

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
MADRID

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

# Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Olié

Dirigido por:  
Manuel Alonso Morón

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo dar un tratamiento riguroso a la denominada “prueba ZIP” de John H. Conway, que trata de forma intuitiva el Teorema de Clasificación de Superficies. Con este fin se dará una introducción básica al estudio de las variedades topológicas, se tratará el teorema de triangulación de Radó y se dará un método efectivo de representación de las superficies.

## Abstract



## Introducción

El siguiente trabajo se centra en estudiar el Teorema de Clasificación de Superficies. Este resultado proporciona un *conjunto completo de representantes* para las superficies compactas. En concreto, asegura que toda superficie compacta es homeomorfa a una suma conexa de esferas, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos, y que estas superficies no son homeomorfas entre sí.

El Teorema de Clasificación de Superficies está intrínsecamente relacionado con el desarrollo de la topología, desde su nacimiento hasta la actualidad. De la primera aproximación del Teorema hasta la demostración rigurosa completa pasaron más de sesenta años, durante los cuales se fueron construyendo conceptos tales como *homeomorfismo*, *variedad*, *triangulación* u *orientabilidad*. Si bien el primer intento de demostrar el teorema se dió en el año 1863 por Möbius [1], la noción de superficie como variedad bidimensional definida en terminos de cartas no se dió hasta los años 30 del siglo XX, y los intentos de clasificación anteriores a esa década asumen sin demostrar que todas las superficies son triangulables. Por otro lado, la noción de homeomorfismo tampoco se da de forma precisa hasta principios de la década de 1900.

Todas las demostraciones rigurosas incluyen dos pasos. El primero, demostrar que toda superficie es triangulable. El segundo, transformar la superficie en otra homeomorfa, llamada *forma normal*. Möbius, en un primer intento, proporcionó una clasificación de las superficies orientables, al igual que hizo Jordan [**jordan**] tres años después sin aparentemente conocer su trabajo. En la prueba de Jordan encontramos además una tentativa de definición rigurosa de homeomorfismo, así como métodos de transformación que incluyen cortes sobre la superficie y que inspiraron a sus sucesores. Tanto Möbius como Jordan definen por primera vez el concepto de *género* mediante el uso de curvas cerradas simples sobre una superficie, con el Jordan anticipa además su trabajo posterior de las *Curvas de Jordan*. En 1888 von Dick [2] es el primero en dar la clasificación completa de superficies orientables y no orientables, introduciendo además la noción de *forma normal* de una superficie, pero se considera que son Dehn y Heegaard los que en 1907 [3] lo demuestran de forma rigurosa. En 1915 Alexander publica en un artículo [4] en el que se representan por primera vez las superficies como polígonos con aristas identificadas, y finalmente es en 1920 cuando Brahana [5] demuestra de forma rigurosa y completa el Teorema de Clasificación en términos de transformaciones sobre polígonos que representan superficies. Radó [6] demuestra en 1925 que toda superficie es triangulable, completando así la prueba con la pieza faltante. Hoy en día, la mayoría de los libros de texto siguen la demostración dada por Seifert y Threlfall [7], que a su vez se basa en la de Massey [8].

En el año 1999, Francis y Weeks presentan en [9] una demostración totalmente nueva y distinta dada por John H. Conway y llamada “*ZIP proof*”. Las siglas *ZIP* hacen referencia a *Zero Irrelevancy Proof*, es decir, *Prueba de Cero Irrelevancias*, pues según Conway esta demostración elimina algunas de las irrelevancias que contiene la versión de Seifert-Threlfall. El uso de polígonos para la representación de las superficies es para Conway uno de los pasos que se pueden eliminar, y utiliza en cambio el concepto de *suma conexa de superficies* para llegar a la forma normal. Esta prueba, si bien es corta e instructiva por ser muy comprensible a nivel intuitivo, es bastante informal y carece de rigurosidad. Algunas partes de la demostración incluyen pasos que no se desarrollan en profundidad, y conceptos como triangulación, orientabilidad, género y característica de Euler se citan pero no llegan a definirse. Por otro lado, no se demuestra que las superficies del conjunto de representantes sean no homeomorfas entre sí. El propósito de este trabajo es por tanto formalizar la prueba de Conway y compararla con la Seifert-Threlfall.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos.

El primer capítulo trata de la triangulación de superficies. En la primera parte doy definiciones y resultados básicos de variedades, variedades con borde, superficies y suma conexa de variedades. En la segunda defino de forma rigurosa el concepto de triangulación de superficies mediante símlices y complejos simpliciales, y trato de dar una aproximación al Teorema de Radó. Esta es la parte más importante del capítulo, donde lo enunciaré y trataré de dar una idea de la demostración. Esta utiliza el *Teorema de la Curva de Jordan* y el *Teorema de Jordan-Shönflies*, que no demostraré pues me alejaría del propósito final del trabajo. Al terminar introduzco algunos resultados relacionados con la triangulación de variedades de dimensión superior.

En el segundo capítulo doy la demostración de la primera parte del Teorema de Clasificación, a la manera de Seifert-Threlfall, para poder compararla con la prueba de Conway. Con esta finalidad, presento un método riguroso de representación de cualquier superficie triangulada como un polígono en el plano. Introduzco entonces una serie transformaciones sobre este polígono, de forma que represente una superficie homeomorfa. Estos conceptos también me servirán para formalizar las partes menos rigurosas de la prueba ZIP. Finalmente, una vez probado el teorema, lo extiendo a las superficies con borde.

El tercer capítulo es la parte central del trabajo. Sigo paso por paso el artículo de Francis y Weeks, dando para cada resultado una demostración rigurosa, y definiendo formalmente las ideas de Conway. Para ello, me ayudo de algunas ideas expuestas en el capítulo tres. Comento también donde procede las similitudes y diferencias con la prueba de Seifert-Threlfall, así como las posibles ventajas de una prueba u otra. El teorema que enuncio y demuestro, a diferencia de Conway, da directamente la clasificación de las superficies con borde.

En el cuarto capítulo, finalmente completo la demostración probando que las superficies

# Índice general

Resumen	i
Abstract	i
Introducción	iii
Índice general	v
Índice de figuras	vii
<b>1. Superficies y triangulación</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades . . . . .	1
1.2. Variedades con borde . . . . .	2
1.3. Suma conexa de variedades . . . . .	4
1.4. Complejos simpliciales y triangulación . . . . .	7
1.5. Teorema de Radó . . . . .	8
<b>2. Teorema de Clasificación, primera parte</b>	<b>9</b>
2.1. Superficies como cocientes . . . . .	9
2.2. Representación de superficies . . . . .	15
2.3. Teorema de clasificación de superficies compactas . . . . .	22
2.4. Teorema de clasificación de superficies con borde . . . . .	26
<b>3. La prueba ZIP de Conway</b>	<b>30</b>
3.1. Cremalleras . . . . .	30
3.2. Teorema de Clasificación . . . . .	33
<b>4. Teorema de Clasificación, segunda parte</b>	<b>37</b>
4.1. Presentaciones de grupos . . . . .	37
4.2. Grupos fundamentales de las Superficies Compactas . . . . .	38
4.3. Teorema de Clasificación . . . . .	41
<b>A. Grupos</b>	<b>42</b>
A.1. Grupo fundamental . . . . .	42
A.2. Grupos abelianos libres . . . . .	42
<b>B. Algunos teoremas de topología importantes</b>	<b>43</b>
B.1. Cocientes topológicos . . . . .	43



# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de superficies. . . . .	2
1.3. Suma conexa de toros. . . . .	5
1.4. $k$ -símplices, $k = 0, \dots, 3$ . . . . .	7
1.5. Un complejo simplicial en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
1.6. Símplices que no forman un complejo. . . . .	8
2.1. La esfera como cociente del disco $\overline{\mathbb{B}}^2$ . . . . .	10
2.2. La esfera como cociente de un cuadrado. . . . .	10
2.3. El toro como cociente de un cuadrado. . . . .	11
2.4. Representación de $\mathbb{P}^2$ como un espacio cociente. . . . .	11
2.5. Crosscap. . . . .	12
2.6. Entorno euclídeo de un vértice. . . . .	14
2.7. Construcción de la botella de Klein. . . . .	15
2.8. Superficies con borde como cocientes topológicos. . . . .	15
2.9. Representación de superficies importantes. . . . .	17
2.10. Representaciones de la esfera y el plano proyectivo. . . . .	17
2.11. Representación de superficies con borde. . . . .	18
2.12. Subdividir/consolidar. . . . .	18
2.15. La representación $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$ . . . . .	21
2.16. Transformación de la bottella de Klein en $\mathbb{P}^2$ . . . . .	22
2.17. Haciendo que los pares torcidos sean adyacentes. . . . .	24
2.18. Reduciendo el número de vértices equivalentes a $v$ . . . . .	25
2.19. Poniendo los pares complementarios juntos. . . . .	25
2.20. Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice que tiene dos aristas en $\partial M$ . . . . .	27
2.21. Triangulación cerca de una componente del borde de $M$ . . . . .	28
2.22. La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con dos perforaciones. . . . .	29
3.1. Construcciones elementales con cremalleras. . . . .	32
3.2. Suma conexa de un toro y una esfera. . . . .	33
3.3. Suma conexa de una superficie y un toro visto como pegar un <i>asa</i> . . . . .	33



# Capítulo 1

## Superficies y triangulación

En este capítulo doy las definiciones y resultados básicos sobre variedades y superficies. Me basaré principalmente en los libros de J. M. Lee [10] y V. Muñoz - J. J. Madrigal [11].

### 1.1. Variedades

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades, y en concreto las superficies. Decimos que un espacio topológico  $M$  es **localmente euclídeo de dimensión  $n$**  si todo punto de  $M$  tiene un entorno en  $M$  que es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.1.** Una **variedad topológica** (de ahora en adelante **variedad**) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente euclídeo de dimensión  $n$ , para algún  $n \geq 0$ .

Sea  $M$  una variedad, y sea  $p \in M$ . Si  $U \subseteq M$  es un entorno de  $p$  que es homeomorfo a un abierto  $U'$  de  $\mathbb{R}^n$ , decimos que  $U$  es un **dominio coordinado**, y llamamos **aplicación coordinada** a cualquier homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow U'$ . Decimos que el par  $(U, \varphi)$  es una **carta para  $M$** .

A un dominio coordinado que es homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$  se le llama **bola coordinada** (si  $n = 2$ , decimos **disco coordinado**). Si  $p \in M$  y  $U$  es un dominio coordinado que contiene a  $p$ , decimos que  $U$  es un **entorno Euclídeo** de  $p$ .

No siempre se tiene que la adherencia de una bola coordinada sea homeomorfa a una bola cerrada Euclídea. Por tanto, decimos que una bola coordinada  $B \subseteq M$  es una **bola coordinada regular** si existe un entorno  $B'$  de  $\overline{B}$  y un homeomorfismo  $\varphi : B' \rightarrow B_{r'}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$  que lleva  $B$  a  $B_r(x)$  y  $\overline{B}$  a  $\overline{B_r(x)}$  para algún  $r' > r > 0$  y para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 1.1.2.** Ser localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  es una propiedad local, y por tanto las propiedades locales de  $\mathbb{R}^n$  se trasladan a una variedad. Así pues, las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

Vamos a definir ahora la dimensión de una variedad. El *Teorema de Invarianza del Dominio* dice que si  $W \subset \mathbb{R}^n$  y  $W' \subset \mathbb{R}^m$  son abiertos y existe un homeomorfismo  $\phi : W \rightarrow W'$ , entonces  $n = m$ . Así pues, sea  $M$  una variedad, y sea  $p \in M$ . Entonces hay un único  $n = n_p$  tal que un entorno  $U^p$  de  $p$  en  $M$  es homeomorfo a un abierto  $U' \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $n_p$  es la **dimensión en  $p$** . Si para todo punto  $q \in U^p$  tomamos  $U^p$  como entorno de  $q$ , tenemos que  $n_q = n_p$ . Luego en toda la componente conexa

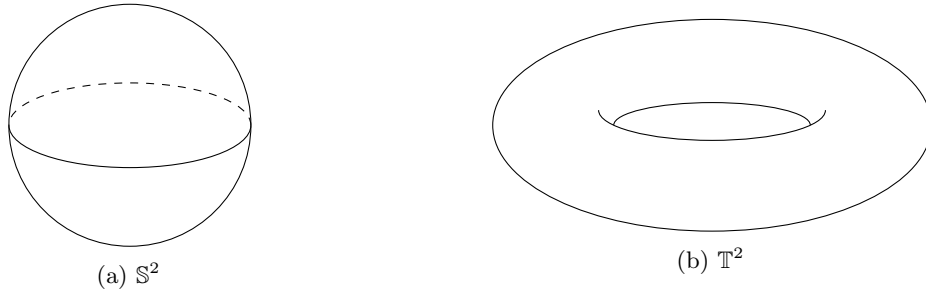


Figura 1.1: Ejemplos de superficies.

de  $p$ , el  $n$  que aparece es el mismo, y lo llamaremos **dimensión** de dicha componente conexa. Si escribimos  $M = \coprod M_i$  como la unión disjunta de sus componentes conexas  $M_i$ , tenemos que todas las  $M_i$  son variedades, y si todas las  $M_i$  tienen la misma dimensión  $n$ , entonces escribimos  $n = \dim M$ , y decimos que  $M$  es una  **$n$ -variedad**.

El ejemplo más trivial de  $n$ -variedad es  $\mathbb{R}^n$ , pero también lo es cualquier abierto suyo. De hecho, esto se puede generalizar:

**Proposición 1.1.3.** Todo subconjunto abierto de una  $n$ -variedad es una  $n$ -variedad.

*Demostración.* Sea  $M$  una  $n$ -variedad, y sea  $V$  un subconjunto abierto de  $M$ . Para todo  $p \in V$ ,  $p$  tiene un entorno  $U^p$  en  $M$  que es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .  $U^p \cap V$  es también abierto y homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y está contenido en  $V$ . Por tanto  $V$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, todo abierto de un espacio Hausdorff es Hausdorff y todo abierto de un espacio II AN es II AN. Por lo que  $M$  es una variedad.  $\square$

**Ejemplo 1.1.4.** ■ Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.

- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta  $\mathbb{R}$  y el círculo  $\mathbb{S}^1$   
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z = e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$

**Definición 1.1.5.** Una **superficie** es una 2-variedad.

**Ejemplo 1.1.6.** Son superficies:

- La esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (Figura 1.1a).
- El toro  $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$  (Figura 1.1b).

## 1.2. Variedades con borde

Hay una serie de espacios topológicos que no son variedades pero que tienen interés desde el punto de vista geométrico y son útiles a la hora de estudiarlas. Por ejemplo, la bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}^n$  no es una variedad, puesto que para los puntos de su frontera no hay entornos homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a definir por tanto una clase de espacios que extienda a las variedades pero que admita la existencia de algún tipo de *bordes*. Para ello, indicaremos con  $\mathbb{H}^n$  al **semiplano superior cerrado  $n$ -dimensional**

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

**Definición 1.2.1.** Una *variedad con borde  $n$ -dimensional*  $M$  (o  $n$ -variedad con borde) es un espacio topológico Hausdorff y II AN tal que todo punto  $p \in M$  tiene un entorno  $U$  homeomorfo a un abierto  $U' \subset \mathbb{H}^n$ .

Sea  $M$  una  $n$ -variedad con borde,  $p \in M$  y  $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^n$  un homeomorfismo como en la definición. Como en el caso de variedades, decimos que  $U$  es un **dominio coordinado**, que  $\varphi$  es una **aplicación coordinada** para  $M$  y que el par  $(U, \varphi)$  es una **carta para  $M$** .

Como en la sección anterior, decimos que  $B \subseteq M$  es una **semibola coordinada regular** si existe un abierto  $B'$  que contiene a  $\overline{B}$  y un homeomorfismo de  $B'$  a  $B_{r'}(0) \cap \mathbb{H}^n$  que lleva  $B$  a  $B_r(0) \cap \mathbb{H}^n$  y  $\overline{B}$  a  $\overline{B_r(0)} \cap \overline{\mathbb{H}^n}$  para algún  $0 < r < r'$ . Si denotamos  $\varphi(p) = a = (a_1, \dots, a_n)$ , podemos distinguir entre dos tipos de puntos:

1. *Puntos interiores:* Si  $a_n > 0$ , entonces podemos tomar una bola  $B_\varepsilon(a) \subset U'$  y  $V = \varphi^{-1}(V')$ , por lo que  $V$  es un entorno de  $p$  homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos por tanto que  $p$  es un **punto interior de  $M$** , y denotamos por  $\text{Int } M$  al conjunto de puntos interiores de  $M$ .
2. *Puntos borde:* Si  $a_n = 0$  para todo  $n$ , entonces podemos tomar una semibola  $V' = B_\varepsilon^+ = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$ , y  $V = \varphi^{-1}(V')$ . Decimos que  $p$  es un **punto borde de  $M$** . Al conjunto de todos los puntos borde de  $M$  lo denotamos por  $\partial M$ .

**Proposición 1.2.2.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad con borde, entonces  $\text{Int } M$  es un abierto de  $M$ , y es en sí mismo una  $n$ -variedad.

*Demostración.* Sea, para cada  $x \in \text{Int } M$ ,  $(U_x, \psi_x)$  una carta para  $x$ , donde  $U_x$  es un abierto homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Se tiene que  $\text{Int } M = \bigcup_{x \in M} U_x$ , por lo que es un abierto, y además localmente Euclídeo, y por tanto variedad.  $\square$

**Proposición 1.2.3** (Invarianza del borde). Si  $M$  es una  $n$ -variedad con borde, entonces un punto  $p \in M$  no puede ser un punto interior y un punto borde al mismo tiempo. O lo que es lo mismo,  $M = \text{Int } M \cup \partial M$ , con  $\text{Int } M \cap \partial M = \emptyset$ .

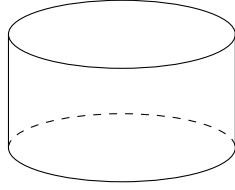
*Demostración.* Dado que las variedades que trato en el trabajo son las superficies, voy a dar la demostración en el caso de que  $n = 2$ . El caso general incluye conceptos de homología que no voy a tratar.

Supongamos que  $p \in M$  es tanto un punto interior como un punto borde de  $M$ . Entonces existen  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U) \subseteq \text{Int } \mathbb{H}^2$  y  $(V, \psi)$  tal que  $\psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$ , donde  $\psi(p) = s \in \partial \mathbb{H}^2$ . Llamando  $W = U \cap V$ , se tiene que  $\varphi(W)$  es homeomorfo a  $\psi(V)$ .

