Tema 6

Cálculo diferencial e integral con funciones de varias variables

6.1. Funciones reales de varias variables reales

Para cada número natural n, sea $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Una *función real de n variables reales* es una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en donde $X \subset \mathbb{R}^n, n > 1$, e $Y \subset \mathbb{R}$.

El conjunto X es el *dominio* de la función; el conjunto $f(X)$ es el *recorrido* de la función.

A menudo la función vendrá dada por una fórmula y si no se da de modo expreso el dominio, se supondrá que este es el mayor conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ para el cual la fórmula está definida. Designaremos habitualmente por D el dominio de la función. Cuando tratemos con una función f de dos variables escribiremos a veces $z = f(x, y)$; x, y son las variables independientes, z es la variable dependiente. Fijaremos principalmente nuestra atención en funciones de 2 o 3 variables reales.

Ejemplo

Sea $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$. El dominio de f es el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ y el recorrido es $[0, +\infty)$.

Se define la *norma* (euclídea) de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ por

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto del plano y r un número real positivo.

Se llama *disco abierto* (o *bola abierta*) de centro P_0 y radio r al conjunto

$$B(P_0; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\},$$

y *disco cerrado* (o *bola cerrada*) de centro P_0 y radio r al conjunto

$$\overline{B}(P_0; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r\}.$$

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Decimos que un punto $P \in S$ es un *punto interior* de S si existe un disco abierto centrado en P contenido en S. El conjunto S se llama *abierto* si es vacío o si todos sus puntos son interiores.

Un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es un *punto frontera* de S si todo disco abierto centrado en P contiene puntos de S y puntos que no están en S. El conjunto S se llama *cerrado* si contiene a todos sus puntos frontera. El conjunto de los puntos frontera de S se llama *frontera de S*. El conjunto S es cerrado si, y sólo si, $\mathbb{R}^2 \setminus S$ es abierto.

Un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es un *punto de acumulación* de S si para todo $r > 0$ existe al menos un punto $Q \neq P$ tal que $Q \in S \cap B(P; r)$.

El conjunto S se llama *acotado* si existe un disco que lo contiene.

Diremos que el conjunto S es *compacto* si es simultáneamente cerrado y acotado.

En $\mathbb{R}^3$ se tienen definiciones análogas.

Ejemplo

El dominio de $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es cerrado y no acotado. La frontera del dominio es la parábola de ecuación $y = x^2$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

La *gráfica* de f es el conjunto

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}.$$

La gráfica de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$ cuya proyección sobre el plano OXY es el dominio D. En la Figura 6.1 se representa la gráfica de la función que venimos considerando.

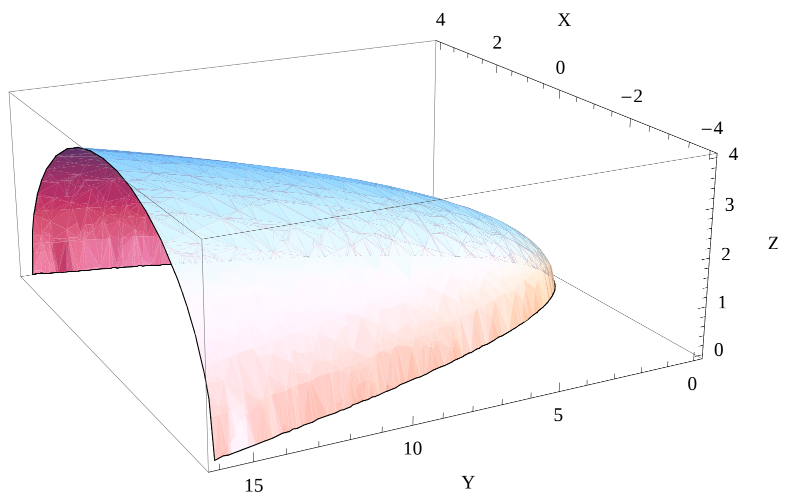

Figura 6.1: Superficie $z = \sqrt{y - x^2}$.

Cuando el plano $z = C$ corta a la superficie, el resultado es una curva en el espacio cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} f(x, y) = C, \\ \quad\quad z = C. \end{cases}$$

Una curva de este tipo se llama *traza* (o *sección*) de la gráfica de f en el plano $z = C$. El conjunto de los puntos del plano OXY que verifican la ecuación $f(x, y) = C$ recibe el nombre de *curva de nivel* de f correspondiente al valor C. Las curvas de nivel de una función f nos proporcionan información sobre las secciones de la superficie $z = f(x, y)$ perpendiculares al eje OZ (cf. Figuras 6.2 y 6.3). En general, se podrá obtener una imagen más completa de la superficie examinando las secciones en otras direcciones.

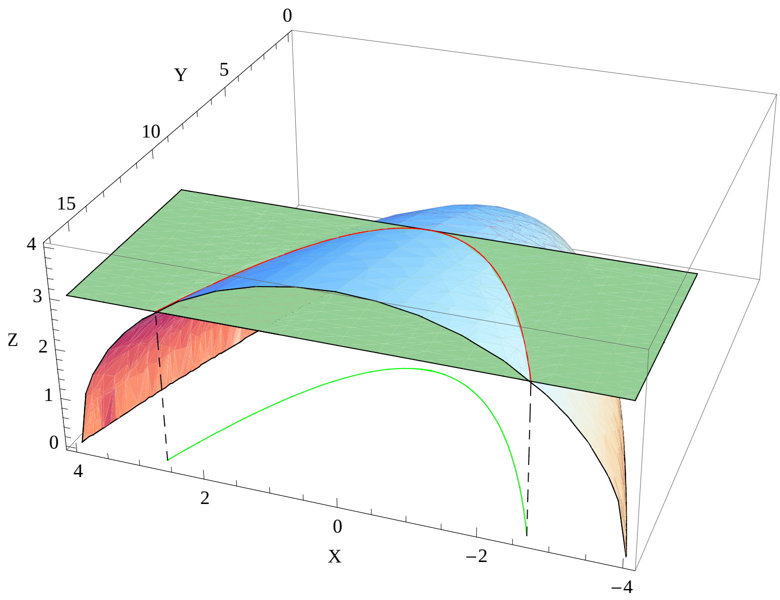

Figura 6.2: Superficie $z = \sqrt{y - x^2}$, sección en el plano $z = 3$ y correspondiente curva de nivel.

