

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
MADRID

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

# Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Olié

Dirigido por:  
Manuel Alonso Morón



# Índice general

Índice general	ii
Índice de figuras	iii
<b>1. Variedades y superficies</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades . . . . .	1
1.2. Variedades con borde . . . . .	2
1.3. Suma conexa de variedades . . . . .	4
<b>2. Triangulación de superficies</b>	<b>6</b>
2.1. Complejos simpliciales y triangulación . . . . .	6
2.2. Teorema de Radó . . . . .	7
<b>3. Teorema de Clasificación</b>	<b>9</b>
3.1. Superficies como cocientes . . . . .	9
3.2. Representación de superficies . . . . .	16
3.3. Teorema de clasificación de superficies compactas . . . . .	23
3.4. Teorema de clasificación de superficies con borde . . . . .	28
<b>4. La prueba ZIP de Conway</b>	<b>32</b>
4.1. Cremalleras . . . . .	32
4.2. Teorema de Clasificación . . . . .	35
<b>5. Teorema de Clasificación, segunda parte</b>	<b>38</b>
5.1. Teorema de Clasificación . . . . .	38
<b>A. Algunos teoremas de topología importantes</b>	<b>39</b>
A.1. Cocientes topológicos . . . . .	39
<b>B. CW-complejos</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>44</b>

# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de superficies. . . . .	2
1.3. Suma conexa de toros. . . . .	5
2.1. $k$ -símplices, $k = 0, \dots, 3$ . . . . .	7
2.2. Un complejo simplicial en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	7
2.3. Símplices que no forman un complejo. . . . .	7
3.1. La esfera como cociente del disco $\mathbb{B}^2$ . . . . .	10
3.2. La esfera como cociente de un cuadrado. . . . .	10
3.3. El toro como cociente de un cuadrado. . . . .	11
3.4. Representación de $\mathbb{P}^2$ como un espacio cociente. . . . .	11
3.5. Crosscap. . . . .	12
3.6. Entorno euclídeo de un vértice. . . . .	14
3.7. Construcción de la botella de Klein. . . . .	15
3.8. Superficies con borde como cocientes topológicos. . . . .	15
3.9. Representación de superficies importantes. . . . .	18
3.10. Representaciones de la esfera y el plano proyectivo. . . . .	18
3.11. Representación de superficies con borde. . . . .	18
3.12. Subdividir/consolidar. . . . .	19
3.15. La representación $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$ . . . . .	21
3.16. Transformación de la botella de Klein en $\mathbb{P}^2$ . . . . .	24
3.17. Haciendo que los pares torcidos sean adyacentes. . . . .	26
3.18. Reduciendo el número de vértices equivalentes a $v$ . . . . .	26
3.19. Poniendo los pares complementarios juntos. . . . .	27
3.20. Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice que tiene dos lados en $\partial M$ . . . . .	29
3.21. Triangulación cerca de una componente del borde de $M$ . . . . .	30
3.22. La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con dos perforaciones. . . . .	31
4.1. Construcciones elementales con cremalleras. . . . .	33
4.2. Suma conexa de un toro y una esfera. . . . .	34
4.3. Suma conexa de una superficie y un toro visto como pegar un <i>asa</i> . . . . .	35
B.1. Demostración de que sólo hay un punto de la frontera en la semirecta. . . . .	42

# Capítulo 1

## Variedades y superficies

En este capítulo doy las definiciones y resultados básicos sobre variedades y superficies. Me basaré principalmente en los libros de J. M. Lee [1] y V. Muñoz - J. J. Madrigal [2].

### 1.1. Variedades

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades, y en concreto las superficies. Definámoslas.

**Definición 1.1.1.** Una *variedad topológica* (de ahora en adelante *variedad*) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , para algún  $n \geq 0$ .

Sea  $M$  una variedad, y sea  $p \in M$ . Si  $U \subseteq M$  es un entorno de  $p$  que es homeomorfo a un abierto  $U'$  de  $\mathbb{R}^n$ , decimos que  $U$  es un *dominio coordinado*, llamamos *aplicación coordinada* a cualquier homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow U'$  y decimos que el par  $(U, \varphi)$  es una *carta para  $M$* .

A un dominio coordinado que es homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$  se le llama *bola coordinada* (si  $n = 2$ , decimos *disco coordinado*). Si  $p \in M$  y  $U$  es un dominio coordinado que contiene a  $p$ , decimos que  $U$  es un *entorno Euclídeo* de  $p$ .

No siempre se tiene que la adherencia de una bola coordinada sea homeomorfa a una bola cerrada Euclídea. Por tanto, decimos que una bola coordinada  $B \subseteq M$  es una *bola coordinada regular* si existe un entorno  $B'$  de  $\overline{B}$  y un homeomorfismo  $\varphi : B' \rightarrow B_{r'}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$  que lleva  $B$  a  $B_r(x)$  y  $\overline{B}$  a  $\overline{B}_r(x)$  para algún  $r' > r > 0$  y para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 1.1.2.** Ser localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  es una propiedad local, y por tanto las propiedades locales de  $\mathbb{R}^n$  se trasladan a una variedad. Por lo tanto las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

Vamos a definir ahora la dimensión de una variedad. El *Teorema de Invarianza del Dominio* dice que si  $W \subset \mathbb{R}^n$  y  $W' \subset \mathbb{R}^m$  son abiertos y existe un homeomorfismo  $\phi : W \rightarrow W'$ , entonces  $n = m$ . Así pues, sea  $M$  una variedad, y sea  $p \in M$ . Entonces hay un único  $n = n_p$  tal que un entorno  $U^p$  de  $p$  en  $M$  es homeomorfo a un abierto  $U' \subset \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $n_p$  es la *dimensión en  $p$* . Si para todo punto  $q \in U^p$  tomamos  $U^p$  como entorno de  $q$ , tenemos que  $n_q = n_p$ . Luego en toda la componente conexa de  $p$ , el  $n$  que aparece es el mismo, y lo llamaremos *dimensión* de dicha componente conexa. Si



Figura 1.1: Ejemplos de superficies.

escribimos  $M = \coprod M_i$  como la unión disjunta de sus componentes conexas  $M_i$ , tenemos que todas las  $M_i$  son variedades, y si todas las  $M_i$  tienen la misma dimensión  $n$ , entonces escribimos  $n = \dim M$ , y decimos que  $M$  es una ***n-variedad***.

El ejemplo más trivial de  $n$ -variedad es  $\mathbb{R}^n$ , pero también lo es cualquier abierto suyo. De hecho, esto se puede generalizar:

**Proposición 1.1.3.** Todo subconjunto abierto de una  $n$ -variedad es una  $n$ -variedad.

*Demostración.* Sea  $M$  una  $n$ -variedad, y sea  $V$  un subconjunto abierto de  $M$ . Para todo  $p \in V$ ,  $p$  tiene un entorno  $U^p$  en  $M$  que es homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .  $U^p \cap V$  es también abierto y homeomorfo a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y está contenido en  $V$ . Por tanto  $V$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Por otro lado, todo abierto de un espacio Hausdorff es Hausdorff y todo abierto de un espacio II AN es II AN. Por lo que  $M$  es una variedad.  $\square$

**Ejemplo 1.1.4.** ■ Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.

- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta  $\mathbb{R}$  y el círculo  $\mathbb{S}^1$   
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z = e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$

**Definición 1.1.5.** Una ***superficie*** es una 2-variedad.

**Ejemplo 1.1.6.** Son superficies:

- La esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (Figura 1.1a).
- El toro  $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$  (Figura 1.1b).

## 1.2. Variedades con borde

Hay una serie de espacios topológicos que no son variedades pero que tienen interés desde el punto de vista geométrico y son útiles a la hora de estudiarlas. Por ejemplo, la bola cerrada  $\overline{\mathbb{B}}^n$  no es una variedad, puesto que para los puntos de su frontera no hay entornos homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a definir por tanto una clase de espacios que extienda a las variedades pero que admita la existencia de algún tipo de *bordes*:

**Definición 1.2.1.** Una ***variedad con borde n-dimensional***  $M$  (o  $n$ -variedad con borde) es un espacio topológico Hausdorff y II AN tal que todo punto  $p \in M$  tiene un entorno  $U$  homeomorfo a un abierto  $U' \subset \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$

Si  $M$  una  $n$ -variedad con borde,  $p \in M$  y  $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{H}^n$  un homeomorfismo como en la definición. Como en el caso de variedades, decimos que  $U$  es un **dominio coordinado**, que  $\varphi$  es una **aplicación coordinada** para  $M$  y que el par  $(U, \varphi)$  es una **carta para  $M$** .

Como en la Sección 1.1, decimos que  $B \subseteq M$  es una **semibola coordinada regular** si existe un abierto  $B'$  que contiene a  $\bar{B}$  y un homeomorfismo de  $B'$  a  $B_{r'}(0) \cap \mathbb{H}^n$  que lleva  $B$  a  $B_r(0) \cap \mathbb{H}^n$  y  $\bar{B}$  a  $\bar{B}_r(0) \cap \bar{\mathbb{H}}^n$  para algún  $0 < r < r'$ . Si denotamos  $\varphi(p) = a = (a_1, \dots, a_n)$ , podemos distinguir entre dos tipos de puntos:

1. *Puntos interiores:* Si  $a_n > 0$ , entonces podemos tomar una bola  $B_\varepsilon(a) \subset U'$  y  $V = \varphi^{-1}(V')$ , por lo que  $V$  es un entorno de  $p$  homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos por tanto que  $p$  es un **punto interior de  $M$** , y denotamos por  $\text{Int } M$  al conjunto de puntos interiores de  $M$ .
2. *Puntos borde:* Si  $a_n = 0$  para todo  $n$ , entonces podemos tomar una semibola  $V' = B_\varepsilon^+ = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$ , y  $V = \varphi^{-1}(V')$ . Decimos que  $p$  es un **punto borde de  $M$** . Al conjunto de todos los puntos borde de  $M$  lo denotamos por  $\partial M$ .

**Proposición 1.2.2.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad con borde, entonces  $\text{Int } M$  es un abierto de  $M$ , y es en sí mismo una  $n$ -variedad.

*Demostración.* Sea, para cada  $x \in \text{Int } M$ ,  $(U_x, \psi_x)$  una carta para  $x$ , donde  $U_x$  es un abierto localmente homeomorfo a un espacio Euclídeo. Se tiene que  $\text{Int } M = \bigcup_{x \in M} U_x$ , por lo que es un abierto, y además localmente Euclídeo, lo que implica que es variedad.  $\square$

**Proposición 1.2.3** (Invarianza del borde). Si  $M$  es una  $n$ -variedad con borde, entonces un punto  $p \in M$  no puede ser un punto interior y un punto borde al mismo tiempo. O lo que es lo mismo,  $M = \text{Int } M \cup \partial M$ , con  $\text{Int } M \cap \partial M = \emptyset$ .

*Demostración.* Voy a dar la demostración en el caso de que  $n = 2$ . El caso general incluye conceptos de homología que no voy a tratar en este trabajo.

Supongamos que  $p \in M$  es tanto un punto interior como un punto borde de  $M$ . Entonces existen  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U) \subseteq \text{Int } \mathbb{H}^2$  y  $(V, \psi)$  tal que  $\psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$ , donde  $\psi(p) = s \in \partial \mathbb{H}^2$ . Llamando  $W = U \cap V$ , se tiene que  $\varphi(W)$  es homeomorfo a  $\psi(V)$ .

Ahora bien, si llamamos  $s = \varphi(p)$ , podemos elegir un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \subseteq \psi(W)$ . Sea  $U' = \varphi^{-1}(B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2)$ ; utilizando que un abierto de  $\mathbb{R}^2$  menos un punto suyo no es simplemente conexo, tenemos que  $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$  es no simplemente conexo. Por otro lado,  $U' \setminus p$  es homeomorfo a  $X := B_\varepsilon(s) \cap \mathbb{H}^2 \setminus \{s\}$ .

Sea  $x_0 \in B_\varepsilon(s) \cap \text{Int } \mathbb{H}^2$ , definimos  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$  por  $F(x, t) = x_0 + (1 - t)(x - x_0)$ , que nos indica que  $\{x_0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ . Por tanto,  $X$  es simplemente conexo, lo que implica que también lo son  $U' \setminus \{p\}$  y  $\varphi(U') \setminus \{\varphi(p)\}$ , pero esto es una contradicción.  $\square$

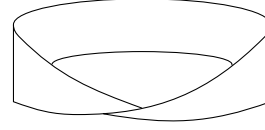
**Corolario 1.2.4.** Si  $M$  es una  $n$ -variedad con borde, entonces:

- (i)  $\partial M$  es un cerrado en  $M$ .
- (ii)  $\partial M$  es una  $(n - 1)$ -variedad.
- (iii)  $M$  es una variedad si y solo si  $\partial M = \emptyset$ .

*Demostración.* Por el teorema de la invarianza del borde,  $\partial M = M \setminus \text{Int } M$ , y siendo  $\text{Int } M$  abierto,  $\partial M$  es por tanto cerrado, lo que demuestra (i). Para (ii), sea  $p \in \partial M$ . Tomamos  $U$  un entorno suyo en  $M$ , y sea  $\varphi : V \rightarrow V' = B_\varepsilon(a) \cap \mathbb{H}^n$  tal que  $\varphi(p) = a$ . Así pues,  $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n) \in V' \mid x_n > 0\}) \subseteq \text{Int } M$  y  $\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\}) \subseteq \partial M$ . Por lo tanto  $\partial M \cap V = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in V'\})$ .



(a) Cilindro.



(b) Banda de Möbius.

$V'\} = W$  es un abierto de  $\partial M$ , y  $\varphi : W \rightarrow W' = B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$  es un homeomorfismo con un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , lo que implica que  $\partial M$  es una  $(n-1)$ -variedad. Finalmente para probar (iii), si suponemos que  $M$  una variedad, entonces todo punto está en el dominio de una carta interior, por lo que  $M = \text{Int } M$ , y se sigue de la invarianza del borde que  $\partial M = \emptyset$ . Si suponemos ahora que  $M = \partial M$ , entonces  $M = \text{Int } M$ , que es una variedad por la Proposición 1.2.2.  $\square$

Hacemos incapié en que los conceptos de *variedad* y *variedad con borde* son distintos. Una variedad con borde puede ser o no una variedad, pues puede tener el borde vacío. En cambio, una variedad es siempre una variedad con borde en la que todo punto es un punto interior. Para evitar confusiones, si el contexto lo pide, utilizaremos **variedad sin borde** para referirnos a una variedad en el sentido de la Definición 1.1.1.

Veamos algunos ejemplos no triviales de superficies con borde:

**Ejemplo 1.2.5.** (1) El cilindro (Figura 1.2a):

$$Cil = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}.$$

(2) La banda de Möbius (Figura 1.2b):

$$Mob = \left\{ \left( \left( 1 + \left( y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right), \left( 1 + \left( y - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi x) \right) \sin(2\pi x), \right. \right. \\ \left. \left. \left( y - \frac{1}{2} \right) \sin(\pi x) \right) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1] \right\}.$$

(3) Una toro con dos “perforaciones”.

### 1.3. Suma conexa de variedades

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos  $n$ -variedades conexas. Dados  $p_1 \in M_1$  y  $p_2 \in M_2$  sean  $U_1^{p_1} \subset M_1$ ,  $U_2^{p_2} \subset M_2$  entornos abiertos de  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, y sean  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos homeomorfismos tales que  $\phi_1(p_1) = 0$  y  $\phi_2(p_2) = 0$ . Si llamamos  $B_1 = \phi_1^{-1}(B_1(0)) \subset M_1$  y  $B_2 = \phi_2^{-1}(B_1(0)) \subset M_2$ , consideremos  $M_1^o = M_1 \setminus B_1$ ,  $M_2^o = M_2 \setminus B_2$  y  $M_1^o \amalg M_2^o$  con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia  $\sim$  en la que si  $x_1 \in S_1 = \phi_1^{-1}(\partial B_1(0))$ ,  $x_2 \in S_2 = \phi_2^{-1}(\partial B_1(0))$ , entonces  $x_1 \sim x_2$  si y sólo si  $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$ , y se considera el cociente

$$M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}.$$

**Definición 1.3.1.** A  $M$  así definida se le llama **suma conexa** de  $M_1$  y  $M_2$ , y se denota por  $M = M_1 \# M_2$ .



