La Prueba ZIP de Conway del Teorema de Clasificación de Superficies

Juan Valero Oliet

Universidad Complutense de Madrid

Dirigido por: Manuel Alonso Morón

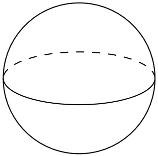
16 de octubre de 2020

Introducción al trabajo

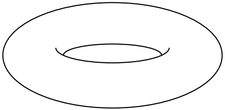
Teorema (Clasificación de Superficies)

Sea S una superficie compacta y conexa. Entonces S es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

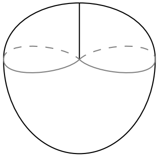
- La esfera $\mathbb{S}^2$.
- Una suma conexa de copias del toro $\mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2$.
- Una suma conexa de copias del plano proyectivo $\mathbb{P}^2 \# \ldots \# \mathbb{P}^2$.



(a) $\mathbb{S}^2$



(b) $\mathbb{T}^2$



(c) $\mathbb{P}^2$

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard
- 1915 - Alexander
- 1920 - Brahana
- 1925 - Radó

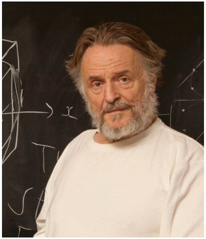
Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard
- 1915 - Alexander
- 1920 - Brahana
- 1925 - Radó

Textos de hoy en día $\longrightarrow$ Seifert - Threlfall.

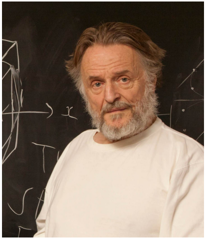
Prueba ZIP

- 1999 $\longrightarrow$ artículo de Francis y Weeks.
- John H. Conway (1937-2020).
- Prueba de Irrelevancia Cero.



Prueba ZIP

- 1999 $\longrightarrow$ artículo de Francis y Weeks.
- John H. Conway (1937-2020).
- Prueba de Irrelevancia Cero.

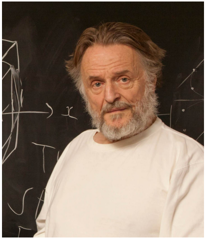


Ventajas

- Se basa en el concepto de suma conexa.
- Más intuitivo.

Prueba ZIP

- 1999 $\longrightarrow$ artículo de Francis y Weeks.
- John H. Conway (1937-2020).
- Prueba de Irrelevancia Cero.



Ventajas

- Se basa en el concepto de suma conexa.
- Más intuitivo.

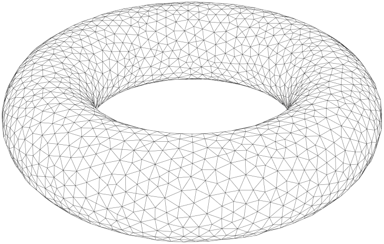
Problemas

- No se definen algunos conceptos utilizados.
- No se desarrollan en profundidad algunos resultados.
- No se demuestra que las superficies no sean homeomorfas entre sí.

Trabajo

- Estudiar los conceptos previos.
- Estudiar la demostración clásica.
- Tratamiento riguroso de la prueba ZIP.
- Completar con la segunda parte del teorema.

Triangulación



Teorema (Teorema de Radó)

Toda superficie es triangulable.

Teorema (Teorema de Schönflies)

Sea f un homeomorfismo entre dos curvas simples cerradas C y C'. Entonces f se puede extender a un homeomorfismo de todo el plano.

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen)

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.
- Triangular cada disco de forma que sea compatible con los anteriores.

Perforaciones

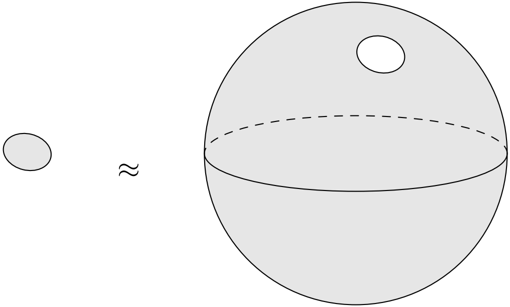


Figura: El disco cerrado como una esfera perforada.