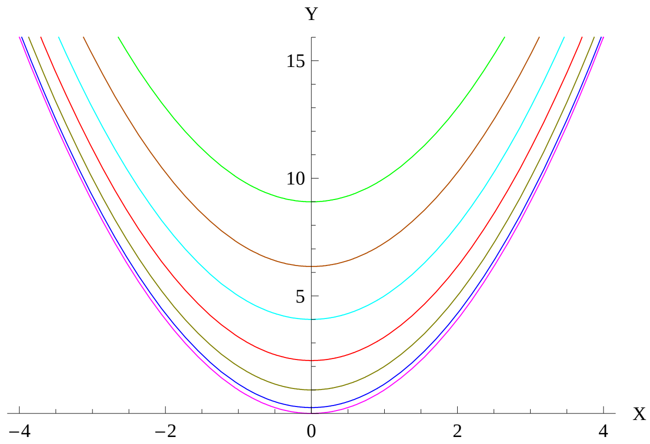

Figura 6.3: Curvas de nivel de la superficie $z = \sqrt{y - x^2}$ correspondientes a $z = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

6.2. Límites y continuidad

Definición 6.2.1 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0, y_0) un punto de acumulación de D. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto (x_0, y_0) y se escribe*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Si $D = \mathbb{R}^2$ escribiremos simplemente

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

en lugar de

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in\mathbb{R}^2}} f(x,y) = L.$$

Siempre que no haya lugar a confusión, escribiremos abreviadamente $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Teorema 6.2.1 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y si (x_0, y_0) es un punto de acumulación de D, entonces f puede tener solamente un límite en (x_0, y_0).*

Teorema 6.2.2 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, D' un subconjunto de D y (x_0, y_0) un punto de acumulación de D' (y por tanto de D). Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, entonces existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D',(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ y vale L.*

En general, puede existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D',(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ para muchos subconjuntos D' de D y, sin embargo, no existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

El resultado anterior permite probar en algunos casos la no existencia de $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. En efecto, si se pueden encontrar dos subconjuntos D_1 y D_2 de D tales que (x_0, y_0) sea un punto de acumulación de D_1 y de D_2 y

$$\lim_{(x,y)\in D_1,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq \lim_{(x,y)\in D_2,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

(o bien no existe alguno de estos límites), entonces puede asegurarse que no existe

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Ejemplo

Sea $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,.$$

Sea $S_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\} \setminus \{(0,0)\}$. Si $(x,y) \in S_\lambda$, entonces

$$f(x,y) = \frac{2x(\lambda x)}{x^2+(\lambda x)^2} = \frac{2\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\,,$$

luego

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_\lambda}} f(x,y) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\,,$$

que depende de λ. Por tanto, no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Teorema 6.2.3 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, sean f y g funciones definidas en D y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de D. Si $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ y $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$, entonces:*

(1) $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x, y) = kL$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$,

(2) $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x) + g(x)] = L + M$,

(3) $\lim\limits_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x)g(x)] = LM$,

(4) Si $g(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in D$ y $M \neq 0$, es

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}\,.$$

Definición 6.2.2 *Sea D un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando $(x, y) \in D$ tiende a infinito y se escribe*

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to\infty} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $\|(x, y)\| > K$, entonces $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Definición 6.2.3 *Sea D un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando $(x, y) \in D$ tiende a infinito y se escribe*

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty \quad (\textit{resp.} \lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to\infty} f(x, y) = -\infty)$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $K > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $\|(x, y)\| > K$, entonces $f(x, y) > \alpha$ (resp. $f(x, y) < \alpha$).

Definición 6.2.4 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de D. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando $(x, y) \in D$ tiende hacia (x_0, y_0) y se escribe*

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty \quad (\textit{resp.} \lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = -\infty)$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$, entonces $f(x, y) > \alpha$ (resp. $f(x, y) < \alpha$).

Definición 6.2.5 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$, sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que f es **continua en (x_0, y_0)** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$, entonces $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Si f no es continua en (x_0, y_0), entonces se dice que f es discontinua en (x_0, y_0).*

Observaciones

(1) Si $(x_0, y_0) \in D$ es un punto de acumulación de D, entonces f es continua en (x_0, y_0) si, y sólo si,

$$\lim_{(x,y)\in D,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

(2) Si $(x_0, y_0) \in D$ no es un punto de acumulación de D, entonces existe $\delta > 0$ tal que $D \cap B((x_0, y_0); \delta) = \{(x_0, y_0)\}$. Por tanto, f es automáticamente continua en un punto $(x_0, y_0) \in D$ que no sea un punto de acumulación de D. Tales puntos reciben el nombre de puntos aislados de D. Así pues, se estudiará la continuidad solamente en puntos de acumulación.

Definición 6.2.6 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si A es un subconjunto de D, se dice que f es continua en el conjunto A si f es continua en cada punto de A.*

Teorema 6.2.4 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $(x_0, y_0) \in D$ y que f y g son continuas en (x_0, y_0). Entonces:*

(1) kf es continua en (x_0, y_0) para todo $k \in \mathbb{R}$.

(2) $f + g$ es continua en (x_0, y_0).

(3) fg es continua en (x_0, y_0).

(4) Si $g(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in D$, entonces f/g es continua en (x_0, y_0).

Teorema 6.2.5 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en D. Entonces:*

(1) kf es continua en D para todo $k \in \mathbb{R}$.

(2) $f + g$ es continua en D.

(3) fg es continua en D.

(4) Si $g(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in D$, entonces f/g es continua en D.

Teorema 6.2.6 *Sean $A \subset \mathbb{R}^2, B \subset \mathbb{R}$ y sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en un punto $P \in D$ y g es continua en $f(P) \in B$, entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en P.*

Teorema 6.2.7 *Sean $A \subset \mathbb{R}^2, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en B. Si $f(A) \subset B$, entonces la función compuesta $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en A.*

Definición 6.2.7 *Se dice que una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in D$.*

Teorema 6.2.8 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en K. Entonces f es acotada.*

Definición 6.2.8 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que f tiene un* ***máximo absoluto*** *(resp.* ***mínimo absoluto****) en (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) para todo $(x, y) \in D$.*

Teorema 6.2.9 (Teorema del máximo-mínimo) *Si $K \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto compacto y f es continua en K, entonces existe un punto de K en el que f tiene un máximo absoluto y un punto de K en el que f tiene un mínimo absoluto.*

Las definiciones y los teoremas de esta sección son, por supuesto, aplicables a funciones de tres variables.

6.3. Funciones diferenciables

Definición 6.3.1 *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_0, y_0) \in D$. El plano $y = y_0$ corta a la superficie $z = f(x, y)$ determinando la curva*

$$\begin{cases} z = f(x, y_0), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Se define la ***derivada parcial de f respecto a x en el punto (x_0, y_0)*** *como la derivada de la función φ dada por $\varphi(x) = f(x, y_0)$ en x_0*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(siempre que el límite exista y sea finito). Se designa también por $f_x(x_0, y_0)$. El plano $x = x_0$ corta a la superficie $z = f(x, y)$ determinando la curva

$$\begin{cases} z = f(x_0, y), \\ x = x_0. \end{cases}$$

Se define la ***derivada parcial de f respecto a y en el punto (x_0, y_0)*** *como la derivada de la función ψ dada por $\psi(y) = f(x_0, y)$ en y_0*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

(siempre que el límite exista y sea finito). Se designa también por $f_y(x_0, y_0)$.

Si existe la derivada parcial de f respecto a x (resp. respecto a y) en todos los puntos del conjunto D, se llama ***derivada parcial de f respecto a x*** *(resp.* ***derivada parcial de f respecto a y****) a la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ (o f_x) (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$ (o f_y)) que asigna a cada $(x, y) \in D$ la derivada parcial de f respecto a x (resp. respecto a y) en (x, y), $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (o $f_x(x, y)$) (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (o $f_y(x, y)$)).* [1]

Para determinar $\frac{\partial f}{\partial x}$ se deriva f respecto a x de la manera usual, manteniendo y constante. Análogamente, para determinar $\frac{\partial f}{\partial y}$ se deriva f respecto a y, manteniendo x constante.

