Universidad Complutense de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de Matemáticas

Trabajo de Fin de Grado

Un tratamiento riguroso de la prueba ZIP

Juan Valero Oliet

Dirigido por:
Manuel Alonso Morón

Junio de 2020

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

La prueba ZIP de Conway

1.1. Cremalleras

Definición 1.1.1. Sea S una superficie (con o sin borde). Sea $p \in \text{int}(S)$ y U un entorno abierto de p en S. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo tal que $\phi(p) = 0$. Sea $B = \phi^{-1}(B_1(0))$. Decimos que la nueva superficie con borde $S^o = S \setminus B$ es S 1-***perforada***, y a $\partial B \subset S^o$ la llamamos ***perforación***. Podemos repetir el proceso sobre S^o sucesivamente, obteniendo S n-perforada con un número finito $n \in \mathbb{N}$ de perforaciones.

Observación 1.1.2. Dado que los dos espacios son homeomorfos, podemos visualizar el disco cerrado $\overline{\mathbb{B}}^2$ como una esfera con una perforación (Figura 1.1).

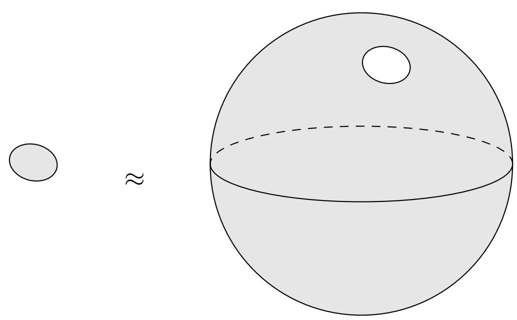

Figura 1.1: El disco cerrado como una esfera perforada.

Conway utiliza las cremalleras (*zips* en inglés) para describir cómo actúan las identificaciones topológicas. Cada cremallera actúa sobre una o dos perforaciones de una superficie. Están formadas por dos *zips* (dos partes dentadas) fijadas la/s perforación/es y un *zipper* (el deslizador). Al cerrar el *zipper*, las *zips* se juntan identificándose. Trato de dar una definición rigurosa:

Definición 1.1.3. Sea S una superficie compacta. Una ***cremallera*** es una identificación entre dos subconjuntos (abtos, cerrados??) de la frontera de S. A este par lo llamamos ***par-zip***.

En la *prueba ZIP*, Conway nos explica gráficamente las posibles formas de unir cremalleras.

Definición 1.1.4. Sea S una superficie. Definimos cuatro formas elementales de identificar pares-*zip* en perforaciones de S 1 o 2-perforada:

1. ***Cap***: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con orientaciones opuestas (Figura 1.2).
2. ***Crosscap***: Los pares zip yacen cada uno sobre la mitad de una misma perforación con la misma orientación (Figura 1.3).
3. ***Handle***: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de S con orientaciones opuestas (Figura 1.4).
4. ***Crosshandle***: Los pares zip yacen cada uno sobre una perforación distinta de S con la misma orientación (Figura 1.5).

Sea S una superficie conexa tal que admite una representación poligonal de una sola cara $P = \langle A \mid W \rangle$, y sea $|\mathcal{P}|$ su realización geométrica. Sea ∂B una perforación sobre $\mathbb{S}^2$, y sea ϕ un homeomorfismo entre los lados de $|\mathcal{P}|$ y ∂B. Si identificamos ahora los pares de segmentos sobre ∂B de la imagen de ϕ, obtenemos la suma conexa $S \# \mathbb{S}^2$, es decir, S (**??**).

Sean ahora S y S' superficies conexas. Entonces, hacer una perforación sobre S' es lo mismo que hacer la suma conexa de una esfera $\mathbb{S}^2$ con una perforación S'. Por tanto, hacer una perforación sobre S' asociada a S da lugar a la suma conexa $S \# S'$.

Proposición 1.1.5. Sea S una superficie. Los siguientes espacios son homeomorfos:

a) S con un cap y S.

b) S con un crosscap y $S \# \mathbb{P}^2$.

c) S con un handle y $S \# \mathbb{T}^2$.

d) S con un crosshandle y $S \# K$ (siendo K la botella de Klein).

