

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

La prueba ZIP de Conway del Teorema de Clasificación de Superficies

Juan Valero Olié

Dirigido por:
Manuel Alonso Morón

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar la denominada “*Prueba ZIP*” de John H. Conway, que demuestra de un modo informal el Teorema de Clasificación de Superficies. La Prueba ZIP presenta ventajas respecto a la clásica de Seifert-Threlfall, pero desarrolla sólo una parte de la demostración del teorema. Con esto en mente, daremos una introducción a las variedades topológicas y su triangulación. Desarrollaremos la demostración de Seifert-Threlfall con el fin de comparar las dos pruebas, y finalmente formalizaremos la Prueba ZIP con todo detalle y la completaremos con la segunda parte del teorema.

Abstract

The aim of the present work is to study the so called “*ZIP Proof*” given by John H. Conway, which gives an informal approach to the Classification Theorem of Surfaces. The ZIP proof has some advantages, but it only proves one part of the theorem. With this in mind, an introduction to topological manifolds and their triangulation will be given. We will explain the Seifert-Threlfall proof for comparison, formalize in detail the ZIP proof, and finally complete it with the second part of the theorem.

Introducción

El siguiente trabajo se centra en estudiar el Teorema de Clasificación de Superficies. Este resultado proporciona un *conjunto completo de representantes* para las superficies compactas. En concreto, asegura que toda superficie compacta es homeomorfa a una suma conexa de esferas, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos, y que estas superficies no son homeomorfas entre sí.

El Teorema de Clasificación de Superficies está intrínsecamente relacionado con el desarrollo de la topología, desde su nacimiento hasta la actualidad. De la primera aproximación del Teorema hasta la demostración rigurosa completa pasaron más de sesenta años, durante los cuales se fueron construyendo conceptos tales como *homeomorfismo*, *variedad*, *triangulación* u *orientabilidad*. Si bien el primer intento de demostrar el teorema se dió en el año 1863 por Möbius [12], la noción de superficie como variedad bidimensional definida en terminos de cartas no se dió hasta los años 30 del siglo XX, y los intentos de clasificación anteriores a esa década asumen, sin demostrar, que todas las superficies son triangulables. Por otro lado, la noción de homeomorfismo tampoco se da de forma precisa hasta principios de la década de 1900.

Todas las demostraciones rigurosas incluyen dos pasos. El primero, demostrar que toda superficie es triangulable. El segundo, transformar la superficie en otra homeomorfa, llamada *forma normal*. Möbius, en un primer intento, proporcionó una clasificación de las superficies orientables, al igual que hizo Jordan [13] tres años después sin aparentemente conocer su trabajo. En la prueba de Jordan encontramos además una tentativa de definición rigurosa de homeomorfismo, así como métodos de transformación que incluyen cortes sobre la superficie y que inspirarían a sus sucesores. Tanto Möbius como Jordan definen por primera vez el concepto de *género* mediante el uso de curvas cerradas simples sobre una superficie, con el que Jordan anticipa además su trabajo posterior de las *Curvas de Jordan*. En 1888 von Dick [14] es el primero en dar la clasificación completa de superficies orientables y no orientables, introduciendo además la noción de *forma normal* de una superficie, pero se considera que son Dehn y Heegaard los primeros que en 1907 [15] lo demuestran de forma rigurosa. En 1915 Alexander publica en un artículo [16] en el que se representan por primera vez las superficies como polígonos con aristas identificadas, y finalmente es en 1920 cuando Brahana [17] demuestra de forma rigurosa y completa el Teorema de Clasificación en términos de transformaciones sobre polígonos que representan superficies. Radó [18] demuestra en 1925 que toda superficie es triangulable, completando así la prueba. Hoy en día, la mayoría de los libros de texto siguen la demostración dada por Seifert y Threlfall [1].

En el año 1999, Francis y Weeks presentan en [2] una demostración totalmente nueva y distinta dada por John H. Conway y llamada “*ZIP proof*”. Las siglas *ZIP* hacen referencia a *Zero Irrelevancy Proof*, es decir, *Prueba de Cero Irrelevancias*, pues según Conway esta demostración elimina algunas de las irrelevancias que contiene la versión de Seifert-Threlfall. El uso de cortes sobre polígonos es para Conway uno de los pasos que se pueden eliminar, y utiliza en cambio el concepto de *suma conexa de superficies* para llegar a la forma normal. Esta prueba, si bien es corta e instructiva por ser muy comprensible a nivel intuitivo, es bastante informal. Algunas partes de la demostración incluyen pasos que no se desarrollan en profundidad, y conceptos como triangulación, orientabilidad, género y característica de Euler se citan pero no llegan a definirse. Por otro lado, no se demuestra que las superficies del conjunto de representantes sean no homeomorfas entre sí. El propósito de este trabajo es por tanto formalizar la prueba de Conway y compararla con la de Seifert-Threlfall.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos.

El primer capítulo trata de la triangulación de superficies. En la primera parte doy definiciones y resultados básicos de variedades, variedades con borde, superficies y suma conexa de variedades, que será el concepto central en la demostración de Conway. En la segunda defino de forma rigurosa el concepto de triangulación de superficies mediante símlices y complejos simpliciales, y doy las líneas generales de la demostración del Teorema de Radó.

En el segundo capítulo estudio la demostración de la primera parte del Teorema de Clasificación, a la manera de Seifert-Threlfall, para poder compararla con la prueba de Conway. Con esta finalidad, presento un método riguroso de representación de cualquier superficie triangulada como un polígono en el plano. Introduzco entonces una serie de transformaciones sobre este polígono que den lugar a superficies homeomorfas. Estos conceptos también me servirán para formalizar algunos pasos de la prueba ZIP. Finalmente, una vez probado el teorema, lo extiendo a las superficies con borde.

El tercer capítulo es la parte central del trabajo. Sigo paso por paso el artículo de Francis y Weeks, dando para cada resultado una demostración rigurosa, y definiendo formalmente las ideas de Conway. Para ello, me ayudo de algunos conceptos expuestos en el capítulo tres. Comento también donde procede las similitudes y diferencias con la prueba de Seifert-Threlfall, así como las posibles ventajas de una prueba u otra. El teorema que enuncio y demuestro da directamente la clasificación de las superficies con borde.

En el cuarto capítulo, finalmente, completo la demostración probando que la esfera, la suma conexa de toros y la suma conexa de planos proyectivos no son homeomorfas. Para ello utilizaré como invariante topológico el subgrupo conmutador del grupo fundamental de las superficies. Esta prueba no dependerá de la utilizada para la primera parte del teorema.

Índice general

Resumen	i
Abstract	i
Introducción	iii
Índice general	v
1. Superficies y triangulación	1
1.1. Variedades	1
1.2. Variedades con borde	3
1.3. Suma conexa de variedades	5
1.4. Complejos simpliciales y triangulación	6
1.5. Teorema de Radó	7
2. Teorema de Clasificación, primera parte	11
2.1. Superficies como cocientes	11
2.2. Representación de superficies	17
2.3. Teorema de clasificación de superficies compactas	24
2.4. Teorema de clasificación de superficies con borde	28
3. La prueba ZIP de Conway	33
3.1. Cremalleras	33
3.2. Teorema de Clasificación	37
4. Teorema de Clasificación, segunda parte	42
4.1. Presentaciones de grupos	42
4.2. Grupos fundamentales de las Superficies Compactas	43
4.3. Teorema de Clasificación	47
Bibliografía	48

Capítulo 1

Superficies y triangulación

En este capítulo doy las definiciones y resultados básicos de las variedades, así como de las variedades con borde, que Conway utiliza en la Prueba ZIP sin mencionarlas ni definir las. También estudiaremos la suma conexa de superficies, concepto en el que nos basaremos para llegar a una forma normal en la prueba de Conway.

En la segunda parte del capítulo daremos una definición rigurosa de triangulación, a través de símlices y complejos simpliciales. Finalmente enunciaré el teorema de Radó y daré una idea de la demostración.

1.1. Variedades

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades, y en concreto las superficies. Decimos que un espacio topológico M es **localmente euclídeo de dimensión n** si todo punto de M tiene un entorno en M que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.1.1. Una **variedad topológica** (de ahora en adelante **variedad**) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente euclídeo de dimensión n , para algún $n \geq 0$.

Sea M una variedad, y sea $p \in M$. Si $U \subseteq M$ es un entorno de p que es homeomorfo a un abierto U' de \mathbb{R}^n , decimos que U es un **dominio coordinado**, y llamamos **aplicación coordinada** a cualquier homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow U'$. Decimos que el par (U, φ) es una **carta para M** .

A un dominio coordinado que es homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^n se le llama **bola coordinada** (si $n = 2$, decimos **disco coordinado**). Si $p \in M$ y U es un dominio coordinado que contiene a p , decimos que U es un **entorno euclídeo** de p .

No siempre se tiene que la adherencia de una bola coordinada sea homeomorfa a una bola cerrada euclídea. Por tanto, decimos que una bola coordinada $B \subseteq M$ es una **bola coordinada regular** si existe un entorno B' de \bar{B} y un homeomorfismo $\varphi : B' \rightarrow B_{r'}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ que lleva B a $B_r(x)$ y \bar{B} a $\bar{B}_r(x)$ para algún $r' > r > 0$ y para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.1.2. Ser localmente euclídeo de dimensión n es una propiedad local, y por tanto las propiedades locales de \mathbb{R}^n se trasladan a una variedad. Así pues, las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

Vamos a definir ahora la dimensión de una variedad. El *Teorema de Invarianza del Dominio* dice que si $V \subset \mathbb{R}^n$ y $V' \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos y existe un homeomorfismo $\phi : V \rightarrow V'$, entonces $n = m$. Así

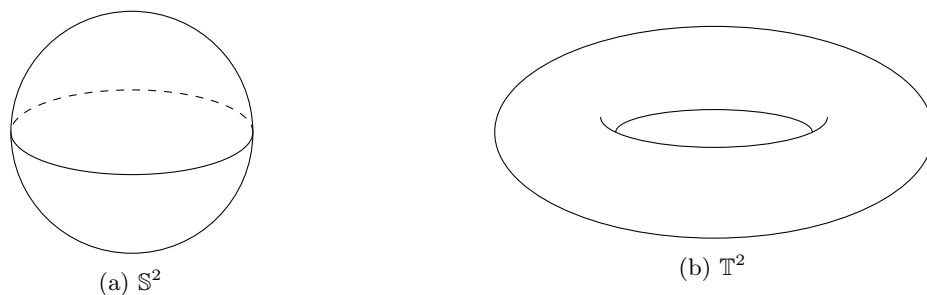


Figura 1.1: Ejemplos de superficies.

pues, sea M una variedad, y sea $p \in M$. Entonces hay un único $n = n_p$ tal que un entorno U^p de p en M es homeomorfo a un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que n_p es la **dimensión en p** . Si para todo punto $q \in U^p$ tomamos U^q como entorno de q , tenemos que $n_q = n_p$. Luego en toda la componente conexa de M , el n que aparece es el mismo, y lo llamaremos **dimensión** de dicha componente conexa. Si escribimos $M = \coprod M_i$ como la unión disjunta de sus componentes conexas M_i , tenemos que todas las M_i son variedades, y si todas las M_i tienen la misma dimensión n , entonces escribimos $n = \dim M$, y decimos que M es una **n -variedad**.

El ejemplo más trivial de n -variedad es \mathbb{R}^n , pero también lo es cualquier abierto suyo. De hecho, esto se puede generalizar:

Proposición 1.1.3. Todo abierto de una n -variedad es una n -variedad.

Demostración. Sea M una n -variedad, y sea V un subconjunto abierto de M . Para todo $p \in V$, p tiene un entorno U^p en M que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . $U^p \cap V$ es también abierto y homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y está contenido en V . Por tanto V es localmente euclídeo de dimensión n . Por otro lado, todo abierto de un espacio Hausdorff es Hausdorff y todo abierto de un espacio II AN es II AN. Por lo que V es una variedad. \square

Ejemplo 1.1.4. ■ Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.

- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta \mathbb{R} y la circunferencia

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Definición 1.1.5. Una **superficie** es una 2-variedad.

Ejemplo 1.1.6. Son superficies:

- La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (Figura 1.1a).
- El toro $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ (Figura 1.1b).

1.2. Variedades con borde

Hay una serie de espacios topológicos que no son variedades pero que tienen interés desde el punto de vista geométrico y son útiles a la hora de estudiarlas. Por ejemplo, la bola cerrada $\overline{\mathbb{B}}^n$ no es una variedad, puesto que para los puntos de su frontera no hay entornos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . Vamos a definir por tanto una clase de espacios que extienda a las variedades pero que admita la existencia de algún tipo de *bordes*. Para ello, indicaremos con \mathbb{H}^n al **semiplano superior cerrado** *n-dimensional*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Definición 1.2.1. Una **variedad con borde n-dimensional** M (o n -variedad con borde) es un espacio topológico Hausdorff y II AN tal que todo punto $p \in M$ tiene un entorno U homeomorfo a un abierto $U' \subset \mathbb{H}^n$.

Sea M una n -variedad con borde, $p \in M$ y $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^n$ un homeomorfismo como el de la definición. Como en el caso de variedades, decimos que U es un **dominio coordinado**, que φ es una **aplicación coordinada** para M y que el par (U, φ) es una **carta para** M .

Como en la sección anterior, decimos que $B \subseteq M$ es una **semibola coordinada regular** si existe un abierto B' que contiene a \overline{B} y un homeomorfismo de B' a $B_{r'}(0) \cap \mathbb{H}^n$ que lleva B a $B_r(0) \cap \mathbb{H}^n$ y \overline{B} a $\overline{B_r(0) \cap \mathbb{H}^n}$ para algún $0 < r < r'$. Si denotamos $\varphi(p) = a = (a_1, \dots, a_n)$, podemos distinguir entre dos tipos de puntos:

1. **Puntos interiores:** Si $a_n > 0$, entonces podemos tomar una bola $B_\varepsilon(a) \subset U'$ y $V = \varphi^{-1}(V')$, por lo que V es un entorno de p homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Decimos por tanto que p es un **punto interior de** M , y denotamos por $\text{Int } M$ al conjunto de puntos interiores de M .
2. **Puntos borde:** Si $a_n = 0$ para todo n , entonces podemos tomar una semibola $V' = B_\varepsilon^+ = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$, y $V = \varphi^{-1}(V')$. Decimos que p es un **punto borde de** M . Al conjunto de todos los puntos borde de M lo denotamos por ∂M .

Proposición 1.2.2. Sea M una n -variedad con borde, entonces $\text{Int } M$ es un abierto de M , y es en sí mismo una n -variedad.

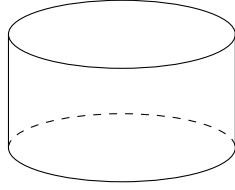
Demostración. Sea, para cada $x \in \text{Int } M$, (U_x, ψ_x) una carta para x , donde U_x es un abierto homeomorfo a \mathbb{R}^n . Se tiene que $\text{Int } M = \bigcup_{x \in M} U_x$, por lo que es un abierto, y además localmente euclídeo, y por tanto variedad. \square

Proposición 1.2.3 (Invarianza del borde). Si M es una n -variedad con borde, entonces un punto $p \in M$ no puede ser un punto interior y un punto borde al mismo tiempo. O lo que es lo mismo, $M = \text{Int } M \cup \partial M$, con $\text{Int } M \cap \partial M = \emptyset$.

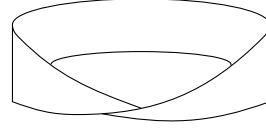
Demostración. Dado que las variedades que trato en el trabajo son las superficies, voy a dar la demostración en el caso de que $n = 2$. El caso general incluye conceptos de homología que no voy a tratar.

Supongamos que $p \in M$ es tanto un punto interior como un punto borde de M . Entonces existen (U, φ) tal que $\varphi(U) \subseteq \text{Int } \mathbb{H}^2$ y (V, ψ) tal que $\psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$, donde $\psi(p) = s \in \partial \mathbb{H}^2$. Llamando $W = U \cap V$, se tiene que $\varphi(W)$ es homeomorfo a $\psi(V)$.

Ahora bien, podemos elegir un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \subseteq \psi(W)$. Sea $U' = \psi^{-1}(B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2)$; utilizando que un abierto de \mathbb{R}^2 menos un punto suyo no es simplemente conexo, tenemos que $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$ no es simplemente conexo. Por otro lado, $U' \setminus p$ es homeomorfo a $X := B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \setminus \{s\}$.



(a) Cilindro.



(b) Banda de Möbius.

Sea $x_0 \in B_\varepsilon(s) \cap \text{Int } \mathbb{H}^2$, definimos $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ por $F(x, t) = x_0 + (1 - t)(x - x_0)$, que nos indica que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación fuerte de X . Por tanto, X es simplemente conexo, lo que implica que también lo son $U' \setminus \{p\}$ y $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$, pero esto es una contradicción. \square

Corolario 1.2.4. Si M es una n -variedad con borde, entonces:

- (i) ∂M es un cerrado en M .
- (ii) ∂M es una $(n - 1)$ -variedad.
- (iii) M es una variedad si y solo si $\partial M = \emptyset$.

Demostración. Por el teorema de la invarianza del borde, $\partial M = M \setminus \text{Int } M$, y siendo $\text{Int } M$ abierto, ∂M es por tanto cerrado, lo que demuestra (i). Para (ii), sea $p \in \partial M$. Tomamos U un entorno de p en M y $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^n$ un homeomorfismo. Sea $V' = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$ tal que $\varphi(p) = a$, y $V = \varphi^{-1}(V')$. Así pues, $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n) \in V' \mid x_n > 0\}) \subseteq \text{Int } M$ y $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\}) \subseteq \partial M$. Por lo tanto $\partial M \cap V = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\}) = W$ es un abierto de ∂M , y $\varphi : W \rightarrow W' = B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ es un homeomorfismo con un abierto de \mathbb{R}^{n-1} , lo que implica que ∂M es una $(n - 1)$ -variedad. Finalmente para probar (iii), si suponemos que M es una variedad, entonces todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , por lo que todo punto es interior y $M = \text{Int } M$, y se sigue de la invarianza del borde que $\partial M = \emptyset$. Si suponemos ahora que $\partial M = \emptyset$, entonces $M = \text{Int } M$, que es una variedad por la Proposición 1.2.2. \square

Hacemos incapié en que los conceptos de *variedad* y *variedad con borde* son distintos. Una variedad con borde puede ser o no una variedad, pues puede tener el borde vacío. En cambio, una variedad es siempre una variedad con borde en la que todo punto es un punto interior. Para evitar confusiones, si el contexto lo pide, utilizaremos **variedad sin borde** para referirnos a una variedad en el sentido de la Definición 1.1.1.