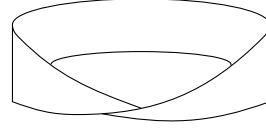
Ahora bien, podemos elegir un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \subseteq \psi(W)$ . Sea  $U' = \psi^{-1}(B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2)$ ; utilizando que un abierto de  $\mathbb{R}^2$  menos un punto suyo no es simplemente conexo, tenemos que  $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$  es no simplemente conexo. Por otro lado,  $U' \setminus p$  es homeomorfo a  $X := B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \setminus \{s\}$ . Sea  $x_0 \in B_\varepsilon(s) \cap \text{Int } \mathbb{H}^2$ , definimos  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$  por  $F(x, t) = x_0 + (1 - t)(x - x_0)$ , que nos indica que  $\{x_0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ . Por tanto,  $X$  es simplemente conexo, lo que implica que también lo son  $U' \setminus \{p\}$  y  $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$ , pero esto es una contradicción.  $\square$

**Corolario 1.2.4.** Si  $M$  es una  $n$ -variedad con borde, entonces:

- (i)  $\partial M$  es un cerrado en  $M$ .
- (ii)  $\partial M$  es una  $(n - 1)$ -variedad.
- (iii)  $M$  es una variedad si y solo si  $\partial M = \emptyset$ .



(a) Cilindro.



(b) Banda de Möbius.

*Demostración.* Por el teorema de la invarianza del borde,  $\partial M = M \setminus \text{Int } M$ , y siendo  $\text{Int } M$  abierto,  $\partial M$  es por tanto cerrado, lo que demuestra (i). Para (ii), sea  $p \in \partial M$ . Tomamos  $U$  un entorno de  $p$  en  $M$  y  $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^n$  un homeomorfismo. Sea  $V' = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$  tal que  $\varphi(p) = a$ , y  $V = \varphi^{-1}(V')$ . Así pues,  $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n) \in V' \mid x_n > 0\}) \subseteq \text{Int } M$  y  $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\}) \subseteq \partial M$ . Por lo tanto  $\partial M \cap V = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\}) = W$  es un abierto de  $\partial M$ , y  $\varphi : W \rightarrow W' = B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$  es un homeomorfismo con un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , lo que implica que  $\partial M$  es una  $(n-1)$ -variedad. Finalmente para probar (iii), si suponemos que  $M$  es una variedad, entonces todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , por lo que todo punto es interior y  $M = \text{Int } M$ , y se sigue de la invarianza del borde que  $\partial M = \emptyset$ . Si suponemos ahora que  $\partial M = \emptyset$ , entonces  $M = \text{Int } M$ , que es una variedad por la Proposición 1.2.2.  $\square$

Hacemos incapié en que los conceptos de *variedad* y *variedad con borde* son distintos. Una variedad con borde puede ser o no una variedad, pues puede tener el borde vacío. En cambio, una variedad es siempre una variedad con borde en la que todo punto es un punto interior. Para evitar confusiones, si el contexto lo pide, utilizaremos **variedad sin borde** para referirnos a una variedad en el sentido de la Definición 1.1.1.

Veamos algunos ejemplos no triviales de superficies con borde:

**Ejemplo 1.2.5.** (1) El cilindro (Figura 1.2a):

$$Cil = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$

(2) La banda de Möbius (Figura 1.2b):

$$Mob = \left\{ \left( \left( 1 + \left( y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right), \left( 1 + \left( y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right) \sin(2\pi x), \left( y - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi x) \right) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1] \right\}.$$

### 1.3. Suma conexa de variedades

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos  $n$ -variedades conexas. Dados  $p_1 \in M_1$  y  $p_2 \in M_2$  sean  $U_1 \subset M_1$ ,  $U_2 \subset M_2$  entornos abiertos de  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, y sean  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos homeomorfismos tales que  $\phi_1(p_1) = 0$  y  $\phi_2(p_2) = 0$ . Si llamamos  $B_1 = \phi_1^{-1}(B_1(0)) \subset M_1$  y  $B_2 = \phi_2^{-1}(B_1(0)) \subset M_2$ , consideremos  $M_1^\circ = M_1 \setminus B_1$ ,  $M_2^\circ = M_2 \setminus B_2$  y  $M_1^\circ \amalg M_2^\circ$  con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia  $\sim$  en la que si  $x_1 \in S_1 = \phi_1^{-1}(\partial B_1(0))$ ,  $x_2 \in S_2 = \phi_2^{-1}(\partial B_1(0))$ , entonces  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$ , y se considera el cociente

$$M = \frac{M_1^\circ \amalg M_2^\circ}{\sim}.$$

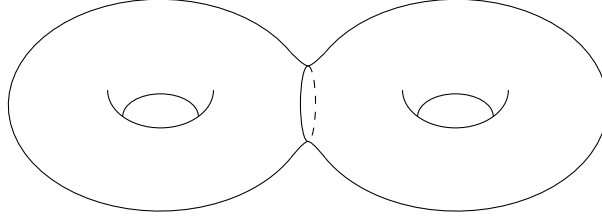


Figura 1.3: Suma conexa de toros.

**Definición 1.3.1.** A  $M$  así definida se le llama **suma conexa** de  $M_1$  y  $M_2$ , y se denota por  $M = M_1 \# M_2$ .

**Proposición 1.3.2.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  variedades. Entonces  $M = M_1 \# M_2$  es una variedad.

*Demostración.* Sea  $\pi : M_1^\circ \amalg M_2^\circ \rightarrow M$  la proyección al cociente y sea  $S = \pi(S_1) = \pi(S_2)$ .  $U_j = M_j^\circ - S_j$ ,  $j = 1, 2$  son dos abiertos saturados respecto de  $\pi$ , por lo que  $\pi : U_j \rightarrow \pi(U_j) = U_j'$  es también una aplicación cociente, que además es inyectiva y por lo tanto un homeomorfismo. Tenemos así que  $M$  es localmente euclídeo en  $U_1' \cup U_2'$ , y además es Hausdorff y IIAN. Nos quedan por tanto verificar los puntos  $p \in S$ . Este  $p \in S$  verifica que  $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$ , con  $p_j \in S_j$ ,  $j = 1, 2$ , y que  $\varphi_j(p_j) = x_0 \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Si tomamos  $V$  un entorno de  $x_0$  en  $\partial B_1(0)$ , tenemos que dado un  $\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{V} = \{rx \mid r \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), x \in V\}$  es entorno de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , y que  $\tilde{V} - B_1(0) = \{rx \mid r \in [1, 1 + \varepsilon), x \in V\}$ . Sea  $V_j = \varphi_j^{-1}(\tilde{V} - B_1(0))$ , que es entorno de  $p_j$  en  $M_j^\circ$ . Como  $V_1 \amalg V_2$  es abierto saturado de  $M_1^\circ \amalg M_2^\circ$  respecto de  $\pi$ , entonces  $\tilde{V} = \pi(V_1 \amalg V_2)$  es entorno de  $p$  en  $M$ . Veamos que es localmente Euclídeo. Si construimos  $\Phi$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Phi : V_1 \amalg V_2 &\rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \\ q_1 \in V_1 &\mapsto (x, r), r = \|\varphi_1(q_1)\|, x = \varphi_1(q_1)/r, \\ q_2 \in V_2 &\mapsto (x, 2 - r), r = \|\varphi_2(q_2)\|, x = \varphi_2(q_2)/r. \end{aligned}$$

obtenemos que  $\Phi : V_1 \rightarrow V \times [1, 1 + \varepsilon)$  y  $\Phi : V_2 \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1]$  son homeomorfismos. Además se tiene que  $q_1 \sim q_2$  si y sólo si  $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$ . De este modo,  $\Phi$  induce una aplicación continua y biyectiva

$$\bar{\Phi} = \Phi \circ \pi^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Si comprobamos que  $\bar{\Phi}$  es abierta, tendremos que es homeomorfismo. Tomamos un abierto básico saturado de  $V_1 \amalg V_2$ , entonces o bien está totalmente incluido en  $V_1 - S_1$  o en  $V_2 - S_2$ , en cuyo caso la imagen por  $\bar{\Phi}$  es un abierto de  $V \times (1 - \varepsilon, 1)$  o de  $V \times (1, 1 + \varepsilon)$ , o bien interseca a  $S_1$  y  $S_2$ . En este caso el abierto es de la forma  $W_1 \amalg W_2$ , construido como hicimos con  $V_1 \amalg V_2$  a partir de un  $W \subset V \subset \partial B_1(0)$ . Entonces  $\bar{\Phi}(\tilde{W}) = W \times (1 - \delta, 1 + \delta)$  con  $0 < \delta \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{W} = \pi(W_1 \amalg W_2)$ . Luego  $\bar{\Phi}$  es abierta, y por tanto un homeomorfismo, y así finalmente  $\tilde{V}$  es un entorno euclídeo de  $p$ .

Por construcción podemos tomar los abiertos  $\tilde{V} \subset M$  en cantidad numerable para formar una base de la topología, y por lo tanto  $M$  es IIAN. Nos queda sólo ver que es Hausdorff. Sea un  $q \in U_j'$ ,  $j = 1, 2$ , y un  $p \in S$ . Podemos tomar un entorno abierto  $\tilde{V}$  de  $p$  disjunto de un entorno pequeño de  $q$ . Y si tomamos  $p, p' \in S$  distintos, los abiertos  $\tilde{V}, \tilde{V}'$  construidos partiendo de  $V, V' \subset \partial B_1(0)$  disjuntos, son disjuntos. Por lo tanto,  $M$  es Hausdorff, y finalmente, variedad.  $\square$

FALTA COMENTARIO DE QUE LA CONSTRUCCIÓN RESULTANTE NO DEPENDE DE LAS  
ELECCIONES HECHAS—ANNULUS THEOREM... ETC

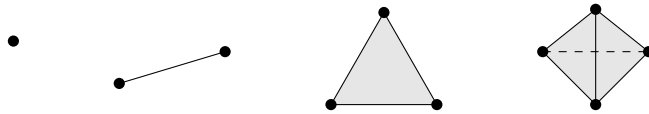


Figura 1.4:  $k$ -símplices,  $k = 0, \dots, 3$ .

## 1.4. Complejos simpliciales y triangulación

Para poder dar una definición rigurosa de triangulación de variedades necesitamos la noción de *complejos simpliciales*. Estos son construcciones formadas por *símplices*, que son una generalización de los triángulos. En esta primera parte me baso en las definiciones de Munkres [12].

**Definición 1.4.1.** Sean  $v_0, \dots, v_k$   $k + 1$  puntos distintos de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\{v_0, \dots, v_k\}$  están en *posición general* si  $c_0, \dots, c_k$  son números reales tales que

$$\sum_{i=0}^k c_i v_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^k c_i = 0,$$

entonces  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

**Definición 1.4.2.** Sean  $\{v_0, \dots, v_n\}$  un conjunto de  $k + 1$  puntos de  $\mathbb{R}^n$  en posición general. El *símplice* generado por ellos, que denotamos por  $[v_0, \dots, v_k]$ , es el conjunto

$$[v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\},$$

con la topología heredada de  $\mathbb{R}^n$ . Para todo punto  $x = \sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_k]$ , llamamos a los  $t_i$  *coordenadas baricéntricas de  $x$* . Cada uno de los  $v_i$  se llama *vértice* del símplice. Al entero  $k$  se le llama *dimensión*, y diremos que  $[v_0, \dots, v_k]$  es un  *$k$ -símplice*.

**Ejemplo 1.4.3.** Un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo junto a su interior, un 3-símplice es un tetraedro sólido, y así sucesivamente (Figura 1.4).

Sea  $\sigma$  un  $k$ -símplice. Cada símplice generado por un subconjunto no vacío de vértices de  $\sigma$  se llama *cara de  $\sigma$* . Las caras que no son iguales a  $\sigma$  se llaman *caras propias*. Las caras 0-dimensionales de  $\sigma$  son sus vértices, y a las caras 1-dimensionales se les llama *aristas*. Las caras  $(k - 1)$ -dimensionales de un  $k$ -símplice se llaman *caras fronterizas*, y a su unión la llamamos *frontera*. Definimos el *interior* como  $\sigma$  menos su frontera.

**Definición 1.4.4.** Un *complejo simplicial* es una colección  $K$  de símplices en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Si  $\sigma \in K$ , entonces toda cara de  $\sigma$  está en  $K$
- (ii) La intersección de dos símplices cualesquiera en  $K$  es o bien vacía o bien una cara de ambos.

La Figura 1.5 muestra un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^2$ . En cambio en la Figura 1.6 los símplices representados no forman un complejo, pues no se respeta la condición (ii) de la Definición 1.4.4.

Si  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^n$ , llamamos *dimensión de  $K$*  a la dimensión máxima de los símplices en  $K$ . Esta no es mayor que  $n$ . Un subconjunto  $K' \subseteq K$  se dice que es un *subcomplejo de*

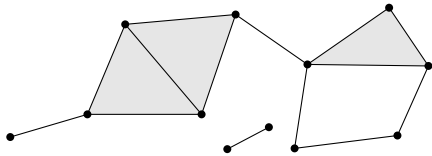


Figura 1.5: Un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^2$

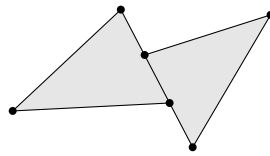


Figura 1.6: Símplices que no forman un complejo.

$K$  si para todo  $\sigma \in K'$ , toda cara de  $\sigma$  está en  $K'$ . Un subcomplejo es un complejo simplicial en sí mismo. Para todo  $k \leq n$ , el conjunto de todos los símlices de  $K$  de dimensión menor o igual que  $k$  es un subcomplejo llamado ***k-esqueleto de  $K$*** .

**Definición 1.4.5.** Sea un complejo simplicial  $K$  en  $\mathbb{R}^n$ . La unión de todos los símlices en  $K$  junto con la topología heredada de  $\mathbb{R}^n$  es un espacio topológico que denotamos por  $|K|$  y que llamamos ***poliedro de  $K$*** .

**Definición 1.4.6.** Una ***aplicación afín*** es una aplicación  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $F(x) = c + A(x)$ , donde  $c \in \mathbb{R}^m$  es un vector fijo y  $A(x)$  es una aplicación lineal.

**Definición 1.4.7.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales. Una ***aplicación simplicial*** es una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$  cuya restricción a cada símplex  $\theta \in K$  coincide con una aplicación afín que lleva  $\theta$  a algún símplex en  $L$ .

**Definición 1.4.8.** Sea  $X$  un espacio topológico. Llamamos ***triangulación de  $X$***  a un homeomorfismo entre  $X$  y el poliedro de algún complejo simplicial.

**Definición 1.4.9.** Toda variedad (con borde y sin borde) que admita una triangulación se dice ***triangulable***.

## 1.5. Teorema de Radó

**Teorema 1.5.1** (Teorema de Radó). Toda superficie es triangulable por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en donde cada 1-símplex es una cara de exáctamente dos 2-símlices.

**Teorema 1.5.2.** Toda superficie con borde es triangulable por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en donde hay dos tipos de 1-símlices: los que están totalmente contenidos en el borde, y los que se corresponden con puntos interiores. Los primeros son cara de exactamente un 2-símplex, y los últimos exactamente de dos 2-símlices.



## Capítulo 2

# Teorema de Clasificación, primera parte

En esta sección daremos una demostración clásica de la primera parte del teorema de clasificación de superficies compactas, que fue probado por primera vez en 1907 por Max Dehn y Poul Heegaard [3]. En las primeras dos secciones utilizo las nociones que da Lee [10] sobre la representación de superficies, y las amplío a la representación de superficies con borde. En la tercera sección demuestro el teorema basándome en la prueba de Lee [10], que a su vez se basa en la demostración clásica de Seifert y Threlfall [7]. Finalmente clasifico las superficies con borde, siguiendo las ideas de Massey [8].

### 2.1. Superficies como cocientes

Para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Trataremos de dar una forma de representarlas como polígonos, y veremos que toda superficie compacta se puede representar en el plano como el cociente de un polígono por una relación de equivalencia que identifica sus aristas dos a dos.

Veamos tres ejemplos elementales: la esfera  $\mathbb{S}^2$ , el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2$ . Como veremos, estas superficies son fundamentales pues toda superficie compacta se puede construir a partir de ellas.

**Proposición 2.1.1.** La esfera  $\mathbb{S}^2$  es homeomorfa a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado  $\overline{\mathbb{B}}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, y)$ , si  $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$
- (b) El cuadrado  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, y)$  si  $(x, y) \in \partial S$ .

*Demostración.* Para ver que cada espacio es homeomorfo a la esfera, daremos una aplicación cociente desde cada espacio a la esfera que haga las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, y entonces apelaremos a la unicidad del espacio cociente. (Teorema B.1.7)

Para (a), vamos a definir una aplicación que “envuelve” cada paralelo de la esfera con un segmento

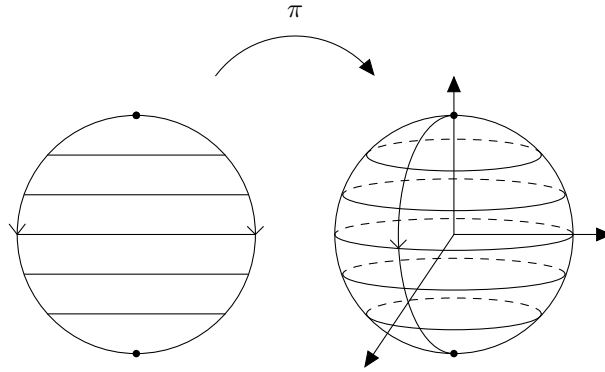


Figura 2.1: La esfera como cociente del disco  $\overline{\mathbb{B}}^2$ .