Demostración. a) y b) son consecuencia directa de lo anterior. Para c), utilizamos la **??**, y para d) utilizar una construcción parecida a c) ((habría que especificar más?)). □

1.2. Estructura algebráica

Veamos un método para representar las perforaciones y cremalleras sobre colecciones de esferas, y definamos unas operaciones sobre estas representaciones que nos den espacios topológicos equivalentes, tal como hicimos en el Capítulo 1. —referencia al yutuber——

Sean $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_k$ esferas con perforaciones, algunas con pares-zip. Para cada esfera, etiquetamos las cremalleras asociadas a un mismo par-zip con el mismo símbolo. Para las partes de perforaciones que no tengan cremallera, las etiquetamos cada una con un símbolo distinto. A cada perforación le asociaremos una palabra, formada a partir de las etiquetas que acabamos de crear. Empezamos arbitrariamente por una, digamos a, y si esta está asociada a una cremallera, escribiremos a o a^{-1} dependiendo de si su orientación se corresponde con la de las agujas del reloj; si no está asociada a una cremallera escribiremos simplemente a. Recorreremos la perforación en orden en sentido contrario de las agujas del reloj reptiendo el proceso anterior hasta llegar a la anterior etiqueta de la que hemos partido.

1.3. Teorema de Clasificación

Definición 1.3.1. Una superficie se dice ordinaria si es homeomorfa a una colección finita de esferas cada una con un número finito de *handles*, *crosshandles*, *crosscaps* y perforaciones.

Lema 1.3.2. Sea S una superficie con borde con un par-zip tal que cada cremallera está en una parte de su borde. Entonces, si S es ordinaria antes de identificar las cremalleras, es ordinaria también después.

Demostración. Consideramos el caso en que las dos cremalleras ocupan cada una una perforación en su totailidad. Entonces al identificarlas se tiene un *handle* (Figura 1.4) o un *crosshandle* (Figura 1.5), dependiendo de sus respectivas orientaciones. Si las dos perforaciones pertenecen a componentes conexas distintas de S, entonces identificando obtenemos el espacio adjunción de las dos componentes. (MEJORAR).

Consideramos ahora el caso en el que las dos cremalleras yacen sobre la misma perforación y la cubren totalmente. Identificándolas nos da o bien un *cap* (Figura 1.2) o bien un *crosscap* (Figura 1.3), dependiendo de sus respectivas orientaciones.

Finalmente, consideramos los varios casos en que las cremalleras no ocupan perforaciones en su totalidad. (A PARTIR DE AQUI NO SE MUY BIEN COMO ORIENTARLO... CON OPERACIONES ELEMENTALES O COMO HACE EL???) □

Teorema 1.3.3 (Teorema de clasificación, versión preeliminar)**.** Toda superficie compacta es ordinaria.

Demostración. Sea S una superficie compacta. Sabemos, por el **??**, que S está triangulada por un poliedro $|K|$ asociado a un complejo simplicial K tal que cada 1-símplice que contiene puntos interiores de S es una cara de exáctamente dos 2-símplices, y cada 1-símplice que contiene puntos del borde de S es cara de exáctamente un 2-símplice. Si sobre los primeros 1-símplices ponemos una cremallera distinta, en los 2-símplices habrá algunos 1-símplices que se identifiquen. Llamemos $K_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}$, donde cada σ_i es un 2-símplice para todo $i = 1 \dots, j$. K_2 es una superficie ordinaria, pues cada σ_i es homeomorfo a una esfera perforada. Si identificamos ahora las cremalleras una a una, por el Lema 1.3.2 y por inducción, la superficie resultante es ordinaria. □

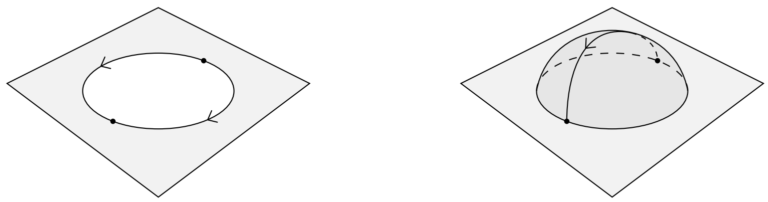

Figura 1.2: Construcción del *cap*.