Veamos algunos ejemplos no triviales de superficies con borde:

Ejemplo 1.2.5. (1) El cilindro (Figura 1.2a):

$$Cil = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$

(2) La banda de Möbius (Figura 1.2b):

$$Mob = \left\{ \left(\left(1 + \left(y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right), \left(1 + \left(y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right) \sin(2\pi x), \left(y - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi x) \right) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1] \right\}.$$

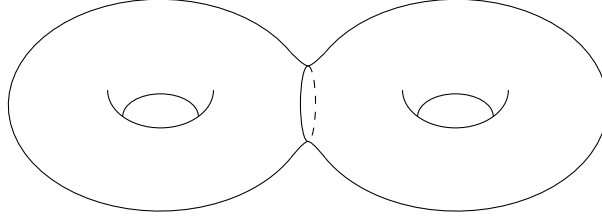


Figura 1.3: Suma conexa de toros.

1.3. Suma conexa de variedades

Sean M_1 y M_2 dos n -variedades conexas. Dados $p_1 \in M_1$ y $p_2 \in M_2$ sean $U_1 \subset M_1$, $U_2 \subset M_2$ entornos abiertos de p_1 y p_2 respectivamente, y sean $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos aplicaciones coordenadas tales que $\varphi_1(p_1) = 0$ y $\varphi_2(p_2) = 0$. Si llamamos $B_1 = \varphi_1^{-1}(B_1(0)) \subset M_1$ y $B_2 = \varphi_2^{-1}(B_1(0)) \subset M_2$, consideremos $M_1^o = M_1 \setminus B_1$, $M_2^o = M_2 \setminus B_2$ y $M_1^o \amalg M_2^o$ con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia \sim en la que si $x_1 \in S_1 = \varphi_1^{-1}(\partial B_1(0))$, $x_2 \in S_2 = \varphi_2^{-1}(\partial B_1(0))$, entonces $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$, y se considera el cociente

$$M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}.$$

Definición 1.3.1. A M así definida se le llama **suma conexa** de M_1 y M_2 , y se denota por $M = M_1 \# M_2$.

Proposición 1.3.2. Sean M_1 y M_2 variedades. Entonces $M = M_1 \# M_2$ es una variedad.

Demostración. Sea $\pi : M_1^o \amalg M_2^o \rightarrow M$ la aplicación cociente y sea $S = \pi(S_1) = \pi(S_2)$. $U_j = M_j^o \setminus S_j$, $j = 1, 2$ son dos abiertos saturados respecto de π , por lo que $\pi : U_j \rightarrow \pi(U_j) = U_j'$ es también una aplicación cociente, que además es inyectiva y por lo tanto un homeomorfismo. Tenemos así que M es localmente euclídeo en $U_1' \cup U_2'$, y además es Hausdorff y IIAN. Nos quedan por tanto verificar los puntos de S . Dado un $p \in S$ verifica que $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$, con $p_j \in S_j$, $j = 1, 2$, y que $\varphi_j(p_j) = x_0 \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Si tomamos V un entorno de x_0 en $\partial B_1(0)$, tenemos que dado un $\varepsilon > 0$, $\hat{V} = \{rx \mid r \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), x \in V\}$ es entorno de x_0 en \mathbb{R}^n , y que $\hat{V} - B_1(0) = \{rx \mid r \in [1, 1 + \varepsilon), x \in V\}$. Sea $V_j = \varphi_j^{-1}(\hat{V} - B_1(0))$, que es entorno de p_j en M_j^o . Como $V_1 \amalg V_2$ es abierto saturado de $M_1^o \amalg M_2^o$ respecto de π , entonces $\tilde{V} = \pi(V_1 \amalg V_2)$ es entorno de p en M . Veamos que es localmente euclídeo. Si construimos Φ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Phi : V_1 \amalg V_2 &\rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \\ q_1 \in V_1 &\mapsto (x, r), r = \|\varphi_1(q_1)\|, x = \varphi_1(q_1)/r, \\ q_2 \in V_2 &\mapsto (x, 2 - r), r = \|\varphi_2(q_2)\|, x = \varphi_2(q_2)/r. \end{aligned}$$

obtenemos que $\Phi : V_1 \rightarrow V \times [1, 1 + \varepsilon)$ y $\Phi : V_2 \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1]$ son homeomorfismos. Además se tiene que $q_1 \sim q_2$ si y sólo si $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$. De este modo, Φ induce una aplicación continua y biyectiva

$$\bar{\Phi} = \Phi \circ \pi^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Si comprobamos que $\bar{\Phi}$ es abierta, tendremos que es homeomorfismo. Tomamos un abierto básico saturado de $V_1 \amalg V_2$, entonces o bien está totalmente incluido en $V_1 \setminus S_1$ o en $V_2 \setminus S_2$, en cuyo caso

la imagen por $\bar{\Phi}$ es un abierto de $V \times (1 - \varepsilon, 1)$ o de $V \times (1, 1 + \varepsilon)$, o bien interseca a S_1 y S_2 . En este caso el abierto es de la forma $W_1 \amalg W_2$, construido como hicimos con $V_1 \amalg V_2$ a partir de un $W \subset V \subset \partial B_1(0)$. Entonces $\bar{\Phi}(\tilde{W}) = W \times (1 - \delta, 1 + \delta)$ con $0 < \delta \leq \varepsilon$, $\tilde{W} = \pi(W_1 \amalg W_2)$. Luego $\bar{\Phi}$ es abierta, y por tanto un homeomorfismo, y así finalmente \tilde{V} es un entorno euclídeo de p .

Por construcción podemos tomar los abiertos $\tilde{V} \subset M$ en cantidad numerable para formar una base de la topología, y por lo tanto M es IIAN. Nos queda sólo ver que es Hausdorff. Sea un $q \in U'_j$, $j = 1, 2$, y un $p \in S$. Podemos tomar un entorno abierto \tilde{V} de p disjunto de un entorno pequeño de q . Y si tomamos $p, p' \in S$ distintos, los abiertos \tilde{V}, \tilde{V}' construidos partiendo de $V, V' \subset \partial B_1(0)$ disjuntos, son disjuntos. Por lo tanto, M es Hausdorff, y finalmente, variedad. \square

La suma conexa de variedades no depende de los puntos elegidos ni de las aplicaciones coordenadas φ_1 y φ_2 , siempre que estas conserven su orientación durante el proceso. Aunque intuitivamente sea fácil de ver, la demostración de este resultado incluye el uso del *annulus theorem*, cuya prueba incluye conceptos que no vamos a tratar en el trabajo.

1.4. Complejos simpliciales y triangulación

Para poder dar una definición rigurosa de triangulación de variedades necesitamos la noción de *complejos simpliciales*. Estos son construcciones formadas por *simplices*, que son una generalización de los triángulos.

Definición 1.4.1. Sean v_0, \dots, v_k $k + 1$ puntos distintos de \mathbb{R}^n . Decimos que $\{v_0, \dots, v_k\}$ están en **posición general** si c_0, \dots, c_k son números reales tales que

$$\sum_{i=0}^k c_i v_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^k c_i = 0,$$

entonces $c_0 = \dots = c_k = 0$.

Definición 1.4.2. Sean $\{v_0, \dots, v_n\}$ un conjunto de $k + 1$ puntos de \mathbb{R}^n en posición general. El **simplex** generado por ellos, que denotamos por $[v_0, \dots, v_k]$, es el conjunto

$$[v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\},$$

con la topología heredada de \mathbb{R}^n . Para todo punto $x = \sum_i t_i v_i \in [v_0, \dots, v_k]$, llamamos a los t_i **coordenadas baricéntricas de x** . Cada uno de los v_i se llama **vértice** del simplex. Al entero k se le llama **dimensión**, y diremos que $[v_0, \dots, v_k]$ es un **k -simplex**.

Ejemplo 1.4.3. Un 0-simplex es un punto, un 1-simplex es un segmento, un 2-simplex es un triángulo junto a su interior, un 3-simplex es un tetraedro sólido, y así sucesivamente (Figura 1.4).

Sea σ un k -simplex. Cada simplex generado por un subconjunto no vacío de vértices de σ se llama **cara de σ** . Las caras que no son iguales a σ se llaman **caras propias**. Las caras 0-dimensionales de σ son sus vértices, y a las caras 1-dimensionales se les llama **aristas**. Las caras $(k - 1)$ -dimensionales de un k -simplex se llaman **caras fronterizas**, y a su unión la llamamos **frontera**. Definimos el **interior** como σ menos su frontera.

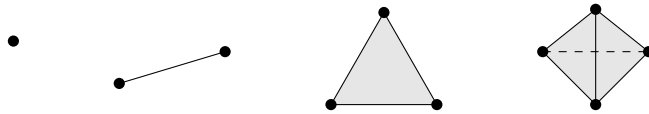


Figura 1.4: k -símplices, $k = 0, \dots, 3$.

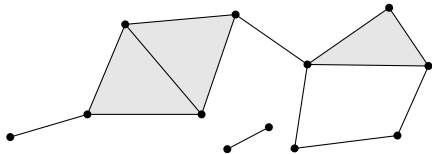


Figura 1.5: Un complejo simplicial en \mathbb{R}^2

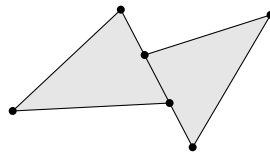


Figura 1.6: Símplices que no forman un complejo.

Definición 1.4.4. Un **complejo simplicial** es una colección K de símplices en un espacio euclídeo \mathbb{R}^n , que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Si $\sigma \in K$, entonces toda cara de σ está en K
- (ii) La intersección de dos símplices cualesquiera en K es o bien vacía o bien una cara de ambos.

La Figura 1.5 muestra un complejo simplicial en \mathbb{R}^2 . En cambio en la Figura 1.6 los símplices representados no forman un complejo, pues no se respeta la condición (ii) de la Definición 1.4.4. Si K un complejo simplicial en \mathbb{R}^n , llamamos **dimensión de K** a la dimensión máxima de los símplices en K . Esta es menor o igual que n . Un subconjunto $K' \subseteq K$ se dice que es un **subcomplejo de K** si para todo $\sigma \in K'$, toda cara de σ está en K' . Un subcomplejo es un complejo simplicial en sí mismo. Para todo $k \leq n$, el conjunto de todos los símplices de K de dimensión menor o igual que k es un subcomplejo llamado **k -esqueleto de K** .

Definición 1.4.5. Sea un complejo simplicial K en \mathbb{R}^n . La unión de todos los símplices en K junto con la topología heredada de \mathbb{R}^n es un espacio topológico que denotamos por $|K|$ y que llamamos **poliedro de K** .

Definición 1.4.6. Una **aplicación afín** es una aplicación $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(x) = c + A(x)$, donde $c \in \mathbb{R}^m$ es un vector fijo y $A(x)$ es una aplicación lineal.

Definición 1.4.7. Sean K, L complejos simpliciales. Una **aplicación simplicial** es una aplicación continua $f : |K| \rightarrow |L|$ cuya restricción a cada símplice $\theta \in K$ coincide con una aplicación afín que lleva θ a algún símplice en L .

Definición 1.4.8. Sea X un espacio topológico. Llamamos **triangulación de X** a un homeomorfismo entre X y el poliedro de algún complejo simplicial.

Definición 1.4.9. Toda variedad (con borde y sin borde) que admita una triangulación se dice **triangulable**.

1.5. Teorema de Radó

Llegamos ahora a la sección central del capítulo: el Teorema de Triangulación de Radó, que asegura que toda superficie es triangulable. Para su demostración se necesita el Teorema de Jordan-Schönflies,

que a pesar de tener un enunciado intuitivo, su demostración es complicada y redactarla nos alejaría del propósito final del trabajo. Demostrar el Teorema de Radó asumiendo este resultado es de todas maneras instructivo, pues se ve el proceso de construcción de la triangulación de una superficie.

Demostraciones del Teorema de Jordan-Schönflies y de los siguientes resultados de teoría de grafos se pueden consultar en [3].

Teorema 1.5.1 (Teorema de Jordan-Schönflies). Sea f un homeomorfismo entre dos curvas simples cerradas C y C' . Entonces f se puede extender a un homeomorfismo de todo el plano.

Una consecuencia del Teorema de Schönflies en teoría de grafos es la siguiente:

Teorema 1.5.2. Sea Γ un grafo plano biconexo. Sea H la frontera de la cara exterior de Γ . Entonces existe un grafo plano Γ' con el mismo conjunto de vértices y la misma cara exterior que Γ , y tal que sus aristas que no están en H son todas poligonales. Existe también un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que es la identidad en la cara exterior de Γ , y que a su vez induce un homeomorfismo que es también un isomorfismo de grafos entre Γ y Γ' que deja H invariante. Diremos que Γ' es Γ **redibujado**.

Finalmente necesitamos también este lema técnico. En lo que sigue, denotaremos por $\text{Int } \gamma([0, 1])$ a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$, donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada simple.

Lema 1.5.3. Sean $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tres curvas cerradas simples y continuas. Supongamos que $\gamma_3([0, 1]) \subseteq \text{Int } \gamma_2([0, 1])$. Definimos un **segmento malo** de γ como un segmento suyo P , que une dos puntos p, q de $\gamma_2([0, 1])$ y tal que todos sus demás puntos están en $\text{Int } \gamma_2([0, 1])$. Definimos un **segmento muy malo** de γ como un segmento malo que interseca $\gamma_3([0, 1])$. Entonces existen sólo un número finito de segmentos muy malos.

Teorema 1.5.4 (Teorema de Radó). Toda superficie compacta es triangulable.

Demostración. Sea S una superficie compacta, y para cada $p \in S$ sea U_p un entorno euclídeo de p . Denotemos por $D(p)$ a un disco en \mathbb{R}^2 homeomorfo a U_p por el homeomorfismo $\theta_p : D(p) \rightarrow U_p$. Dibujemos en $D(p)$ dos cuadriláteros $Q_1(p)$ y $Q_2(p)$, tales que $Q_1(p) \subseteq \text{Int } Q_2(p)$ y tal que $p \in \theta_p(\text{Int } Q_1(p))$.

Por ser S compacta, existen p_1, \dots, p_n tales que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n \theta_{p_i}(\text{Int } Q_1(p_i))$. Mediante traslaciones si es necesario, podemos asumir que los $D(p_1), \dots, D(p_n)$ son disjuntos dos a dos. Lo que vamos a hacer es dejar fijos los $D(p_i)$ y modificar los $Q_1(p_i)$ y θ_{p_i} , para que las intersecciones de los $\theta_{p_i}(Q_1(p_i))$ formen los vértices de un grafo a partir del cual triangularemos la superficie S .

Vamos a demostrar por inducción que para todo k , los $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_k)$ son tales que cualesquiera dos que escojamos de los $\theta_{p_1}(Q_1(p_1)), \dots, \theta_{p_k}(Q_1(p_k))$ tienen sólo un número finito de puntos en común en S . Supongamos por tanto que es cierto para $k - 1$. Traduciendo el Lema 1.5.3 en este contexto, llamemos $\gamma^j = \theta_{p_j}(Q_1(p_j))$, para $j = 1, \dots, k - 1$, $\gamma_2 = \theta_{p_k}(Q_2(p_k))$ y $\gamma_3 = \theta_{p_k}(Q_3(p_k))$, con $Q_3(p_k)$ un cuadrilátero que cumple que $Q_1(p_k) \subseteq \text{Int } Q_3(p_k)$ y $Q_3(p_k) \subseteq \text{Int } Q_2(p_k)$. Así, por el Lema 1.5.3, obtenemos que sólo hay un número finito de segmentos muy malos.

Para cada segmento malo P en $\theta_{p_j}(Q_1(p_j))$, llamamos **segmento malo en $Q_2(p_k)$** a la imagen $\theta_{p_k}^{-1}(P)$. El conjunto de los segmentos malos en $Q_2(p_k)$ junto con $Q_2(p_k)$ determina un grafo plano biconexo que llamaremos Γ . Utilizando el Teorema 1.5.2, redibujamos Γ dentro de $Q_2(p_k)$ obteniendo así un grafo Γ' que es homeomorfo e isomorfo a Γ , y tal que sus aristas son poligonales. Extendemos el isomorfismo entre Γ y Γ' a un homeomorfismo de $\text{Int } Q_2(p_k)$ que deja a $Q_2(p_k)$ fijo. Por otro lado, este proceso transforma $Q_1(p_k)$ y $Q_3(p_k)$ en las curvas simples conexas Q'_1 y Q'_3 tales que $\text{Int } Q'_1 \subseteq \text{Int } Q'_3$ y tal que $p_k \in \text{Int } \theta_{p_k}(Q'_1)$.

Ahora, para cada $q \in Q'_3$, sea $R(q)$ un cuadrado cuyo centro es q y tal que $R(q)$ no interseca ni a Q'_1 ni a cualquier segmento malo que no es muy malo. Formamos con los $R(q)$ un recubrimiento finito de Q'_3 , $R(q_1), \dots, R(q_m)$. La unión $\bigcup_{i=1}^m R(q_i)$ es un grafo plano biconexo cuyo ciclo exterior, que llamamos Q''_3 , es una curva poligonal simple en $\text{Int } Q_2(p_k)$ tal que $Q'_1 \subseteq Q''_3$ y tal que Q''_3 no corta a los segmentos malos de $Q_2(p_k)$ excepto los que son muy malos.

Obtenemos entonces que $\Gamma' \cup Q''_3$ es un grafo biconexo, y redibujándolo utilizando de nuevo el Teorema 1.5.2 podemos asumir que Q''_3 es un rectángulo cuyo interior contiene a Q_1 . Así pues, redefinimos $Q_1(p_k) = Q''_3$, y obtenemos un cuadrilátero tal que $\theta_{p_k}(Q_1(p_k)) \cap \theta_{p_j}(Q_1(p_j))$ es finita para todo $j = 1, \dots, k-1$, demostrando por tanto la hipótesis de inducción.

