# Tema 2

# Sucesiones y series

## 2.1. Sucesiones

**Definición 2.1.1** *Una* ***sucesión de números reales*** *es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f(n) = a_n$, entonces $a_n$ se llama* ***término n-ésimo*** *(o término general) de la sucesión.*

En la práctica, es costumbre escribir la sucesión así:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{o} \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \qquad \text{o} \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

**Ejemplos**

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right); \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots\right); (a_n), \text{ donde } a_n = 2^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

La definición formal nos lleva inmediatamente a la descripción familiar de una sucesión como una lista ordenada infinita de números reales. Lo que ocurre al comienzo de tal lista es poco importante en muchos casos. Nos ocuparemos principalmente del comportamiento de la "cola" infinita de una sucesión dada.

**Definición 2.1.2** *Se dice que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$* ***converge*** *si existe $a \in \mathbb{R}$ de tal manera que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En este caso decimos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a$.*

Veamos que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a \in \mathbb{R}$ y hacia $b \in \mathbb{R}$, entonces $a = b$. En efecto: sea $\varepsilon > 0$; existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N_1\,,$$

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq N_2\,.$$

Sea $N_0 = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces

$$|a - b| \leq |a - a_{N_0}| + |a_{N_0} - b| < \varepsilon\,.$$

Así pues, $a = b$ (de otro modo, tomando $\varepsilon = |a - b| > 0$ se tendría $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es absurdo).

Para indicar que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a$, se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to a \ \text{ cuando } \ n \to \infty\,,$$

y se dice que $a$ es el límite de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Si una sucesión no converge, entonces decimos que **diverge**.

Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0\,.$$

Dado $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

recibe el nombre de $\varepsilon$-entorno de $a$. Observemos que $V_\varepsilon(a)$ consta de todos los puntos que distan de $a$ menos que $\varepsilon$. Dicho de otra manera, $V_\varepsilon(a)$ es el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Entonces podemos decir que una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $a$ si, dado cualquier $\varepsilon$-entorno $V_\varepsilon(a)$ de $a$, existe un término de la sucesión tal que él y todos los que le siguen están en $V_\varepsilon(a)$. En otras palabras, todo $\varepsilon$-entorno de $a$ contiene a todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ salvo un número finito de ellos.

Es claro que el valor de $N$ de la definición depende de la elección de $\varepsilon$.

**Ejemplo**

Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Observemos que

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}\,,$$

luego la desigualdad $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$ es equivalente a $\frac{1}{n} < \varepsilon$ o bien $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces si $n \geq N$ se tiene $n > \frac{1}{\varepsilon}$ es decir $\frac{1}{n} < \varepsilon$, lo que equivale a

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

**Definición 2.1.3** *Una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales es **acotada** si existe un número real $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Geométricamente, esto significa que podemos encontrar un intervalo $[-M, M]$ que contiene a cada término de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. El teorema siguiente nos dice que lo anterior se verifica si la sucesión es convergente.

**Teorema 2.1.1** *Toda sucesión convergente es acotada.*

Consideramos ahora algunos ejemplos importantes de sucesiones convergentes y divergentes.

**Teorema 2.1.2** *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

*(1)* $|x| < 1$ *implica* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

*(2)* $|x| \geq 1, x \neq 1$ *implican que* $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ *diverge.*[1]

*(3)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

El siguiente teorema muestra cómo los límites se asocian con las operaciones aritméticas básicas.

**Teorema 2.1.3** *Supongamos que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Entonces*

*(1)* $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

*(2)* $\lim_{n\to\infty} (ca_n) = ca$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

*(3)* $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

*(4)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ *si* $b \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

***Observación***

Las conclusiones del teorema anterior dependen de la hipótesis de que las sucesiones individuales $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ converjan. Puede ocurrir que los límites de la izquierda en (1)-(4) existan aunque no existan los límites individuales. Por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n(-1)^n = 1\,.$$

Los límites se comportan bien con respecto al orden.

**Teorema 2.1.4** *Supongamos que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

*(1) Si* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \geq 0$.

*(2) Si* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \leq b$.

*(3) Si existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $c \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $c \leq b$. *Análogamente, si* $a_n \leq c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \leq c$.

**Teorema 2.1.5 (Teorema del sándwich)** *Sean* $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones de números reales tales que* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. *Entonces* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

[1] Si $x = 1$ se tiene la sucesión constante $(1, 1, 1, \ldots)$, cuyo límite obviamente es 1.

***Observación***

Las hipótesis de los dos teoremas anteriores pueden debilitarse suponiendo solamente que las condiciones se verifican "desde un lugar en adelante". La convergencia de una sucesión no depende de lo que ocurra "al comienzo" de la misma, sino que depende de la "cola".

En el resto de esta sección consideraremos sucesiones en $\mathbb{R}^\sharp$.