Se definen de forma análoga las derivadas parciales de funciones de tres variables.

[1] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francés, utilizó en un artículo de 1786 ("Mémoire sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le Calcul des Variations", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris (1788), págs. 7-37) el símbolo ∂ en la notación para una derivada parcial, $\frac{\partial v}{\partial x}$, aunque con poca convicción, pues ya no usó esta notación en artículos posteriores. El matemático alemán C. G. J. Jacobi (1804-1851) reintrodujo definitivamente en 1841 el símbolo ∂ y la correspondiente notación de la definición 6.3.1 para las derivadas parciales (*differentialia partialia*) en su artículo "De determinantibus functionalibus", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 22, págs. 319-359.

Ejemplo

Determinemos los valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(4,-5)$, siendo $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$.
Se tiene
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + 1,$$
luego
$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2\cdot 4 + 3\cdot(-5) = -7 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 3\cdot 4 + 1 = 13.$$

Observación

La existencia de $f_x(x_0,y_0)$ y $f_y(x_0,y_0)$ no asegura la continuidad de f en (x_0,y_0).
Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0, \\ 1 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$
Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Si $(x,y) \in S$ y $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene que $f(x,y) = 0$ pero $f(0,0) = 1$. Como
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in S}} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0),$$
f no es continua en $(0,0)$. Ahora bien, $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$.

Definición 6.3.2 *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0,y_0) \in D$. Se dice que **f es diferenciable en (x_0,y_0)** si existe una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (necesariamente única) tal que*
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0.$$
*A esta aplicación lineal la designaremos por $Df(x_0,y_0)$ y se la llama **diferencial de f en (x_0,y_0)**, y a la matriz que la define respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ se la llama **matriz jacobiana de f en (x_0,y_0)**, y se la designa por $f'(x_0,y_0)$.*

Definición 6.3.3 *Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un abierto $A \subset D$ si es diferenciable en cada uno de los puntos de A.*

Teorema 6.3.1 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(x_0,y_0) \in D$. Entonces f es continua en (x_0,y_0).*

Teorema 6.3.2 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(x_0,y_0) \in D$. Entonces existen $f_x(x_0,y_0)$ y $f_y(x_0,y_0)$, y*
$$f'(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0) \quad f_y(x_0,y_0)).$$

Por tanto,
$$Df(x_0,y_0)(h,k) = Df(x_0,y_0)(1,0)h + Df(x_0,y_0)(0,1)k = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k.$$

La definición que hemos introducido de diferencial en un punto (x_0, y_0) indica que cuando se pasa del punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + h, y_0 + k)$, la diferencia entre el incremento del valor de la función, $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$, y el valor en (h, k) de la aplicación lineal escogida (la diferencial) tiende a cero "más deprisa"que $\|(h, k)\|$. En este sentido $Df(x_0, y_0)(h, k)$ es una buena aproximación local de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$. Si hacemos $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$, lo que estamos diciendo es que

$$f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

es una buena aproximación local a la función f cerca de (x_0, y_0).

Definición 6.3.4 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$. El plano (en $\mathbb{R}^3$) definido mediante la expresión*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

*se llama **plano tangente** a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.*

Teorema 6.3.3 *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in D$. Si las funciones f_x y f_y están definidas en un conjunto abierto que contenga a (x_0, y_0) y son continuas en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).*

Definición 6.3.5 *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f_x y f_y están definidas y son continuas en D, se dice que **f es de clase 1 en D** y se escribe $f \in C^1(D)$.*

Evidentemente si $f \in C^1(D)$ entonces f es diferenciable en D.

Las definiciones y los teoremas anteriores se extienden, por supuesto, a funciones de tres variables (en tal caso, en la definición 6.3.4 se habla de hiperplano tangente en $\mathbb{R}^4$).

Ejemplos

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x+y} + \operatorname{sen}(x - y)$.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$f_x(x, y) = e^{x+y} + \cos(x - y), \qquad f_y(x, y) = e^{x+y} - \cos(x - y).$$

Las funciones f_x y f_y están definidas y son continuas en $\mathbb{R}^2$, es decir, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, y por tanto, f es diferenciable en todo punto. En particular, $Df(0, 0)$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por la matriz

$$f'(0, 0) = (f_x(0, 0) \quad f_y(0, 0)) = (2 \quad 0).$$

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. La función f es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser composición de funciones continuas. Aplicando la definición 6.3.1, se tiene

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

(¡no se trata de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$!) y, análogamente, $f_y(0,0) = 0$. Si f fuese diferenciable en $(0,0)$, debería ser $Df(0,0)$ la aplicación lineal definida por la matriz $(0 \;\; 0)$, y

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(0+h,0+k) - f(0,0) - Df(0,0)(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0,$$

pero este límite no existe, ya que si $S_\lambda = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : k = \lambda h\}$, es

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\in S_\lambda}} \frac{|f(h,k) - 0 - 0|}{\|(h,k)\|} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\in S_\lambda}} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\sqrt{|\lambda|}}{|h|\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{\frac{|\lambda|}{1+\lambda^2}},$$

que depende de λ.

Si $a \neq 0$, $f_x(a,0) = 0$ y no existe $f_y(a,0)$, puesto que

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{\sqrt{|ak|}}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{k}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{k\to 0^-} \frac{\sqrt{|ak|}}{k} = \lim_{k\to 0^-} -\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{-k}} = -\infty.$$

Análogamente, si $b \neq 0$, $f_x(0,b)$ no existe y $f_y(0,b) = 0$.

La función f es diferenciable en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ por ser continuas las derivadas parciales en cada punto de A:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{xy}} & \text{si } x>0, y>0 \text{ o bien } x<0, y<0 \\ \frac{-y}{2\sqrt{-(xy)}} & \text{si } x>0, y<0 \text{ o bien } x<0, y>0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{2\sqrt{xy}} & \text{si } x>0, y>0 \text{ o bien } x<0, y<0 \\ \frac{-x}{2\sqrt{-(xy)}} & \text{si } x>0, y<0 \text{ o bien } x<0, y>0. \end{cases}$$

Si $\alpha > 0$, el plano tangente a la gráfica de f en el punto (α,α,α) es

$$z = f(\alpha,\alpha) + f_x(\alpha,\alpha)(x-\alpha) + f_y(\alpha,\alpha)(y-\alpha) = \alpha + \frac{1}{2}(x-\alpha) + \frac{1}{2}(y-\alpha) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

o bien

$$x + y - 2z = 0.$$

En la Figura 6.4 se representa la gráfica de la función f.

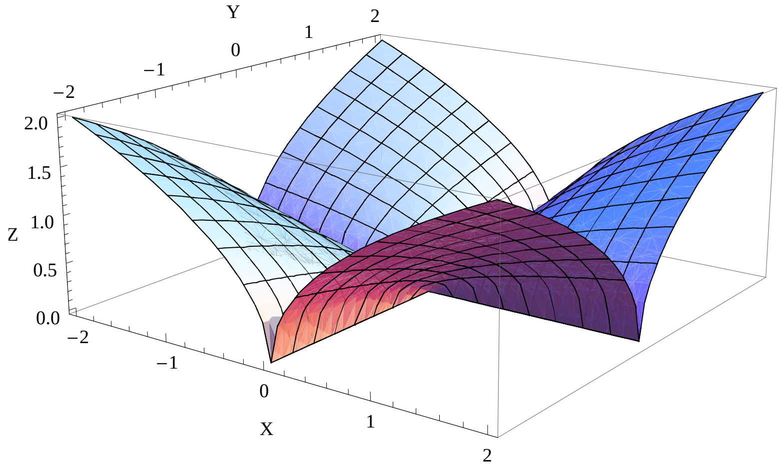

Figura 6.4: Superficie $z = \sqrt{|xy|}$.