Finalmente, podemos pensar en $\bigcup_{i=1}^n \theta_{p_i}(Q_1(p_i))$ como un grafo G dibujado sobre la superficie S , cuyos vértices son las intersecciones de los $\theta_{p_j}(Q_1(p_j))$, $j = 1, \dots, k$. Cada región de $S \setminus G$ tiene como frontera a un ciclo C en G . Formamos ahora un polígono convexo C' de lados de longitud 1 y tal que cada vértice de C' se corresponde con un vértice de C . Al identificar las aristas de los varios C' que se corresponden con la misma arista en C , obtenemos un espacio topológico S' con un grafo sumergido Γ' isomorfo a Γ . Este isomorfismo lo podemos extender a un homeomorfismo f que lleva el conjunto de puntos de Γ en S al conjunto de puntos de Γ' en S' , y cuya restricción a cada ciclo C es un homeomorfismo entre C y C' . Por el Teorema de Jordan-Schönflies, podemos extender f a un homeomorfismo de $\overline{\text{Int } C}$ en $\overline{\text{Int } C'}$, lo que define un homeomorfismo de S en S' . Como cada C' es un polígono convexo, podemos triangularlo de forma elemental. Haciendo esto en cada C' , obtenemos un complejo simplicial cuyo poliedro es homeomorfo a S , y tal que cada 1-símplice es una cara de exactamente dos 2-símplices. Hemos obtenido así una triangulación de S . \square

El teorema de Radó se puede extender también a las superficies con borde, con la diferencia que la triangulación vendrá dada por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional en donde hay dos tipos de 1-símplices: los que están totalmente contenidos en el borde, y los que se corresponden con puntos interiores. Los primeros son cara de exactamente un 2-símplice, y los últimos exactamente de dos 2-símplices.

La triangulación de superficies ha llevado a estudiar si todas las variedades de dimensiones superiores son o no triangulables. Su importancia reside en que dan una descripción combinatoria de la variedad, lo que permite calcular invariantes topológicos tales como los grupos de homología. Así, dadas dos variedades trianguladas, podemos distinguirlas en términos de sus respectivas triangulaciones.

Un tipo de variedades interesantes desde el punto de vista de la triangulación son las que tienen una estructura lineal a trozos (variedades *PL*). Estas admiten lo que se llama una *triangulación combinatoria*, que es una triangulación en la que se refleja la estructura de variedad. En los años 1940, Cairns y Whitehead [19] demuestran que toda variedad diferenciable admite una estructura PL compatible. Por lo tanto, se tiene que toda variedad diferenciable es triangulable por una triangulación combinatoria. Por otro lado, en los años 1950 Edwin Moise [20] demuestra que toda variedad de dimensión 3 es diferenciable, y por lo tanto triangulable. En cambio, Kirby y Siebenmann [21] demuestran que, para toda dimensión mayor o igual que 5, existen variedades sin una estructura PL. En los años 1980, Freedman y Casson revolucionaron el estudio de las variedades de dimensión 4. El primero [22] encontró una variedad, llamada E_8 , que no admite una estructura PL, y por lo tanto no tiene una triangulación combinatoria. El segundo [23] demostró, de forma más general, que E_8 no es triangulable, encontrando por primera vez una variedad que no se puede triangular.

Finalmente, Manolescu [24] demostró en 2013 que para cualquier dimensión mayor o igual que 5, existen también variedades no triangulables.

Capítulo 2

Teorema de Clasificación, primera parte

En este capítulo daremos la demostración a la manera de Seifert-Threlfall de la primera parte del teorema de clasificación de superficies compactas. Esta prueba clásica se basa en llegar a una forma normal haciendo cortes y transformaciones sobre polígonos que representen superficies. Para ello se explicará cómo hacer estas representaciones, qué tipo de transformaciones son aceptables y finalmente se expondrá la prueba. En su demostración Conway hace uso de perforaciones sobre las superficies, sin explicar cómo afecta este proceso a su estructura de 2-variedad. En la segunda parte de este capítulo veremos que estas perforaciones dan lugar a superficies con borde, y de hecho que cualquier superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie con perforaciones. Extenderemos entonces el Teorema de Clasificación a estas.

2.1. Superficies como cocientes

Para el Teorema de Clasificación necesitamos un método de representación de las superficies compactas en el plano. Veremos que toda superficie compacta se puede representar como el cociente de un polígono por una relación de equivalencia que identifica sus aristas dos a dos. Empecemos viendo las tres superficies fundamentales: la esfera \mathbb{S}^2 , el plano proyectivo \mathbb{P}^2 y el toro \mathbb{T}^2 .

Proposición 2.1.1. La esfera \mathbb{S}^2 es homeomorfa a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$, si $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$
- (b) El cuadrado $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$ si $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Para (a), vamos a definir una aplicación que “envuelva” cada paralelo de la esfera con un segmento horizontal del disco (ver Figura 2.1). Esta aplicación la podemos escribir como $\pi : \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$

$$\pi(x, y) = \begin{cases} (-\sqrt{1-y^2} \cos \frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}, y), & y \neq \pm 1 \\ (0, 0, y), & y = \pm 1 \end{cases}$$

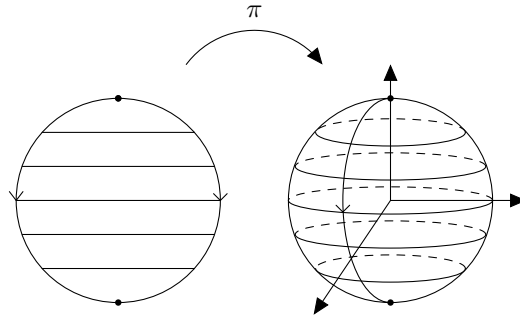


Figura 2.1: La esfera como cociente del disco $\overline{\mathbb{B}}^2$.

π es continua y hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia. Como es sobreyectiva, por el teorema de la aplicación cerrada es una aplicación cociente. Para probar (b), sea $\alpha : S \rightarrow \overline{\mathbb{B}}^2$ un homeomorfismo que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de S a un segmento paralelo a este que une el centro del disco y su frontera. Hagamos ahora $\beta = \pi \circ \alpha : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, donde π es la aplicación cociente del apartado anterior. Tenemos entonces que β identifica (x, y) y $(-x, y)$ cuando $(x, y) \in \partial S$, y por otro lado es inyectiva, así que hace las mismas identificaciones que la aplicación cociente definida en (b), completando así la demostración. \square

Proposición 2.1.2. El toro \mathbb{T}^2 es homeomorfo al espacio cociente resultante de la relación de equivalencia en el cuadrado $I \times I$ que identifica $(x, 0) \sim (x, 1)$ para todo $x \in I$, y $(0, y) \sim (1, y)$ para todo $y \in I$ (Figura 2.2).

Demostración. Definimos la aplicación $q : I \times I \rightarrow \mathbb{T}^2$ que manda $(u, v) \mapsto (e^{2\pi i u}, e^{2\pi i v})$. Es claro que es sobreyectiva, y por el teorema de la aplicación cerrada, es una aplicación cociente. Esta función hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, y por la unicidad del espacio cociente se obtiene el resultado. \square

Proposición 2.1.3. El plano proyectivo \mathbb{P}^2 es homeomorfo a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \partial \overline{\mathbb{B}}^2$.

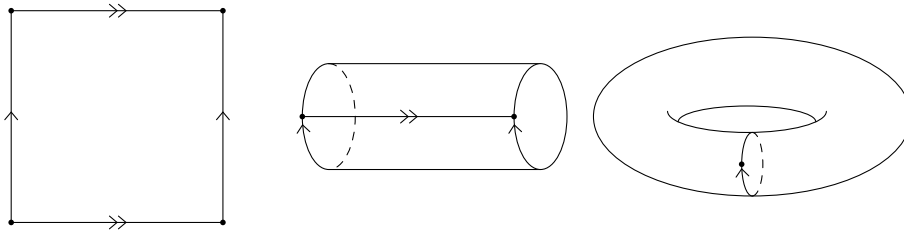


Figura 2.2: El toro como cociente de un cuadrado.

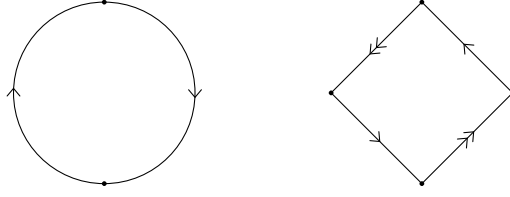


Figura 2.3: Representación de \mathbb{P}^2 como un espacio cociente.

- (b) El cuadrado $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Sea la relación de equivalencia \sim generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{S}^2$, que representa \mathbb{P}^2 como el cociente de una esfera en la cual se identifican polos opuestos, y sea $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ su aplicación cociente. Si $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es la aplicación que manda el disco al emisferio norte de la esfera mediante la aplicación $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, entonces $p \circ F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 / \sim$ es sobreyectiva por serlo p y F , y es por tanto una aplicación cociente por el teorema de la aplicación cerrada. La aplicación identifica únicamente $(x, y) \in \partial \mathbb{B}^2$ con $(-x, -y) \in \partial \mathbb{B}^2$, por lo que \mathbb{P}^2 es homeomorfo al espacio cociente resultante. Para la parte (b) utilizamos, como en Proposición 2.1.1 (b), el homeomorfismo $\alpha : S \rightarrow \mathbb{B}^2$ que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de S a un segmento paralelo en el disco que une el centro y su frontera. Al componerlo con $p \circ F$ se obtiene el resultado. \square

Observación 2.1.4. De ahora en adelante visualizaremos el plano proyectivo como el **crosscap**, que construimos a partir de la proposición anterior tal como se sigue en la Figura 2.4. El primer esbozo de esta figura lo hizo von Dick [14].

En las anteriores proposiciones hemos visto una o varias formas de representar superficies dadas ciertas construcciones geométricas. En estos casos hemos dado aplicaciones y demostraciones concretas para validar nuestros argumentos, pero a medida que aumenta la sofisticación es más útil guiarse visualmente por las figuras construidas. Por ello debemos formalizar un método general para construir superficies identificando aristas de figuras geométricas del plano.

Definición 2.1.5. Un **polígono** es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que es homeomorfo a \mathbb{S}^1 y está formado por un número finito de segmentos, que llamaremos **aristas** y que se intersecan sólo en sus extremos, que llamaremos **vértices**.

Definición 2.1.6. Una **región poligonal** es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 cuyo interior es homeomorfo al disco \mathbb{B}^2 y cuya frontera es un polígono. A los vértices y aristas del polígono de la frontera también los llamamos vértices y aristas de la región poligonal.

Veamos pues que identificando aristas de regiones poligonales de par en par obtenemos un espacio cociente que es siempre una superficie:

Proposición 2.1.7. Sean P_1, \dots, P_k regiones poligonales en el plano, y sea $P = P_1 \amalg \dots \amalg P_k$, y supongamos dada una relación de equivalencia en P que identifica algunas aristas de los polígonos con otros por homeomorfismos afines. Entonces se tiene:

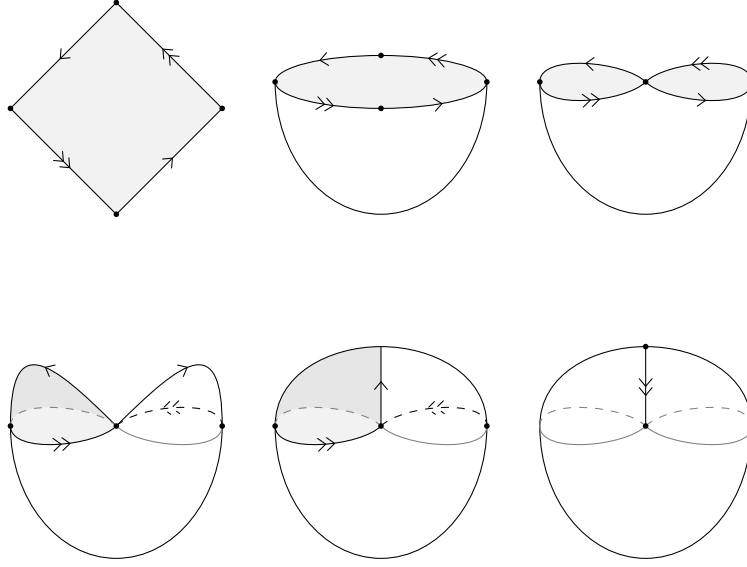


Figura 2.4: Crosscap.

- (a) Si la relación de equivalencia identifica cada arista de cada P_i con exactamente otra arista de un P_j (no necesariamente $i \neq j$), entonces el espacio cociente resultante es una superficie compacta.
- (b) Si para algunos P_i la relación de equivalencia identifica alguna arista suya con exactamente otra arista de un P_j (no necesariamente $i \neq j$), y para las aristas restantes no hay ninguna identificación, entonces el espacio cociente resultante es una superficie con borde compacta.

Demostración. Para demostrar esta propiedad seguiremos una idea similar a la de la Proposición 1.3.2. Para probar (a), denotemos por M el espacio cociente, y sea $\pi : P \rightarrow M$ la aplicación cociente. Por un lado, los puntos que provienen del interior de cada región poligonal son abiertos en M por definición, y por lo tanto son entornos euclídeos de cada uno de sus puntos. Así, tenemos que aquí M es localmente euclídea, y además Hausdorff y IIAN.

Sea ahora D la imagen por π del interior de una arista de una región poligonal, y sea $d \in D$. Veamos que d tiene un entorno euclídeo. Por un lado, d tiene exactamente dos preimágenes x e y , cada una en el interior de una arista distinta D_1 y D_2 . Supongamos sin pérdida de generalidad que estas dos aristas pertenecen respectivamente a P_1 y P_2 (P_1 puede ser igual a P_2), y denotemos por $h : D_2 \rightarrow D_1$ un homeomorfismo tal que $h(y) = x$. Dado que cada P_i es una variedad con borde, y x, y son puntos borde, podemos elegir cartas coordenadas (U, φ) para P_1 y (V, ψ) para P_2 tal que $x \in U$, $y \in V$. Denotamos $\hat{U} = \varphi(U)$, $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$ y podemos asumir, contrayendo U y V si es necesario, que $h(V \cap D_2) = U \cap D_1$, y que $\hat{U} = U_0 \times [0, \varepsilon)$, $\hat{V} = V_0 \times [0, \varepsilon)$ para un $\varepsilon > 0$ y unos subconjuntos $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}$ como se muestra en la Figura 2.5. Así pues podemos escribir las aplicaciones coordenadas como $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$, $\psi(x) = (\psi_0(y), \psi_1(y))$ con $\varphi_0 : U \rightarrow U_0$, $\varphi_1 : U \rightarrow [0, \varepsilon)$, $\psi_0 : V \rightarrow V_0$ y $\psi_1 : V \rightarrow [0, \varepsilon)$ aplicaciones continuas. Que x e y sean puntos borde significa que $\varphi_1(x) = \psi_1(y) = 0$. Queremos ensamblar estas dos cartas con una aplicación cuya imagen sea un abierto de \mathbb{R}^2 , pegándolas por los puntos que se corresponden en D_1 y D_2 . En la demostración de la Proposición 1.3.2 teníamos un homeomorfismo entre los puntos borde de los entornos, pero en este caso el problema es que las aplicaciones φ y ψ no tienen por qué llevar puntos borde que se correspondan al mismo punto

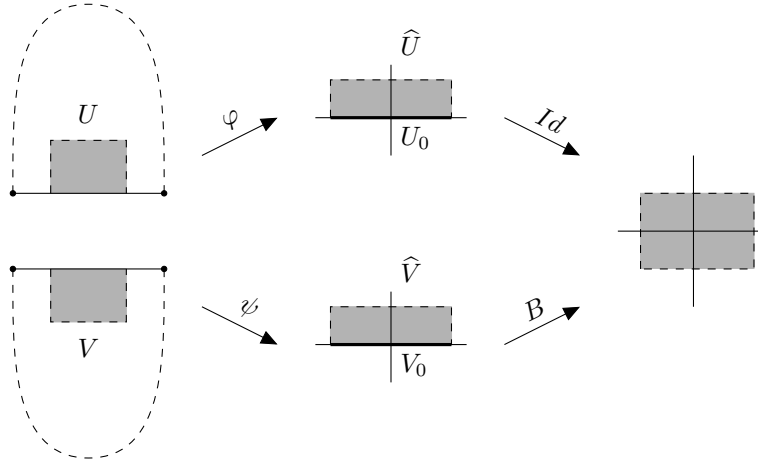


Figura 2.5: Entorno euclídeo de una arista.

imagen, y por tanto tenemos que ajustarlo. Se tiene que las dos restricciones

$$\varphi_0|_{U \cap D_1} : U \cap D_1 \rightarrow U_0 \quad \psi_0|_{V \cap D_2} : V \cap D_2 \rightarrow V_0$$

son homeomorfismos, y definimos así el homeomorfismo $\beta : V_0 \rightarrow U_0$ por

$$\beta = (\varphi_0|_{U \cap D_1}) \circ h \circ (\psi_0|_{V \cap D_2})^{-1}.$$

Sea ahora $B : \widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación

$$B(y_1, y_2) = (\beta(y_1), -y_2).$$

Geométricamente, B actúa juntando cada punto borde de acuerdo con β , y dando la vuelta al segmento que está por encima de él, llevándolo a un segmento por debajo (como en la Figura 2.5). Esta construcción nos asegura que

$$B \circ \psi(y) = (\beta \circ \psi_0(y), 0) = (\varphi_0 \circ h(y), 0) = \varphi \circ h(y). \quad (2.1)$$

Definimos ahora $\tilde{\Phi} : U \amalg V \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\tilde{\Phi}(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in U, \\ B \circ \psi(y), & y \in V. \end{cases}$$

Dado que $U \amalg V$ es un abierto saturado de M , la restricción $\pi|_{U \amalg V} : U \amalg V \rightarrow \pi(U \amalg V)$ es una aplicación cociente en el entorno $\pi(U \amalg V)$ de d , y por (2.1) $\tilde{\Phi}$ pasa al cociente y define una aplicación continua e inyectiva $\Phi : \pi(U \amalg V) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como φ , ψ y B son homeomorfismos entre sus dominios y sus imágenes, podemos definir la inversa de Φ de la siguiente manera:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{cases} \pi \circ \varphi^{-1}(s), & s_2 \geq 0, \\ \pi \circ \psi^{-1} \circ B^{-1}(s), & s_2 \leq 0. \end{cases}$$

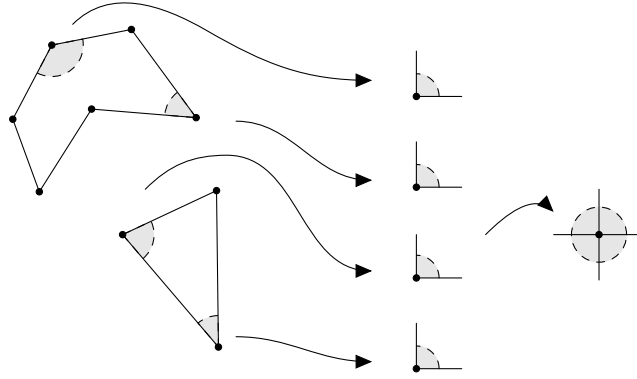


Figura 2.6: Entorno euclídeo de un vértice.