**Definición 2.1.4** *Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$. Se dice que esta sucesión tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) y se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\textit{resp.}\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

*si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n > \alpha$ (resp. $a_n < \alpha$).*

**Definición 2.1.5** *Una sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{R}^\sharp$ se dice que es*

$$\begin{array}{ll} \textit{creciente} & \textit{si } a_n \leq a_{n+1} \\ \textit{decreciente} & \textit{si } a_n \geq a_{n+1} \\ \textit{estrictamente creciente} & \textit{si } a_n < a_{n+1} \\ \textit{estrictamente decreciente} & \textit{si } a_n > a_{n+1} \end{array}$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$. Todas estas sucesiones se llaman **monótonas** o, en los dos últimos casos, **estrictamente monótonas**.*

**Teorema 2.1.6** *Toda sucesión monótona en $\mathbb{R}^\sharp$ tiene límite en $\mathbb{R}^\sharp$. En particular, una sucesión monótona de números reales converge si, y sólo si, es acotada.*

***Nota***

Desde luego una sucesión acotada puede converger sin necesidad de ser monótona. Por ejemplo $(a_n)_{n=1}^\infty$ con $a_n = (-1/2)^n$.

El teorema siguiente proporciona dos ejemplos de límites monótonos y sirve para definir un número de gran importancia en el Análisis Matemático.

**Teorema 2.1.7 (El número $e$)** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

*Entonces*

*(1)* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *es estrictamente creciente,*

*(2)* $(b_n)_{n=1}^\infty$ *es estrictamente decreciente, y*

*(3)* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

*El límite común de estas dos sucesiones se designa por $e$. Se tiene $2 < e < 4$.*[2]

---

[2]Posteriormente veremos más propiedades de $e$ y mejores estimaciones racionales de su valor. La introducción de la letra $e$ para designar el número definido en el teorema, base de los logaritmos naturales o neperianos (cf. tema 3), se debe al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Aparece por primera vez en un manuscrito de finales de 1727 o comienzos de 1728, titulado "Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta", publicado muchos años después, en 1862, en la *Opera postuma mathematica et physica*, editada por P. H. Fuss y N. Fuss (Vol. II, págs. 800-804). La primera aparición del símbolo $e$ en una obra *publicada* se localiza en el libro de Euler *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, de 1736.

Se introducen ahora dos elementos importantes de $\mathbb{R}^\sharp$ asociados a cualquier sucesión.

**Definición 2.1.6** *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos*

$$y_k = \text{ínf}\{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq k\}$$

*y*

$$z_k = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq k\}.$$

*Claramente*

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \qquad y \qquad z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq \ldots$$

*Sea*

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k = \sup\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$$

*y*

$$z = \lim_{k\to\infty} z_k = \text{ínf}\{z_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

*Entonces $y, z \in \mathbb{R}^\sharp$; **y** se llama el **límite inferior** de $(x_n)_{n=1}^\infty$ y **z** se llama el **límite superior** de $(x_n)_{n=1}^\infty$. Se escribe*

$$y = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n,$$

$$z = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

*Puesto que $j \leq k$ en $\mathbb{N}$ implica $y_j \leq y_k \leq z_k \leq z_j$, se tiene $y \leq z$.*

**Ejemplo**

Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ con $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

La sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ es acotada ($|x_n| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$) y no es convergente. Se tiene

$$y_1 = -2,\ y_2 = -\left(1 + \frac{1}{3}\right),\ y_3 = -\left(1 + \frac{1}{3}\right),\ y_4 = -\left(1 + \frac{1}{5}\right), \ldots$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2},\ z_2 = 1 + \frac{1}{2},\ z_3 = 1 + \frac{1}{4},\ z_4 = 1 + \frac{1}{4}, \ldots$$

y

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1.$$

El siguiente teorema proporciona una caracterización del límite inferior y del límite superior.

**Teorema 2.1.8** *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$, y sean $a, b \in \mathbb{R}^\sharp$. Entonces*

*(1) $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ si, y sólo si, siempre que $\alpha < a$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha\}$ es finito y siempre que $a < \beta$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \beta\}$ es infinito.*

*(2) $b = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ si, y sólo si, siempre que $\alpha < b$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \alpha\}$ es infinito y siempre que $b < \beta$ se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta\}$ es finito.*

**Teorema 2.1.9** *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe en $\mathbb{R}^\sharp$ si, y sólo si, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.*

**Definición 2.1.7** *Sea $a \in \mathbb{R}$. Un **entorno de a** (en $\mathbb{R}$) es cualquier intervalo abierto que contiene al punto $a$. Se dice que $a$ es un **punto interior** de un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ si existe un entorno de $a$ contenido en $X$. Un **entorno de $+\infty$** es un intervalo de la forma $(\alpha, +\infty]$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Un **entorno de $-\infty$** es un intervalo de la forma $[-\infty, \beta)$ donde $\beta \in \mathbb{R}$. Un **entorno reducido** de $x \in \mathbb{R}^\sharp$ es el conjunto que resulta de suprimir el punto $x$ en un entorno de $x$.*

Vemos que si $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$ y $x \in \mathbb{R}^\sharp$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si, y sólo si, cada entorno de $x$ contiene a todos los términos de la sucesión salvo a un número finito.

