UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Oliet

Dirigido por:
Manuel Alonso Morón

Junio de 2020

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Definiciones preeliminares

En este capítulo doy las definiciones y resultados preeliminares para la representación y clasificación de superficies. Me basaré principalmente en los libros de J. M. Lee [1] y V. Muñoz - J. J. Madrigal [2].

1.1. Variedades

Los espacios topológicos de los que nos vamos a ocupar en el siguiente trabajo son las variedades, y en concreto las superficies. Definámoslas.

Definición 1.1.1. Una ***variedad topológica*** (de ahora en adelante *variedad*) es un espacio topológico Hausdorff, II AN y localmente homeomorfo a R^n, para algún $n \geq 0$.

Observación 1.1.2. Como la propiedad "ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$" es local, toda propiedad local de $\mathbb{R}^n$ se traslada a una variedad. Así, las variedades son localmente compactas, I AN, localmente conexas, localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas.

El *teorema de invarianza del dominio* dice que si $W \subset \mathbb{R}^n$ y $W' \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos y existe $\phi : W \to W'$ homeomorfismo, entonces $n = m$. Esto implica que, dado un punto $p \in X$ de una variedad, hay un único $n = n(p)$ tal que un entorno U^p es homeomorfo a un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$. Llamamos $n(p)$ la dimensión en p. Claramente, para todo punto $q \in U$ podemos tomar U como entorno de q, y por tanto $n(q) = n(p)$. Luego en toda la componente conexa de p, el n que aparece es el mismo, y lo llamaremos dimensión de dicha componente conexa. Nótese que si escribimos $X = \sqcup X_i$, con X_i componentes conexas de X, todas las X_i son variedades. Si todas las X_i tienen la misma dimensión n, entonces escribimos $n = dimX$, y decimos que X es una n-variedad.

Ejemplo 1.1.3.

- Las 0-variedades son espacios discretos numerables. La única 0-variedad conexa es un punto.
- Existen dos 1-variedades conexas salvo homeomorfismo: la recta $\mathbb{R}$ y el círculo $\mathbb{S}^1$.

Definición 1.1.4. Una ***superficie*** es una 2-variedad.

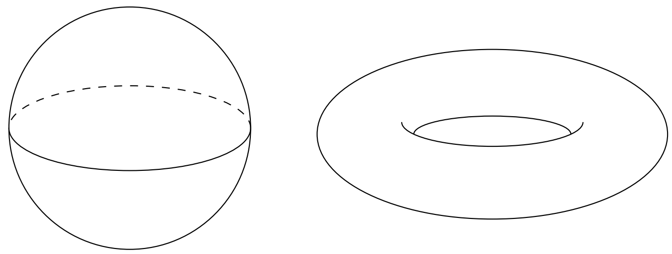


Figura 1.1: $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$

Ejemplo 1.1.5.

- La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- El toro $\mathbb{T}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$.

Para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Trataremos de dar una forma de representarlas como polígonos, y veremos que toda superficie compacta se puede representar en el plano como el cociente de un polígono por una relación de equivalencia que identifica sus lados dos a dos. Empecemos viendo tres ejemplos elementales: la esfera $\mathbb{S}^2$, el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y el toro $\mathbb{T}^2$. Como veremos, estas superficies son fundamentales pues toda superficie compacta se puede construir a partir de ellas. Para ello necesitaremos antes la siguiente proposición:

Proposición 1.1.6. Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto y convexo con interior no vacío, entonces D es homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}}^n$. De hecho, dado $p \in \mathring{D}$, entonces existe un homeomorfismo $F : \overline{\mathbb{B}}^n \to D$ que envía 0 a p, $\overline{\mathbb{B}}^n$ a $\mathring{D}$, y $\mathbb{S}^{n-1}$ a ∂D.

Demostración. Sea $p \in D$ un punto de su interior. Si reemplazamos D por su imagen mediante la traslación $x \mapsto x - p$, que es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, podemos asumir que $p = 0 \in \mathring{D}$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B_\varepsilon(0)$ está contenida en D. Usando la dilatación $x \mapsto x/\varepsilon$, podemos asumir que $\mathbb{B}^n = B_1(0) \subseteq D$. La clave de la demostración es la siguiente: *cada semirecta cerrada empezando en el origen interseca ∂D en exactamente un punto.* Sea R una semirecta así. Dado que D es compacto, su intersección con R es compacta. Por tanto existe un punto x_0 en su intersección tal que en él su distancia al origen asume el máximo. Es claro que pertenece a la frontera de D. Para ver que el punto es único, veamos que el segmento que une 0 y x_0 está formado enteramente por puntos interiores de D excepto por el x_0 mismo. Cualquier punto en este segmento distinto de x_o se puede escribir de la forma λx_0 para $0 \leq \lambda < 1$. Supongamos $z \in B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$, y sea $y = (z - \lambda x_0)/(1-\lambda)$. Como $|z - \lambda x_0| < |1-\lambda|$ se tiene que $|y| < 1$, y por tanto $y \in B_1(0) \subseteq D$ (ver Figura 1.2). Como y y x_0 están en D y $z = \lambda x_0 + (1-\lambda)y$, se sigue de la convexidad que $\in D$. Por tanto la bola abierta $B_{1-\lambda}(\lambda x_0)$ está contenida en D, lo que implica que λx_0 es un punto interior.

Definimos ahora la aplicación $f : \partial D \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$f(x)$ es el punto donde el segmento desde el origen hasta x interseca la esfera unidad. Como f es la restricción de una función continua, es continua, y por el parágrafo anterior es biyectiva. Dado que ∂D es compacta, f es un homeomorfismo por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.0.1).

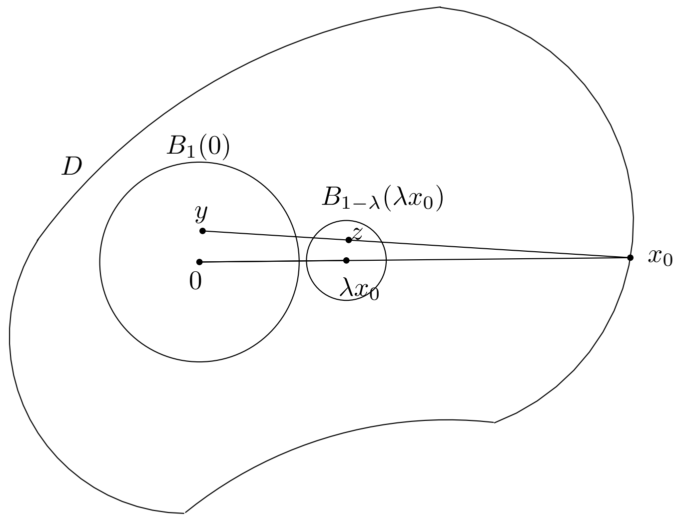


Figura 1.2: Demostración de que sólo hay un punto de la frontera en la semirecta.