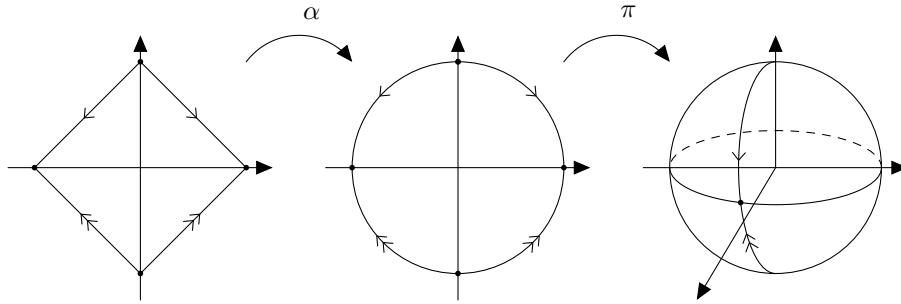


Figura 2.2: La esfera como cociente de un cuadrado.

horizontal del disco (ver Figura 2.1). Formalmente, esta aplicación  $\pi : \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  viene dada por

$$\pi(x, y) = \begin{cases} (-\sqrt{1-y^2} \cos \frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}, y), & y \neq \pm 1 \\ (0, 0, y), & y = \pm 1 \end{cases}$$

Es claro que  $\pi$  es continua y hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia. Como es sobreyectiva, por el teorema de la aplicación cerrada es una aplicación cociente. ESTO HAY QUE ARREGLARLO PARA INTENTAR NO APELAR AL B.0.2 Para probar (b), sea  $\alpha : S \rightarrow \overline{\mathbb{B}}^2$  el homeomorfismo construido a partir de la aplicación dada en la demostración de ?? que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de  $S$  a un segmento paralelo a este, que une el centro del disco y su frontera. Hagamos ahora  $\beta = \pi \circ \alpha : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , donde  $\pi$  es la aplicación cociente del párrafo anterior. Tenemos entonces que  $\beta$  identifica  $(x, y)$  y  $(-x, y)$  cuando  $(x, y) \in \partial S$ , y por otro lado es inyectiva, así que hace las mismas identificaciones que la aplicación cociente definida en (b), completando así la demostración (ver Figura 2.2).  $\square$

**Proposición 2.1.2.** El toro  $\mathbb{T}^2$  es homeomorfo al espacio cociente resultante de la relación de equivalencia en el cuadrado  $I \times I$  que identifica  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para todo  $x \in I$ , y  $(0, y) \sim (1, y)$  para todo  $y \in I$  (Figura 2.3).

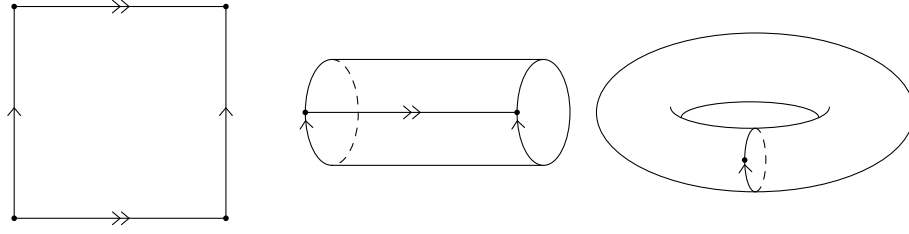


Figura 2.3: El toro como cociente de un cuadrado.

*Demostración.* Definimos la aplicación  $q : I \times I \rightarrow \mathbb{T}^2$  que manda  $q(u, v) = (e^{2\pi i u}, e^{2\pi i v})$ . Por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema B.1.6), es una aplicación cociente. Al hacer las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, por la unicidad del espacio cociente (Teorema B.1.7) se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 2.1.3.** El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  es homeomorfo a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado  $\bar{\mathbb{B}}^2$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para cada  $(x, y) \in \partial\bar{\mathbb{B}}^2$ .
- (b) El cuadrado  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para todo  $(x, y) \in \partial S$ .

*Demostración.* Sea la relación de equivalencia  $\sim$  generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para cada  $(x, y) \in \mathbb{S}^2$ , que representa  $\mathbb{P}^2$  como el cociente de una esfera en la cual se identifican polos opuestos, y sea  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  su aplicación cociente. Si  $F : \bar{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es la aplicación que manda el disco al emisferio norte de la esfera mediante la aplicación  $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ , entonces  $p \circ F : \bar{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 / \sim$  es sobreyectiva por serlo  $p$  y  $F$ , y es por tanto una aplicación cociente por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema B.1.6). La aplicación identifica únicamente  $(x, y) \in \partial\bar{\mathbb{B}}^2$  con  $(-x, -y) \in \partial\bar{\mathbb{B}}^2$ , por lo que  $\mathbb{P}^2$  es homeomorfo al espacio cociente resultante. Para la parte (b) utilizamos un argumento análogo al de la demostración de la Proposición 2.1.1 (b)  $\square$

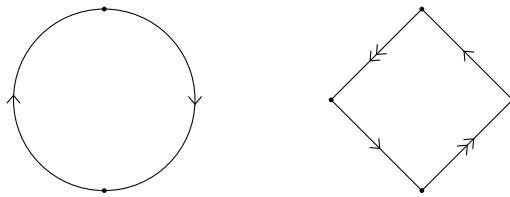


Figura 2.4: Representación de  $\mathbb{P}^2$  como un espacio cociente.

De ahora en adelante visualizaremos el plano proyectivo como el **crosscap**, que construímos a partir de la proposición anterior, tal como se sigue en la siguiente figura.

En las anteriores proposiciones hemos visto una o varias formas de representar superficies dadas ciertas construcciones geométricas. En estos casos hemos dado aplicaciones y demostraciones concretas para validar nuestros argumentos, pero a medida que aumenta la sofisticación es más útil guiarse

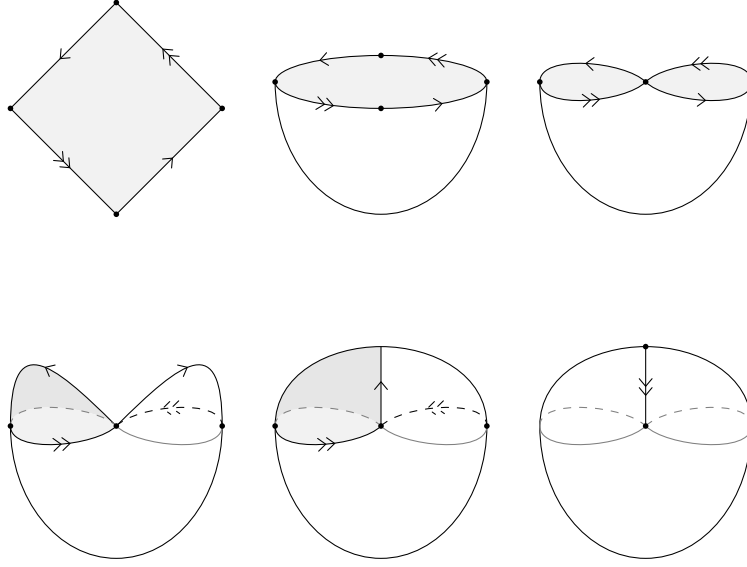


Figura 2.5: Crosscap.

visualmente por las figuras construidas. Por ello debemos formalizar un método para construir superficies identificando aristas de figuras geométricas del plano. Daremos por sabidas las definiciones básicas de símlices CW-complejos, que dejamos en el ??.

**Definición 2.1.4.** Un **polígono** es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  y está formado por un número finito de segmentos, que llamaremos **aristas** y que se intersecan sólo en sus extremos, que llamaremos **vértices**.

**Definición 2.1.5.** Una **región poligonal** es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  cuyo interior es homeomorfo al disco  $\mathbb{B}^2$  y cuya frontera es un polígono. A los vértices y aristas del polígono de la frontera también los llamamos vértices y aristas de la región poligonal.

Veamos pues que identificando aristas de regiones poligonales de par en par obtenemos un espacio cociente que es siempre una superficie:

**Proposición 2.1.6.** Sean  $P_1, \dots, P_k$  regiones poligonales en el plano, y sea  $P = P_1 \amalg \dots \amalg P_k$ , y supongamos dada una relación de equivalencia en  $P$  que identifica algunas aristas de los polígonos con otros por homeomorfismos afines. Entonces se tiene:

- (a) Si la relación de equivalencia identifica cada arista de cada  $P_i$  con exactamente otra arista de un  $P_j$  (no necesariamente  $i \neq j$ ), entonces el espacio cociente resultante es una superficie compacta.
- (b) Si para algunos  $P_i$  la relación de equivalencia identifica alguna arista suya con exactamente otra arista de un  $P_j$  (no necesariamente  $i \neq j$ ), y para las aristas restantes no hay ninguna identificación, entonces el espacio cociente resultante es una superficie con borde compacta.

*Demostración.* Para demostrar esta propiedad seguiremos una idea similar a la de la Proposición 1.3.2. Para probar (a), denotemos por  $M$  el espacio cociente, y sea  $\pi : P \rightarrow M$  la proyección. Por un lado, los puntos que provienen del interior de cada región poligonal son abiertos en  $M$  por definición, y por

lo tanto son entornos euclideos de cada uno de sus puntos. Así, tenemos que aquí  $M$  es localmente euclídea, y además Hausdorff y IIAN

Sea ahora  $D$  la imagen por  $\pi$  del interior de una arista de una región poligonal, y sea  $d \in D$ . Veamos que  $d$  tiene un entorno Euclideo. Por un lado,  $d$  tiene exáctamente dos preimágenes  $x$  e  $y$ , cada una en el interior de una arista distinta  $D_1$  y  $D_2$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que estas dos aristas pertenecen respectivamente a  $P_1$  y  $P_2$  ( $P_1$  puede ser igual a  $P_2$ ), y denotemos por  $h : D_2 \rightarrow D_1$  un homeomorfismo tal que  $h(y) = x$ . Dado que cada  $P_i$  es una variedad con borde, y  $x, y$  son puntos borde, podemos elegir cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  para  $P_1$  y  $(V, \psi)$  para  $P_2$  tal que  $x \in U$ ,  $y \in V$ . Denotamos  $\hat{U} = \varphi(U)$ ,  $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$  y podemos asumir, contrayendo  $U$  y  $V$  si es necesario, que  $h(V \cap D_2) = U \cap D_1$ , y que  $\hat{U} = U_0 \times [0, \varepsilon)$ ,  $\hat{V} = V_0 \times [0, \varepsilon)$  para un  $\varepsilon > 0$  y unos subconjuntos  $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}$  como se muestra en la ?? AUNPORHACER. Así pues podemos escribir las aplicaciones coordenadas como  $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$ ,  $\psi(y) = (\psi_0(y), \psi_1(y))$  con  $\varphi_0 : U \rightarrow U_0$ ,  $\varphi_1 : U \rightarrow [0, \varepsilon)$ ,  $\psi_0 : V \rightarrow V_0$  y  $\psi_1 : V \rightarrow [0, \varepsilon)$  aplicaciones continuas. Que  $x$  e  $y$  sean puntos borde significa que  $\varphi_1(x) = \psi_1(y) = 0$ .

Queremos ensamblar estas dos cartas con una aplicación cuya imagen sea un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , pegándolas por los puntos que se corresponden en  $D_1$  y  $D_2$ . En la demostración de la Proposición 1.3.2 teníamos un homeomorfismo entre los puntos borde de los entornos, pero en este caso el problema es que las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  no tienen por qué llevar puntos borde que se correspondan al mismo punto imagen, y por tanto tenemos que ajustarlo. Se tiene que las dos restricciones

$$\varphi_0|_{U \cap D_1} : U \cap D_1 \rightarrow U_0 \quad \psi_0|_{V \cap D_2} : V \cap D_2 \rightarrow V_0$$

son homeomorfismos, y definimos así el homeomorfismo  $\beta : V_0 \rightarrow U_0$  por

$$\beta = (\varphi_0|_{U \cap D_1}) \circ h \circ (\psi_0|_{V \cap D_2})^{-1}.$$

Sea ahora  $B : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación

$$B(y_1, y_2) = (\beta(y_1), -y_2).$$

Geométricamente,  $B$  actúa juntando cada punto borde de acuerdo con  $\beta$ , y dando la vuelta al segmento que está por encima de él, llevándolo a un segmento por debajo (como en la Figura AUNPOR HACER ??). Esta construcción nos asegura que

$$B \circ \psi(y) = (\beta \circ \psi_0(y), 0) = (\varphi_0 \circ h(y), 0) = \varphi \circ h(y). \quad (2.1)$$

Definimos ahora  $\tilde{\Phi} : U \amalg V \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\tilde{\Phi}(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in U, \\ B \circ \psi(y), & y \in V. \end{cases}$$

Dado que  $U \amalg V$  es un abierto saturado de  $M$ , la restricción  $\pi|_{U \amalg V} : U \amalg V \rightarrow \pi(U \amalg V)$  es una aplicación cociente en el entorno  $\pi(U \amalg V)$  de  $d$ , y por (2.1)  $\tilde{\Phi}$  pasa al cociente y define una aplicación continua e inyectiva  $\Phi : \pi(U \amalg V) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Como  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $B$  son homeomorfismos entre sus dominios y sus imágenes, podemos definir la inversa de  $\Phi$  de la siguiente manera:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{cases} \pi \circ \varphi^{-1}(s), & s_2 \geq 0, \\ \pi \circ \psi^{-1} \circ B^{-1}(s), & s_2 \leq 0. \end{cases}$$

Dado que las dos partes de la función son iguales donde coinciden, la aplicación es continua, y por tanto  $\Phi$  es un homeomorfismo. Así pues,  $U \amalg V$  es un entorno Euclideo de  $d$ . Un argumento análogo

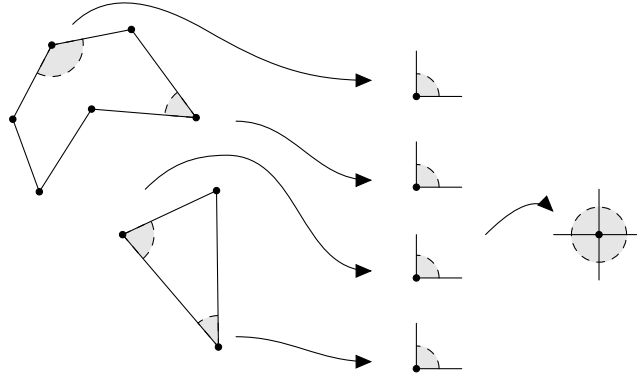


Figura 2.6: Entorno euclídeo de un vértice.

al de la demostración de la Proposición 1.3.2 nos indica que es Hausdorff y IIAN.

Para finalizar, sea  $v \in M$  tal que su preimagen por  $\pi$  es un conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq P$ . Para cada uno de estos vértices podemos elegir un  $\varepsilon > 0$  tal que el disco  $B_\varepsilon(v_i)$  no contenga ningún vértice de la región poligonal  $P_j$  a la que pertenece  $v_i$  a parte de sí mismo, y tal que no interseca más aristas que las que lo contienen.  $B_\varepsilon(v_i) \cap P_j$  es homeomorfo a un subconjunto  $\Lambda_i$  de  $\mathbb{R}^2$  definido por la intersección de dos semiplanos cuyas fronteras coinciden en un único punto y tal que el ángulo que forman es de  $2\pi/k$ , y que descrito en coordenadas polares queda  $\Lambda_i = \{(r, \theta) \mid \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2k\pi\}$ . El homeomorfismo viene dado por una traslación del vértice  $v_i$  al origen junto con una aplicación que en coordenadas polares es de la forma  $(r, \theta) \mapsto (r, \theta_0 + c\theta)$ , con  $c$  y  $\theta_0$  constantes. Como cada arista está asociada exáctamente a otra arista, podemos ahora construir una aplicación que envíe cada una de las  $\Lambda_i$  a un conjunto que contenga un entorno del origen y que, después de reescalar si es necesario, respete las identificaciones entre las aristas de los  $P_j$  (ver Figura 2.6). Esta aplicación está definida sobre un conjunto saturado de  $P$ , que al pasar al cociente determina un homeomorfismo de  $v$  a un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$ . HAUSDORFF Y IIAN?

Finalmente, para probar (b), volvemos a ver cada polígono como una superficie con borde. Las imágenes por  $\pi$  de los puntos del interior de aristas que se identifican son localmente euclídeos por la demostración del apartado anterior. Por otro lado, para los puntos del borde que provengan de una arista y que tengan sólo una preimagen podemos encontrar como semibolas coordenadas las mismas de antes de pasar al cociente. Finalmente para las imágenes por  $\pi$  de los vértices podemos encontrar una bola o una semibola coordenada con una construcción similar a la de la demostración anterior, dependiendo de si estas imágenes están contenidas en el borde o no. Por tanto se tiene que el espacio cociente resultante es una superficie con borde. HAUSDORFF Y IIAN?  $\square$

**Ejemplo 2.1.7.** La *botella de Klein* es la superficie  $K$  obtenida identificando las aristas del cuadrado  $I \times I$  de acuerdo a  $(0, t) \sim (1, t)$  y  $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Para visualizar  $K$ , podemos pensar en pegar las aristas izquierda y derecha creando un cilindro, y luego hacer pasar el extremo superior por la parte inferior del cilindro, para finalmente pegar los dos extremos (ver Figura 2.7).

**Ejemplo 2.1.8.** Veamos ahora como obtener las figuras del Ejemplo 1.2.5. El cilindro  $Cil$  es la superficie con borde que se obtiene al identificar las aristas de un cuadrado  $I \times I$  dada la relación de equivalencia  $(0, y) \sim (1, y)$ , con  $y \in I$  (Figura 2.8a). La banda de Möbius  $Mob$  es la superficie

con borde que se obtiene identificando las aristas del cuadrado  $I \times I$  de acuerdo a la relación  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ ,  $y \in I$  (Figura 2.8b).

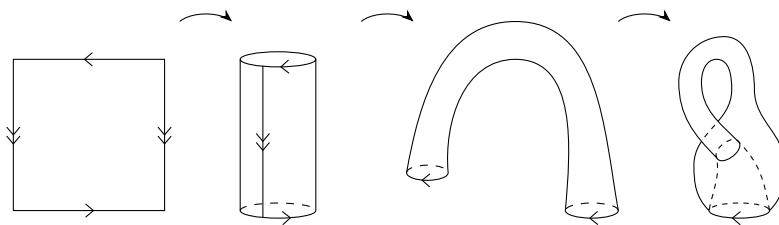


Figura 2.7: Construcción de la botella de Klein.

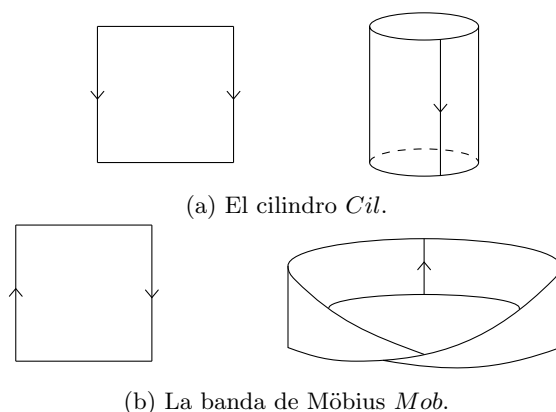


Figura 2.8: Superficies con borde como cocientes topológicos.

## 2.2. Representación de superficies

Vamos ahora a dar un método uniforme para representar todas las superficies compactas (con y sin borde) como regiones poligonales del plano. A su vez asociaremos a cada región poligonal, y por tanto a cada superficie compacta, una secuencia de símbolos llamada palabra.

