Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Oliet

Dirigido por:
Manuel Alonso Morón

Junio de 2020

Capítulo 1

Definiciones preeliminares

1.1. Variedades

1.1.1. Variedades y superficies

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades.

Definición 1.1.1. Una ***variedad topológica*** (de ahora en adelante *variedad*) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente homeomorfo a R^n, para algún $n \geq 0$.

Como la propiedad "ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$" es local, toda propiedad local de $\mathbb{R}^n$ se traslada a una variedad. Así, las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

El *teorema de invarianza del dominio* dice que si $W \subset \mathbb{R}^n$ y $W' \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos y existe $\phi : W \to W'$ homeomorfismo, entonces $n = m$. Esto implica que, dado un punto $p \in X$ de una variedad, hay un único $n = n(p)$ tal que un entorno U^p es homeomorfo a un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$. Llamamos $n(p)$ la dimensión en p. Claramente, para todo punto $q \in U$ podemos tomar U como entorno de q, y por tanto $n(q) = n(p)$. Luego en toda la componente conexa de p, el n que aparece es el mismo, y lo llamaremos dimensión de dicha componente conexa. Nótese que si escribimos $X = \sqcup X_i$, con X_i componentes conexas de X, todas las X_i son variedades. Si todas las X_i tienen la misma dimensión n, entonces escribimos $n = dimX$, y decimos que X es una n-variedad.

Ejemplo 1.1.2.

- Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.
- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta $\mathbb{R}$ y el círculo $\mathbb{S}^1$

Definición 1.1.3. Una ***superficie*** es una 2-variedad.

Ejemplo 1.1.4.

- La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- El toro $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$

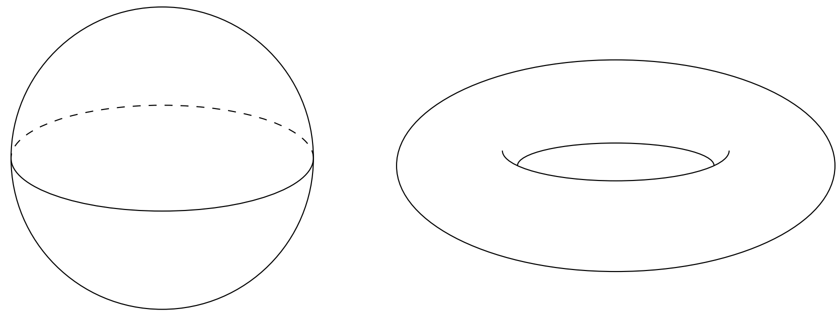

Figura 1.1: $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$

1.1.2. Suma conexa de variedades

Sean V_1 y V_2 dos n-variedades conexas. Dados $p_1 \in V_1$ y $p_2 \in V_2$ sean $U_1^{p_1} \subset V_1$, $U_2^{p_2} \subset V_2$ entornos de p_1 y p_2 respectivamente, y sean $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ dos homeomorfismos tales que $\phi_1(p_1) = 0$ y $\phi_2(p_2) = 0$. Si llamamos $B_1 = \phi_1^{-1}(B_1(0)) \subset V_1$ y $B_2 = \phi_2^{-1}(B_1(0)) \subset V_2$, consideremos $V_1^o = V_1 - B_1$, $V_2^o = V_2 - B_2$ y $V_1^o \sqcup V_2^o$ con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia $\sim$ en la que si $x_1 \in S_1 = \phi_1^{-1}(\partial B_1(0))$, $x_2 \in S_2 = \phi_2^{-1}(\partial B_1(0))$, entonces $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$, y se considera el cociente

$$X = \frac{V_1^o \sqcup V_2^o}{\sim}.$$

Definición 1.1.5. A X se le llama ***suma conexa*** de V_1 y V_2, y se denota por $X = V_1 \# V_2$.

Proposición 1.1.6. X es una variedad.

Demostración. Denotemos la proyección $\pi : V_1 \# V_2 \to X$ □

1.2. Representación de superficies

Para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Representaremos todas las superficies como cocientes de polígonos con $2n$ lados.

Definición 1.2.1. Sea S un conjunto. Una ***palabra en*** S es una k-tupla ordenada de símbolos, cada uno de la forma a o a^{-1}, para cierto $a \in S$.

Definición 1.2.2. Una ***representación poligonal***, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, ..., W_k \rangle$$

es un conjunto finito S junto con un número finito de palabras $W_1, .., W_k$ de longitud 3 o más, tal que para todo $a \in S$ existe un W_i tal que $a \in W_i$. Por cuestiones de notación, cuando el conjunto S esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de S y denotamos las palabras W_i por youxtaposición. Por ejemplo, la presentación con $S = \{a, b\}$ y la palabras $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$ se escribe $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Permitimos el caso especial de $S = \{a\}$ y palabras de longitud 2, es decir $\langle a \mid aa \rangle$, $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$, $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ y $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$.

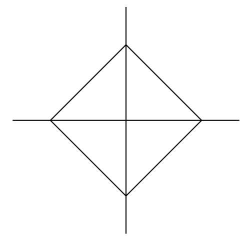

Figura 1.2: Representación poligonal de $\mathbb{S}^2$

Definición 1.2.3. Toda representación poligonal $\mathcal{P}$ da lugar a un espacio topológico $|\mathcal{P}|$, llamado ***realización geométrica de*** $\mathcal{P}$. $|\mathcal{P}|$ se obtiene de la siguiente manera:

1. Para cada $W_i \in \mathcal{P}$ de longitud k, sea P_i el k-polígono centrado en el origen con lados de longitud 1 y tal que un lado yace sobre el eje OY.

2. Se define una correspondencia uno a uno entre los símbolos de W_i y los lados de P_i en orden inverso a las agujas del reloj, empezando por el que yace en el eje OY.

3. Sea $|\mathcal{P}|$ el espacio cociente de $\coprod_i P_i$ determinado identificando lados que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de lo lados con una dada etiqueta a y los últimos vertices de los que tienen la correspondiente etiqueta a^{-1} (en el sentido a las agujas del reloj).

Si $|\mathcal{P}|$ es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, decimos que $|\mathcal{P}|$ es la esfera $\mathbb{S}^2$ si la palabra es aa^{-1} o $a^{-1}a$, y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ si es aa o $a^{-1}a^{-1}$. Las regiones interiores, los lados y los vértices de cada polígono $\mathcal{P}_i$ se llaman ***caras, lados y vértices de la presentación***. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de lados coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para un lado etiquetado a, el ***vértice inicial*** es el primero en el sentido de las agujas del reloj.