**Definición 2.1.8** *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$. Un punto $x \in \mathbb{R}^\sharp$ se llama **punto de acumulación** de $(x_n)_{n=1}^\infty$ si cada entorno de $x$ contiene infinitos términos de la sucesión.*

**Teorema 2.1.10** *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$ y sea $A$ el conjunto de los puntos de acumulación de esta sucesión. Entonces*

*(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \in A$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.*

*(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \le c \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ para todo $c \in A$.*[3]

**Corolario 2.1.1** *Una sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$ tiene límite en $\mathbb{R}^\sharp$ si, y sólo si, tiene exactamente un punto de acumulación.*

### *Nota*

Del teorema 2.1.10 se deduce que cada sucesión en $\mathbb{R}^\sharp$ tiene al menos un punto de acumulación.

La sucesión de término $n$-ésimo $x_n = (-1)^n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$, que consideramos antes, tiene dos puntos de acumulación: $-1$ y $1$.

El próximo teorema resulta útil en el cálculo de límites. Antes, un lema.

**Lema 2.1.1** *Si $c$ es un número real positivo, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

**Teorema 2.1.11** *Sea $(a_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales positivos. Entonces*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*En particular, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, donde $0 \le L \le +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

### Ejemplos

(1) Sea $a_n = 1$ para $n$ impar y $a_n = 2^n$ para $n$ par. Entonces, se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/2^n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \qquad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

[3] Así pues, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \min A$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max A$.

luego

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 < +\infty = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(2) Sea $a_n = n$, para todo $n$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

(3) Sea $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, para todo $n$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

## 2.2. Subsucesiones

**Definición 2.2.1** *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Si $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ son números naturales, entonces la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ recibe el nombre de* ***subsucesión*** *de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

### Ejemplo

Sea $x_n = 1/n$, para $n \in \mathbb{N}$. Si seleccionamos los términos de índice par, $n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots, n_k = 2k, \ldots$, obtenemos la subsucesión $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$, es decir,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k}, \ldots\right).$$

Si se escogen los de índice impar, se obtiene $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$, o sea,

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2k-1}, \ldots\right).$$

La sucesión

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

*no* es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Teorema 2.2.1** *Si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales converge hacia un número real $x$, entonces cualquier subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ también converge hacia $x$.*

**Corolario 2.2.1 (Criterio de divergencia)** *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales que tiene dos subsucesiones que convergen hacia dos números distintos. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.*

**Teorema 2.2.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)** *Cada sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

***Observación***

Una sucesión no acotada no puede converger. Sin embargo una sucesión no acotada puede tener una subsucesión convergente. Por ejemplo, consideremos $x_{2k-1} = k, x_{2k} = 1/k$ para $k \in \mathbb{N}$. Así pues, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión

$$1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots$$

Se tiene que $x_{2k-1} \to +\infty$ y $x_{2k} \to 0$ cuando $k \to \infty$.

## 2.3. Sucesiones de Cauchy

Sabemos que una sucesión monótona de números reales converge si, y sólo si, es acotada. Este resultado es extraordinariamente útil e importante pero tiene el inconveniente significativo de que se aplica solamente a sucesiones monótonas. Es importante disponer de una condición que implique la convergencia de una sucesión, que no precise conocer de antemano el valor del límite y que no se restrinja a sucesiones monótonas.

**Definición 2.3.1** *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales se llama **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos los números naturales $m, n \geq N$, se verifica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

**Ejemplo**

La sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

En efecto: dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 2/\varepsilon$. Entonces, si $m, n \geq N$, se tiene $1/n \leq 1/N < \varepsilon/2$ y análogamente $1/m < \varepsilon/2$. Por lo tanto, si $m, n \geq N$, entonces

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**Lema 2.3.1** *Si una sucesión es de Cauchy, entonces es acotada.*

La definición de convergencia 2.1.2 afirma que, dado un $\varepsilon$ positivo arbitrario, es posible encontrar un punto en la sucesión después del cual los términos distan todos del límite menos que $\varepsilon$. Por otra parte, una sucesión es de Cauchy si, para cada $\varepsilon$, existe un punto en la sucesión después del cual los términos distan *entre sí* menos que $\varepsilon$. En realidad, estas dos definiciones son equivalentes: las sucesiones convergentes son sucesiones de Cauchy y las sucesiones de Cauchy convergen.

**Teorema 2.3.1 (Criterio de Cauchy)** *Una sucesión de números reales converge si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy.*

## 2.4. Series

**Definición 2.4.1** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Escribimos*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

*para cada $n \in \mathbb{N}$. El símbolo (expresión formal)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad o \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

*recibe el nombre de **serie de término n-ésimo $a_n$ y suma parcial n-ésima $s_n$**. Decimos que la serie **converge** si la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de sus sumas parciales converge; en otro caso, decimos que la serie **diverge**. Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, el número $s$ se llama suma de la serie y se escribe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Así pues, para las series convergentes, el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ juega un doble papel: designa la serie y también su suma. Nótese que la suma de una serie convergente no se obtiene realizando infinitas sumas, sino que es el límite de una sucesión de sumas (la sucesión de sumas parciales)[4].

