Tema 4

Cálculo integral con funciones de una variable

4.1. La integral de Riemann

Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Una *partición* de I es un conjunto

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

de puntos de I tal que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Los puntos de $\mathcal{P}$ se utilizan para dividir $I = [a, b]$ en los subintervalos

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Con frecuencia la partición $\mathcal{P}$ se designa por $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$. Se define la *norma* de $\mathcal{P}$ como el número

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\,\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Así pues, la norma de una partición es la longitud del mayor subintervalo en que la partición divide a $[a, b]$.

Si se selecciona un punto t_i en cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces tales puntos se llaman *etiquetas* de los subintervalos I_i. Un conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$$

de subintervalos y etiquetas correspondientes recibe el nombre de *partición etiquetada* de I (Figura 4.1).

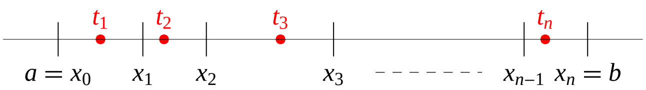

Figura 4.1: Una partición etiquetada de $[a, b]$.

Como cada etiqueta puede elegirse de infinitas formas, cada partición puede etiquetarse de infinitas maneras. La norma de una partición etiquetada se define como para una partición ordinaria y no depende de la elección de las etiquetas.

Si $\dot{\mathcal{P}}$ es la partición etiquetada dada anteriormente, se define la *suma de Riemann* de una función acotada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ correspondiente a $\dot{\mathcal{P}}$ como el número

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Si la función f es positiva en $[a,b]$, entonces la suma de Riemann $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ es la suma de las áreas de n rectángulos cuyas bases son los subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y cuyas alturas son $f(t_i)$.

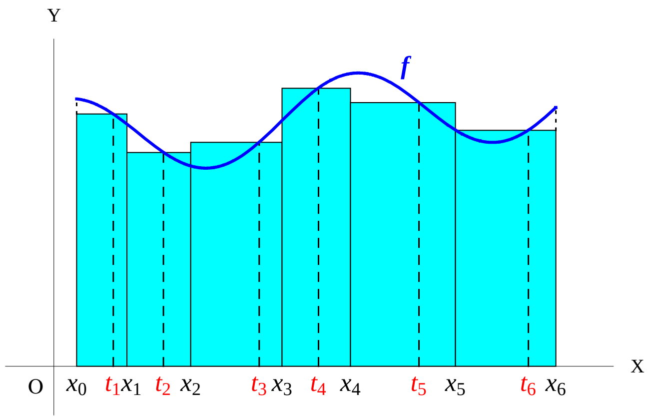

Figura 4.2: Una suma de Riemann.

Definición 4.1.1 *Una función acotada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es* ***integrable Riemann*** *en $[a,b]$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada de $[a,b]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, entonces*

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

El conjunto de las funciones integrables Riemann en $[a,b]$ se designa por $\mathcal{R}[a,b]$.

Se demuestra que si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces el número L está unívocamente determinado. Recibe el nombre de *integral de Riemann* de f en $[a,b]$. En lugar de L se escribe usualmente

$$L = \int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.^{1}$$

[1] Nuestra notación moderna para la integral, $\int_a^b$, fue introducida por J. B. J. Fourier (1768-1830) en un manuscrito presentado en 1807 al *Institut de France* con el título *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. La notación es utilizada en su célebre obra *Théorie analytique de la chaleur*, publicada en 1822. La monografía de 1807 permaneció inédita hasta que finalmente se ha publicado incluida en el libro *Joseph Fourier 1768-1830: A survey of his life and work*, MIT Press, 1972, de I. Grattan-Guinness y J. R. Ravetz.

El siguiente teorema resulta útil pues expresa la integral como límite de sumas de Riemann:

Teorema 4.1.1 *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $(\dot{\mathcal{P}}_n)$ una sucesión cualquiera de particiones etiquetadas de $[a,b]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\dot{\mathcal{P}}_n\| = 0$. Entonces*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f;\dot{\mathcal{P}}_n).$$

A partir de la definición de integral es posible deducir las siguientes propiedades fundamentales:

Teorema 4.1.2 *Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$.*

(a) Si $k \in \mathbb{R}$, se tiene que $kf \in \mathcal{R}[a,b]$ y

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

(b) $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(c) Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Una función $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una ***función escalonada*** si tiene solamente un número finito de valores distintos, tomando cada valor en uno o más subintervalos de $[a,b]$. Por ejemplo, la función $s : [-4,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} & \text{si } -4 \le x < -2, \\ 2 & \text{si } 1 \le |x| \le 2, \\ -\dfrac{5}{2} & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ -2 & \text{si } 2 < x \le 4, \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } 4 < x \le 5, \end{cases}$$

es una función escalonada. En la Figura 4.3 vemos su gráfica.

