Universidad Complutense de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Oliet

Dirigido por:
Manuel Alonso Morón

Junio de 2020

Índice general

Capítulo 1

Definiciones preeliminares

1.1. Variedades

1.1.1. Variedades y superficies

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades.

Definición 1.1.1. Una ***variedad topológica*** (de ahora en adelante *variedad*) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente homeomorfo a R^n, para algún $n \geq 0$.

Como la propiedad "ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$" es local, toda propiedad local de $\mathbb{R}^n$ se traslada a una variedad. Así, las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

El *teorema de invarianza del dominio* dice que si $W \subset \mathbb{R}^n$ y $W' \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos y existe $\phi : W \to W'$ homeomorfismo, entonces $n = m$. Esto implica que, dado un punto $p \in X$ de una variedad, hay un único $n = n(p)$ tal que un entorno U^p es homeomorfo a un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$. Llamamos $n(p)$ la dimensión en p. Claramente, para todo punto $q \in U$ podemos tomar U como entorno de q, y por tanto $n(q) = n(p)$. Luego en toda la componente conexa de p, el n que aparece es el mismo, y lo llamaremos dimensión de dicha componente conexa. Nótese que si escribimos $X = \sqcup X_i$, con X_i componentes conexas de X, todas las X_i son variedades. Si todas las X_i tienen la misma dimensión n, entonces escribimos $n = dimX$, y decimos que X es una n-variedad.

Ejemplo 1.1.2.
- Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.
- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta $\mathbb{R}$ y el círculo $\mathbb{S}^1$

Definición 1.1.3. Una ***superficie*** es una 2-variedad.

Ejemplo 1.1.4.
- La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- El toro $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$

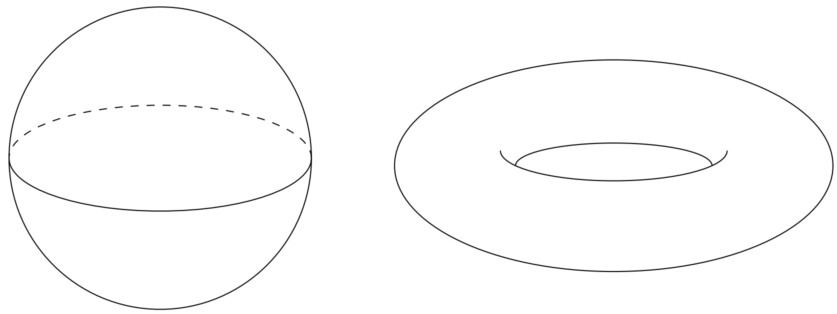
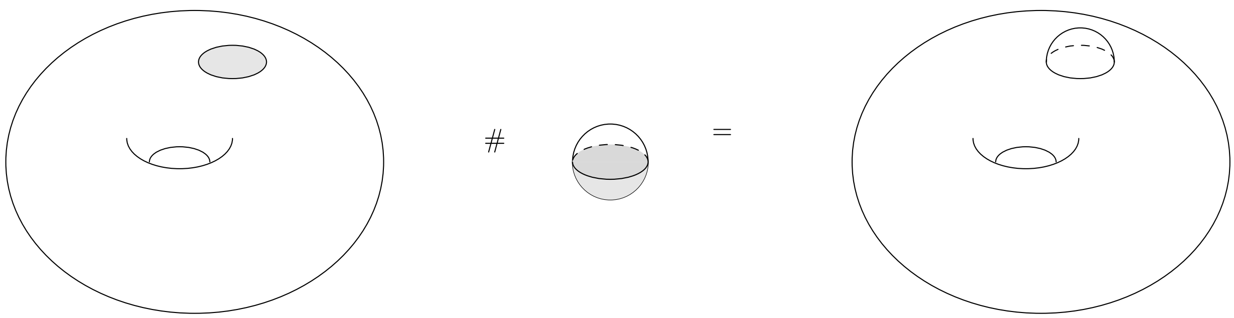