Consideraremos también series de la forma

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$$

donde $p \in \mathbb{Z}$. Aquí las sumas parciales son los números

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n,$$

$n = p, p+1, \ldots$ Observemos que si $a_n = 0$ para todo $n > q \geq p$, entonces $s_n = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ para todo $n > q$ y

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=p}^{q} a_n,$$

con lo que la serie es una "suma (finita) disfrazada".

[4]Cuando la sucesión de sumas parciales tiene límite $+\infty$ o $-\infty$ algunas veces se utilizan las notaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty,$$

respectivamente.

El siguiente teorema proporciona una condición necesaria, pero no suficiente, para que una serie converja.

**Teorema 2.4.1** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para ver que la condición $a_n \to 0$ no basta para garantizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ consideraremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo (La serie armónica)**

Veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, llamada *serie armónica*, diverge.

Se tiene $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Como $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n$, vemos que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente. Así pues, la cuestión de si esta sucesión converge o no se reduce a la cuestión de si esta sucesión está acotada o no. Puede comprobarse que $s_n \approx 11.4$ para $n = 50000$ y $s_n \approx 12.1$ para $n = 100000$. Si somos observadores superficiales, estos resultados numéricos podrían llevarnos a concluir que la sucesión está acotada. Sin embargo, se tiene

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \cdots,$$

luego

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y en general, para todo $k$ natural con $k \geq 2$

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2\,\text{sumandos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{2^2\,\text{sumandos}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\,\text{sumandos}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k\,\text{sumandos}} \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así pues, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Otra forma de ver que la serie armónica diverge es la siguiente. Supongamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge. Entonces sus sumas parciales $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ forman una sucesión de Cauchy. Así pues, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s_N| < \frac{1}{3} \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{3} > s_{2N} - s_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ sumandos}} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}\,,$$

que es una contradicción.

Analizamos ahora un tipo de serie de extraordinaria importancia.

**Teorema 2.4.2 (La serie geométrica)** *Sean $a, x \in \mathbb{R}$. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ax^n$ recibe el nombre de serie geométrica. Si $|x| < 1$, la serie converge y su suma es $\frac{a}{1-x}$ . Si $a \neq 0$ y $|x| \geq 1$, entonces la serie diverge.*

Las series geométricas son fáciles de tratar porque las sumas parciales pueden calcularse explícitamente. También son fáciles de analizar las series en las que los términos $a_n$ pueden escribirse en la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, siendo conocido el comportamiento de la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, pues entonces

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Estas sumas se llaman *telescópicas*. Desde luego esto siempre es posible en teoría, pues podríamos tomar $b_1 = 0$ y $b_{n+1} = -s_n$ para $n \in \mathbb{N}$, pero podríamos no conocer el comportamiento de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Sin embargo el método tiene éxito con frecuencia y merece la pena considerarlo.

**Ejemplos**

(a) Si $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ y

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

cuando $n \to \infty$. Así pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(b) Usaremos (a) para demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge a una suma $\leq 2$.[5] Sea $s_n$ como en (a). Entonces la suma parcial $n$-ésima $t_n$ de la serie que estamos considerando verifica

$$t_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + s_{n-1} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

[5] Si $p \in \mathbb{R}$, puede probarse que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si, y sólo si, $p > 1$.

para $n \geq 2$. La sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y $0 < t_n < 2$ para todo $n$, luego $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ converge y
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} t_n \leq 2.$$
Este es un buen ejemplo de una serie para la que no es difícil ver que converge y sin embargo resulta difícil calcular explícitamente su suma. Ésta es una característica común a muchas series. Se sabe que
$$\frac{8}{5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \frac{5}{3}.$$

Escribimos ahora el criterio de Cauchy en términos de convergencia de series.

**Teorema 2.4.3 (Criterio de Cauchy)** *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si, y sólo si, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $q > p \geq N$ *entonces*
$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n \right| < \varepsilon.$$

**Corolario 2.4.1** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *son series de términos reales y existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n = b_n$ *para todo* $n > N$, *entonces las dos series tienen el mismo carácter, es decir, convergen ambas o divergen ambas. Así pues, el carácter de una serie no se ve afectado alterando un número finito de términos.*

El siguiente teorema resulta de una aplicación sencilla del criterio de Cauchy.

**Teorema 2.4.4** *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones de números reales. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *está acotada, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

**Corolario 2.4.2** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de términos reales y* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge y tenemos* $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Este corolario nos lleva a la definición de convergencia absoluta.

**Definición 2.4.2** *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de términos reales se dice que* ***converge absolutamente*** *(o que es* ***absolutamente convergente****) si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

El corolario 2.4.2 nos dice que una serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco es falso puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge mientras que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (llamada a veces serie armónica alternada) converge, en virtud del siguiente teorema.

**Teorema 2.4.5 (Test de Leibniz de la serie alternada)** *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona decreciente de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.*[6]

*Además, si $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, entonces $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

El teorema 2.1.3 para sucesiones se corresponde con el siguiente para series.

