Tema 3

Límites, continuidad y derivabilidad de funciones de una variable

3.1. Funciones reales de variable real

Una *función real de variable real* es una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en donde X e Y son conjuntos de números reales.

El conjunto X es el *dominio* de la función f.

Se llama *gráfica* de la función f al conjunto $\{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Si $A \subset X$, la *imagen directa* de A por f es el conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. En particular, el conjunto $f(X)$ es el *recorrido* de la función f.

Si $B \subset Y$, la *imagen inversa* de B por f es el conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Si $A = \{x : 0 \le x \le 2\}$, entonces $f(A) = \{y : 0 \le y \le 4\}$.

Si $B = \{y : 0 \le y \le 4\}$, entonces $f^{-1}(B) = \{x : -2 \le x \le 2\}$. Así, en este caso, vemos que $f^{-1}(f(A)) \ne A$.

Por otra parte, se tiene que $f(f^{-1}(B)) = B$. Pero si $C = \{y : -1 \le y \le 1\}$, entonces se tiene que $f(f^{-1}(C)) = \{y : 0 \le y \le 1\} \ne C$.

Si $S \subset X$, podemos definir una nueva función $f|_S : S \longrightarrow Y$ por $f|_S(x) = f(x), x \in S$, que recibe el nombre de *restricción* de f a S.

Ejemplos

(1) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. El dominio y el recorrido son el conjunto $\mathbb{R}$.

(2) Para las funciones $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$, el dominio y el recorrido son el conjunto $[0, +\infty)$.

(3) Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [0, 1), \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Se trata de una función definida a trozos. El dominio es $[0, 2]$; el recorrido es $[1, 4]$.

(4) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta es la función *valor absoluto*. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $[0, +\infty)$.

(5) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ es una función constante. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\{1\}$.

Observación

En ocasiones, cuando se nos da una función, se facilita solamente la fórmula $y = f(x)$ que permite hallar la imagen y de cada elemento x, pero no se da, de modo expreso, el conjunto X, el dominio de f. En tales casos, se entiende que el dominio de f es el conjunto más amplio posible, es decir, el conjunto de los números reales x para los que existe $f(x)$.

Las funciones dadas por

$$f(x) = x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

no son iguales pues el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el de g es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. No obstante $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Definición 3.1.1 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función real de variable real.*

*(1) Se dice que f es **inyectiva** si siempre que $x \neq x'$ entonces $f(x) \neq f(x')$ (o, lo que es equivalente, si $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$).*

*(2) Se dice que f es **sobre** si $f(X) = Y$ (esto es, si todo elemento de Y es imagen de algún elemento de X).*

*(3) Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobre.*

Que una función $f : X \longrightarrow Y$ sea biyectiva significa que cada elemento de Y es la imagen de un elemento de X, y sólo de uno. En esta situación, cada $y \in Y$ determina unívocamente el elemento $x \in X$ tal que y es la imagen de x por f, es decir, $y = f(x)$. Queda así establecida una función con dominio Y y recorrido X, que se llama *inversa* de f y se designa por f^{-1}. Así pues,

$$\boxed{y = f(x) \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = f^{-1}(y).}$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ es biyectiva y $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ es su inversa, es claro que f^{-1} es también biyectiva y que la inversa de f^{-1} es f.

En muchas ocasiones, cuando y se obtiene haciendo algunas operaciones aritméticas con x, la determinación de f^{-1} consiste en "despejar" la x en la relación que liga x con y. Por ejemplo, si f viene dada por la relación $y = \frac{3x-1}{2}$, se "despeja" x y se obtiene $x = \frac{2y+1}{3}$. De aquí resulta

$$y = f(x) = \frac{3x - 1}{2}, \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{2y + 1}{3}.$$

Es más usual decir que las dos funciones anteriores son una inversa de la otra y describirlas usando una única letra:

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{3}.$$

Aquí hemos considerado $X = Y = \mathbb{R}$. En cualquier asunto relativo a una función y a su inversa deben siempre precisarse cuáles son los conjuntos X e Y.

Los puntos del plano cartesiano que tienen las dos coordenadas iguales constituyen la recta de ecuación $y = x$. Si un punto (a, b) pertenece a la gráfica de una función $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva, entonces el punto (b, a) pertenece a la gráfica de f^{-1}. Como los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto de la recta $y = x$, resulta que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de esta recta (cf. Figura 3.1).

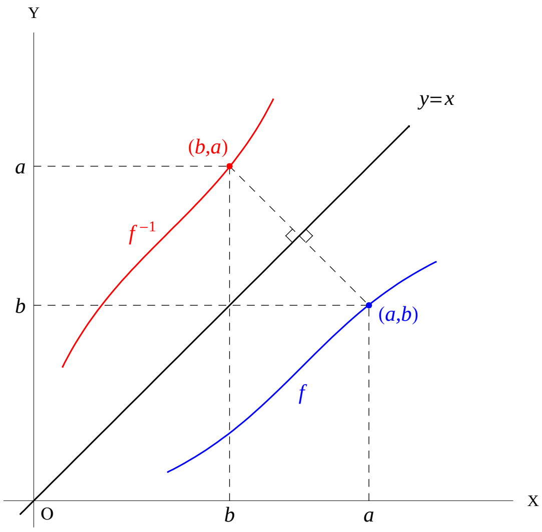

Figura 3.1: Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1}.

La función dada por $f(x) = x^2$ no es inyectiva, luego no tiene inversa.

La función $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $g(x) = x^2$ es biyectiva y su inversa es $g^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$. En la Figura 3.2 aparecen las gráficas de estas dos funciones.