Cuando derivamos una función real de dos variables f dos veces, se obtienen sus **derivadas parciales de segundo orden**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}.$$

La extensión de estas notaciones a órdenes superiores es obvia (así como a funciones de tres variables).

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x\cos y + ye^x$. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos y + ye^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \operatorname{sen} y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\operatorname{sen} y + e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\operatorname{sen} y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = ye^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x\cos y.$$

En el ejemplo anterior observamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Esto no es una casualidad. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.3.4 (Teorema de Schwarz) *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_0, y_0) \in D$. Si f_x, f_y y f_{xy} existen en D y además f_{xy} es continua en (x_0, y_0), entonces existe $f_{yx}(x_0, y_0)$ y se tiene*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

(El teorema es también válido si en el enunciado se intercambian f_{xy} y f_{yx}).

Definición 6.3.6 *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admite derivadas parciales hasta el orden $k \geq 1$ en cada punto de D y éstas son continuas en D, se dice que **f es de clase k en D** y se escribe $f \in C^k(D)$. Si f es de clase k en D para cada $k \in \mathbb{N}$ se dice que **f es de clase infinito en D** y se escribe $f \in C^\infty(D)$.*

Definición 6.3.7 *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^2(D)$. La matriz (simétrica en virtud del teorema de Schwarz)*

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

*se denomina **matriz hessiana de f en (x_0, y_0)** y su determinante se llama **hessiano de f en (x_0, y_0)**.*

El teorema de Schwarz es también válido para funciones de tres variables; las dos definiciones que siguen al teorema se extienden de forma natural a tales funciones.

6.4. Extremos relativos de las funciones de dos variables[2]

Definición 6.4.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que f tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en (x_0, y_0) si existe un disco abierto $B((x_0, y_0); \delta)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0); \delta) \cap D$. Se dice que f tiene un **extremo relativo** en (x_0, y_0) si tiene o bien un máximo relativo o bien un mínimo relativo en (x_0, y_0). En cada caso, si para $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ la desigualdad es estricta diremos que el extremo es **estricto**.*

El siguiente teorema proporciona una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo en un punto.

Teorema 6.4.1 *Sea (x_0, y_0) un punto interior del conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en el que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo. Si existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.*

[2] Las definiciones y los resultados de esta sección se extienden de forma natural a las funciones de tres variables, excepto los teoremas 6.4.2 y 6.4.5.

Observaciones

(1) La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + y^3$, verifica que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ y sin embargo en $(0, 0)$ no tiene un extremo relativo pues f cambia de signo en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ ($f(h, 0) = h^3$ es positivo si $h > 0$ y negativo si $h < 0$).

(2) Una función puede tener un extremo relativo en un punto (x_0, y_0) en el que no existe alguna derivada parcial, en cuyo caso la condición del teorema anterior no es verificable. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = |x| + |y|$ no tiene derivadas parciales en el punto $(0, 0)$ y, sin embargo, tiene un mínimo relativo en dicho punto ya que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Definición 6.4.2 *Un punto interior (x_0, y_0) del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ de f tal que $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ se llama **punto crítico** (o **estacionario**) de f.*

Así pues, los únicos puntos donde $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ puede tener un extremo relativo son los puntos críticos, los puntos interiores del dominio donde una o ambas derivadas parciales no existan y los puntos frontera del dominio.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Buscamos los puntos en los que f tiene un extremo relativo.

El dominio de f es $\mathbb{R}^2$, luego no hay puntos frontera. Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 2x \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 2y$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, los únicos puntos donde f puede tener un extremo relativo son los puntos críticos. De

$$f_x(x, y) = 2x = 0, \qquad f_y(x, y) = 2y = 0$$

se deduce que el único punto crítico es el origen $(0, 0)$. Como para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$$

f tiene en el origen un mínimo relativo, que de hecho es absoluto.

Definición 6.4.3 *Sea (x_0, y_0) un punto crítico de f. Se dice que f tiene en (x_0, y_0) un **punto de silla** si en todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) hay puntos donde la función toma valores mayores que $f(x_0, y_0)$ y puntos donde la función toma valores menores que $f(x_0, y_0)$.*

Teorema 6.4.2 *Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 2 en D. Sea $(x_0, y_0) \in D$ un punto crítico de f. Entonces:*

(1) Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ y $\det[Hf(x_0, y_0)] > 0$, L tiene un mínimo relativo estricto en (x_0, y_0).

(2) Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ y $\det[Hf(x_0, y_0)] > 0$, L tiene un máximo relativo estricto en (x_0, y_0).

(3) Si $\det[Hf(x_0, y_0)] < 0$, f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).

(4) Si $\det[Hf(x_0, y_0)] = 0$, se presenta un caso dudoso (en (x_0, y_0) puede haber extremo relativo o no).

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$. El dominio de f es $\mathbb{R}^2$, luego no hay puntos frontera. Las derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = -2x \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 2y$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. El único punto crítico es $(0, 0)$. Las funciones

$$f_{xx}(x, y) = -2,\ f_{yy}(x, y) = 2,\ f_{xy}(x, y) = 0$$

son continuas en $\mathbb{R}^2$. Se tiene que

$$\det[Hf(0, 0)] = -4 < 0,$$

luego f tiene un punto de silla en $(0, 0)$. Se concluye que f no tiene extremos relativos.

Definición 6.4.4 *Un subconjunto C de $\mathbb{R}^2$ se dice que es* ***convexo*** *si es vacío o si contiene todos los segmentos cuyos extremos están en C, es decir, si para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ y $0 \leq t \leq 1$ se tiene que $(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in C$.*

Definición 6.4.5 *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo. Se dice que $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es* ***convexa*** *en C si para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ y $0 \leq t \leq 1$, se tiene que*

$$f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) \leq (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y}).$$

Se dice que f es ***cóncava*** *si $-f$ es convexa.*[3]

Teorema 6.4.3 *Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto convexo y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Si f tiene en $\boldsymbol{a} \in C$ un mínimo relativo, entonces tiene en $\boldsymbol{a}$ un mínimo absoluto.*[4]

Teorema 6.4.4 *Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y convexo, y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en C. Entonces f es convexa si, y sólo si, para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in C$,*

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$[5]

Corolario 6.4.1 *Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y convexo, y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y convexa en C. Entonces f tiene en $\boldsymbol{a} \in C$ un mínimo absoluto si, y sólo si, $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$.*

Teorema 6.4.5 *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y convexo, y sea $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 2 en C. Entonces f es convexa si, y sólo si, $f_{xx}(\boldsymbol{a}) \geq 0$ y $\det[Hf(\boldsymbol{a})] \geq 0$ para todo $\boldsymbol{a} \in C$.*[6]

---

[3] Se dice que f es *estrictamente convexa* si para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ y $0 < t < 1$, se tiene

$$f((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) < (1-t)f(\boldsymbol{x}) + tf(\boldsymbol{y}).$$

Se dice que f es *estrictamente cóncava* si $-f$ es estrictamente convexa.