Figura 1.1: $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$



1.1.2. Suma conexa de variedades

Sean V_1 y V_2 dos n-variedades conexas. Dados $p_1 \in V_1$ y $p_2 \in V_2$ sean $U_1^{p_1} \subset V_1$, $U_2^{p_2} \subset V_2$ entornos de p_1 y p_2 respectivamente, y sean $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ dos homeomorfismos tales que $\phi_1(p_1) = 0$ y $\phi_2(p_2) = 0$. Si llamamos $B_1 = \phi_1^{-1}(B_1(0)) \subset V_1$ y $B_2 = \phi_2^{-1}(B_1(0)) \subset V_2$, consideremos $V_1^o = V_1 - B_1$, $V_2^o = V_2 - B_2$ y $V_1^o \sqcup V_2^o$ con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia $\sim$ en la que si $x_1 \in S_1 = \phi_1^{-1}(\partial B_1(0))$, $x_2 \in S_2 = \phi_2^{-1}(\partial B_1(0))$, entonces $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$, y se considera el cociente

$$X = \frac{V_1^o \sqcup V_2^o}{\sim}.$$

Definición 1.1.5. A X se le llama ***suma conexa*** de V_1 y V_2, y se denota por $X = V_1 \# V_2$.

Proposición 1.1.6. Sean V_1 y V_2 variedades. Entonces $X = V_1 \# V_2$ es una variedad.

Demostración. Denotemos la proyección $\pi : M_1^o \sqcup M_2^o \to X$. Sea $S = \pi(S_1) = \pi(S_2)$. Tenemosdos abiertos $U_j = M_j^o - S_j$, $j = 1, 2$ saturados. Por tanto, $\pi : U_j \to \pi(U_j) = U_j'$ es homeomorfismo. Esto implica que X es localmente $\mathbb{R}^n$ en los puntos de $U_1' \cup U_2'$. Además ahí la topología es Hausdorff y IIAN. Veamos ahora qué ocurre para un punto $p \in S$. Se tiene que $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$, $p_j \in S_j$, $j = 1, 2$, y $\varphi_j(p_j) = x_0 \in \partial B_1(0) \in \mathbb{R}^n$. Tomamos un entorno $V \subset \partial B_1(0)$ de x_0 en $\partial B_1(0)$, con lo que $\hat{V} = \{rx | r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), x \in V\}$ es entorno de x_0 en $\mathbb{R}^n$, y $\hat{V} - B_1(0) = \{rx | r \in [1, 1+\varepsilon), x \in V\}$. Sea $V_j = \varphi_j^{-1}(\hat{V} - B_1(0)) \subset M_j^o$, que es entorno de p_j. Claramente $V_1 \sqcup V_2$ es abierto saturado de

$M_1^o \sqcup M_2^o$, luego

$$\tilde{V} = \pi(V_1 \sqcup V_2)$$

es entorno de p en X. Veamos ahora que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$\begin{aligned}\Phi :& V_1 \sqcup V_2 \to V \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon),\\ & q_1 \in V_1 \mapsto (x, r), r = \|\varphi_1(q_1)\|, x = \varphi_1(q_1)/r,\\ & q_2 \in V_2 \mapsto (x, 2-r), r = \|\varphi_2(q_2)\|, x = \varphi_2(q_2)/r.\end{aligned}$$

Por tanto, $\Phi : V_1 \to V \times [1, 1+\varepsilon)$ y $\Phi : V_2 \to V \times (1-\varepsilon, 1]$ son homeomorfismos. Además, $q_1 \sim q_2$ si y sólo si $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$. De este modo, Φ induce una aplicación continua y biyectiva

$$\overline{\Phi} : \tilde{V} \to V \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

.

$\overline{\Phi}$ es abierta: si tomamos un abierto básico saturado de $V_1 \sqcup V_2$, o bien está totalmente incluido en $V_1 - S_1$ o en $V_2 - S_2$, en cuyo caso su imagen es un abierto de $V \times (1-\varepsilon, 1)$ o $V \times (1, 1+\varepsilon)$, o bien interseca a S_1 y S_2. En ese caso se puede asumir que es un abierto de la forma $W_1 \sqcup W_2$, construido como antes y donde hemos partido de un $W \subset V \subset \partial B_1(0)$. Entonces $\overline{\Phi}(\tilde{W}) = W \times (1-\delta, 1+\delta)$ con $0 < \delta \leq \varepsilon$, $\tilde{W} = \pi(W_1 \sqcup W_2)$. Luego $\overline{\Phi}$ es un homeomorfismo, y $\tilde{V}$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Los abiertos construidos, $\tilde{V} \subset X$, se pueden tomar en cantidad numerable para formar una base de la topología, con lo cual X es IIAN. También, dado un $q \in U_j'$, $j = 1, 2$, y un $p \in S$, se puede tomar un abierto $\tilde{V}$ entorno de p disjunto de un entorno pequeño de q. Y si tomamos $p, p' \in S$ distintos, los abiertos $\tilde{V}$,$\tilde{V}'$ construidos partiendo de $V, V' \subset \partial B_1(0)$ disjuntos, serán disjuntos. Luego X es Hausdorff. □

1.2. Representación de superficies

Para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Representaremos todas las superficies como cocientes de polígonos con $2n$ lados.