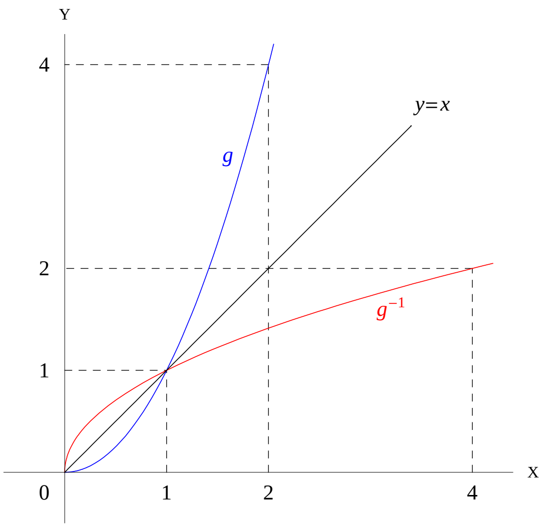

Figura 3.2

La función $h : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $h(x) = x^2$ es biyectiva y su inversa es $h^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, 0]$ dada por $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. En la Figura 3.3 vemos las gráficas de estas dos funciones.

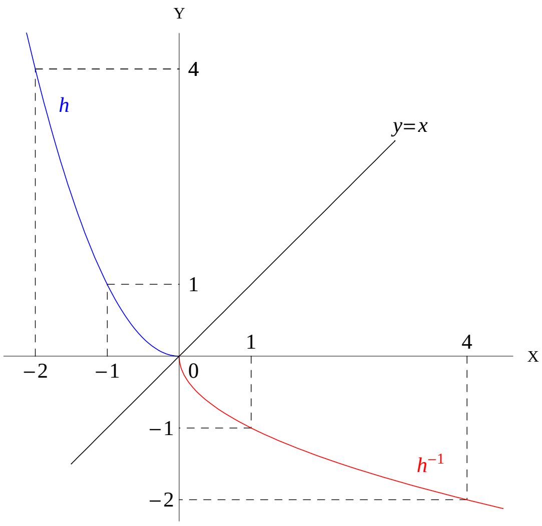

Figura 3.3

Nota

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función inyectiva y no biyectiva, la función $g : X \longrightarrow f(X)$ dada por $g(x) = f(x)$ es biyectiva y, por tanto, tiene inversa. Es decir, cualquier función inyectiva se convierte en biyectiva sin más que restringir, si es preciso, el conjunto Y de llegada. Por esta razón, podemos referirnos a la inversa de una función f inyectiva con dominio X recurriendo a la construcción indicada, y es usual que la nueva función de X en $f(X)$ se siga designando por f.

Es habitual querer "componer" dos funciones f, g hallando en primer lugar $f(x)$ y después aplicando g para obtener $g(f(x))$; sin embargo, esto es posible solamente cuando $f(x)$ pertenece al dominio de g. Si queremos hacer esto para *todo* $f(x)$, tendremos que suponer que el recorrido de f está contenido en el dominio de g.

Definición 3.1.2 *Dadas las funciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, se llama* ***función compuesta de*** *f con g (en este orden) a la función $g \circ f : X \longrightarrow Z$ (se lee 'g círculo f') definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para cada $x \in X$.[1]

[1] Observa que la función mencionada en primer lugar, la función g, es la que actúa en segundo lugar.

Ejemplos

(a) El orden de la composición debe tratarse con cuidado. En efecto, consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2$. Entonces el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}$ y $(g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2$. Por otra parte, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ es también $\mathbb{R}$, pero $(f \circ g)(x) = 2x^2$. Así, en este caso, se tiene que $g \circ f \neq f \circ g$.

(b) Asimismo hay que ser cuidadosos para asegurar que el recorrido de f esté contenido en el dominio de g. Si f y g vienen dadas por $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, como el dominio de g es $[0, +\infty)$, la función compuesta $g \circ f$ se define por

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sólo para los x del dominio de f que verifican $f(x) \geq 0$, es decir, para los x que verifican $-1 \leq x \leq 1$.

Si invertimos el orden, la composición $f \circ g$ viene dada por la fórmula

$$(f \circ g)(x) = 1 - x,$$

pero sólo para los x del dominio de g, es decir, para los $x \geq 0$.

El proceso de composición o encadenamiento de dos funciones se puede iterar y, para tres funciones f, g, h, se define $h \circ g \circ f$ (en este orden) mediante

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Naturalmente, se requiere que el recorrido de f esté contenido en el dominio de g, y que el recorrido de g esté contenido en el dominio de h. La extensión de la definición a cualquier cadena finita de funciones (nombre habitual para este tipo de composiciones) es obvia.

Definición 3.1.3 *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función en la que $X \subset \mathbb{R}$ es simétrico respecto de cero, es decir, tal que $x \in X \Rightarrow -x \in X$. Se dice que f es una **función par** si $f(-x) = f(x)$ y que f es una **función impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in X$.*

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de ordenadas y la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas (Figuras 3.4 y 3.5).

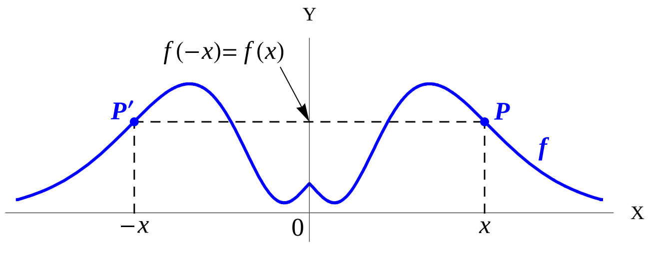

Figura 3.4: Función par: $f(-x) = f(x)$.

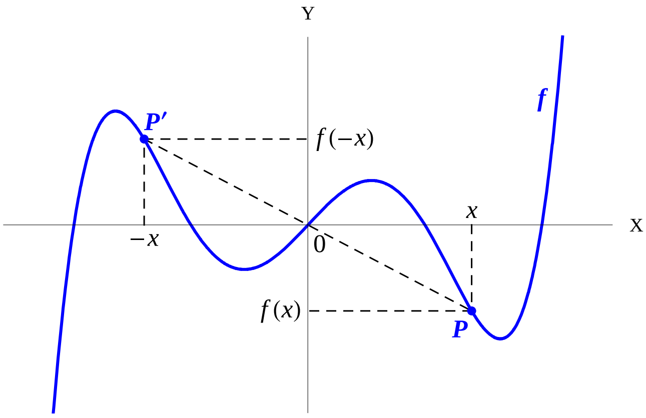

Figura 3.5: Función impar: $f(-x) = -f(x)$.