**Teorema 2.4.6** *Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes de términos reales y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

*(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

*(2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ .

*En particular, las dos series del lado izquierdo convergen.*

El siguiente teorema se usa con mucha frecuencia para examinar la convergencia de una serie.

**Teorema 2.4.7 (Test de comparación)** *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números reales y supongamos que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$[7]

*Por consiguiente*

*(1) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge*

*y*

*(2) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

*Además, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $a_p < b_p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

**Ejemplos**

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ porque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ y $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[6] Se llaman *alternadas* aquellas series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos.

[7] Aquí puede ocurrir que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ o $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$; se trabaja en $\mathbb{R}^\sharp$.

(2) Claramente $0 < 2^n < 2^n + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $0 < \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ es convergente, y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Anteriormente definimos el número $e$ por

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

El siguiente teorema proporciona una expresión en forma de serie para $e$.

**Teorema 2.4.8** *Se tiene*

*(1)* $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ,

*(2)* $e$ *es irracional,*

*y si* $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ , *entonces*

*(3)* $0 < e - s_n < 1/(n!\, n)$

*para todo* $n \in \mathbb{N}$.

***Nota***

Las desigualdades del teorema 2.4.8(3) pueden usarse para calcular aproximaciones decimales al número $e$ con gran precisión. Tomando $n = 12$, se obtiene

$$2.718281826 < e < 2.718281832.$$

Los dos criterios para la convergencia absoluta que presentamos ahora, aunque algo débiles, son de considerable importancia teórica y son útiles algunas veces para analizar series particulares. El primero de ellos se debe a Cauchy y se encuentra en su famoso *Cours d'Analyse*. El segundo se debe al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) y aparece en el quinto volumen de sus *Opuscules mathématiques*.

**Teorema 2.4.9 (Criterio de la raíz (Cauchy, 1821))** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos reales y sea*

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

*(1) Si* $\rho < 1$, *la serie converge absolutamente.*

*(2) Si* $\rho > 1$, *la serie diverge.*

**Teorema 2.4.10 (Criterio del cociente (d'Alembert, 1768))** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos reales con* $a_n \neq 0$ *para todo* $n$.

*(1) Si* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *la serie converge absolutamente.*

*(2) Si* $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *la serie diverge.*

***Observaciones***

(1) En los criterios anteriores son esenciales las desigualdades estrictas.

Si $a_n = 1/n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$.

Si $a_n = 1/n^2$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$.

(2) Una serie que pueda analizarse con éxito por el criterio del cociente también puede analizarse con éxito por el criterio de la raíz (aunque los cálculos involucrados podrían ser mucho más difíciles). Realmente, el criterio de la raíz es estrictamente más fuerte que el criterio del cociente, como muestran (3) y (4).

(3) Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = \begin{cases} 1/2^n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1/3^n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ; $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 < 1$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{k\to\infty} (a_{2k}/a_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} (3^{2k-1}/2^{2k}) = +\infty$, puesto que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{2^n}{3^{n+1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \cdot \dfrac{1}{3} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{3^n}{2^{n+1}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot \dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así pues, el criterio de la raíz detecta la convergencia mientras que el criterio del cociente no. Este ejemplo también muestra que $\underline{\lim}$ no puede reemplazarse por $\overline{\lim}$ en el teorema 2.4.10(2).

(4) Para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1/2^n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ y $\underline{\lim_{n\to\infty}} |a_{n+1}/a_n| = 0 < 1$ puesto que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 1/2^{2n+1} & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] 2^{2n+1} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así pues, el criterio de la raíz detecta la divergencia mientras que el criterio del cociente no. Se tiene que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2 < 1$, de modo que $\overline{\lim}$ no puede reemplazarse por $\underline{\lim}$ ni en el teorema 2.4.9(1) ni en el teorema 2.4.10(1).

## 2.5. Series de potencias

**Definición 2.5.1** *Una **serie de potencias** es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*donde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión fija de números reales y $x \in \mathbb{R}$. El número $a_n$ se llama **coeficiente n-ésimo** de la serie.*[8]

La serie será convergente o divergente según el valor de $x$.

**Teorema 2.5.1 (Teorema de Cauchy-Hadamard)** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y sea $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Se define*

$$R = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } 0 < \alpha < +\infty \\ +\infty & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

*Entonces la serie converge absolutamente si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$.*[9]

**Definición 2.5.2** *Con la notación del teorema 2.5.1, $R$ recibe el nombre de **radio de convergencia** de la serie de potencias. El intervalo abierto $(-R, R)$ se llama intervalo de convergencia de la serie de potencias.*

No debe confundirse el intervalo de convergencia con el conjunto de puntos para los que la serie converge.

- Si $0 < R < +\infty$, la serie converge absolutamente para $x \in (-R, R)$ y diverge para $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$. Para $x = R$ y $x = -R$ la serie puede ser convergente o puede no serlo.
- Si $R = +\infty$, la serie converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$.
- Si $R = 0$ el intervalo de convergencia es vacío y la serie converge sólo para $x = 0$.