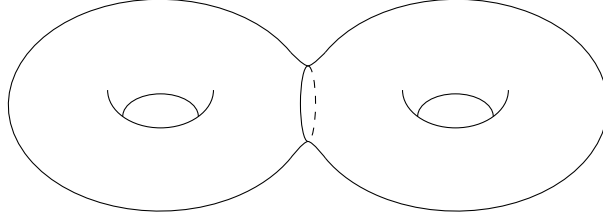


Figura 1.3: Suma conexa de toros.

**Proposición 1.3.2.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  variedades. Entonces  $M = M_1 \# M_2$  es una variedad.

*Demostración.* Denotemos la proyección  $\pi : M_1^o \amalg M_2^o \rightarrow X$ . Sea  $S = \pi(S_1) = \pi(S_2)$ . Tenemos dos abiertos  $U_j = M_j^o - S_j$ ,  $j = 1, 2$  saturados. Por tanto,  $\pi : U_j \rightarrow \pi(U_j) = U_j'$  es homeomorfismo. Esto implica que  $X$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  en los puntos de  $U_1' \cup U_2'$ . Además es Hausdorff y IIAN. Veamos ahora qué ocurre para un punto  $p \in S$ . Se tiene que  $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$ ,  $p_j \in S_j$ ,  $j = 1, 2$ , y  $\varphi_j(p_j) = x_0 \in \partial B_1(0) \in \mathbb{R}^n$ . Tomamos un entorno  $V \subset \partial B_1(0)$  de  $x_0$  en  $\partial B_1(0)$ , con lo que  $\hat{V} = \{rx \mid r \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), x \in V\}$  es entorno de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\hat{V} - B_1(0) = \{rx \mid r \in [1, 1 + \varepsilon), x \in V\}$ . Sea  $V_j = \varphi_j^{-1}(\hat{V} - B_1(0)) \subset M_j^o$ , que es entorno de  $p_j$ . Claramente  $M_1 \amalg M_2$  es abierto saturado de  $M_1^o \amalg M_2^o$ , luego  $\tilde{V} = \pi(M_1 \amalg M_2)$  es entorno de  $p$  en  $X$ . Veamos ahora que es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea

$$\begin{aligned} \Phi : M_1 \amalg M_2 &\rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \\ q_1 \in M_1 &\mapsto (x, r), r = \|\varphi_1(q_1)\|, x = \varphi_1(q_1)/r, \\ q_2 \in M_2 &\mapsto (x, 2 - r), r = \|\varphi_2(q_2)\|, x = \varphi_2(q_2)/r. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\Phi : M_1 \rightarrow V \times [1, 1 + \varepsilon)$  y  $\Phi : M_2 \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1]$  son homeomorfismos. Además,  $q_1 \sim q_2$  si y sólo si  $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$ . De este modo,  $\Phi$  induce una aplicación continua y biyectiva

$$\bar{\Phi} : \tilde{V} \rightarrow V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

$\bar{\Phi}$  es abierta: si tomamos un abierto básico saturado de  $M_1 \amalg M_2$ , o bien está totalmente incluido en  $M_1 - S_1$  o en  $M_2 - S_2$ , en cuyo caso su imagen es un abierto de  $V \times (1 - \varepsilon, 1)$  o  $V \times (1, 1 + \varepsilon)$ , o bien interseca a  $S_1$  y  $S_2$ . En ese caso se puede asumir que es un abierto de la forma  $W_1 \amalg W_2$ , construido como antes y donde hemos partido de un  $W \subset V \subset \partial B_1(0)$ . Entonces  $\bar{\Phi}(\tilde{W}) = W \times (1 - \delta, 1 + \delta)$  con  $0 < \delta \leq \varepsilon$ ,  $\tilde{W} = \pi(W_1 \amalg W_2)$ . Luego  $\bar{\Phi}$  es un homeomorfismo, y  $\tilde{V}$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Los abiertos construidos,  $\tilde{V} \subset X$ , se pueden tomar en cantidad numerable para formar una base de la topología, con lo cual  $X$  es IIAN. También, dado un  $q \in U_j'$ ,  $j = 1, 2$ , y un  $p \in S$ , se puede tomar un abierto  $\tilde{V}$  entorno de  $p$  disjunto de un entorno pequeño de  $q$ . Y si tomamos  $p, p' \in S$  distintos, los abiertos  $\tilde{V}, \tilde{V}'$  construidos partiendo de  $V, V' \subset \partial B_1(0)$  disjuntos, serán disjuntos. Luego  $X$  es Hausdorff.  $\square$

## Capítulo 2

# Triangulación de superficies

Un hecho fundamental para la prueba del teorema de clasificación es que toda superficie es triangulable. La demostración, atribuida a Radó en 1925 [4], utiliza el *teorema de Schönflies*, cuya prueba es larga y técnica.

### 2.1. Complejos simpliciales y triangulación

Para poder dar una definición rigurosa de triangulación de variedades necesitamos la noción de *complejos simpliciales*. Estos son construcciones formadas por *símplices*, que son una generalización de los triángulos. En esta primera parte me baso en las definiciones de Munkres [5].

**Definición 2.1.1.** Sean  $v_0, \dots, v_k$   $k + 1$  puntos distintos de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que  $\{v_0, \dots, v_k\}$  están en *posición general* si  $c_0, \dots, c_k$  son números reales tales que

$$\sum_{i=0}^k c_i v_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^k c_i = 0,$$

entonces  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

**Definición 2.1.2.** Sean  $\{v_0, \dots, v_k\}$  un conjunto de  $k + 1$  puntos de  $\mathbb{R}^n$  en posición general. El *símplice* generado por ellos, que denotamos por  $[v_0, \dots, v_k]$ , es el conjunto

$$[v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\},$$

con la topología heredada. Para todo punto  $x = \sum_{i=0}^k t_i v_i \in [v_0, \dots, v_k]$ , llamamos a los  $t_i$  *coordenadas baricéntricas de  $x$* . Cada uno de los  $v_i$  se llama *vértice* del símplice. Al entero  $k$  se le llama *dimensión*, y diremos que  $[v_0, \dots, v_k]$  es un  *$k$ -símplice*.

**Ejemplo 2.1.3.** Un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo junto a su interior, un 3-símplice es un tetraedro sólido, y así sucesivamente (Figura 2.1).

Sea  $\sigma$  un  $k$ -símplice. Cada símplice generado por un subconjunto no vacío de vértices de  $\sigma$  se llama *cara de  $\sigma$* . Las caras que no son iguales a  $\sigma$  se llaman *caras propias*. Las caras 0-dimensionales de  $\sigma$  son sus vértices, y a las caras 1-dimensionales se les llama *lados*. Las caras  $(k - 1)$ -dimensionales de un  $k$ -símplice se llaman *bordes*, y a su unión la llamamos *frontera*. Definimos el *interior* como  $\sigma$  menos su frontera.

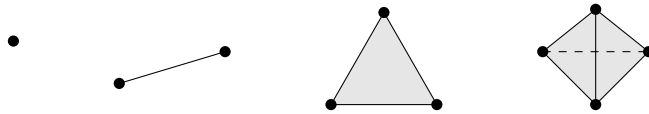


Figura 2.1:  $k$ -símplices,  $k = 0, \dots, 3$ .

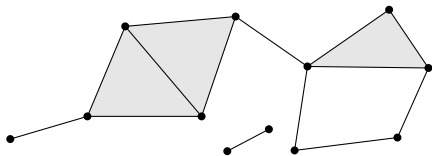


Figura 2.2: Un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^2$

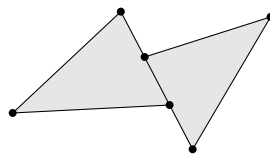


Figura 2.3: Símplices que no forman un complejo.

**Definición 2.1.4.** Un **complejo simplicial** es una colección  $K$  de símplices en un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Si  $\sigma \in K$ , entonces toda cara de  $\sigma$  está en  $K$
- (ii) La intersección de dos símplices cualesquiera en  $K$  es o bien vacía o bien una cara de ambos.

Si  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^n$ , llamamos **dimensión de  $K$**  a la dimensión máxima de los símplices en  $K$ . Esta no es mayor que  $n$ . Un subconjunto  $K' \subseteq K$  se dice que es un **subcomplejo de  $K$**  si para todo  $\sigma \in K'$ , toda cara de  $\sigma$  está en  $K'$ . Un subcomplejo es un complejo simplicial en sí. Para todo  $k \leq n$ , el conjunto de todos los símplices de  $K$  de dimensión menor o igual que  $k$  es un subcomplejo llamado  **$k$ -esqueleto de  $K$** .

La Figura 2.2 muestra un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^2$ . En cambio en la Figura 2.3 los símplices representados no forman un complejo, pues no se respeta la condición (ii) de la Definición 2.1.4.

**Definición 2.1.5.** Sea un complejo simplicial  $K$  en  $\mathbb{R}^n$ . La unión de todos los símplices en  $K$  junto con la topología heredada de  $\mathbb{R}^n$  es un espacio topológico que denotamos por  $|K|$  y que llamamos **poliedro de  $K$** .

**Definición 2.1.6.** Una **aplicación afín** es una aplicación  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $F(x) = c + A(x)$ , donde  $c \in \mathbb{R}^m$  es un vector fijo y  $A(x)$  es una aplicación lineal.

**Definición 2.1.7.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales. Una **aplicación simplicial** es una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$  cuya restricción a cada símplice  $\theta \in K$  coincide con una aplicación afín que lleva  $\theta$  a algún símplice en  $L$ .

**Definición 2.1.8.** Sea  $X$  un espacio topológico. Llamamos **triangulación de  $X$**  a un homeomorfismo entre  $X$  y el poliedro de algún complejo simplicial.

**Definición 2.1.9.** Toda variedad (con borde y sin borde) que admita una triangulación se dice **triangulable**.

## 2.2. Teorema de Radó

**Teorema 2.2.1** (Teorema de Radó). Toda superficie es triangulable por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en donde cada 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices.

**Teorema 2.2.2.** Toda superficie con borde es triangulable por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en donde hay dos tipos de 1-símplices: los que están totalmente contenidos en el borde, y los que se corresponden con puntos interiores. Los primeros son cara de exactamente un 2-símplice, y los últimos exactamente de dos 2-símplices.

## Capítulo 3

# Teorema de Clasificación

En esta sección daremos una demostración clásica del teorema de clasificación de superficies compactas, que fue probado por primera vez en 1907 por Max Dehn y Poul Heegaard [7]. En las primeras dos secciones utilizo las nociones que da Lee [1] sobre la representación de superficies, y las amplío a la representación de superficies con borde. En la tercera sección demuestro el teorema basándome en la prueba de Lee [1], que a su vez se basa en la demostración clásica de Seifert y Threlfall [8]. Finalmente clasifico las superficies con borde, siguiendo la idea de Massey [9].

### 3.1. Superficies como cocientes

Para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Trataremos de dar una forma de representarlas como polígonos, y veremos que toda superficie compacta se puede representar en el plano como el cociente de un polígono por una relación de equivalencia que identifica sus lados dos a dos.

Veamos tres ejemplos elementales: la esfera  $\mathbb{S}^2$ , el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  y el toro  $\mathbb{T}^2$ . Como veremos, estas superficies son fundamentales pues toda superficie compacta se puede construir a partir de ellas.

**Proposición 3.1.1.** La esfera  $\mathbb{S}^2$  es homeomorfa a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado  $\overline{\mathbb{B}}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, y)$ , si  $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$
- (b) El cuadrado  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, y)$  si  $(x, y) \in \partial S$ .

*Demostración.* Para ver que cada espacio es homeomorfo a la esfera, daremos una aplicación cociente desde cada espacio a la esfera que haga las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, y entonces apelaremos a la unicidad del espacio cociente. (Teorema A.1.7)

Para (a), vamos a definir una aplicación que “envuelve” cada paralelo de la esfera con un segmento horizontal del disco (ver Figura 3.1). Formalmente, esta aplicación  $\pi : \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  viene dada por

$$\pi(x, y) = \begin{cases} (-\sqrt{1-y^2} \cos \frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}, y), & y \neq \pm 1 \\ (0, 0, y), & y = \pm 1 \end{cases}$$

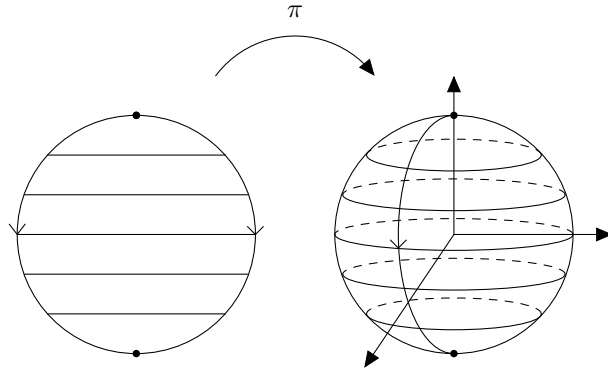


Figura 3.1: La esfera como cociente del disco  $\mathbb{B}^2$ .

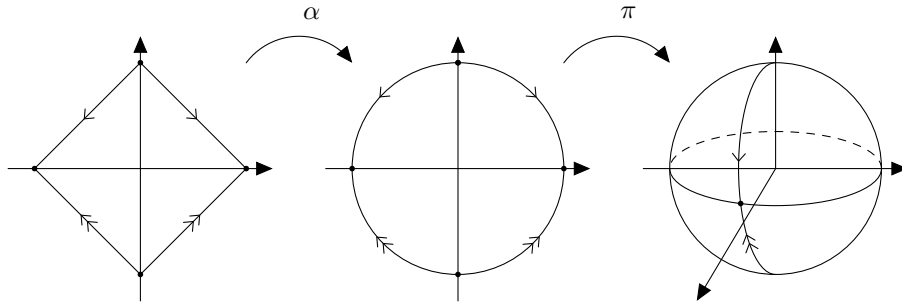


Figura 3.2: La esfera como cociente de un cuadrado.

Es claro que  $\pi$  es continua y hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia. Por ser sobreyectiva, es una aplicación cociente (Teorema A.1.6).

Para probar (b), sea  $\alpha : S \rightarrow \mathbb{B}^2$  el homeomorfismo construido a partir de la aplicación dada en la demostración de Proposición B.0.2 que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de  $S$  a un segmento paralelo a este, que une el centro del disco y su frontera. Hagamos ahora  $\beta = \pi \circ \alpha : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , donde  $\pi$  es la aplicación cociente del párrafo anterior. Tenemos entonces que  $\beta$  identifica  $(x, y)$  y  $(-x, y)$  cuando  $(x, y) \in \partial S$ , y por otro lado es inyectiva, así que hace las mismas identificaciones que la aplicación cociente definida en (b), completando así la demostración (ver Figura 3.2).  $\square$

**Proposición 3.1.2.** El toro  $\mathbb{T}^2$  es homeomorfo al espacio cociente resultante de la relación de equivalencia en el cuadrado  $I \times I$  que identifica  $(x, 0) \sim (x, 1)$  para todo  $x \in I$ , y  $(0, y) \sim (1, y)$  para todo  $y \in I$  (Figura 3.3).

*Demostración.* Definimos la aplicación  $q : I \times I \rightarrow \mathbb{T}^2$  que manda  $q(u, v) = (e^{2\pi i u}, e^{2\pi i v})$ . Por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.1.6), es una aplicación cociente. Al hacer las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, por la unicidad del espacio cociente (Teorema A.1.7) se obtiene el resultado.  $\square$

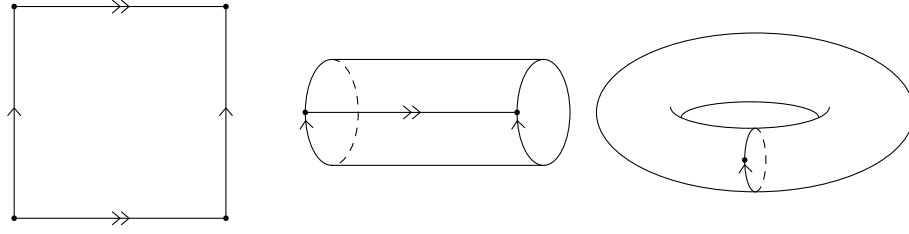


Figura 3.3: El toro como cociente de un cuadrado.