Dado que las dos partes de la función son iguales donde coinciden, la aplicación es continua, y por tanto Φ es un homeomorfismo. Así pues, $U \amalg V$ es un entorno euclídeo de d . Un argumento análogo al de la demostración de la Proposición 1.3.2 nos indica que es Hausdorff y IIAN.

Para finalizar, sea $v \in M$ tal que su preimagen por π es un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq P$. Para cada uno de estos vértices podemos elegir un $\varepsilon > 0$ tal que el disco $B_\varepsilon(v_i)$ no contenga ningún vértice de la región poligonal P_j a la que pertenece v_i a parte de sí mismo, y tal que no interseca más aristas que las que lo contienen. $B_\varepsilon(v_i) \cap P_j$ es homeomorfo a un subconjunto Λ_i de \mathbb{R}^2 definido por la intersección de dos semiplanos cuyas fronteras coinciden en un único punto y tal que el ángulo que forman es de $2\pi/k$, y que descrito en coordenadas polares queda $\Lambda_i = \{(r, \theta) \mid \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2k\pi\}$. El homeomorfismo viene dado por una traslación del vértice v_i al origen junto con una aplicación que en coordenadas polares es de la forma $(r, \theta) \mapsto (r, \theta_0 + c\theta)$, con c y θ_0 constantes. Como cada arista está asociada exactamente a otra arista, podemos ahora construir una aplicación que envíe cada una de las Λ_i a un conjunto que contenga un entorno del origen y que, después de reescalar si es necesario, respete las identificaciones entre las aristas de los P_j (ver Figura 2.6). Esta aplicación está definida sobre un abierto saturado de P , que al pasar al cociente determina un homeomorfismo de v a un entorno del origen de \mathbb{R}^2 . Estos abiertos los podemos tomar en una cantidad numerable para formar una base de la topología. Por otro lado, cogiendo abiertos suficientemente pequeños, podemos ver que es separable.

Finalmente, para probar (b), volvemos a ver cada polígono como una superficie con borde. Las imágenes por π de los puntos del interior de aristas que se identifican son localmente euclídeos por la demostración del apartado anterior. Por otro lado, para los puntos del borde que provengan de una arista y que tengan sólo una preimagen podemos encontrar como semibolas coordenadas las mismas de antes de pasar al cociente. Finalmente para las imágenes por π de los vértices podemos encontrar una bola o una semibola coordenada con una construcción similar a la de la demostración anterior, dependiendo de si estas imágenes están contenidas en el borde o no. Por tanto se tiene que el espacio cociente resultante es una superficie con borde. \square

Ejemplo 2.1.8. La *botella de Klein* es la superficie K obtenida identificando las aristas del cuadrado $I \times I$ de acuerdo a $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ para $0 \leq t \leq 1$. Para visualizar K , podemos pensar en pegar las aristas izquierda y derecha creando un cilindro, y luego hacer pasar el extremo superior por la parte inferior del cilindro, para finalmente pegar los dos extremos (ver Figura 2.7).

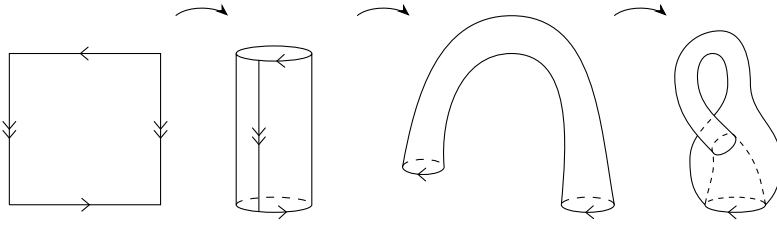


Figura 2.7: Construcción de la botella de Klein.

Ejemplo 2.1.9. Veamos ahora como obtener las figuras del Ejemplo 1.2.5. El cilindro Cil es la superficie con borde que se obtiene al identificar las aristas de un cuadrado $I \times I$ dada la relación de equivalencia $(0, y) \sim (1, y)$, con $y \in I$ (Figura 2.8a). La banda de Möbius Mob es la superficie con borde que se obtiene identificando las aristas del cuadrado $I \times I$ de acuerdo a la relación $(0, y) \sim (1, 1 - y)$, $y \in I$ (Figura 2.8b).

2.2. Representación de superficies

Vamos ahora a dar un método para representar todas las superficies compactas (con y sin borde) como regiones poligonales del plano. A su vez asociaremos a cada región poligonal, y por tanto a cada superficie compacta, una secuencia de símbolos llamada palabra.

Definición 2.2.1. Sea S un conjunto. Una **palabra en S** es una k -tupla ordenada de símbolos, cada uno de los cuales aparece de la forma a o a^{-1} , para cierto $a \in S$.

Definición 2.2.2. Una **representación poligonal**, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$$

está formada por un conjunto finito S junto con un número finito de palabras W_1, \dots, W_k en S de longitud mayor o igual que 3, tal que para todo $a \in S$ existe un W_i tal que $a \in W_i$. Cuando el conjunto S esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de S y denotaremos las palabras W_i por yuxtaposición. Por ejemplo, la representación con $S = \{a, b\}$ y la palabra $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$ la escribiremos $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Permitimos también el caso en que $S = \{a\}$ (u otro símbolo cualquiera) y que \mathcal{P} tenga una sola palabra de longitud 2, es decir, $\langle a \mid aa \rangle$, $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$, $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ y $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$.

Definición 2.2.3. Una representación poligonal \mathcal{P} da lugar a un espacio topológico $|\mathcal{P}|$, llamado **realización geométrica de \mathcal{P}** , que se obtiene de la siguiente manera:

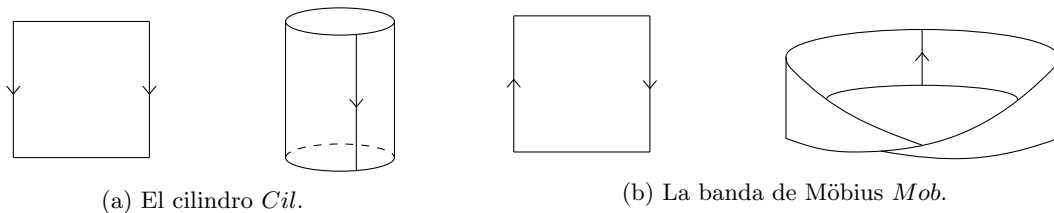


Figura 2.8: Superficies con borde como cocientes topológicos.

1. Para cada $W_i \in \mathcal{P}$ de longitud k , sea P_i una región poligonal convexa con k aristas, centrada en el origen, con aristas de longitud 1, ángulos iguales y tal que un vértice esté sobre el eje OY .
2. Definimos una biyección (que llamaremos *etiquetado*) entre los símbolos de W_i y las aristas de P_i , en sentido contrario a las agujas del reloj y empezando por la que yace en el eje OY .
3. Sea $|\mathcal{P}|$ el espacio cociente de $\coprod_i P_i$ determinado por la identificación de las aristas que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de las aristas con una etiqueta dada a y los últimos vértices de las que tienen la correspondiente etiqueta a^{-1} (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si \mathcal{P} es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, definimos $|\mathcal{P}|$ como la esfera \mathbb{S}^2 si la palabra es aa^{-1} o $a^{-1}a$, o como el plano proyectivo \mathbb{P}^2 si la palabra es aa o $a^{-1}a^{-1}$.

Dadas dos palabras W_1 y W_2 , W_1W_2 representará la palabra formada concatenando los símbolos de W_1 y W_2 . Por otro lado, adoptaremos la convención de que $(a^{-1})^{-1} = a$. También, en lo que sigue, S denotará una secuencia cualquiera de símbolos, a, b, c, a_1, a_2, \dots símbolos de S , e un símbolo que no sea de S y W_1, W_2, \dots palabras formadas por símbolos de S .

Definición 2.2.4. Los interiores, las aristas y los vértices de cada región poligonal P_i se llaman **caras, aristas y vértices de la representación**. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de aristas coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para una arista etiquetada con a , el **vértice inicial** es el primero en el sentido contrario de las agujas del reloj, y el otro es el **vértice final**. Para una arista etiquetada a^{-1} , estas definiciones se invierten.

Definición 2.2.5. Sea $\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$ una representación poligonal.

- (i) Decimos que \mathcal{P} es una **representación de una superficie** si para todo $a \in S$, a ocurre exactamente dos veces en W_1, \dots, W_k como a o como a^{-1} .
- (ii) Si en cambio en la representación poligonal cada símbolo $a \in S$ ocurre una o dos veces en W_1, \dots, W_k como a o a^{-1} , diremos que \mathcal{P} es una **representación de una superficie con borde**.

Observación 2.2.6. Por la Proposición 2.1.7, la realización geométrica de una representación de una superficie es una superficie compacta, y la realización geométrica de una representación de una superficie con borde es una superficie con borde compacta.

En el apartado (ii) de la definición anterior dejamos la posibilidad de que cada símbolo aparezca exactamente dos veces, como en (i). Esto no es ninguna ambigüedad pues como se expuso en la Sección 1.2 una superficie sin borde es siempre una superficie con borde, y una superficie con borde tal que tiene borde vacío es una superficie sin borde.

Definición 2.2.7. Si X es un espacio topológico y \mathcal{P} una representación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a \mathcal{P} , decimos que \mathcal{P} es una **representación de X** .

Observación 2.2.8. Un espacio topológico que admite una representación con una sola cara es conexo, pues es homeomorfo al cociente de una región poligonal conexa. Con más de una cara, puede ser o no conexo.

Ejemplo 2.2.9. Veamos las representaciones de algunas superficies importantes (ver Figura 2.9 y Figura 2.10).

- (a) $\mathbb{S}^2 = \langle a \mid aa^{-1} \rangle = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$ (Proposición 2.1.1).

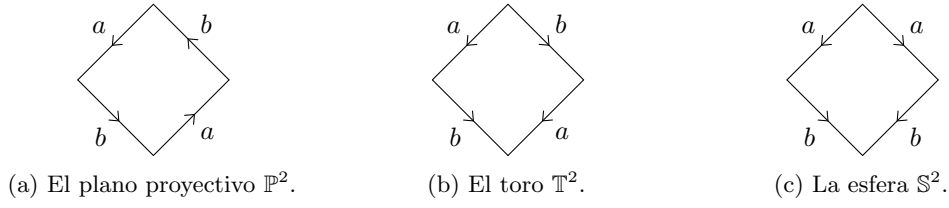


Figura 2.9: Representación de superficies importantes.

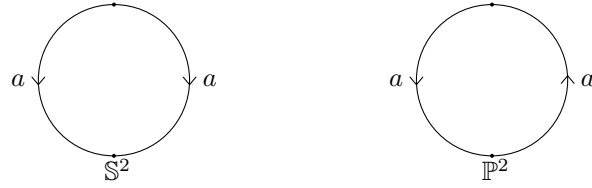


Figura 2.10: Representaciones de la esfera y el plano proyectivo.

(b) $\mathbb{P}^2 = \langle a \mid aa \rangle = \langle a, b \mid abab \rangle$ (Proposición 2.1.3).

(c) $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ (Proposición 2.1.2).

(d) $K = \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$ (Ejemplo 2.1.8).

Ejemplo 2.2.10. Podemos dar también las representaciones de algunas superficies con borde (Figura 2.11):

(a) $\overline{\mathbb{B}}^2 = \langle a, b, c \mid abc \rangle$.

(b) $Mob = \langle a, b, c \mid abac \rangle$ (Ejemplo 2.1.9).

(c) $Cil = \langle a, b, c \mid aba^{-1}c \rangle$ (Ejemplo 2.1.9).

Parece claro que, además de \mathbb{S}^2 y \mathbb{P}^2 , una superficie pueda tener varias representaciones poligonales. Sea por ejemplo la representación del toro $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Intuitivamente podemos ver que, subdividiendo las aristas etiquetadas con a y reetiquetándolas con e y a (ver Figura 2.12), la superficie que representa la representación obtenida $\langle a, e, b \mid aeb^{-1}e^{-1}a^{-1}b \rangle$ será la misma. Vamos ahora a desarrollar unas reglas generales de transformación de representaciones de superficies que den lugar a superficies homeomorfas.

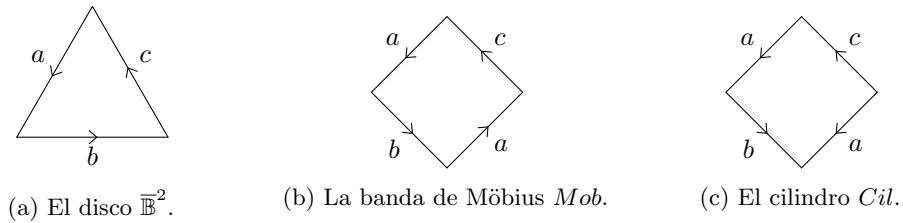


Figura 2.11: Representación de superficies con borde.

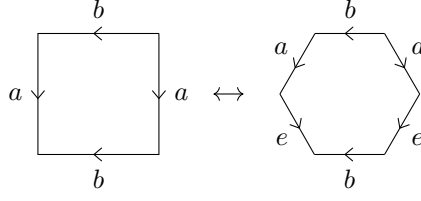


Figura 2.12: Subdividir/consolidar.

Definición 2.2.11. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos representaciones tal que sus realizaciones geométricas son homeomorfas. Entonces decimos que son *topológicamente equivalentes* y escribimos $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$.

Definición 2.2.12. A las siguientes operaciones las llamamos *transformaciones elementales* de una representación poligonal:

- **Reetiquetar:** Se refiere a tres cambios distintos que se pueden dar sobre la representación: cada vez que aparece un símbolo a , cambiarlo por otro símbolo que no esté todavía en la representación; intercambiar entre ellos dos símbolos a y b de la representación cada vez que aparezcan; intercambiar todas las a por a^{-1} y las a^{-1} por a .
- **Subdividir** (Figura 2.12): Cada vez que aparezca a , sustituirlo por ae , y cada vez que aparezca a^{-1} sustituirlo por $e^{-1}a^{-1}$, donde e es un símbolo que no está todavía en la representación.
- **Consolidar** (Figura 2.12): Si a y b aparecen siempre de forma adyacente, intercambiar ab por a y $b^{-1}a^{-1}$ por a^{-1} , siempre que esto de lugar a una o más palabras de longitud al menos 3 o a una sola palabra de longitud 2.
- **Reflejar** (Figura 2.13a):

$$\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Rotar** (Figura 2.13b):

$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Cortar** (Figura 2.14a): Si W_1 y W_2 tienen longitud al menos 2,

$$\langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

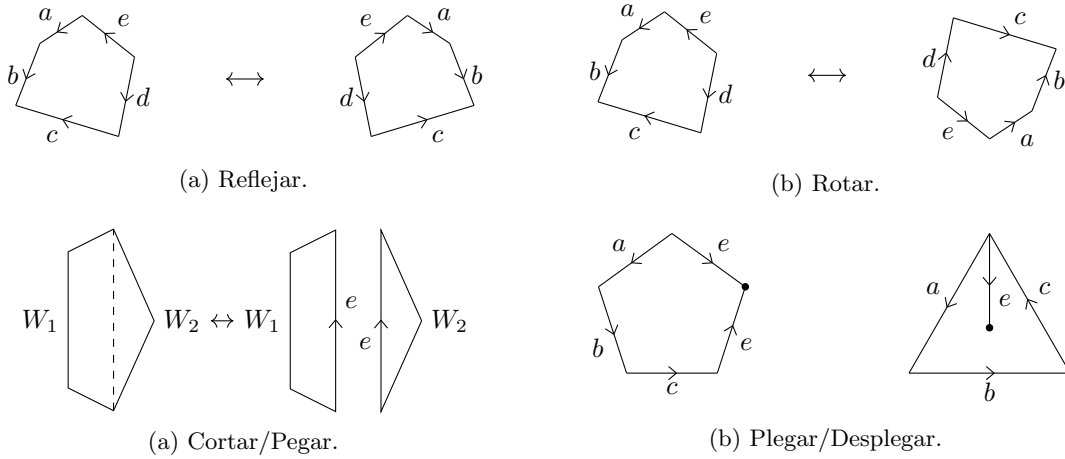
- **Pegar** (Figura 2.14a):

$$\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

- **Plegar** (Figura 2.14b): Si W_1 tiene longitud al menos 3,

$$\langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

También podemos utilizar esta transformación en el caso de que W_1 tenga longitud 2, siempre que la representación tenga una única palabra.



■ **Desplegar** (Figura 2.14b):

$$\langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

Proposición 2.2.13. Las operaciones elementales sobre representaciones poligonales dan lugar a representaciones poligonales topológicamente equivalentes.