Si J es un subintervalo de $[a,b]$ y se define $s_J : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $s_J(x) = 1$ para $x \in J$ y $s_J(x) = 0$ en otro caso, se dice que s_J es una *función escalonada elemental* en $[a,b]$. Se demuestra que si J tiene extremos $c < d$, entonces $s_J \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\int_a^b s_J = d - c$. Asimismo, se demuestra que una función escalonada cualquiera s puede expresarse como una combinación lineal de funciones escalonadas elementales

$$s = \sum_{j=1}^{m} k_j s_{J_j},$$

donde J_j tiene extremos $c_j < d_j$. Por tanto, el teorema 4.1.2(a,b) implica que

Teorema 4.1.3 *Si $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada, entonces $s \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Y además
$$\int_a^b s = \sum_{j=1}^{m} k_j(d_j - c_j).$$

Ejemplo

Para la función escalonada s definida anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{5} s = &-\frac{3}{2}(-2-(-4)) + 2(-1-(-2)) + \left(-\frac{5}{2}\right)(0-(-1)) \\ &+ 1(1-0) + 2(2-1) + (-2)(4-2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(5-4) \\ = &-5.\end{aligned}$$

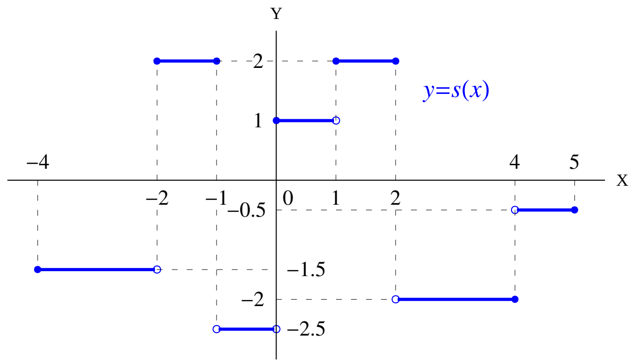

Figura 4.3: Gráfica de la función escalonada s.

Los dos teoremas siguientes muestran dos clases importantes de funciones integrables.

Teorema 4.1.4 *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Teorema 4.1.5 *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona en $[a,b]$, entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

La integral verifica la siguiente propiedad de aditividad respecto al intervalo de integración.

Teorema 4.1.6 (Teorema de aditividad) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si, y sólo si, sus restricciones a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ son ambas integrables Riemann. En este caso*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Corolario 4.1.1 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y si* $[c,d] \subset [a,b]$*, entonces la restricción de* f *a* $[c,d]$ *está en* $\mathcal{R}[c,d]$*.*

Corolario 4.1.2 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y si* $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$*, entonces las restricciones de* f *a cada uno de los subintervalos* $[c_{i-1}, c_i]$ *son integrables Riemann y*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Hasta ahora hemos considerado la integral de Riemann sobre un intervalo $[a,b]$ donde $a < b$. Es conveniente definir la integral de forma más general:

Definición 4.1.2 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y si* $\alpha, \beta \in [a,b]$ *con* $\alpha < \beta$*, se define*

$$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f \qquad y \qquad \int_\alpha^\alpha f = 0.$$

Con este convenio, se verifica el resultado siguiente:

Teorema 4.1.7 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y si* $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$*, entonces*

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f,$$

en el sentido de que la existencia de cualesquiera dos de estas integrales implica la existencia de la tercera integral y la igualdad anterior.

El siguiente teorema muestra cómo obtener, por composición, nuevas funciones integrables.