Perforaciones

Proposición

Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

Proposición (Teorema de Clasificación)

Sean M_1 y M_2 superficies con borde compactas tales que ∂M_1 y ∂M_2 tienen el mismo número de componentes conexas. Entonces M_1 y M_2 son homeomorfas si y solo si las superficies M_1^* y M_2^* son homeomorfas.

Suma Conexa

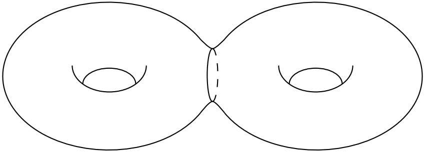


Figura: Suma conexa de dos toros.

1. Se consideran dos superficies M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada superficie $\longrightarrow$ superficies con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.
4. Relacionamos en $M_1^o \amalg M_2^o$ cada punto de ∂M_1^o con su imagen por f.
5. Al espacio cociente $M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}$ lo llamamos **suma conexa** de M_1 y M_2.

Representación de superficies

- Polígonos con aristas que se identifican.

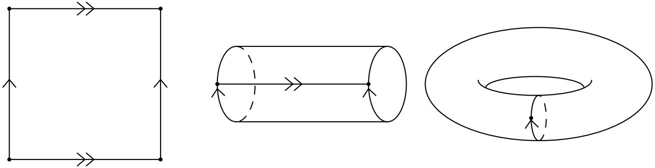


Figura: El toro como cociente de un cuadrado.

Representación de superficies

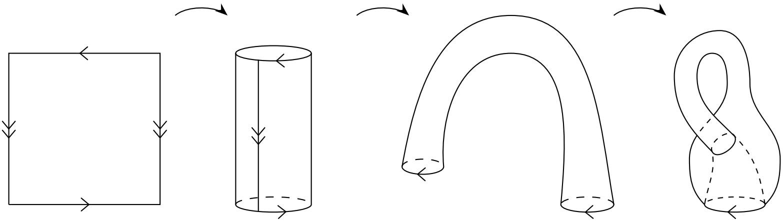
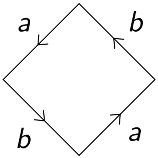
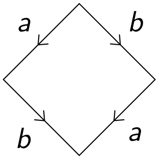


Figura: Construcción de la botella de Klein.

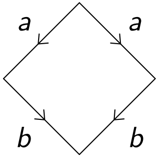
Representación de superficies



(a) El plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.



(b) El toro $\mathbb{T}^2$.



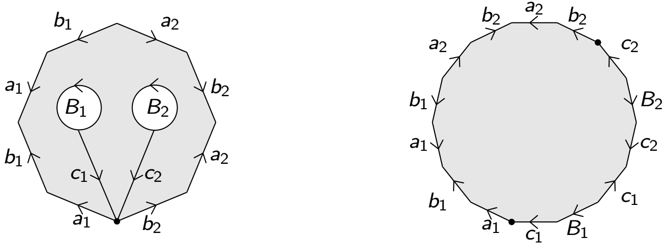
(c) La esfera $\mathbb{S}^2$.

(a) $\mathbb{P}^2 = \langle a, b \mid abab \rangle$.

(b) $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

(c) $\mathbb{S}^2 = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$.

Representación de superficies con borde

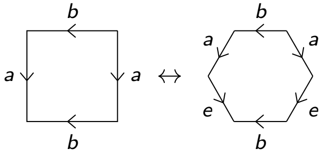


(a) (b)

Figura: La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con dos perforaciones.

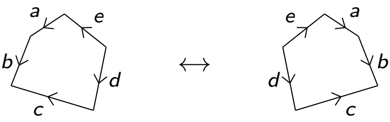
Operaciones elementales

Transformaciones sobre los polígonos que den lugar a superficies homeomorfas.

