$  y el par de fricción estática  $\tau_{fS}$  (stiction o static friction),

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + \tau_{fS}(t) \quad (\text{C.1})$$

donde

$$\tau_{fV}(t) = B_m \dot{\theta}_m(t) \quad (\text{C.2a})$$

$$\tau_{fC}(t) = \tau_C \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m(t)) \quad (\text{C.2b})$$

$$\tau_{fS}(t) = \begin{cases} k_m i(t) - \tau_l(t), & k_m |i(t)| \leq \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = \ddot{\theta}_m(t) = 0 \\ \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t), & k_m |i(t)| > \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = 0, \quad \ddot{\theta}_m(t) \neq 0 \\ 0, & \dot{\theta}_m(t) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.2c})$$

Los parámetros  $(B, \tau_C, \tau_S)$  representan las constantes de fricción viscosa, de Coulomb y estática respectivamente.

La función signo,  $\operatorname{sgn} x$ , para cualquier función  $x$ , se define como

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Cuando  $x \neq 0$ , la función signo puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} \quad (\text{C.4})$$

Un modelo de fricción, también clásico, incluye el efecto de Stribeck que se produce a velocidades angulares cercanas al cero. Incluyendo este efecto, el par de fricción  $\tau_f(t)$  suele representarse en la forma,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\left| \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_{St}} \right|^{\delta_{St}}} \quad (\text{C.5})$$

donde ahora  $\tau'_{fS}(t) = \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t)$ , y donde  $\dot{\theta}_{St}$  es la velocidad angular de Stribeck y  $\delta_{St}$  la constante de Stribeck. El factor exponencial de la derecha es despreciable cuando las velocidades angulares superan un cierto valor pequeño.

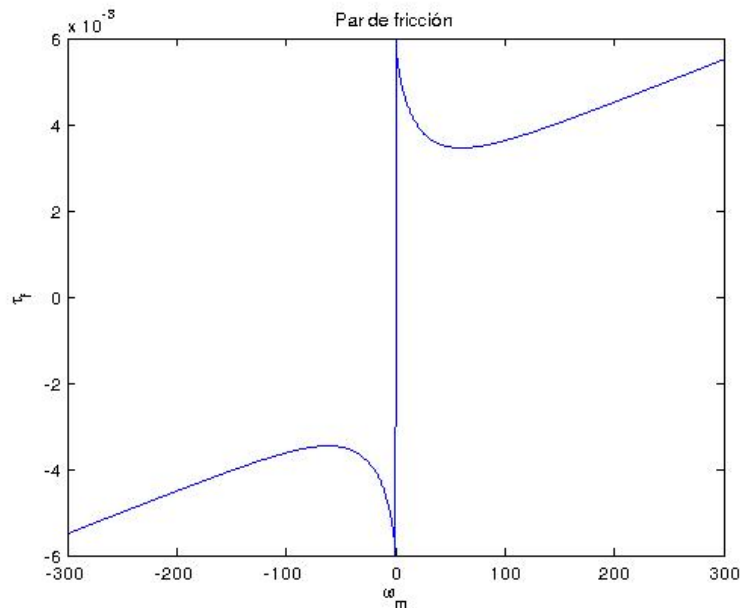


Figura C.1: Par de fricción dado por C.5 en función de  $\dot{\theta}_m$

En la Figura C.1 se muestra la curva del par de fricción  $\tau_f$  en función de  $\dot{\theta}_m$ , dado por la función C.5. Esta curva se ha obtenido con valores arbitrarios, concretamente con  $\tau_S = 0,006$ ;  $B_m = 0,00001$ ;  $\tau_C = 0,0025$ ;  $\dot{\theta}_{St} = 20rpm$ ;  $\delta_{St} = 0,75$ . Se ha supuesto también que  $\tau_l = \ddot{\theta}_m = 0$  y que  $\text{sgn}(i) = \text{sgn}(\dot{\theta}_m)$ . Puede observarse que se ha elegido  $\tau_S > \tau_C$  como suele ser el caso en los motores reales.