**Definición 2.2.1.** Sea  $S$  un conjunto. Una **palabra en  $S$**  es una  $k$ -tupla ordenada de símbolos, cada uno de los cuales aparece de la forma  $a$  o  $a^{-1}$ , para cierto  $a \in S$ .

**Definición 2.2.2.** Una **representación poligonal**, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$$

está formada por un conjunto finito  $S$  junto con un número finito de palabras  $W_1, \dots, W_k$  en  $S$  de longitud mayor o igual que 3, tal que para todo  $a \in S$  existe un  $W_i$  tal que  $a \in W_i$ . Cuando el conjunto  $S$  esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de  $S$  y denotaremos las palabras  $W_i$  por yuxtaposición. Por ejemplo, la presentación con  $S = \{a, b\}$  y la palabra  $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$  la escribiremos  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

Permitimos también el caso en que  $S = \{a\}$  (u otro símbolo cualquiera) y que  $\mathcal{P}$  tenga una sola palabra de longitud 2, es decir,  $\langle a \mid aa \rangle$ ,  $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$ ,  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$  y  $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$ .

**Definición 2.2.3.** Una representación poligonal  $\mathcal{P}$  da lugar a un espacio topológico  $|\mathcal{P}|$ , llamado **realización geométrica de  $\mathcal{P}$** , que se obtiene de la siguiente manera:

1. Para cada  $W_i \in \mathcal{P}$  de longitud  $k$ , sea  $P_i$  una región poligonal convexa con  $k$  aristas, centrada en el origen, con aristas de longitud 1, ángulos iguales y tal que un vértice yacza sobre el eje  $OY$ .
2. Definimos una biyección (que llamaremos *etiquetado*) entre los símbolos de  $W_i$  y las aristas de  $P_i$ , en sentido contrario a las agujas del reloj y empezando por la que yace en el eje  $OY$ .
3. Sea  $|\mathcal{P}|$  el espacio cociente de  $\coprod_i P_i$  determinado por la identificación de las aristas que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de las aristas con una etiqueta dada  $a$  y los últimos vertices de las que tienen la correspondiente etiqueta  $a^{-1}$  (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si  $\mathcal{P}$  es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, definimos  $|\mathcal{P}|$  como la esfera  $\mathbb{S}^2$  si la palabra es  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$ , o como el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  si la palabra es  $aa$  o  $a^{-1}a^{-1}$ .

Dadas dos palabras  $W_1$  y  $W_2$ ,  $W_1W_2$  representará la palabra formada concatenando los símbolos de  $W_1$  y  $W_2$ . Por otro lado, adoptaremos la convención de que  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

También, en lo que sigue,  $S$  denotará una secuencia cualquiera de símbolos,  $a, b, c, a_1, a_2, \dots$  símbolos de  $S$ ,  $e$  un símbolo que no sea de  $S$  y  $W_1, W_2, \dots$  palabras formadas por símbolos de  $S$ .

**Definición 2.2.4.** Los interiores, las aristas y los vértices de cada región poligonal  $P_i$  se llaman **caras, aristas y vértices de la representación**. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de aristas coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para una arista etiquetada con  $a$ , el **vértice inicial** es el primero en el sentido contrario de las agujas del reloj, y el otro es el **vértice final**. Para una arista etiquetada  $a^{-1}$ , estas definiciones se invierten.

**Definición 2.2.5.** Sea  $\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$  una representación poligonal.

- (i) Decimos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de una superficie** si para todo  $a \in S$ ,  $a$  ocurre exáctamente dos veces en  $W_1, \dots, W_k$  como  $a$  o como  $a^{-1}$ .
- (ii) Si en cambio en la representación poligonal cada símbolo  $a \in S$  ocurre una o dos veces en  $W_1, \dots, W_k$  como  $a$  o  $a^{-1}$ , diremos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de una superficie con borde**.

**Observación 2.2.6.** Por la Proposición 2.1.6, la realización geométrica de una representación de una superficie es una superficie compacta, y la realización geométrica de una representación de una superficie con borde es una superficie con borde compacta.

En el apartado (ii) de la definición anterior dejamos la posibilidad de que cada símbolo aparezca exáctamente dos veces, como en (i). Esto no es ninguna ambigüedad pues como se expuso en la Sección 1.2 una superficie sin borde es siempre una superficie con borde, y una superficie con borde tal que tiene borde vacío es una superficie sin borde.

**Definición 2.2.7.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $\mathcal{P}$  una representación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a  $\mathcal{P}$ , decimos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de  $X$** .

**Observación 2.2.8.** Un espacio topológico que admite una representación con una sola cara es conexo, pues es homeomorfo al cociente de una región poligonal conexa. Con más de una cara, puede ser o no conexo.

**Ejemplo 2.2.9.** Veamos las representaciones de algunas superficies importantes (ver Figura 2.9 y Figura 2.10).



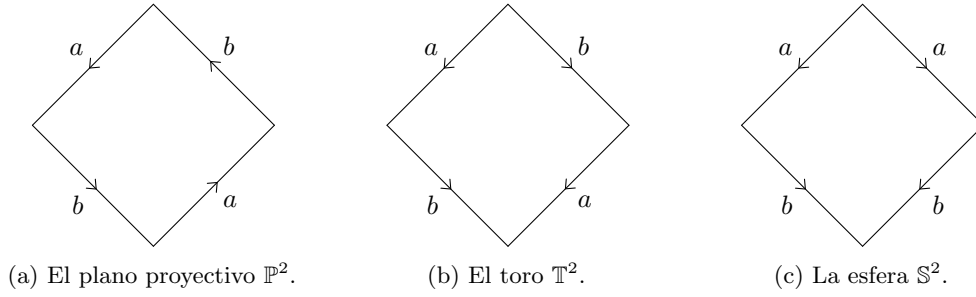


Figura 2.9: Representación de superficies importantes.

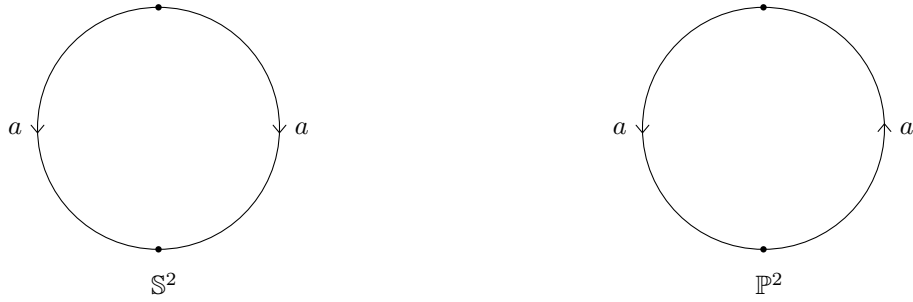


Figura 2.10: Representaciones de la esfera y el plano proyectivo.

(a)  $\mathbb{S}^2 = \langle a \mid aa^{-1} \rangle = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$  (Proposición 2.1.1)

(b)  $\mathbb{P}^2 = \langle a \mid aa \rangle = \langle a, b \mid abab \rangle$  (Proposición 2.1.3)

(c)  $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$  (Proposición 2.1.2)

**Ejemplo 2.2.10.** Podemos dar también las representaciones de algunas superficies con borde (Figura 2.11):

(a)  $\mathbb{B}^2 = \langle a, b, c \mid abc \rangle$ .

(b)  $Mob = \langle a, b, c \mid abac \rangle$  (Ejemplo 2.1.8).

(c)  $Cil = \langle a, b, c \mid aba^{-1}c \rangle$  (Ejemplo 2.1.8).

Parece claro que, además de  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{P}^2$ , una superficie pueda tener varias presentaciones poligonales. Sea por ejemplo la presentación del toro  $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Intuitivamente podemos ver que, subdividiendo las aristas etiquetadas con  $a$  y reetiquetándolas con  $e$  y  $a$  (ver Figura 2.12), la superficie que representa la representación obtenida  $\langle a, e, b \mid aeb^{-1}e^{-1}a^{-1}b \rangle$  será la misma. Vamos ahora a desarrollar unas reglas generales de transformación de representaciones de superficies que den lugar a superficies homeomorfas.

**Definición 2.2.11.** Sean  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  dos representaciones tal que sus realizaciones geométricas son homeomorfas. Entonces decimos que son *topológicamente equivalentes* y escribimos  $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ .

Vamos a definir ahora unas operaciones elementales sobre las representaciones poligonales. Veremos luego que estas dan lugar a representaciones equivalentes.

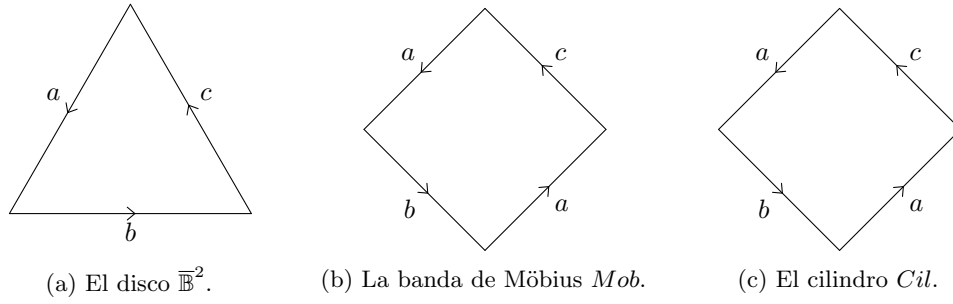


Figura 2.11: Representación de superficies con borde.

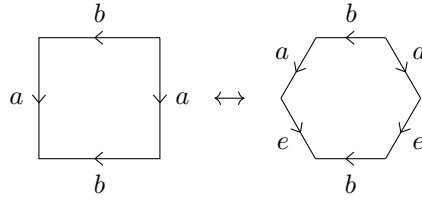


Figura 2.12: Subdividir/consolidar.

**Definición 2.2.12.** A las siguientes operaciones las llamamos *transformaciones elementales* de una representación poligonal:

- **Reetiquetar:** Se refiere a tres cambios distintos que se pueden dar sobre la representación: cada vez que aparece un símbolo  $a$ , cambiarlo por otro símbolo que no esté todavía en la representación; intercambiar entre ellos dos símbolos  $a$  y  $b$  de la representación cada vez que aparezcan; intercambiar todas las  $a$  por  $a^{-1}$  y las  $a^{-1}$  por  $a$ .
- **Subdividir** (Figura 2.12): Cada vez que aparezca  $a$ , sustituirlo por  $ae$ , y cada vez que aparezca  $a^{-1}$  sustituirlo por  $e^{-1}a^{-1}$ , donde  $e$  es un símbolo que no está antes en la presentación.
- **Consolidar** (Figura 2.12): Si  $a$  y  $b$  aparecen siempre de forma adyacente, intercambiar  $ab$  por  $a$  y  $b^{-1}a^{-1}$  por  $a^{-1}$ , siempre que esto de lugar a una o más palabras de longitud al menos 3 o a una sola palabra de longitud 2.
- **Reflejar** (Figura 2.13a):

$$\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Rotar** (Figura 2.13b):

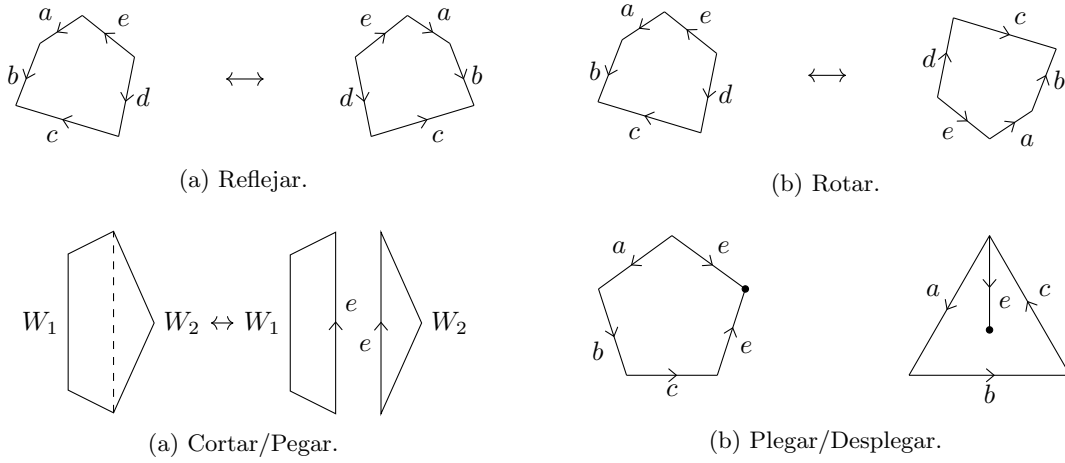
$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Cortar** (Figura 2.14a): Si  $W_1$  y  $W_2$  tienen longitud al menos 2,

$$\langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

- **Pegar** (Figura 2.14a):

$$\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$



- **Plegar** (Figura 2.14b): Si  $W_1$  tiene longitud al menos 3,

$$\langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

También podemos utilizar esta transformación en el caso de que  $W_1$  tenga longitud 2, siempre que la representación tenga una única palabra.

- **Desplegar** (Figura 2.14b):

$$\langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

**Proposición 2.2.13.** Las operaciones elementales sobre representaciones poligonales dan lugar a representaciones poligonales topológicamente equivalentes.

*Demostración.* Los pares subdividir/consolidar, cortar/pegar y plegar/desplegar son inversos, con lo que basta probar la proposición para una transformación de cada par. Los casos de reetiquetar, reflejar y rotar son cambios puramente formales que no afectan al espacio cociente. Empecemos con la operación de cortar. Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos regiones poligonales convexas etiquetadas por las palabras  $W_1 e$  y  $e^{-1} W_2$  y sea  $P'$  la region poligonal etiquetada por  $W_1 W_2$ . Supongamos de momento que no hay más palabras en las respectivas representaciones. Sean también  $\pi : P_1 \amalg P_2 \rightarrow M$  y  $\pi' : P' \rightarrow M'$  respectivamente las aplicaciones cocientes. El segmento que va desde el vértice final de  $W_1$  en  $P'$  a su vértice inicial yace en  $P'$  por convexidad, y lo etiquetamos con  $e$ . La aplicación  $\tilde{f} : \partial P_1 \amalg \partial P_2 \rightarrow \partial P'$  que lleva cada arista de  $P_1$  o  $P_2$  a su correspondiente arista en  $P'$  es continua y se puede extender a una aplicación continua  $f : P_1 \amalg P_2 \rightarrow P'$  cuya restricción a cada  $P_i$  sea un homeomorfismo sobre su imagen. Por el teorema de la aplicación cerrada,  $f$  es una aplicación cociente. Dado que  $f$  identifica únicamente las aristas  $e$  y  $e^{-1}$ , las aplicaciones cociente  $\pi' \circ f$  y  $\pi$  hacen exactamente las mismas identificaciones, y por tanto los espacios cociente  $M$  y  $M'$  son homeomorfos. En el caso de que hubiese otras palabras  $W_3, \dots, W_k$ , simplemente extendemos  $f$  sobre sus respectivas representaciones poligonales como la identidad, y procedemos como antes.

Para la operación de consolidar empezamos considerando las palabras de longitud 3 o más. Para ello, sean  $P_1$  y  $P_2$  las regiones poligonales etiquetadas respectivamente por  $a e W e^{-1} a^{-1} W'$  y  $a W a^{-1} W'$  (pudiendo ser  $W'$  vacía), sean  $M$  y  $M'$  los espacios cociente y sean  $\pi : P_1 \rightarrow M$  y  $\pi' : P_2 \rightarrow M'$  las respectivas aplicaciones cociente. Podemos construir un homeomorfismo  $f : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$ , que lleve la

arista  $a$  en  $P_1$  a la primera mitad de  $a$  en  $P_2$ , la arista  $e$  a la segunda mitad de la arista  $a$  en  $P_2$ , que lleve de forma análoga  $e^{-1}$  y  $a^{-1}$  en  $P_1$  a la arista  $a^{-1}$  en  $P_2$ , y tal que sea la identidad en  $W$  y  $W'$ . Podemos extender este homeomorfismo a un homeomorfismo de  $P_1$  en  $P_2$ , y se tiene entonces que las aplicaciones cociente  $\pi \circ f$  y  $\pi'$  hacen las mismas identificaciones, por lo que  $M$  y  $M'$  son homeomorfos. El caso de que la palabra que nos quede al aplicar la consolidación tenga longitud 2, puede provenir sólo de una representación de longitud 4 de  $\mathbb{S}^2$  o  $\mathbb{P}^2$ , quedándonos pues una de las representaciones equivalentes de longitud 2 que definimos.

Para el plegado, ignoramos como antes palabras adicionales  $W_2, \dots, W_k$ . Supongamos para empezar que  $W_1 = abcd$  tiene longitud exáctamente 4. Sea  $P$  una región poligonal convexa con aristas etiquetadas por  $abee^{-1}cd$ . Si cortamos a lo largo de el segmento  $f$  que une el vértice inicial de  $a$  con el vértice final de  $e$  y obtenemos así  $abef$  y  $f^{-1}e^{-1}cd$ . Consolidamos  $ef$  en  $h$ , obteniendo así  $ah^{-1}$  y  $bch$ . Pegamos por  $h$  y obtenemos así  $abcd$ . Si  $W_1$  tiene longitud 2 o 3, podemos subdividir para alargar la longitud de la palabra a 4, plegar, y finalmente consolidar de nuevo.  $\square$

**Proposición 2.2.14.** Sea  $M$  una superficie que admite como representación  $\langle S \mid W \rangle$ . Sea  $B$  un disco coordenado regular en  $M$ . Entonces  $\langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$  es una representación de  $M \setminus B$ .

*Demostración.* Consideramos la representación  $\mathcal{P} = \langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1}, abc \rangle$  (Figura 2.15). Pegando a lo largo de  $a$  y doblando dos veces, tenemos que  $\mathcal{P}$  es una representación equivalente a  $\langle S \mid W \rangle$  y por tanto es una representación de  $M$ . Llamemos  $B$  a la imagen por la proyección  $\pi$  en  $M$  del interior de la región poligonal cuya frontera es  $abc$ . Veamos que  $B$  es un disco coordenado regular, es decir, que existe un entorno  $B'$  de  $B$  en  $M$  y un homeomorfismo  $\phi : B' \rightarrow \mathbb{R}^2$  que manda  $B$  a  $\mathbb{B}^2$  y  $\overline{B}$  a  $\overline{\mathbb{B}^2}$ . Siguiendo la figura Figura 2.15, sean  $P_1$ ,  $Q$  y  $P'_1$  regiones poligonales convexas etiquetadas respectivamente por las palabras  $Wc^{-1}b^{-1}a^{-1}$ ,  $abc$  y  $W$ . Si triangulamos las regiones poligonales como en la imagen, obtenemos una aplicación simplicial  $f : P_1 \amalg Q \rightarrow P'_1$  que lleva  $Q$  a el triángulo  $Q' \subseteq P'_1$ , que comparte un vértice  $v$  con  $P'_1$ . La composición  $\pi \circ f : P_1 \amalg Q \rightarrow M$  respeta las identificaciones hechas por la aplicación cociente  $\pi : P'_1 \rightarrow M$ , por lo que se tiene un homeomorfismo de  $M$ , que lleva  $B$  a la imagen de  $Q'$ .