Definición 3.1.4 *Se dice que una función f es* ***periódica*** *si existe un número real $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todos los valores posibles de x.*[2] *Cualquier número p que verifique dicha propiedad se denomina periodo de la función, si bien lo habitual será considerar como periodo el menor p que la cumpla.*

Si $p > 0$ es un periodo de la función f, entonces $f(x+mp) = f(x)$ para todo x y todo $m \in \mathbb{Z}$.

Para conocer la función periódica f (de periodo $p > 0$) basta conocer los valores de f en un intervalo de longitud p. La gráfica de la función se obtiene trasladando a derecha e izquierda sucesivas veces la gráfica correspondiente a ese intervalo (Figura 3.6).

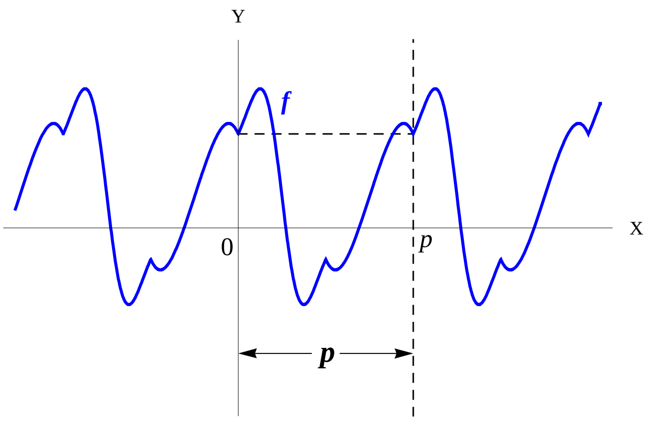

Figura 3.6: Función periódica: $f(x+p) = f(x)$.

[2] El dominio de f contiene $x+p$ siempre que contenga x y $f(x+p) = f(x)$ para todo x del dominio de f.

Algunas funciones fundamentales

Presentamos aquí de forma breve algunas funciones básicas, de uso frecuente. Debe establecerse una conexión indisoluble entre la definición y la correspondiente gráfica para que siempre que se maneje una función de estas, de forma aislada o en relación con otras funciones, surja de manera automática *in mente* la representación gráfica de la situación, lo que ayudará a recordar propiedades esenciales y, por tanto, a que los razonamientos puedan producirse con más facilidad.

Las funciones $y = x^n, y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$

La función $y = x^n, n \in \mathbb{N}$, se puede definir para todo $x \in \mathbb{R}$.
La función $y = \sqrt[n]{x}, n$ impar, se puede definir para todo $x \in \mathbb{R}$.
La función $y = \sqrt[n]{x}, n$ par, se define para todo $x \geq 0$.
Si n es impar, la función $y = x^n, x \in \mathbb{R}$, tiene por inversa a la función $y = \sqrt[n]{x}, x \in \mathbb{R}$.
Si n es par, la función $y = x^n, x \in [0, +\infty)$, tiene por inversa a la función $y = \sqrt[n]{x}, x \in [0, +\infty)$.

La Figura 3.7 muestra las gráficas de las funciones $y = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$. En las Figuras 3.8 y 3.9 aparecen las gráficas de las funciones $y = \sqrt[n]{x}$ para $n = 1, 3, 5$ y para $n = 2, 4, 6$, respectivamente.

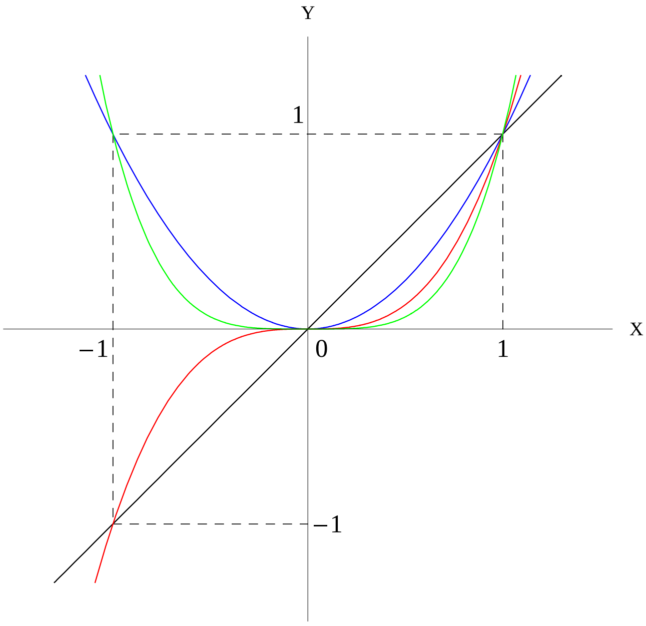

Figura 3.7: Gráficas de $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$.

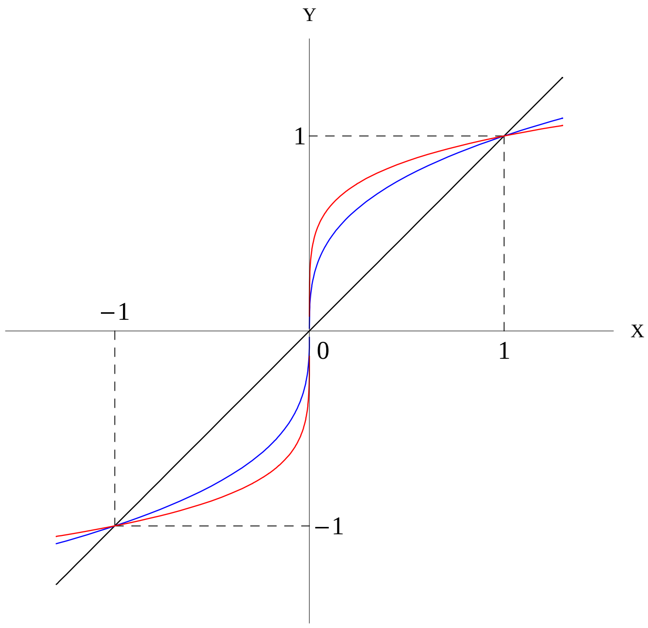

Figura 3.8: Gráficas de $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$.