El modelo CVS, es decir, sin considerar el efecto de Stribeck, puede simularse aproximadamente con la ecuación,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\alpha|\dot{\theta}_m(t)|} \quad (C.6)$$

donde  $\alpha$  sea un valor muy elevado.

El par de fricción estática actúa cuando el eje del motor está inmóvil o cuando hay un cambio en el sentido de giro del eje del motor (cuando la aceleración angular  $\ddot{\theta}_m(t) \neq 0$ ). Como vemos, lo que hace el par de fricción estática  $\tau_{fS}$  en la situación de arranque del motor, es impedir el movimiento del eje del motor hasta que la corriente eléctrica supere un valor constante. La variación temporal se debe a la variación de la corriente eléctrica  $i(t)$ , es decir que en el arranque,  $i(t) \neq 0$ , y puede calcularse a partir de la ecuación eléctrica del motor.

En esta situación de fricción estática la ecuación eléctrica toma la forma

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} \quad (C.7)$$

Si se hace  $u_m(t) = U_a$ , donde  $U_a$  es una constante, la corriente eléctrica tenderá en régimen permanente a un valor  $U_a/R_m$ . Si este valor es menor que  $\tau_S/k_m$  el motor permanecerá inmóvil. Esto significa que habrá una tensión de arranque (break-away voltage o starting voltage) a partir de la cual el motor comenzará a moverse, pero permanecerá inmóvil por debajo de ella. Este fenómeno puede apreciarse introduciendo al motor una tensión en forma de rampa de pequeña pendiente. Se producirá entonces un retardo temporal en la velocidad angular del motor, que durará hasta que la corriente eléctrica alcance un determinado valor.

Llamaremos  $\tau_c(t)$  a

$$\tau_c(t) = \tau_{fS}(t) + \tau_{fC}(t) + \tau_l(t) \quad (C.8)$$

Con esta definición la ecuación mecánica del motor queda representada en la forma

$$k_m i(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \tau_c(t) \quad (C.9)$$

## D. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad

Consideremos que la carga está unida al eje del motor a través de un mecanismo reductor de factor de reducción  $r \in (0, 1)$  y rendimiento  $\eta \in (0, 1)$  (o expresado en tanto por ciento). Entonces la velocidad angular  $\theta_L(t)$  y el par de la carga  $\tau_L(t)$  a la salida del reductor estarán relacionados con  $\theta_m(t)$  y  $\tau_l(t)$  en el eje del motor (o entrada del reductor) según las siguientes expresiones:

$$\theta_L(t) = r\theta_m(t) \quad (D.1a)$$

$$\tau_L(t) = \frac{\eta}{r}\tau_l(t) \quad (D.1b)$$

Consideremos que la carga es un cuerpo rígido cuya ecuación dinámica puede ser expresada en la forma

$$\tau_L(t) = J_L \frac{d^2\theta_L(t)}{dt^2} + \tau_g(t) \quad (D.2)$$

donde  $J_L$  es el momento de inercia de la carga y  $\tau_g(t)$  es una función no lineal dependiente de la posición angular  $\theta_L(t)$  que representa los efectos gravitacionales<sup>2</sup>.

Podemos expresar esta ecuación en términos de  $\theta_m(t)$  y  $\tau_l(t)$ ,

$$\tau_l(t) = \frac{r^2 J_L}{\eta} \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (D.3)$$

Introduciendo esta ecuación en la ecuación mecánica del motor dada por 2.2

$$k_m i(t) = J_{eff} \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \tau'_c(t) \quad (D.4)$$

donde  $J_{eff}$  se denomina momento de inercia eficaz,

$$J_{eff} = J_m + \frac{r^2 J_L}{\eta} \quad (D.5a)$$

$$\tau'_c(t) = \tau_{fs} + \tau_{fc} + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (D.5b)$$

A partir de estas expresiones puede rehacerse el modelado del motor sin carga. La constante de tiempo mecánica del motor con carga se modificará con respecto al motor sin carga, pero los parámetros  $R_m, L_m, J_m, k_b, k_m, B_m, I_0, n_0, t_e$  seguirán siendo los mismos.