Definición 1.2.1. Sea S un conjunto. Una ***palabra en*** S es una k-tupla ordenada de símbolos, cada uno de la forma a o a^{-1}, para cierto $a \in S$.

Definición 1.2.2. Una ***representación poligonal***, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, ..., W_k \rangle$$

es un conjunto finito S junto con un número finito de palabras $W_1, .., W_k$ de longitud 3 o más, tal que para todo $a \in S$ existe un W_i tal que $a \in W_i$. Por cuestiones de notación, cuando el conjunto S esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de S y denotaremos las palabras W_i por youxtaposición. Por ejemplo, la presentación con $S = \{a, b\}$ y la palabra $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$ se escribe $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Permitimos el caso especial de $S = \{a\}$ y palabras de longitud 2, es decir $\langle a \mid aa \rangle$, $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$, $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ y $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$.

Definición 1.2.3. Toda representación poligonal $\mathcal{P}$ da lugar a un espacio topológico $|\mathcal{P}|$, llamado ***realización geométrica de*** $\mathcal{P}$. $|\mathcal{P}|$ se obtiene de la siguiente manera:

1. Para cada $W_i \in \mathcal{P}$ de longitud k, sea P_i el k-polígono centrado en el origen con lados de longitud 1 y tal que un lado yace sobre el eje OY.

2. Se define una correspondencia uno a uno entre los símbolos de W_i y los lados de P_i en orden inverso a las agujas del reloj, empezando por el que yace en el eje OY.

3. Sea $|\mathcal{P}|$ el espacio cociente de $\coprod_i P_i$ determinado identificando lados que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de lo lados con una dada etiqueta a y los últimos vertices de los que tienen la correspondiente etiqueta a^{-1} (en el sentido a las agujas del reloj).

Si $|\mathcal{P}|$ es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, decimos que $|\mathcal{P}|$ es la esfera $\mathbb{S}^2$ si la palabra es aa^{-1} o $a^{-1}a$, y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ si es aa o $a^{-1}a^{-1}$.

Por notación, dadas dos palabras W_1 y W_2, W_1W_2 representará la palabra formada concatenando W_1 y W_2. Por otro lado, adoptaremos la convención de que $(a^{-1})^{-1} = a$.

Definición 1.2.4. Las regiones interiores, los lados y los vértices de cada polígono P_i se llaman ***caras, lados y vértices de la presentación***. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de lados coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para un lado etiquetado a, el ***vértice inicial*** es el primero en el sentido de las agujas del reloj, y el otro es el ***vértice final***. Para un lado etiquetado a^{-1}, estas definiciones se invierten.

Definición 1.2.5. Una representación poligonal es una ***representación de una superficie*** si para todo $a \in S$, a ocurre exáctamente dos veces en $W_1, ..., W_k$ como a o como a^{-1}.

Definición 1.2.6. Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una representación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a $\mathcal{P}$, decimos que $\mathcal{P}$ es una ***representación de** X*.

Observación 1.2.7. Un espacion topológico que admite una representación con una sola cara es conexo, pues es homeomorfo al cociente de una región poligonal conexa. Con más de una cara, puede ser o no conexo.

Veamos la representación de algunas superficies importantes. Para ello vamos a necesitar la siguiente proposición:

Proposición 1.2.8. Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y convexo con interior no vacío, entonces D es homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}}^n$. De hecho, dado $p \in \mathring{D}$, entonces existe un homeomorfismo $F : \overline{\mathbb{B}}^n \to D$ que envía 0 a p, $\overline{\mathbb{B}}^n$ a $\mathring{D}$, y $\mathbb{S}^{n-1}$ a ∂D.