Teorema 4.1.8 (Teorema de composición) *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *de forma que* $f([a,b]) \subset [c,d]$ *y sea* $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Entonces* $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$*.*

Corolario 4.1.3 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$*, entonces* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *y*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

El producto de dos funciones f y g puede escribirse en la forma

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right].$$

Por tanto, el teorema de composición nos permite concluir lo siguiente:

Teorema 4.1.9 (Teorema del producto) *Si* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$*, entonces* $fg \in \mathcal{R}[a,b]$*.*

Aplicación de la integral al cálculo de áreas de regiones planas

No daremos aquí una definición rigurosa del concepto de *área*. La teoría de la medida es la parte de la matemática que se ocupa de ese asunto. Simplemente, retomamos el significado geométrico de una suma de Riemann para una función positiva como suma de áreas de rectángulos y, teniendo presente la definición de integral, entenderemos que el valor de dicha integral representa el área de la región bajo la gráfica de la función, cuando la función es continua.

Definición 4.1.3 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y sea R la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = a, x = b$.*

(1) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\text{\it Área de}\, R = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(2) Si el signo de $f(x)$ cambia un número finito de veces en $[a,b]$, entonces

$$\text{\it Área de}\, R = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Teorema 4.1.10 *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y sea R la región limitada por sus gráficas y las rectas $x = a, x = b$.*

(1) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\text{\it Área de}\, R = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

(2) Si el intervalo $[a,b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales $f \leq g$ o bien $g \leq f$, entonces

$$\text{\it Área de}\, R = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx.$$

Las Figuras 4.4 y 4.5 ilustran las situaciones del teorema anterior. En la práctica, basta hallar los puntos de intersección de las dos gráficas para reducir el problema a varios del primer tipo (cf. Figura 4.5):

$$\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx = \int_a^{c_1} [g(x) - f(x)]\,dx + \int_{c_1}^{c_2} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{c_2}^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

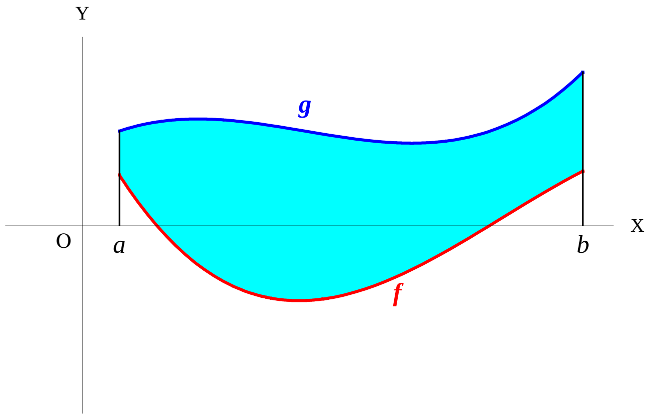

Figura 4.4: El área entre dos gráficas expresada como una integral: $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.

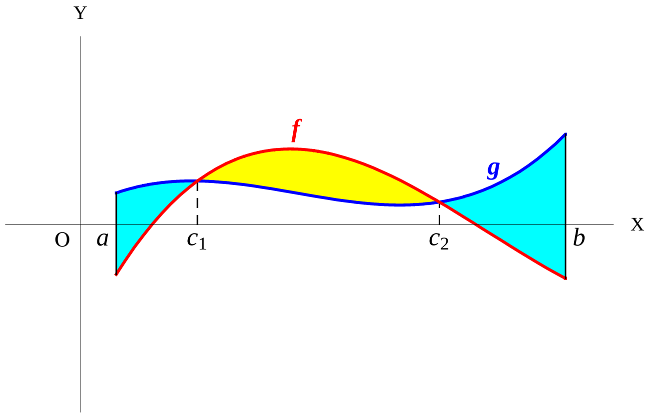

Figura 4.5: El área entre dos gráficas expresada como una integral: $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$.

4.2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Investigaremos ahora la conexión entre las nociones de derivada y de integral. Hay *dos* teoremas que tratan sobre este problema: uno integra una derivada y el otro deriva una integral. Estos teoremas, conjuntamente, constituyen el Teorema Fundamental del Cálculo. Hablando sin mucha precisión, implican que las operaciones de derivación e integración son inversas una de la otra.

Una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x de un intervalo cualquiera I de $\mathbb{R}$ se dice que es una *primitiva* de f en I.

Dos funciones derivables en I, F_1 y F_2, cuya diferencia es constante, es decir

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

para cada $x \in I$ tienen la misma derivada, pues

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0.$$

Recíprocamente, si es $F_1' = F_2'$ en I, entonces la diferencia $F = F_1 - F_2$ tiene por derivada en I la función nula, y entonces F es constante en I (cf. teorema 3.5.4 o corolario 3.5.1). Es decir:

> *La condición necesaria y suficiente para que dos funciones derivables F_1 y F_2 sean primitivas de la misma función es que su diferencia sea una constante.*

Por esta razón, si conocemos una primitiva F de f, todas se obtienen sumando a F un número real arbitrario. Emplearemos el símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

para designar una primitiva cualquiera de f (en I).[2] Si F es una primitiva de f (en I) se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

($C \in \mathbb{R}$).