**Proposición 3.1.3.** El plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  es homeomorfo a los siguientes espacios cociente:

- (a) El disco cerrado  $\overline{\mathbb{B}}^2$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para cada  $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$ .
- (b) La región cuadrada  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  módulo la relación de equivalencia generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para todo  $(x, y) \in \partial S$ .

*Demostración.* Sea la relación de equivalencia  $\sim$  generada por  $(x, y) \sim (-x, -y)$  para cada  $(x, y) \in \mathbb{S}^2$ , que representa  $\mathbb{P}^2$  como el cociente de una esfera en la cual se identifican polos opuestos, y sea  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  su aplicación cociente. Si  $F : \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es la aplicación que manda el disco al emisferio norte de la esfera mediante la aplicación  $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ , entonces  $p \circ F : \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 / \sim$  es sobreyectiva por serlo  $p$  y  $F$ , y es por tanto una aplicación cociente por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.1.6). La aplicación identifica únicamente  $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$  con  $(-x, -y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$ , por lo que  $\mathbb{P}^2$  es homeomorfo al espacio cociente resultante. Para la parte (b) utilizamos un argumento análogo al de la demostración de la Proposición 3.1.1 (b)  $\square$

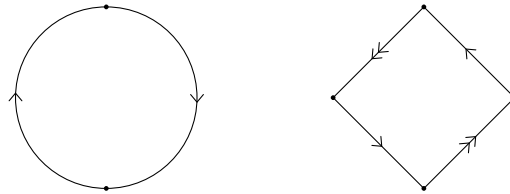


Figura 3.4: Representación de  $\mathbb{P}^2$  como un espacio cociente.

De ahora en adelante visualizaremos el plano proyectivo como el **crosscap**, cuya construcción se sigue en la siguiente figura.

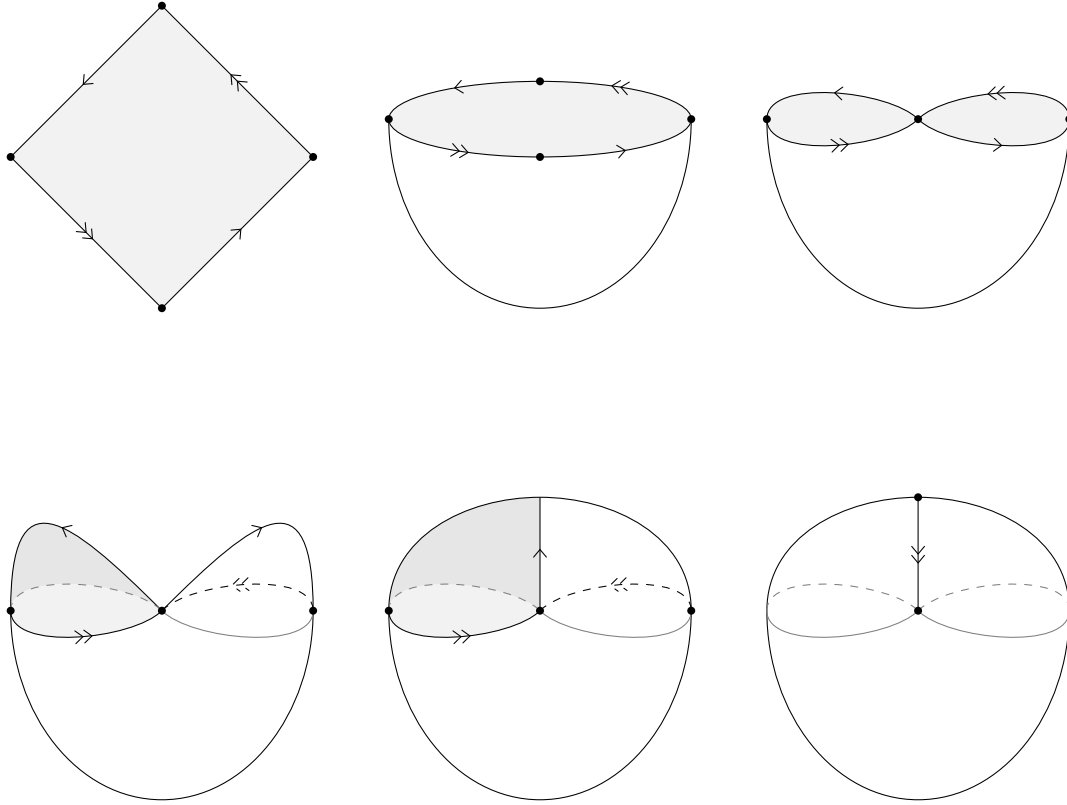


Figura 3.5: Crosscap.

En las anteriores proposiciones hemos visto una o varias formas de representar superficies dadas ciertas construcciones geométricas. En estos casos hemos dado aplicaciones y demostraciones concretas para validar nuestros argumentos, pero a medida que aumenta la sofisticación es más útil guiarse visualmente por las figuras construidas. Por ello debemos formalizar un método para construir superficies identificando lados de figuras geométricas del plano. Daremos por sabidas las definiciones básicas de símlices CW-complejos, que dejamos en el Apéndice B.

**Definición 3.1.4.** Un **polígono** es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  y está formado por un número finito de segmentos, que llamaremos **bordes** y que se intersecan sólo en sus extremos, que llamaremos **vértices**.

**Definición 3.1.5.** Una **región poligonal** es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  cuyo interior es homeomorfo al disco  $\mathbb{B}^2$  y cuya frontera es un polígono. A los vértices y lados del polígono de la frontera también los llamamos vértices y lados de la región poligonal.

Veamos pues que identificando bordes de regiones poligonales de par en par obtenemos un espacio cociente que es siempre una superficie:

**Proposición 3.1.6.** Sean  $P_1, \dots, P_k$  regiones poligonales en el plano, y sea  $P = P_1 \amalg \dots \amalg P_k$ , y supongamos dada una relación de equivalencia en  $P$  que identifica algunos bordes de los polígonos con otros por homeomorfismos afines. Entonces se tiene:



- (a) El espacio cociente resultante es un CW-complejo 2-dimensional cuyo 0-esqueleto es la imagen del conjunto de vértices de  $P$  por la aplicación cociente, y cuyo 1-esqueleto es la imagen de la unión de los bordes de las regiones poligonales.
- (b) Si la relación de equivalencia identifica cada borde de cada  $P_i$  con exactamente otro borde de un  $P_j$  (no necesariamente  $i \neq j$ ), entonces el espacio cociente resultante es una superficie compacta.
- (c) Si para algunos  $P_i$  la relación de equivalencia identifica algún borde suyo con exactamente otro borde de un  $P_j$  (no necesariamente  $i \neq j$ ), y para los bordes restantes no hay ninguna identificación, entonces el espacio cociente resultante es una superficie con borde compacta.

*Demostración.* Sea  $M$  el espacio cociente, sea  $\pi : P \rightarrow M$  la aplicación cociente y sean  $M_0, M_1, M_2 = M$  respectivamente las imágenes por  $\pi$  de los vértices, los bordes y las regiones poligonales. Por la propia definición de  $P$ ,  $M_0$  es un espacio discreto, y para  $k = 1, 2$ ,  $M_k$  se obtiene a partir de  $M_{k-1}$  pegando un número finito de  $k$ -celdas. Por tanto  $M$  es un CW-complejo (Definición B.0.4).

Para probar (b), si demostramos que  $M$  es localmente homeomorfa a un espacio euclideo, entonces, por la Proposición B.0.6,  $M$  será una superficie.

Por un lado las 2-celdas son abiertos en  $M$  por definición, y por lo tanto son entornos euclideos de cada uno de sus puntos.

Sea  $D$  una 1-celda, y sea  $d \in D$ . Veamos que  $d$  tiene un entorno Euclideo. Por un lado,  $d$  tiene exactamente dos preimágenes  $x$  e  $y$ , cada una en el interior de un borde distinto  $D_1$  y  $D_2$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que estos dos bordes pertenecen respectivamente a  $P_1$  y  $P_2$  ( $P_1$  puede ser igual a  $P_2$ ), y denotemos por  $h : D_2 \rightarrow D_1$  un homeomorfismo tal que  $h(y) = x$ . Dado que cada  $P_i$  es una variedad con borde, y  $x, y$  son puntos borde, podemos elegir cartas coordenadas  $(U, \varphi)$  para  $P_1$  y  $(V, \psi)$  para  $P_2$  tal que  $x \in U$ ,  $y \in V$ . Denotamos  $\hat{U} = \varphi(U)$ ,  $\hat{V} = \psi(V) \subseteq \mathbb{H}^2$  y podemos asumir, contrayendo  $U$  y  $V$  si es necesario, que  $h(V \cap D_2) = U \cap D_1$ , y que  $\hat{U} = U_0 \times [0, \varepsilon)$ ,  $\hat{V} = V_0 \times [0, \varepsilon)$  para un  $\varepsilon > 0$  y unos subconjuntos  $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}$  como se muestra en la Figura 3.6. Así pues podemos escribir las aplicaciones coordenadas como  $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$ ,  $\psi(x) = (\psi_0(y), \psi_1(y))$  con  $\varphi_0 : U \rightarrow U_0$ ,  $\varphi_1 : U \rightarrow [0, \varepsilon)$ ,  $\psi_0 : V \rightarrow V_0$  y  $\psi_1 : V \rightarrow [0, \varepsilon)$  aplicaciones continuas. Que  $x$  e  $y$  sean puntos borde significa que  $\varphi_1(x) = \psi_1(y) = 0$ .

Queremos ensamblar estas dos cartas con una aplicación cuya imagen sea un abierto de  $\mathbb{R}^2$ , pegándolas por los puntos que se corresponden en  $D_1$  y  $D_2$ . El problema es que las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  no tienen por qué llevar puntos borde que se correspondan al mismo punto imagen, y por tanto tenemos que ajustarlo. Se tiene que las dos restricciones  $\varphi_0|_{U \cap D_1} : U \cap D_1 \rightarrow U_0$  y  $\psi_0|_{V \cap D_2} : V \cap D_2 \rightarrow V_0$  son homeomorfismos, y definimos así el homeomorfismo  $\beta : V_0 \rightarrow U_0$  por

$$\beta = (\varphi_0|_{U \cap D_1}) \circ h \circ (\psi_0|_{V \cap D_2})^{-1}.$$

Sea ahora  $B : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación

$$B(y_1, y_2) = (\beta(y_1), -y_2).$$

Geométricamente,  $B$  actúa como un espejo, juntando los puntos borde de acuerdo con  $\beta$ , y dando la vuelta al segmento que está por encima de él, llevándolo a un segmento por debajo (como en la Figura AUN POR HACER ??). Esta construcción nos asegura que

$$B \circ \psi(y) = (\beta \circ \psi_0(y), 0) = (\varphi_0 \circ h(y), 0) = \varphi \circ h(y). \quad (3.1)$$

Definimos ahora  $\tilde{\Phi} : U \amalg V \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\tilde{\Phi}(y) = \begin{cases} \varphi(y), & y \in U, \\ B \circ \psi(y), & y \in V. \end{cases}$$

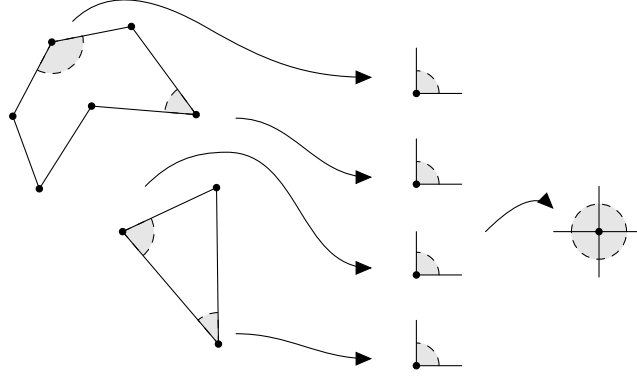


Figura 3.6: Entorno euclídeo de un vértice.

Dado que  $U \amalg V$  es un abierto saturado de  $M$ , la restricción  $\pi|_{U \amalg V}$  es una aplicación cociente en el entorno de  $d \pi(U \amalg V)$ , y por (3.1)  $\tilde{\Phi}$  pasa al cociente y define una aplicación continua e inyectiva  $\Phi : q(U \amalg V) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Como  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $B$  son homeomorfismos entre sus dominios y sus imágenes, podemos definir la inversa de  $\Phi$  de la siguiente manera:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{cases} q \circ \varphi^{-1}(s), & s_2 \geq 0, \\ q \circ \psi^{-1} \circ B^{-1}(s), & s_2 \leq 0. \end{cases}$$

Dado que las dos partes de la función son iguales donde coinciden, la aplicación es continua, y por tanto  $\Phi$  es un homeomorfismo. Así pues,  $U \amalg V$  es un entorno Euclídeo de  $d$ .

La preimagen de una 0-celda  $v$  es un conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq P$ . Para cada uno de estos vértices podemos elegir un  $\varepsilon > 0$  tal que el disco  $B_\varepsilon(v_i)$  no contenga ningún vértice de la región poligonal  $P_j$  a la que pertenece  $v_i$  a parte de sí mismo, y tal que no interseca más bordes que los que lo contienen.  $B_\varepsilon(v_i) \cap P_j$  es homeomorfo a un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido por la intersección de dos semiplanos cuyas fronteras coinciden en un único punto y tal que el ángulo que forman es de  $2\pi/k$ . Podemos ahora hacer una aplicación que envíe cada una de las regiones asociadas a cada  $v_i$ ,  $i_1, \dots, k$  a un conjunto que contenga un entorno del origen y que respete las identificaciones entre los bordes de los  $P_j$ . Esta aplicación está definida sobre un conjunto saturado de  $P$ , de la cual podemos sacar un homeomorfismo de  $v$  a un entorno del origen de  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente, para probar (c), volvemos a ver cada polígono como una superficie con borde. El interior de las 1-celdas que provienen de lados que se identifican son localmente euclídeos por la demostración del apartado anterior. Para los puntos vértices de estas 2-celdas podemos encontrar una bola o una semibola coordinada con una construcción similar a la de la demostración anterior, dependiendo de si los vértices están contenidos en el borde o no. Por otro lado, para los puntos de las 1-celdas que tienen sólo una preimagen podemos encontrar como semibolas coordinadas las mismas de antes de pasar al cociente. Por tanto se tiene que el espacio cociente resultante es una superficie con borde.  $\square$

**Ejemplo 3.1.7.** La *botella de Klein* es la superficie  $K$  obtenida identificando los lados del cuadrado  $I \times I$  de acuerdo a  $(0, t) \sim (1, t)$  y  $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Para visualizar  $K$ , podemos pensar en pegar los lados izquierdo y derecho creando un cilindro, y luego hacer pasar el extremo superior por la parte inferior del cilindro, para finalmente pegar los dos extremos (ver Figura 3.7).

**Ejemplo 3.1.8.** Veamos ahora como obtener las figuras del Ejemplo 1.2.5. El cilindro  $Cil$  es la superficie con borde que se obtiene al identificar los lados de un cuadrado  $I \times I$  dada la relación de equivalencia  $(0, y) \sim (1, y)$ , con  $y \in I$  (Figura 3.8a). La banda de Möbius  $Mob$  es la superficie con borde que se obtiene identificando los lados del cuadrado  $I \times I$  de acuerdo a la relación  $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ ,  $y \in I$  (Figura 3.8b).