Demostración. Sea $p \in D$ un punto de su interior. Si reemplazamos D por su imagen mediante la traslación $x \mapsto x - p$, que es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, podemos asumir que $p = 0 \in \mathring{D}$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(0)$ está contenida en D. Usando la dilatación $x \mapsto x/\varepsilon$, podemos asumir que $\mathbb{B}^n = B_1(0) \subseteq D$. La clave de la demostración es la siguiente: *cada semirecta cerrada empezando en el origen interseca ∂D en exactamente un punto.* Sea R una semirecta tal. Dado que D es compacto, su interrsección con R es compacta. Por tanto existe un punto x_0 en su intersección tal que en él su distancia al origen asume el máximo. Es claro que pertenece a la frontera de D. Para ver que el punto es único, veamos que el segmento que une 0 y x_0 está formado enteramente por puntos interiores de D excepto por el x_0 mismo. Cualquier punto en este segmento distinto de x_o se puede escribir de la forma λx_o para $0 \leq \lambda < 1$. Supongamos $z \in B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$, y sea

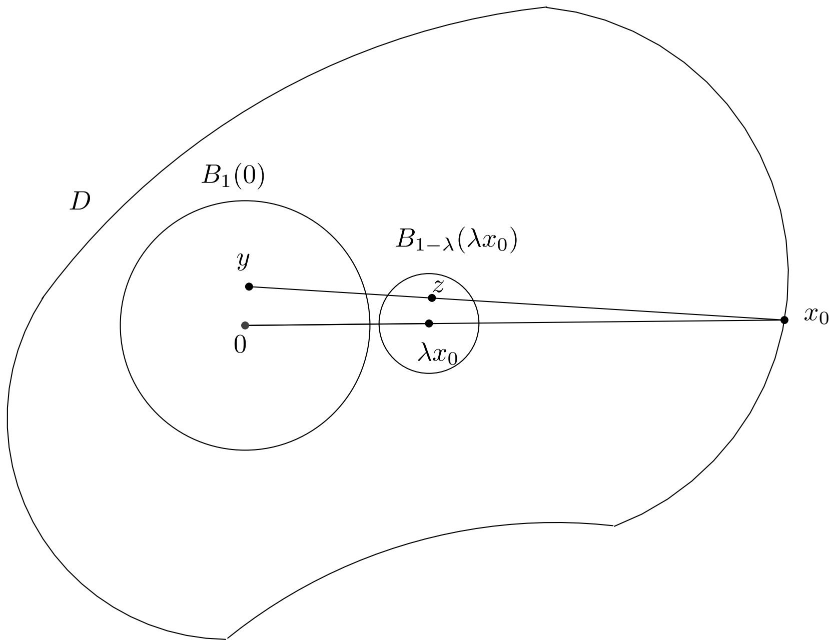


Figura 1.2: Demostración de que sólo hay un punto de la frontera en la semirecta.

$y = (z - \lambda x_0)/(1 - \lambda)$. Como $|z - \lambda x_0| < |1 - \lambda|$ se tiene que $|y| < 1$, y por tanto $y \in B_1(0) \subseteq D$ (1.2). Como y y x_0 están en D y $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y$, se sigue de la convexidad que $\in D$. Por tanto la bola abierta $B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$ está contenida en D, lo que implica que λx_0 es un punto interior.

Definimos ahora la aplicación $f : \partial D \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

.

$f(x)$ es el punto donde el segmento desde el origen hasta x interseca la esfera unidad. Como f es la restricción de una función continua, es continua, y por el parágrafo anterior es biyectiva. Dado que ∂D es compacta, f es un homeomorfismo por el teorema de la aplicación cerrada (A.0.1).

Finalmente definimos $F : \overline{\mathbb{S}}^n \to D$ por

$$F(x) = \begin{cases} |x| f^{-1}\left(\dfrac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

F es continua fuera del origen por serlo f^{-1}, y en el origen porque por ser f^{-1} acotada $F(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Geometricamente, F manda cada segmento radial que conecta 0 con un punto de $\mathbb{S}^{n-1}$ al segmento radial desde 0 hasta el punto $f^{-1}(w) \in \partial D$. Por convexidad, F toma valores en D. La aplicación F es inyectiva, pues puntos de distintas semirectas van a parar a distintas semirectas, y cada segmento radial va linealmente a su imagen. Es sobreyectiva pues cada punto $y \in D$ está en una semirecta empezando en 0. Por el teorema de la aplicación cerrada A.0.1, F es un homeomorfismo. $\square$