Se tienen las siguientes *primitivas inmediatas*:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)\,, \qquad \int (f(x))^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1).$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C\,, \qquad \int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C.$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, \qquad \int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C.$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,, \qquad \int \operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C\,, \qquad \int \cos(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \operatorname{tg}(f(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}\,dx = -\operatorname{cotg}(f(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C.$$

[2] Leibniz, en su manuscrito fechado el 29 de octubre de 1675, que también citábamos en el tema anterior, introduce por primera vez el símbolo $\int$ para denotar la "suma de los segmentos que componen un área". Este símbolo tiene la forma de una letra S estilizada y se corresponde con la inicial de la palabra latina *summa*. Aunque en este manuscrito también introduce el símbolo d, todavía escribe $\int x$ y $\int x^2$. Obtiene que $\int x = \frac{x^2}{2}$ y que $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$. El símbolo $\int$ apareció impreso por primera vez en el artículo publicado por Leibniz con el título "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum", en la revista *Acta Eruditorum*, vol. 5 (1686), págs. 292-300 (*Leibnizens Mathematische Schriften* (ed. C. I. Gerhardt), vol. V (1858), págs. 226-233), donde ya aparece la notación más consistente que incluye dx. En este artículo no aparece exactamente el signo $\int$, quizás por dificultades de impresión; el signo que lo sustituía era muy parecido, si bien tenía amputada la mitad inferior. Era simplemente la letra minúscula s, tal y como se imprimía en aquella época. Para Leibniz, $\int$ significa *suma* y una expresión del tipo $\int f(x)\,dx$, que hoy para nosotros designa una primitiva cualquiera de la función f, es literalmente una suma de términos $f(x)\,dx$, que representan rectángulos de área infinitesimal de altura $f(x)$ y anchura infinitamente pequeña dx.

Desde luego, si F y G son primitivas de f y g respectivamente, entonces $F+G$ es una primitiva de $f+g$, y si $k \in \mathbb{R}$, kF es una primitiva de kf. Se escribe

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Ejemplos

(1)

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)\,dx = a_n \int x^n\,dx + a_{n-1}\int x^{n-1}\,dx + \cdots + a_0 \int dx$$
$$= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + a_0 x + C.$$

(2)

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^2\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln|x| + C.$$

(3)

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

La técnica basada en la regla del producto

La derivada del producto de dos funciones derivables u y v está relacionada con ellas y sus derivadas por la llamada "regla del producto":

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Puesto que uv es una primitiva de $(uv)'$, al conocer una primitiva de alguno de los sumandos $u'v$ o uv' se conoce también una primitiva del otro. Por ejemplo, si G es una primitiva de $u'v$, entonces $uv - G$ es una primitiva de uv'. El interés de este hecho radica en que si f es una función de la cual no sabemos encontrar directamente una primitiva y la expresamos como el producto uv' para determinadas u y v, y resulta que de $u'v$ sí conocemos una primitiva, G, entonces $uv - G$ es una primitiva de f. Se escribe

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Cuando f es el producto de dos funciones elegiremos una de ellas como u y la otra como v'. Naturalmente, esta elección se puede hacer de dos maneras distintas y suele suceder que sólo una es la adecuada, porque la otra complicaría más el problema en lugar de resolverlo. Además, de la que se designe v' deberemos conocer directamente una primitiva v. También aplicaremos la técnica poniendo $f = uv', u = f, v' = 1$.

Ejemplos

(a) $f(x) = xe^x$.

Si $u(x) = x$ y $v'(x) = e^x$, entonces $f = uv'$. Una primitiva de v' es $v(x) = e^x$ y $u'(x) = 1$. Entonces

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

(b) $f(x) = x\cos x$.

Con $u(x) = x$ y $v'(x) = \cos x$, se obtiene $u'(x) = 1$ y $v(x) = \operatorname{sen} x$ y

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

(c) $f(x) = \ln|x|$, $(x \neq 0)$.