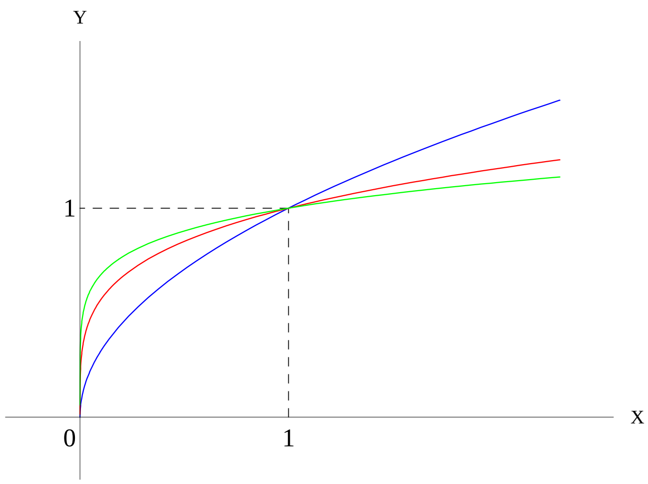

Figura 3.9: Gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[6]{x}$.

En las Figuras 3.10 y 3.11 visualizamos la función $y = x^n$ y su inversa $y = \sqrt[n]{x}$, para $n > 1$ (en los dominios adecuados).

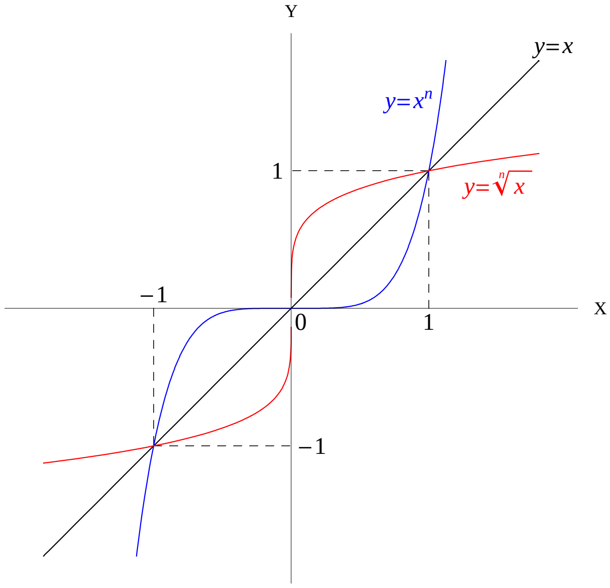

Figura 3.10: Gráfica de $y = x^n$ y de su inversa $y = \sqrt[n]{x}$, con n impar mayor que 1.

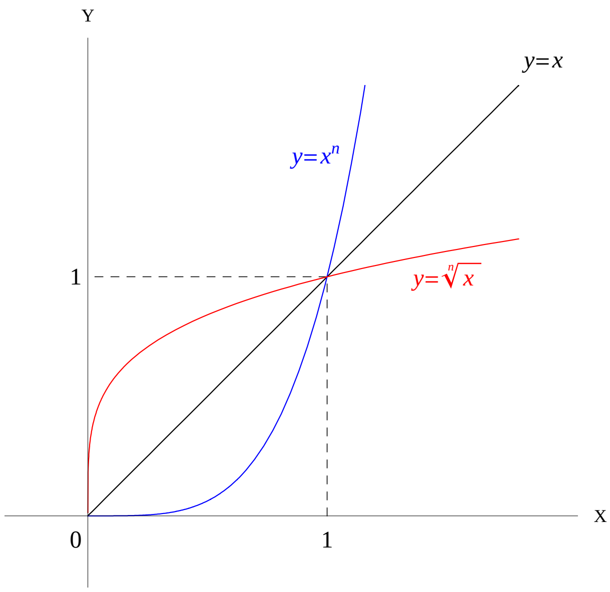

Figura 3.11: Gráfica de $y = x^n, x \in [0, +\infty)$, y de su inversa $y = \sqrt[n]{x}$, con n par.

Finalmente, la Figura 3.12 presenta las gráficas de las funciones $y = x^n$ en el intervalo $[0, 1]$ y las de sus inversas para $n = 2, 3, 4$.

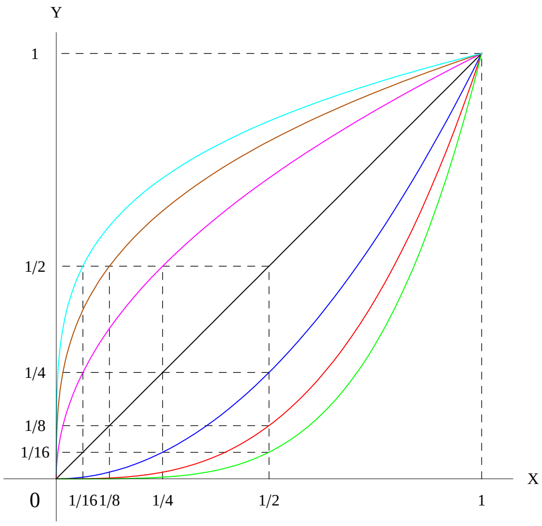

Figura 3.12: Gráficas de $y = x$, de las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y de sus respectivas inversas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, en el intervalo $[0, 1]$.