Ahora, fijémonos en la demostración de la Proposición 2.1.6 (a). Cuando construimos el entorno Euclídeo de un vértice, ensamblábamos las regiones del plano  $\Lambda$  que se correspondían con los varios vértices en un mismo disco coordenado. Aplicando esa construcción al vértice  $v$ , llevamos  $Q'$  a un conjunto que es homeomorfo a un disco cerrado en el plano, y entonces extendemos ese homeomorfismo a un disco abierto que lo contiene.

Se tiene por tanto que la realización geométrica de  $\langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$  es homeomorfa a  $M \setminus B$ , y que  $\partial B$  es la imagen de las aristas  $c^{-1}b^{-1}a^{-1}$   $\square$

**Proposición 2.2.15.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies que admiten respectivamente representaciones  $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$  y  $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos disjuntos y tal que cada presentación tiene una sola cara. Entonces  $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$  es una representación de la suma conexa  $M_1 \# M_2$ .

*Demostración.* Se sigue de la proposición anterior que la realización geométrica de  $\langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1} \rangle$  es homeomorfa a  $M'_1 = M_1 \setminus B_1$  y un argumento análogo nos indica que  $\langle S_2, a, b, c \mid abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $M_2$  menos un disco coordenado, que denotamos por  $M'_2 = M_2 \setminus B_1$ . Por tanto se tiene que  $\langle S_1, S_2, a, b, c \mid W_1, c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $M'_1 \amalg M'_2$  con las fronteras de los respectivos discos identificados, es decir,  $M_1 \# M_2$ . Finalmente, pegando por  $a$  y doblando dos veces, se obtiene la presentación  $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$ .  $\square$

**Ejemplo 2.2.16.** Con la proposición anterior podemos aumentar nuestra lista de superficies conocidas. A estas representaciones las llamaremos representaciones *estándar*.

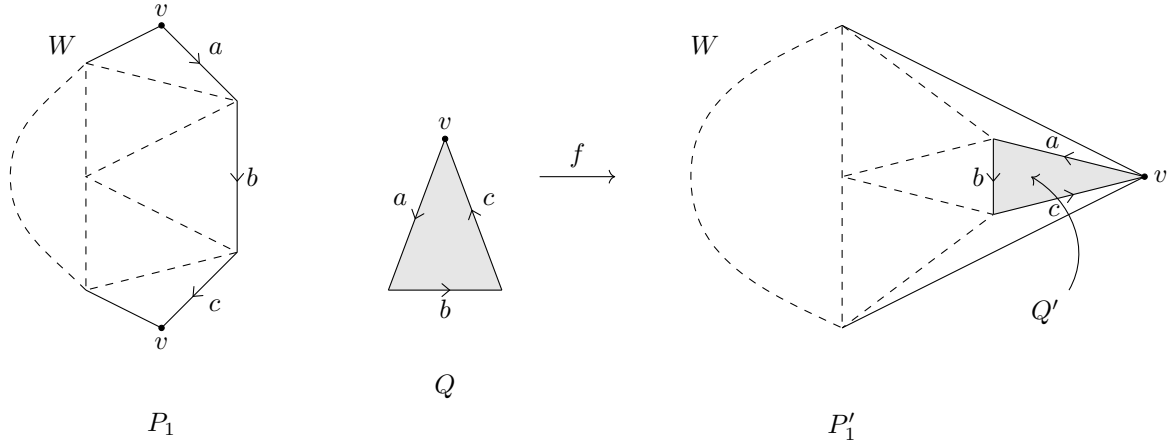


Figura 2.15: La representación  $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$ .

(a) *Esfera*

$$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de  $n$  toros.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de  $n$  planos proyectivos.*

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle$$

Hemos visto que toda representación poligonal da lugar a una superficie compacta. Veamos que el recíproco también es cierto.

**Proposición 2.2.17.** Sea  $M$  una superficie compacta. Entonces tiene una representación poligonal.

*Demostración.* Por el Teorema de Radó,  $M$  es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial  $K$  de dimensión 2, que denotaremos por  $|K|$ , en donde todo 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices. Sea  $\mathcal{P}$  la representación poligonal de una superficie que consta de una palabra de longitud 3 por cada 2-símplice, y cuyas aristas tienen las mismas etiquetas si y solo si corresponden al mismo 1-símplice. Veamos que la realización geométrica de  $\mathcal{P}$  es homeomorfa al poliedro  $|K|$ . Si  $P = P_1 \amalg \dots \amalg P_k$  denota la unión disjunta de los 2-símplices de  $K$ , entonces tenemos dos aplicaciones cociente  $\pi_K : P \rightarrow |K|$  y  $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |\mathcal{P}|$ . Por la unicidad del espacio cociente, hay que ver, por tanto, que hacen las mismas identificaciones. Sabemos que ambas aplicaciones son inyectivas en el interior de los 2-símplices, que identifican vértices únicamente con vertices y que identifican las aristas de la misma manera. Falta por tanto demostrar que  $\pi_K$  y  $\pi_{\mathcal{P}}$  identifican los vértices sólo de acuerdo a la relación generada por la identificación de las aristas.

Supongamos que  $v \in K$  es un vértice. Se tiene que  $v$  pertenece a un 1-símplice, pues si no sería un punto aislado de  $|K|$ , lo que contradice que  $|K|$  sea una variedad. El Teorema de Radó nos garantiza que este 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices. Definimos una relación de equivalencia sobre los dos 2-símplices que contienen a  $v$ : si  $\sigma, \sigma'$  son dos 2-símplices que contienen a  $v$ , decimos que están **contactados por arista en  $v$**  si hay una secuencia  $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$  de 2-símplices

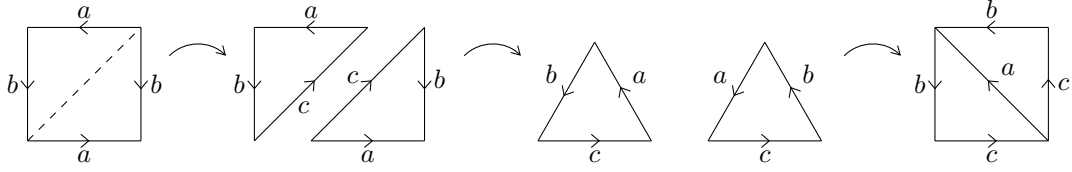


Figura 2.16: Transformación de la bottella de Klein en  $\mathbb{P}^2$ .

que contienen a  $v$  talque cada  $\sigma_i$  comparte una arista con  $\sigma_{i+1}$ , para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Vamos a comprobar por tanto que sólo hay una relación de equivalencia. Supongamos, por reducción al absurdo, que podemos agrupar los 2-símplices que contienen a  $v$  en dos conjuntos disjuntos  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  y  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  tales que todo  $\sigma_i$  está conectado por arista con todo  $\sigma_j$  pero ningún  $\tau_i$  está conectado con ningún  $\sigma_j$ . Sea un  $\varepsilon > 0$  tal que la bola  $B_\varepsilon(v)$  interseca sólo los símplexes que contienen a  $v$ . Se tiene entonces que  $B_\varepsilon(v) \cap |K|$  es un abierto de  $|K|$  y por tanto una superficie, por lo que  $v$  tiene un entorno  $W \subseteq B_\varepsilon(v) \cap |K|$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , y así pues  $W \setminus \{v\}$  es conexo. Pero si denotamos ahora los conjuntos

$$U = W \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) \setminus \{v\}$$

$$V = W \cap (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_m) \setminus \{v\}$$

entonces  $U$  y  $V$  son dos abiertos disjuntos de  $|K|$  cuya intersección con cada símplex es abierta en el símplex, y así,  $W = U \cup V$  es una desconexión de  $W$ . Pero esto es una contradicción.  $\square$

### 2.3. Teorema de clasificación de superficies compactas

Ya tenemos la maquinaria necesaria para hacer una primera demostración de la primera parte del Teorema de Clasificación. Como venimos anunciando desde el principio del presente trabajo nuestras superficies fundamentales son el toro  $\mathbb{T}^2$ , la esfera  $\mathbb{S}^2$ , y el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . ¿Qué pasa con las otras superficies que hemos visto, como la botella de Klein o la suma conexa de un toro y un plano proyectivo? La respuesta la obtenemos de los dos siguientes lemas.

**Lema 2.3.1.** La botella de Klein es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

*Demostración.* Vamos a demostrarlo haciendo transformaciones elementales sobre la representación de la botella de Klein vista en el Ejemplo 2.2.9. Siguiendo la figura Figura 2.16, tenemos

$$\begin{aligned} \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle & \\ & \approx \langle a, b, c \mid abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle && \text{(cortar por } c) \\ & \approx \langle a, b, c \mid bca, a^{-1}cb \rangle && \text{(rotar y reflejar)} \\ & \approx \langle b, c \mid bbcc \rangle && \text{(pegar por } a \text{ y rotar)} \end{aligned}$$

Y esto es la presentación poligonal de la suma conexa de dos planos proyectivos.  $\square$

**Lema 2.3.2.** La suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

*Demostración.* Partimos de una representación poligonal de  $K \# \mathbb{P}^2$ , que es, por el lema anterior, una presentación de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$  y procedemos haciendo transformaciones elementales:

$$\begin{aligned}
\langle a, b, c \mid abab^{-1}cc \rangle & \\
&\approx \langle a, b, c, d \mid cabd^{-1}, c^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle && \text{(rotar, cortar por } d \text{ y reflejar)} \\
&\approx \langle a, b, d \mid abd^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle && \text{(rotar y pegar por } c) \\
&\approx \langle a, b, d, e \mid a^{-1}d^{-1}abe, b^{-1}de \rangle && \text{(cortar por } e \text{ y reflejar)} \\
&\approx \langle a, d, e \mid a^{-1}d^{-1}adee \rangle && \text{(rotar y pegar por } b)
\end{aligned}$$

Esta última es, tal como queríamos, una representación de  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ .  $\square$

**Teorema 2.3.3** (Clasificación de Superficies Compactas). Toda superficie compacta y conexa no vacía es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- (a) La esfera  $\mathbb{S}^2$ .
- (b) Una suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  de copias del toro.
- (c) Una suma conexa  $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  de copias del plano proyectivo.

A estas superficies las llamamos *superficies estándar*.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie junto con una representación poligonal suya, que existe por la Proposición 2.2.17. Probaremos el teorema haciendo transformaciones elementales sobre esta representación hasta llegar a una de las estándar. Diremos que dos aristas de una representación poligonal con una misma etiqueta son **complementarias** si aparecen tanto en la forma  $a$  como en la de  $a^{-1}$ , y diremos que son **torcidas** si aparecen únicamente como  $a, \dots, a$  o como  $a^{-1}, \dots, a^{-1}$ . PASO 1:  $M$  admite una representación con una sola cara. Si en la representación poligonal de  $M$  aparecen dos o más caras, por ser  $M$  conexa alguna arista de una cara de  $M$  tiene que estar identificada con otra arista de otra cara de  $M$ . Si no fuese así,  $M$  sería la unión de los cocientes de sus caras, y dado que cada uno de esos cocientes es abierto y cerrado, desconectarían  $M$ . Por tanto, a través de sucesivos pegados, con rotaciones y reflexiones si es necesario, podemos reducir el número de caras hasta una.

PASO 2: O bien  $M$  es homeomorfa a la esfera, o bien  $M$  admite una presentación en la cual no hay pares complementarios adyacentes. Podemos ir eliminando los pares complementarios adyacentes haciendo sucesivos pegados. O bien los eliminamos todos, o bien nos queda  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ , lo que implica que  $M$  es homeomorfa a la esfera.

PASO 3:  $M$  admite una representación en la que todos los pares torcidos son adyacentes. Si todos los pares torcidos son adyacentes, procedemos al Paso 4. Si por el contrario hay un par torcido no adyacente, podemos suponer que la representación de  $M$  es de la forma  $VaWa$ , donde  $V$  y  $W$  son palabras no vacías formadas por símbolos de un conjunto no vacío  $S$ . Entonces, mediante las siguientes transformaciones (que se pueden seguir en la Figura 2.17)

$$\begin{aligned}
\langle a, S \mid VaWa \rangle & \\
&\approx \langle a, b, S \mid bVa, b^{-1}Wa \rangle && \text{(cortar por } b \text{ y rotar)} \\
&\approx \langle a, b, S \mid bVa, a^{-1}W^{-1}b \rangle && \text{(reflexión)} \\
&\approx \langle b, S \mid bbVW^{-1} \rangle && \text{(pegar por } a)
\end{aligned}$$

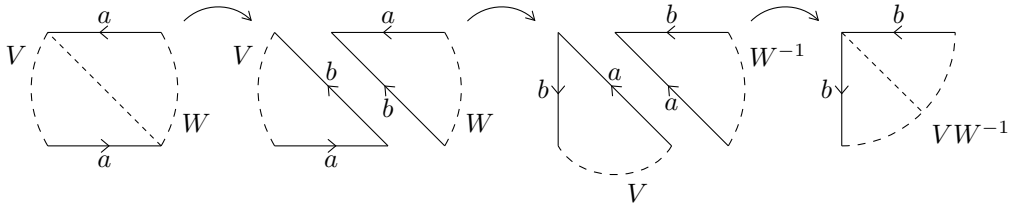


Figura 2.17: Haciendo que los pares torcidos sean adyacentes.

podemos sustituir el par torcido  $a, a$  por uno  $b, b$ , que es adyacente ( $W^{-1}$  representa la reflexión de  $W$ ). Como no hemos cortado en medio de  $V$  o  $W$ , no hemos separado otros pares adyacentes. Por otro lado, si bien al reflejar  $W$  podemos haber creado un nuevo par torcido, al haber reducido en una unidad el número total de pares torcidos no adyacentes, después de un número finito de pasos los habremos eliminado todos. Finalmente, si en este paso hemos creado nuevos pares complementarios adyacentes, repetimos el Paso 2, que tampoco incrementa el número de pares no adyacentes.

**PASO 4:** *M admite una representación en la que todos los vértices se identifican en un único punto.* Supongamos que existen al menos dos clases de equivalencia de vértices distintas. Entonces la representación poligonal tendrá dos vertices de dos clases de equivalencia distintas, llamémoslos  $v$  y  $w$ , conectados por una arista  $a$ . La otra arista que tiene a  $v$  como vértice no puede estar etiquetada con  $a$ , pues si formasen un par complementario lo habríamos eliminado en el Paso 2, y si formasen un par torcido, entonces  $v$  y  $w$  se identificarían, cuando estamos suponiendo lo contrario. Por lo tanto etiquetamos esta arista con  $b$ , y a su otro vértice lo llamamos  $x$ , el cual puede estar en la misma clase de equivalencia de  $v$ , de  $w$ , o en otra distinta.

En la representación poligonal hay otra arista que se identifica con  $b$ , y puede estar etiquetada por  $b$  o por  $b^{-1}$ . Supongamos que la etiqueta es  $b^{-1}$  (el otro caso implica sólo una reflexión adicional, que indicaremos cuándo ha de hacerse). Podemos escribir entonces la palabra que describe la representación poligonal como  $baXb^{-1}Y$ . Ahora, tal como se muestra en la Figura 2.18, si cortamos a lo largo de  $c$ , rotamos y pegamos por  $b$  (efectuando aquí la reflexión necesaria si la arista al principio aparecía como  $b$ ) obtenemos una representación equivalente en la cual el número de vértices de la clase de equivalencia de  $v$  ha disminuido, mientras que el número de vértices de la clase de  $w$  ha aumentado. Si se han creado nuevos pares complementarios adyacentes, volvemos a aplicar el Paso 2 para eliminarlos. En esta última operación, si plegamos la representación para eliminar un par complementario  $aa^{-1}$  que tiene un vértice  $v$  entre medias, podemos hacer disminuir los vértices de la clase de  $v$ , pero nunca aumentarlos. Iterando el proceso para cada clase de equivalencia, podemos quedarnos finalmente con una sola clase de vértices.

**PASO 5:** *Si la presentación tiene un par complementario  $a, a^{-1}$ , entonces tiene otro par complementario  $b, b^{-1}$  que aparece intercalado con el primero, en la forma  $a, \dots, b, \dots, a^{-1}, \dots, b^{-1}$ .* Si no es así, entonces la presentación es de la forma  $aXa^{-1}Y$ , donde  $X$  contiene sólo aristas de pares complementarios o pares torcidos adyacentes, igual que  $Y$ . Por lo tanto cada arista en  $X$  se identifica con otra arista en  $X$ , y lo mismo pasa en  $Y$ . Esto implica que los vértices finales de  $a$  y  $a^{-1}$ , que tocan únicamente  $X$ , se identifican sólo con vértices de  $X$ , y que los vértices iniciales de  $a$  y  $a^{-1}$  se identifican sólo con vértices de  $Y$ . Esto es una contradicción, puesto que todos los vértices se identifican unos con otros por el Paso 4.

**PASO 6:** *M admite una presentación en la que todos los pares complementarios intercalados aparecen juntos con ninguna otra arista entre ellos:  $aba^{-1}b^{-1}$ .* Si no es así, podemos describir la representación poligonal por la palabra  $WaXbYa^{-1}Zb^{-1}$ . Hacemos, como en la figura Figura 2.19, las siguientes transformaciones: cortamos a lo largo de  $c$ , pegamos por  $a$ , cortamos a lo largo de  $d$ , y pegamos



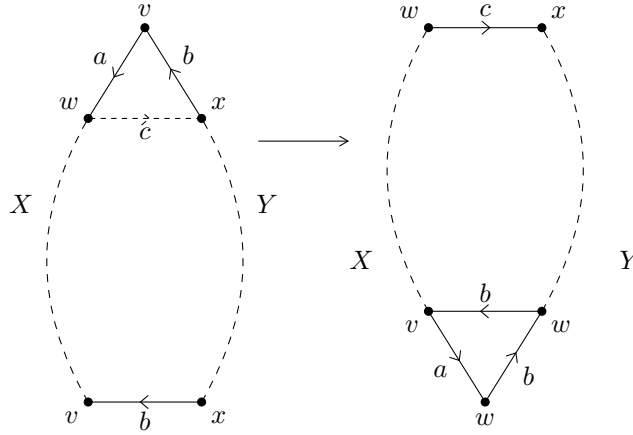


Figura 2.18: Reduciendo el número de vértices equivalentes a  $v$ .