Hacemos $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = 1$. Resulta $u'(x) = 1/x$ y $v(x) = x$, luego

$$\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int 1\,dx = x\ln|x| - x + C = x(\ln|x| - 1) + C.$$

(d) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Aquí: $u(x) = f(x)$, $v'(x) = 1$; $u'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $v(x) = x$. Luego:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arcsen} x\,dx &= x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(-2x)\,dx \\
&= x\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C \\
&= x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

(e) $f(x) = e^x \cos x$.

Aquí: $u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$; $u'(x) = e^x$, $v(x) = \operatorname{sen} x$. Luego:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \tag{1}$$

Ahora: $u(x) = e^x$, $v'(x) = \operatorname{sen} x$; $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos x$. Luego:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\, e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

La técnica de cambio de variable

La regla de la cadena proporciona otra herramienta para el cálculo de primitivas. Si queremos hallar una primitiva de $f(x)$, es útil a veces hacer un cambio de variable $x = \varphi(t)$ de tal manera que φ y su inversa φ^{-1} sean derivables. Si podemos encontrar una primitiva $G(t)$ del producto

$$g(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

entonces la función

$$F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$$

es una primitiva de $f(x)$, pues utilizando dos veces la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))\, (\varphi^{-1})'(x) \\ &= g(\varphi^{-1}(x))\, (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x)\, \varphi'(\varphi^{-1}(x))\, (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x)\, (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Se escribe

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt, \quad x = \varphi(t).$$

Ejemplos

(a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Utilizamos el cambio de variable definido por

$$x = \varphi(t) = \operatorname{sen} t,\ \ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x,\ \ x \in [-1, 1].$$

En este caso

$$g(t) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, \cos t = |\cos t| \cos t = \cos^2 t.$$

Una primitiva de esta función es

$$G(t) = \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t = \frac{1}{2}\,(t + \operatorname{sen} t \cos t).$$

Una primitiva F de f se obtiene poniendo $\operatorname{arcsen} x$ en lugar de t

$$F(x) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}).$$

Así pues

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\,(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}) + C.$$

(b) $f(x) = x\sqrt{1 + x}$, $x \geq -1$.

El objetivo es evitar la raíz cuadrada, y ello se consigue si $1 + x$ se convierte en t^2, es decir, el cambio de variable es

$$x = \varphi(t) = t^2 - 1,\ \ t \geq 0$$
$$t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{1 + x},\ \ x \geq -1.$$

Resulta

$$g(t) = (t^2 - 1)\, |t|\, 2t = 2t^4 - 2t^2.$$

Una primitiva G de g es

$$G(t) = \frac{2}{5}\, t^5 - \frac{2}{3}\, t^3$$

y una primitiva F de f es

$$F(x) = \frac{2}{5}\,(1 + x)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(1 + x)^{3/2}.$$

Así pues

$$\int x\sqrt{1 + x}\ dx = \frac{2}{5}\,(1 + x)^{5/2} - \frac{2}{3}\,(1 + x)^{3/2} + C.$$

Primitivas de funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas $P(x)/Q(x)$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q se hace la división, obteniéndose un cociente C y un resto R de grado inferior al de Q. Resulta pues que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Nos ocuparemos por tanto de las funciones racionales $P(x)/Q(x)$ tales que el grado de P sea menor que el grado de Q. Consideraremos solamente el caso en que $Q(x)$ se expresa como producto de factores de la forma

$$(x-a)^n$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. A cada factor $(x-a)^n$ le asociamos la función

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

donde los A_k son números reales que se determinarán después. Finalmente, la función $P(x)/Q(x)$ se identifica con la suma de todas las funciones asociadas a los factores de $Q(x)$. Esta identificación permite determinar de manera única los coeficientes A_k. Por último, observemos que

$$\int \frac{A_k}{x-a}\,dx = A_k \ln|x-a| + C$$

y, si $n > 1$,

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^n}\,dx = \frac{A_k}{1-n}\,(x-a)^{1-n} + C.$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^3-3x-2}.$$

En primer lugar, efectuando la división, se obtiene

$$\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-3x-2} = x + \frac{2x+1}{x^3-3x-2}.$$