Podemos observar que el momento de inercia del motor se refleja a la entrada del reductor con un coeficiente que será tanto más pequeño cuanto menor sea el factor de reducción. Por ejemplo, un reductor que se adapta al motor estudiado en el ejemplo de la Sección 2.5, tiene un factor de reducción  $r = \frac{1}{18,2}$  con un rendimiento  $\eta = 73\%$  y una masa  $m_r = 71 \times 10^{-3} kg$ . Puede comprobarse

que  $\frac{r}{\eta} = 0,07527$  y  $\frac{r^2}{\eta} = 0,00414$  por lo que el efecto inercial y gravitatorio de la carga visto desde el eje del motor se reducen mucho. No obstante no debe despreciarse ninguno de ellos si se desea una gran precisión, además de que normalmente el momento de inercia del motor  $J_m$  suele ser muy pequeño.

Para el cálculo de  $J_L$  puede hacerse la suposición aproximada de que la masa del reductor forma parte de ella. Por ejemplo, si la carga es un disco plano, el momento de inercia respecto de su eje central viene dado por la ecuación  $I_0 = \frac{1}{8}md^2$ , siendo  $d$  su diámetro y  $m$  su masa. Por lo tanto, puede hacerse la aproximación

$$J_L = \frac{1}{8}(m_{disco} + m_{reductor})d^2$$

donde  $m_{reductor}$  debe ser la masa de la parte rotatoria del reductor, es decir que no coincide con  $m_r$  que es la masa total del reductor.

<sup>2</sup>En un sistema mecánico pueden aparecer también términos de Coriolis dependientes de la velocidad angular. Si la carga es un sistema mecánico de varios grados de libertad el momento de inercia no será constante sino que dependerá de la posición angular.

En la práctica el cálculo de los parámetros de la carga no es sencillo y en muchas ocasiones no se dispone de los valores necesarios. Este hecho sugiere la necesidad de realizar estudios experimentales para el cálculo de los polos del motor con carga.

Una consecuencia de este estudio es que si se realizase un experimento para obtener el polo dominante podría estimarse el valor de  $J_{eff}$ , y de aquí, si se conociese el diámetro del disco, podría obtenerse una estimación de su masa, lo que puede resultar conveniente para conocer aproximadamente el valor del par debido a los efectos gravitacionales. Si el centro de masas de la carga se situase en el eje de rotación del motor, el efecto gravitacional será nulo. En la práctica esto no es así, pero puede suponerse en una primera aproximación nulo cuando la carga sea un disco o un cuerpo con simetría de revolución cuyo centro de masas cae en el eje del motor.

En el ejemplo de la Sección 2.5, con el reductor seleccionado anteriormente, se obtiene un valor de  $J_{eff} = 1,47 \times 10^{-6} Kg/m^2$ . Estos calculos se han realizado suponiendo que la carga es un disco de aluminio de anchura  $a = 1,5mm$  y diámetro  $d = 7,5cm$ , y se ha calculado de manera arbitraria  $m_{reductor} = 0,1m_r$  ya que no se dispone de información. La densidad del aluminio es  $\rho = 2700Kg/m^3$ . La constante de tiempo mecánica eficaz es  $t_{meff} = 0,0158s$ , por lo que el polo del modelo simplificado con el método de eliminación de la constante eléctrica es  $p_{eff} = -63,38$ .

Para el cálculo de  $t_{meff}$  se ha aplicado la expresión 2.15

$$t_{meff} = \frac{R_m J_{eff}}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (D.6)$$

## E. Obtención analítica del polo del motor con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas

De acuerdo con el modelo simplificado del motor,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = Ku(t) \quad (\text{E.1})$$

donde  $\theta_m(t)$  representa la posición angular del motor.

