La Prueb ZIP de Conway del Teorema de Clasificación de Superficies

Juan Valero Oliet

Universidad Complutense de Madrid

Dirigido por: Manuel Alonso Morón

13 de octubre de 2020

Introducción al trabajo

La prueba ZIP de Conway hace una demostración informal del Teorema de Clasificación de Superficies.

Introducción al trabajo

La prueba ZIP de Conway hace una demostración informal del Teorema de Clasificación de Superficies.

Teorema (Clasificación de Superficies)

Sea S una superficie compacta. Entonces S es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

Introducción al trabajo

La prueba ZIP de Conway hace una demostración informal del Teorema de Clasificación de Superficies.

Teorema (Clasificación de Superficies)

Sea S una superficie compacta. Entonces S es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

- La esfera $\mathbb{S}^2$.

Introducción al trabajo

La prueba ZIP de Conway hace una demostración informal del Teorema de Clasificación de Superficies.

Teorema (Clasificación de Superficies)

Sea S una superficie compacta. Entonces S es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

- La esfera $\mathbb{S}^2$.
- Una suma conexa de copias del toro $\mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2$.

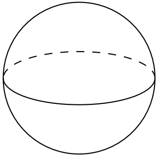
Introducción al trabajo

La prueba ZIP de Conway hace una demostración informal del Teorema de Clasificación de Superficies.

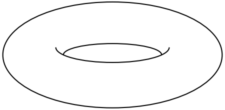
Teorema (Clasificación de Superficies)

Sea S una superficie compacta. Entonces S es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

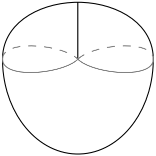
- La esfera $\mathbb{S}^2$.
- Una suma conexa de copias del toro $\mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2$.
- Una suma conexa de copias del plano proyectivo $\mathbb{P}^2 \# \ldots \# \mathbb{P}^2$.



(a) $\mathbb{S}^2$



(b) $\mathbb{T}^2$



(c) $\mathbb{P}^2$

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard
- 1915 - Alexander

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard
- 1915 - Alexander
- 1920 - Brahana

Introducción Histórica

- 1863 - Möbius
- 1866 - Jordan
- 1888 - von Dick
- 1907 - Dehn y Heegard
- 1915 - Alexander
- 1920 - Brahana
- 1925 - Radó

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.
- La forma normal se basa en el concepto de suma conexa.

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.
- La forma normal se basa en el concepto de suma conexa.

Problemas

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.
- La forma normal se basa en el concepto de suma conexa.

Problemas

- No se definen algunos conceptos utilizados.

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.
- La forma normal se basa en el concepto de suma conexa.

Problemas

- No se definen algunos conceptos utilizados.
- No se desarrollan los resultados en profundidad.

Prueba ZIP

Prueba de Irrelevancia Cero

Ventajas

- Más intuitivo.
- La forma normal se basa en el concepto de suma conexa.

Problemas

- No se definen algunos conceptos utilizados.
- No se desarrollan los resultados en profundidad.
- No se demuestra que las superficies no sean homeomorfas entre sí.

Trabajo

- Estudiar los conceptos previos.

Trabajo

- Estudiar los conceptos previos.
- Estudiar la demostración clásica.

Trabajo

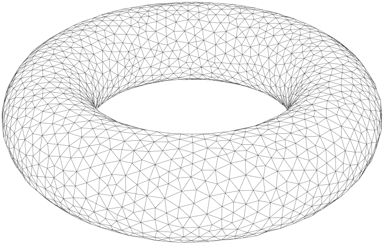
- Estudiar los conceptos previos.
- Estudiar la demostración clásica.
- Tratamiento riguroso de la prueba ZIP.

Trabajo

- Estudiar los conceptos previos.
- Estudiar la demostración clásica.
- Tratamiento riguroso de la prueba ZIP.
- Completar con la segunda parte del teorema.

Triangulación

La definimos en términos de complejos simpliciales.



Teorema de Radó

Teorema (Teorema de Radó)

Toda superficie es triangulable.

Teorema (Teorema de Schönflies)

Sea f un homeomorfismo entre dos curvas simples cerradas C y C'. Entonces f se puede extender a un homeomorfismo de todo el plano.

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.
- Triangular cada disco de forma que sea compatible con los anteriores.

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.
- Triangular cada disco de forma que sea compatible con los anteriores.