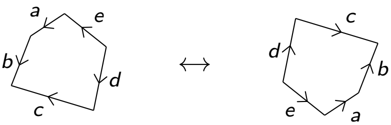


(a) Subdividir/Consolidar

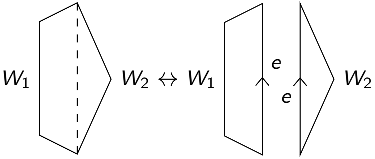
Operaciones elementales



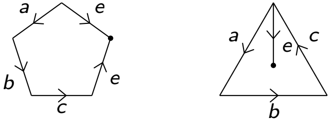
(a) Reflejar



(b) Rotar



(c) Cortar/Pegar



(d) Plegar/Desplegar

Prueba Clásica

Forma Normal

Se prueba que toda representación poligonal de una superficie se puede transformar en siete pasos en una de las siguientes:

(a) *Esfera*

$$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$$

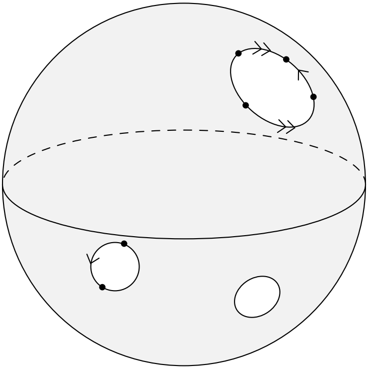
(b) *Suma conexa de n toros.*

$$\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de n planos proyectivos.*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_1 \ldots a_n a_n \rangle$$

Prueba ZIP



Definición (Cremalleras)

- Consideramos una identificación entre dos subconjuntos del borde de una superficie perforada.
- **cremallera**: cada uno de estos dos subconjuntos que se identifican.
- **par-zip**: el par formado por dos cremalleras que se identifican.

Prueba ZIP

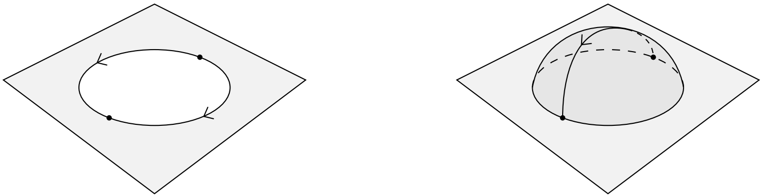


Figura: Construcción del *cap*.

Prueba ZIP

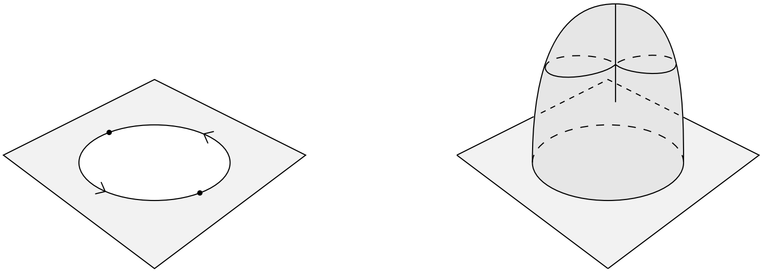


Figura: Construcción del *crosscap*.

Prueba ZIP

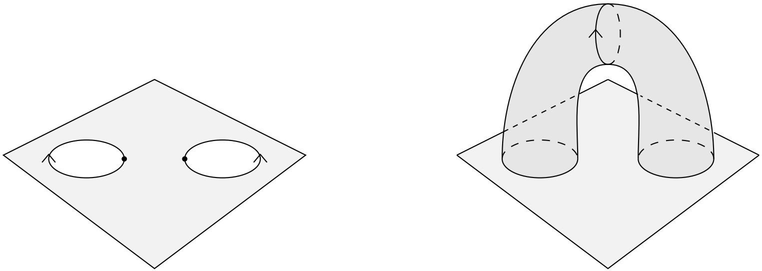


Figura: Construcción del *handle*.