La función de transferencia de posición angular es,

$$G_{\theta_m}(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{E.2})$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la posición angular bajo condiciones iniciales nulas es,

$$\Theta_m(s) = G_{\theta_m}(s)U(s) \quad (\text{E.3})$$

Supongamos que se hace un experimento que consiste en aplicar al motor una tensión constante  $U$ , entonces

$$\Theta_m(s) = \frac{KU}{s^2(s+p)} \quad (\text{E.4})$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\Theta_m(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s+p} \quad (\text{E.5})$$

donde

$$\alpha_1 = -\frac{KU}{p^2} \quad (\text{E.6a})$$

$$\alpha_2 = \frac{KU}{p} \quad (\text{E.6b})$$

$$\alpha_3 = -\alpha_1 \quad (\text{E.6c})$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, podemos escribir  $\theta_m(t)$  en la forma

$$\theta_m(t) = \frac{KU}{p} \left( t - \frac{1}{p} (1 - e^{-pt}) \right) \quad (\text{E.7})$$

Derivando con respecto al tiempo esta expresión se obtiene la velocidad angular,

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{KU}{p} (1 - e^{-pt}) \quad (\text{E.8})$$

Podemos comprobar que el valor final de la velocidad angular es,

$$\dot{\theta}_m(\infty) = \frac{KU}{p} \quad (\text{E.9})$$

Sustituyendo E.8 y E.9 en E.7,

$$\theta_m(t) = \dot{\theta}_m(\infty)t - \frac{\dot{\theta}_m(t)}{p} \quad (\text{E.10})$$

Despejando  $p$  de la relación E.10,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_m(\infty)t - \theta_m(t)}, \quad t > 0 \quad (\text{E.11})$$



## F. Obtención analítica del polo del motor con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas

De acuerdo con el modelo simplificado del motor,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = Ku(t) \quad (\text{F.1})$$

La función de transferencia de posición angular es,

$$G_{\theta_m}(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{F.2})$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la posición angular bajo condiciones iniciales no nulas es,

$$\Theta_m(s) = G_{\theta_m}(s)U(s) + \frac{\theta_m(0^-)s + \dot{\theta}_m(0^-) + p\theta_m(0^-)}{s(s+p)} \quad (\text{F.3})$$

Supongamos que se hace un experimento que consiste en “apagar” bruscamente el motor cuando éste se encuentre con unas condiciones iniciales  $(\theta_m(0^-), \dot{\theta}_m(0^-))$ , entonces

$$\Theta_m(s) = \frac{\theta_m(0^-)s + \dot{\theta}_m(0^-) + p\theta_m(0^-)}{s(s+p)} \quad (\text{F.4})$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\Theta_m(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+p} \quad (\text{F.5})$$

donde

$$\alpha_1 = \theta_m(0^-) + \frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} \quad (\text{F.6a})$$

$$\alpha_2 = -\frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} \quad (\text{F.6b})$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, podemos escribir  $\theta_m(t)$  en la forma

$$\theta_m(t) = \theta_m(0^-) + \frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} (1 - e^{-pt}) \quad (\text{F.7})$$

Derivando con respecto al tiempo esta expresión se obtiene la velocidad angular,

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}_m(0^-)e^{-pt} \quad (\text{F.8})$$

Podemos comprobar que, si la condición inicial es el valor final de otro experimento, es decir,  $\dot{\theta}_m(0^-) = \dot{\theta}_{m,\infty} = \frac{KU}{p}$ , se cumple, utilizando la expresión E.8, que  $\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)$  coincide con la relación F.8,

$$\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t) = \frac{KU}{p}e^{-pt} = \dot{\theta}_{m,\infty}e^{-pt} \quad (\text{F.9})$$

Lo que esto significa, es que idealmente, las curvas de subida y de bajada de una señal cuadrada dan los mismos resultados. Sin embargo, debido a que los errores que se comenten en uno u otro experimento son distintos, ya que la subida se ve afectada al comienzo por la fricción, y la bajada es al final, puede ocurrir que, en la práctica, el comportamiento sea distinto en una y otra situación.