Finalmente definimos $F : \overline{\mathbb{S}}^n \to D$ por

$$F(x) = \begin{cases} |x| f^{-1}\left(\dfrac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

F es continua fuera del origen por serlo f^{-1}, y en el origen porque por ser f^{-1} acotada $F(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Geometricamente, F manda cada segmento radial que conecta 0 con un punto de $\mathbb{S}^{n-1}$ al segmento radial desde 0 hasta el punto $f^{-1}(w) \in \partial D$. Por convexidad, F toma valores en D. La aplicación F es inyectiva, pues puntos de distintas semirectas van a parar a distintas semirectas, y cada segmento radial va linealmente a su imagen. Es sobreyectiva pues cada punto $y \in D$ está en una semirecta empezando en 0. Por el teorema de la aplicación cerrada, F es un homeomorfismo. □

Proposición 1.1.7. La esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a los siguientes espacios cociente:

(a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$, si $(x, y) \in \partial \overline{\mathbb{B}}^2$

(b) El cuadrado $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$ si $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Para ver que cada espacio es homeomorfo a la esfera, daremos una aplicación cociente desde cada espacio a la esfera que haga las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, y entonces apelaremos a la unicidad del espacio cociente. (Teorema A.0.2)

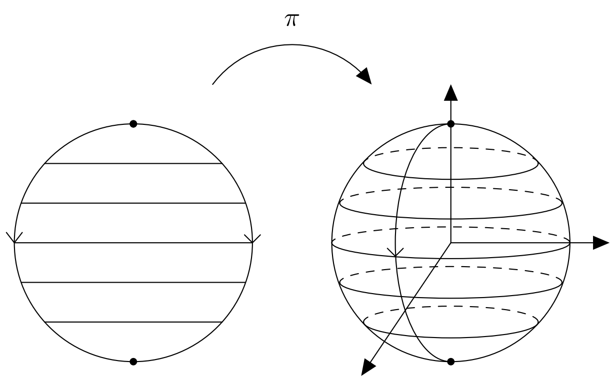


Figura 1.3: La esfera como cociente del disco $\overline{\mathbb{B}}^2$.

Para (a), vamos a definir una aplicación que “envuelve” cada segmento horizontal del disco en un paralelo de la esfera (ver Figura 1.3). Formalmente, esta aplicación $\pi : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2$ vienen dada por

$$\pi(x,y) = \begin{cases} (-\sqrt{1-y^2}\cos\dfrac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}, y), & y \neq \pm 1 \\ \\ (0,0,y), & y = \pm 1 \end{cases}$$

Es claro que π es continua y hace las mismas identificaciones que la relación de equivalencia. Por ser sobreyectiva, es una aplicación cociente (Teorema A.0.1).

Para probar (b), sea $\alpha : S \to \overline{\mathbb{B}}^2$ el homeomorfismo construido en la demostración de Proposición 1.1.6 que manda linealmente cada segmento radial entre el origen y la frontera de S al segmento paralelo entre centro del disco y su frontera. Hagamos ahora $\beta = \pi \circ \alpha : S \to \mathbb{S}^2$, donde π es la aplicación cociente del parágrafo anterior. Tenemos entonces que β identifica (x,y) y $(-x,y)$ cuando $(x,y) \in \partial S$, pero por otro lado es inyectiva, así que hace las mismas identificaciones que la aplicación cociente definida en (b), completando así la demostración (ver Figura 1.4). $\square$

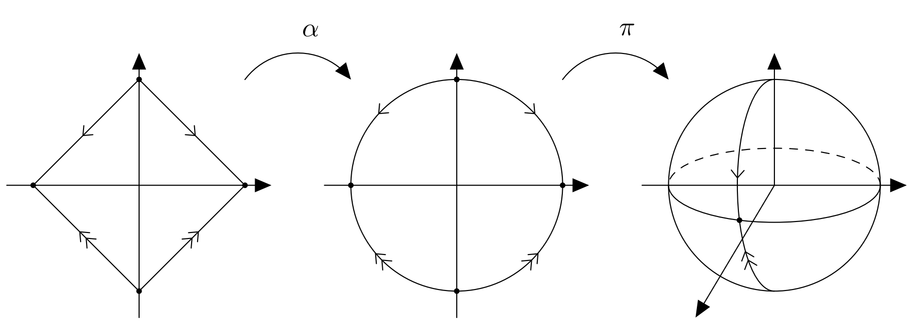


Figura 1.4: La esfera como cociente de un cuadrado.

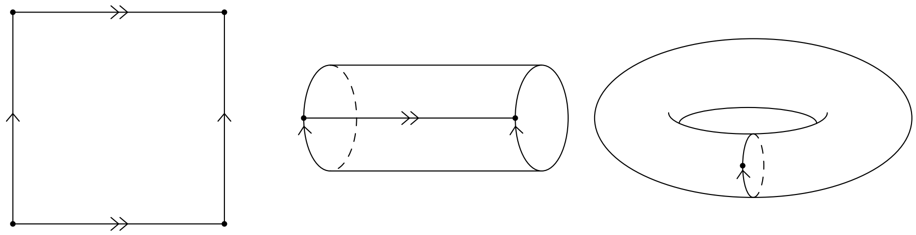


Figura 1.5: El toro como cociente de un cuadrado.

Proposición 1.1.8. El toro $\mathbb{T}^2$ es homeomorfo al espacio cociente resultante de la relación de equivalencia en el cuadrado $I \times I$ que identifica $(x, 0) \sim (x, 1)$ para todo $x \in I$, y $(0, y) \sim (1, y)$ para todo $y \in I$ (Figura 1.5).

Demostración. Definimos la aplicación $q : I \times I \to \mathbb{T}^2$ que manda $q(u, v) = (e^{2\pi iu}, e^{2\pi iv})$. Por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.0.1), es una aplicación cociente. Al hacer las mismas identificaciones que la relación de equivalencia, por la unicidad del espacio cociente (Teorema A.0.2) se obtiene el resultado. $\square$

Proposición 1.1.9. El plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ es homeomorfo a los siguientes espacios cociente:

(a) El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$.

(b) La región cuadrada $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in \partial S$.

Demostración. Sea $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ la aplicación cociente dada por la relación de equivalencia $\sim$ generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{S}^2$, que representa $\mathbb{P}^2$ como el cociente de una esfera. Si $F : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2$ es la aplicación que manda el disco al emisferio superior de la esfera por $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, entonces $p \circ F : \overline{\mathbb{B}}^2 \to \mathbb{S}^2/\sim$ es sobreyectiva (—lo demuestro?) y es así una aplicación cociente por el teorema de la aplicación cerrada (Teorema A.0.1). La aplicación identifica únicamente $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$ con $(-x, -y) \in \partial\overline{\mathbb{B}}^2$, por lo que $\mathbb{P}^2$ es homeomorfo al espacio cociente resultante. Para la parte (b) hacemos como en la demostración de la Proposición 1.1.7 (b). $\square$

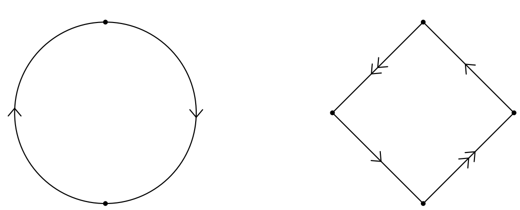


Figura 1.6: Representación de $\mathbb{P}^2$ como un espacio cociente.

En las anteriores proposiciones hemos visto una o varias formas de representar superficies dadas ciertas construcciones geométricas. En estos casos hemos dado aplicaciones y demostraciones concretas para validar nuestros argumentos, pero a medida que aumenta la sofisticación es más útil guiarse visualmente por las figuras construidas. Por ello debemos formalizar un método para construir superficies identificando lados de figuras geométricas. Daremos por sabidas las definiciones básicas de símplices y CW-complejos que dejaremos en el apéndice **??**.

Definición 1.1.10. Un ***polígono*** es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ y está formado por un número finito de segmentos, que llamaremos ***bordes*** y que se intersecan sólo en sus extremos, que llamaremos ***vértices***.

Definición 1.1.11. Una ***región poligonal*** es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ cuyo interior es homeomorfo al disco $\mathbb{B}^2$ y cuya frontera es un polígono. A los vértices y lados del polígono de la frontera también los llamamos vértices y lados de la región poligonal.