Las funciones exponencial y logarítmica

La función $y = e^x, x \in \mathbb{R}$, se llama *función exponencial*. Es inyectiva y su recorrido es $(0, +\infty)$ (cf. pág. 50 de este tema), por lo que su inversa, la *función logarítmica* (función logaritmo neperiano o logaritmo natural) $y = \ln x$, tiene por dominio $(0, +\infty)$ y por recorrido $\mathbb{R}$. En la Figura 3.13 aparecen las gráficas de ambas.

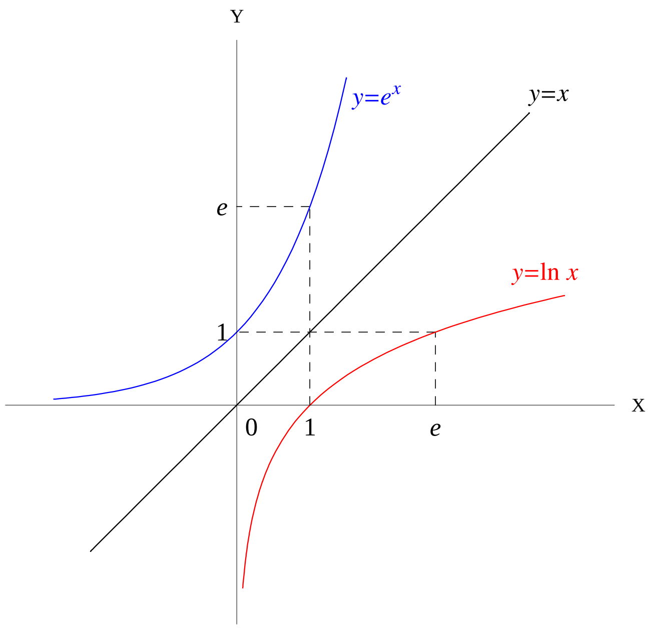

Figura 3.13: Gráficas de las funciones exponencial y logarítmica.

En general, si a es un número real con $a > 0, a \neq 1$, se llama *función exponencial de base a* a la función $y = a^x = e^{x \ln a}, x \in \mathbb{R}$. Es una función inyectiva y su recorrido es $(0, +\infty)$, por lo que su inversa, la *función logarítmica de base a*, $y = \log_a x$, tiene por dominio $(0, +\infty)$ y por recorrido $\mathbb{R}$. Así pues,

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y.$$

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes leyes de los exponentes:

$$(1)\ a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (3)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$
$$(2)\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad (4)\ (a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x.$$

Para cualesquiera $x > 0, y > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes propiedades:

$$(1)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad (3)\ \log_a \frac{1}{y} = -\log_a y,$$
$$(2)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad (4)\ \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x.$$

Además, si $b > 0, b \neq 1$, se verifica la siguiente fórmula de cambio de base[3]:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Observemos que

$$a^\xi = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\xi}, \ \xi \in \mathbb{R},$$

luego la gráfica de $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ es la simétrica de la gráfica de $y = a^x$ respecto del eje de ordenadas.

Observemos también que

$$\log_{1/a} \zeta = -\log_a \zeta, \ \zeta \in (0, +\infty),$$

luego la gráfica de $y = \log_{1/a} x$ es la simétrica de la gráfica de $y = \log_a x$ respecto del eje de abscisas.

En las Figuras 3.14 y 3.15 se representan estas dos situaciones, siendo $a > 1$.

[3]Euler expuso esta fórmula, a la que llamó "regla de oro de los logaritmos", en su obra *Introductio in analysin infinitorum*, publicada en 1748.

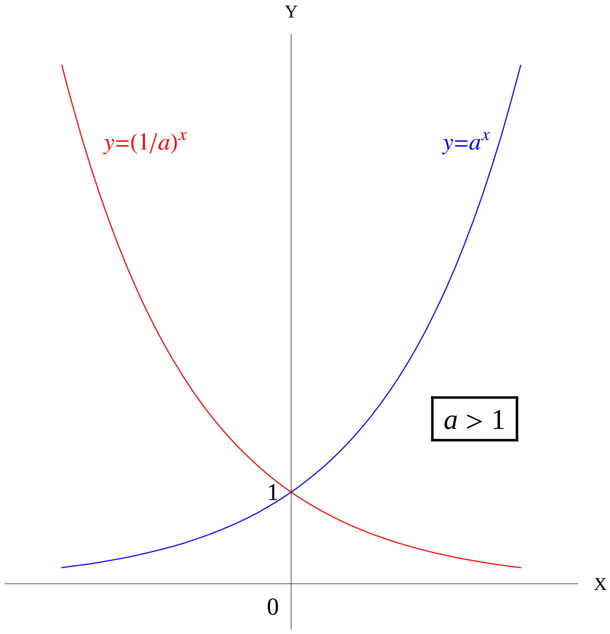

Figura 3.14

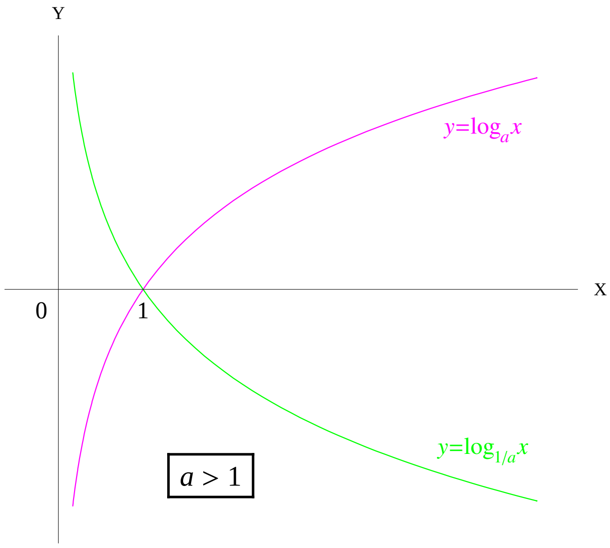

Figura 3.15

Los logaritmos utilizados con más frecuencia son los correspondientes a la base 2 ($\log_2 x$, logaritmos binarios), $e = 2.71828...$ ($\log_e x$, que designamos habitualmente por $\ln x$, (logaritmos neperianos o naturales)) y 10 ($\log_{10} x$, logaritmos comunes).[4] En la Figura 3.16 aparecen las gráficas de estas tres funciones logarítmicas.