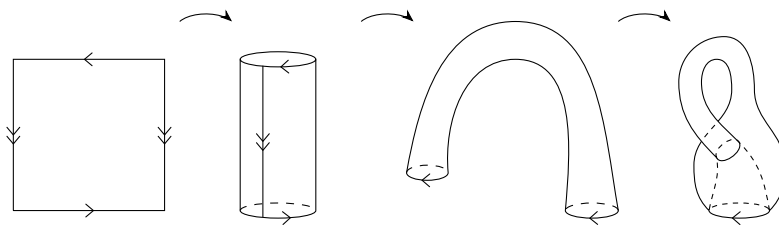
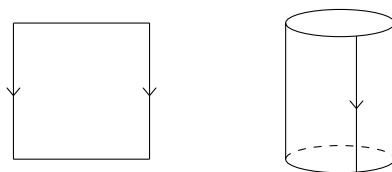
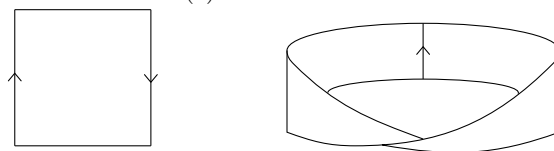


Figura 3.7: Construcción de la botella de Klein.



(a) El cilindro  $Cil$ .



(b) La banda de Möbius  $Mob$ .

Figura 3.8: Superficies con borde como cocientes topológicos.

## 3.2. Representación de superficies

Vamos ahora a dar un método uniforme para representar todas las superficies y las superficies con borde como regiones poligonales del plano. A su vez asociaremos a cada región poligonal, y por tanto a cada superficie, una secuencia de símbolos llamada palabra.

**Definición 3.2.1.** Sea  $S$  un conjunto. Una **palabra en  $S$**  es una  $k$ -tupla ordenada de símbolos, cada uno de la forma  $a$  o  $a^{-1}$ , para cierto  $a \in S$ .

**Definición 3.2.2.** Una **representación poligonal**, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$$

es un conjunto finito  $S$  junto con un número finito de palabras  $W_1, \dots, W_k$  en  $S$  de longitud 3 o más, tal que para todo  $a \in S$  existe un  $W_i$  tal que  $a \in W_i$ . Por cuestiones de notación, cuando el conjunto  $S$  esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de  $S$  y denotaremos las palabras  $W_i$  por yuxtaposición. Por ejemplo, la presentación con  $S = \{a, b\}$  y la palabra  $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$  se escribe  $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

Permitimos el caso especial de que  $S = \{a\}$  (u otro símbolo cualquiera) y que  $\mathcal{P}$  tenga una sola palabra de longitud 2, es decir,  $\langle a \mid aa \rangle$ ,  $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$ ,  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$  y  $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$ .

**Definición 3.2.3.** Toda representación poligonal  $\mathcal{P}$  da lugar a un espacio topológico  $|\mathcal{P}|$ , llamado **realización geométrica de  $\mathcal{P}$** .  $|\mathcal{P}|$  se obtiene de la siguiente manera:

1. Para cada  $W_i \in \mathcal{P}$  de longitud  $k$ , sea  $P_i$  la  $k$ -región poligonal convexa centrada en el origen con lados de longitud 1, ángulos iguales y tal que un vértice yace sobre el eje  $OY$ .
2. Se define una correspondencia uno a uno (que llamaremos *etiquetado*) entre los símbolos de  $W_i$  y los bordes de  $P_i$  en sentido contrario a las agujas del reloj, empezando por el que yace en el eje  $OY$ .
3. Sea  $|\mathcal{P}|$  el espacio cociente de  $\coprod_i P_i$  determinado identificando bordes que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de los bordes con una etiqueta dada  $a$  y los últimos vértices de los que tienen la correspondiente etiqueta  $a^{-1}$  (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si  $\mathcal{P}$  es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, definimos  $|\mathcal{P}|$  como la esfera  $\mathbb{S}^2$  si la palabra es  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$ , o como el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  si es  $aa$  o  $a^{-1}a^{-1}$ .

Por notación, dadas dos palabras  $W_1$  y  $W_2$ ,  $W_1W_2$  representará la palabra formada concatenando  $W_1$  y  $W_2$ . Por otro lado, adoptaremos la convención de que  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

También en lo que sigue  $S$  denotará una secuencia cualquiera de símbolos,  $a, b, c, a_1, a_2, \dots$  símbolos de  $S$ ,  $e$  un símbolo que no sea de  $S$  y  $W_1, W_2, \dots$  palabras formadas por símbolos de  $S$ .

**Definición 3.2.4.** Los interiores, los bordes y los vértices de cada región poligonal  $P_i$  se llaman **caras, bordes y vértices de la representación**. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de bordes coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para un lado etiquetado  $a$ , el **vértice inicial** es el primero en el sentido contrario de las agujas del reloj, y el otro es el **vértice final**. Para un lado etiquetado  $a^{-1}$ , estas definiciones se invierten.

**Definición 3.2.5.** Sea  $\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$  una representación poligonal.

- (i) Decimos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de una superficie** si para todo  $a \in S$ ,  $a$  ocurre exactamente dos veces en  $W_1, \dots, W_k$  como  $a$  o como  $a^{-1}$ .

- (ii) Si en cambio en la representación poligonal cada símbolo  $a \in S$  ocurre una o dos veces en  $W_1, \dots, W_k$  como  $a$  o  $a^{-1}$ , diremos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de una superficie con borde**.

**Observación 3.2.6.** Por la Proposición 3.1.6, la realización geométrica de una representación de una superficie es una superficie compacta, y la realización geométrica de una representación de una superficie con borde es una superficie con borde.

En el apartado (ii) de la definición anterior dejamos la posibilidad de que cada símbolo aparezca exáctamente dos veces, como en (i). Esto no es ninguna ambigüedad pues como se expuso en la Sección 1.2 una superficie sin borde es siempre una superficie con borde, y una superficie con borde tal que tiene borde vacío es una superficie sin borde.

**Definición 3.2.7.** Si  $X$  es un espacio topológico y  $\mathcal{P}$  una representación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a  $\mathcal{P}$ , decimos que  $\mathcal{P}$  es una **representación de  $X$** .

**Observación 3.2.8.** Un espacio topológico que admite una representación con una sola cara es conexo, pues es homeomorfo al cociente de una región poligonal conexa. Con más de una cara, puede ser o no conexo.

**Ejemplo 3.2.9.** Veamos las representaciones de algunas superficies importantes (ver Figura 3.9 y Figura 3.10).

$$(a) \mathbb{S}^2 = \langle a \mid aa^{-1} \rangle = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle \text{ (Proposición 3.1.1)}$$

$$(b) \mathbb{P}^2 = \langle a \mid aa \rangle = \langle a, b \mid abab \rangle \text{ (Proposición 3.1.3)}$$

$$(c) \mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \text{ (Proposición 3.1.2)}$$

**Ejemplo 3.2.10.** Podemos dar también las representaciones de algunas superficies con borde (Figura 3.11):

$$(a) \overline{\mathbb{B}}^2 = \langle a, b, c \mid abc \rangle.$$

$$(b) Mob = \langle a, b, c \mid abac \rangle \text{ (Ejemplo 3.1.8).}$$

$$(c) Cil = \langle a, b, c \mid aba^{-1}c \rangle \text{ (Ejemplo 3.1.8).}$$

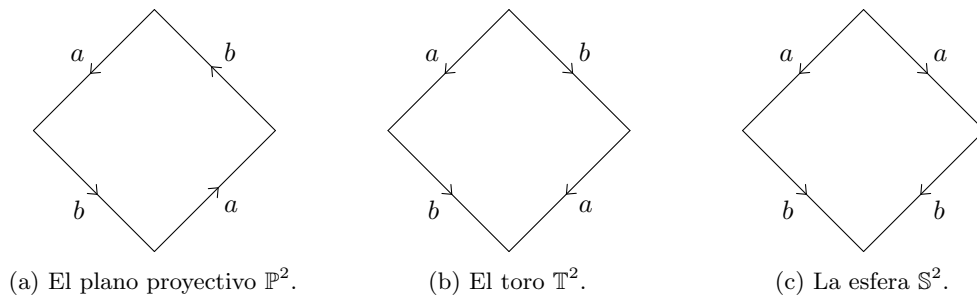


Figura 3.9: Representación de superficies importantes.

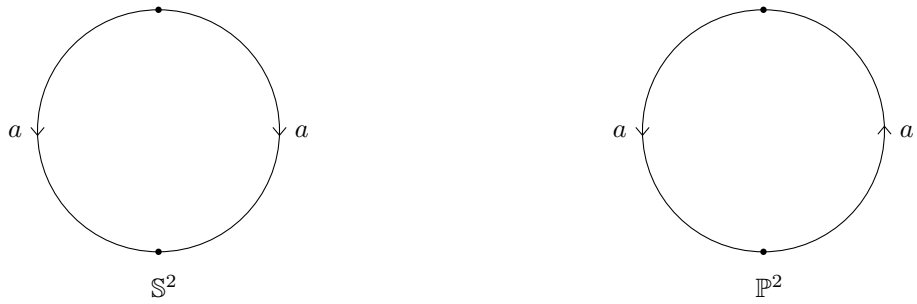


Figura 3.10: Representaciones de la esfera y el plano proyectivo.

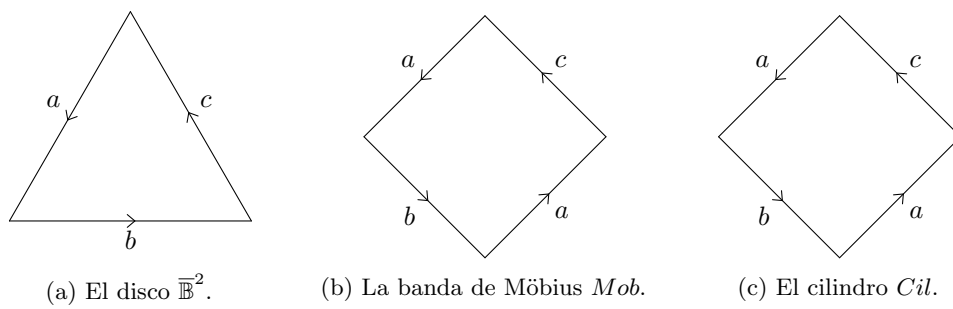


Figura 3.11: Representación de superficies con borde.

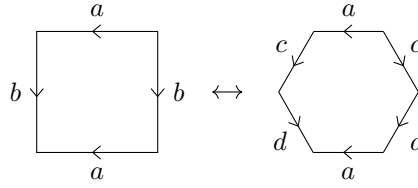


Figura 3.12: Subdividir/consolidar.

Parece claro que, además de  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{P}^2$ , una superficie pueda tener varias presentaciones poligonales. Sea por ejemplo la presentación del toro  $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Intuitivamente podemos ver que, subdividiendo los lados etiquetados con  $b$  y reetiquetándolos con  $c$  y  $d$  (ver Figura 3.12), la superficie que representa la representación obtenida  $\langle a, c, d \mid acda^{-1}c^{-1}d^{-1} \rangle$  será la misma. Vamos ahora a desarrollar unas reglas generales de transformación que nos den figuras equivalentes.

**Definición 3.2.11.** Sean  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  dos representaciones tal que sus realizaciones geométricas son homeomorfas. Entonces decimos que son *topológicamente equivalentes* y escribimos  $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ .

Vamos a definir ahora unas operaciones elementales sobre las representaciones poligonales. Veremos luego que estas dan lugar a representaciones equivalentes.

**Definición 3.2.12.** Las siguientes operaciones se llaman *transformaciones elementales* de una presentación poligonal:

- **Reetiquetar:** Cambiar todas las apariciones de un símbolo  $a$  por otro símbolo que no está todavía en la representación, intercambiar todas las apariciones de dos símbolos  $a$  y  $b$  o intercambiar todas las apariciones de  $a$  y  $a^{-1}$ .
- **Subdividir** (Figura 3.12): Cambiar todas las apariciones de  $a$  por  $ae$  y todas las de  $a^{-1}$  por  $e^{-1}a^{-1}$ , donde  $e$  es un símbolo que no está todavía en la presentación.
- **Consolidar** (Figura 3.12): Si  $a$  y  $b$  aparecen siempre de forma adyacente, intercambiar  $ab$  por  $a$  y  $b^{-1}a^{-1}$  por  $a^{-1}$ , siempre que esto de lugar a una o más palabras de longitud al menos 3 o una sola palabra de longitud 2.

- **Reflejar** (Figura 3.13a):

$$\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Rotar** (Figura 3.13b):

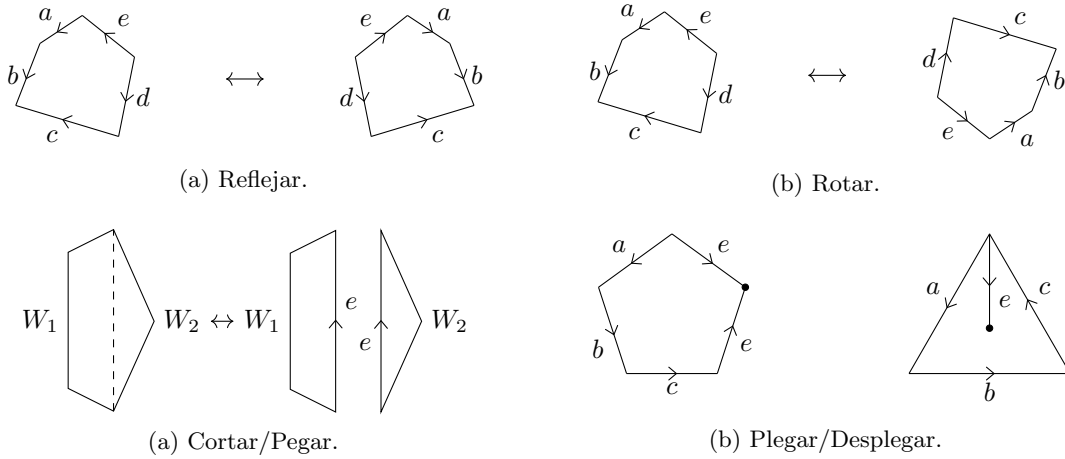
$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- **Cortar** (Figura 3.14a): Si  $W_1$  y  $W_2$  tienen longitud al menos 2,

$$\langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

- **Pegar** (Figura 3.14a):

$$\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$



- **Plegar** (Figura 3.14b): Si  $w_1$  tiene longitud al menos 3,

$$\langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

Permitimos que  $W_1$  tenga longitud 2, siempre que la representación tenga una sola palabra.

- **Desplegar** (Figura 3.14b):

$$\langle S \mid W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

**Proposición 3.2.13.** Las operaciones elementales sobre representaciones poligonales dan lugar a representaciones poligonales equivalentes.

*Demostración.* Los casos de reetiquetar, subdividir y rotar son cambios puramente formales que no afectan al espacio cociente. Los casos subdividir/consolidar, cortar/pegar y plegar/desplegar son inversos, con lo que basta probar uno de cada par. Empecemos con la operación de cortar. Sean  $P_1, P_2$  dos regiones poligonales convexas etiquetadas por las palabras  $W_1 e$  y  $e^{-1} W_2$  y sea  $P'$  la region poligonal etiquetada por  $W_1 W_2$ . Supongamos de momento que no hay más palabras en las respectivas presentaciones. Si  $\pi : P_1 \amalg P_2 \rightarrow M$  y  $\pi' : P' \rightarrow M'$  representan respectivamente las aplicaciones cocientes. El segmento que va desde el vértice final de  $W_1$  en  $P'$  a su vértice inicial yace en  $P'$  por convexidad, y lo etiquetamos con  $e$ . Por el ??, existe una aplicación continua  $f : P_1 \amalg P_2 \rightarrow P'$  que lleva cada lado de  $P_1$  o  $P_2$  a su correspondiente lado en  $P'$ , y cuya restricción a cada  $P_i$  es un homeomorfismo sobre su imagen. Por el Teorema A.1.6,  $f$  es una aplicación cociente. Dado que  $f$  identifica únicamente los lados  $e$  y  $e^{-1}$ , la aplicación cociente  $\pi' \circ f$  y  $\pi$  hacen exactamente las mismas identificaciones, y por tanto los espacios cociente  $M$  y  $M'$  son homeomorfos. En el caso de que hubiese otras palabras  $W_3, \dots, W_k$ , simplemente extendemos  $f$  como la identidad en sus respectivas presentaciones poligonales y procedemos como antes.