Veamos pues que identificando bordes de regiones poligonales de par en par obtenemos un espacio cociente que es siempre una superficie:

Proposición 1.1.12. Sean $P_1, \ldots, P_k$ regiones poligonales en el plano, y sea $P = P_1 \amalg \cdots \amalg P_k$, y supongamos dada una relación de equivalencia en P que identifica algunos bordes de los polígonos con otros por homeomorfismos afines. Entonces se tiene:

(a) El espacio cociente resultante es un CW-complejo 2-dimensional cuyo 0-esqueleto es la imagen del conjunto de vértices de P por la aplicación cociente, y cuyo 1-esqueleto es la imagen de la unión de los bordes de las regiones poligonales.

(b) Si la relación de equivalencia identifica cada borde de cada P_i con exactamente otro borde de un P_j (no necesariamente $i \neq j$), entonces el espacio cociente resultante es una superficie compacta.

Demostración. □

Ejemplo 1.1.13. La ***botella de Klein*** es la superficie K obtenida identificando los lados del cuadrado $I \times I$ de acuerdo a $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ para $0 \leq t \leq 1$. Para visualizar K, podemos pensar en pegar los lados izquierdo y derecho creando un cilindro, y luego hacer pasar el extremo superior por la parte inferior del cilindro, para finalmente pegar los dos extremos (ver Figura 1.7).

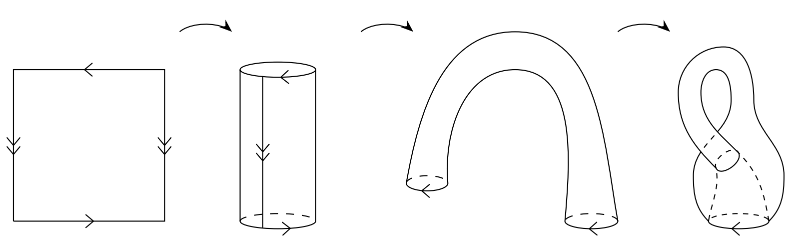


Figura 1.7: Construcción de la botella de Klein.

1.2. Suma conexa de variedades

Sean V_1 y V_2 dos n-variedades conexas. Dados $p_1 \in V_1$ y $p_2 \in V_2$ sean $U_1^{p_1} \subset V_1$, $U_2^{p_2} \subset V_2$ entornos de p_1 y p_2 respectivamente, y sean $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ dos homeomorfismos tales que $\phi_1(p_1) = 0$ y $\phi_2(p_2) = 0$. Si llamamos $B_1 = \phi_1^{-1}(B_1(0)) \subset V_1$ y $B_2 = \phi_2^{-1}(B_1(0)) \subset V_2$, consideremos $V_1^o = V_1 - B_1$, $V_2^o = V_2 - B_2$ y $V_1^o \sqcup V_2^o$ con la topología unión disjunta. Se define la relación de equivalencia $\sim$ en la que si $x_1 \in S_1 = \phi_1^{-1}(\partial B_1(0))$, $x_2 \in S_2 = \phi_2^{-1}(\partial B_1(0))$, entonces $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $\phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)$, y se considera el cociente

$$X = \frac{V_1^o \sqcup V_2^o}{\sim}.$$

Definición 1.2.1. A X así definido se le llama ***suma conexa*** de V_1 y V_2, y se denota por $X = V_1 \# V_2$.

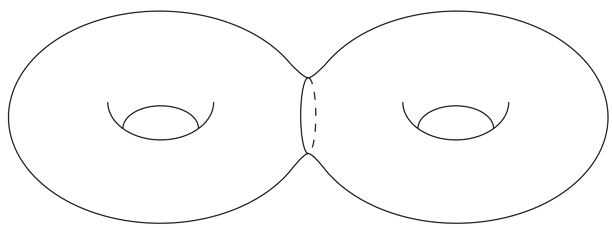


Figura 1.8: Suma conexa de toros.

Proposición 1.2.2. Sean V_1 y V_2 variedades. Entonces $X = V_1 \# V_2$ es una variedad.

Demostración. Denotemos la proyección $\pi : M_1^o \sqcup M_2^o \to X$. Sea $S = \pi(S_1) = \pi(S_2)$. Tenemosdos abiertos $U_j = M_j^o - S_j$, $j = 1, 2$ saturados. Por tanto, $\pi : U_j \to \pi(U_j) = U_j'$ es homeomorfismo. Esto implica que X es localmente $\mathbb{R}^n$ en los puntos de $U_1' \cup U_2'$. Además ahí la topología es Hausdorff y IIAN. Veamos ahora qué ocurre para un punto $p \in S$. Se tiene que $p = \pi(p_1) = \pi(p_2)$, $p_j \in S_j$, $j = 1, 2$, y $\varphi_j(p_j) = x_0 \in \partial B_1(0) \in \mathbb{R}^n$. Tomamos un entorno $V \subset \partial B_1(0)$ de x_0 en $\partial B_1(0)$, con lo que $\hat{V} = \{rx \mid r \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), x \in V\}$ es entorno de x_0 en $\mathbb{R}^n$, y $\hat{V} - B_1(0) = \{rx \mid r \in [1, 1 + \varepsilon), x \in V\}$. Sea $V_j = \varphi_j^{-1}(\hat{V} - B_1(0)) \subset M_j^o$, que es entorno de p_j. Claramente $V_1 \sqcup V_2$ es abierto saturado de $M_1^o \sqcup M_2^o$, luego $\tilde{V} = \pi(V_1 \sqcup V_2)$ es entorno de p en X. Veamos ahora que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea

$$\begin{aligned}
\Phi :& V_1 \sqcup V_2 \to V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \\
& q_1 \in V_1 \mapsto (x, r), r = \|\varphi_1(q_1)\|, x = \varphi_1(q_1)/r, \\
& q_2 \in V_2 \mapsto (x, 2 - r), r = \|\varphi_2(q_2)\|, x = \varphi_2(q_2)/r.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\Phi : V_1 \to V \times [1, 1 + \varepsilon)$ y $\Phi : V_2 \to V \times (1 - \varepsilon, 1]$ son homeomorfismos. Además, $q_1 \sim q_2$ si y sólo si $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$. De este modo, Φ induce una aplicación continua y biyectiva

$$\overline{\Phi} : \tilde{V} \to V \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

$\overline{\Phi}$ es abierta: si tomamos un abierto básico saturado de $V_1 \sqcup V_2$, o bien está totalmente incluido en $V_1 - S_1$ o en $V_2 - S_2$, en cuyo caso su imagen es un abierto de $V \times (1-\varepsilon, 1)$ o $V \times (1, 1+\varepsilon)$, o bien interseca a S_1 y S_2. En ese caso se puede asumir que es un abierto de la forma $W_1 \sqcup W_2$, construido como antes y donde hemos partido de un $W \subset V \subset \partial B_1(0)$. Entonces $\overline{\Phi}(\tilde{W}) = W \times (1-\delta, 1+\delta)$ con $0 < \delta \leq \varepsilon$, $\tilde{W} = \pi(W_1 \sqcup W_2)$. Luego $\overline{\Phi}$ es un homeomorfismo, y $\tilde{V}$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Los abiertos construidos, $\tilde{V} \subset X$, se pueden tomar en cantidad numerable para formar una base de la topología, con lo cual X es IIAN. También, dado un $q \in U'_j$, $j = 1, 2$, y un $p \in S$, se puede tomar un abierto $\tilde{V}$ entorno de p disjunto de un entorno pequeño de q. Y si tomamos $p, p' \in S$ distintos, los abiertos $\tilde{V}$, $\tilde{V}'$ construidos partiendo de V, $V' \subset \partial B_1(0)$ disjuntos, serán disjuntos. Luego X es Hausdorff. $\square$

Observación 1.2.3. Sea S una superficie. Entonces la suma conexa $S \# \mathbb{S}^2$ es homeomorfa a S (Figura 1.9).