Demostración. Los pares subdividir/consolidar, cortar/pegar y plegar/desplegar son inversos, con lo que basta probar la proposición para una transformación de cada par. Los casos de reetiquetar, reflejar y rotar son cambios puramente formales que no afectan al espacio cociente. Empecemos con la operación de cortar. Sean P_1 y P_2 dos regiones poligonales convexas etiquetadas por las palabras $W_1 e$ y $e^{-1} W_2$ y sea P' la region poligonal etiquetada por $W_1 W_2$. Supongamos de momento que no hay más palabras en las respectivas representaciones. Sean también $\pi : P_1 \amalg P_2 \rightarrow M$ y $\pi' : P' \rightarrow M'$ respectivamente las aplicaciones cocientes. El segmento que va desde el vértice final de W_1 en P' a su vértice inicial yace en P' por convexidad, y lo etiquetamos con e . La aplicación $\tilde{f} : \partial P_1 \amalg \partial P_2 \rightarrow \partial P'$ que lleva cada arista de P_1 o P_2 a su correspondiente arista en P' es continua y se puede extender a una aplicación continua $f : P_1 \amalg P_2 \rightarrow P'$ cuya restricción a cada P_i sea un homeomorfismo sobre su imagen. Por el teorema de la aplicación cerrada, f es una aplicación cociente. Dado que f identifica únicamente las aristas e y e^{-1} , las aplicaciones cociente $\pi' \circ f$ y π hacen exactamente las mismas identificaciones, y por tanto los espacios cociente M y M' son homeomorfos. En el caso de que hubiese otras palabras W_3, \dots, W_k , simplemente extendemos f sobre sus respectivas representaciones poligonales como la identidad, y procedemos como antes.

Para la operación de consolidar empezamos considerando las palabras de longitud 3 o más. Para ello, sean P_1 y P_2 las regiones poligonales etiquetadas respectivamente por $a e W e^{-1} a^{-1} W'$ y $a W a^{-1} W'$ (pudiendo ser W' vacía), sean M y M' los espacios cociente y sean $\pi : P_1 \rightarrow M$ y $\pi' : P_2 \rightarrow M'$ las respectivas aplicaciones cociente. Podemos construir un homeomorfismo $f : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$, que lleve la arista a en P_1 a la primera mitad de a en P_2 , la arista e a la segunda mitad de la arista a en P_2 , que lleve de forma análoga e^{-1} y a^{-1} en P_1 a la arista a^{-1} en P_2 , y tal que sea la identidad en W y W' . Podemos extender este homeomorfismo a un homeomorfismo de P_1 en P_2 , y se tiene entonces que las aplicaciones cociente $\pi \circ f$ y π' hacen las mismas identificaciones, por lo que M y M' son homeomorfos. El caso de que la palabra que nos quede al aplicar la consolidación tenga longitud 2, puede provenir sólo de una representación de longitud 4 de \mathbb{S}^2 o \mathbb{P}^2 , quedándonos pues una de las representaciones equivalentes de longitud 2 que definimos.

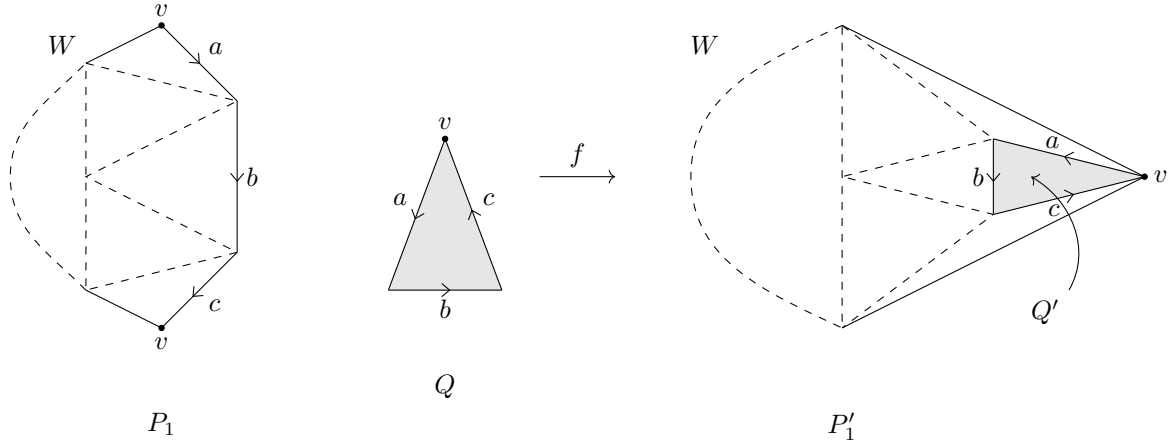


Figura 2.15: La representación $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$.

Para el plegado, ignoramos como antes palabras adicionales W_2, \dots, W_k . Supongamos para empezar que $W_1 = abcd$ tiene longitud exáctamente 4. Sea P una región poligonal convexa con aristas etiquetadas por $abee^{-1}cd$. Si cortamos a lo largo de el segmento f que une el vértice inicial de a con el vértice final de e y obtenemos así $abef$ y $f^{-1}e^{-1}cd$. Consolidamos ef en h , obteniendo así ah^{-1} y bch . Pegamos por h y obtenemos así $abcd$. Si W_1 tiene longitud 2 o 3, podemos subdividir para alargar la longitud de la palabra a 4, plegar, y finalmente consolidar de nuevo. \square

Proposición 2.2.14. Sea M una superficie que admite como representación $\langle S \mid W \rangle$. Sea B un disco coordenado regular en M . Entonces $\langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$ es una representación de $M \setminus B$.

Demostración. Consideramos la representación $\mathcal{P} = \langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1}, abc \rangle$ (Figura 2.15). Pegando a lo largo de a y doblando dos veces, tenemos que \mathcal{P} es una representación equivalente a $\langle S \mid W \rangle$ y por tanto es una representación de M . Llamemos B a la imagen por la proyección π en M del interior de la región poligonal cuya frontera es abc . Veamos que B es un disco coordenado regular, es decir, que existe un entorno B' de B en M y un homeomorfismo $\phi : B' \rightarrow \mathbb{R}^2$ que manda B a \mathbb{B}^2 y \overline{B} a $\overline{\mathbb{B}^2}$. Siguiendo la figura Figura 2.15, sean P_1 , Q y P'_1 regiones poligonales convexas etiquetadas respectivamente por las palabras $Wc^{-1}b^{-1}a^{-1}$, abc y W . Si triangulamos las regiones poligonales como en la imagen, obtenemos una aplicación simplicial $f : P_1 \amalg Q \rightarrow P'_1$ que lleva Q a el triángulo $Q' \subseteq P'_1$, que comparte un vértice v con P'_1 . La composición $\pi \circ f : P_1 \amalg Q \rightarrow M$ respeta las identificaciones hechas por la aplicación cociente $\pi : P'_1 \rightarrow M$, por lo que se tiene un homeomorfismo de M , que lleva B a la imagen de Q' .

Ahora, fijémonos en la demostración de la Proposición 2.1.7 (a). Cuando construimos el entorno euclídeo de un vértice, ensamblábamos las regiones del plano Λ que se correspondían con los varios vértices en un mismo disco coordenado. Aplicando esa construcción al vértice v , llevamos Q' a un conjunto que es homeomorfo a un disco cerrado en el plano, y entonces extendemos ese homeomorfismo a un disco abierto que lo contiene.

Se tiene por tanto que la realización geométrica de $\langle S, a, b, c \mid Wc^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle$ es homeomorfa a $M \setminus B$, y que ∂B es la imagen de las aristas $c^{-1}b^{-1}a^{-1}$ \square

Proposición 2.2.15. Sean M_1 y M_2 superficies que admiten respectivamente representaciones $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$ y $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$, donde S_1 y S_2 son conjuntos disjuntos y tal que cada representación tiene una sola cara. Entonces $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$ es una representación de la suma conexa $M_1 \# M_2$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior que la realización geométrica de $\langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1} \rangle$ es homeomorfa a $M'_1 = M_1 \setminus B_1$ y un argumento análogo nos indica que $\langle S_2, a, b, c \mid abc W_2 \rangle$ es una representación de M_2 menos un disco coordinado, que denotamos por $M'_2 = M_2 \setminus B_1$. Por tanto se tiene que $\langle S_1, S_2, a, b, c \mid W_1, c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle$ es una representación de $M'_1 \amalg M'_2$ con las fronteras de los respectivos discos identificados, es decir, $M_1 \# M_2$. Finalmente, pegando por a y doblando dos veces, se obtiene la representación $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$. \square

Ejemplo 2.2.16. Con la proposición anterior podemos aumentar nuestra lista de superficies conocidas. A estas representaciones las llamaremos representaciones en forma **normal** o **estándar**.

(a) *Esfera*

$$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de n toros.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de n planos proyectivos.*

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle$$

Proposición 2.2.17. Sea M una superficie compacta. Entonces tiene una representación poligonal.

Demostración. Por el Teorema de Radó, M es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial K de dimensión 2, que denotaremos por $|K|$, en donde todo 1-símplice es una cara de exactamente dos 2-símplices. Sea \mathcal{P} la representación poligonal de una superficie que consta de una palabra de longitud 3 por cada 2-símplice, y cuyas aristas tienen las mismas etiquetas si y solo si corresponden al mismo 1-símplice. Veamos que la realización geométrica de \mathcal{P} es homeomorfa al poliedro $|K|$. Si $P = P_1 \amalg \dots \amalg P_k$ denota la unión disjunta de los 2-símplices de K , entonces tenemos dos aplicaciones cociente $\pi_K : P \rightarrow |K|$ y $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |\mathcal{P}|$. Por la unicidad del espacio cociente, hay que ver, por tanto, que hacen las mismas identificaciones. Sabemos que ambas aplicaciones son inyectivas en el interior de los 2-símplices, que identifican vértices únicamente con vértices y que identifican las aristas de la misma manera. Falta por tanto demostrar que π_K y $\pi_{\mathcal{P}}$ identifican los vértices sólo de acuerdo a la relación generada por la identificación de las aristas.

Supongamos que $v \in K$ es un vértice. Se tiene que v pertenece a un 1-símplice, pues si no sería un punto aislado de $|K|$, lo que contradice que $|K|$ sea una variedad. El Teorema de Radó nos garantiza que este 1-símplice es una cara de exactamente dos 2-símplices. Definimos una relación de equivalencia sobre los dos 2-símplices que contienen a v : si σ, σ' son dos 2-símplices que contienen a v , decimos que están **contactados por arista en v** si hay una secuencia $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$ de 2-símplices que contienen a v talque cada σ_i comparte una arista con σ_{i+1} , para todo $i = 1, \dots, k-1$. Vamos a comprobar por tanto que sólo hay una clase de equivalencia. Supongamos, por reducción al absurdo, que podemos agrupar los 2-símplices que contienen a v en dos conjuntos disjuntos $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ y $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ tales que todo σ_i está conectado por arista con todo σ_j pero ningún τ_i está conectado con ningún σ_j . Sea un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(v)$ interseca sólo los símplexes que contienen a v . Se tiene entonces que $B_\varepsilon(v) \cap |K|$ es un abierto de $|K|$ y por tanto una superficie, por lo que v tiene un

entorno $W \subseteq B_\varepsilon(v) \cap |K|$ homeomorfo a \mathbb{R}^2 , y así pues $W \setminus \{v\}$ es conexo. Pero si denotamos ahora los conjuntos

$$U = W \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) \setminus \{v\}$$

$$V = W \cap (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_m) \setminus \{v\}$$

entonces U y V son dos abiertos disjuntos de $|K|$ cuya intersección con cada símplice es abierta en el símplice, y así, $W = U \cup V$ es una desconexión de W . Pero esto es una contradicción. \square

2.3. Teorema de clasificación de superficies compactas

Ya tenemos la maquinaria necesaria para hacer una primera demostración de la primera parte del Teorema de Clasificación. Como venimos anunciando desde el principio del presente trabajo nuestras superficies fundamentales son el toro \mathbb{T}^2 , la esfera \mathbb{S}^2 , y el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .  Qu  pasa con las otras superficies que hemos visto, como la botella de Klein o la suma conexa de un toro y un plano proyectivo? La respuesta la obtenemos de los dos siguientes lemas.

Lema 2.3.1. La botella de Klein es homeomorfa a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Demostración. Vamos a demostrarlo haciendo transformaciones elementales sobre la representación de la botella de Klein vista en el Ejemplo 2.2.9.

$$\begin{aligned} \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle & \\ \approx \langle a, b, c \mid abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle & \quad (\text{cortar por } c) \\ \approx \langle a, b, c \mid bca, a^{-1}cb \rangle & \quad (\text{rotar y reflejar}) \\ \approx \langle b, c \mid bbcc \rangle & \quad (\text{pegar por } a \text{ y rotar}) \end{aligned}$$

Y esto es la representación poligonal de la suma conexa de dos planos proyectivos. \square

Lema 2.3.2. La suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ es homeomorfa a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Demostración. Partimos de una representación poligonal de $K \# \mathbb{P}^2$, que es, por el lema anterior, una representación de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ y procedemos haciendo transformaciones elementales:

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \mid abab^{-1}cc \rangle & \\ \approx \langle a, b, c, d \mid cabd^{-1}, c^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar, cortar por } d \text{ y reflejar}) \\ \approx \langle a, b, d \mid abd^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y pegar por } c) \\ \approx \langle a, b, d, e \mid a^{-1}d^{-1}abe, b^{-1}de \rangle & \quad (\text{cortar por } e \text{ y reflejar}) \\ \approx \langle a, d, e \mid a^{-1}d^{-1}adee \rangle & \quad (\text{rotar y pegar por } b) \end{aligned}$$

Esta última es, tal como queríamos, una representación de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$. \square

Teorema 2.3.3 (Clasificación de Superficies Compactas, primera parte). Toda superficie compacta y conexa no vacía es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- (a) La esfera \mathbb{S}^2 .
- (b) Una suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ de copias del toro.
- (c) Una suma conexa $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$ de copias del plano proyectivo.

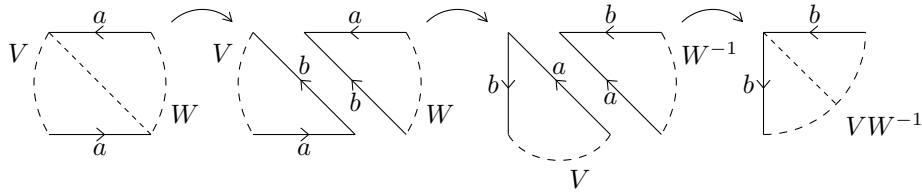


Figura 2.16: Haciendo que los pares torcidos sean adyacentes.

A estas superficies las llamamos **superficies fundamentales**.

Demostración. Sea M una superficie junto con una representación poligonal suya, que existe por la Proposición 2.2.17. Probaremos el teorema haciendo transformaciones elementales sobre esta representación hasta llegar a una en forma estándar. Diremos que dos aristas de una representación poligonal con una misma etiqueta son **complementarias** si aparecen tanto en la forma a como en la de a^{-1} , y diremos que son **torcidas** si aparecen únicamente como a, \dots, a o como a^{-1}, \dots, a^{-1} .

PASO 1: M admite una representación con una sola cara. Si en la representación poligonal de M aparecen dos o más caras, por ser M conexa alguna arista de una cara de M tiene que estar identificada con otra arista de otra cara de M . Si no fuese así, M sería la unión de los cocientes de sus caras, y dado que cada uno de esos cocientes es abierto y cerrado, desconectarían M . Por tanto, a través de sucesivos pegados, con rotaciones y reflexiones si es necesario, podemos reducir el número de caras hasta una.

PASO 2: O bien M es homeomorfa a la esfera, o bien M admite una representación en la cual no hay pares complementarios adyacentes. Podemos ir eliminando los pares complementarios adyacentes haciendo sucesivos pegados. O bien los eliminamos todos, o bien nos queda $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$, lo que implica que M es homeomorfa a la esfera.

PASO 3: M admite una representación en la que todos los pares torcidos son adyacentes. Si todos los pares torcidos son adyacentes, procedemos al Paso 4. Si por el contrario hay un par torcido no adyacente, podemos suponer que la representación de M es de la forma $VaWa$, donde V y W son palabras no vacías formadas por símbolos de un conjunto no vacío S . Entonces, mediante las siguientes transformaciones (que se pueden seguir en la Figura 2.16)

$$\begin{aligned}
 \langle a, S \mid VaWa \rangle & \approx \langle a, b, S \mid bVa, b^{-1}Wa \rangle && \text{(cortar por } b \text{ y rotar)} \\
 & \approx \langle a, b, S \mid bVa, a^{-1}W^{-1}b \rangle && \text{(reflexión)} \\
 & \approx \langle b, S \mid bbVW^{-1} \rangle && \text{(pegar por } a)
 \end{aligned}$$

podemos sustituir el par torcido a, a por uno b, b , que es adyacente (W^{-1} representa la reflexión de W). Como no hemos cortado en medio de V o W , no hemos separado otros pares adyacentes. Por otro lado, si bien al reflejar W podemos haber creado un nuevo par torcido, al haber reducido en una unidad el número total de pares torcidos no adyacentes, después de un número finito de pasos los habremos eliminado todos. Finalmente, si en este paso hemos creado nuevos pares complementarios adyacentes, repetimos el Paso 2, que tampoco incrementa el número de pares no adyacentes.

PASO 4: M admite una representación en la que todos los vértices se identifican en un único punto. Supongamos que existen al menos dos clases de equivalencia de vértices distintas. Entonces la

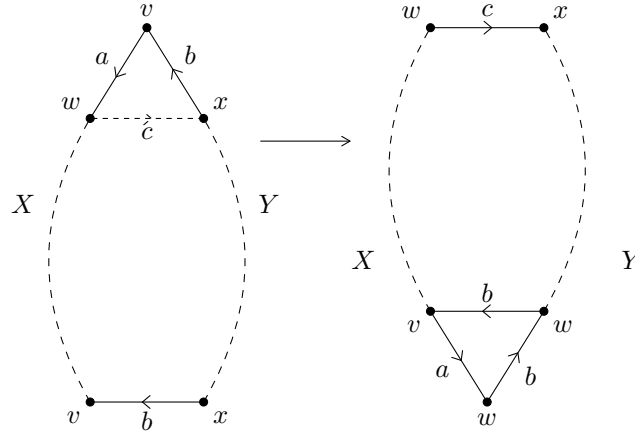


Figura 2.17: Reduciendo el número de vértices equivalentes a v .

representación poligonal tendrá dos vertices de dos clases de equivalencia distintas, llamémoslos v y w , conectados por una arista a . La otra arista que tiene a v como vértice no puede estar etiquetada con a , pues si formasen un par complementario lo habríamos eliminado en el Paso 2, y si formasen un par torcido, entonces v y w se identificarían, cuando estamos suponiendo lo contrario. Por lo tanto etiquetamos esta arista con b , y a su otro vértice lo llamamos x , el cual puede estar en la misma clase de equivalencia de v , de w , o en otra distinta.