Para el plegado, ignoramos como antes palabras adicionales  $W_2, \dots, W_k$ . Supongamos para empezar que  $W_1 = abcd$  tiene longitud exáctamente 4. Sea  $P$  una región poligonal convexa con lados etiquetados por  $abee^{-1}cd$ . Si cortamos a lo largo de el segmento  $f$  que une el vértice inicial de  $a$  con el vértice final de  $e$  y obtenemos así  $abef$  y  $f^{-1}e^{-1}cd$ . Consolidamos  $ef$  en  $h$ , obteniendo así  $ah^{-1}$  y  $bch$ . Pegamos por  $h$  y obtenemos así  $abcd$ . ((Lo he cambiado para evitar hablar de simplex que los introduzco más tarde. Vale igualmente?)) Si  $W_1$  tiene longitud 2 o 3, podemos subdividir para alargar la longitud de la palabra a 4, plegar, y finalmente consolidar de nuevo.  $\square$



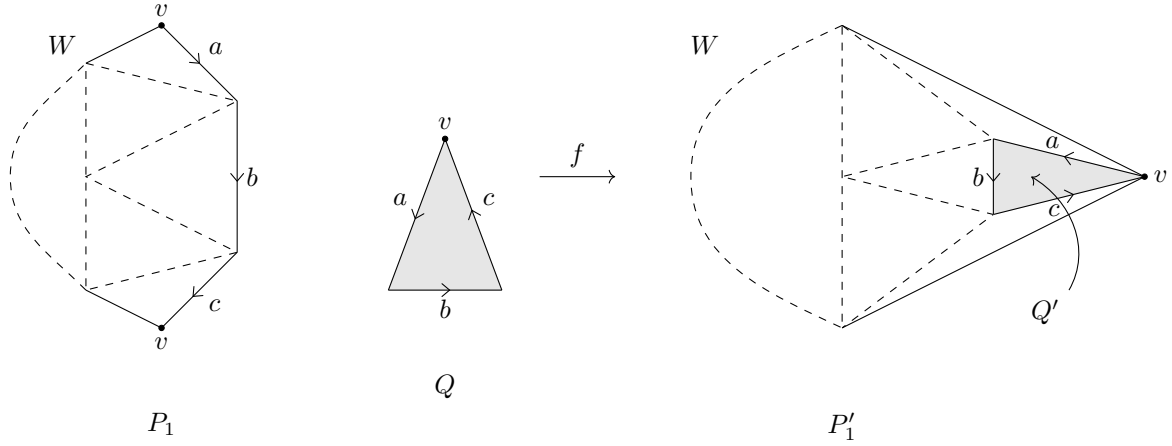


Figura 3.15: La representación  $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$ .

**Proposición 3.2.14.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies que admiten respectivamente representaciones  $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$  y  $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos disjuntos y tal que cada presentación tiene una sola cara. Entonces  $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$  es una presentación de la suma conexa  $M_1 \# M_2$ .

*Demostración.* Consideramos la representación  $\mathcal{P}_1 = \langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$  (Figura 3.15). Pegando a lo largo de  $a$  y doblando dos veces, tenemos que  $\mathcal{P}_1$  es una representación equivalente a  $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$  y por tanto es una representación de  $M_1$ . Llamemos  $B_1$  a la imagen en  $M_1$  del interior de la región poligonal cuyo borde es  $abc$ . Veamos que  $B_1$  es un disco coordenado regular, es decir, que existe un entorno  $B'$  de  $B_1$  en  $M_1$  y un homeomorfismo  $\phi : B' \rightarrow \mathbb{R}^2$  que manda  $B_1$  a  $\mathbb{B}^2$  y  $\bar{B}$  a  $\bar{\mathbb{B}}^2$ . Una forma de verlo lo sugiere la Figura 3.15: sean  $P_1$ ,  $Q$  y  $P'_1$  regiones poligonales convexas etiquetadas respectivamente por las palabras  $W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}$ ,  $abc$  y  $W_1$ . Si triangulamos las regiones poligonales como en la Figura 3.15, obtenemos una aplicación simplicial  $f : P_1 \amalg Q \rightarrow P'_1$  que lleva  $Q$  a el triángulo  $Q' \subseteq P'_1$ , que comparte una vértice  $v$  con  $P'_1$ . La composición  $P_1 \amalg Q \rightarrow P'_1 \rightarrow M_1$  respeta las identificaciones hechas por la aplicación cociente  $P'_1 \rightarrow M_1$ , por lo que se tiene un homeomorfismo de  $M_1$  llevando  $B_1$  a la imagen de  $Q'$ .

Ahora, fijémonos en la demostración de la Proposición 3.1.6 (b). Cuando construimos el entorno Euclídeo de un vértice, ensamblábamos las regiones del plano de los varios vértices en un mismo disco coordenado. Aplicando esa construcción al vértice  $v$ , llevamos  $Q'$  a un conjunto que es homeomorfo a un disco cerrado en el plano (??), y entonces extendemos ese homeomorfismo a un disco abierto que lo contiene.

Se sigue de este resultado que la realización geométrica de  $\langle S_1, a, b, c \mid W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1} \rangle$  es homeomorfa a  $M'_1 = M_1 \setminus B_1$ , y  $\partial B_1$  es la imagen de los bordes  $c^{-1} b^{-1} a^{-1}$ . Un argumento similar demuestra que  $\langle S_2, a, b, c \mid abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $M_2$  menos un disco coordenado  $M'_2 = M_2 \setminus B_1$ . Por tanto se tiene que  $\langle S_1, S_2, a, b, c \mid W_1, c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $M'_1 \amalg M'_2$  con los bordes de los respectivos discos identificados, es decir,  $M_1 \# M_2$ . Finalmente, pegando por  $a$  y doblando dos veces, se obtiene la presentación  $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$ .  $\square$

**Ejemplo 3.2.15.** Con la proposición anterior podemos aumentar nuestra lista de superficies conocidas. A estas representaciones las llamaremos representaciones *estándar*.

(a) *Esfera*

$$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de  $n$  toros.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de  $n$  planos proyectivos.*

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle$$

### 3.3. Teorema de clasificación de superficies compactas

**Proposición 3.3.1.** Toda superficie compacta admite una representación poligonal.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie compacta. Por el Teorema de Radó,  $M$  es homeomorfa al poliedro  $|K|$  de un complejo simplicial  $K$  de dimensión 2, en donde todo 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices. Sea  $\mathcal{P}$  la representación poligonal de una superficie que consta de una palabra de longitud 3 por cada 2-símplice, y cuyos bordes tienen las mismas etiquetas si y solo si corresponden al mismo 1-símplice. Veamos que la realización geométrica de  $\mathcal{P}$  es homeomorfa al poliedro (de?)  $K$ . Si ponemos  $P = P_1 \amalg \cdots \amalg P_k$  que denota al conjunto de la unión disjunta de los 2-símplices de  $K$ , entonces tenemos las aplicaciones cociente  $\pi_K : P \rightarrow |K|$  y  $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |\mathcal{P}|$ . Hay que ver por tanto que hacen las mismas identificaciones. Sabemos que las ambas aplicaciones son inyectivas en el interior de los 2-símplices, identifican vértices sólo con vértices y hacen las mismas identificaciones en los bordes. Falta por tanto demostrar que  $\pi_K$  y  $\pi_{\mathcal{P}}$  identifican los vértices sólo de acuerdo a la relación generada por la identificación de los lados. Supongamos que  $v \in K$  es un vértice. Se tiene que  $v$  pertenece a un 1-símplice, pues si no sería un punto aislado de  $|K|$ , lo que contradice que  $|K|$  sea una variedad. El Teorema de Radó nos garantiza que este 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices. Definimos una relación de equivalencia sobre los dos 2-símplices que contienen  $v$ : si  $\sigma, \sigma'$  son dos 2-símplices que contienen a  $v$ , decimos que están **conectados por borde en  $v$**  si hay una secuencia de 2-símplices que contienen a  $v$   $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$  tal que cada  $\sigma_i$  comparte un borde con  $\sigma_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Vamos a comprobar que sólo hay una relación de equivalencia por contradicción. Supongamos que podemos agrupar los 2-símplices que contienen a  $v$  en dos conjuntos disjuntos  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  y  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  tales que todo  $\sigma_i$  está conectado con todo  $\sigma_j$  pero ningún  $\tau_i$  está conectado con ningún  $\sigma_j$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que la bola  $B_\varepsilon(v)$  interseca sólo los símplexes que contienen a  $v$ . Se tiene entonces que  $B_\varepsilon(v) \cap |K|$  es un abierto de  $|K|$  y por tanto una superficie, por lo que  $v$  tiene un entorno  $W \subseteq B_\varepsilon(v) \cap |K|$  que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , por lo que  $W \setminus \{v\}$  es conexo. Pero si ponemos ahora

$$U = W \cap (\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_k) \setminus \{v\}$$

$$V = W \cap (\tau_1 \cup \cdots \cup \tau_m) \setminus \{v\}$$

entonces  $U$  y  $V$  son dos abiertos de  $|K|$  tal cuya intersección con cada símplex es abierta en el símplex, y  $W = U \cup V$  es una desconexión de  $W$ . Pero esto es una contradicción.  $\square$

Como venimos diciendo desde el principio del presente trabajo nuestras superficies fundamentales son el toro  $\mathbb{T}^2$ , la esfera  $\mathbb{S}^2$ , y el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$ . ¿Qué pasa con las otras superficies que hemos visto, como la botella de Klein o la suma conexa de toros y planos proyectivos? La respuesta la obtenemos de los dos siguientes lemas.

**Lema 3.3.2.** La botella de Klein es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

*Demostración.* Vamos a demostrarlo haciendo transformaciones elementales en la representación de la botella de Klein vista en el Ejemplo 3.2.9. Siguiendo la figura Figura 3.16, tenemos

$$\begin{aligned} \langle a, b | abab^{-1} \rangle & \approx \langle a, b, c | abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle & (\text{cortar por } c) \\ & \approx \langle a, b, c, | bca, a^{-1}cb \rangle & (\text{rotar y reflejar}) \\ & \approx \langle b, c | bbcc \rangle & (\text{pegar por } a \text{ y rotar}) \end{aligned}$$

Y esto es la presentación poligonal de la suma conexa de dos planos proyectivos.  $\square$

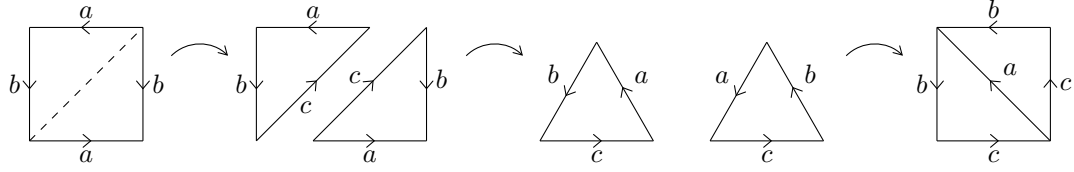


Figura 3.16: Transformación de la bottella de Klein en  $\mathbb{P}^2$ .

**Lema 3.3.3.** La suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

*Demostración.* Partimos de una representación poligonal de  $K \# \mathbb{P}^2$ , que es, por el lema anterior, una presentación de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$  y procedemos haciendo transformaciones elementales:

$$\begin{aligned}
 \langle a, b, c | abab^{-1}cc \rangle & \\
 \approx \langle a, b, c, d | abd^{-1}c, d^{-1}c^{-1}ba^{-1} \rangle & \quad (\text{cortar por } d) \\
 \approx \langle a, b, d | a, b, d^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle & \quad (\text{pegar por } c) \\
 \approx \langle a, b, d, e | deb^{-1}, abea^{-1}d^{-1} \rangle & \quad (\text{cortar por } e \text{ y reflejar}) \\
 \approx \langle adeea^{-1}d^{-1} \rangle & \quad (\text{pegar por } b) \\
 \approx \langle a, d, e | a^{-1}d^{-1}adee \rangle & \quad (\text{rotar})
 \end{aligned}$$

Esta última es, tal como queríamos, una representación de  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ .  $\square$

Podemos ahora enunciar y demostrar nuestro teorema. Diremos que dos bordes identificados de una representación poligonal son **complementarios** si aparecen tanto en la forma  $a$  como en la de  $a^{-1}$ , y diremos que son **torcidos** si aparecen como  $a, \dots, a$  o como  $a^{-1}, \dots, a^{-1}$ . ((Quizás esto interrumpe un poco el discurso. Ponerlo en la demo mejor?))

**Teorema 3.3.4** (Clasificación de Superficies Compactas). Toda superficie compacta y conexa no vacía es homeomorfa a alguna de las siguientes superficies:

- (a) La esfera  $\mathbb{S}^2$ .
- (b) Una suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  de copias del toro.
- (c) Una suma conexa  $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  de copias del plano proyectivo.

A estas superficies las llamamos **superficies estándar**.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie junto con una representación poligonal suya, que existe por la Proposición 3.3.1. Probaremos el teorema haciendo transformaciones elementales sobre esta representación hasta llegar a una de las estándar.

**PASO 1:**  $M$  admite una representación con una sola cara. Si en la representación poligonal de  $M$  aparecen dos o más caras, por ser  $M$  conexa algún borde de una cara de  $M$  tiene que estar identificado con otro borde de otra cara de  $M$ . Si no fuese así,  $M$  sería la unión de los cocientes de sus caras, y dado que cada uno de esos cocientes es abierto y cerrado, desconectarían  $M$ . Por tanto, a través de sucesivos pegados, con rotaciones y reflexiones si es necesario, podemos reducir el número de caras hasta una.

**PASO 2:** O bien  $M$  es homeomorfa a la esfera, o bien  $M$  admite una presentación en la cual no hay pares complementarios adyacentes. Podemos ir eliminando los pares complementarios adyacentes

haciendo sucesivos pegados. O bien los eliminamos todos, o bien nos queda  $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ , lo que implica que  $M$  es homeomorfa a la esfera.

**PASO 3:**  *$M$  admite una representación en la que todos los pares torcidos son adyacentes.* Si en la representación de  $M$  hay un par torcido no adyacente, podemos transformar la representación con rotaciones hasta una de la forma  $VaWa$ , donde  $V$  y  $W$  son palabras no vacías. Guiándonos por la Figura 3.17 podemos ahora efectuar sobre  $VaWa$  sucesivas transformaciones (cortar a lo largo de  $b$ , reflejar, pegar a lo largo de  $a$ ) hasta llegar a la representación  $VW^{-1}bb$ , donde  $W^{-1}$  denota la reflexión de  $W$ . Hemos por tanto sustituido el par torcido  $a,a$  por el par torcido  $b,b$ , que es adyacente. Al hacer esta operación no hemos separado pares adyacentes. Se pueden haber creado nuevos pares torcidos al reflejar  $W$ , pero hemos reducido el número total de pares no adyacentes en al menos una unidad. Por tanto, al cabo de un número finito de pasos, no hay más pares torcidos no adyacentes. Si se han creado nuevos pares adyacentes complementarios, repetimos el Paso 2, que no aumenta el número de pares no adyacentes.

**PASO 4:**  *$M$  admite una representación en la que todos los vértices se identifican en un único punto.* Sea  $v$  una clase de vértices. Si existe otra clase de vértices que no se identifican con  $v$ , entonces existirá un lado que una  $v$  y la otra clase de vértices. Etiquetémoslos por  $a$  y  $w$  respectivamente, tal como se muestra en la Figura 3.18. El otro lado que junta con  $a$  en su vértice  $v$  no puede estar identificado con  $a$ , pues si fuese su complementario, lo habríamos eliminado en el Paso 2, y si formase con  $a$  un par torcido, entonces la aplicación cociente identificaría también los otros dos vértices de cada  $a$ , y estamos asumiendo lo contrario. Por lo tanto llamamos a este otro lado  $b$ , y a su otro vértice  $x$ , el cual puede estar identificado con  $v$ , con  $w$  o con ninguno de los dos.