También podemos comprobar que el valor inicial de la velocidad angular coincide con la condición inicial, y que el valor final es nulo,

$$\dot{\theta}_m(0^+) = \dot{\theta}_m(0^-) \quad (\text{F.10a})$$

$$\dot{\theta}_m(\infty) = 0 \quad (\text{F.10b})$$

Este resultado es el esperado, ya que el motor es un sistema continuo que, al “apagarlo”, se termina deteniendo.

Sustituyendo F.8 en F.7,

$$\theta_m(t) = \theta_m(0^-) + \frac{1}{p} \left( \dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t) \right) \quad (\text{F.11})$$

Despejando  $p$  de la relación F.11,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t)}{\theta_m(t) - \theta_m(0^-)}, \quad t > 0^- \quad (\text{F.12})$$

## G. Obtención analítica del polo del motor con una señal de entrada cuadrada

Supongamos que el experimento se ha realizado de tal manera que la condición inicial se haya obtenido aplicando una señal de entrada escalón al motor bajo condiciones iniciales nulas de duración suficiente como para que se haya alcanzado el régimen permanente, y que en el instante de tiempo  $t_0$  se “apaga” bruscamente el motor. Es decir, que se ha realizado un experimento con una señal cuadrada. Entonces se cumplirá la relación E.11 donde  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}$  siendo  $\dot{\theta}_{m,\infty}$  el valor de la velocidad angular en el régimen permanente cuando la entrada ha sido una señal escalón. De aquí que las igualdades E.11 y F.12 deban coincidir en el caso ideal,

$$p = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t_0)} = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)}{\theta_m(t) - \theta_m(t_0)} \quad (G.1)$$

De la igualdad de la izquierda de G.1, se obtiene que

$$\theta_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{p} \quad (G.2)$$

Sustituyendo esta relación en la expresión de la derecha de G.1, y simplificando, se obtiene que,

$$1 = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)}{p \left( \theta_m(t) - \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 \right) + \dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (G.3)$$

Despejando  $p$  de G.3,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t)}, \quad t \geq t_0 \quad (G.4)$$

Sabemos que el motor se detiene cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir que  $\dot{\theta}_m(\infty) = 0$ . Puesto que el polo debe tener un valor finito, necesariamente  $\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(\infty) = 0$ . Como consecuencia, la posición angular final del motor vendrá dada por la expresión,

$$\theta_m(\infty) = \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 \quad (G.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión G.4, se deberá cumplir que en  $t = t_0$ ,  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}$  y

$$p = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t_0)} \quad (G.6)$$

La expresión G.6 puede escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = t_0 - \frac{\theta_m(t_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} = \left( 1 - \frac{\theta_m(t_0)}{\theta_m(\infty)} \right) t_0 \quad (G.7)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación G.5.

Supongamos que el motor se detiene en  $t \geq t_p$ , entonces  $\theta_m(\infty) = \theta_m(t_p)$ . De aquí que la relación G.7 también pueda escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta_m(t_p) - \theta_m(t_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (G.8)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación G.5.

## H. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas

Al realizar un experimento con un microcontrolador se obtiene una secuencia de valores discretos de la salida del motor, por lo que la aplicación de la relación E.11 puede dar lugar a valores del polo dependientes del tiempo discreto. Es decir, haciendo  $t = t_k$  en la relación E.11,

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(t_k)}{\dot{\theta}_m(\infty)t_k - \theta_m(t_k)} \quad (\text{H.1})$$

donde  $k \in \{0, 1, \dots\}$  representa un índice temporal.

En general, los instantes de tiempo en los que se realizan las medidas no están uniformemente separados, pero si las medidas se hiciesen uniformemente en el tiempo con un periodo de muestreo constante  $T$ , entonces  $t_k = kT$ .