[4] Si f es estrictamente convexa se tiene que $f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x})$ si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ y, por tanto, f toma su valor mínimo en un único punto.

[5] f es estrictamente convexa si, y sólo si, para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in C, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{x}$,

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

[6] Si $f_{xx}(\boldsymbol{a}) > 0$ y $\det[Hf(\boldsymbol{a})] > 0$ para todo $\boldsymbol{a} \in C$, entonces f es estrictamente convexa en C. El recíproco no es cierto (basta considerar, por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^4 + y^4$).

Ejemplos

(1) La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4)$, tiene derivadas parciales de segundo orden

$$f_{xx}(x,y) = 2, \;\; f_{yy}(x,y) = 12y^2, \;\; f_{xy}(x,y) = 0$$

que son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$. Además $f_{xx}(x,y) > 0$ y $\det[Hf(x,y)] = 24y^2 \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, luego f es convexa. Las derivadas parciales de f son

$$f_x(x,y) = 2x \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y) = 4y^3 - 4$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. El único punto crítico es $(0,1)$ y este es, por tanto, el único punto en el que f presenta un mínimo absoluto: $f(0,1) = -3$.

(2) ***El método de los mínimos cuadrados***

Supongamos que se tienen $n(>1)$ puntos $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ que no pertenecen a una misma recta vertical, y busquemos una recta $y = ax + b$ tal que sea mínima la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos dados a la recta. La ordenada del punto de la recta que tiene por abscisa x_k es $ax_k + b$. Por tanto, debemos determinar los valores de a y b que minimizan el valor de la función

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (ax_k + b)]^2.$$

El dominio de f es $\mathbb{R}^2$. Los puntos críticos de f son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} f_a(a,b) &= 2\sum_{k=1}^{n} [y_k - (ax_k + b)](-x_k) = 0 \\ f_b(a,b) &= 2\sum_{k=1}^{n} [y_k - (ax_k + b)](-1) \quad = 0 \end{aligned}\right\}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + nb &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene solución única pues el determinante de la matriz de los coeficientes es $n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2$ que, por la desigualdad de Cauchy, es positivo. La solución del sistema es

$$a_0 = \frac{n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2},$$

$$b_0 = \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}.$$

Las funciones

$$f_{aa}(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2,\ \ f_{bb}(a,b) = 2n,\ \ f_{ab}(a,b) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k$$

son continuas en $\mathbb{R}^2$. Además $f_{aa}(a,b) > 0$ y $Hf(a,b) = 4\big[n\sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2\big] > 0$ para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, luego f es convexa. Por tanto (a_0, b_0) es el único punto en el que f tiene un mínimo absoluto. La solución es la recta $y = a_0x + b_0$, que recibe el nombre de *recta de mínimos cuadrados*.

6.5. Extremos condicionados de las funciones de dos variables[7]

En esta sección veremos algunos resultados que permiten estudiar la existencia de extremos relativos de una función f de dos variables restringida a un subconjunto S de su dominio D, cuando S se describe de forma implícita por una ecuación del tipo $g(x,y) = 0$.

Definición 6.5.1 *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\}$. Se dice que f tiene un* ***máximo relativo*** *(resp.* ***mínimo relativo****)* ***en $(x_0, y_0) \in D$ sometido a la condición $g(x,y) = 0$****, es decir,* ***en $(x_0, y_0) \in S$****, si existe $\delta > 0$ tal que $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$) para todo $(x,y) \in B((x_0,y_0);\delta) \cap S$, es decir, si la función restricción $f|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo (resp. mínimo relativo) en (x_0,y_0). Se dice que f tiene un* ***extremo relativo en $(x_0, y_0) \in D$ sometido a la condición $g(x,y) = 0$*** *si tiene o bien un máximo relativo o bien un mínimo relativo en $(x_0,y_0) \in D$ sometido a la condición $g(x,y) = 0$. En cada caso, si para $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ la desigualdad es estricta diremos que el extremo es* ***estricto****.*

El llamado *método del multiplicador de Lagrange* proporciona una condición necesaria para la existencia de extremo relativo condicionado.

Teorema 6.5.1 (Teorema del multiplicador de Lagrange) *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase 1 en D y $S = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\}$. Si en $(x_0,y_0) \in S$ la función $f|_S$ tiene un extremo relativo y $\operatorname{rg}[g'(x_0,y_0)] = 1$, entonces existe un número real λ tal que*

$$f'(x_0,y_0) = \lambda g'(x_0,y_0),$$

es decir, se verifica

$$f_x(x_0,y_0) = \lambda g_x(x_0,y_0) \qquad y \qquad f_y(x_0,y_0) = \lambda g_y(x_0,y_0).$$

El número λ recibe el nombre de ***multiplicador de Lagrange****.*

Así pues, la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y y el multiplicador λ), nos permite obtener los posibles extremos. Una vez localizados se hace necesario disponer de condiciones suficientes para poder garantizar que en esos puntos la función presenta un extremo.

[7] Las definiciones y los teoremas de esta sección se extienden de forma natural a las funciones de tres variables.

Teorema 6.5.2 *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase 2 en D y $S = \{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\}$. Sea L la* ***función auxiliar de Lagrange*** *o* ***función lagrangiana*** *definida por*

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \ \ (x, y) \in D.$$

Sea (x_0, y_0) un punto de S con $\mathrm{rg}[g'(x_0, y_0)] = 1$ y que además es punto crítico de L. Finalmente, sea $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(h, k) = (h \ \ k) HL(x_0, y_0)(h \ \ k)^t.[8]$$

(1) Si $Q(h, k) > 0$ para todo $(h, k) \in \mathrm{Ker}[Dg(x_0, y_0)] \setminus \{(0, 0)\}$, es decir, para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, con $(h, k) \neq (0, 0)$, tal que $g'(x_0, y_0)(h \ \ k)^t = 0$, entonces $f|_S$ tiene un mínimo relativo estricto en (x_0, y_0).

(2) Si $Q(h, k) < 0$ para todo $(h, k) \in \mathrm{Ker}[Dg(x_0, y_0)] \setminus \{(0, 0)\}$, es decir, para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, con $(h, k) \neq (0, 0)$, tal que $g'(x_0, y_0)(h \ \ k)^t = 0$, entonces $f|_S$ tiene un máximo relativo estricto en (x_0, y_0).

Ejemplo

Vamos a encontrar los extremos relativos y absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, en el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

Pongamos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ y consideremos la función auxiliar de Lagrange que viene dada por $L(x, y) = x^2 + y^2 - xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$. Los puntos críticos de L pertenecientes a S son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} L_x(x, y) &= 2x - y - 2\lambda x = 0 \\ L_y(x, y) &= 2y - x - 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 \quad = 0 \end{aligned}\right\}$$

es decir: $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ para $\lambda = \frac{1}{2}$; $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ para $\lambda = \frac{3}{2}$. Por otra parte, $\mathrm{rg}[g'(x, y)] = \mathrm{rg}(2x \ \ 2y) = 1$ para todo $(x, y) \in S$.