En algún lugar de la representación poligonal hay un lado que se identifica con  $b$ , de la forma  $b$  o  $b^{-1}$ . Supongamos que aparece en la forma  $b^{-1}$  (el otro caso implica como diferencia sólo una reflexión, que indicaremos cuándo ha de hacerse). Podemos escribir la representación como  $baxb^{-1}Y$ , donde  $X$  e  $Y$  son palabras desconocidas y al menos una es no vacía. Ahora, cortando a lo largo de  $c$  y pegando a lo largo de  $b$  (efectuando aquí la reflexión necesaria si el lado aparecía como  $b$ ) como se muestra en la Figura 3.19, llegamos a una representación en la cual el número de vértices con etiqueta  $v$  ha disminuído, mientras que en cambio el número de vértices con la etiqueta  $w$  ha aumentado. Si se han introducido nuevos pares complementarios adyacentes, volvemos a aplicar el Paso 2 de nuevo para quitarlos. Esta operación puede hacer disminuir los vértices etiquetados por  $v$  (por ejemplo por la operación de plegado) pero nunca aumentarlos. Repitiendo la secuencia un número finito de veces, podemos finalmente eliminar totalmente la clase de vértices  $v$ . Iterando el proceso podemos quedarnos finalmente con una sola clase de vértices.

**PASO 5:** *Si la presentación tiene un par complementario  $a, a^{-1}$ , entonces tiene otro par complementario  $b, b^{-1}$  que aparece intercalado con el primero, en la forma  $a, \dots, b, \dots, a^{-1}, \dots, b^{-1}$ .* Si no es así, entonces la presentación es de la forma  $aXa^{-1}Y$ , donde  $X$  e  $Y$  contienen sólo pares complementarios o pares torcidos adyacentes. ((??)) Por lo tanto cada borde en  $X$  se identifica con otro borde en  $X$ , y lo mismo pasa en  $Y$ . Esto implica que los vértices finales de  $a$  y  $a^{-1}$ , que tocan únicamente  $X$ , se identifican por tanto sólo con vértices de  $X$ , y que los vértices iniciales de  $a$  y  $a^{-1}$  se identifican sólo con vértices de  $Y$ . Esto es una contradicción, puesto que todos los vértices se identifican unos con otros por el Paso 4.

**PASO 6:**  *$M$  admite una presentación en la que todos los pares complementarios intercalados aparecen juntos con ningún otro borde entre ellos:  $aba^{-1}b^{-1}$ .* Si la representación poligonal está formada a partir de la palabra  $WaxbYa^{-1}Zb^{-1}$ , hacemos, como en la figura ??, las siguientes transformaciones: cortamos a lo largo de  $c$ , pegamos por  $a$ , cortamos a lo largo de  $d$ , y pegamos finalmente por  $b$ . Obtenemos así la palabra  $cdc^{-1}d^{-1}WZYX$ , sustituyendo por tanto los dos pares adyacentes por un nuevo par intercalado  $cdc^{-1}d^{-1}$ , sin separar otros lados que previamente eran adyacentes ((y sin crear nuevos pares torcidos)). Por lo tanto, repitiendo el proceso un número de veces se obtiene el

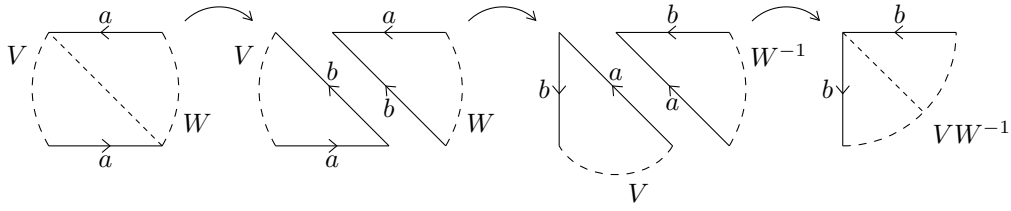


Figura 3.17: Haciendo que los pares torcidos sean adyacentes.

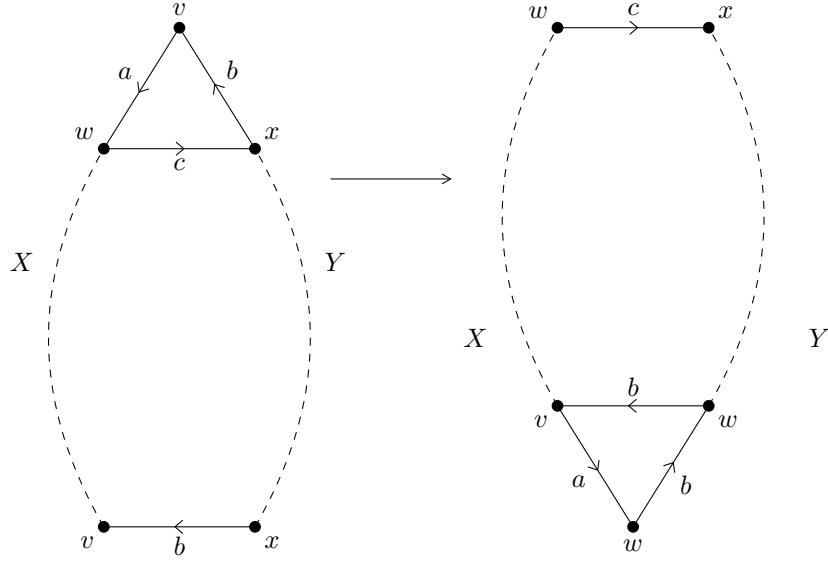


Figura 3.18: Reduciendo el número de vértices equivalentes a  $v$ .

resultado.

**PASO 7:**  $M$  es homeomorfa a la suma conexa de uno o más toros o a la suma conexa de uno o más planos proyectivos. Este es el paso que finaliza la demostración. Recapitulando lo hecho en los pasos anteriores, tenemos una representación de  $M$  (que llamaremos *representación estándar*) en la cual todos los pares torcidos aparecen uno junto al otro y todos los pares complementarios aparecen intercalados en grupos de dos, en la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ . Por tanto esta es la representación de una suma conexa de toros (representados por los bloques  $aba^{-1}b^{-1}$ ) y de planos proyectivos (representados por los  $cc$ ). Si sólo aparecen o bien toros o bien planos proyectivos, hemos terminado. Nos queda el caso en el que aparecen tanto pares torcidos como pares complementarios. Si es así, algún par complementario aparece junto a un par torcido, es decir por la palabra  $aba^{-1}b^{-1}ccX$  o  $ccaba^{-1}b^{-1}X$ . En los dos casos, tenemos la suma conexa de un toro, un plano proyectivo, y lo que represente la palabra  $X$ . Pero por el Lema 3.3.3,  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , por lo que podemos eliminar un toro de la suma conexa. Iterando un número finito de veces, eliminamos todas las apariciones de los bloques de pares complementarios, es decir, de los  $\mathbb{T}^2$ , completando así la demostración.  $\square$

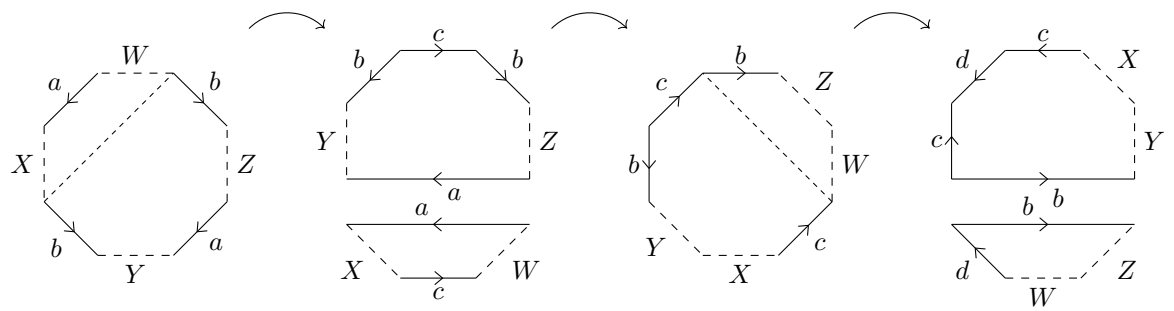


Figura 3.19: Poniendo los pares complementarios juntos.

### 3.4. Teorema de clasificación de superficies con borde

Podemos dar ahora una clasificación de las superficies con borde, que nos servirá para comparar resultados con la prueba ZIP, donde se da directamente una clasificación de las superficies con borde. Empecemos viendo una definición:

**Definición 3.4.1.** Sea  $S$  una superficie (con o sin borde). Sea  $p \in \text{Int}(S)$  y  $U$  un entorno abierto de  $p$  en  $S$ . Sea  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un homeomorfismo tal que  $\phi(p) = 0$ . Sea  $B = \phi^{-1}(B_1(0))$ . Decimos que la nueva superficie con borde  $S^\circ = S \setminus B$  es  $S$  **1-perforada**, y a  $\partial B \subset S^\circ$  la llamamos **perforación**. Podemos repetir el proceso sobre  $S^\circ$  sucesivamente, obteniendo  $S$   $n$ -perforada con un número finito  $n \in \mathbb{N}$  de perforaciones.

Vimos, en el ejemplo Ejemplo 1.2.5 que un toro con dos perforaciones es una superficie con borde. Veamos una propiedad muy interesante:

**Proposición 3.4.2.** Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie compacta. Vamos a demostrar que el borde  $\partial M$  es homeomorfo a una unión disjunta de circunferencias  $\mathbb{S}^1$ . Por el Corolario 1.2.4 se tiene que  $\partial M$  es una 1-variedad. Salvo homeomorfismo, las 1-variedades conexas son  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{S}^1$ . Por ser  $\partial M$  un subconjunto cerrado de un compacto, es también compacto, y por tanto se tiene que cada componente conexa de  $\partial M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ .

Por otro lado, vamos a ver que *pegando* discos a las componentes de  $\partial M$  se obtiene una superficie sin borde. Sean  $S = \coprod_i \mathbb{B}_i^2$  y  $f : \partial S = \coprod_i \mathbb{S}^1 \rightarrow \partial M$  un homeomorfismo. Considerando  $f$  como una función de  $\partial S$  en  $M$ , definimos la relación de equivalencia  $\sim$  en la unión disjunta  $M \amalg S$  generada por  $a \sim f(a)$ , y denotamos el espacio cociente resultante por  $M^* = (M \amalg S) / \sim$ . Tenemos que ver que  $M^*$  es IIAN, Hausdorff y localmente Euclídeo de dimensión 2. Empecemos con esto último. Sea  $q : M \amalg S \rightarrow M^*$  la aplicación cociente, y sea  $B = q(\partial M \cup \partial S)$ . Notamos que  $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$  es un abierto saturado de  $M \amalg S$ , por lo que podemos restringir  $q$  a una aplicación cociente que va de  $\text{Int } M \amalg \text{Int } S$  en  $M^* \setminus B$ . Dado que esta restricción es inyectiva, es un homeomorfismo, y por tanto  $M^* \setminus B$  es localmente Euclídeo de dimensión 2. Por tanto nos queda considerar los puntos en  $B$ , pero esto lo tenemos por un argumento análogo al que usamos en la demostración de Proposición 3.1.6. Por otro lado, el espacio cociente  $M^*$  es IIAN por la proposición ???. Para probar que es Hausdorff, hay que ver que las fibras de  $q$  se pueden separar por abiertos saturados. Pero esto siempre es posible escogiendo bolas coordenadas suficientemente pequeñas. Así pues,  $M^*$  es una superficie.  $\square$

Dada una superficie con borde compacta  $M$ , denotaremos por  $M^*$  la superficie compacta sin borde obtenida mediante el proceso anterior, que llamaremos **pegar** un disco cerrado a cada componente conexa de  $\partial M$ . Si en cambio empezamos por una superficie compacta sin borde  $M^*$  y construimos una superficie con borde haciendo perforaciones, ¿Van a ser homeomorfas las superficies resultantes de hacer las perforaciones en lugares distintos? La respuesta es afirmativa, pero antes necesitamos ver la siguiente proposición:

**Proposición 3.4.3.** Toda superficie con borde compacta admite una representación poligonal.

*Demostración.* Sea  $M$  una superficie con borde compacta. Sabemos que  $M$  es triangulable por el poliedro de un complejo simplicial en el cual hay dos clases de 1-símplices: los 1-símplices cuyo interior se corresponde a puntos interiores y los 1-símplices que se corresponden a componentes del borde de  $M$ .



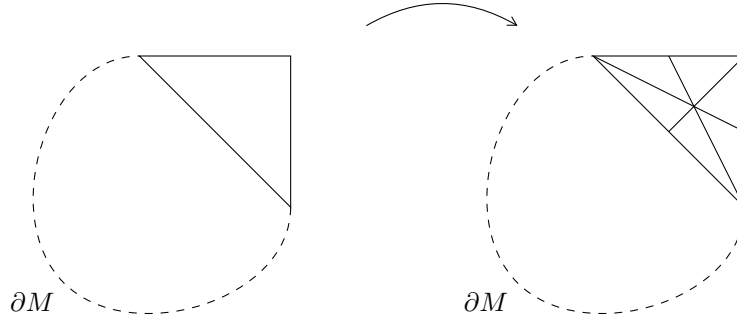


Figura 3.20: Subdivisión baricéntrica de un 2-símplice que tiene dos lados en  $\partial M$ .

Podemos suponer que la triangulación satisface que ningún 1-símplice tiene los dos vértices contenidos en el borde a menos que esté contenido completamente en el borde, y un 2-símplice no tiene más de un lado en el borde. Si no fuese así, podríamos conseguir esta condición subdividiendo cada lado en dos y cada 2-símplice en seis 2-simplices mediante lo que llamamos subdivisión baricéntrica, representada en la Figura 3.20. Subdividiendo más veces si es necesario, llegamos a una triangulación que satisface la siguiente condición más fuerte: Si  $P_i$  y  $P_j$  son dos 2-simplices tal que cada uno tiene un lado contenido en el borde de  $M$ , entonces, o bien  $P_i$  y  $P_j$  son disjuntos, o bien tienen un vértice en común  $v$ , que es un vértice del borde de  $M$ .

Denotemos por  $B_1, \dots, B_k$  las componentes de  $\partial M$ . Si  $P$  es un 2-símplice que encuentra a  $B_i$  en algún punto suyo, entonces  $P$  tiene exactamente dos lados que tienen un vértice en  $B_i$  pero que no están contenidos en  $B_i$ . Similarmente, si  $\sigma$  es un 1-símplice que tiene un vértice en  $B_i$  pero que no yace sobre  $B_i$ , entonces  $\sigma$  es un lado de dos 2-simplices que encuentran a  $B_i$ . Podemos por tanto ordenar los 2-simplices que encuentran  $B_i$  y los 1-simplices que son lados suyos pero que no yacen sobre  $B_i$  de la siguiente manera:

$$P_1, e_1, P_2, e_2, \dots, P_n, e_n, P_{n+1} = P_1$$

donde cada  $e_j$  es un lado de  $P_j$  y  $P_{j+1}$ , y donde cada 2-símplice  $P_k$  tiene por tanto como lados a  $e_{k-1}$  y  $e_k$ . ((Habría que demostrar que es única?)) Para cada componente  $B_i$  podemos escribir de esa forma un ciclo de 2-simplices y lados, que es único. Para cada componente del borde  $B_i$ , la unión de los 2-simplices de su ciclo asociado  $\mathcal{P}_i = \bigcup_j P_j$  es homeomorfa a una región poligonal con una perforación. La Figura 3.21 muestra un ejemplo cuando  $n = \text{????}$ . Sean  $P'_1, \dots, P'_l$  los 2-simplices de la triangulación de  $M$  que no pertenecen a ninguna de las  $\mathcal{P}_i$ , y llamamos

$$\mathcal{P} = \left( \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}_i \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l P'_j \right).$$

Ahora sólo falta aplicar sobre  $\mathcal{P}$  el resto de la demostración de la Proposición 3.3.1. □

**Ejemplo 3.4.4.** Veamos las representaciones estándar de las superficies fundamentales perforadas. Para ello, hacemos un corte  $c_i$  desde un mismo vértice a cada perforación asociada a la componente  $B_i$ , de forma que estos no se solapen con las perforaciones. En la Figura 3.22 podemos ver un ejemplo de la representación estándar de la suma conexa de dos toros con dos perforaciones.