Por otra parte

$$x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2).$$

Entonces

$$\frac{2x+1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Operando e identificando los numeradores, es

$$2x+1 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2.$$

Para $x=-1$ se obtiene $-1=-3B$, de donde $B=1/3$.
Para $x=2$ se obtiene $5=9C$, de donde $C=5/9$.
Para $x=0$ se obtiene $1=-2A-2B+C$, luego $A=-5/9$.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3x^2+1}{x^3-3x-2}\,dx &= \int x\,dx + \int \frac{2x+1}{x^3-3x-2}\,dx \\ &= \int x\,dx + \int \frac{-5/9}{x+1}\,dx + \int \frac{1/3}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{5/9}{x-2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{5}{9}\ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{9}\ln|x-2| + C.\end{aligned}$$

Teorema 4.2.1 (Teorema Fundamental del Cálculo (primera forma)) *Supongamos que existe un conjunto finito $E \subset [a,b]$ y funciones $f, F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que:*

(a) F *es continua en* $[a,b]$*,*

(b) $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [a,b] \setminus E$*,*

(c) $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Notas

(a) Es costumbre designar $F(b) - F(a)$ por $F\Big|_a^b$.

(b) Los puntos de E suelen llamarse puntos excepcionales; son puntos c donde $F'(c)$ no existe, o bien donde $F'(c)$ no es igual a $f(c)$.

Ejemplos

(a) Si $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $F'(x) = x$ para todo $x \in [a,b]$. Además $f = F'$ es continua, luego $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Por tanto, el Teorema Fundamental (con $E = \emptyset$) implica

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(b) Si $G(x) = \operatorname{arctg} x$ para $x \in [a,b]$, entonces $G'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in [a,b]$; G' es continua, luego está en $\mathcal{R}[a,b]$. El Teorema Fundamental (con $E = \emptyset$) implica

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a.$$

(c) Sea $a > 0$. Si $A(x) = |x|$ para $x \in [-a,a]$, entonces $A'(x) = -1$ si $x \in [-a,0)$ y $A'(x) = 1$ si $x \in (0,a]$. Así pues $A'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ para $x \in [-a,a] \setminus \{0\}$. Como la función signo definida en $[-a,a]$ es una función escalonada, está en $\mathcal{R}[-a,a]$. El Teorema Fundamental (con $E = \{0\}$) implica

$$\int_{-a}^a \operatorname{sgn}(x)\,dx = A(a) - A(-a) = a - a = 0.$$

Definición 4.2.1 *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$*, entonces la función definida por*

$$F(x) = \int_a^x f \qquad \text{para } x \in [a,b] \tag{3}$$

recibe el nombre de ***integral indefinida de f con punto base a***.

En general, si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $c \in [a,b]$, la función definida por

$$F_c(x) = \int_c^x f \qquad \text{para } x \in [a,b]$$

se llama *integral indefinida de f con punto base c*. ¿Qué relación existe entre F_a y F_c? Se tiene

$$F_a(x) + (-F_c(x)) = \int_a^x f + \left(-\int_c^x f\right) = \int_a^x f + \int_x^c f = \int_a^c f.$$

Por tanto,

$$F_c = F_a - \int_a^c f.$$

Teorema 4.2.2 *La integral indefinida F, definida por (3), es continua en $[a,b]$. De hecho, si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in [a,b]$, entonces $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$ para todos $x, y \in [a,b]$.*

Teorema 4.2.3 (Teorema Fundamental del Cálculo (segunda forma)) *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y supongamos que f es continua en un punto $c \in [a,b]$. Entonces la integral indefinida F, definida por (3), es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.*

Teorema 4.2.4 *Si f es continua en $[a,b]$, entonces la integral indefinida F, definida por (3), es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.*

El teorema 4.2.4 puede resumirse así:

> *Si f es continua en $[a,b]$, entonces la integral indefinida F, definida por (3), es una primitiva de f.*

Veamos ahora que, en general, la función definida por (3) no tiene por qué ser una primitiva.

Ejemplo

Si $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ en $[-1,1]$, entonces $f \in \mathcal{R}[-1,1]$ y tiene la integral indefinida $F(x) = |x| - 1$ con punto base -1. En efecto:

- Si $-1 \leq x < 0$
$$F(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sgn}(t)\,dt = (-1)(x - (-1)) = -x - 1.$$
- Si $0 \leq x \leq 1$
$$F(x) = \int_{-1}^x \operatorname{sgn}(t)\,dt = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn}(t)\,dt + \int_0^x \operatorname{sgn}(t)\,dt = (-1)\cdot 1 + 1 \cdot (x - 0) = x - 1.$$

Como $F'(0)$ no existe, F no es una primitiva de f en $[-1,1]$.