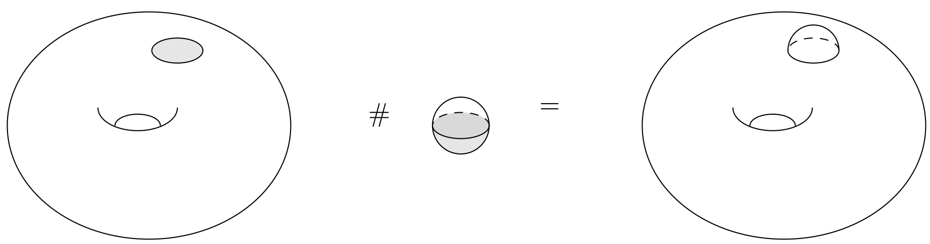


Figura 1.9: Suma conexa de un toro y una esfera.

Observación 1.2.4. Dada una superficie S, la suma conexa $S \# \mathbb{T}^2$ puede visualizarse como el espacio que se obtiene al "pegarle" un *asa* a S. De forma más precisa, sea S_0 que denota a S con dos perforaciones, es decir la superficie que queda al retirar dos discos cerrados disjuntos de M (se dará una construcción más precisa en Definición 4.1.1). Entonces S_0 y $\mathbb{S}^1 \times I$ son ambas superficies con borde, y sus bordes son ambos homeomorfos a la union disjunta de dos circunferencias. Sea $\tilde{S}$ el espacio adjunción (**??**) obtenido pegando S_0 y $\mathbb{S}^1 \times I$ por sus bordes. Este espacio cociente es homeomorfo a $S \# \mathbb{T}^2$. La razón se puede ver en la Figura 1.10, y es que podemos obtener un espacio homeomorfo a $S \# \mathbb{T}^2$ primero quitando un disco abierto de S, luego pegando un disco cerrado con dos discos abiertos quitados (es decir, la parte gris de la figura), y finalmente pegando a la frontera de la construcción el cilindro $\mathbb{S}^2 \times I$. Dado que la primera operación da resultado a un espacio homeomorfo a S con dos discos abiertos quitados, el resultado es el mismo que si quitamos directamente a S dos discos abiertos y entonces pegamos el cilindro a su frontera.

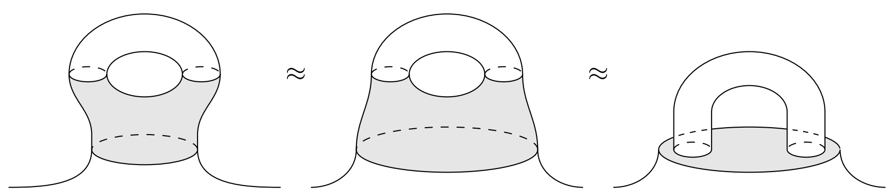


Figura 1.10: Suma conexa de una superficie y un toro visto como pegar un *asa*.

Capítulo 2

Triangulación de superficies

Un hecho fundamental para la prueba del teorema de clasificación es que toda superficie es triangulable. La demostración, atribuída a Radó en 1925 [4], utiliza el *teorema de Schönflies*, cuya prueba es larga y técnica. Utilizaremos el truco de Kirby para superficies dado por Hatcher [3].

2.1. Complejos simpliciales y triangulación

Para poder dar una definición rigurosa de triangulación de variedades necesitamos la noción de *complejos simpliciales*. Estos son construcciones formadas por *símplices*, que son una generalización de los triángulos. En esta primera parte me baso en las definiciones de Munkres [5].

Definición 2.1.1. Sean $v_0, \dots v_k$ $k+1$ puntos distintos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{v_0, \dots, v_k\}$ están en ***posición general*** si $c_0, \dots c_k$ son números reales tales que

$$\sum_{i=0}^{k} c_i v_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{k} c_i = 0,$$

entonces $c_0 = \cdots = c_k = 0$.

Definición 2.1.2. Sean $\{v_0, \dots, v_n\}$ un conjunto de $k+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ en posición general. El ***símplice*** generado por ellos, que denotamos por $[\, v_0, \dots, v_k]$, es el conjunto

$$[\, v_0, \dots, v_k] = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\},$$

con la topología heredada. Para todo punto $x = \sum_i t_i v_i \in [\, v_0, \dots, v_k]$, llamamos a los t_i ***coordenadas baricéntricas de*** x. Cada uno de los v_i se llama ***vértice*** del símplice. Al entero k se le llama ***dimensión***, y diremos que $[\, v_0, \dots, v_k]$ es un k-***símplice***.

Ejemplo 2.1.3. Un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice es un triángulo junto a su interior, un 3-símplice es un tetraedro sólido, y así sucesivamente (Figura 2.1).

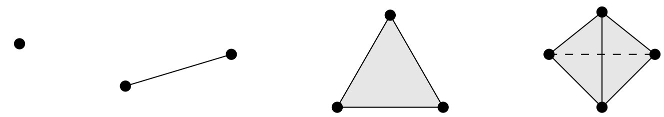


Figura 2.1: k-símplices, $k = 0, \ldots, 3$.

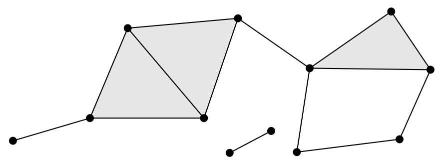


Figura 2.2: Un complejo simplicial en $\mathbb{R}^2$

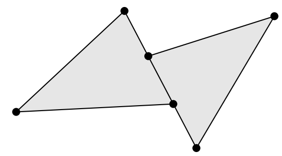


Figura 2.3: Símplices que no forman un complejo.

Sea σ un k-símplice. Cada símplice generado por un subconjunto no vacío de vértices de σ se llama ***cara de*** σ. Las caras que no son iguales a σ se llaman ***caras propias***. Las caras 0-dimensionales de σ son sus vértices, y a las caras 1-dimensionales se les llama ***lados***. Las caras $(k-1)$-dimensionales de un k-símplice se llaman bordes, y a su unión la llamamos ***frontera***. Definimos el ***interior*** como σ menos su frontera.

Definición 2.1.4. Un ***complejo simplicial*** es una colección K de símplices en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, que satisface las siguientes condiciones:

(i) Si $\sigma \in K$, entonces toda cara de σ está en K

(ii) La intersección de dos símplices cualesquiera en K es o bien vacía o bien una cara de ambos.

Si K un complejo simplicial en $\mathbb{R}^n$, llamamos ***dimensión de*** K a la dimensión máxima de los símplices en K. Esta no es mayor que n. Un subconjunto $K' \subseteq K$ se dice que es un ***subcomlejo de*** K si para todo $\sigma \in K'$, toda cara de σ está en K'. Un subcomplejo es un complejo simplicial en sí. Para todo $k \leq n$, el conjunto de todos los símplices de K de dimensión menor o igual que k es un subcomplejo llamado k-***esqueleto de*** K.

La Figura 2.2 muestra un complejo simplicial en $\mathbb{R}^2$. En cambio en la Figura 2.3 los símplices representados no forman un complejo, pues no se respeta la condición (ii) de la Definición 2.1.4.

Definición 2.1.5. Sea un complejo simplicial K en $\mathbb{R}^n$. La unión de todos los símplices en K junto con la topología heredada de $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico que denotamos por $|K|$ y que llamamos ***poliedro de K***.

Definición 2.1.6. Sea X un espacio topológico. Llamamos ***triangulación de*** X a un homeomorfismo entre X y el poliedro de algún complejo simplicial.

Definición 2.1.7. Toda superficie que admita una triangulación se dice ***triangulable***.