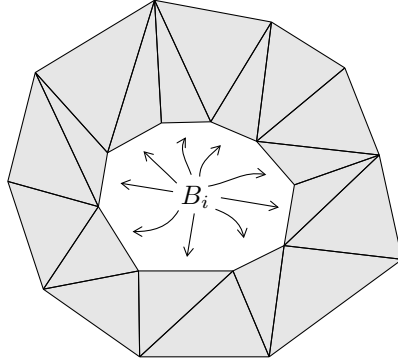


Figura 3.21: Triangulación cerca de una componente del borde de  $M$ .

(a) *Esfera con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de  $n$  toros con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de  $n$  planos proyectivos con  $k$  perforaciones.*

$$\langle a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k, B_1, \dots, B_k \mid a_1a_1 \dots a_na_n c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1} \rangle$$

**Teorema 3.4.5** (Clasificación de superficies con borde compactas). Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies con borde compactas tales que  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$  tienen el mismo número de componentes. Entonces  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas si y solo si las superficies  $M_1^*$  y  $M_2^*$  son homeomorfas.

*Demostración.* Probaremos el teorema demostrando que  $M_1$  y  $M_2$  son homeomorfas a una misma representación estándar de las del ejemplo anterior. Sea  $M$  una superficie con borde compacta, y sea una representación suya como la de la Proposición 3.4.3. El teorema se prueba aplicando los siete pasos de la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies Compactas a esta representación poligonal, teniendo en cuenta que las operaciones de cortar y pegar que aparecen sucesivamente se hagan evitando las perforaciones. Así podemos asegurar que durante el proceso el número de perforaciones no cambia. Como resultado, obtenemos una de las tres representaciones estándar de las superficies sin borde, con  $k$  perforaciones en su interior. Para completar la prueba, hacemos los cortes  $c_1, \dots, c_k$  desde el vértice inicial de la representación poligonal a cada una de las perforaciones  $B_1, \dots, B_k$ , de forma inductiva y sin que se solapen, obteniendo uno de los polígonos estándar del ejemplo anterior.  $\square$

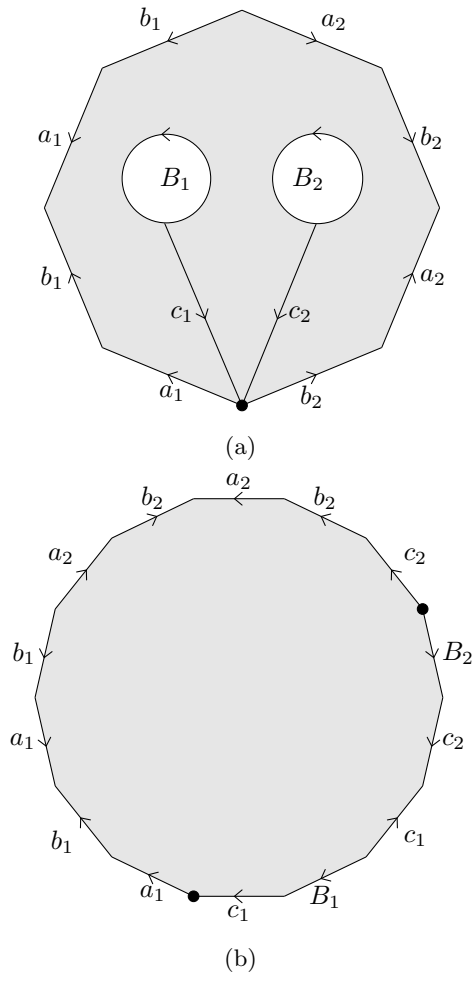


Figura 3.22: La superficie  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  con dos perforaciones.

## Capítulo 4

# La prueba ZIP de Conway

### 4.1. Cremalleras

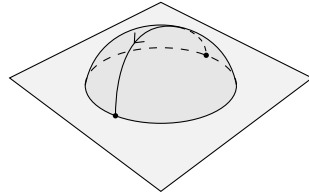
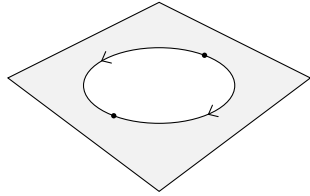
Conway utiliza las cremalleras (*zips* en inglés) para describir cómo actúan las identificaciones topológicas. Cada cremallera actúa sobre una o dos perforaciones de una superficie. Están formadas por dos *zips* (dos partes dentadas) fijadas la/s perforación/es y un *zipper* (el deslizador). Al cerrar el *zipper*, las *zips* se juntan identificándose. Trato de dar una definición rigurosa:

**Definición 4.1.1.** Sea  $S$  una superficie con borde compacta. Una **cremallera** es una identificación entre dos subconjuntos cerrados del borde de  $S$ . A este par lo llamamos **par-*zip***.

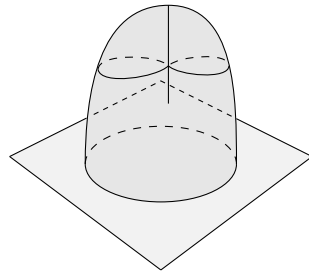
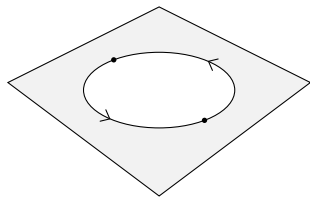
En la *prueba ZIP*, Conway nos explica gráficamente las posibles formas de unir cremalleras.

**Definición 4.1.2.** Sea  $S$  una superficie. Definimos cuatro formas elementales de identificar pares-*zip* en perforaciones de  $S$  perforada:

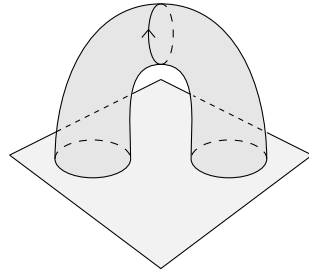
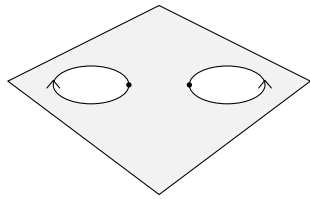
1. **Cap**: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con orientaciones opuestas (Figura 4.1a).
2. **Crosscap**: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con la misma orientación (Figura 4.1b).
3. **Handle**: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de  $S$  con orientaciones opuestas (Figura 4.1c).
4. **Crosshandle**: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de  $S$  con la misma orientación (Figura 4.1d).



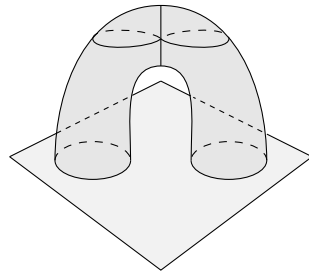
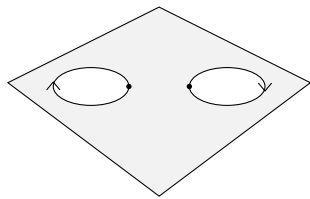
(a) Construcción del *cap*.



(b) Construcción del *crosscap*.



(c) Construcción del *handle*.



(d) Construcción del *crosshandle*.

Figura 4.1: Construcciones elementales con cremalleras.

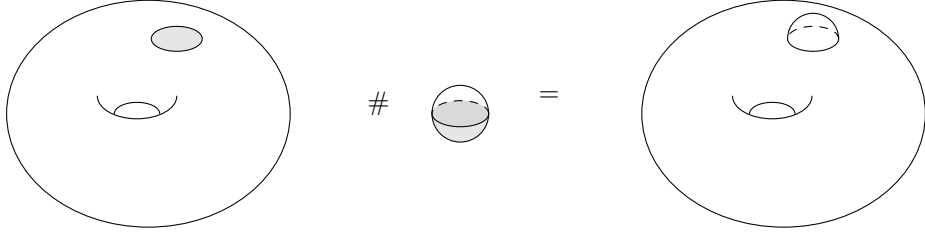


Figura 4.2: Suma conexas de un toro y una esfera.

**Proposición 4.1.3.** Sean  $M, M'$  dos superficies conexas (con o sin borde) y sean  $P = \langle S \mid W \rangle$  y  $P' = \langle S' \mid W' \rangle$  sus respectivas representaciones poligonales de una sola cara. Se tiene entonces:

- (i) La suma conexas de una esfera y  $S$  es homeomorfa a  $S$ .
- (ii) Sea  $|\mathcal{P}|$  la realización geométrica de  $P$ . Sea  $\partial B$  una perforación sobre  $\mathbb{S}^2$ , y sea  $\phi$  un homeomorfismo entre los lados de  $|\mathcal{P}|$  y  $\partial B$ . Si identificamos ahora los pares de segmentos sobre  $\partial B$  de la imagen de  $\phi$ , obtenemos la misma superficie  $S$ .
- (iii) Con una construcción análoga a la del apartado anterior, si hacemos una perforación sobre una superficie  $S'$  con el borde con etiquetas asociadas a una representación poligonal de  $S$ , al identificarlas obtenemos la suma conexas  $S \# S'$ .

*Demostración.* Sea la suma conexas de  $\mathbb{S}^2$  y  $M$ , cuya representación poligonal viene dada por  $\langle a, S \mid aa^{-1}W \rangle$ . Plegando por  $a$  se obtiene (i).

Para demostrar (ii), sea  $\langle a, c, S \mid aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$  la representación poligonal de la esfera con una perforación asociada a  $M$ . Si plegamos por  $a$ , rotamos, y volvemos a plegar por  $c$  obtenemos la palabra  $\langle S \mid W \rangle$  que es la representación poligonal de  $M$ .

Finalmente para (iii), sea  $\langle S, S', B, c \mid W'cWc^{-1} \rangle$ , que es la representación de  $M'$  con una perforación asociada a  $M$ . Desplegando por  $a$  se tiene

$$\langle S, S', a, B, c \mid W'aa^{-1}cWc^{-1} \rangle$$

que es la suma conexas de  $M'$  y  $\mathbb{S}^2$  con una perforación asociada a  $M$ . Por (ii), esto es equivalente a la suma conexas de  $M'$  y  $M$ .  $\square$

**Proposición 4.1.4.** (a) La esfera con un handle es homeomorfa al toro  $\mathbb{T}^2$ .

(b) La esfera con un crosshandle es homeomorfa a la botella de Klein  $K$ .

*Demostración.* Sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al handle (ver ??)

$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_1 \rangle.$$

Doblamos por  $a$  y nos queda

$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}z^{-1}c_2 \rangle$$

y podemos finalmente reetiquetar  $e = c_2c_1^{-1}$  para obtener la representación de  $\mathbb{T}^2$

$$\langle e, z \mid eze^{-1}z^{-1} \rangle$$

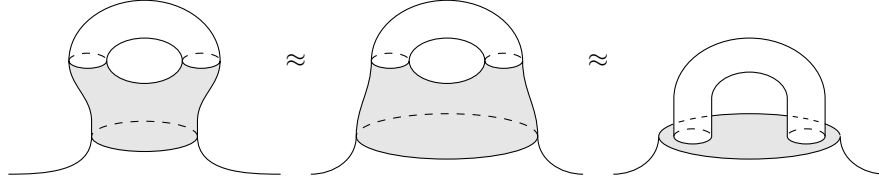


Figura 4.3: Suma conexa de una superficie y un toro visto como pegar un *asa*.

Similarmente, para demostrar (b), sea la representación de la esfera con un par-zip asociado al crosshandle (ver ??)

$$\langle a, c_1, c_2, z \mid aa^{-1}c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_1 \rangle.$$

Doblamos por  $a$  y nos queda

$$\langle c_1, c_2, z \mid c_1^{-1}zc_1c_2^{-1}zc_2 \rangle$$

y reetiquetando  $e = c_2c_1^{-1}$ , obtenemos finalmente la representación de la botella de Klein

$$\langle e, z \mid eze^{-1}z \rangle$$

□

**Corolario 4.1.5.** Sea  $S$  una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

- a)  $S$  con un cap y  $S$ .
- b)  $S$  con un crosscap y  $S \# \mathbb{P}^2$ .
- c)  $S$  con un handle y  $S \# \mathbb{T}^2$ .
- d)  $S$  con un crosshandle y  $S \# K$  (siendo  $K$  la botella de Klein).

## 4.2. Teorema de Clasificación

**Definición 4.2.1.** Una superficie con borde se dice ordinaria si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

**Lema 4.2.2.** Sea  $S$  una superficie con borde con un par-zip tal que cada cremallera está en una componente conexa de su borde. Entonces, si  $S$  es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

*Demostración.* Consideramos el caso en que las dos cremalleras ocupan cada una una perforación en su totalidad. Entonces al identificarlas se tiene un *handle* (Figura 4.1c) o un *crosshandle* (Figura 4.1d), dependiendo de sus respectivas orientaciones. Si las dos perforaciones pertenecen a componentes conexas de  $S$  distintas, entonces identificando obtenemos la suma conexa de las dos componentes. Consideramos ahora el caso en el que las dos cremalleras yacen sobre la misma perforación y la cubren totalmente. Identificándolas nos da o bien un *cap* (Figura 4.1a) o bien un *crosscap* (Figura 4.1b), dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Finalmente, consideramos los varios casos en que las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad. Para empezar, supongamos que la superficie ordinaria de la que partimos es una esfera. Tenemos varios casos:

- (1) *Una perforación con un par-*zip* y dos componentes conexas distintas del borde.* Tenemos dos posibilidades dependiendo de la orientación de las cremalleras. En la primera

$$\begin{aligned} \langle a, z, B_1, B_2, c \mid aa^{-1}c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle \\ \approx \langle z, B_1, B_2, c \mid c^{-1}zB_2z^{-1}B_1c \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle z, B_1, B_2 \mid zB_2z^{-1}B_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } c) \end{aligned}$$

que es una representación del cilindro, es decir, una esfera con dos perforaciones, y por tanto una superficie ordinaria. Cambiando la aparición de  $z^{-1}$  por la de  $z$ , obtenemos mediante un proceso análogo al anterior la representación

$$\langle z, B_1, B_2 \mid zB_2zB_1 \rangle$$

que es la representación de un crosscap con dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (2) *Una perforación con un par-*zip* y una componente conexa del borde.* Como antes, dependiendo de la orientación podemos partir de

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c \mid aa^{-1}c^{-1}zBz^{-1}c \rangle \\ \approx \langle z, B, c \mid c^{-1}zBz^{-1}c \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle z, B \mid zBz^{-1} \rangle & \quad (\text{doblar por } c) \end{aligned}$$

que es una representación de una esfera perforada. Cambiando la aparición de  $z^{-1}$  por  $z$ , llegamos a la representación

$$\langle z, B, \mid zBz \rangle$$

que es una representación de  $\mathbb{P}^2$  perforado, es decir, un crosscap con una perforación, y por lo tanto una superficie ordinaria.

- (3) *Dos perforaciones con un par-*zip* y dos componentes conexas distintas del borde.* Por un lado

$$\begin{aligned} \langle a, z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}zB_2c_2c_1z^{-1}B_1c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B_1, B_2, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}B_2zc_2c_1^{-1}z^{-1}B_1c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2zze^{-1}z^{-1}B_1 \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$

que es la representación de un toro con dos perforaciones. De la misma forma, cambiando la orientación de la aparición de  $z^{-1}$  llegamos a

$$\langle e, z, B_1, B_2 \mid eB_2ze^{-1}zB_1 \rangle$$

que es la botella de Klein con dos perforaciones, lo que es lo mismo, una esfera con crosshandle y dos perforaciones, es decir, una superficie ordinaria.