En la representación poligonal hay otra arista que se identifica con b , y puede estar etiquetada por b o por b^{-1} . Supongamos que la etiqueta es b^{-1} (el otro caso implica sólo una reflexión adicional, que indicaremos cuándo ha de hacerse). Podemos escribir entonces la palabra que describe la representación poligonal como $baXb^{-1}Y$. Ahora, tal como se muestra en la Figura 2.17, si cortamos a lo largo de c , rotamos y pegamos por b (efectuando aquí la reflexión necesaria si la arista al principio aparecía como b) obtenemos una representación equivalente en la cual el número de vértices de la clase de equivalencia de v ha disminuído, mientras que el número de vértices de la clase de w ha aumentado. Si se han creado nuevos pares complementarios adyacentes, volvemos a aplicar el Paso 2 para eliminarlos. En esta última operación, si plegamos la representación para eliminar un par complementario aa^{-1} que tiene un vértice v entre medias, podemos hacer disminuir los vértices de la clase de v , pero nunca aumentarlos. Iterando el proceso para cada clase de equivalencia, podemos quedarnos finalmente con una sola clase de vértices.

PASO 5: Si la representación tiene un par complementario a, a^{-1} , entonces tiene otro par complementario b, b^{-1} que aparece intercalado con el primero, en la forma $a, \dots, b, \dots, a^{-1}, \dots, b^{-1}$. Si no es así, entonces la representación es de la forma $aXa^{-1}Y$, donde X contiene sólo aristas de pares complementarios o pares torcidos adyacentes, igual que Y . Por lo tanto cada arista en X se identifica con otra arista en X , y lo mismo pasa en Y . Esto implica que los vértices finales de a y a^{-1} , que tocan únicamente a X , se identifican sólo con vértices de X , y que los vértices iniciales de a y a^{-1} se identifican sólo con vértices de Y . Esto es una contradicción, puesto que todos los vértices se identifican unos con otros por el Paso 4.

PASO 6: M admite una representación en la que todos los pares complementarios intercalados aparecen juntos con ninguna otra arista entre ellos: $aba^{-1}b^{-1}$. Si no es así, podemos describir la representación

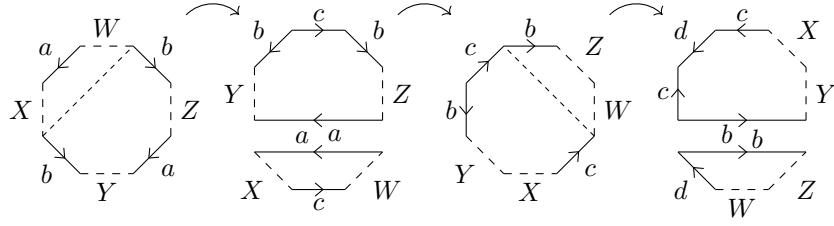


Figura 2.18: Poniendo los pares complementarios juntos.

poligonal por la palabra $W a X b Y a^{-1} Z b^{-1}$. Hacemos, como en la figura Figura 2.18, las siguientes transformaciones: cortamos a lo largo de c , pegamos por a , cortamos a lo largo de d , y pegamos finalmente por b . Obtenemos así la palabra $c d c^{-1} d^{-1} W Z Y X$, sustituyendo por tanto los dos pares adyacentes por un nuevo par intercalado $c d c^{-1} d^{-1}$, sin separar otras aristas que previamente eran adyacentes. Por lo tanto, repitiendo el proceso por cada grupo de pares complementarios se obtiene el resultado.

PASO 7: M es homeomorfa a la suma conexa de uno o más toros o a la suma conexa de uno o más planos proyectivos. Este es el paso que finaliza la demostración. Recapitulando lo hecho en los pasos anteriores, tenemos una representación de M (que llamaremos *representación estándar*) en la cual todos los pares torcidos aparecen uno junto al otro y todos los pares complementarios aparecen intercalados en grupos de dos, en la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Por tanto esta es la representación de una suma conexa de copias del \mathbb{T}^2 (representadas por los bloques $aba^{-1}b^{-1}$) y de copias de \mathbb{P}^2 (representadas por los cc). Si sólo aparecen copias de un tipo, hemos terminado. Nos queda el caso en el que aparecen tanto pares torcidos como pares complementarios. Si es así, algún par complementario aparece junto a un par torcido, es decir, la representación está descrita por la palabra $aba^{-1}b^{-1}ccX$ o por $ccaba^{-1}b^{-1}X$. En los dos casos, tenemos la suma conexa de un toro, un plano proyectivo, y lo que represente la palabra X . Pero por el Lema 2.3.2, $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, por lo que podemos eliminar un toro de la suma conexa. Iterando un número finito de veces, eliminamos todas las apariciones de los bloques de pares complementarios, es decir, de las copias de \mathbb{T}^2 , completando así la demostración. \square

2.4. Teorema de clasificación de superficies con borde

Podemos ahora clasificar las superficies con borde a partir del Teorema de Clasificación. Empecemos definiendo un concepto importante en la Prueba ZIP, el de perforación sobre una superficie.

Definición 2.4.1. Sea M una superficie con borde (donde recordemos se incluyen las superficies sin borde). Sea $p \in \text{Int}(M)$ y U un entorno abierto de p en M . Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo tal que $\phi(p) = 0$. Sea $B = \phi^{-1}(B_1(0))$. Decimos que la nueva superficie con borde $M^\circ = M \setminus B$ es M **1-perforada**, y a $\partial B \subset M^\circ$ la llamamos **perforación**. Podemos repetir el proceso sobre M° sucesivamente, obteniendo M n -perforada con un número finito $n \in \mathbb{N}$ de perforaciones (si el número de perforaciones no es importante, diremos simplemente perforada).

Proposición 2.4.2. Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

Demostración. Sea M una superficie con borde compacta. Vamos a demostrar que el borde ∂M es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias \mathbb{S}^1 . Por el Corolario 1.2.4 se tiene que ∂M es una 1-variedad. Salvo homeomorfismo, las 1-variedades conexas son \mathbb{R} y \mathbb{S}^1 . Por ser ∂M un subconjunto cerrado de un compacto, es también compacto, y por tanto se tiene que cada componente conexa de ∂M es homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

Por otro lado, vamos a ver que *pegando* discos a las componentes de ∂M se obtiene una superficie sin borde. Sea $S = \coprod_i \mathbb{D}_i^2$ y $f : \partial S = \coprod_i \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial M$ un homeomorfismo. Considerando f como una función de ∂S en M , definimos la relación de equivalencia \sim en la unión disjunta $M \amalg S$ generada por $a \sim f(a)$, y denotamos el espacio cociente resultante por $M^* = (M \amalg S) / \sim$. Tenemos que ver que M^* es IAN, Hausdorff y localmente euclídeo de dimensión 2. Empecemos con esto último.

Sea $\pi : M \amalg S \rightarrow M^*$ la aplicación cociente, y sea $B = \pi(\partial M \cup \partial S)$. Notamos que $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$ es un abierto saturado de $M \amalg S$, por lo que podemos restringir π a una aplicación cociente que va de $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$ a $M^* \setminus B$. Dado que esta restricción es inyectiva, es un homeomorfismo, y $M^* \setminus B$ es localmente euclídeo de dimensión 2. En estos puntos M es también IAN y Hausdorff. Por tanto nos queda considerar los puntos en B , pero esto lo tenemos por un argumento análogo al que usamos en la demostración de Proposición 1.3.2. \square

Dada una superficie con borde compacta M , denotaremos por M^* la superficie compacta sin borde obtenida mediante el proceso anterior, que llamaremos **pegar** un disco cerrado a cada componente conexa de ∂M . Si en cambio empezamos por una superficie compacta sin borde M^* y construimos una superficie con borde haciendo perforaciones, ¿Van a ser homeomorfas las superficies resultantes de hacer las perforaciones en lugares distintos? La respuesta es afirmativa, pero antes necesitamos ver la siguiente proposición:

Proposición 2.4.3. Toda superficie con borde compacta admite una representación poligonal.

Demostración. Sea M una superficie con borde compacta. Sabemos que M es triangulable por el poliedro de un complejo simplicial en el cual hay dos clases de 1-símplices: los 1-símplices cuyo interior se corresponde a puntos interiores y los 1-símplices que se corresponden a componentes del borde de M .

Podemos suponer que la triangulación satisface que ningún 1-símplice tiene los dos vértices contenidos en el borde a menos que esté contenido completamente en el borde, y un 2-símplice no tiene más de una arista en el borde. Si no fuese así, podríamos conseguir esta condición subdividiendo cada arista en dos y cada 2-símplice en seis 2-símplices mediante lo que llamamos *subdivisión baricéntrica*, representada en la Figura 2.19. Subdividiendo más veces si es necesario, llegamos a una triangulación

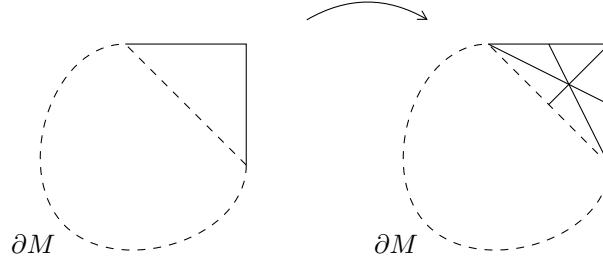


Figura 2.19: Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice que tiene dos aristas en ∂M .

que satisface la siguiente condición más fuerte: Si P_i y P_j son dos 2-símplices tal que cada uno tiene una arista contenida en el borde de M , entonces, o bien P_i y P_j son disjuntos, o bien tienen un vértice en común v , que es un vértice del borde de M .

Denotemos por B_1, \dots, B_k las componentes de ∂M . Si P es un 2-símplice que encuentra a B_i en algún punto suyo, entonces P tiene exactamente dos aristas que tienen un vértice en B_i pero que no están contenidos en B_i . Similarmente, si σ es un 1-símplice que tiene un vértice en B_i pero que no yace sobre B_i , entonces σ es una arista de dos 2-símplices que encuentran a B_i . Podemos por tanto ordenar los 2-símplices que encuentran B_i y los 1-símplices que son aristas suyas pero que no yacen sobre B_i de la siguiente manera:

$$P_1, \sigma_1, P_2, \sigma_2, \dots, P_n, \sigma_n, P_{n+1} = P_1$$

donde cada σ_j es una arista de P_j y P_{j+1} , y donde cada 2-símplice P_k tiene por tanto como aristas a σ_{k-1} y σ_k . Para cada componente B_i podemos escribir de esa forma un ciclo de 2-símplices y aristas, que es único. Para cada componente del borde B_i , la unión de los 2-símplices de su ciclo asociado $\mathcal{P}_i = \bigcup_j P_j$ es homeomorfa a una región poligonal con una perforación. La Figura 2.20 muestra un ejemplo cuando $j = 19$. Sean P'_1, \dots, P'_l los 2-símplices de la triangulación de M que no pertenecen a ninguna de las \mathcal{P}_i , y llamamos

$$\mathcal{P} = \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^l P'_j \right).$$

Ahora sólo falta aplicar sobre \mathcal{P} el resto de la demostración de la Proposición 2.2.17. □

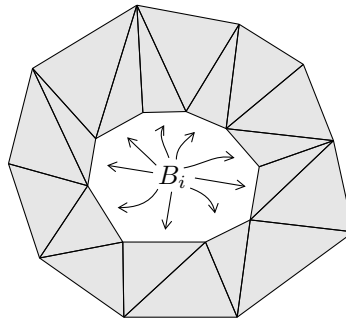


Figura 2.20: Triangulación cerca de una componente del borde de M .

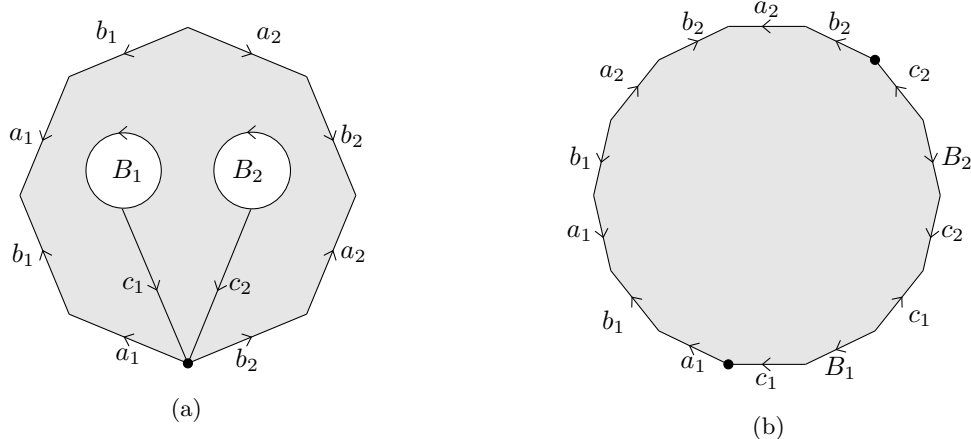


Figura 2.21: La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con dos perforaciones.

Ejemplo 2.4.4. Veamos las representaciones en forma estándar de las superficies fundamentales perforadas. Para ello, utilizando la Proposición 2.2.14, hacemos un corte c_i desde un mismo vértice a cada perforación asociada a la componente B_i , de forma que estos no se solapen con las perforaciones. En la Figura 2.21 podemos ver un ejemplo de la representación estándar de la suma conexa de dos toros con dos perforaciones.

(a) *Esfera con k perforaciones.*

$$\langle a, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de n toros con k perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de n planos proyectivos con k perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1a_1 \dots a_na_n c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

Teorema 2.4.5 (Clasificación de superficies con borde compactas). Toda superficie con borde compacta y conexa no vacía es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- (a) Una esfera \mathbb{S}^2 con k perforaciones,
- (b) Una suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ de copias del toro con k perforaciones,
- (c) Una suma conexa $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$ de copias del plano proyectivo con k perforaciones,

con $k \geq 0$. A estas superficies las llamamos **superficies con borde estándar**.

Demostración. Sea M una superficie con borde compacta, y sea una representación suya como la de la Proposición 2.4.3. El teorema se prueba aplicando los siete pasos de la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies Compactas a esta representación poligonal, teniendo en cuenta que las

operaciones de cortar y pegar que aparecen sucesivamente se hagan evitando las perforaciones. Así podemos asegurar que durante el proceso el número de perforaciones no cambia. Como resultado, obtenemos una de las tres representaciones estándar de las superficies sin borde, con k perforaciones en su interior. Para completar la prueba, hacemos los cortes c_1, \dots, c_k desde el vértice inicial de la representación poligonal a cada una de las perforaciones B_1, \dots, B_k , de forma inductiva y sin que se solapen, obteniendo uno de los polígonos estándar del ejemplo anterior. \square

Corolario 2.4.6. Sean M_1 y M_2 superficies con borde compactas tales que ∂M_1 y ∂M_2 tienen el mismo número de componentes conexas. Entonces M_1 y M_2 son homeomorfas si y solo si las superficies M_1^* y M_2^* son homeomorfas.

Capítulo 3

La prueba ZIP de Conway

En este capítulo voy a dar un tratamiento riguroso de la prueba ZIP de Conway. Voy a definir los conceptos necesarios para la nueva demostración y me apoyaré en los resultados de los capítulos anteriores para desarrollarla. El principal cambio reside en que no demostraremos el Teorema de Clasificación a través de transformaciones sobre una representación poligonal hasta llegar a una forma normal, sino que trabajaremos directamente sobre una triangulación para llegar a una forma normal basada en el concepto de suma conexa. Si bien Conway no utiliza un método de representación de las superficies, yo me apoyaré en él para poder dar una demostración de algunos de los puntos más informales. Por otro lado, nos serviremos de los resultados de las superficies con borde expuestos anteriormente para justificar el uso de las perforaciones. Mientras que en el artículo [2] las pruebas se apoyan en gran parte por los dibujos que las acompañan, aquí se darán justificaciones formales. Respecto a la triangulación de las superficies, a pesar de ser un punto importante en la prueba no se define en ningún momento de forma rigurosa, y tampoco se prueba que toda superficie sea triangulable. Es por ello que hemos desarrollado el Capítulo 1.

La prueba ZIP, como ya hemos adelantado, sólo nos demuestra la primera parte del Teorema de Clasificación: nos dice que toda superficie es homeomorfa a una de las superficies fundamentales, pero no que estas sean distintas desde el punto de vista topológico. Esto lo demostraremos finalmente en el último capítulo del trabajo.

3.1. Cremalleras

Conway utiliza las cremalleras (*zips* en inglés) para describir de forma gráfica cómo actúan las identificaciones topológicas. Cada cremallera actúa sobre una o dos perforaciones de una superficie. Están formadas por dos *zips* (dos partes dentadas) fijadas a la/s perforación/es y un *zipper* (el deslizador). Al cerrar el *zipper*, las *zips* se juntan identificándose. Trato de dar una definición rigurosa:

Definición 3.1.1. Sea M una superficie con borde compacta. Un **zip** es una identificación entre dos subconjuntos cerrados del borde de M . A este par lo llamamos **par-zip**, y a cada uno de los dos subconjuntos **cremallera**.

En la prueba ZIP, Conway nos explica gráficamente cuatro posibles formas de unir cremalleras. Veamos bien estas cuatro construcciones.

Definición 3.1.2. Sea M una superficie. Definimos cuatro formas elementales de identificar pares- zip en perforaciones de M perforada:

1. **Cap**: Las cremalleras yacen cada una sobre la mitad de una misma perforación con orientaciones opuestas (Figura 3.1a).
2. **Crosscap**: Las cremalleras yacen cada una sobre la mitad de una misma perforación con la misma orientación (Figura 3.1b).
3. **Handle**: Las cremalleras yacen cada una sobre una perforación distinta de S con orientaciones opuestas (Figura 3.1c).
4. **Crosshandle**: Las cremalleras yacen cada una sobre una perforación distinta de S con la misma orientación (Figura 3.1d).

Como vimos en Sección 2.4, las superficies con perforaciones se pueden representar como polígonos perforados con una serie de cortes (Figura 2.21), lo que nos da una forma de representar una superficie con cremalleras. Dada una superficie M con perforaciones, sea una representación poligonal suya con las perforaciones y cortes asociados sobre el polígono. En las partes de las perforaciones que tengan cremalleras, etiquetamos con el mismo símbolo a las cremalleras asociadas al mismo par- zip , en la forma z o z^{-1} , dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Con la siguiente proposición vamos a relacionar el concepto de suma conexa y las cremalleras sobre perforaciones.