[4]En las calculadoras y algunos libros de texto elementales se utiliza la notación $\log x$ para designar el logaritmo en base 10, sin embargo para los matemáticos y, consecuentemente, en libros de matemática avanzada, la notación $\log x$ significa $\ln x$, es decir, el logaritmo en base e. Por consiguiente, debemos tener especial cuidado cuando consultemos la literatura.

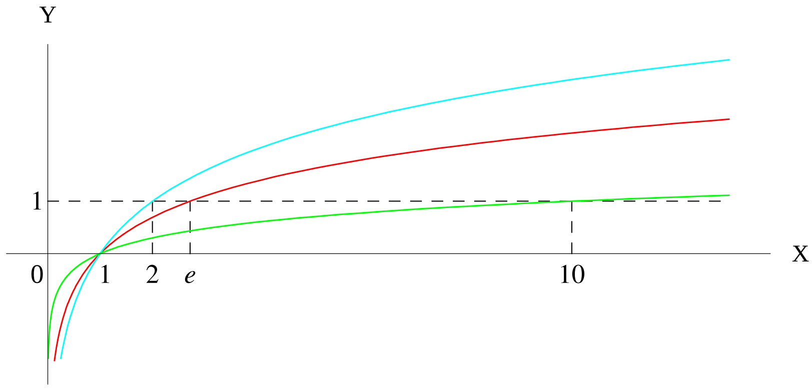

Figura 3.16: Gráficas de las funciones $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$.

Las funciones trigonométricas

En Análisis Matemático los ángulos no se miden en grados sino en radianes. Situemos el ángulo que deseamos medir de forma que su vértice coincida con el centro de un círculo de radio 1. La *medida en radianes* θ del ángulo ACB es la longitud del arco AB (Figura 3.17).[5] La longitud de una circunferencia de radio 1 es 2π, luego un ángulo de 180° tiene medida en radianes π, un ángulo de 90° tiene medida en radianes $\pi/2$, un ángulo de 45° tiene medida en radianes $\pi/4$ y un ángulo de 360° tiene medida en radianes 2π. Recíprocamente, un ángulo de 1 radián expresado en grados es $(180/\pi)^\circ$, o aproximadamente $57^\circ 17' 45''$.

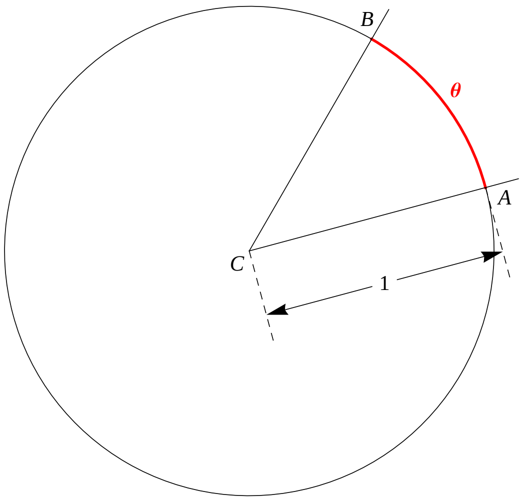

Figura 3.17: La medida en radianes del ángulo ACB es la longitud del arco AB.

[5] La medida en radianes de un ángulo también puede definirse como dos veces el *área* del correspondiente sector del círculo de radio uno.

En lo sucesivo, siempre que hablemos de un ángulo x estaremos hablando de un ángulo cuya medida en radianes es x. Por ejemplo, si hablamos del ángulo $\pi/3$, queremos decir $\pi/3$ radianes (que es $60°$) y no $\pi/3$ grados.

Hablaremos también de ángulos *negativos*. Dado un ángulo en el plano, consideraremos un sistema de referencia cartesiano rectangular de manera que el vértice esté situado en el origen de coordenadas y haremos coincidir uno de sus lados con la parte positiva del eje de abscisas. El ángulo se considerará positivo (resp. negativo) si es medido en sentido antihorario (resp. horario) desde la parte positiva del eje de abscisas.

Definimos ahora las funciones trigonométricas básicas (seno y coseno) mediante un procedimiento geométrico. Consideremos la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 (circunferencia unidad). Para cada $x \in \mathbb{R}$, la semirrecta que pasa por el origen y forma un ángulo de x radianes con la parte positiva del eje de abscisas determina un punto P_x en la circunferencia. Se definen las funciones sen (*función seno*) y cos (*función coseno*) por:

$$\cos x \text{ es la abscisa del punto } P_x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x \text{ es la ordenada del punto } P_x$$

(Figura 3.18). Vemos que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y $-1 \leq \cos x \leq 1$. Las funciones sen y cos tienen dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $[-1, 1]$. Ambas funciones son periódicas de periodo 2π; sen es impar y cos es par. En la Figura 3.19 aparecen las gráficas de las funciones sen y cos.

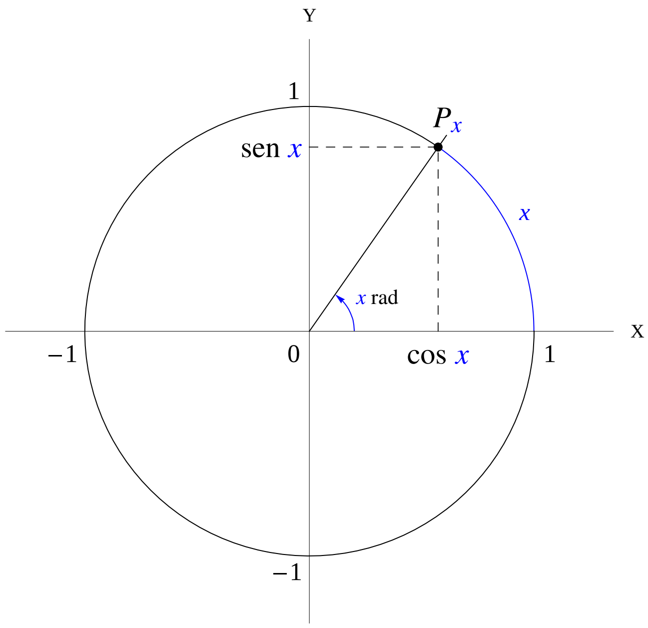

Figura 3.18: Definición geométrica de las funciones trigonométricas seno y coseno.