### *Nota*

Es claro que, para una serie de potencias dada, $R$ es el único elemento de $[0, +\infty]$ para el que se obtiene la conclusión del teorema.

[8] En general, una serie de potencias es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$ fijo, pero éstas se reducen a las anteriores al tomar como variable $x' = x - a$. En este contexto, por convenio $0^0$ significa 1.

[9] El teorema (para series de potencias en una variable compleja) fue publicado por Cauchy en su *Cours d'Analyse* (1821). El resultado permaneció relativamente desconocido hasta que fue redescubierto por el matemático francés Jacques Hadamard (1865-1963), quien fue el primero en proporcionar una demostración rigurosa. Hadamard publicó por primera vez el resultado en "Sur le rayon de convergence des séries ordonées suivant les puissances d'une variable", *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, vol. 106 (1888), págs. 259-262.

No siempre es necesario usar la definición de $R$ para calcular su valor. Por ejemplo, si aplicamos el criterio del cociente a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$$

encontramos, escribiendo $a_n = n^n x^n/n!$, que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}n!}{n^n x^n (n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e|x|\,.$$

Así pues, la serie converge absolutamente si $|x| < 1/e$ y diverge si $|x| > 1/e$; por consiguiente, $R = 1/e$. Es más difícil demostrar directamente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e\,.$$

**Ejemplos**

(1) Para $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, se tiene $R = 1$ y la serie diverge para $|x| = 1$ puesto que los términos no tienden a cero.

(2) Para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n(n+1)$, se tiene $R = 1$ (criterio del cociente) y la serie converge absolutamente para $|x| = 1$ (test de comparación).

(3) Para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$, se tiene $R = 1$. La serie diverge para $x = 1$ (serie armónica) y converge para $x = -1$ (test de Leibniz).

(4) Para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, se tiene $R = 0$.

(5) Para $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, se tiene $R = +\infty$ (criterio del cociente).

## 2.6. Multiplicación de series

Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ son dos series convergentes, podríamos esperar que, por analogía con la multiplicación de polinomios, fuera posible formar una serie cuyos términos fuesen todos los productos posibles $a_m b_n$ ($m \geq 0, n \geq 0$) de tal forma que la nueva serie convergiera a la suma $AB$. Al hacer esto, el problema que se plantea es determinar una forma razonable de disponer la colección de términos en una única sucesión de manera que tenga sentido hablar de sumas parciales (recordemos que la suma de una serie es el límite de su sucesión de sumas parciales, si el límite existe). La suma (si existe) podría verse afectada por la disposición elegida. Nosotros consideraremos solamente el producto de Cauchy de dos series. La idea subyacente es la de multiplicar formalmente las series de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ y agrupar los productos que tienen la misma potencia de $x$; se ve así que el coeficiente de $x^n$ es $\sum a_k b_m$, donde la suma se extiende a todos los pares ordenados $(k, m)$ tales que $k + m = n$, es decir, $0 \leq k \leq n, m = n - k$.

**Definición 2.6.1** *El* ***producto de Cauchy*** *de dos series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *de términos reales es la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *donde*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

**Ejemplo**

El mismo Cauchy proporcionó el siguiente ejemplo de una serie convergente cuyo producto de Cauchy consigo misma diverge. Sea

$$a_0 = b_0 = 0, \qquad a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge por el test de Leibniz, pero $c_0 = c_1 = 0$ y, para $n > 1$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k}}\,,$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = 1\,;$$

por consiguiente, $c_n \nrightarrow 0$ y resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge.

A pesar del resultado negativo de este ejemplo, los dos teoremas siguientes proporcionan notables resultados positivos.

**Teorema 2.6.1 (Teorema de Mertens (1875))** *Si al menos una de las dos series convergentes* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *de términos reales es absolutamente convergente y si* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *es su producto de Cauchy, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$. *En particular, el producto de Cauchy converge.*[10]

**Teorema 2.6.2 (Teorema de Abel (1826))** *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *son series convergentes de términos reales y si su producto de Cauchy* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ *también converge, entonces* $C = AB$.[11]

[10] Franz Carl Joseph Mertens (1840-1927) publicó su resultado en "Über die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 79 (1875), págs. 182-184.

[11] El matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) publicó su resultado en "Untersuchungen über die Reihe: $1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \cdots$", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1 (1826), págs. 311-338. Aparece como Lehrsatz VI en las páginas 316-317.

**Corolario 2.6.1** *Si las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *tienen radios de convergencia* $R_1$ *y* $R_2$ *respectivamente y si* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *para* $n \geq 0$*, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

*para* $|x| < \min\{R_1, R_2\}$.

**Ejemplos**

(a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ (criterio del cociente). Puede entonces definirse una función $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

que recibe el nombre de **función exponencial** (real); exp resulta ser una función derivable estrictamente creciente con $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$; exp admite una función inversa, llamada **logaritmo** (o *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano*) que se designa por ln. Así pues, $\ln = \exp^{-1}$, el dominio de ln es $(0, +\infty)$ y su recorrido es $\mathbb{R}$. El logaritmo es también una función derivable estrictamente creciente. (Cf. tema 3).