Dificultades:

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.
- Triangular cada disco de forma que sea compatible con los anteriores.

Dificultades:

- Mostrar que las intersecciones entre las curvas son un número finito.

Teorema de Radó

Idea de la demostración (Thomassen):

- Recubrir la superficie con un número finito de discos coordenados.
- Triangular cada disco de forma que sea compatible con los anteriores.

Dificultades:

- Mostrar que las intersecciones entre las curvas son un número finito.
- Mostrar que las regiones que definen estas intersecciones son homeomorfas a discos cerrados $\longrightarrow$ *Schönflies*.

Perforaciones

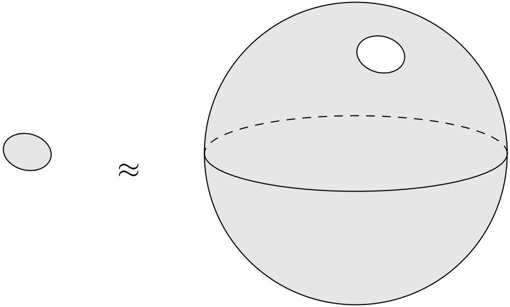


Figura: El disco cerrado como una esfera perforada.

Perforaciones

Perforaciones

Proposición

Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

Perforaciones

Proposición

Toda superficie con borde compacta es homeomorfa a una superficie compacta con perforaciones.

Proposición (Teorema de Clasificación)

Sean M_1 y M_2 superficies con borde compactas tales que ∂M_1 y ∂M_2 tienen el mismo número de componentes conexas. Entonces M_1 y M_2 son homeomorfas si y solo si las superficies M_1^* y M_2^* son homeomorfas.

Suma Conexa

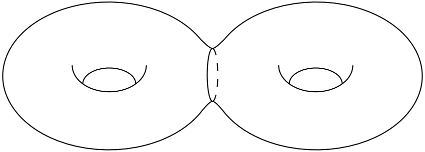


Figura: Suma conexa de dos toros.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.
4. Relacionamos en $M_1^o \amalg M_2^o$ cada punto de ∂M_1^o con su imagen por f.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.
4. Relacionamos en $M_1^o \amalg M_2^o$ cada punto de ∂M_1^o con su imagen por f.
5. Al espacio cociente $M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}$ lo llamamos **suma conexa** de M_1 y M_2.

Suma Conexa

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.
4. Relacionamos en $M_1^o \amalg M_2^o$ cada punto de ∂M_1^o con su imagen por f.
5. Al espacio cociente $M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}$ lo llamamos **suma conexa** de M_1 y M_2.

Representación de superficies

- Polígonos con aristas que se identifican.

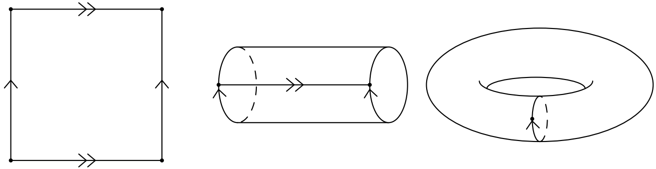


Figura: El toro como cociente de un cuadrado.

Representación de superficies

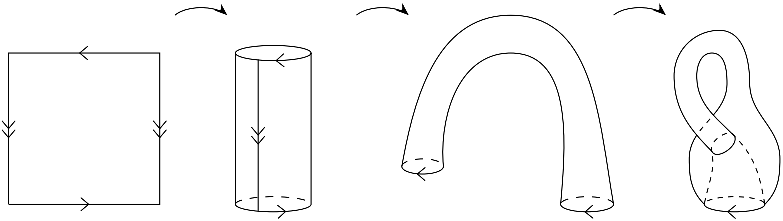
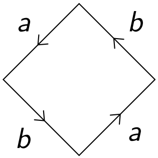
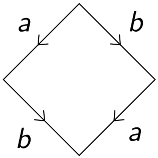


Figura: Construcción de la botella de Klein.

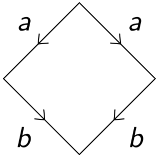
Representación de superficies



(a) El plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.



(b) El toro $\mathbb{T}^2$.



(c) La esfera $\mathbb{S}^2$.

(a) $\mathbb{P}^2 = \langle a, b \mid abab \rangle$.

(b) $\mathbb{T}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

(c) $\mathbb{S}^2 = \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle$.