- (4) *Dos perforaciones con un par-*zip* y una componente conexa distinta del borde.* Empezando con la representación

$$\begin{aligned} \langle a, z, B, c_1, c_2 \mid aa^{-1}c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle \\ \approx \langle z, B, c_1, c_2 \mid c_2^{-1}Bzc_2c_1^{-1}z^{-1}c_1 \rangle & \quad (\text{doblar por } a) \\ \approx \langle e, z, B \mid eBze^{-1}z^{-1} \rangle & \quad (\text{rotar y consolidar } e = c_1c_2^{-1}) \end{aligned}$$



que es una representación de  $\mathbb{T}^2$  con una perforación, o lo que es lo mismo, una esfera con un handle y una perforación, es decir, una superficie ordinaria. De la misma forma, cambiando  $z^{-1}$  por  $z$  obtenemos

$$\langle e, z, B \mid eBze^{-1}z \rangle$$

que es la representación de la botella de Klein con una perforación, es decir, una esfera con un crosshandle y una perforación, y por tanto una superficie ordinaria.

Por tanto, aplicando la demostración de la Proposición 4.1.3 (iii), demostramos los cuatro puntos anteriores para cremalleras sobre superficies arbitrarias, por lo que queda entonces demostrada la proposición.  $\square$

**Teorema 4.2.3** (Teorema de clasificación, versión preeliminar). Toda superficie compacta es ordinaria.

*Demostración.* Sea  $S$  una superficie compacta. Sabemos, por el Teorema de Radó, que  $S$  está triangulada por un poliedro  $|K|$  asociado a un complejo simplicial  $K$  tal que cada 1-símplice que contiene puntos interiores de  $S$  es una cara de exáctamente dos 2-símplices, y cada 1-símplice que contiene puntos del borde de  $S$  es cara de exáctamente un 2-símplice. Si sobre los primeros 1-símplices ponemos una cremallera distinta, en los 2-símplices habrá algunos 1-símplices que se identifiquen. Llamemos  $K_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$ , donde cada  $\sigma_i$  es un 2-símplice para todo  $i = 1 \dots, j$ .  $K_2$  es una superficie ordinaria, pues cada  $\sigma_i$  es homeomorfo a una esfera perforada. Si identificamos ahora las cremalleras una a una, por el Lema 4.2.2 y por inducción, la superficie resultante es ordinaria.  $\square$

**Lema 4.2.4.** Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

*Demostración.* Por la Proposición 4.1.4, la esfera con un crosshandle es homeomorfa a una botella de Klein. Por la Lema 3.3.2, la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , o lo que es lo mismo, dos crosscaps.  $\square$

**Lema 4.2.5.** Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de crosscaps.

*Demostración.* Sea una esfera con un par-zip asociado a un handle y otro asociado a un crosscap. Sabemos que, identificando las cremalleras obtenemos un espacio homeomorfo a la suma conexa  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ . Pero por la Lema 3.3.3, este espacio es homeomorfo a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ , que a su vez, es homeomorfo al plano proyectivo con un crosshandle, que a su vez es homeomorfo a una esfera con un crosshandle y un crosscap.  $\square$

**Teorema 4.2.6** (Clasificación de superficies). Toda superficie compacta es homeomorfa o bien a una esfera con handles o bien a una esfera con crosscaps.

*Demostración.* Por la versión preeliminar del teorema de clasificación, una superficie compacta es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles y crosscaps.

- *Caso 1:* Al menos hay un crosshandle en nuestra superficie. Por el Lema 4.2.4, cada crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps, por lo que la superficie es homeomorfa a una esfera con solamente crosscaps y handles. Como al menos hay un crosscap, cada handle es homeomorfo a un crosshandle (Lema 4.2.5), que es a su vez homeomorfo a dos crosscaps (Lema 4.2.4 de nuevo), quedando una esfera sólo con crosscaps.
- *Caso 2:* No hay ni crosshandles ni crosscap en la superficie. La superficie es entonces homeomorfa a una esfera sólo con handles.

$\square$

## Capítulo 5

# Teorema de Clasificación, segunda parte

### 5.1. Teorema de Clasificación

**Teorema 5.1.1** (Teorema de Clasificación, segunda parte). Toda superficie compacta es homeomorfa a exactamente una de las superficies estándar.

## Apéndice A

# Algunos teoremas de topología importantes

### A.1. Cocientes topológicos

Empecemos recordando las nociones básicas de cocientes topológicos.

**Definición A.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un conjunto. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva. Definimos la **topología cociente** sobre  $Y$  inducida por  $f$  de la siguiente manera:  $V \subseteq Y$  es abierto si y solo si  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

**Definición A.1.2.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos, decimos que  $q : X \rightarrow Y$  es una **aplicación cociente** o **identificación** si es sobreyectiva e  $Y$  tiene la topología cociente inducida por  $q$ .

Se deduce de la definición que una aplicación cociente es siempre continua.

Sea ahora  $X$  un espacio topológico y  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ . Si  $X/\sim$  es el conjunto de las clases de equivalencia, sea  $q : X \rightarrow X/\sim$  la aplicación que lleva cada  $x \in X$  a su clase de equivalencia. Entonces decimos que  $X/\sim$  junto con la topología cociente inducida por  $q$  es un **espacio cociente** de  $X$  por la relación de equivalencia  $\sim$ .

Estudiemos ahora condiciones bajo las cuales una aplicación entre dos espacios topológicos es una aplicación cociente.

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $q : X \rightarrow Y$  una aplicación. Si  $y \in Y$  decimos que un subconjunto del tipo  $q^{-1}(y) \subseteq X$  es una **fibra** de  $q$ . Un conjunto  $U \subseteq X$  tal que existe un  $V \subseteq Y$  con  $U = q^{-1}(V)$  decimos que es **saturado con respecto de  $q$** .

**Proposición A.1.3.** Una aplicación  $q : X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva es una aplicación cociente si y solo si lleva abiertos saturados a abiertos saturados.

**Proposición A.1.4** (Propiedades de las aplicaciones cociente). Se tienen las siguientes propiedades:

- La composición de aplicaciones cociente es una aplicación cociente.
- Una aplicación cociente sobreyectiva es un homeomorfismo.
- Si  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación cociente y  $U \subseteq X$  es un abierto (o cerrado) saturado, entonces la restricción  $q|_U : U \rightarrow q(U)$  es una aplicación cociente.

**Proposición A.1.5.** Si  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, sobreyectiva y abierta o cerrada, entonces es una aplicación cociente.

**Teorema A.1.6** (Lema de la aplicación cerrada). Sea  $F$  una aplicación continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico Hausdorff. Entonces:

- (a)  $F$  es una aplicación cerrada.
- (b) Si  $F$  es sobreyectiva, entonces es una aplicación cociente.
- (c) Si  $F$  es inyectiva, entonces es una inmersión topológica.
- (d) Si  $F$  es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

**Teorema A.1.7** (Unicidad de espacios cociente). Supongamos  $q_1 : X \rightarrow Y_1$  y  $q_2 : X \rightarrow Y_2$  son aplicaciones cociente que hacen las mismas identificaciones, es decir, tales que  $q_1(x) = q_1(x')$  si y solo si  $q_2(x) = q_2(x')$ . Entonces existe un único homeomorfismo  $\phi : Y_1 \rightarrow Y_2$  tal que  $\phi \circ q_1 = q_2$ .

**Proposición A.1.8** (Pasando al cociente). Supongamos que  $q : X \rightarrow Y$  es una aplicación cociente,  $Z$  es un espacio topológico y  $f : X \rightarrow Z$  es una aplicación continua tal que si  $q(x) = q(x')$ , entonces  $f(x) = f(x')$ . Entonces existe una única aplicación continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow Z$  tal que  $f = \tilde{f} \circ q$ .

**Teorema A.1.9** (Lema de pegado). Sean  $A, B$  dos subconjuntos abiertos (o cerrados) de un espacio topológico  $X$ , tal que  $X = A \cup B$ , y sea  $Y$  otro espacio topológico. Si la restricción de  $f : X \rightarrow Y$  a  $A$  y  $B$  es continua, entonces  $f$  es continua.

## Apéndice B

# CW-complejos

Utilizo la definición inductiva de CW-complejo dada por Hatcher [6] y algunas propiedades expuestas por Lee [1].

**Definición B.0.1.** Una ***n*-celda abierta** es un espacio topológico homeomorfo a la bola abierta unidad  $\mathbb{B}^n$ , y una ***n*-celda cerrada** es un espacio homeomorfo a  $\overline{\mathbb{B}^n}$ .

Toda bola abierta o cerrada en  $\mathbb{R}^n$  es claramente una *n*-celda. El siguiente teorema nos proporciona más ejemplos:

**Proposición B.0.2.** Si  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto y convexo con interior no vacío, entonces  $D$  es una *n*-celda cerrada y su interior es una *n*-celda abierta. De hecho, dado  $p \in \overset{\circ}{D}$ , entonces existe un homeomorfismo  $F : \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow D$  que envía 0 a  $p$ ,  $\overline{\mathbb{B}^n}$  a  $\overline{D}$ , y  $\mathbb{S}^{n-1}$  a  $\partial D$ .

*Demostración.* Sea  $p \in D$  un punto de su interior. Si reemplazamos  $D$  por su imagen mediante la traslación  $x \mapsto x - p$ , que es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo, podemos asumir que  $p = 0 \in \overset{\circ}{D}$ . Entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que la bola  $B_\varepsilon(0)$  está contenida en  $D$ . Usando la dilatación  $x \mapsto x/\varepsilon$ , podemos asumir que  $\mathbb{B}^n = B_1(0) \subseteq D$ . La clave de la demostración es la siguiente: *cada semirecta cerrada empezando en el origen interseca  $\partial D$  en exactamente un punto*. Sea  $R$  una semirecta así. Dado que  $D$  es compacto, su intersección con  $R$  es compacta. Por tanto existe un punto  $x_0$  en su intersección tal que en él su distancia al origen asume el máximo. Es claro que pertenece a la frontera de  $D$ . Para ver que el punto es único, veamos que el segmento que une 0 y  $x_0$  está formado enteramente por puntos interiores de  $D$  excepto por el  $x_0$  mismo. Cualquier punto en este segmento distinto de  $x_0$  se puede escribir de la forma  $\lambda x_0$  para  $0 \leq \lambda < 1$ . Supongamos  $z \in B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$ , y sea  $y = (z - \lambda x_0)/(1 - \lambda)$ . Como  $|z - \lambda x_0| < |1 - \lambda|$  se tiene que  $|y| < 1$ , y por tanto  $y \in B_1(0) \subseteq D$  (ver Figura B.1). Como  $y$  y  $x_0$  están en  $D$  y  $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y$ , se sigue de la convexidad que  $z \in D$ . Por tanto la bola abierta  $B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$  está contenida en  $D$ , lo que implica que  $\lambda x_0$  es un punto interior. Definimos ahora la aplicación  $f : \partial D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$f(x)$  es el punto donde el segmento desde el origen hasta  $x$  interseca la esfera unidad. Como  $f$  es la restricción de una función continua, es continua, y por el párrafo anterior es biyectiva. Dado que  $\partial D$  es compacta,  $f$  es un homeomorfismo por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.1.6).

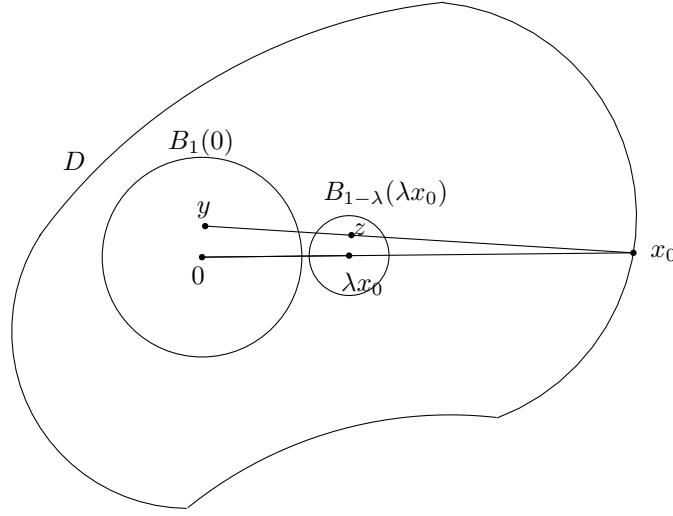


Figura B.1: Demostración de que sólo hay un punto de la frontera en la semirecta.

Finalmente definimos  $F : \mathbb{S}^n \rightarrow D$  por

$$F(x) = \begin{cases} |x|f^{-1}\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$F$  es continua fuera del origen por serlo  $f^{-1}$ , y en el origen porque por ser  $f^{-1}$  acotada  $F(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Geométricamente,  $F$  manda cada segmento radial que conecta 0 con un punto de  $\mathbb{S}^{n-1}$  al segmento radial desde 0 hasta el punto  $f^{-1}(w) \in \partial D$ . Por convexidad,  $F$  toma valores en  $D$ . La aplicación  $F$  es inyectiva, pues puntos de distintas semirectas van a parar a distintas semirectas, y cada segmento radial va linealmente a su imagen. Es sobreyectiva pues cada punto  $y \in D$  está en una semirecta empezando en 0. Por el teorema de la aplicación cerrada,  $F$  es un homeomorfismo.  $\square$

Esto nos muestra que un intervalo cerrado es una 1-celda cerrada, toda región poligonal es una 2-celda cerrada, y un tetraedro sólido es una 3-celda cerrada. Por convención, los conjuntos unitarios son 0-celdas abiertas y cerradas a la vez.

**Observación B.0.3.** Sea  $D$  una  $n$ -celda. Entonces  $D$  es una variedad con borde por serlo  $\mathbb{B}^n$ . Denotamos por  $\partial D$  e  $\text{Int } D$  respectivamente a las imágenes de  $\mathbb{S}^{n-1}$  y  $\mathbb{B}^n$  por un homeomorfismo  $F : \mathbb{B}^n \rightarrow D$ , tal que  $\partial D$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $\text{Int } D$  es una  $n$ -celda abierta.

**Definición B.0.4.** Un **CW-complejo** es un espacio topológico  $X$  construido de la siguiente manera:

- (1) Empezamos con un espacio discreto  $X^0$ , cuyos puntos consideramos 0-celdas.
- (2) Inductivamente, formamos el  $n$ -**esqueleto**  $X^n$  a partir de  $X^{n-1}$  pegando una colección (que puede ser vacía) de  $n$ -celdas.
- (3) Definimos  $X = \bigcup_n X^n$ , y definimos la siguiente topología, que es coherente con la familia  $\{X^n\}$ : un conjunto  $A \subset X$  es abierto (o cerrado) si y solo si  $A \cap X^n$  es abierto (o cerrado) en  $X^n$ , para todo  $n$ .

**Definición B.0.5.** Si  $X = X^n$  para algún  $n$ , entonces se dice que  $X$  es de dimensión finita, y decimos que la dimensión de  $X$  es  $n$ .

**Proposición B.0.6.** Sea  $X$  un CW-complejo con un conjunto numerable de celdas. Si  $X$  es localmente homeomorfo a un espacio euclídeo, entonces es una variedad.

**Proposición B.0.7.** Si  $M$  es una  $n$ -variedad no vacía y un CW-complejo, entonces  $n$  es también la dimensión de  $M$  como CW-complejo.

# Bibliografía

- [1] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate text in mathematics, Springer - Verlag New York, 2011.
- [2] V. Muñoz, J. J. Madrigal. *Topología Algebraica*. Sanz y Torres, 2015.
- [3] A. Hatcher. *The Kirby Torus Trick for Surfaces*, 2013.  
<http://front.math.ucdavis.edu/1312.3518>
- [4] T. Radó. *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, *Acta Sci. Math.* Szeged. 2 1925, 101–121.
- [5] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [6] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.  
<http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [7] M. Dehn, P. Heegard. *Analysis situs*, *Enzyklopädie der Math. Wiss.* 1907, 153-220.
- [8] H. Seifert, W. Threlfall. *A Textbook of Topology*, 1era edición. Academic, New York. 1980.
- [9] W. S. Massey. *Algebraic Topology, an introduction*, Springer - Verlag. 1970.
- [10] N. J. Wildberger. *Algebraic Topology: A Beginner's Course*. Lecture 19.  
<http://www.wildeg.com/youtube-algebraic-topology.html>