2.2. Teorema de Radó

Teorema 2.2.1 (Teorema de Radó)**.** Toda superficie es triangulable por un poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en donde cada 1-símplice es una cara de exáctamente dos 2-símplices.

Capítulo 3

Teorema de Clasificación

En esta sección daremos una demostración del teorema de clasificación b

3.1. Representación de superficies

Como ya hemos dicho anteriormente, para el teorema de clasificación necesitamos un método uniforme de representación de las superficies compactas. Representaremos todas las superficies como cocientes de regiones poligonales con $2n$ lados.

Definición 3.1.1. Sea S un conjunto. Una ***palabra en*** S es una k-tupla ordenada de símbolos, cada uno de la forma a o a^{-1}, para cierto $a \in S$.

Definición 3.1.2. Una ***representación poligonal***, que denotaremos por

$$\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, ..., W_k \rangle$$

es un conjunto finito S junto con un número finito de palabras $W_1, .., W_k$ de longitud 3 o más, tal que para todo $a \in S$ existe un W_i tal que $a \in W_i$. Por cuestiones de notación, cuando el conjunto S esté descrito listando sus elementos, quitaremos los corchetes que rodean los elementos de S y denotaremos las palabras W_i por youxtaposición. Por ejemplo, la presentación con $S = \{a, b\}$ y la palabra $W = (a, b, a^{-1}, b^{-1})$ se escribe $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Permitimos el caso especial de que $S = \{a\}$ (u otro símbolo cualquiera) y que $\mathcal{P}$ tenga una sola palabra de longitud 2, es decir, $\langle a \mid aa \rangle$, $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$, $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ y $\langle a \mid a^{-1}a \rangle$.

Definición 3.1.3. Toda representación poligonal $\mathcal{P}$ da lugar a un espacio topológico $|\mathcal{P}|$, llamado ***realización geométrica de*** $\mathcal{P}$. $|\mathcal{P}|$ se obtiene de la siguiente manera:

1. Para cada $W_i \in \mathcal{P}$ de longitud k, sea P_i la k-región poligonal convexa centrada en el origen con lados de longitud 1, ángulos iguales y tal que un vértice yace sobre el eje OY.

2. Se define una correspondencia uno a uno entre los símbolos de W_i y los bordes de P_i en sentido contrario a las agujas del reloj, empezando por el que yace en el eje OY.

3. Sea $|\mathcal{P}|$ el espacio cociente de $\coprod_i P_i$ determinado identificando bordes que tengan el mismo símbolo, conforme al homeomorfismo afín que hace coincidir los primeros vértices de lo bordes

con una etiqueta dada a y los últimos vertices de los que tienen la correspondiente etiqueta a^{-1} (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si $\mathcal{P}$ es una de las representaciones poligonales de un solo elemento, definimos $|\mathcal{P}|$ como la esfera $\mathbb{S}^2$ si la palabra es aa^{-1} o $a^{-1}a$, o como el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ si es aa o $a^{-1}a^{-1}$.

Por notación, dadas dos palabras W_1 y W_2, W_1W_2 representará la palabra formada concatenando W_1 y W_2. Por otro lado, adoptaremos la convención de que $(a^{-1})^{-1} = a$.

También lo que sigue S denotará una secuencia cualquiera de símbolos, $a, b, c, a_1, a_2, \dots$ símbolos de S, e un símbolo que no sea de S y $W_1, W_2, \dots$ palabras formadas por símbolos de S.

Definición 3.1.4. Los interiores, los bordes y los vértices de cada región polgonal P_i se llaman ***caras, bordes y vértices de la presentación***. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de bordes coincide con la suma de la longitud de las palabras. Para un lado etiquetado a, el ***vértice inicial*** es el primero en el sentido contrario de las agujas del reloj, y el otro es el ***vértice final***. Para un lado etiquetado a^{-1}, estas definiciones se invierten.

Definición 3.1.5. Una representación poligonal es una ***representación de una superficie*** si para todo $a \in S$, a ocurre exáctamente dos veces en $W_1, ..., W_k$ como a o como a^{-1}. Por la Proposición 1.1.12, la realización geométrica de una representación de una superficie es una superficie compacta.

Definición 3.1.6. Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una representación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a $\mathcal{P}$, decimos que $\mathcal{P}$ es una ***representación de*** X.

Observación 3.1.7. Un espacion topológico que admite una representación con una sola cara es conexo, pues es homeomorfo al cociente de una región poligonal conexa. Con más de una cara, puede ser o no conexo.

Ejemplo 3.1.8. Veamos la representación de algunas superficies importantes (ver Figura 3.1 y Figura 3.2).

(a) $\mathbb{S}^2 = \langle a \mid aa^{-1} \rangle = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$ (Proposición 1.1.7)

(b) $\mathbb{P}^2 = \langle a \mid aa \rangle = \langle a, b \mid abab \rangle$ (Proposición 1.1.9)

(c) $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ (Proposición 1.1.8)

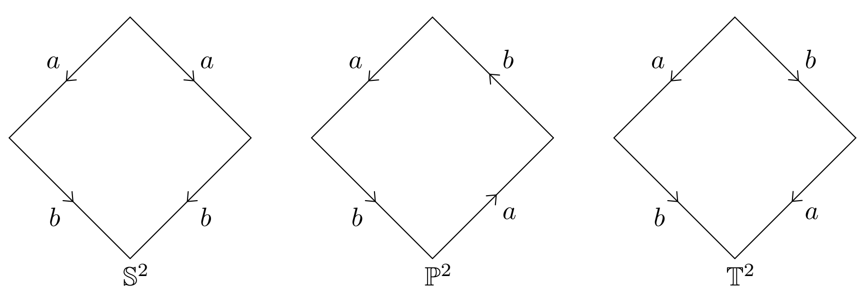
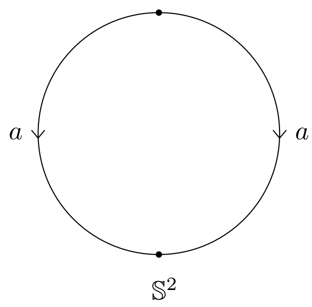


Figura 3.1: Representación de superficies importantes.



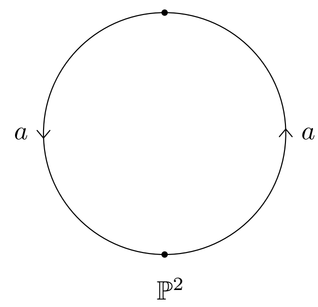


Figura 3.2: Representaciones de la esfera y el plano proyectivo.

De ahora en adelante visualizaremos el plano proyectivo como un ***crosscap***, cuya construcción se sigue en la Figura 3.3.

Parece claro que, además de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{P}^2$, una superficie pueda tener varias presentaciones poligonales. Sea por ejemplo la presentación del toro $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Intuitivamente podemos ver que, subdividiendo los lados etiquetados con b y reetiquetándolos con c y d (ver Figura 3.4), la superficie que representa la representación obtenida $\langle a, c, d \mid acda^{-1}c^{-1}d^{-1} \rangle$ será la misma. Vamos ahora a desarrollar unas reglas generales de transformación.

Definición 3.1.9. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos representaciones tal que sus realizaciones geométricas son equivalentes. Entonces decimos que son ***topológicamente equivalentes*** y escribimos $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$.

Vamos a definir ahora unas operaciones elementales sobre las representaciones poligonales. Veremos luego que estas dan lugar a representaciones equivalentes.