Para los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, con $\lambda = \frac{1}{2}$, es

$$HL(1, 1) = HL(-1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además

$$g'(1, 1)(h \ \ k)^t = 0 \Longleftrightarrow h = -k \Longleftrightarrow g'(-1, -1)(h \ \ k)^t = 0,$$

y, para $\alpha \neq 0$,

$$(-\alpha \ \ \alpha) HL(1, 1)(-\alpha \ \ \alpha)^t = (-\alpha \ \ \alpha) HL(-1, -1)(-\alpha \ \ \alpha)^t = 4\alpha^2 > 0,$$

por consiguiente, $f|_S$ tiene en $(1, 1)$ y en $(-1, -1)$ mínimos relativos estrictos. Análogamente, para los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$, con $\lambda = \frac{3}{2}$, se tiene que

$$HL(1, -1) = HL(-1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

[8] Dada una matriz de números reales A, $n \times n$, simétrica, se denomina **forma cuadrática** asociada a la matriz A a la aplicación $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}^t.$$

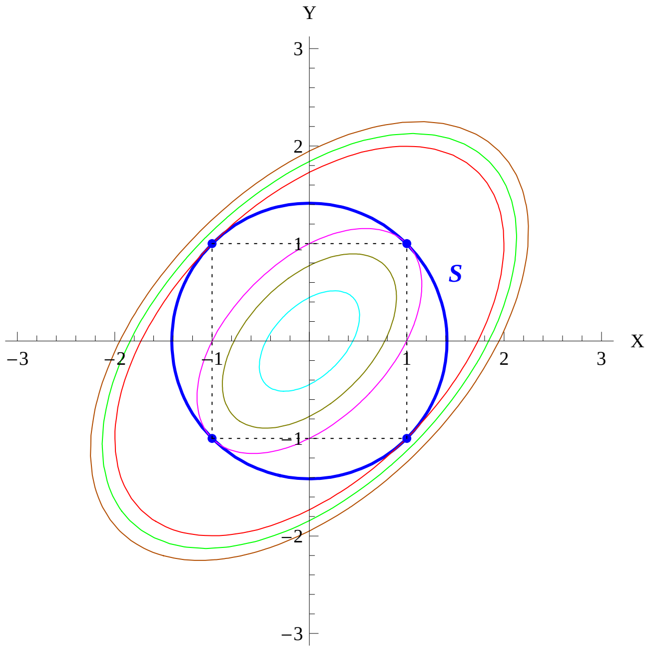

Figura 6.5: Conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ y curvas de nivel de la superficie $z = x^2 + y^2 - xy$ correspondientes a $z = 0.2, 0.6, 1, 3, 3.4, 3.8$.

y

$$g'(1, -1)(h \;\; k)^t = 0 \Longleftrightarrow h = k \Longleftrightarrow g'(-1, 1)(h \;\; k)^t = 0,$$

así que

$$(\alpha \;\; \alpha)HL(1, -1)(\alpha \;\; \alpha)^t = (\alpha \;\; \alpha)HL(-1, 1)(\alpha \;\; \alpha)^t = -4\alpha^2 < 0,$$

luego $f|_S$ tiene máximos relativos estrictos en dichos puntos.

Además, $(1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ y $(-1, 1)$ son los únicos puntos en los cuales la función puede tener extremos relativos condicionados y, puesto que S es un conjunto compacto y f es continua en S, f alcanza los extremos absolutos en algunos de ellos. Como $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$ y $f(1, -1) = f(-1, 1) = 3$, f alcanza en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ el mínimo absoluto condicionado 1 y en los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ el máximo absoluto condicionado 3.

Desde un punto de vista geométrico, podemos analizar la evolución de las curvas de nivel de la función f, es decir, $x^2 + y^2 - xy = C, C \geq 0$, y su relación con el conjunto S (cf. Figura 6.5). Si, empezando con $C = 0$, aumentamos C hasta que la correspondiente curva de nivel toque a S, cada punto de *primer contacto* será un punto en el que f tendrá un mínimo absoluto condicionado. Esto sucede cuando $C = 1$, obteniéndose los puntos de contacto $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Análogamente, si disminuimos C hasta que la correspondiente curva de nivel toque a S, cada punto de primer contacto será un punto en el que f tendrá un máximo absoluto condicionado. Aparecen así los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$, cuando $C = 3$.

Observación

Si la búsqueda se reduce únicamente a los extremos absolutos puede evitarse el uso del teorema 6.5.2. En efecto, los valores de la función en los puntos críticos de la función auxiliar de Lagrange son los únicos candidatos a extremos relativos, luego los únicos candidatos también a extremos absolutos. Por tanto, los extremos absolutos se alcanzan en algunos de esos puntos.

6.6. Integrales dobles sobre rectángulos

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, es decir, el producto cartesiano $R = [a, b] \times [c, d]$.

Una *partición regular* de R de orden n, $\mathcal{P}_n$, es un conjunto formado por dos colecciones ordenadas de $n+1$ puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $y_0, y_1, \ldots, y_n$, es decir, puntos que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}\,, \qquad y_k - y_{k-1} = \frac{d-c}{n}$$

para $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Si $R_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$, con frecuencia se escribe $\mathcal{P}_n = \{R_{jk}\}_{j,k=1}^n$.

Sea t_{jk} cualquier punto en R_{jk}; los puntos t_{jk} se llaman etiquetas de los rectángulos R_{jk}. $\dot{\mathcal{P}}_n = \{(R_{jk}, t_{jk})\}_{j,k=1}^n$ recibe el nombre de *partición regular etiquetada* de R de orden n.

Se define la *suma de Riemann* de una función acotada $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ correspondiente a $\dot{\mathcal{P}}_n$ como

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) = \sum_{j,k=1}^{n} f(t_{jk}) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}\,.$$

Si f es positiva en R, entonces la suma de Riemann anterior es la suma de los volúmenes de n^2 cajas rectangulares cuyas bases son los rectángulos R_{jk} y cuyas alturas son $f(t_{jk})$.

Definición 6.6.1 *Si la sucesión $\{S(f; \dot{\mathcal{P}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un límite S, el mismo para cualquier selección de etiquetas t_{jk} en los rectángulos R_{jk}, se dice que f es* ***integrable (Riemann)*** *en R y se escribe*

$$\iint_R f(x,y)\; dx\, dy$$

para el límite S. Así pues

$$\iint_R f(x,y)\; dx\, dy = \lim_{n\to\infty} S(f; \dot{\mathcal{P}}_n)\,.$$

Teorema 6.6.1 *Si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en R, entonces f es integrable en R.*

Definición 6.6.2 *Las expresiones*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\; dy\, dx\,, \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\; dx\, dy$$

reciben el nombre de ***integrales iteradas****. Su significado es, respectivamente,*

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\; dy \right] dx\,, \qquad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\; dx \right] dy\,.$$

El teorema siguiente expresa que la integral doble de una función continua sobre un rectángulo puede calcularse como una integral iterada en cualquier orden.