Es claro que $\exp(0) = 1$.

Sabemos que

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

por tanto $\ln(e) = 1$ y entonces (cf. definición de $a^b, a > 0, b \in \mathbb{R}$, en la página siguiente)

$$e^x = \exp(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Veamos que

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. En efecto, si formamos el producto de Cauchy de las dos series $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ y $\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$ y usamos el teorema binomial, se tiene

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Si ponemos $y = -x$, se obtiene

$$\exp(x)\exp(-x) = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se deduce

$$\exp(x) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. De hecho, a partir de la definición, es claro que $\exp(x) > 1 + x$ si $x > 0$. Así, $x \geq 0$ implica $\exp(x) > 0$ y $\exp(-x) = 1/\exp(x) > 0$, de modo que

$$\exp(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$ y tomamos $h > 0$ arbitrario, entonces $\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x)$. Por tanto, si $x < y$ entonces $\exp(x) < \exp(y)$.

Usando la exponencial y el logaritmo podemos extender la definición de potencia a exponente real cualesquiera. Si $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, se define

$$a^b = \exp(b \ln(a)),$$

y se verifican las siguientes propiedades.

- Sean $x$ e $y$ números reales positivos y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:
  (1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$,
  (2) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$,
  (3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$,
  (4) si $\alpha > 0$ entonces $x < y$ si, y sólo si, $x^\alpha < y^\alpha$, y
  si $\alpha < 0$ entonces $x < y$ si, y sólo si, $y^\alpha < x^\alpha$.
- Si $\alpha < \beta$, se tiene:
  (5) si $x > 1$ entonces $x^\alpha < x^\beta$, y
  si $0 < x < 1$ entonces $x^\beta < x^\alpha$.

(b) Las series $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ y $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$ convergen absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ (criterio del cociente). Se definen la **función seno** $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la **función coseno** $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Estas definiciones se pueden tomar como punto de partida de un estudio completamente analítico de las funciones trigonométricas.

(c) Puede ocurrir que el radio de convergencia del producto de Cauchy de dos series de potencias sea estrictamente mayor que el de cualquiera de ellas. Por ejemplo, sea $a_0 = 1, a_n = 2$ para $n \geq 1$, y

$$b_n = \frac{1}{5}\left((-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n}\right)$$

para $n \geq 0$. Usando el criterio del cociente, se comprueba que las dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tienen radio de convergencia igual a 1. Formemos el producto de Cauchy de las dos series. Se tiene $c_0 = a_0 b_0 = 1$ y, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
c_n &= \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \\
&= \left[ \frac{1}{5} \left( (-1)^n \cdot 8 - \frac{3}{4^n} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{5} \left( (-1)^k \cdot 8 - \frac{3}{4^k} \right) \right] x^n \\
&= \left[ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5} \left( (-1)^k \cdot 8 - \frac{3}{4^k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{5} \left( (-1)^k \cdot 8 - \frac{3}{4^k} \right) \right] x^n \\
&= \left[ \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left( 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{4} \right)^k + \frac{1}{4^n} \right) \right] x^n \\
&= \left[ \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left( 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4^n} \right) \right] x^n \\
&= \left[ \frac{8}{5} - \frac{8}{5} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4^n} \right] x^n \\
&= \left( \frac{x}{4} \right)^n
\end{aligned}$$

Así pues, el producto de Cauchy es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (x/4)^n$, que tiene radio de convergencia igual a 4. En particular, tomando $x = 1$ tenemos dos series divergentes (los términos no tienden hacia cero) cuyo producto de Cauchy es absolutamente convergente.

## 2.7. Ejercicios

Los ejercicios señalados en rojo proporcionan resultados importantes que complementan la teoría.

**1.** Demuestra que cualquier sucesión de números reales contiene una subsucesión monótona.

**2.** Si $(a_n)$ es una sucesión acotada y $(b_n)$ es una sucesión que verifica $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, demuestra que $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

**3.** Demuestra que si la sucesión $(a_n)$ es convergente, entonces también lo es la sucesión $(|a_n|)$. ¿Es cierto el recíproco?

**4.** Sea $p \in \mathbb{N}$, $a$ un número real no negativo y $(a_n)$ una sucesión de números reales no negativos. Entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

**5.** Calcula los siguientes límites:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$, (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})$,

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, $a>0, b>0$, (7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha)$, $0<\alpha<1$,

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$, (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$,

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5+n^4}$, (9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$,

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$, (10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k(n-k)}$.

**6.** Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\} = 1,$$

donde $\{x\}$ designa la parte fraccionaria del número real $x$, es decir, $\{x\} = x - [x]$ donde $[x]$ es la parte entera de $x$.

**7.** Demuestra que, si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

**8.** Calcula

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right)^n.$$

**9.** ¿Qué número es mayor,

(a) $1000^{1000}$ o $1001^{999}$, (b) $(1.000001)^{1000001}$ o 2?

**10.** Establece la monotonía de las sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ donde

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\ln n \quad \text{para} \quad n\in\mathbb{N},$$

$$b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n \quad \text{para} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Demuestra que ambas tienden al mismo límite $\gamma$, que recibe el nombre de *constante de Euler*.