Definición 3.1.10. Las siguientes operaciones se llaman ***transformaciones elementales*** de una presentación poligonal:

- ***Reetiquetar***: Cambiar todas las apariciones de un símbolo a por otro símbolo que no está todavía en la representación, intercambiar todas las apariciones de dos símbolos a y b o intercambiar todas las apariciones de a y a^{-1}.
- ***Subdividir*** (Figura 3.4): Cambiar todas las apariciones de a por ae y todas las de a^{-1} por $e^{-1}a^{-1}$, donde e es un símbolo que no está todavía en la presentación.
- ***Consolidar*** (Figura 3.4): Si a y b aparecen siempre de forma adyacente, intercambiar ab por a y $b^{-1}a^{-1}$ por a^{-1}, siempre que esto de lugar a una o más palabras de longitud al menos 3 o una sola palabra de longitud 2.
- ***Reflejar*** (Figura 3.5a):

$$\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- ***Rotar*** (Figura 3.5b):

$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

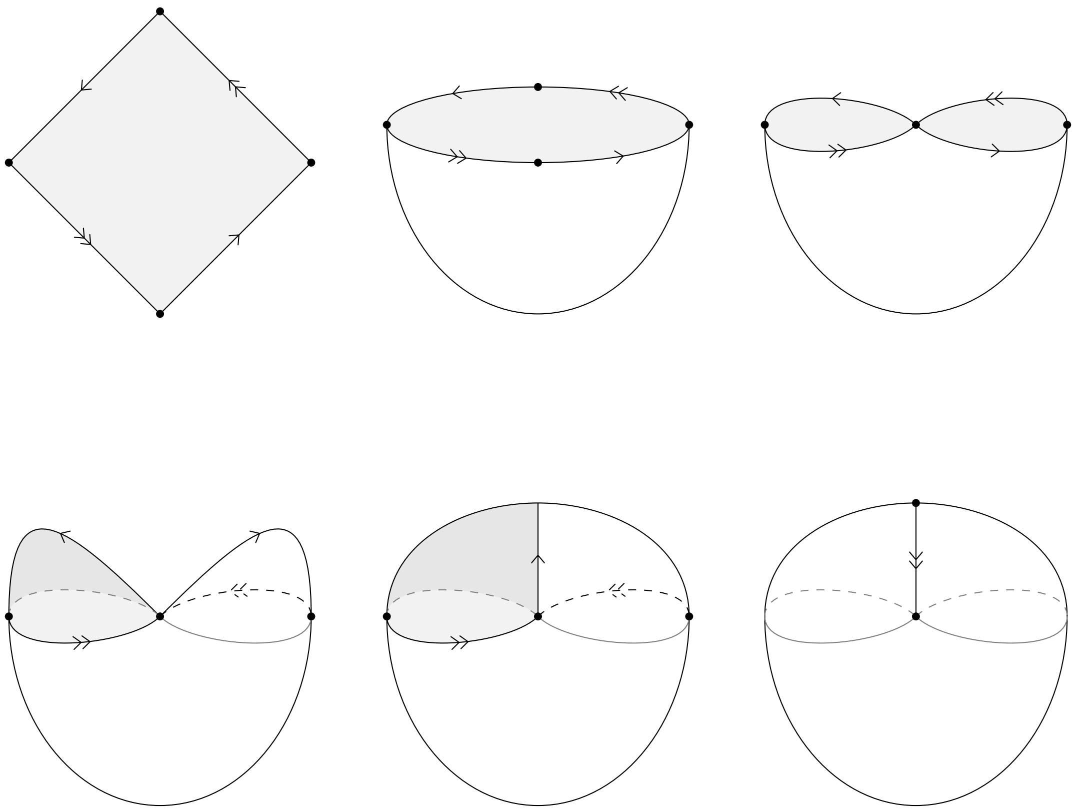


Figura 3.3: Construcción del crosscap a partir de la representación pologonal del plano proyectivo.

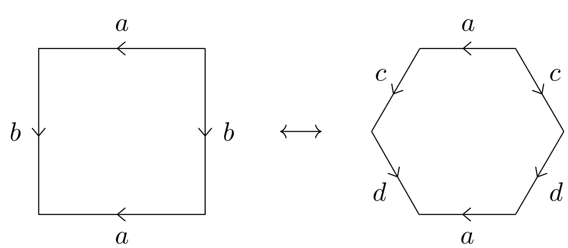
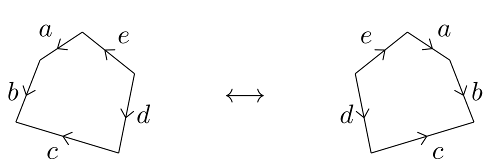
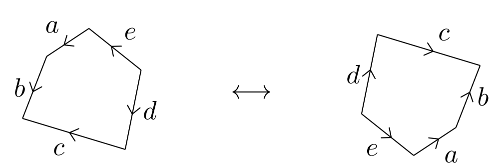


Figura 3.4: Dos representaciones equivalentes de $\mathbb{T}^2$ mediante la operación subdividir/consolidar.



(a) Reflejar.



(b) Rotar.

- ***Cortar*** (Figura 3.6a): Si W_1 y W_2 tienen longitud al menos 2,

$$\langle S \mid W_1W_2, W_3, \ldots, W_k\rangle \mapsto \langle S \mid W_1e, e^{-1}W_2, W_3, \ldots W_k\rangle.$$

- ***Pegar*** (Figura 3.6a):

$$\langle S, e \mid W_1e, e^-1W_2, W_3, \ldots, W_k\rangle \mapsto \langle S \mid W_1W_2, W_3, \ldots, W_k\rangle.$$

- ***Plegar*** (Figura 3.6b): Si w_1 tiene longitud al menos 3,

$$\langle S, e \mid W_1ee^{-1}, W_2, \ldots W_k\rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, \ldots, W_k\rangle.$$

  Permitimos que W_1 tenga longitud 2, siempre que la representación tenga una sola palabra.

- ***Desplegar*** (Figura 3.6b):

$$\langle S \mid W_1, W_2, \ldots, W_k\rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1ee^{-1}, W_2, \ldots, W_k\rangle.$$

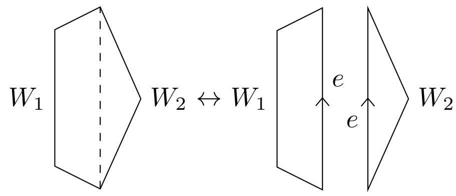
Proposición 3.1.11. Las operaciones elementales sobre representaciones poligonales dan lugar a representaciones poligonales equivalentes.

Demostración. Los casos de reetiquetar, subdividir y rotar son cambios puramente formales que no afectan al espacio cociente. Los casos subdividir/consolidar, cortar/pegar y plegar/desplegar son inversos, con lo que basta probar uno de cada par. Empecemos con la operación de cortar. Sean P_1, P_2 dos regiones poligonales convexas etiquetadas por las palabras W_1e y $e^{-1}W_2$ y sea P' la region poligonal etiquetada por W_1W_2. Supongamos de momento que no hay más palabras en las respectivas presentaciones. Si $\pi : P_1 \sqcup P_2 \to M$ y $\pi' : P' \to M'$ representan respectivamente las aplicaciones cocientes. El segmento que va desde el vértice final de W_1 en P' a su vértice inicial yace en P' por convexidad, y lo etiquetamos con e. Por el **??**, existe una aplicación continua $f : P_1 \sqcup P_2 \to P'$ que lleva cada lado de P_1 o P_2 a su correspondiente en P', y cuya restricción a cada P_i es un homeomorfismo sobre su imagen. Por el Teorema A.0.1, f es una aplicación cociente. Dado que f identifica únicamente los lados e y e^{-1}, la aplicación cociente $\pi' \circ f$ y π hacen exactamente las mismas identificaciones, y por tanto los espacios cociente M y M' son homeomorfos. En el caso de que hubiese otras palabras $W_3, \ldots, W_k$, simplemente extendemos f como la identidad en sus respectivas presentaciones poligonales y procedemos como antes.