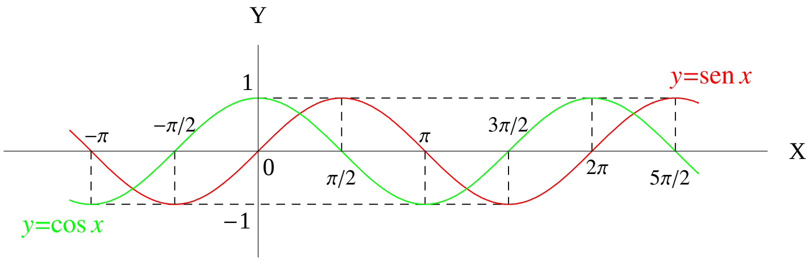

Figura 3.19

Para los valores de x para los que $\cos x \neq 0$ se define la función tg (*función tangente*) por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,.$$

Su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$. Es periódica de periodo π y es impar. La gráfica de la función tg aparece en la Figura 3.20.

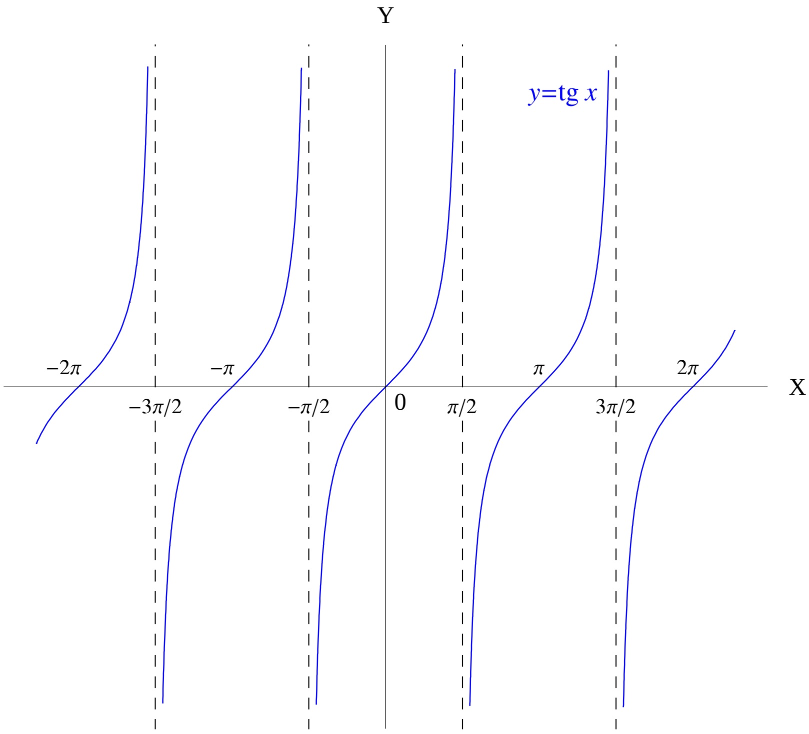

Figura 3.20

Otras funciones trigonométricas elementales son *cosecante, secante* y *cotangente*, definidas por:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}\,, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,.$$

Las funciones seno y coseno son inyectivas en determinados intervalos de longitud π. Para el seno elegimos $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y para el coseno, $[0, \pi]$. En ambos casos el recorrido es $[-1, 1]$. Así las cosas:

- La función $\operatorname{sen}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva. La función inversa recibe el nombre de *función arco seno* y se designa por arcsen. Así pues, $\operatorname{arcsen}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es tal que $\operatorname{arcsen} a = b \Leftrightarrow \operatorname{sen} b = a$.

- La función $\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ es biyectiva. La función inversa recibe el nombre de *función arco coseno* y se designa por arccos. Así pues, $\arccos: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ es tal que $\arccos a = b \Leftrightarrow \cos b = a$.

En la Figura 3.21 se muestran las gráficas de seno y arco seno, y en la Figura 3.22, las de coseno y arco coseno.

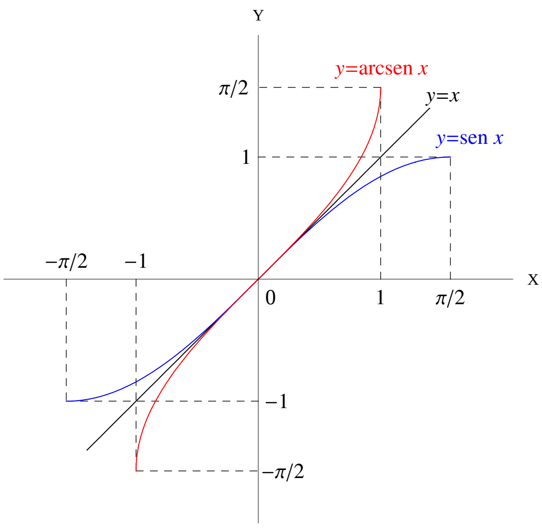

Figura 3.21

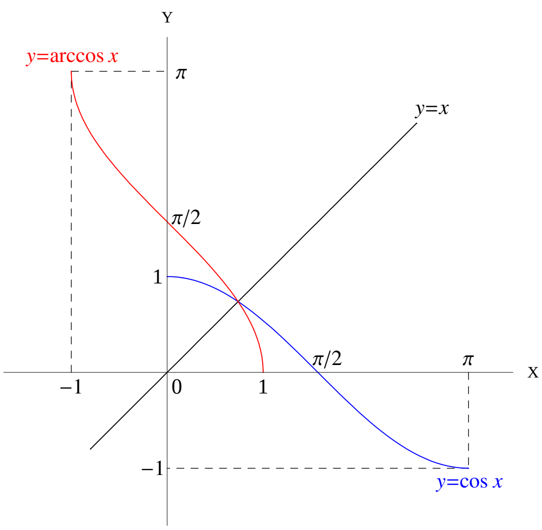

Figura 3.22

La función tangente es inyectiva en cada intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, y el recorrido es $\mathbb{R}$. Si elegimos el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tenemos que la función $\operatorname{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva. La función inversa recibe el nombre de *función arco tangente* y se designa por arctg. Así pues, $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es tal que $\operatorname{arctg} a = b \Leftrightarrow \operatorname{tg} b = a$. En la Figura 3.23 se presentan las gráficas de estas dos funciones.