Teorema 6.6.2 *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces*

$$\iint_R f(x,y)\ dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\,dy\,.$$

Ejemplo

Calculemos $\iint_R (x^2+y)\ dx\,dy$ siendo $R = [0,1] \times [0,1]$.
Por el teorema anterior

$$\iint_R (x^2+y)\ dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y)\ dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2+y)\ dx\right] dy\,.$$

Se tiene

$$\int_0^1 (x^2+y)\ dx = \left(\frac{x^3}{3} + yx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y\,,$$

luego

$$\iint_R (x^2+y)\ dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y\right) dy = \left(\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}\,.$$

6.7. Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

Definición 6.7.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado que no es un rectángulo y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Sea R un rectángulo de lados paralelos a los ejes que contiene a D. Sea $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D, \\ 0 & si\ (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Si f^* es integrable en R diremos que f es integrable en D y se define la ***integral (doble) de f en D*** *por*

$$\iint_D f(x,y)\ dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\ dx\,dy\,.$$

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y la frontera de D está formada por gráficas de funciones continuas, entonces f^* es integrable en R.

Se definen las siguientes *regiones elementales* de integración:

- **Región de tipo I**

  Contiene puntos (x,y) tales que para cada x fijo, $a \leq x \leq b$, y varía de $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas (cf. Figura 6.6).

- **Región de tipo II**

  Contiene puntos (x,y) tales que para cada y fijo, $c \leq y \leq d$, x varía de $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas (cf. Figura 6.7).

Todas las regiones que consideraremos serán de uno de esos dos tipos o podrán descomponerse en un número finito de fragmentos, cada uno de los cuales será de uno de esos dos tipos.

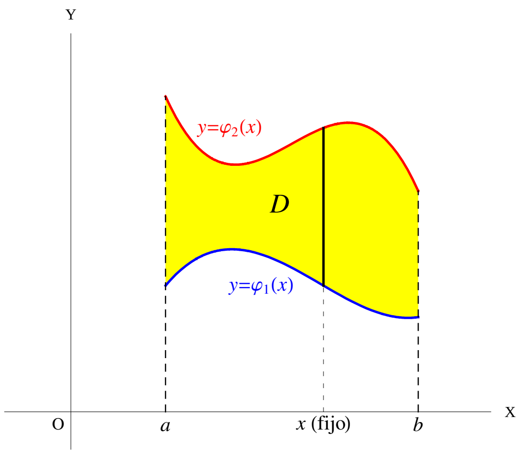

Figura 6.6: Región D de tipo I.
Para $x \in [a, b]$ fijo, y varía en el intervalo $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$.

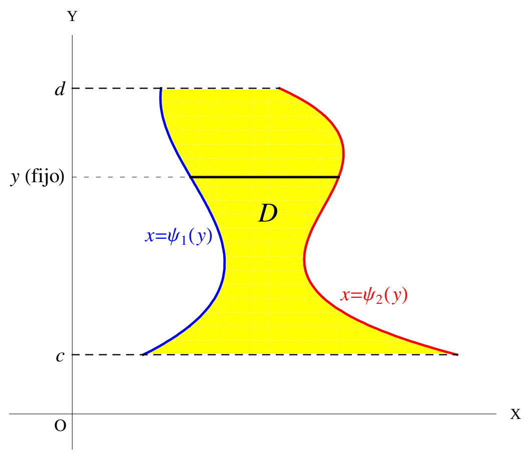

Figura 6.7: Región D de tipo II.
Para $y \in [c, d]$ fijo, x varía en el intervalo $[\psi_1(y), \psi_2(y)]$.

Teorema 6.7.1 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.*

(1) Si D es una región de tipo I, entonces

$$\iint_D f(x, y)\ dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\ dy\, dx\,.$$

(2) Si D es una región de tipo II, entonces

$$\iint_D f(x, y)\ dx\, dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\ dx\, dy\,.$$

Ciertas regiones son de tipo I y de tipo II a la vez. En estos casos se puede usar indistintamente un método u otro del teorema anterior. En ocasiones uno de los procedimientos puede involucrar cálculos más sencillos que el otro. Por tanto, será conveniente examinar ambos métodos antes de iniciar el cálculo.

Ejemplo

Sea D la región limitada por las curvas $y = 2x$ e $y = x^2$. Calculemos $\iint_D (x + y)\ dx\, dy$.
Se tiene

$$\iint_D (x + y)\ dx\, dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x + y)\ dy\, dx = \int_0^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 \right)\Bigg|_0^2 = \frac{52}{15}\,,$$

y también

$$\iint_D (x+y)\;dx\,dy = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x+y)\;dx\,dy = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}-\frac{5}{8}y^2\right)\,dy = \left(\frac{1}{4}y^2+\frac{2}{5}y^{5/2}-\frac{5}{24}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{52}{15}\,.$$

Definición 6.7.2 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado cuya frontera está formada por gráficas de funciones continuas.*

(1) El área de la región D viene dada por

$$\iint_D dx\,dy\,.$$

(2) Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y positiva en D, el volumen del sólido bajo la superficie $z = f(x,y)$ sobre la región D viene dado por

$$\iint_D f(x,y)\;dx\,dy\,.$$

En el teorema siguiente reunimos algunas propiedades importantes de las integrales dobles.

Teorema 6.7.2 *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sean f y g funciones integrables en D.*

(a) Si $k \in \mathbb{R}$, se tiene que kf es integrable en D y

$$\iint_D kf(x,y)\;dx\,dy = k\iint_D f(x,y)\;dx\,dy\,.$$

(b) $f+g$ es integrable en D y

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\;dx\,dy = \iint_D f(x,y)\;dx\,dy + \iint_D g(x,y)\;dx\,dy\,.$$

(c) Si $f(x,y) \le g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$ entonces

$$\iint_D f(x,y)\;dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\;dx\,dy\,.$$

(d) $|f|$ es integrable en D y

$$\left|\iint_D f(x,y)\;dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\;dx\,dy\,.$$

(e) Si D se puede dividir en dos subregiones D_1 y D_2, f es integrable en D_1 y en D_2 y

$$\iint_D f(x,y)\;dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\;dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\;dx\,dy\,.$$

La existencia de simetría en la región de integración respecto de alguno de los ejes coordenados y la paridad de la función a integrar, facilitan el cálculo de una integral doble.

1. *Función par en x; región D simétrica respecto del eje OY.*

   Se verifica que $f(-x,y) = f(x,y)$, para todo $(x,y) \in D$, y el valor de la integral es
   $$\iint_D f = 2 \iint_{\widetilde{D}} f,$$
   siendo $\widetilde{D} = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}$.

2. *Función par en y; región D simétrica respecto del eje OX.*

   Ahora $f(x,-y) = f(x,y)$, para todo $(x,y) \in D$, y el valor de la integral es
   $$\iint_D f = 2 \iint_{\widetilde{D}} f,$$
   siendo $\widetilde{D} = \{(x,y) \in D : y \geq 0\}$.