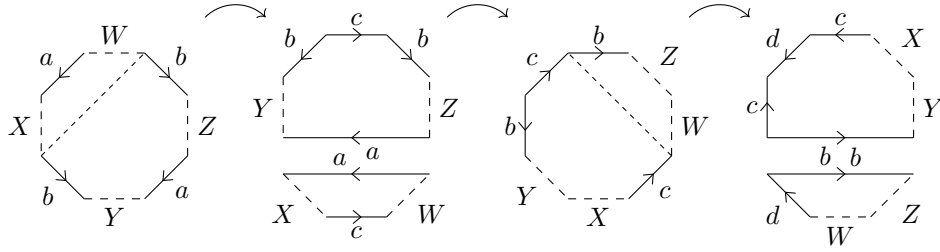


Figura 2.19: Poniendo los pares complementarios juntos.

finalmente por  $b$ . Obtenemos así la palabra  $cdc^{-1}d^{-1}WZYX$ , sustituyendo por tanto los dos pares adyacentes por un nuevo par intercalado  $cdc^{-1}d^{-1}$ , sin separar otras aristas que previamente eran adyacentes. Por lo tanto, repitiendo el proceso por cada grupo de pares complementarios se obtiene el resultado.

**PASO 7:**  $M$  es homeomorfa a la suma conexa de uno o más toros o a la suma conexa de uno o más planos proyectivos. Este es el paso que finaliza la demostración. Recapitulando lo hecho en los pasos anteriores, tenemos una representación de  $M$  (que llamaremos *representación estándar*) en la cual todos los pares torcidos aparecen uno junto al otro y todos los pares complementarios aparecen intercalados en grupos de dos, en la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ . Por tanto esta es la representación de una suma conexa de copias del  $\mathbb{T}^2$  (representadas por los bloques  $aba^{-1}b^{-1}$ ) y de copias de  $\mathbb{P}^2$  (representadas por los  $cc$ ). Si sólo aparecen copias de un tipo, hemos terminado. Nos queda el caso en el que aparecen tanto pares torcidos como pares complementarios. Si es así, algún par complementario aparece junto a un par torcido, es decir, la representación está descrita por la palabra  $aba^{-1}b^{-1}ccX$  o por  $ccaba^{-1}b^{-1}X$ . En los dos casos, tenemos la suma conexa de un toro, un plano proyectivo, y lo que represente la palabra  $X$ . Pero por el Lema 2.3.2,  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , por lo que podemos eliminar un toro de la suma conexa. Iterando un número finito de veces, eliminamos todas las apariciones de los bloques de pares complementarios, es decir, de las copias de  $\mathbb{T}^2$ , completando así la demostración.  $\square$

## 2.4. Teorema de clasificación de superficies con borde

Podemos ahora clasificar las superficies con borde a partir del Teorema de Clasificación, que nos servirá para comparar resultados con la prueba ZIP, donde se da directamente una clasificación de las superficies con borde. Empecemos definiendo un concepto con el que ya hemos trabajado:

**Definición 2.4.1.** Sea  $M$  una superficie (con o sin borde). Sea  $p \in \text{Int}(M)$  y  $U$  un entorno abierto de  $p$  en  $M$ . Sea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo tal que  $\phi(p) = 0$ . Sea  $B = \phi^{-1}(B_1(0))$ . Decimos que la nueva superficie con borde  $M^\circ = M \setminus B$  es  $M$  **1-perforada**, y a  $\partial B \subset M^\circ$  la llamamos **perforación**. Podemos repetir el proceso sobre  $M^\circ$  sucesivamente, obteniendo  $M$   $n$ -perforada con un número finito  $n \in \mathbb{N}$  de perforaciones.

**Proposición 2.4.2.** Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie con borde compacta. Vamos a demostrar que el borde  $\partial M$  es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias  $\mathbb{S}^1$ . Por el Corolario 1.2.4 se tiene que  $\partial M$  es una 1-variedad. Salvo homeomorfismo, las 1-variedades conexas son  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{S}^1$ . Por ser  $\partial M$  un subconjunto cerrado de un compacto, es también compacto, y por tanto se tiene que cada componente conexa de  $\partial M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ .

Por otro lado, vamos a ver que *pegando* discos a las componentes de  $\partial M$  se obtiene una superficie sin borde. Sea  $S = \coprod_i \mathbb{D}_i^2$  y  $f : \partial S = \coprod_i \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial M$  un homeomorfismo. Considerando  $f$  como una función de  $\partial S$  en  $M$ , definimos la relación de equivalencia  $\sim$  en la unión disjunta  $M \amalg S$  generada por  $a \sim f(a)$ , y denotamos el espacio cociente resultante por  $M^* = (M \amalg S) / \sim$ . Tenemos que ver que  $M^*$  es IAN, Hausdorff y localmente homeomorfo a un espacio euclídeo de dimensión 2. Empecemos con esto último.

Sea  $\pi : M \amalg S \rightarrow M^*$  la aplicación cociente, y sea  $B = \pi(\partial M \cup \partial S)$ . Notamos que  $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$  es un abierto saturado de  $M \amalg S$ , por lo que podemos restringir  $\pi$  a una aplicación cociente que va de  $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$  a  $M^* \setminus B$ . Dado que esta restricción es inyectiva, es un homeomorfismo, y  $M^* \setminus B$  es localmente euclídeo de dimensión 2. En estos puntos  $M$  es también IAN y Hausdorff. Por tanto nos queda considerar los puntos en  $B$ , pero esto lo tenemos por un argumento análogo al que usamos en la demostración de Proposición 1.3.2. □

Dada una superficie con borde compacta  $M$ , denotaremos por  $M^*$  la superficie compacta sin borde obtenida mediante el proceso anterior, que llamaremos **pegar** un disco cerrado a cada componente conexa de  $\partial M$ . Si en cambio empezamos por una superficie compacta sin borde  $M^*$  y construimos una superficie con borde haciendo perforaciones, ¿Van a ser homeomorfas las superficies resultantes de hacer las perforaciones en lugares distintos? La respuesta es afirmativa, pero antes necesitamos ver la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.3.** Toda superficie con borde compacta admite una representación poligonal.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie con borde compacta. Sabemos que  $M$  es triangulable por el poliedro de un complejo simplicial en el cual hay dos clases de 1-símplices: los 1-símplices cuyo interior se corresponde a puntos interiores y los 1-símplices que se corresponden a componentes del borde de  $M$ .

Podemos suponer que la triangulación satisface que ningún 1-símplice tiene los dos vértices contenidos en el borde a menos que esté contenido completamente en el borde, y un 2-símplice no tiene más de una arista en el borde. Si no fuese así, podríamos conseguir esta condición subdividiendo cada

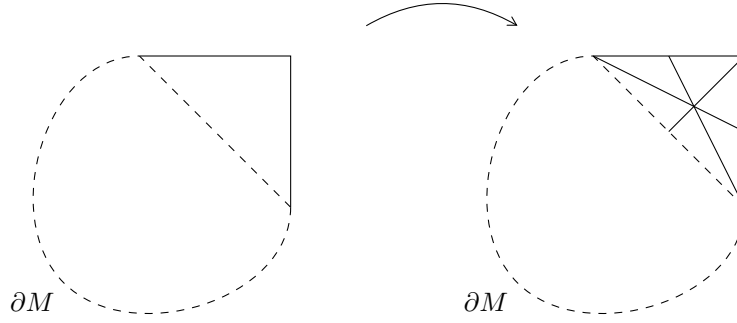


Figura 2.20: Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice que tiene dos aristas en  $\partial M$ .

arista en dos y cada 2-símplice en seis 2-símplices mediante lo que llamamos *subdivisión baricéntrica*, representada en la Figura 2.20. Subdividiendo más veces si es necesario, llegamos a una triangulación que satisface la siguiente condición más fuerte: Si  $P_i$  y  $P_j$  son dos 2-símplices tal que cada uno tiene una arista contenida en el borde de  $M$ , entonces, o bien  $P_i$  y  $P_j$  son disjuntos, o bien tienen un vértice en común  $v$ , que es un vértice del borde de  $M$ .

Denotemos por  $B_1, \dots, B_k$  las componentes de  $\partial M$ . Si  $P$  es un 2-símplice que encuentra a  $B_i$  en algún punto suyo, entonces  $P$  tiene exactamente dos aristas que tienen un vértice en  $B_i$  pero que no están contenidos en  $B_i$ . Similarmente, si  $\sigma$  es un 1-símplice que tiene un vértice en  $B_i$  pero que no yace sobre  $B_i$ , entonces  $\sigma$  es una arista de dos 2-símplices que encuentran a  $B_i$ . Podemos por tanto ordenar los 2-símplices que encuentran  $B_i$  y los 1-símplices que son aristas suyas pero que no yacen sobre  $B_i$  de la siguiente manera:

$$P_1, \sigma_1, P_2, \sigma_2, \dots, P_n, \sigma_n, P_{n+1} = P_1$$

donde cada  $\sigma_j$  es una arista de  $P_j$  y  $P_{j+1}$ , y donde cada 2-símplice  $P_k$  tiene por tanto como aristas a  $\sigma_{k-1}$  y  $\sigma_k$ . Para cada componente  $B_i$  podemos escribir de esa forma un ciclo de 2-símplices y aristas, que es único. Para cada componente del borde  $B_i$ , la unión de los 2-símplices de su ciclo asociado  $\mathcal{P}_i = \bigcup_j P_j$  es homeomorfa a una región poligonal con una perforación. La Figura 2.21 muestra un ejemplo cuando  $j = 19$ . Sean  $P'_1, \dots, P'_l$  los 2-símplices de la triangulación de  $M$  que no pertenecen a ninguna de las  $\mathcal{P}_i$ , y llamamos

$$\mathcal{P} = \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l P'_j \right).$$

Ahora sólo falta aplicar sobre  $\mathcal{P}$  el resto de la demostración de la Proposición 2.2.17.  $\square$

**Ejemplo 2.4.4.** Veamos las representaciones estándar de las superficies fundamentales perforadas. Para ello, utilizando la Proposición 2.2.14, hacemos un corte  $c_i$  desde un mismo vértice a cada perforación asociada a la componente  $B_i$ , de forma que estos no se solapen con las perforaciones. En la Figura 2.22 podemos ver un ejemplo de la representación estándar de la suma conexa de dos toros con dos perforaciones.

(a) *Esfera con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

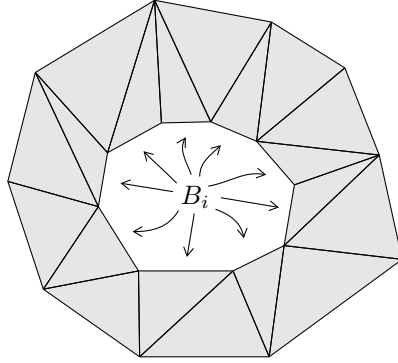


Figura 2.21: Triangulación cerca de una componente del borde de  $M$ .

(b) *Suma conexa de  $n$  toros con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} c_1 B_1 c_1^{-1} \dots c_k B_k c_k^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de  $n$  planos proyectivos con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n c_1 B_1 c_1^{-1} \dots c_k B_k c_k^{-1} \rangle$$

**Teorema 2.4.5** (Clasificación de superficies con borde compactas). Toda superficie con borde compacta y conexa no vacía es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- (a) Una esfera  $\mathbb{S}^2$  con  $k$  perforaciones,
- (b) Una suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  de copias del toro con  $k$  perforaciones,
- (c) Una suma conexa  $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  de copias del plano proyectivo con  $k$  perforaciones,

con  $k \in \mathbb{N}$ . A estas superficies las llamamos **superficies con borde estándar**.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie con borde compacta, y sea una representación suya como la de la Proposición 2.4.3. El teorema se prueba aplicando los siete pasos de la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies Compactas a esta representación poligonal, teniendo en cuenta que las operaciones de cortar y pegar que aparecen sucesivamente se hagan evitando las perforaciones. Así podemos asegurar que durante el proceso el número de perforaciones no cambia. Como resultado, obtenemos una de las tres representaciones estándar de las superficies sin borde, con  $k$  perforaciones en su interior. Para completar la prueba, hacemos los cortes  $c_1, \dots, c_k$  desde el vértice inicial de la representación poligonal a cada una de las perforaciones  $B_1, \dots, B_k$ , de forma inductiva y sin que se solapen, obteniendo uno de los polígonos estándar del ejemplo anterior.  $\square$

**Corolario 2.4.6.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies con borde compactas tales que  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$  tienen el mismo número de componentes conexas. Entonces  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas si y solo si las superficies  $M_1^*$  y  $M_2^*$  son homeomorfas.

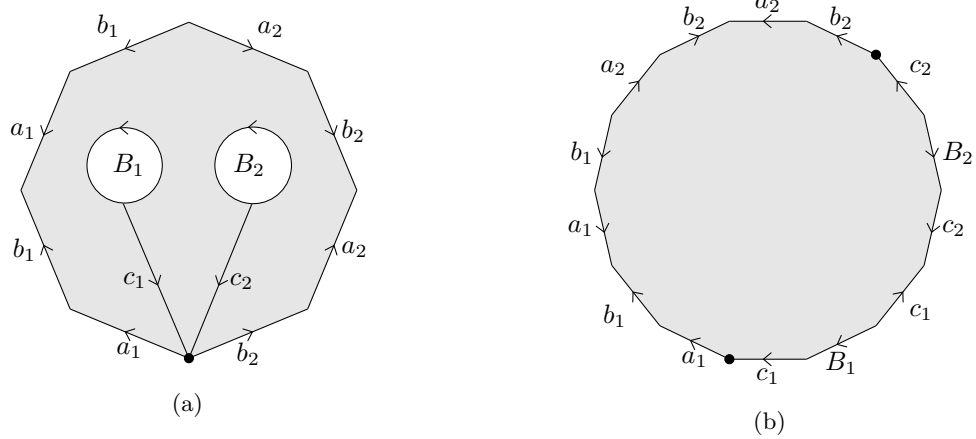


Figura 2.22: La superficie  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  con dos perforaciones.

## Capítulo 3

# La prueba ZIP de Conway

En este capítulo voy a dar un tratamiento riguroso de la prueba ZIP de Conway. Voy a definir los conceptos necesarios para la nueva demostración y me ayudaré de algunos resultados de los capítulos anteriores. El principal cambio será que no demostraremos el Teorema de Clasificación a través de transformaciones sobre una representación poligonal de la superficie, sino que trabajaremos directamente sobre una triangulación de la superficie para llegar a una forma estándar basada en el concepto de suma conexa. Para Conway, uno de los conceptos irrelevantes de la prueba habitual del que se puede prescindir en la prueba ZIP es el de representación poligonal. En cambio yo me apoyaré en él para poder dar una demostración de algunos de los puntos menos rigurosos.

La prueba ZIP sólo nos demuestra la primera parte del Teorema de Clasificación: nos dice que toda superficie es homeomorfa a una de las superficies estándar, pero no que estas sean distintas desde el punto de vista topológico. Esto lo demostraremos finalmente en el último capítulo del trabajo, de forma que sea independiente a una u otra prueba.

### 3.1. Cremalleras

Conway utiliza las cremalleras (*zips* en inglés) para describir de forma gráfica cómo actúan las identificaciones topológicas. Cada cremallera actúa sobre una o dos perforaciones de una superficie. Están formadas por dos *zips* (dos partes dentadas) fijadas a la/s perforación/es y un *zipper* (el deslizador). Al cerrar el *zipper*, las *zips* se juntan identificándose. Trato de dar una definición rigurosa:

**Definición 3.1.1.** Sea  $M$  una superficie con borde compacta. Un **zip** es una identificación entre dos subconjuntos cerrados del borde de  $M$ . A este par lo llamamos **par-zip**, y a cada uno de los dos subconjuntos **cremallera**.

En la prueba ZIP, Conway nos explica gráficamente cuatro posibles formas de unir cremalleras. Veamos bien estas cuatro construcciones.

**Definición 3.1.2.** Sea  $M$  una superficie. Definimos cuatro formas elementales de identificar pares-zip en perforaciones de  $M$  perforada:

1. **Cap**: Las cremalleras yacen cada una sobre la mitad de una misma perforación con orientaciones opuestas (Figura 3.1a).
2. **Crosscap**: Las cremalleras yacen cada una sobre la mitad de una misma perforación con la misma orientación (Figura 3.1b).

3. **Handle**: Las cremalleras yacen cada una sobre una perforación distinta de  $S$  con orientaciones opuestas (Figura 3.1c).
4. **Crosshandle**: Las cremalleras yacen cada una sobre una perforación distinta de  $S$  con la misma orientación (Figura 3.1d).

**Proposición 3.1.3.** Sean  $M, M'$  dos superficies conexas (con o sin borde) y sean  $P = \langle S \mid W \rangle$  y  $P' = \langle S' \mid W' \rangle$  sus respectivas representaciones poligonales de una sola cara. Se tiene entonces:

- (i) La suma conexa de una esfera y  $M$  es homeomorfa a  $M$ .
- (ii) Sea  $|\mathcal{P}|$  la realización geométrica de  $P$ . Sea  $\partial B$  una perforación sobre  $\mathbb{S}^2$ , y sea  $\phi$  un homeomorfismo entre las aristas de  $|\mathcal{P}|$  y  $\partial B$ . Si identificamos ahora los pares de segmentos sobre  $\partial B$  de la imagen de  $\phi$ , obtenemos la misma superficie  $M$ .
- (iii) Con una construcción análoga a la del apartado anterior, si hacemos una perforación sobre una superficie  $M'$  con el borde con etiquetas asociadas a una representación poligonal de  $M$ , al identificarlas obtenemos la suma conexa  $M \# M'$ .

*Demostración.* Sea la suma conexa de  $\mathbb{S}^2$  y  $M$ , cuya representación poligonal viene dada por  $\langle a, S \mid aa^{-1}W \rangle$ . Plegando por  $a$  se obtiene (i).

Para demostrar (ii), sea  $\langle a, c, S \mid aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$  la representación poligonal de la esfera con una perforación asociada a  $M$ . Si plegamos por  $a$ , rotamos, y volvemos a plegar por  $c$  obtenemos la palabra  $\langle S \mid W \rangle$  que es la representación poligonal de  $M$ .