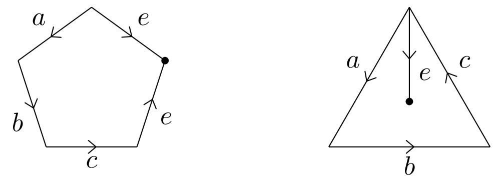
Para el plegado, ignoramos como antes palabras adicionales $W_2, \ldots W_k$. Supongamos para empezar que $W_1 = abcd$ tiene longitud exáctamente 4. Sea P una región poligonal convexa con lados etiquetados por $abee^{-1}cd$. Si cortamos a lo largo de el segmento f que une el vértice inicial de a con el vértice final de e y obtenemos así $abef$ y $f^{-1}e^{-1}cd$. Consolidamos ef en h, obteniendo así ah^{-1} y bch. Pegamos por h y obtenemos así $abcd$. ((Lo he cambiado para evitar hablar de simplex que los introduzco más tarde. Vale igualmente?)) Si W_1 tiene longitud 2 o 3, podemos subdividir para alargar la longitud de la palabra a 4, plegar, y finalmente consolidar de nuevo. □

Proposición 3.1.12. Sean M_1 y M_2 superficies que tienen (—admiten mejor?—) respectivamente representaciones $\langle S_1 \mid W_1\rangle$ y $\langle S_2 \mid W_2\rangle$, donde S_1 y S_2 son conjuntos disjuntos y tal que cada presentación tiene una sola cara. Entonces $\langle S_1, S_2 \mid W_1W_2\rangle$ es una presentación de la suma conexa $M_1\#M_2$.

Demostración. □



(a) Cortar/Pegar



(b) Plegar/Desplegar

3.2. Demostración clásica

Capítulo 4

La prueba ZIP de Conway

4.1. Cremalleras

Definición 4.1.1. Sea S una superficie (con o sin borde). Sea $p \in \mathrm{int}(S)$ y U un entorno abierto de p en S. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo tal que $\phi(p) = 0$. Sea $B = \phi^{-1}(B_1(0))$. Decimos que la nueva superficie con borde $S^o = S \setminus B$ es S 1-***perforada***, y a $\partial B \subset S^o$ la llamamos ***perforación***. Podemos repetir el proceso sobre S^o sucesivamente, obteniendo S n-perforada con un número finito $n \in \mathbb{N}$ de perforaciones.

Observación 4.1.2. Dado que los dos espacios son homeomorfos, podemos visualizar el disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2$ como una esfera con una perforación (Figura 4.1).

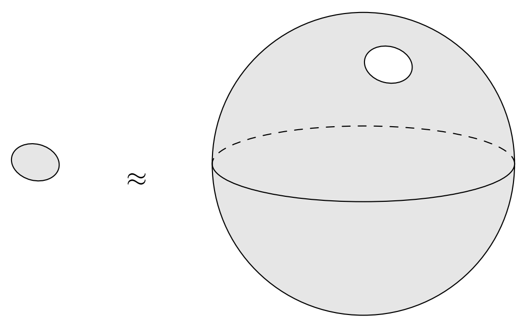


Figura 4.1: El disco cerrado como una esfera perforada.

Conway utiliza las cremalleras (*zips* en inglés) para describir cómo actúan las identificaciones topológicas. Cada cremallera actúa sobre una o dos perforaciones de una superficie. Están formadas por dos *zips* (dos partes dentadas) fijadas la/s perforación/es y un *zipper* (el deslizador). Al cerrar el *zipper*, las *zips* se juntan identificándose. Trato de dar una definición rigurosa:

Definición 4.1.3. Sea S una superficie compacta. Una ***cremallera*** es una identificación entre dos subconjuntos (cerrados??) de la frontera de S. A este par lo llamamos ***par-zip***.

En la *prueba ZIP*, Conway nos explica gráficamente las posibles formas de unir cremalleras.

Definición 4.1.4. Sea S una superficie. Definimos cuatro formas elementales de identificar pares-*zip* en perforaciones de S 1 o 2-perforada:

1. ***Cap***: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con orientaciones opuestas (Figura 4.2a).
2. ***Crosscap***: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con la misma orientación (Figura 4.2b).
3. ***Handle***: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de S con orientaciones opuestas (Figura 4.2c).
4. ***Crosshandle***: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de S con la misma orientación (Figura 4.2d).

Sea S una superficie conexa tal que admite una representación poligonal de una sola cara $P = \langle A \mid W \rangle$, y sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica. Sea ∂B una perforación sobre $\mathbb{S}^2$, y sea ϕ un homeomorfismo entre los lados de $|\mathcal{P}|$ y ∂B. Si identificamos ahora los pares de segmentos sobre ∂B de la imagen de ϕ, obtenemos la suma conexa $S\#\mathbb{S}^2$, es decir, S (Observación 1.2.3).

Sean ahora S y S' superficies conexas. Entonces, hacer una perforación sobre S' es lo mismo que hacer la suma conexa de una esfera $\mathbb{S}^2$ con una perforación S'. Por tanto, hacer una perforación sobre S' asociada a S da lugar a la suma conexa $S\#S'$.

Proposición 4.1.5. Sea S una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

a) S con un cap y S.

b) S con un crosscap y $S\#\mathbb{P}^2$.

c) S con un handle y $S\#\mathbb{T}^2$.

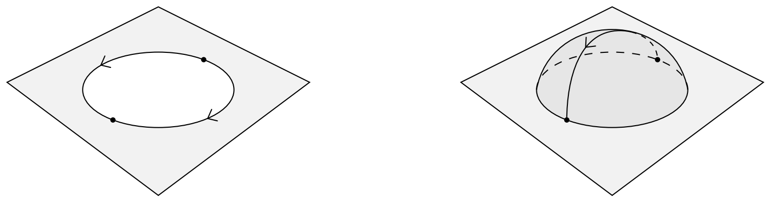
d) S con un crosshandle y $S\#K$ (siendo K la botella de Klein).

Demostración. a) y b) son consecuencia directa del parrafo que precede la preposición. Para c), utilizamos la Observación 1.2.4, y para d) utilizar una construcción parecida a c) ((habría que especificar más?)). ☐

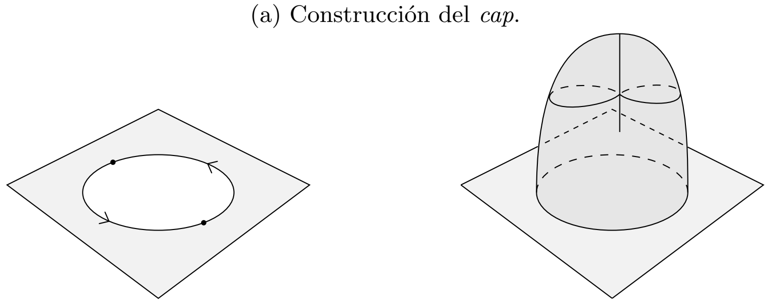
4.2. Estructura algebráica

Veamos un método para representar las perforaciones y cremalleras sobre colecciones de esferas, y definamos unas operaciones sobre estas representaciones que nos den espacios topológicos equivalentes, tal como hicimos en el Capítulo 1. —referencia aJJJWW——