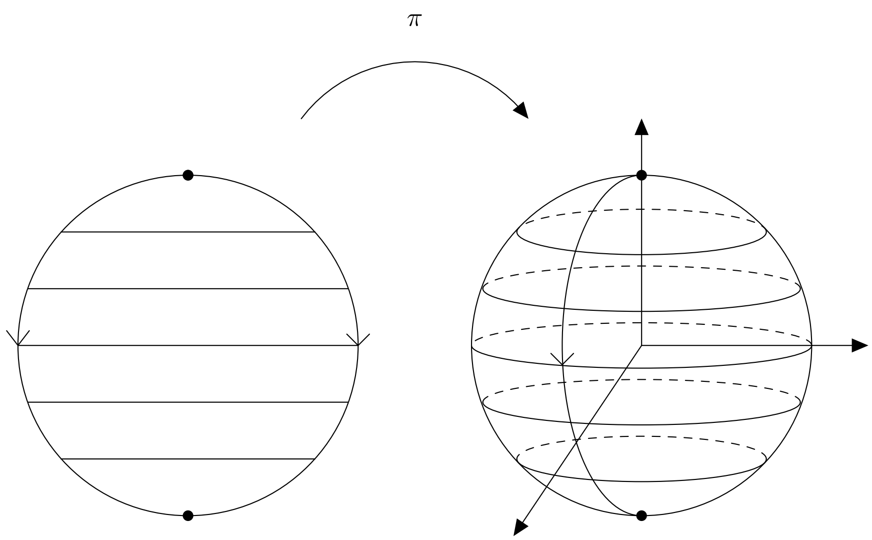


Figura 1.3: La esfera como cociente de una circunferencia.

Proposición 1.2.9. La esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a los siguientes espacios cociente:

(a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$, para $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$

(b) El cuadrado $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$ para $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Para ver que cada espacio es homeomorfo a la esfera, daremos una aplicación cociente desde el espacio dado a la esfera que haga las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, y entonces apelaremos a la unicidad del espacio cociente. (Teorema A.0.2)
Para (a), vamos a definir una aplicación del disco en la esfera que envuelve cada paralelo con un segmento horizontal del disco (ver Figura 1.2) Formalmente, esta aplicación $\pi : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2$ vienen dada por

$$\pi(x, y) = \begin{cases} (-\sqrt{1 - y^2} \cos \dfrac{\pi x}{\sqrt{1 - y^2}}, -\sqrt{1 - y^2}, y), & y \neq \pm 1 \\ \\ (0, 0, y), & y = \pm 1 \end{cases}$$

Es claro que π es continua y hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia. Por ser sobreyectiva, es una aplicación cociente (*Teorema de la aplicación cerrada A.0.1*).

Para probar (b), sea $\alpha : S \to \overline{\mathbb{B}}^2$ el homeomorfismo construido en la demostración de 1.2.8 que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de S al segmento paralelo entre centro del disco y su frontera. Hagamos ahora $\beta = \pi \circ \alpha : S \to \mathbb{S}^2$, donde π es la aplicación cociente del parágrafo anterior. Tenemos entonces que β identifica (x, y) y $(-x, y)$ cuando $(x, y) \in \partial S$, y por otro lado es inyectia, así que hace las mismas identificaciones que la aplicación cociente definida en (b), completando así la demostración (ver figura 1.2). $\square$