Representación de superficies con borde

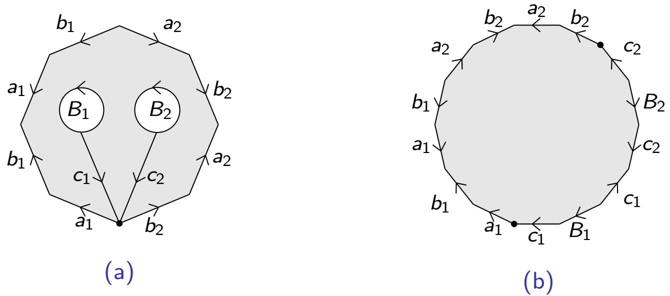
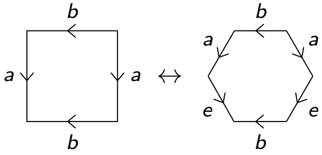


Figura: La superficie $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ con dos perforaciones.

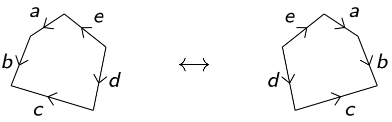
Operaciones elementales

Transformaciones sobre los polígonos que den lugar a superficies homeomorfas.

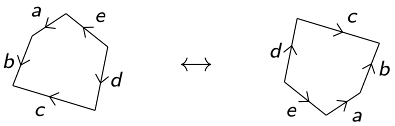


(a) Subdividir/Consolidar

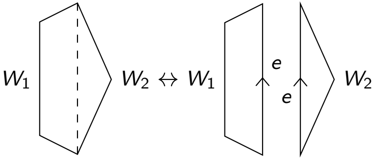
Operaciones elementales



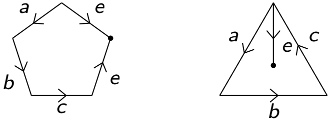
(a) Reflejar



(b) Rotar



(c) Cortar/Pegar



(d) Plegar/Desplegar

Prueba Clásica

Forma Normal

Se prueba que toda representación poligonal de una superficie se puede transformar en siete pasos en una de las siguientes:

(a) *Esfera*

$$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$$

(b) *Suma conexa de n toros.*

$$\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$$

(c) *Suma conexa de n planos proyectivos.*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_1 \ldots a_n a_n \rangle$$

Prueba ZIP

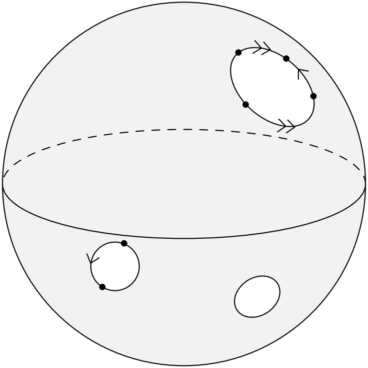
Definición (Cremalleras)

- **zip**: identificación entre dos subconjuntos del borde de M.
- **cremallera**: cada uno de estos dos subconjuntos que se identifican.
- **par-zip**: el par formado por dos cremalleras que se identifican.

Prueba ZIP

Definición (Cremalleras)

- **zip**: identificación entre dos subconjuntos del borde de M.
- **cremallera**: cada uno de estos dos subconjuntos que se identifican.
- **par-zip**: el par formado por dos cremalleras que se identifican.



Multiple Columns

Heading

1. Se consideran dos variedades M_1 y M_2.
2. Realizamos una perforación en cada variedad $\longrightarrow$ variedades con borde M_1^o y M_2^o.
3. Consideramos un homeomorfismo $f : \partial M_1^o \to \partial M_2^o$.
4. Relacionamos en $M_1^o \amalg M_2^o$ cada punto de ∂M_1^o con su imagen por f.
5. Al espacio cociente $M = \frac{M_1^o \amalg M_2^o}{\sim}$ lo llamamos **suma conexa de M_1 y M_2**

Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Cuadro: Table caption

Theorem

Teorema (Mass–energy equivalence)

$E = mc^2$

Verbatim

Example (Theorem Slide Code)

```
\begin{frame}
\frametitle{Theorem}
\begin{theorem}[Mass--energy equivalence]
$E = mc^2$
\end{theorem}
\end{frame}
```

Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

Citation

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [**p1**].

References

John Smith (2012)
Title of the publication
Journal Name 12(3), 45 – 678.

The End