**11.** Demuestra la convergencia de las sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ definidas por:

(a) $a_n = -2\sqrt{n}+\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n\in\mathbb{N}$,

(b) $b_n = -2\sqrt{n+1}+\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

**12.** Sea $a$ un número real positivo. Se define la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mediante la siguiente fórmula de recurrencia

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n},\ n \geq 1.$$

Demuestra que la sucesión converge y calcula su límite.

**13.** Demuestra que

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

converge y encuentra el límite.

**14.** Una sucesión esta definida por la siguiente fórmula de recurrencia

$$x_1 = a > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ n \geq 1.$$

Demuestra que la sucesión converge y calcula su límite.

**15.** Sea $(a_n)$ una sucesión definida recursivamente como sigue:

$$a_1 = 0, \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4},\ n \geq 2.$$

Encuentra la fórmula del término $n$-ésimo de la sucesión y halla su límite.

**16.** Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$0 < a_n < 1 \qquad \text{y} \qquad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}.$$

Demuestra que la sucesión es convergente y calcula su límite.

**17.** Se definen las sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ como sigue:

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestra que $(a_n)$ y $(b_n)$ tienden ambas al mismo límite. (Este límite se llama la *media aritmética-geométrica de* $a_1$ *y* $b_1$).

**18.** Se define la *sucesión de Fibonacci* $(a_n)$ como sigue:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1},\ n \geq 1.$$

Demuestra que

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad \textit{(fórmula de Binet)},$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son las raíces de $x^2 = x + 1$. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

**19.** Determina si son de Cauchy las sucesiones cuyos términos generales vienen dados por

$$\text{(a) } a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \cdots + \frac{n^2}{4^n}, \qquad \text{(b) } a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

**20.1.** Demuestra el siguiente *teorema de Toeplitz* sobre transformaciones regulares de sucesiones en sucesiones.

Sea $\{c_{n,k} : 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\}$ una colección de números reales tal que:

(1) $c_{n,k} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$,

(3) existe $C > 0$ tal que para todos los enteros positivos $n$

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \leq C.$$

Entonces para cualquier sucesión convergente $(a_n)$, la sucesión transformada $(b_n)$ dada por $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k$, $n \geq 1$,es también convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**20.2.** Demuestra que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

**20.3.1.** Demuestra que la hipótesis (3) del teorema de Toeplitz puede omitirse si todos los números $c_{n,k}$ son no negativos.

**20.3.2.** Sea $(b_n)$ la sucesión transformada definida en el teorema de Toeplitz con $c_{n,k} > 0$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$. Demuestra que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

**20.4.** Demuestra que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = +\infty.$$

**20.5.** Demuestra que si $(a_n)$ es una sucesión de términos positivos que converge hacia $a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a$.

**20.6.** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones tales que

(1) $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = l.$$

**20.7.** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones tales que

(1) $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a.$$

**20.8.** *Teorema de Stolz*. Sean $(x_n)$ e $(y_n)$ dos sucesiones que satisfacen las condiciones:

(1) $(y_n)$ es estrictamente creciente con $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

**20.9.** Calcula

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \qquad (3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n},$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}},\ k \in \mathbb{N}, \quad (4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\ln n}.$$

**20.10.** Demuestra que si $(a_n)$ es una sucesión para la que

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

**21.** ¿Y si ponemos un 2 en vez de un 3?

(a) Encuentra una sucesión $(a_n), a_n > 0$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

sean ambas convergentes.

(b) Demuestra que no existe ninguna sucesión $(a_n), a_n > 0$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

sean ambas convergentes.

**22.** Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números reales positivos, entonces también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{n/(n+1)}$.

**23.** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ sucesiones de números reales positivos. Demuestra que:

(1) Si $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Como aplicación, demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.

**24.** Determina el carácter de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ .

**25.** Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Establece una condición necesaria y suficiente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+2}-a_n)$ sea convergente. Como aplicación, demuestra la convergencia y halla la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

**26.** Halla la suma de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ , (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ , (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ .

**27.** Halla la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} .$$

**28.** Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son convergentes. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ es convergente y que se verifica la desigualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) .$$

**29.** Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces también lo son $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ ($a_n \neq -1$ para todo $n$).

**30.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de números reales no negativos. Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ también converge. Demuestra que el recíproco no es cierto. Sin embargo, si la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, entonces es cierto el recíproco.

**31.** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie divergente de términos positivos. Estudia el comportamiento de las siguientes series:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}.$$

**32.** Determina el carácter de las siguientes series:

$$\text{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n!}, \qquad \text{(5)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}},$$

$$\text{(2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}, \qquad \text{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n + \frac{2n}{n-1} \right)^{-n},$$

$$\text{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}, \qquad \text{(7)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3},$$

$$\text{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}, \qquad \text{(8)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}.$$

**33.** Determina el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n, \qquad \text{(3)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)},$$

$$\text{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, \qquad \text{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

**34.** Demuestra que el producto de Cauchy de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

por sí misma, es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+2} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de la serie producto.