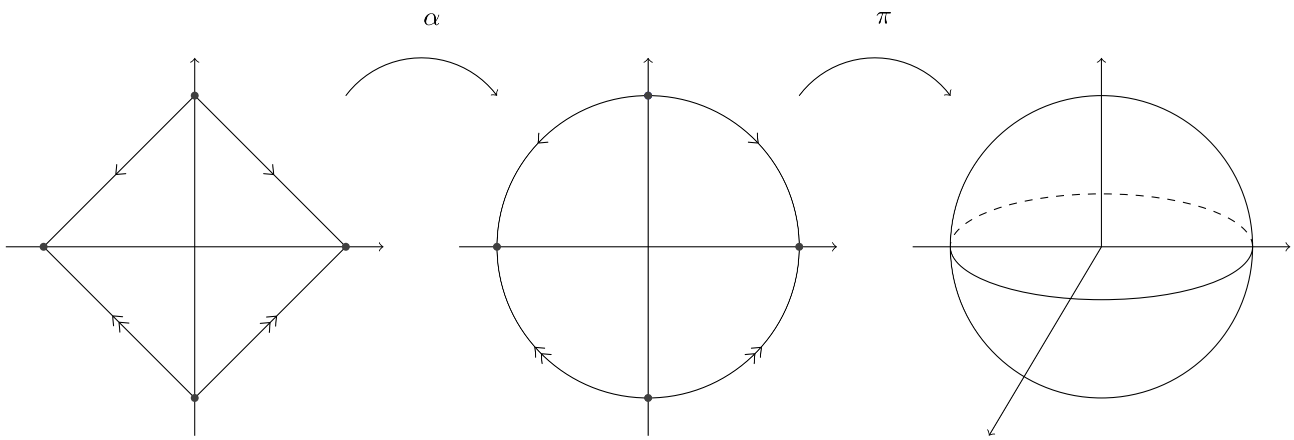


Figura 1.4: La esfera como cociente de un cuadrado.

Corolario 1.2.10. $\mathbb{S}^2 = \langle a | aa^{-1} \rangle = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Demostración. $\mathbb{S}^2 = \langle a | aa^{-1} \rangle$ por la definición 1.2.2. La segunda igualdad es consecuencia de la proposición anterior. $\square$

Proposición 1.2.11. El plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ es homeomorfo a los siguientes espacios cociente:

(a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$.

(b) La región cuadrada $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Sea $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ la aplicación cociente dada por la relación de equivalencia $\sim$ generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{S}^2$, que representa $\mathbb{P}^2$ como el cociente de una esfera. Si $F : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación que manda el disco en el emisferio superior de la esfera por $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, entonces $p \o F : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2/\sim$ es sobreyectiva (—lo demuestro?) y es así una aplicación cociente por el teorema de la aplicación cerrada (A.0.1). La aplicación identifica únicamente $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$ con $(-x, -y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$, por lo que $\mathbb{P}^2$ es homeomorfo al espacio cociente resultante. Para la parte (b) hacemos como en la demostración de 1.2.9 (b). $\square$

Corolario 1.2.12. $\mathbb{P}^2 = \langle a | aa \rangle = \langle a, b | abab \rangle$.

Demostración. El corolario es resultado de la anterior proposición y la definición 1.2.2. $\square$

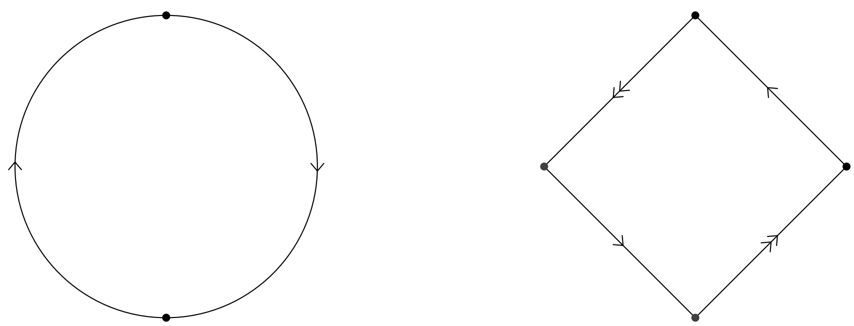


Figura 1.5: Representación de $\mathbb{P}^2$ como un espacio cociente.

Apéndice A

Teoremas Usados

Teorema A.0.1 (Lema de la aplicación cerrada)**.** Sea F una aplicación continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico Hausdorff. Entonces:

(a) F es una aplicación cerrada.

(b) Si F es sobreyectiva, entonces es una aplicación cociente.

(c) Si F es inyectiva, entonces es una inmersión topológica.

(d) Si F es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Teorema A.0.2 (Unicidad de espacios cociente)**.** Supongamos $q_1 : X \to Y_1$ y $q_2 : X \to Y_2$ son aplicaciones cociente que hacen las mismas identificaciones, es decir, tales que $q_1(x) = q_1(x')$ si y solo si $q_2(x) = q_2(x')$. Entonces existe un único homeomorfismo $\phi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi \circ q_1 = q_2$.