Prueba ZIP

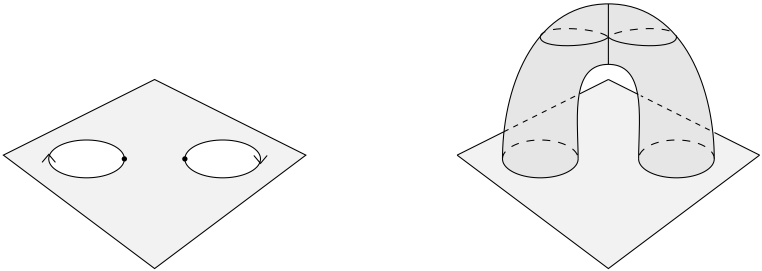
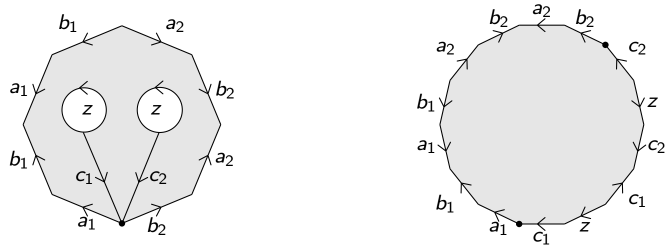


Figura: Construcción del *crosshandle*.

Representación de las superficies con cremalleras.



(a) (b)

Figura: La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con un crosshandle.

Prueba ZIP

Proposición

Sea M una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

a) M con un cap y M.

b) M con un crosscap y $M\#\mathbb{P}^2$.

c) M con un handle y $M\#\mathbb{T}^2$.

d) M con un crosshandle y $M\#K$ (siendo K la botella de Klein).

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación

Definición

Una superficie con borde se dice **ordinaria** si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Lema

Sea M una superficie con borde con un par-zip. Entonces, si M es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

- Las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad $\longrightarrow$ informal.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema (Clasificación de Superficies, versión preeliminar)

Toda superficie con borde compacta es ordinaria.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema (Clasificación de Superficies, versión preeliminar)

Toda superficie con borde compacta es ordinaria.

- Consideramos una triangulación de la superficie con borde.
- Ponemos una cremallera en cada 1-símplice que sea cara de dos 2-símplices.
- El conjunto de 2-símplices es una superficie ordinaria con cremalleras.
- Por inducción, vamos identificando las cremalleras una a una.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Lema (1)

Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Lema (2)

Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1*: Al menos hay un crosshandle en la superficie.

$\square$

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Lema (1)

Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Lema (2)

Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1*: Al menos hay un crosshandle en la superficie $\rightarrow$ esfera con crosscaps y handles.

$\square$

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Lema (1)

Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Lema (2)

Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1*: Al menos hay un crosshandle en la superficie $\rightarrow$ esfera con crosscaps y handles $\rightarrow$ esfera crosscaps y crosshandles.

$\square$

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Lema (1)

Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Lema (2)

Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1*: Al menos hay un crosshandle en la superficie $\rightarrow$ esfera con crosscaps y handles $\rightarrow$ esfera crosscaps y crosshandles $\rightarrow$ esfera con crosscaps.

Prueba ZIP: Demostración del Teorema de Clasificación.

Teorema

Toda superficie con borde compacta y conexa es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración.

Por la versión preeliminar del teorema $\longrightarrow$ toda superficie compacta conexa es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1*: Al menos hay un crosshandle en la superficie $\rightarrow$ esfera con crosscaps y handles $\rightarrow$ esfera crosscaps y crosshandles $\rightarrow$ esfera con crosscaps.
- *Caso 2*: No hay ni crosshandles ni crosscaps en la superficie $\rightarrow$ esfera con handles.

$\square$

Teorema de Clasificación, segunda parte

Idea

Grupos isomorfos tienen abelianizados isomorfos.

- Obtenemos las presentaciones de los grupos fundamentales a partir de las representaciones poligonales.
- Calculamos los abelianizados a partir de las presentaciones de los grupos fundamentales.
- Vemos que los abelianizados no son isomorfos.

Conclusiones

Conclusiones

- La representación nos ha permitido formalizar la prueba ZIP y demostrar la segunda parte del teorema.
- Cobinando herramientas de la prueba clásica hemos demostrado el teorema de clasificación de forma rigurosa con las ideas de Conway sin perder la parte intuitiva.