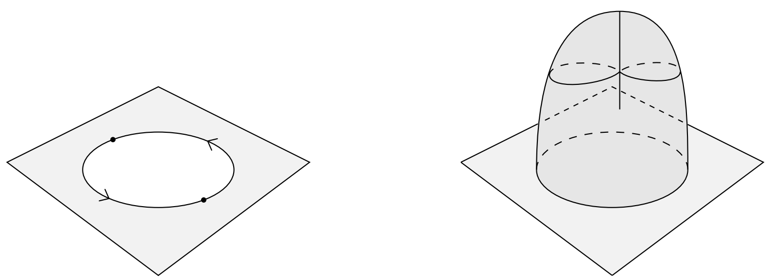

Figura 1.3: Construcción del *crosscap*.

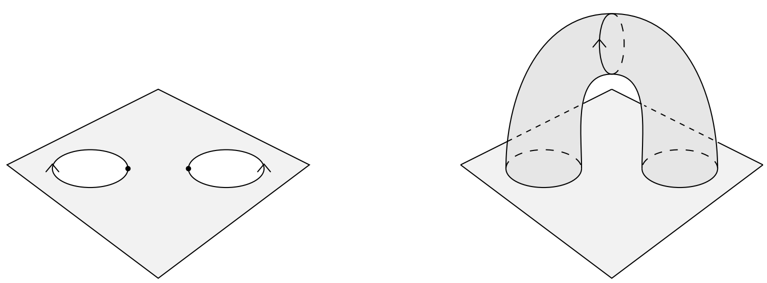

Figura 1.4: Construcción del *handle*.

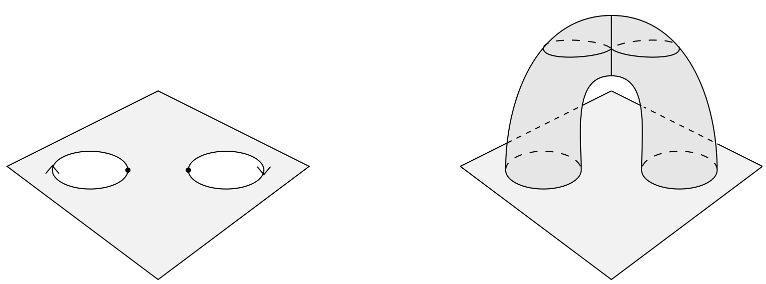

Figura 1.5: Construcción del *crosshandle*.

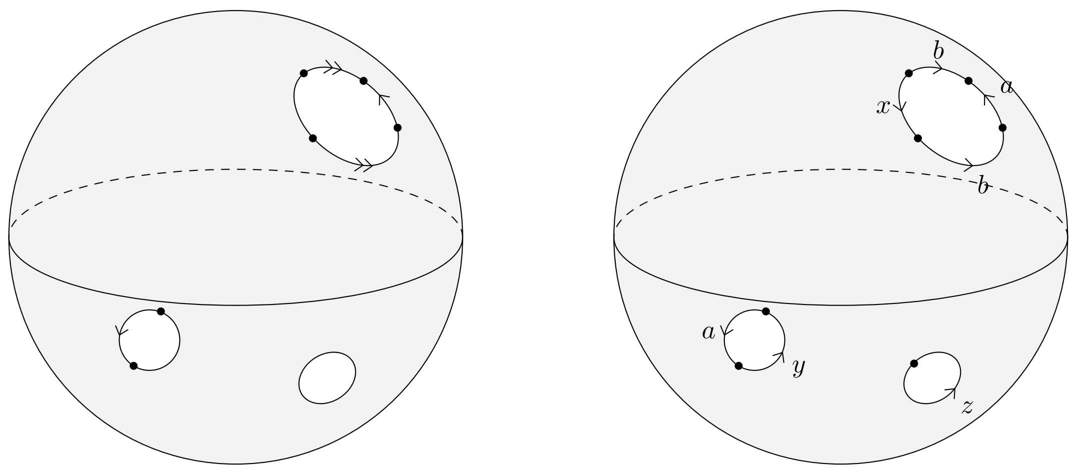

Figura 1.6: Hola