Finalmente para (iii), sea  $\langle S, S', B, c \mid W'cWc^{-1} \rangle$ , que es la representación de  $M'$  con una perforación asociada a  $M$ . Desplegando por  $a$  se tiene

$$\langle S, S', a, B, c \mid W'aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$$

que es la suma conexa de  $M'$  y  $\mathbb{S}^2$  con una perforación asociada a  $M$ . Por (ii), esto es equivalente a la suma conexa de  $M'$  y  $M$ .  $\square$

**Proposición 3.1.4.** (a) La esfera con un handle es homeomorfa al toro  $\mathbb{T}^2$ .

(b) La esfera con un crosshandle es homeomorfa a la botella de Klein  $K$ .

*Demostración.* Sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al handle

$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_1 \rangle.$$

Doblamos por  $a$  y nos queda

$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_2 \rangle$$

y podemos finalmente reetiquetar  $e = c_2c_1^{-1}$  para obtener la representación de  $\mathbb{T}^2$

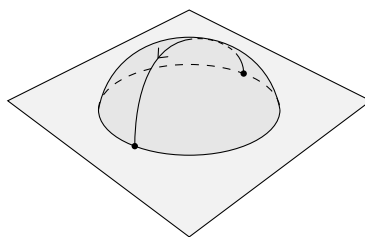
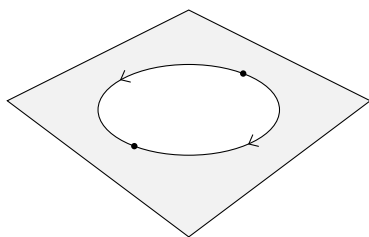
$$\langle e, z \mid eze^{-1}z^{-1} \rangle$$

Similarmente, para demostrar (b), sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al crosshandle

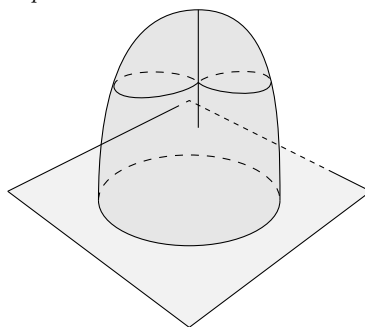
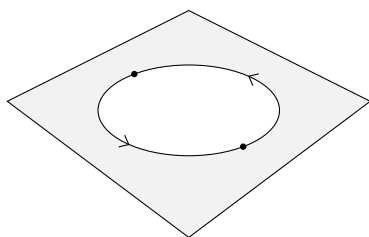
$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_1 \rangle.$$

Doblamos por  $a$  y nos queda

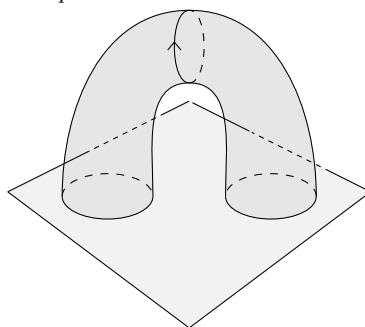
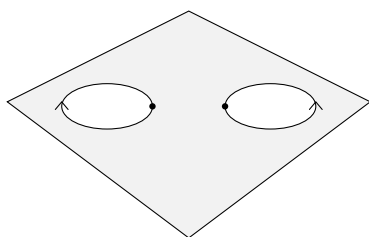
$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_2 \rangle$$



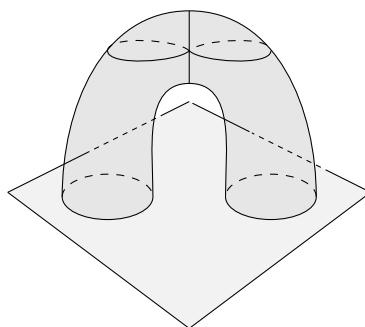
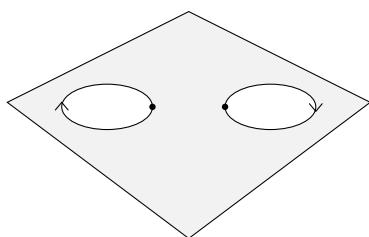
(a) Construcción del *cap*.



(b) Construcción del *crosscap*.



(c) Construcción del *handle*.



(d) Construcción del *crosshandle*.

Figura 3.1: Construcciones elementales con cremalleras.



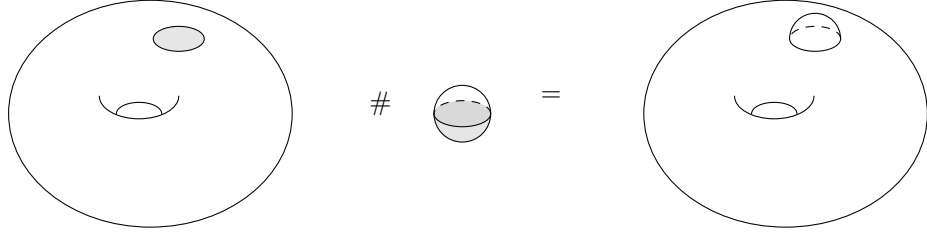


Figura 3.2: Suma conexa de un toro y una esfera.

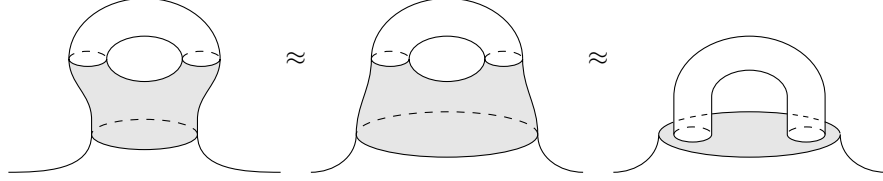


Figura 3.3: Suma conexa de una superficie y un toro visto como pegar un *asa*.

y reetiquetando  $e = c_2 c_1^{-1}$ , obtenemos finalmente la representación de la botella de Klein

$$\langle e, z \mid eze^{-1}z \rangle$$

□

**Corolario 3.1.5.** Sea  $M$  una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

- a)  $M$  con un cap y  $M$ .
- b)  $M$  con un crosscap y  $M \# \mathbb{P}^2$ .
- c)  $M$  con un handle y  $M \# \mathbb{T}^2$ .
- d)  $M$  con un crosshandle y  $M \# K$  (siendo  $K$  la botella de Klein).

## 3.2. Teorema de Clasificación

Definamos el que va a ser en la prueba ZIP el concepto análogo al de superficie estándar.

**Definición 3.2.1.** Una superficie con borde se dice **ordinaria** si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

El siguiente lema es quizás uno de los puntos donde la prueba de Conway es menos rigurosa. En algunos pasos hace *deslizar las perforaciones* fuera de un handle, un crosshandle o un crosscap, y aunque esto tenga sentido desde un punto de vista intuitivo, no está claro como hacerlo de una forma rigurosa. Para resolver este problema, me apoyo en los conceptos de representación poligonal y transformaciones elementales, y así desgloso todos los casos posibles.

**Lema 3.2.2.** Sea  $M$  una superficie con borde con un par-zip tal que cada cremallera está en una componente conexa de su borde. Entonces, si  $M$  es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

*Demostración.* Consideramos el caso en que las dos cremalleras ocupan cada una una perforación en su totalidad. Entonces, si están en la misma componente conexa de  $M$ , al identificarlas se tiene un *handle* (Figura 3.1c) o un *crosshandle* (Figura 3.1d), dependiendo de sus respectivas orientaciones. Si las dos perforaciones pertenecen a componentes conexas de  $S$  distintas, entonces identificando obtenemos la suma conexa de las dos componentes.

Consideramos ahora el caso en el que las dos cremalleras yacen sobre la misma perforación y la cubren totalmente. Identificándolas nos da o bien un *cap* (Figura 3.1a) o bien un *crosscap* (Figura 3.1b), dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Finalmente, consideramos los varios casos en que las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad. Para empezar, supongamos que la superficie ordinaria de la que partimos es una esfera. Tenemos varios casos:

- (1) *Una perforación con un par-zip y dos componentes conexas distintas del borde.* Tenemos dos posibilidades dependiendo de la orientación de las cremalleras. En la primera

$$\begin{aligned} \langle a, z, B_1, B_2, c \mid aa^{-1}c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle \\ \approx \langle z, B_1, B_2, c \mid c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle z, B_1, B_2 \mid zB_2z^{-1}B_1 \rangle & \quad (\text{rotar y doblar por } c) \end{aligned}$$

que es una representación del cilindro, es decir, una esfera con dos perforaciones, y por tanto una superficie ordinaria. Cambiando la aparición de  $z^{-1}$  por la de  $z$ , obtenemos mediante un proceso análogo al anterior la representación

$$\langle z, B_1, B_2 \mid zB_2zB_1 \rangle$$

que es la representación de un crosscap con dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (2) *Una perforación con un par-zip y una componente conexa del borde.* Como antes, dependiendo de la orientación podemos partir de

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c \mid aa^{-1}c^{-1}zBz^{-1}c \rangle \\ \approx \langle z, B, c \mid c^{-1}zBz^{-1}c \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle z, B \mid zBz^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y doblar por } c) \end{aligned}$$

que es una representación de una esfera perforada. Cambiando la aparición de  $z^{-1}$  por  $z$ , llegamos a la representación

$$\langle z, B, \mid zBz \rangle$$

que es una representación de  $\mathbb{P}^2$  perforado, es decir, un crosscap con una perforación, y por lo tanto una superficie ordinaria.

- (3) *Dos perforaciones con un par-zip y dos componentes conexas distintas del borde.* Por un lado

$$\begin{aligned} \langle a, z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}zB_2c_2c_1z^{-1}B_1c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}B_2zc_2c_1^{-1}z^{-1}B_1c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2zze^{-1}z^{-1}B_1 \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$

que es la representación de un toro con dos perforaciones. De la misma forma, cambiando la orientación de la aparición de  $z^{-1}$  llegamos a

$$\langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2ze^{-1}zB_1 \rangle$$

que es la botella de Klein con dos perforaciones, lo que es lo mismo, una esfera con crosshandle y dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (4) *Dos perforaciones con un par-zip y una componente conexa distinta del borde.* Empezando con la representación

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B \mid eBze^{-1}z^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$

que es una representación de  $\mathbb{T}^2$  con una perforación, o lo que es lo mismo, una esfera con un handle y una perforación, es decir, una superficie ordinaria. De la misma forma, cambiando  $z^{-1}$  por  $z$  obtenemos

$$\langle e, z, B \mid eBze^{-1}z \rangle$$

que es la representación de la botella de Klein con una perforación, es decir, una esfera con un crosshandle y una perforación, y por tanto una superficie ordinaria.

Por tanto, aplicando la demostración de la Proposición 3.1.3 (iii), demostramos los cuatro puntos anteriores para cremalleras sobre superficies arbitrarias, por lo que queda entonces demostrada la proposición.  $\square$

**Teorema 3.2.3** (Teorema de clasificación, versión preeliminar). Toda superficie con borde compacta es ordinaria.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie con borde compacta. Sabemos, por el Teorema de Radó, que  $M$  está triangulada por un poliedro  $|K|$  asociado a un complejo simplicial  $K$  tal que cada 1-símplice que contiene puntos interiores de  $M$  es una cara de exáctamente dos 2-símplices, y cada 1-símplice que contiene puntos del borde de  $M$  es cara de exáctamente un 2-símplice. Si sobre cada par de 1-símplices del primer tipo ponemos una cremallera distinta, en el conjunto de los 2-símplices habrá algunos 1-símplices que se identifiquen. Llamemos  $K_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$ , donde cada  $\sigma_i$  es un 2-símplice para todo  $i = 1 \dots j$ .  $K_2$  es una superficie ordinaria, pues cada  $\sigma_i$  es homeomorfo a una esfera 1-perforada. Si identificamos ahora las cremalleras una a una, por el Lema 3.2.2 y por inducción, la superficie resultante es ordinaria.  $\square$

**Lema 3.2.4.** Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

*Demostración.* Por la Proposición 3.1.4, la esfera con un crosshandle es homeomorfa a una botella de Klein. Por la Lema 2.3.1, la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , o lo que es lo mismo, a la suma conexa de una esfera y dos crosscaps.  $\square$

**Lema 3.2.5.** Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

*Demostración.* Sea una esfera con un par-zip asociado a un handle y otro asociado a un crosscap. Sabemos que, identificando las cremalleras obtenemos un espacio homeomorfo a la suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ . Pero por la Lema 2.3.2, este espacio es homeomorfo a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , que a su vez, es homeomorfo al plano proyectivo con un crosshandle, que a su vez es homeomorfo a una esfera con un crosshandle y un crosscap.  $\square$

Aunque Conway hasta ahora haya hablado de superficies con perforaciones (es decir, de superficies con borde), en el teorema final que veremos ahora decide omitirlas. En cambio yo aprovecho lo hecho hasta ahora y doy directamente la clasificación de superficies con borde.

**Teorema 3.2.6** (Clasificación de superficies). Toda superficie con borde compacta es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con  $k$  perforaciones.

*Demostración.* Por la versión preeliminar del teorema de clasificación, una superficie con borde compacta es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1:* Al menos hay un crosshandle en nuestra superficie. Por el Lema 3.2.4, cada crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps, por lo que la superficie es homeomorfa a una esfera con solamente crosscaps y handles. Como al menos hay un crosscap, cada handle es homeomorfo a un crosshandle (Lema 3.2.5), que es a su vez homeomorfo a dos crosscaps (Lema 3.2.4 de nuevo), quedando una esfera sólo con crosscaps y perforaciones.
- *Caso 2:* No hay ni crosshandles ni crosscap en la superficie. La superficie es entonces homeomorfa a una esfera sólo con handles y perforaciones.

□

## Capítulo 4

# Teorema de Clasificación, segunda parte

Hasta ahora hemos demostrado, con dos enfoques distintos, que toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de copias del toro o a una suma conexa de copias del plano proyectivo, junto con un número finito de perforaciones. Sin embargo no hemos demostrado que estas tres superficies estándar sean no homeomorfas entre sí. En este capítulo completaremos por tanto la parte de la prueba que nos falta.

### 4.1. Presentaciones de grupos

Vamos a empezar recordando brevemente las presentaciones de grupos.

**Definición 4.1.1.** Sea  $S$  un conjunto, y  $R \subset F(S)$ , donde  $F(S)$  es el grupo libre en  $S$ . Llamamos **presentación de un grupo** al par  $\langle S \mid R \rangle$ . A los elementos de  $S$  los llamamos **generadores**, y a los de  $R$  **relaciones**. La presentación de un grupo determina un grupo, que también denotamos por  $\langle S \mid R \rangle$ , y que viene dado por el siguiente grupo cociente:

$$\langle S \mid R \rangle = F(S)/\overline{R}$$

donde  $\overline{R}$  representa la intersección de todos los subgrupos normales de  $F(S)$  que contienen a  $R$ .

Cada relación  $r \in R$  determina un producto de potencias de generadores que vale 1 en el cociente.

**Definición 4.1.2.** Sea ahora un grupo arbitrario  $G$ . Decimos que una presentación de un grupo  $\langle S \mid R \rangle$  es una **presentación de  $G$**  si existe un isomorfismo  $\langle S \mid R \rangle \cong G$ .

Los elementos de  $G$  claramente generan  $G$ , y por la propiedad característica de los grupos libres, la aplicación identidad de  $G$  en sí mismo se extiende a un homomorfismo único  $\Phi : F(G) \rightarrow G$ . Si ponemos  $R = \text{Ker } \Phi$ , entonces, por el primer teorema de isomorfía tenemos que  $G \cong F(G)/R$ . Como  $R$  es normal,  $R = \overline{R}$ , y por tanto  $G$  tiene como presentación  $\langle G \mid R \rangle$ . Esta presentación trivial es muy ineficiente, pues normalmente  $F(G)$  y  $R$  son más grandes que  $G$ . Si  $G$  admite una presentación  $\langle S \mid R \rangle$  en las cuales  $S$  y  $R$  son conjuntos finitos, decimos que  $G$  tiene una **presentación finita**.

## 4.2. Grupos fundamentales de las Superficies Compactas

Empecemos viendo un resultado que es consecuencia del Teorema de Seifert-Van Kampen.

**Proposición 4.2.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Supongamos que  $U, V \subseteq X$  son abiertos de  $X$  tales que  $X = U \cup V$ . Supongamos también que  $U, V$  y  $U \cap V$  son conexos por caminos. Sea  $p \in U \cap V$ , y supongamos también que  $U$  es simplemente conexo. Entonces la inclusión  $l : V \hookrightarrow X$  induce el isomorfismo

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(V, p)/N$$

donde  $N$  es el menor subgrupo normal de  $\pi_1(V, p)$  que contiene la imagen del homomorfismo

$$j_*\pi_1(U \cap V, p) \rightarrow \pi_1(V, p).$$

Si los grupos fundamentales de  $V$  y  $U \cap V$  tienen presentaciones finitas

$$\pi_1(V, p) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle,$$

$$\pi_1(U \cap V, p) \cong \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle,$$

entonces  $\pi_1(X, p)$  tiene como presentación

$$\pi_1(X, p) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s, v_1, \dots, v_p \rangle,$$

donde los generadores  $\beta_i$  están representados por los mismos lazos que en la presentación del grupo fundamental de  $V$  pero considerados como lazos en  $X$ , y donde cada  $v_i$  es una expresión para  $j_*\gamma_i \in \pi_1(V, p)$  en términos de  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ .

*Demostración.* Una demostración se puede encontrar en [10] o en [12]. □

**Teorema 4.2.2.** Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos, y sea  $\varphi : \partial \mathbb{B}^2 \rightarrow X$  una aplicación continua. Consideramos la relación de equivalencia en  $X \amalg \mathbb{B}^2$  generada por  $s \sim \varphi(s)$  para todo  $s \in \partial \mathbb{B}^2$ , y denotamos el espacio cociente por  $\tilde{X} = (X \amalg \mathbb{B}^2) / \sim$ .

Sea  $v \in \partial \mathbb{B}^2$ ,  $\tilde{v} = \varphi(v) \in X$ , y  $\gamma = \varphi_*(\alpha) \in \pi_1(X, \tilde{v})$ , donde  $\alpha$  es un generador del grupo cíclico infinito  $\pi_1(\partial \mathbb{B}^2, v)$ . Entonces el homomorfismo  $\pi_1(X, \tilde{v}) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{v})$  inducido por la inclusión  $X \hookrightarrow \tilde{X}$  es sobreyectiva, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a  $\gamma$ .