3. *Función par en x e y; región D simétrica respecto del eje OX y también respecto del eje OY.*

   Por el apartado 1 es
   $$\iint_D f = 2 \iint_{\widetilde{D}} f,$$
   siendo $\widetilde{D} = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}$, y por el apartado 2 es
   $$\iint_{\widetilde{D}} f = 2 \iint_{\widetilde{\widetilde{D}}} f,$$
   siendo $\widetilde{\widetilde{D}} = \{(x,y) \in D : x \geq 0, y \geq 0\}$, es decir
   $$\iint_D f = 4 \iint_{\widetilde{\widetilde{D}}} f.$$

4. *Función impar en x; región D simétrica respecto del eje OY.*

   En este caso $f(-x,y) = -f(x,y)$, para todo $(x,y) \in D$, y se tiene
   $$\iint_D f = 0.$$

5. *Función impar en y; región D simétrica respecto del eje OX.*

   Ahora se tiene $f(x,-y) = -f(x,y)$, para todo $(x,y) \in D$, y resulta
   $$\iint_D f = 0.$$

6.8. Ejercicios

1. Encuentra el dominio y el recorrido de la función, describe las curvas de nivel, determina si el dominio es un conjunto abierto, cerrado o no es ni abierto ni cerrado y decide si el dominio es acotado o no:

(1) $f(x,y) = x - y\,,$ (5) $f(x,y) = \dfrac{x|x| - y|y|}{x+y}\,,$

(2) $f(x,y) = x - |y|\,,$ (6) $f(x,y) = xy\,,$

(3) $f(x,y) = |x| - |y|\,,$ (7) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,,$

(4) $f(x,y) = |x| - y^2\,,$ (8) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\,.$

2. Estudia la existencia de los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}\,,$ (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}\,,$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\,,$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\,,$ (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x}\right),$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}\,,$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}\,.$

3. Calcula las derivadas parciales de las funciones siguientes:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy-1}\,,$ (4) $f(x,y) = x^y\,,$

(2) $f(x,y) = \cos\left(x^2\,\mathrm{sen}\,y\right),$ (5) $f(x,y,z) = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,y}\,e^z\,,$

(3) $f(x,y) = e^{xy}\ln y\,,$ (6) $f(x,y,z) = xz\ \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{y}{x}\right).$

4. Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua. Calcula las derivadas parciales de las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt, \qquad f_2(x,y) = \int_{2x}^{xy} g(t)\,dt.$$

5. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de las funciones siguientes:

$$(1)\ \ f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0\,,$$

$$(2)\ \ f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x^2+y^2}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0\,,$$

$$(3)\ \ f(x,y)=\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0\,,$$

$$(4)\ \ f(x,y)=(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0\,.$$

6. Sea $f_a:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f_a(x,y)=\frac{(xy)^a}{x^2+y^2}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f_a(0,0)=0\,.$$

Discute, según los valores de $a>0$, la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f_a en $(0,0)$.

7. Se define $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\ f(0,0)=0\,.$$

Demuestra que $f_y(x,0)=x$ para cada x y $f_x(0,y)=-y$ para cada y. Demuestra que $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$. ¿Contradice esto el teorema de Schwarz?

8. Encuentra los extremos relativos y puntos de silla de las funciones siguientes:

(1) $f(x,y)=x^4+x^2y+y^2\,,$

(2) $f(x,y)=xy\,e^{x+2y}\,,$

(3) $f(x,y)=4xy-x^4-y^4\,,$

(4) $f(x,y)=\mathrm{sen}(xy)\,,$

(5) $f(x,y)=(x^2+y^2-1)(xy+4)\,,$

(6) $f(x,y)=x^3+y^3-3\alpha xy\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\,,$

(7) $f(x,y)=y\,\mathrm{sen}\,x\,,$

(8) $f(x,y)=\mathrm{sen}\,x\cdot\mathrm{sen}\,y\,.$

9. Determina los puntos de silla y los extremos relativos y absolutos de la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2.$$

10. Sea $D\subset\mathbb{R}^2$ abierto y $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$. Sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función creciente (o decreciente) y $G=h\circ f$. Demuestra que los puntos de extremo relativo son los mismos para las funciones f y G.

11. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(x-1) & \text{si } x > y. \end{cases}$$

(1) Estudia la continuidad de f.

(2) Demuestra que f tiene máximo absoluto y que éste se alcanza en el interior del cuadrado donde está definida.

12. Demuestra la desigualdad

$$x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y} \geq 3\sqrt[3]{3}\, a^2 \quad \text{si } x > 0, y > 0,$$

siendo a una constante positiva.

13. Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ tiene extremos absolutos en la región $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$. Determínalos.

14. Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 + y^2)\, e^{-x-y}$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

(1) Demuestra que f tiene extremos absolutos en A. Determínalos.

(2) Deduce que si $(x,y) \in A$ entonces $x^2 + y^2 \leq 4e^{x+y-2}$.

(3) En el punto $(1,1) \in A$, ¿tiene f un extremo relativo?

15. Determina los extremos relativos y absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y - 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

16. Determina los extremos relativos y absolutos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + 4y - 4$ en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

17. Halla las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

18. Encuentra los puntos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ que están a mayor y menor distancia de la recta $x + y = 4$.

19. Halla los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$ en el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 2\}$. ¿Tiene extremos absolutos?

20. Determina los extremos, tanto relativos como absolutos, de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$.

21. Halla los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, bajo la condición $x^3y + xy^3 = 2a^4$, según los valores de $a > 0$.

22. Calcula las siguientes integrales dobles:

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy\,,\ D=[0,1]\times[0,1]\,,$

(2) $\displaystyle\iint_D x\ln(xy)\ dx\,dy\,,\ D=[2,3]\times[1,2]\,,$

(3) $\displaystyle\iint_D y^2\operatorname{sen}(xy)\ dx\,dy\,,\ D=[0,2\pi]\times[0,1]\,,$

(4) $\displaystyle\iint_D |y-\operatorname{sen}x|\ dx\,dy\,,\ D=[0,\pi]\times[0,1]\,,$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy\,,\ D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x\le 2,\ \tfrac{1}{x}\le y\le x\big\}\,,$

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{1+x^3}\,dx\,dy\,,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x^2+y^2\ge 1\}\,,$

(7) $\displaystyle\iint_D xy^2\ dx\,dy\,,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |y|\le x\le 1\}\,,$

(8) $\displaystyle\iint_D (2\sqrt{1-x^2}+1)\ dx\,dy\,,\ D=\overline{B}((0,0);1)\cap\overline{B}((0,1);1)\,,$

(9) $\displaystyle\iint_D \operatorname{máx}\{x,y\}\ dx\,dy\,,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 2\,|y|\le x^2+1\le 2\}\,.$

(10) $\displaystyle\iint_D |x-1|\ dx\,dy\,,\ D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|\le y\le \tfrac{1}{2}\,x+3\big\}\,.$

23. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y par. Si $a>0$ y $D=[0,a]\times[0,a]$, demuestra que

$$\iint_D f(x-y)\ dx\,dy = 2\int_0^a (a-t)f(t)\,dt.$$

Deduce de la igualdad anterior el valor de la integral

$$\iint_D |x-y|\cos(x-y)\ dx\,dy\,,\ D=\big[0,\tfrac{\pi}{2}\big]\times\big[0,\tfrac{\pi}{2}\big].$$

24. Calcula mediante una integral doble el área encerrada por una elipse de semiejes a y b.

25. Calcula mediante una integral doble el área limitada por las curvas $y=\frac{4}{x^2}$ e $y=5-x^2$.

26. Calcula mediante una integral doble el volumen bajo la superficie $z=x^2+y^2$ sobre la región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$.

27. Calcula el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2+y^2=r^2$ y $x^2+z^2=r^2$.