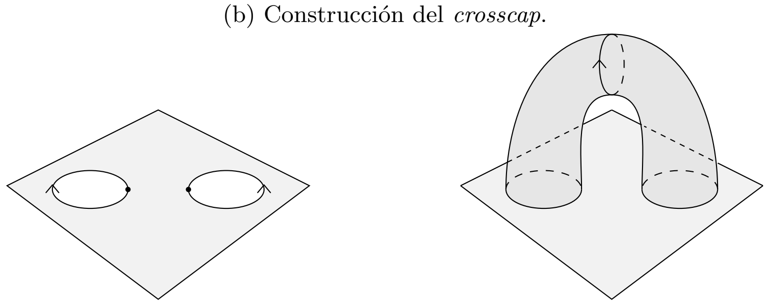
Sean $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_k$ esferas con perforaciones, algunas con pares-zip. Para cada esfera, etiquetamos las cremalleras asociadas a un mismo par-zip con el mismo símbolo. Para las partes de perforaciones que no tengan cremallera, las etiquetamos cada una con un símbolo distinto. A cada perforación le asociaremos una palabra, formada a partir de las etiquetas que acabamos de crear. Empezamos arbitrariamente por una, digamos a, y si esta está asociada a una cremallera, escribiremos a o a^{-1} dependiendo de si su orientación se corresponde con la de las agujas del reloj; si no está asociada a una cremallera escribiremos simplemente a. Recorreremos la perforación en orden en sentido



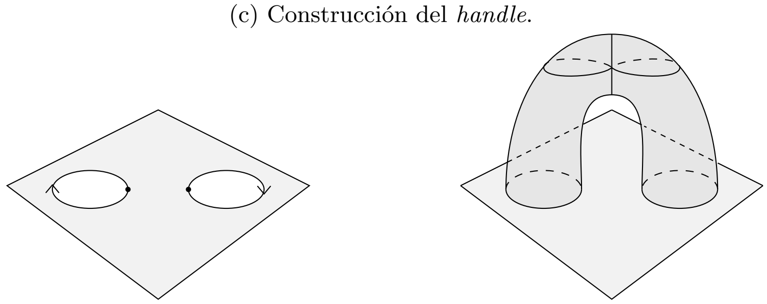
(a) Construcción del *cap*.



(b) Construcción del *crosscap*.



(c) Construcción del *handle*.



(d) Construcción del *crosshandle*.

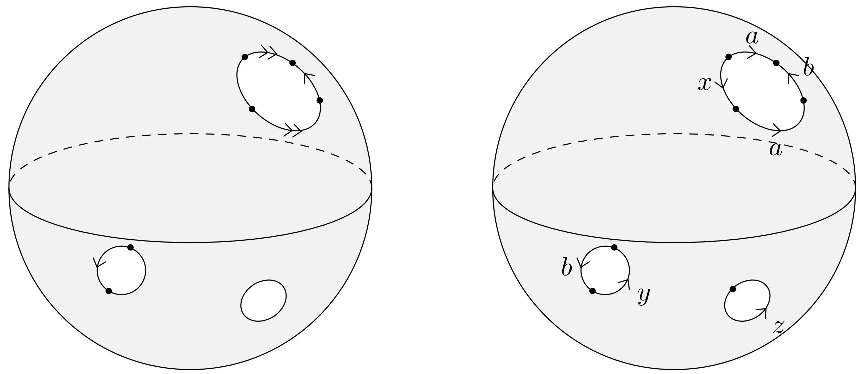


Figura 4.3: Ejemplo 4.2.1

contrario de las agujas del reloj reptiendo el proceso anterior hasta llegar a la anterior etiqueta de la que hemos partido. Cada esfera la representaremos por la yuxtaposición de las palabras entre paréntesis asociadas a las perforaciones, y una usperficie formada por varias esferas la escribiremos como la suma de sus representaciones.

Ejemplo 4.2.1. Sea una esfera perforada como la de la izquierda de la Figura 4.3. Hay dos pares-zip, uno de ellos con las cremalleras en la misma perforación y el otro en perforaciones distintas. Etiquetamos las primeras por a y las segundas por b y etiquetamos el resto de segmentos de las perforaciones sin cremallera por x, y, z. Por tanto, una representación de nuestra esfera sería

$$(a^{-1}xab)(by)(z)$$

4.3. Teorema de Clasificación

Definición 4.3.1. Una superficie se dice ordinaria si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

Lema 4.3.2. Sea S una superficie con borde con un par-zip tal que cada cremallera está en una parte de su borde. Entonces, si S es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

Demostración. Consideramos el caso en que las dos cremalleras ocupan cada una una perforación en su totailidad. Entonces al identificarlas se tiene un *handle* (Figura 4.2c) o un *crosshandle* (Figura 4.2d), dependiendo de sus respectivas orientaciones. Si las dos perforaciones pertenecen a componentes conexas distintas de S, entonces identificando obtenemos el espacio adjunción de las dos componentes. (MEJORAR).

Consideramos ahora el caso en el que las dos cremalleras yacen sobre la misma perforación y la cubren totalmente. Identificándolas nos da o bien un *cap* (Figura 4.2a) o bien un *crosscap* (Figura 4.2b), dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Finalmente, consideramos los varios casos en que las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad. (A PARTIR DE AQUI NO SE MUY BIEN COMO ORIENTARLO... CON OPERACIONES ELEMENTALES O COMO HACE EL???) □

Teorema 4.3.3 (Teorema de clasificación, versión preeliminar)**.** Toda superficie compacta es ordinaria.

Demostración. Sea S una superficie compacta. Sabemos, por el Teorema de Radó, que S está triangulada por un poliedro $|K|$ asociado a un complejo simplicial K tal que cada 1-símplice que contiene puntos interiores de S es una cara de exáctamente dos 2-símplices, y cada 1-símplice que contiene puntos del borde de S es cara de exáctamente un 2-símplice. Si sobre los primeros 1-símplices ponemos una cremallera distinta, en los 2-símplices habrá algunos 1-símplices que se identifiquen. Llamemos $K_2 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_j\}$, donde cada σ_i es un 2-símplice para todo $i = 1 \ldots, j$. K_2 es una superficie ordinaria, pues cada σ_i es homeomorfo a una esfera perforada. Si identificamos ahora las cremalleras una a una, por el Lema 4.3.2 y por inducción, la superficie resultante es ordinaria. □

Apéndice A

Teoremas Usados

Teorema A.0.1 (Lema de la aplicación cerrada)**.** Sea F una aplicación continua de un espacio topológico compacto en un espacio topológico Hausdorff. Entonces:

(a) F es una aplicación cerrada.

(b) Si F es sobreyectiva, entonces es una aplicación cociente.

(c) Si F es inyectiva, entonces es una inmersión topológica.

(d) Si F es biyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Teorema A.0.2 (Unicidad de espacios cociente)**.** Supongamos $q_1 : X \to Y_1$ y $q_2 : X \to Y_2$ son aplicaciones cociente que hacen las mismas identificaciones, es decir, tales que $q_1(x) = q_1(x')$ si y solo si $q_2(x) = q_2(x')$. Entonces existe un único homeomorfismo $\phi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi \circ q_1 = q_2$.

Apéndice B

CW-complejos

Apéndice C

Definiciones

Definición C.0.1. Una colección de subconjuntos de un espacio topológico X se dice ***localmente finita*** si cada punto del espacio tiene un entorno que interseca sólo un número finito de subconjuntos de la colección.

Bibliografía

[1] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate text in mathematics, Springer - Verlag New York, 2011.

[2] V. Muñoz, J. J. Madrigal. *Topología Algebráica*. Sanz y Torres, 2015.

[3] A. Hatcher. *The Kirby Torus Trick for Surfaces*, 2013. `http://front.math.ucdavis.edu/1312.3518`

[4] T. Radó. *Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Sci*. Math. Szeged. 2 1925, 101–121.

[5] J. R. Munkres. *Elements of Agebraic Topology*. Addison-Wesley, 1984.