Si  $\pi_1(X, \tilde{v})$  tiene como presentación finita a

$$\pi_1(X, \tilde{v}) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle,$$

entonces  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{v})$  tiene como presentación a

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{v}) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s, \tau \rangle,$$

donde  $\tau$  es una expresión de  $\gamma \in \pi_1(X, \tilde{v})$  en términos de  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ .

*Demostración.* Denotemos por  $\pi : X \amalg \mathbb{B}^2 \rightarrow \tilde{X}$  la aplicación cociente, y pensemos en  $X$  como su imagen por  $\pi$ , para así considerarlo un subespacio de  $\tilde{X}$ . Si elegimos un punto  $z \in \text{Int } \mathbb{B}^2$  y llamamos  $U = \text{Int } \mathbb{B}^2$ ,  $V = X \amalg (\mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$ , tenemos que  $U$  y  $V$  son dos abiertos saturados, y sus imágenes por  $\pi$  son por tanto abiertos en  $\tilde{X}$ , que denotaremos por  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  respectivamente. Veamos que  $\tilde{U}$  y  $\tilde{V}$  son abiertos por caminos.

Por un lado, por ser  $\pi$  continua,  $\tilde{U}$  y  $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \pi(\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$  son conexos por caminos por ser imágenes de conjuntos conexos por caminos. Por otro lado, como  $\tilde{V}$  es la unión de los conjuntos conexos por caminos  $X$  y  $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ , entonces es también conexo por caminos.

Vamos a elegir un punto base en  $\tilde{U} \cap \tilde{V}$  para poder aplicar el Proposición 4.2.1. Elegimos un  $p \in \text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$ , y denotamos por  $c$  a un lazo con base en el punto  $p$ , tal que  $[c]$  genere  $\pi_1(\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$ . Llamamos ahora  $\tilde{p} = \pi(p) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$ , y  $\tilde{c} = \pi \circ c$ . Tenemos que la restricción de  $\pi$  a  $U$  es una aplicación cociente inyectiva, y por lo tanto un homeomorfismo en  $\tilde{U}$ . Así, dado que  $U$  es simplemente conexo, también lo es  $\tilde{U}$ . Por otro lado,  $\tilde{U} \cap \tilde{V}$  es la imagen por  $\pi$  del abierto saturado  $\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$ , y por tanto la restricción  $\pi : \text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\} \rightarrow \tilde{U} \cap \tilde{V}$  es una aplicación inyectiva, y por tanto un homeomorfismo. Tenemos entonces que  $\pi_1(\tilde{U} \cap \tilde{V}, \tilde{p})$  es el grupo cíclico infinito generado por  $[\tilde{c}]$ . Ahora, por el Proposición 4.2.1 podemos asegurar que existe una aplicación inyectiva

$$\pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})$$

inducida por la inclusión  $\tilde{V} \hookrightarrow \tilde{X}$ , y cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene al subgrupo cíclico generado por  $[\tilde{c}]$ .

Ahora cambiaremos el punto base, puesto que estamos interesado en  $\tilde{v}$ , y no en  $\tilde{p}$ . Para ello, denotamos por  $a$  el camino en  $\partial \mathbb{B}^2$  que represente el generador  $\alpha$  del enunciado del teorema. Sea  $b$  el camino en  $D$  que une  $p$  con  $v$ . Entonces  $\tilde{b} = \pi \circ b$  es el camino en  $\tilde{V}$  que une  $\tilde{p}$  con  $\tilde{v}$  y  $\tilde{a} = \pi \circ a$  es el lazo en  $X$  con base en  $\tilde{v}$  que representa al  $\gamma$  del enunciado del teorema. El lazo  $b^{-1} \circ c \circ b$  con base en  $v$  es un generador de  $\pi_1(\mathbb{B}^2 \setminus \{z\}, v)$ , y así, reemplazando  $c$  si es necesario con su camino inverso, tenemos que es homotópico al camino  $a$  en  $\mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$ . Los isomorfismos de cambio de base inducidos por el camino  $\tilde{b}$ , que denotaremos por  $\Phi_{\tilde{b}}$  ambos, conmutan con los homomorfismos inducidos por la inclusión del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p}) \\ \downarrow \Phi_{\tilde{b}} & & \downarrow \Phi_{\tilde{b}} \\ \pi_1(\tilde{V}, \tilde{v}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{v}) \end{array}$$

y llevan  $[\tilde{c}]$  a  $[\tilde{a}] = \gamma$ . El homomorfismo que hemos obtenido es sobreyectivo y tiene como núcleo al menor subgrupo normal que contiene a  $\gamma$ .

Para completar la demostración, necesitamos relacionar el grupo fundamental de  $\tilde{V}$  con el de  $X$ . Combinando una retracción por deformación fuerte  $r : \mathbb{B}^2 \setminus \{z\} \rightarrow \partial \mathbb{B}^2$  junto con la identidad en  $X$ , obtenemos una homotopía  $H : V \times I \rightarrow V$  que da lugar a una retracción por deformación fuerte de  $V$  en  $X \amalg \partial \mathbb{B}^2$ . Dado que  $\pi \circ H$  respeta las identificaciones hechas por  $\pi \times \text{Id}_I : V \times I \rightarrow \tilde{V} \times I$ , que a su vez es una aplicación cociente (por ser  $V$  compacto y  $\tilde{V}$  Hausdorff), esta pasa al cociente como una retracción por deformación fuerte de  $\tilde{V}$  en  $X$ . Así pues, la inclusión  $X \hookrightarrow \tilde{V}$  es una equivalencia homotópica. Por lo tanto podemos sustituir  $\pi_1(\tilde{V}, \tilde{v})$  por  $\pi_1(X, \tilde{v})$  y obtener así un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a  $\gamma$ . La parte de las presentaciones se obtiene directamente del Proposición 4.2.1.  $\square$

**Teorema 4.2.3.** Sea  $M$  una superficie con una presentación suya de una cara  $\langle a_1, \dots, a_n \mid W \rangle$ . Entonces una presentación del grupo fundamental  $\pi_1(M)$  viene dada por  $\langle a_1, \dots, a_n \mid W \rangle$ .

*Demostración.* Denotemos por  $\mathcal{P}$  la representación de  $M$  dada, y sea  $\pi$  la aplicación cociente  $\pi : |\mathcal{P}| \rightarrow M$ . Sea  $M_1$  la imagen por  $\pi$  del conjunto de las aristas. Se tiene que  $M_1$  es una suma wedge

de circunferencias  $\mathbb{S}^1$ , una por cada símbolo de la representación. Así pues, su grupo fundamental tiene como presentación  $\langle a_1, \dots, a_n \mid \emptyset \rangle$ . Teniendo en cuenta que la región poligonal es homeomorfa al disco cerrado unidad, podemos aplicar ahora el Teorema 4.2.2 para pegar la cara de la región poligonal a la suma wedge. Como espacio  $X$  consideramos  $M_1$ , y tenemos que  $\pi$  actúa como la aplicación  $\varphi$  del teorema enviando la frontera del polígono al lazo en  $M_1$  obtenido siguiendo los generadores  $a_1, \dots, a_n$  en el orden especificado por la palabra  $W$ , obteniendo así el resultado.  $\square$

**Corolario 4.2.4.** Los grupos fundamentales de las superficies compactas estándar tienen como presentación:

- (a)  $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$  (el grupo trivial).
- (b)  $\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) \cong \langle \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n \mid \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \dots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1} \rangle$ .
- (c)  $\pi_1(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \beta_1^2 \dots \beta_n^2 \rangle$ .

*Demostración.* De la esfera sabemos que es simplemente conexa. (b) y (c) se deducen del Teorema 4.2.3 a partir de las representaciones estándar.  $\square$

**Definición 4.2.5.** Dado un grupo  $G$ , el **subgrupo conmutador de  $G$** , denotado por  $[G, G]$ , es el subgrupo de  $G$  generado por todos los elementos de la forma  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , para  $\alpha, \beta \in G$ . Al grupo cociente  $\text{Ab}(G) = G/[G, G]$  lo llamamos el **abelianizado de  $G$** .

Como el isomorfismo  $F : G_1 \rightarrow G_2$  lleva el subgrupo conmutador de  $G_1$  al de  $G_2$ , entonces grupos isomorfos tienen abelianizados isomorfos. Por lo tanto demostraremos que las superficies estándar no son homeomorfas no a través de sus grupos fundamentales si no de sus abelianizados.

Por otro lado, si bien no trataremos homología en este trabajo, observamos que si  $X$  es un espacio topológico conexo por caminos, y  $p \in X$  un punto suyo, entonces el *primer grupo de homología*  $H_1(X)$  es isomorfo al abelianizado de  $\pi_1(X, p)$ . Una prueba se puede encontrar en [10]. Veamos ahora el primer grupo de homología de las superficies estándar.

**Proposición 4.2.6.** Los grupos fundamentales de las superficies estándar tienen los siguientes abelianizados:

- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{S}^2)) = \{1\}$ .
- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2n}$ .
- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$ .

*Demostración.* El caso de la esfera es inmediato, pues sabemos que su grupo fundamental es trivial. Sea ahora la suma conexa de  $n$  copias del toro, y sea

$$G \cong \langle \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n \mid \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \dots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1} \rangle$$

su grupo fundamental. Si denotamos  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{2n}$  sea la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \text{Ab}(G) & \rightarrow & \mathbb{Z}^{2n} \\ \beta_i & \mapsto & e_i \\ \gamma_i & \mapsto & e_{i+1} \end{array}$$

Si pensamos en  $\varphi$  como una aplicación del grupo libre  $F(\beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n)$  en  $\mathbb{Z}^{2n}$ ,  $\varphi$  envía el elemento  $\beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \dots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1}$  al  $(0, \dots, 0)$ , y por lo tanto pasa al cociente  $G$  como un homomorfismo  $\tilde{\varphi}$  de  $\text{Ab}(G)$  en  $\mathbb{Z}^{2n}$ . Para hallar su inversa, si definimos ahora  $\psi : \mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \text{Ab}(G)$  por



$$\psi(e_i) = \begin{cases} [\beta_i], & 1 \leq i \leq n, \\ [\gamma_{i-n}], & n+1 \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

donde los corchetes indican la clase de equivalencia del elemento en  $\text{Ab}(G)$ , entonces podemos extenderlo a un homomorfismo  $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}^{-1}$ .

De forma análoga, consideremos ahora una suma conexa de copias del plano proyectivo, y denotemos su grupo fundamental por

$$H \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \beta_1^2, \dots, \beta_n^2 \rangle.$$

Definimos la aplicación  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$  por

$$\varphi(\beta_i) = \begin{cases} e_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ h - e_{n-1} - \dots - e_1, & i = n. \end{cases}$$

donde  $h \in \mathbb{Z}/2$  denota el elemento no trivial. Dado que  $g + g = 0$ , tenemos que  $\varphi(\beta_1^2 \cdots \beta_n^2) = (0, \dots, 0)$ , y como antes  $\phi$  pasa al cociente como un homomorfismo  $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$ . Por otro lado, podemos definir su inversa como el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & \text{Ab}(H) \\ e_i & \mapsto & [\beta_i], \\ h & \mapsto & [\beta_1 \cdots \beta_n]. \end{array}$$

□

### 4.3. Teorema de Clasificación

**Teorema 4.3.1** (Teorema de Clasificación, segunda parte). Sea  $M$  una superficie compacta y conexa no vacía. Entonces es homeomorfa a una y sólo una de las superficies estándar.

*Demostración.* Por el Teorema 2.3.3, tenemos que  $M$  es homeomorfa a una de las superficies estándar, y por lo tanto nos queda demostrar que no son homeomorfas entre sí. Por un lado, la esfera no puede ser homeomorfa a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos, pues la esfera tiene grupo fundamental trivial. Los abelianizados de los grupos fundamentales de la suma conexa de planos proyectivos contienen un elemento no trivial de torsión, mientras que los abelianizados de los grupos fundamentales de la suma conexa de toros son libres de torsión. Así pues, las sumas de copias de  $\mathbb{P}^2$  no pueden ser homeomorfas a las sumas de copias de  $\mathbb{T}^2$ . Por otro lado, si  $M$  y  $M'$  son respectivamente sumas conexas de  $n$  y  $m$  copias del toro,  $n \neq m$ , sus grupos fundamentales son distintos, pues sus abelianizados son grupos libres conmutativos de rango  $2n$  y  $2m$  respectivamente. Análogamente, si  $M$  es una suma conexa de  $n$  copias del plano proyectivo y  $M'$  es una suma conexa de  $m$  copias del plano proyectivo,  $n \neq m$ , entonces los abelianizados de sus grupos fundamentaes son de rango  $n-1$  y  $m-1$  respectivamente, es decir, son distintos. □

# Apéndice A

## Grupos

### A.1. Grupo fundamental

**Teorema A.1.1.** Para  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexa.

### A.2. Grupos abelianos libres

**Lema A.2.1.** Si un grupo abeliano  $G$  tiene una base finita, entonces toda base finita tiene el mismo número de elementos.

**Definición A.2.2.** Si  $G$  es un grupo abeliano libre con una base finita, decimos que  $G$  tiene *rango finito*, y decimos que  $G$  es de *rango  $n$*  si  $n$  es el número de elementos de cualquier base.

**Definición A.2.3.** Sea  $G$  un grupo abeliano. Decimos que un elemento suyo  $g \in G$  es un elemento de torsión si  $ng = 0$  para algún  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Dado que si  $ng = n'g' = 0$ , entonces  $nn'(g + g') = 0$ , y por lo tanto el conjunto de todos los elementos de torsión de  $G$  es un subgrupo suyo, denotado por  $G_{tor}$ . Decimos que  $G$  es un grupo sin torsión si el único elemento de torsión es el 0.

## Apéndice B

# Algunos teoremas de topología importantes

### B.1. Cocientes topológicos

Empecemos recordando las nociones básicas de cocientes topológicos.

**Definición B.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un conjunto. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Definimos la **topología cociente** sobre  $Y$  inducida por  $f$  de la siguiente manera:  $V \subseteq Y$  es abierto si y solo si  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

**Definición B.1.2.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos, decimos que  $q : X \rightarrow Y$  es una **aplicación cociente** o **identificación** si es sobreyectiva e  $Y$  tiene la topología cociente inducida por  $q$ .

Se deduce de la definición que una aplicación cociente es siempre continua.

Sea ahora  $X$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ . Si  $X/\sim$  es el conjunto de las clases de equivalencia, sea  $q : X \rightarrow X/\sim$  la aplicación que lleva cada  $x \in X$  a su clase de equivalencia. Entonces decimos que  $X/\sim$  junto con la topología cociente inducida por  $q$  es un **espacio cociente** de  $X$  por la relación de equivalencia  $\sim$ .

Estudiemos ahora condiciones bajo las cuales una aplicación entre dos espacios topológicos es una aplicación cociente.

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $q : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si  $y \in Y$  decimos que un subconjunto del tipo  $q^{-1}(y) \subseteq X$  es una **fibra** de  $q$ . Un conjunto  $U \subseteq X$  tal que existe un  $V \subseteq Y$  con  $U = q^{-1}(V)$  decimos que es **saturado con respecto de  $q$** .

**Proposición B.1.3.** Una aplicación  $q : X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva es una aplicación cociente si y solo si lleva abiertos saturados a abiertos saturados.

**Proposición B.1.4** (Propiedades de las aplicaciones cociente). Se tienen las siguientes propiedades:

- La composición de aplicaciones cociente es una aplicación cociente.
- Una aplicación cociente sobreyectiva es un homeomorfismo.
- Si  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación cociente y  $U \subseteq X$  es un abierto (o cerrado) saturado, entonces la restricción  $q|_U : U \rightarrow q(U)$  es una aplicación cociente.

**Proposición B.1.5.** Si  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, sobreyectiva y abierta o cerrada, entonces es una aplicación cociente.

**Teorema B.1.6** (Lema de la aplicación cerrada). Sea  $F$  una aplicación continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico Hausdorff. Entonces:

- (a)  $F$  es una aplicación cerrada.
- (b) Si  $F$  es sobreyectiva, entonces es una aplicación cociente.
- (c) Si  $F$  es inyectiva, entonces es una inmersión topológica.
- (d) Si  $F$  es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

**Teorema B.1.7** (Unicidad de espacios cociente). Supongamos  $q_1 : X \rightarrow Y_1$  y  $q_2 : X \rightarrow Y_2$  son aplicaciones cociente que hacen las mismas identificaciones, es decir, tales que  $q_1(x) = q_1(x')$  si y solo si  $q_2(x) = q_2(x')$ . Entonces existe un único homeomorfismo  $\phi : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que  $\phi \circ q_1 = q_2$ .

**Proposición B.1.8** (Pasando al cociente). Supongamos que  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación cociente,  $Z$  es un espacio topológico y  $f : X \rightarrow Z$  es una aplicación continua tal que si  $q(x) = q(x')$ , entonces  $f(x) = f(x')$ . Entonces existe una única aplicación continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow Z$  tal que  $f = \tilde{f} \circ q$ .

**Teorema B.1.9** (Lema de pegado). Sean  $A, B$  dos subconjuntos abiertos (o cerrados) de un espacio topológico  $X$ , tal que  $X = A \cup B$ , y sea  $Y$  otro espacio topológico. Si la restricción de  $f : X \rightarrow Y$  a  $A$  y  $B$  es continua, entonces  $f$  es continua.

# Bibliografía

## Referencias Históricas

- [1] August F. Möbius. “Theorie der elementarem verwandtschaft”. En: *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* (1863).
- [2] Walther von Dyck. “Beiträge zur analysis situs”. En: *Mathematische Annalen* 32 (1888).
- [3] Max Dehn y Poul Heegard. “Analysis situs”. En: *Enzyklopädie der Math. Wiss* (1907).
- [4] James Alexander. “Normal forms for one- and two-sided surfaces”. En: *Ann. Math.* 16 (1915).
- [5] Henry Brahana. “Systems of circuits on two-dimensional manifolds”. En: *Ann. Math.* 23 (1920).
- [6] Tibor Radó. “Über den Begriff der Riemannschen Fläche”. En: *Acta Sci. Math. Szeged.* 2 (1925).

## Bibliografía

- [7] H. Seifert y W. Threlfall. *A Textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [8] William S. Massey. *Algebraic Topology, an introduction*. Springer - Verlag, 1970.
- [9] George K. Francis y Jeffrey R. Weeks. “Conway’s ZIP Proof”. En: *Amer. Math. Monthly* 106 (1999).
- [10] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer - Verlag, 2011.
- [11] Vicente Muñoz y Juan José Madrigal. *Topología Algebraica*. Sanz y Torres, 2015.
- [12] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison - Wesley, 1984.