Por otro lado, si solo se han realizado medidas de posición, no se conoce la velocidad angular, por lo que deberá hacerse alguna aproximación sobre su valor. Supongamos que se utiliza la primera aproximación de Euler de la derivada, es decir,

$$\dot{\theta}_m(t_k) \approx \frac{\theta_m(t_k) - \theta_m(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \quad (\text{H.2})$$

Hay que tener en cuenta que, para  $k = 0$ , no es posible obtener la velocidad angular a partir de esta expresión. Pero puesto que el experimento se está haciendo bajo condiciones iniciales nulas,  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_m(0) = 0$ .

Supongamos también que las medidas de la posición angular no vienen dadas en radianes, sino por el número de pulsos de un encoder incremental situado en el eje del motor. Entonces, para  $k > 0$ ,

$$p(t_k) \approx \frac{N_m(t_k) - N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) \left( \frac{q\dot{\theta}_m(\infty)}{2\pi} t_k - N_m(t_k) \right)} \quad (\text{H.3})$$

donde  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

## I. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas

En esta Sección se seguirá el mismo procedimiento que en la Sección H, pero para el caso estudiado en la Sección F donde el polo viene dado por la expresión F.12.

La aplicación de la relación F.12, haciendo  $t = t_k$ , es

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t_k)}{\theta_m(t_k) - \theta_m(0^-)} \quad (I.1)$$

donde  $k \in \{0, 1, \dots\}$  representa un índice temporal.

Supongamos que solo se han realizado medidas con un encoder incremental situado en el eje del motor y que la velocidad angular se aproxima por la primera aproximación de Euler de la derivada. Entonces,

$$p(t_k) \approx \frac{\frac{q\dot{\theta}_m(0)}{2\pi} (t_k - t_{k-1}) - N_m(t_k) + N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) (N_m(t_k) - N_m(0))} \quad (I.2)$$

donde  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

Si el valor de la velocidad angular inicial  $\dot{\theta}_m(0)$  no se ha podido obtener como una medida sino como un cálculo a partir de la medida de posición angular de un encoder incremental, entonces se puede utilizar la primera aproximación de Euler de la derivada, pero será necesario conocer el valor  $\theta_m(t_{-1})$ . Este valor no será, en general, nulo, y dependerá de cómo se haya alcanzado el estado inicial.

## J. Discretización del polo del motor obtenido con una señal de entrada cuadrada

La expresión de  $p(t_k)$  bajo el supuesto de que la señal de entrada es una señal cuadrada, es decir, a partir de la relación dada por G.4, viene dada por

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(t_k)}{\dot{\theta}_{m,\infty} t_0 - \theta_m(t_k)}, \quad t_k \geq t_0 \quad (\text{J.1})$$

Suponiendo que se realizan medidas con un encoder incremental, y se aproxima la velocidad angular por la primera aproximación de Euler de la derivada,

$$p(t_k) = \frac{N_m(t_k) - N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) \left( \frac{q \dot{\theta}_{m,\infty} t_0}{2\pi} - N_m(t_k) \right)} \quad t_k \geq t_0 \quad (\text{J.2})$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

Por último, la relación G.8 permite obtener un valor del polo con valores extremos de la respuesta a una señal cuadrada.

El promedio temporal de la velocidad angular de toda la trayectoria de bajada, utilizando la aproximación de Euler de la derivada, viene dado por

$$\bar{\dot{\theta}} = \frac{\sum_{j=k_0+1}^{k_p} (\theta(j) - \theta(j-1))}{T(k_p - k_0)} \quad (\text{J.3})$$

donde se ha hecho  $t_p = k_p T$  y  $t_0 = k_0 T$  siendo  $t_p$  el instante de tiempo en que el motor se detiene.

Puesto que

$$\sum_{j=k_0+1}^{k_p} (\theta(j) - \theta(j-1)) = \theta(k_p) - \theta(k_0) \quad (\text{J.4})$$

la relación G.8 puede escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = \frac{T(k_p - k_0) \bar{\dot{\theta}}}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{J.5})$$

Si  $k_f \geq k_p$  con el motor parado, conviene escribir la expresión J.5 en la forma

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta(k_f) - \theta(k_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{J.6})$$