Las fórmulas de los dos teoremas siguientes proporcionan métodos de extraordinaria importancia para calcular integrales.

Teorema 4.2.5 (Integración por partes) *Sean u, v derivables en $[a,b]$ y tales que $u', v' \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v.$$

Un caso especial útil de este teorema es aquel en que u', v' son continuas en $[a,b]$ y u, v son sus integrales indefinidas

$$u(x) = \int_a^x u', \qquad v(x) = \int_a^x v'.$$

Teorema 4.2.6 (Integración mediante cambio de variable) *Sea J un intervalo cerrado con extremos α y β, y supongamos que $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada continua en J. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo I que contiene a $\varphi(J)$, entonces*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

En la práctica, se supondrá además φ estrictamente monótona.

Ejemplos

(1) Queremos calcular

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx.$$

Consideremos el cambio de variable

$$x = \varphi(t) = \operatorname{sen} t,\ \ t \in [0, \pi/2].$$

Entonces

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx = \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\;dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

(2) Ahora nuestro objetivo es calcular $\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^{-x}}\;dx$. Mediante el cambio de variable $x = \varphi(t) = \ln t,\ \ t \in [1,e]$, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^{-x}}\;dx = \int_1^e \frac{1-t}{1+1/t}\cdot\frac{1}{t}\;dt = \int_1^e \frac{1-t}{1+t}\;dt$$

$$= \int_1^e \left(\frac{2}{1+t} - 1\right)\,dt = 2\,\ln\frac{1+e}{2} - e + 1.$$

(3) Para calcular $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$, consideramos el cambio de variable $x = \varphi(t) = \pi - t$, $t \in [0,\pi]$. Se tiene

$$I = \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\, dt = \int_0^\pi \frac{\pi \operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\, dt - \int_0^\pi \frac{t \operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\, dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} 2I &= \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\, dt = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi = -\pi[\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1] \\ &= -\pi\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}, \end{aligned}$$

y, por tanto, $I = \pi^2/4$.

4.3. Ejercicios

Los ejercicios señalados en rojo proporcionan resultados importantes que complementan la teoría.

1. Calcula las primitivas de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = \dfrac{e^x}{4+9e^{2x}}$,

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$,

(3) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$,

(4) $f(x) = x^3 e^{-x^2}$,

(5) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$,

(6) $f(x) = \sec x$,

(7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$,

(8) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x - \ln^2 x}}$,

(9) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$,

(10) $f(x) = e^{ax} \operatorname{sen} bx,\ g(x) = e^{ax} \cos bx$,

(11) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$,

(12) $f(x) = \dfrac{1+\ln^3 x}{x(\ln^2 x - \ln x)}$,

(13) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$,

(14) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1}$,

(15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}$,

(16) $f(x) = \dfrac{x e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}$,

(17) $f(x) = x \cos\sqrt{x}$,

(18) $f(x) = \cos(\ln x)$,

(19) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$,

(20) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{x^2}$.

2. Calcula las siguientes integrales:

$$(1)\quad \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\;dx\,, \qquad (6)\quad \int_{-1}^1 \sqrt{|x|+x}\;dx\,,$$

$$(2)\quad \int_1^{e^2} \ln^3 x\;dx\,, \qquad (7)\quad \int_1^2 x\ln\sqrt{x}\;dx\,,$$

$$(3)\quad \int_{-2}^3 |1-x^2|\;dx\,, \qquad (8)\quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\;dx\,,$$

$$(4)\quad \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\;dx\,, \qquad (9)\quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\;dx\,,$$

$$(5)\quad \int_{-2}^2 x|x-1|\;dx\,, \qquad (10)\quad \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x-\cos x|\;dx\,.$$

3. Halla el área de la región limitada por las curvas siguientes:

(1) $y=-x^2+3x, y=2x^3-x^2-5x,$

(2) $y=\sqrt{|x|}\,, 5y=x+6,$

(3) $y^2=x, y=x-2.$

4. Calcula los siguientes límites:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}\,, \qquad (5)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{a}{n}+\operatorname{sen}\frac{2a}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{na}{n}\right),\ a\neq 0,$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right), \qquad (6)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n^2+k^2)-2\ln n}{n}\,,$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}\,, \qquad (7)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k(n-k)}\,,$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (8)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}\,.$$

5. *Propiedad de traslación.* Sea $f\in\mathcal{R}[a,b]$ y $c\in\mathbb{R}$. Se define $g:[a+c,b+c]\longrightarrow\mathbb{R}$ por $g(x)=f(x-c)$. Demuestra que $g\in\mathcal{R}[a+c,b+c]$ y que $\int_{a+c}^{b+c} g=\int_a^b f$.