Proposición 3.1.3. Sean M, M' dos superficies conexas (con o sin borde) y sean $P = \langle S \mid W \rangle$ y $P' = \langle S' \mid W' \rangle$ sus respectivas representaciones poligonales de una sola cara. Se tiene entonces:

- (i) La suma conexa de una esfera y M es homeomorfa a M .
- (ii) Sea $|\mathcal{P}|$ la realización geométrica de P . Sea ∂B una perforación sobre \mathbb{S}^2 , y sea ϕ un homeomorfismo entre las aristas de $|\mathcal{P}|$ y ∂B . Si identificamos ahora los pares de segmentos sobre ∂B de la imagen de ϕ que se correspondan, obtenemos la superficie M .
- (iii) Con una construcción análoga a la del apartado anterior, si hacemos una perforación sobre la superficie M' con el borde con etiquetas asociadas a una representación poligonal de M , al identificarlas obtenemos la suma conexa $M \# M'$.

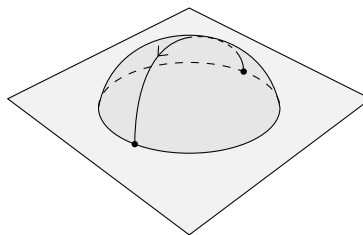
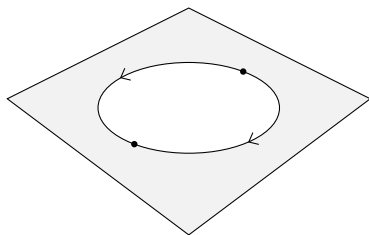
Demostración. Sea la suma conexa de \mathbb{S}^2 y M , cuya representación poligonal viene dada por $\langle a, S \mid aa^{-1}W \rangle$. Plegando por a se obtiene (i).

Para demostrar (ii), sea $\langle a, c, S \mid aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$ la representación poligonal de la esfera con una perforación asociada a M . Si plegamos por a , rotamos, y volvemos a plegar por c obtenemos la palabra $\langle S \mid W \rangle$ que es la representación poligonal de M .

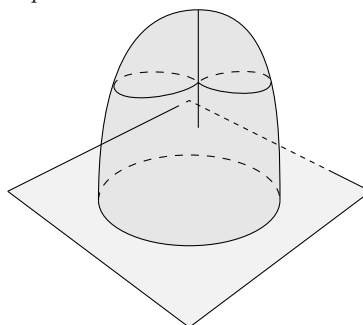
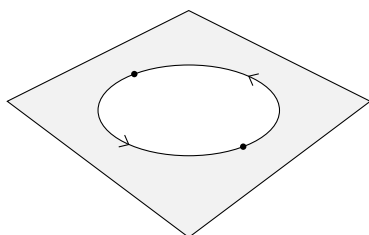
Finalmente para (iii), sea $\langle S, S', B, c \mid W'cWc^{-1} \rangle$, que es la representación de M' con una perforación asociada a M . Desplegando por a se tiene

$$\langle S, S', a, B, c \mid W'aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$$

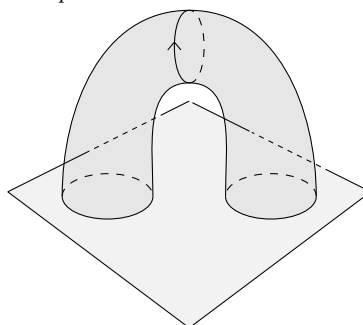
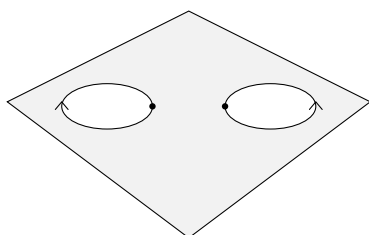
que es la suma conexa de M' y \mathbb{S}^2 con una perforación asociada a M . Por (ii), esto es equivalente a la suma conexa de M' y M . \square



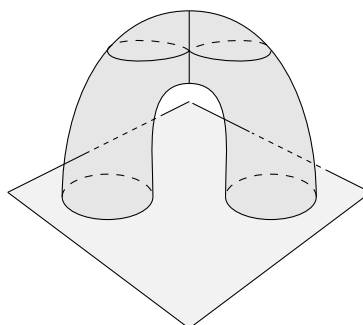
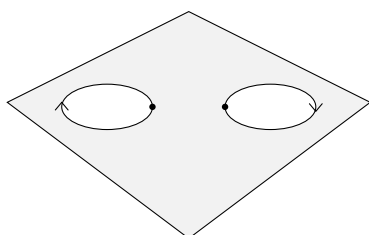
(a) Construcción del *cap*.



(b) Construcción del *crosscap*.



(c) Construcción del *handle*.



(d) Construcción del *crosshandle*.

Figura 3.1: Construcciones elementales con cremalleras.

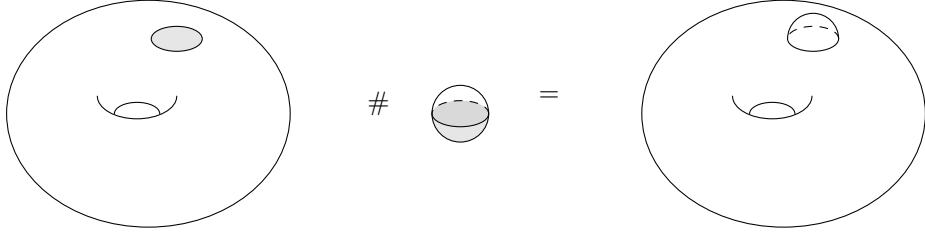


Figura 3.2: Suma conexa de un toro y una esfera visto como un toro con un *cap*.

Proposición 3.1.4. Se tiene que:

- (a) La esfera con un handle es homeomorfa al toro \mathbb{T}^2 .
- (b) La esfera con un crosshandle es homeomorfa a la botella de Klein K .

Demostración. Sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al handle

$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_1 \rangle.$$

Doblamos por a y nos queda

$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_2 \rangle$$

y podemos rotar y finalmente reetiquetar $e = c_2c_1^{-1}$ para obtener la representación de \mathbb{T}^2

$$\langle e, z \mid eze^{-1}z^{-1} \rangle$$

Similarmente, para demostrar (b), sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al crosshandle

$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_1 \rangle.$$

Doblamos por a y nos queda

$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_2 \rangle$$

y rotando y reetiquetando $e = c_2c_1^{-1}$, obtenemos finalmente la representación de la botella de Klein

$$\langle e, z \mid eze^{-1}z \rangle$$

□

Corolario 3.1.5. Sea M una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

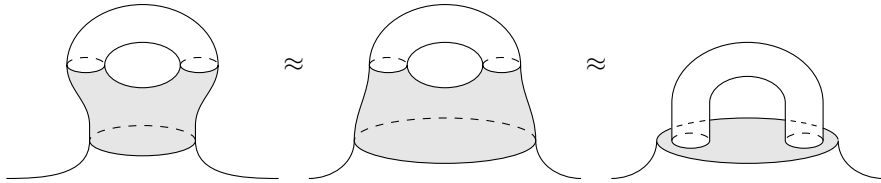


Figura 3.3: Suma conexa de una superficie y un toro visto como una superficie con un *asa*.

- a) M con un cap y M .
- b) M con un crosscap y $M \# \mathbb{P}^2$.
- c) M con un handle y $M \# \mathbb{T}^2$.
- d) M con un crosshandle y $M \# K$ (siendo K la botella de Klein).

3.2. Teorema de Clasificación

Definamos el que va a ser en la prueba ZIP el concepto análogo al de superficie en forma estándar.

Definición 3.2.1. Una superficie con borde se dice *ordinaria* si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

El siguiente lema es quizás uno de los puntos donde la prueba de Conway es menos rigurosa. En algunos pasos hace *deslizar las perforaciones* fuera de un handle, un crosshandle o un crosscap, y aunque esto tenga sentido desde un punto de vista intuitivo, no está claro como hacerlo de una forma rigurosa. Para resolver este problema, me apoyo en los conceptos de representación poligonal y transformaciones elementales, y así desgloso todos los casos posibles.

Lema 3.2.2. Sea M una superficie con borde con un par-zip. Entonces, si M es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

Demostración. Consideramos el caso en que las dos cremalleras ocupan cada una una perforación en su totalidad. Entonces, si están en la misma componente conexa de M , al identificarlas se tiene un *handle* (Figura 3.1c) o un *crosshandle* (Figura 3.1d), dependiendo de sus respectivas orientaciones. Si las dos perforaciones pertenecen a componentes conexas de S distintas, entonces identificando obtenemos la suma conexa de las dos componentes.

Consideramos ahora el caso en el que las dos cremalleras yacen sobre la misma perforación y la cubren totalmente. Identificándolas nos da o bien un *cap* (Figura 3.1a) o bien un *crosscap* (Figura 3.1b), dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Finalmente, consideramos los varios casos en que las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad. Para empezar, supongamos que la superficie ordinaria de la que partimos es una esfera. Tenemos varios casos:

- (1) *Una perforación con un par-zip y dos componentes conexas distintas del borde.* Tenemos dos posibilidades dependiendo de la orientación de las cremalleras. En la primera

$$\begin{aligned}
\langle a, z, B_1, B_2, c \mid aa^{-1}c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle \\
&\approx \langle z, B_1, B_2, c \mid c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle && \text{(doblar por } a) \\
&\approx \langle z, B_1, B_2 \mid zB_2z^{-1}B_1 \rangle && \text{(rotar y doblar por } c)
\end{aligned}$$

que es una representación del cilindro, es decir, una esfera con dos perforaciones, y por tanto una superficie ordinaria. Cambiando la aparición de z^{-1} por la de z , obtenemos mediante un proceso análogo al anterior la representación

$$\langle z, B_1, B_2 \mid zB_2zB_1 \rangle$$

que es la representación de un crosscap con dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (2) *Una perforación con un par-zip y una componente conexa del borde.* Como antes, dependiendo de la orientación podemos partir de

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c \mid aa^{-1}c^{-1}zBz^{-1}c \rangle \\ \approx \langle z, B, c \mid c^{-1}zBz^{-1}c \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle z, B \mid zBz^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y doblar por } c) \end{aligned}$$

que es una representación de una esfera perforada. Cambiando la aparición de z^{-1} por z , llegamos a la representación

$$\langle z, B, \mid zBz \rangle$$

que es una representación de \mathbb{P}^2 perforado, es decir, un crosscap con una perforación, y por lo tanto una superficie ordinaria.

- (3) *Dos perforaciones con un par-zip y dos componentes conexas distintas del borde.* Por un lado

$$\begin{aligned} \langle a, z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}zB_2c_2c_1^{-1}B_1c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}B_2zc_2c_1^{-1}z^{-1}B_1c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2ze^{-1}z^{-1}B_1 \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$

que es la representación de un toro con dos perforaciones. De la misma forma, cambiando la orientación de la aparición de z^{-1} llegamos a

$$\langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2ze^{-1}zB_1 \rangle$$

que es la botella de Klein con dos perforaciones, lo que es lo mismo, una esfera con crosshandle y dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (4) *Dos perforaciones con un par-zip y una componente conexa distinta del borde.* Empezando con la representación

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B \mid eBze^{-1}z^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$

que es una representación de T^2 con una perforación, o lo que es lo mismo, una esfera con un handle y una perforación, es decir, una superficie ordinaria. De la misma forma, cambiando z^{-1} por z obtenemos

$$\langle e, z, B \mid eBze^{-1}z \rangle$$

que es la representación de la botella de Klein con una perforación, es decir, una esfera con un crosshandle y una perforación, y por tanto una superficie ordinaria.

Por tanto, aplicando la demostración de la Proposición 3.1.3 (iii), demostramos los cuatro puntos anteriores para cremalleras sobre superficies arbitrarias, por lo que queda entonces demostrada la proposición. \square

Teorema 3.2.3 (Teorema de clasificación, versión preeliminar). Toda superficie con borde compacta es ordinaria.

Demostración. Sea M una superficie con borde compacta. Sabemos, por el Teorema de Radó, que M está triangulada por un poliedro $|K|$ asociado a un complejo simplicial K tal que cada 1-símplice que contiene puntos interiores de M es una cara de exáctamente dos 2-símplices, y cada 1-símplice que contiene puntos del borde de M es cara de exáctamente un 2-símplice. Si sobre cada par de 1-símplices del primer tipo ponemos una cremallera distinta, en el conjunto de los 2-símplices habrá algunos 1-símplices que se identifiquen. Llamemos $K_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$, donde cada σ_i es un 2-símplice para todo $i = 1 \dots, j$. K_2 es una superficie ordinaria, pues cada σ_i es homeomorfo a una esfera 1-perforada. Si identificamos ahora las cremalleras una a una, por el Lema 3.2.2 y por inducción, la superficie resultante es ordinaria. \square

En el artículo, en las siguiente proposición se vuelven a “*deslizar las perforaciones*”, y además algunos pasos son poco claros en los dibujos que los acompañan. Para probarlo, podemos utilizar representaciones poligonales o remitirnos a lo que ya probamos en la Sección 2.3.

Lema 3.2.4. Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Demostración. Por la Proposición 3.1.4, la esfera con un crosshandle es homeomorfa a la botella de Klein. Por la Lema 2.3.1, la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, o lo que es lo mismo, a la suma conexa de una esfera y dos crosscaps. \square

Lema 3.2.5. Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

Demostración. Sea una esfera con un par-zip asociado a un handle y otro asociado a un crosscap. Sabemos que, identificando las cremalleras obtenemos un espacio homeomorfo a la suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$. Pero por la Lema 2.3.2, este espacio es homeomorfo a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, que a su vez, es homeomorfo al plano proyectivo con un crosshandle, que a su vez es homeomorfo a una esfera con un crosshandle y un crosscap. \square

Aunque Conway hasta ahora haya hablado de superficies con perforaciones (es decir, de superficies con borde), en el teorema final que veremos ahora decide omitirlas. En cambio yo aprovecho lo expuesto hasta ahora y doy directamente la clasificación de superficies con borde.

Teorema 3.2.6 (Clasificación de superficies). Toda superficie con borde compacta es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps, junto con k perforaciones.

Demostración. Por la versión preeliminar del teorema de clasificación, una superficie con borde compacta es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

- *Caso 1:* Al menos hay un crosshandle en nuestra superficie. Por el Lema 3.2.4, cada crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps, por lo que la superficie es homeomorfa a una esfera con solamente crosscaps y handles. Como al menos hay un crosscap, cada handle es homeomorfo a un crosshandle (Lema 3.2.5), que es a su vez homeomorfo a dos crosscaps (Lema 3.2.4 de nuevo), quedando una esfera sólo con crosscaps y perforaciones.
- *Caso 2:* No hay ni crosshandles ni crosscap en la superficie. La superficie es entonces homeomorfa a una esfera sólo con handles y perforaciones.

\square

Observación 3.2.7. Como se ha visto, no he podido evitar hacer referencia a la representación poligonal de superficies para demostrar los puntos más informales. Sin embargo, creo que combinar la representación poligonal con la idea de Conway facilita mucho la demostración del teorema, pues seguimos quitándonos la “irrelevancia” de llegar a la forma normal “artificial”, y la prueba, al trabajar sobre la suma conexa en vez de haciendo transformaciones sobre palabras, se vuelve más entendible y corta. Además, como veremos, la representación poligonal nos permitirá demostrar la segunda parte del teorema.

Capítulo 4

Teorema de Clasificación, segunda parte

Hasta ahora hemos demostrado, con dos enfoques distintos, que toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de copias del toro o a una suma conexa de copias del plano proyectivo, junto con un número finito de perforaciones. Sin embargo no hemos demostrado que estas tres superficies fundamentales no sean homeomorfas entre sí. En este capítulo completaremos la parte de la prueba que nos falta.

4.1. Presentaciones de grupos

Vamos a empezar recordando brevemente las presentaciones de grupos.

Definición 4.1.1. Sea S un conjunto, y $R \subset F(S)$, donde $F(S)$ es el grupo libre en S . Llamamos **presentación de un grupo** al par $\langle S \mid R \rangle$. A los elementos de S los llamamos **generadores**, y a los de R **relaciones**. La presentación de un grupo determina un grupo, que también denotamos por $\langle S \mid R \rangle$, y que viene dado por el siguiente grupo cociente:

$$\langle S \mid R \rangle = F(S)/\overline{R}$$

donde \overline{R} representa la intersección de todos los subgrupos normales de $F(S)$ que contienen a R .

Cada relación $r \in R$ determina un producto de potencias de generadores que vale 1 en el cociente.

Definición 4.1.2. Sea ahora un grupo arbitrario G . Decimos que una presentación de un grupo $\langle S \mid R \rangle$ es una **presentación de G** si existe un isomorfismo $\langle S \mid R \rangle \cong G$.

Los elementos de G claramente generan G , y la aplicación identidad de G en sí mismo se extiende a un homomorfismo único $\Phi : F(G) \rightarrow G$. Si ponemos $R = \text{Ker } \Phi$, entonces, por el primer teorema de isomorfía tenemos que $G \cong F(G)/R$. Como R es normal, $R = \overline{R}$, y por tanto G tiene como presentación $\langle G \mid R \rangle$. Esta presentación trivial es muy ineficiente, pues normalmente $F(G)$ y R son más grandes que G . Si G admite una presentación $\langle S \mid R \rangle$ en las cuales S y R son conjuntos finitos, decimos que G tiene una **presentación finita**.

4.2. Grupos fundamentales de las Superficies Compactas

Empecemos viendo un resultado que es consecuencia del Teorema de Seifert-Van Kampen.