6. *Propiedad de dilatación o contracción.* Sea $f\in\mathcal{R}[a,b], k$ un número real distinto de cero e I el intervalo cerrado de extremos ka y kb. Se define $g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ por $g(x)=f\left(\frac{x}{k}\right)$. Demuestra que g es integrable en I y que $\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} g=\int_a^b f$.

7. Sea $a > 0$ y $f \in \mathcal{R}[-a, a]$.

(1) Si f es par, demuestra que $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

(2) Si f es impar, demuestra que $\int_{-a}^{a} f = 0$.

8. Calcula la integral siguiente:

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 - |\cos x| - \operatorname{sen}^2 x}\, dx.$$

9. Demuestra que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx.$$

10. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestra que si $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, entonces f es la función idénticamente nula en $[a, b]$.

11. Sea f una función continua en $[0, 1]$. Demuestra que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

Utiliza esta igualdad para calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}^{2n} x}{\operatorname{sen}^{2n} x + \cos^{2n} x}\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. Demuestra que si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$ con $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

13. Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Demuestra la *desigualdad de Bunyakovskii-Schwarz*

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx.$$

Demuestra que si además f y g son continuas, la igualdad se da si, y sólo si, $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

14. Demuestra que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(x) \operatorname{sen} x\, dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x\, dx \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

15. Demuestra que si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y toma valores positivos, entonces

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}\,.$$

Además, si m y M son constantes reales tales que $0 < m \leq f(x) \leq M$ para $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

16. Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ tales que

$$m_1 \leq f(x) \leq M_1 \quad \text{y} \quad m_2 \leq g(x) \leq M_2, \qquad x \in [a,b],$$

donde m_1, M_1, m_2 y M_2 son constantes reales dadas. Demuestra la *desigualdad de Grüss*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{4}(M_1 - m_1)(M_2 - m_2).$$

El factor $\frac{1}{4}$ no puede reemplazarse por una constante más pequeña.

17. Sean x e y números reales tales que $0 < y \leq x$. Demuestra que

$$(x-y)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) \leq \ln\frac{x(y+1)}{y(x+1)}\,.$$

18. *Desigualdad de Hermite-Hadamard.* Demuestra que si la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

19. Sean x e y números reales positivos distintos y A, G, L sus medias aritmética, geométrica y logarítmica respectivamente, es decir

$$A = \frac{x+y}{2}\,, \qquad G = \sqrt{xy}\,, \qquad L = \frac{y-x}{\ln y - \ln x}\,.$$

Demuestra que $A^L < G^A$ si $x, y \geq e^{3/2}$ y $A^L > G^A$ si $x, y \leq e^{3/2}$.

20. Supongamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$. Demuestra que si φ es continua y convexa en $[m,M]$, entonces

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx.$$

Esta desigualdad se llama *desigualdad de Jensen.*

21. Sea $f \in \mathcal{R}[0,1]$ y $|f(x)| \leq 1$, $x \in [0,1]$. Demuestra que

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}\,dx \leq \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}\,.$$

22. Sea $a > 0$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Demuestra que existe $\theta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^\theta f(x)\,dx = \theta f(\theta).$$

23. Calcula

$$\lim_{x\to 0}\left(x\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot\left(\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen} t\,dt\right)^{-1}.$$

24. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \left(\displaystyle\int_a^{x^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)^3$,

(c) $F(x) = \operatorname{sen}\left(\displaystyle\int_a^{x^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)$,

(b) $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen}(x^3)}^{a}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$,

(d) $F(x) = \displaystyle\int_a^{\int_b^{x^2}\frac{1}{1+t^2}\,dt}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$

25.1. Sean f, g y h funciones derivables y φ una función continua, definidas en $\mathbb{R}$. Si

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x)\varphi(t)\,dt,$$

calcula $F'(x)$.

25.2. Calcula la derivada de la siguiente función:

$$G(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x}(1+xt^2)\,dt.$$

26. Halla los extremos relativos de la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x^2}\operatorname{sen} t\; e^{\operatorname{sen} t}\,dt.$$

27. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt.$$

Demuestra que f es impar y que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Obtén los extremos relativos de f. ¿Son absolutos?