Proposición 4.2.1. Sea X un espacio topológico. Supongamos que $U, V \subseteq X$ son abiertos de X tales que $X = U \cup V$. Supongamos también que U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos. Sea $p \in U \cap V$, y supongamos también que U es simplemente conexo. Entonces la inclusión $l : V \hookrightarrow X$ induce el isomorfismo

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(V, p)/N$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(V, p)$ que contiene la imagen del homomorfismo inducido por la inclusión $j : U \cap V \rightarrow V$

$$j_* : \pi_1(U \cap V, p) \rightarrow \pi_1(V, p).$$

Si los grupos fundamentales de V y $U \cap V$ tienen presentaciones finitas

$$\pi_1(V, p) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle,$$

$$\pi_1(U \cap V, p) \cong \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid \tau_1, \dots, \tau_t \rangle,$$

entonces $\pi_1(X, p)$ tiene como presentación

$$\pi_1(X, p) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s, v_1, \dots, v_p \rangle,$$

donde los generadores β_i están representados por los mismos lazos que en la presentación del grupo fundamental de V pero considerados como lazos en X , y donde cada v_i es una expresión para $j_*\gamma_i \in \pi_1(V, p)$ en términos de $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Demostración. Una demostración se puede encontrar en [4] o en [5]. □

Teorema 4.2.2. Sea X un espacio topológico conexo por caminos, y sea $\varphi : \partial \mathbb{B}^2 \rightarrow X$ una aplicación continua. Consideramos la relación de equivalencia en $X \amalg \mathbb{B}^2$ generada por $s \sim \varphi(s)$ para todo $s \in \partial \mathbb{B}^2$, y denotamos el espacio cociente por $\tilde{X} = (X \amalg \mathbb{B}^2) / \sim$.

Sea $v \in \partial \mathbb{B}^2$, $\tilde{v} = \varphi(v) \in X$, y $\gamma = \varphi_*(\alpha) \in \pi_1(X, \tilde{v})$, donde α es un generador del grupo cíclico infinito $\pi_1(\partial \mathbb{B}^2, v)$. Entonces el homomorfismo $\pi_1(X, \tilde{v}) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{v})$ inducido por la inclusión $X \hookrightarrow \tilde{X}$ es sobreyectiva, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a γ .

Si $\pi_1(X, \tilde{v})$ tiene como presentación finita a

$$\pi_1(X, \tilde{v}) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle,$$

entonces $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{v})$ tiene como presentación a

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{v}) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \sigma_1, \dots, \sigma_s, \tau \rangle,$$

donde τ es una expresión de $\gamma \in \pi_1(X, \tilde{v})$ en términos de $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Demostración. Denotemos por $\pi : X \amalg \mathbb{B}^2 \rightarrow \tilde{X}$ la aplicación cociente, y pensemos en X como su imagen por π , para así considerarlo un subespacio de \tilde{X} . Si elegimos un punto $z \in \text{Int } \mathbb{B}^2$ y llamamos $U = \text{Int } \mathbb{B}^2$, $V = X \amalg (\mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$, tenemos que U y V son dos abiertos saturados, y sus imágenes por π son por tanto abiertos en \tilde{X} , que denotaremos por \tilde{U} y \tilde{V} respectivamente. Veamos que \tilde{U} y \tilde{V} son abiertos por caminos.

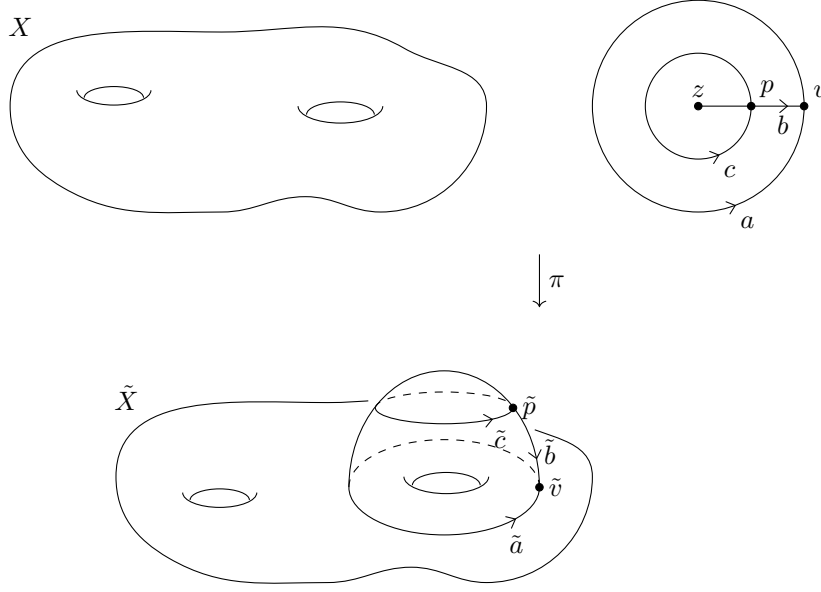


Figura 4.1: Pegando una 2-celda

Por un lado, por ser π continua, \tilde{U} y $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \pi(\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$ son conexos por caminos por ser imágenes de conjuntos conexos por caminos. Por otro lado, como \tilde{V} es la unión de los conjuntos conexos por caminos X y $\tilde{U} \cap \tilde{V}$, entonces es también conexo por caminos.

Vamos a elegir un punto base en $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ para poder aplicar el Proposición 4.2.1. Elegimos un $p \in \text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$, y denotamos por c a un lazo con base en el punto p , tal que $[c]$ genere $\pi_1(\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\})$. Llamamos ahora $\tilde{p} = \pi(p) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$, y $\tilde{c} = \pi \circ c$. Tenemos que la restricción de π a U es una aplicación cociente inyectiva, y por lo tanto un homeomorfismo en \tilde{U} . Así, dado que U es simplemente conexo, también lo es \tilde{U} . Por otro lado, $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ es la imagen por π del abierto saturado $\text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$, y por tanto la restricción $\pi : \text{Int } \mathbb{B}^2 \setminus \{z\} \rightarrow \tilde{U} \cap \tilde{V}$ es una aplicación inyectiva, y por tanto un homeomorfismo. Tenemos entonces que $\pi_1(\tilde{U} \cap \tilde{V}, \tilde{p})$ es el grupo cíclico infinito generado por $[\tilde{c}]$. Ahora, por el Proposición 4.2.1 podemos asegurar que existe una aplicación inyectiva

$$\pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p})$$

inducida por la inclusión $\tilde{V} \hookrightarrow \tilde{X}$, y cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene al subgrupo cíclico generado por $[\tilde{c}]$.

Ahora cambiaremos el punto base, puesto que estamos interesado en \tilde{v} , y no en \tilde{p} . Para ello, denotamos por a el camino en $\partial \mathbb{B}^2$ que represente el generador α del enunciado del teorema. Sea b el camino en D que une p con v . Entonces $\tilde{b} = \pi \circ b$ es el camino en \tilde{V} que une \tilde{p} con \tilde{v} y $\tilde{a} = \pi \circ a$ es el lazo en X con base en \tilde{v} que representa al γ del enunciado del teorema. El lazo $b^{-1} \circ c \circ b$ con base en v es un generador de $\pi_1(\mathbb{B}^2 \setminus \{z\}, v)$, y así, reemplazando c si es necesario con su camino inverso, tenemos que es homotópico al camino a en $\mathbb{B}^2 \setminus \{z\}$. Los isomorfismos de cambio de base inducidos por el camino \tilde{b} , que denotaremos por $\Phi_{\tilde{b}}$ ambos, conmutan con los homomorfismos inducidos por la inclusión del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{p}) \\
\downarrow \Phi_{\tilde{b}} & & \downarrow \Phi_{\tilde{b}} \\
\pi(\tilde{V}, \tilde{v}) & \longrightarrow & \pi(\tilde{X}, \tilde{v})
\end{array}$$

y llevan $[\tilde{c}]$ a $[\tilde{a}] = \gamma$. El homomorfismo que hemos obtenido es sobreyectivo y tiene como núcleo al menor subgrupo normal que contiene a γ .

Para completar la demostración, necesitamos relacionar el grupo fundamental de \tilde{V} con el de X . Combinando una retracción por deformación fuerte $r : \mathbb{B}^2 \setminus \{z\} \rightarrow \partial \mathbb{B}^2$ junto con la identidad en X , obtenemos una homotopía $H : V \times I \rightarrow V$ que da lugar a una retracción por deformación fuerte de V en $X \amalg \partial \mathbb{B}^2$. Dado que $\pi \circ H$ respeta las identificaciones hechas por $\pi \times \text{Id}_I : V \times I \rightarrow \tilde{V} \times I$, que a su vez es una aplicación cociente (por ser V compacto y \tilde{V} Hausdorff), esta pasa al cociente como una retracción por deformación fuerte de \tilde{V} en X . Así pues, la inclusión $X \hookrightarrow \tilde{V}$ es una equivalencia homotópica. Por lo tanto podemos sustituir $\pi_1(\tilde{V}, \tilde{v})$ por $\pi_1(X, \tilde{v})$ y obtener así un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a γ . La parte de las presentaciones se obtiene directamente del Proposición 4.2.1. \square

Teorema 4.2.3. Sea M una superficie con una representación suya de una cara $\langle a_1, \dots, a_n \mid W \rangle$. Entonces una presentación del grupo fundamental $\pi_1(M)$ viene dada por $\langle a_1, \dots, a_n \mid W \rangle$.

Demostración. Denotemos por \mathcal{P} la representación de M dada, y sea π la aplicación cociente $\pi : |\mathcal{P}| \rightarrow M$. Sea M_1 la imagen por π del conjunto de las aristas. Se tiene que M_1 es una suma wedge de circunferencias \mathbb{S}^1 , una por cada símbolo de la representación. Así pues, su grupo fundamental tiene como presentación $\langle a_1, \dots, a_n \mid \emptyset \rangle$. Teniendo en cuenta que la región poligonal es homeomorfa al disco cerrado unidad, podemos aplicar ahora el Teorema 4.2.2 para pegar la cara de la región poligonal a la suma wedge. Como espacio X consideramos M_1 , y tenemos que π actúa como la aplicación φ del teorema enviando la frontera del polígono al lazo en M_1 obtenido siguiendo los generadores a_1, \dots, a_n en el orden especificado por la palabra W , obteniendo así el resultado. \square

Corolario 4.2.4. Los grupos fundamentales de las superficies compactas estándar tienen como presentación:

- (a) $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$ (el grupo trivial).
- (b) $\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \dots \mathbb{T}^2) \cong \langle \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n \mid \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \dots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1} \rangle$.
- (c) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \# \dots \mathbb{P}^2) \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \beta_1^2 \dots \beta_n^2 \rangle$.

Demostración. De la esfera sabemos que es simplemente conexa. (b) y (c) se deducen del Teorema 4.2.3 a partir de las representaciones estándar. \square

Definición 4.2.5. Dado un grupo G , el **subgrupo conmutador de G** , denotado por $[G, G]$, es el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$, para $\alpha, \beta \in G$. Al grupo cociente $\text{Ab}(G) := G / [G, G]$ lo llamamos el **abelianizado de G** .

Como un isomorfismo $F : G_1 \rightarrow G_2$ lleva el subgrupo conmutador de G_1 al de G_2 , entonces grupos isomorfos tienen abelianizados isomorfos. Por lo tanto demostraremos que las superficies fundamentales no son homeomorfas no a través de sus grupos fundamentales si no de sus abelianizados.

Por otro lado, si bien no trataremos homología en este trabajo, observamos que si X es un espacio

topológico conexo por caminos, y $p \in X$ un punto suyo, entonces el *primer grupo de homología* $H_1(X)$ es isomorfo al abelianizado de $\pi_1(X, p)$. Una prueba se puede encontrar en [4]. Veamos ahora el primer grupo de homología de las superficies fundamentales.

Proposición 4.2.6. Los grupos fundamentales de las superficies fundamentales tienen los siguientes abelianizados:

- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{S}^2)) = \{1\}$.
- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2)) \cong \mathbb{Z}^{2n}$.
- $\text{Ab}(\pi_1(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$.

Demostración. El caso de la esfera es inmediato, pues sabemos que su grupo fundamental es trivial. Sea ahora la suma conexa de n copias del toro, y sea

$$G \cong \langle \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n \mid \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \cdots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1} \rangle$$

su grupo fundamental. Si denotamos $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{2n}$ sea la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \text{Ab}(G) & \rightarrow & \mathbb{Z}^{2n} \\ \beta_i & \mapsto & e_i \\ \gamma_i & \mapsto & e_{i+1} \end{array}$$

Si pensamos en φ como una aplicación del grupo libre $F(\beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n)$ en \mathbb{Z}^{2n} , φ envía el elemento $\beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \cdots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1}$ al $(0, \dots, 0)$, y por lo tanto obtenemos un homomorfismo de G en \mathbb{Z}^{2n} , del cual obtenemos un homomorfismo $\tilde{\varphi}$ de $\text{Ab}(G)$ en \mathbb{Z}^{2n} . Para hallar su inversa, si definimos ahora $\psi : \mathbb{Z}^{2n} \rightarrow \text{Ab}(G)$ por

$$\psi(e_i) = \begin{cases} [\beta_i], & 1 \leq i \leq n, \\ [\gamma_{i-n}], & n+1 \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

donde los corchetes indican la clase de equivalencia del elemento en $\text{Ab}(G)$, entonces podemos extenderlo a un homomorfismo $\tilde{\psi}$ que es la inversa de $\tilde{\varphi}^{-1}$.

De forma análoga, consideremos ahora una suma conexa de copias del plano proyectivo, y denotemos su grupo fundamental por

$$H \cong \langle \beta_1, \dots, \beta_n \mid \beta_1^2, \dots, \beta_n^2 \rangle.$$

Definimos la aplicación $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$ por

$$\varphi(\beta_i) = \begin{cases} e_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ h - e_{n-1} - \dots - e_1, & i = n. \end{cases}$$

donde $h \in \mathbb{Z}/2$ denota el elemento no trivial. Dado que $h + h = 0$, tenemos que $\varphi(\beta_1^2 \cdots \beta_n^2) = (0, \dots, 0)$, y como antes ϕ pasa al cociente como un homomorfismo $\tilde{\varphi} : \text{Ab}(G) \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2$. Por otro lado, podemos definir su inversa como el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & \text{Ab}(H) \\ e_i & \mapsto & [\beta_i], \\ h & \mapsto & [\beta_1 \cdots \beta_n]. \end{array}$$

□

4.3. Teorema de Clasificación

Teorema 4.3.1 (Teorema de Clasificación, segunda parte). Sea M una superficie compacta y conexa no vacía. Entonces es homeomorfa a una y sólo una de las superficies fundamentales.

Demostración. Por el Teorema 2.3.3, tenemos que M es homeomorfa a una de las superficies fundamentales, y por lo tanto nos queda demostrar que no son homeomorfas entre sí. Por un lado, la esfera no puede ser homeomorfa a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos, pues la esfera tiene grupo fundamental trivial. Los abelianizados de los grupos fundamentales de la suma conexa de planos proyectivos contienen un elemento no trivial de torsión, mientras que los abelianizados de los grupos fundamentales de la suma conexa de toros son libres de torsión. Así pues, las sumas de copias de \mathbb{P}^2 no pueden ser homeomorfas a las sumas de copias de \mathbb{T}^2 . Por otro lado, si M y M' son respectivamente sumas conexas de n y m copias del toro, $n \neq m$, sus grupos fundamentales son distintos, pues sus abelianizados son grupos libres conmutativos de rango $2n$ y $2m$ respectivamente. Análogamente, si M es una suma conexa de n copias del plano proyectivo y M' es una suma conexa de m copias del plano proyectivo, $n \neq m$, entonces los abelianizados de sus grupos fundamentales son de rango $n - 1$ y $m - 1$ respectivamente, es decir, son distintos. \square

La clasificación de superficies compactas dio lugar a la clasificación de superficies no compactas en 1963, debida a Ian Richards [25]. Sin embargo, la clasificación completa de las superficies con borde no compactas no se obtuvo hasta 2007, cuando la dieron Prishlyak y Mischenko [26].

Bibliografía

Bibliografía principal

- [1] H. Seifert y W. Threlfall. *A Textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [2] George K. Francis y Jeffrey R. Weeks. “Conway’s ZIP Proof”. En: *Amer. Math. Monthly* 106 (1999).
- [3] Carsten Thomassen. “The Jordan-Schoenflies Theorem and the Classification of Surface”. En: *The American Mathematical Monthly*, vol.99 (1992).
- [4] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer - Verlag, 2011.
- [5] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison - Wesley, 1984.
- [6] Jean Gallier y Diana Xu. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer-Verlag, 2013.
- [7] Vicente Muñoz y Juan José Madrigal. *Topología Algebraica*. Sanz y Torres, 2015.
- [8] Stephen Willard. *General Topology*. Addison - Wesley, 1970.
- [9] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 1975.
- [10] William S. Massey. *Algebraic Topology, an introduction*. Springer - Verlag, 1970.
- [11] Ciprian Manolescu. “Triangulation on Manifolds”. En: *Notices of the International Congress of Chinese Mathematicians*, Vol. 2 (2014).

Referencias Históricas

- [12] August F. Möbius. “Theorie der elementarem verwandtschaft”. En: *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* (1863).
- [13] Camille Jordan. “Sur la déformation des surfaces”. En: *J. de Mathématiques Pures et appliquées*, 2 e série 11 (1866).
- [14] Walther von Dyck. “Beiträge zur analysis situs”. En: *Mathematische Annalen* 32 (1888).
- [15] Max Dehn y Poul Heegard. “Analysis situs”. En: *Enzyklopädie der Math. Wiss* (1907).
- [16] James Alexander. “Normal forms for one- and two-sided surfaces”. En: *Ann. Math.* 16 (1915).
- [17] Henry Brahana. “Systems of circuits on two-dimensional manifolds”. En: *Ann. Math.* 23 (1920).
- [18] Tibor Radó. “Über den Begriff der Riemannschen Fläche”. En: *Acta Sci. Math. Szeged.* 2 (1925).

- [19] Stewart S. Cairns. “Triangulation of the manifold of class one”. En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (1935).
- [20] Edwin Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer - Verlag, 1977.
- [21] R. C. Kirby y L. C. Siebenmann. “On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung”. En: *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969).
- [22] Michael H. Freedman. “The topology of four-dimensional manifolds”. En: *J. Differential Geom.* 17 (1982).
- [23] Selman Akbulut y John D. McCarthy. “Casson’s invariant for oriented homology 3-spheres”. En: *Mathematical Notes, vol. 36, Princeton University Press* (1990).
- [24] Ciprian Manolescu. “Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture”. En: *arXiv:1303.2354v2* (2013).
- [25] Ian Richards. “On the classification of noncompact surfaces”. En: *T. Am. Math. Soc* 106 (1963).
- [26] A. O. Prishlyak y K. I. Mischenko. “Classification of noncompact surfaces with boundary”. En: *Methods Funct. Anal. Topology* 13 (2007).