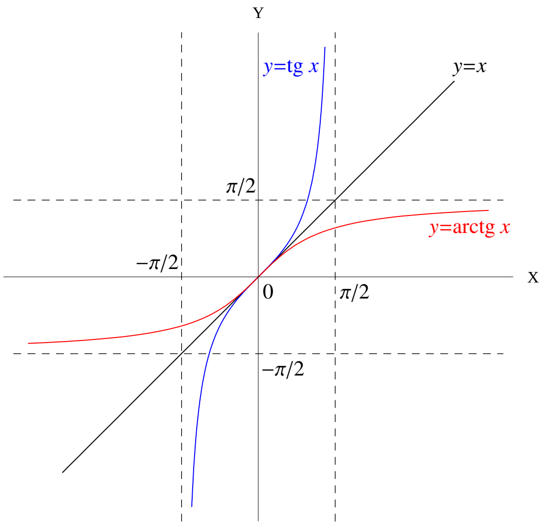

Figura 3.23

3.2. Límites de funciones

En esta sección introducimos la noción importante de límite de una función. Intuitivamente, la idea de que una función f tenga límite L en el punto a se expresa diciendo que los valores $f(x)$ se acercan a L cuando x se acerca a (pero es distinto de) a. Naturalmente, la expresión "se acerca a" requiere una mayor precisión, con la cuantificación adecuada (definición 3.2.2).

Para que tenga sentido la idea de límite de una función f en un punto a, es necesario que f esté definida en puntos próximos al punto a. No es necesario que esté definida en el punto a, pero, para que el estudio sea interesante, debería estar definida en bastantes puntos cercanos al punto a. Este es el motivo de la definición siguiente.

Definición 3.2.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Un punto $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de X si para todo $\delta > 0$ existe al menos un punto $x \in X, x \neq a$ tal que $|x-a| < \delta$.*

Ejemplos

(1) Para el intervalo abierto $X = (0,1)$, cada punto del intervalo cerrado $[0,1]$ es un punto de acumulación de X. Los puntos 0 y 1 son puntos de acumulación de X, pero no pertenecen a X.

(2) El conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene solamente al punto 0 como punto de acumulación. Ningún punto de X es un punto de acumulación de X.

Establecemos ahora la definición precisa de límite de una función f en un punto a. Es importante observar que en esta definición es indiferente que f esté definida en a o no lo esté, porque excluimos a de nuestra consideración en la determinación del límite.

Definición 3.2.2 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea a un punto de acumulación de X. Se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a y se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(o también $f(x) \to L$ cuando $x \to a$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$ significan que los puntos de la gráfica de f correspondientes al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, excluido a, están en la unión de los dos productos de intervalos abiertos

$$(a - \delta, a) \times (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \qquad \text{y} \qquad (a, a + \delta) \times (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

coloreados en la Figura 3.24 en amarillo y cian, respectivamente.

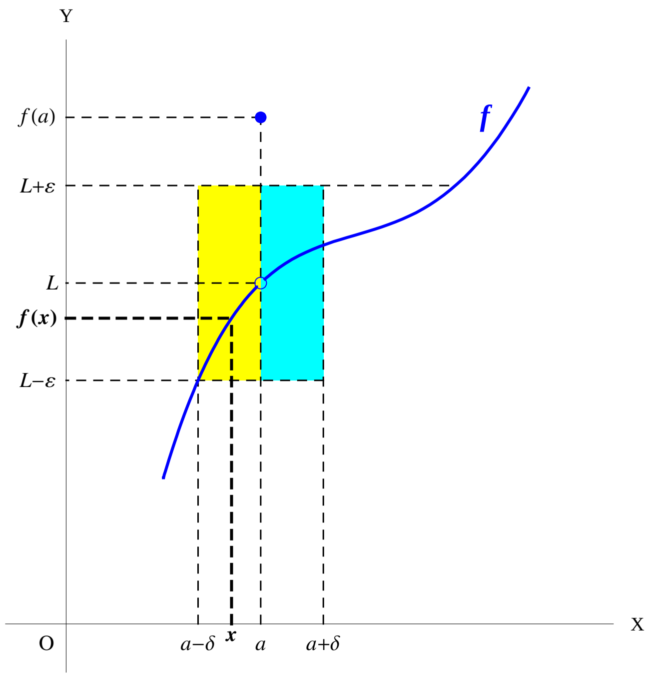

Figura 3.24: El límite de f en a es L.

Nuestro primer resultado es que el número real L, si existe, está unívocamente determinado, es decir, que una función no puede tener dos límites distintos en un mismo punto.

Teorema 3.2.1 *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y si a es un punto de acumulación de X, entonces f puede tener solamente un límite en a.*

El cálculo de límites se facilita utilizando el siguiente teorema, que proporciona unas reglas operativas básicas.

Teorema 3.2.2 *Sean $X \subset \mathbb{R}, f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de X. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces:*

(1) $\lim_{x\to a} kf(x) = kL$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$,

(2) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$,

(3) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = LM$,

(4) Si $M \neq 0$, es

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$[6]

Ejemplos

(1) A partir de la definición 3.2.2, es muy sencillo establecer que $\lim_{x\to a} k = k$, para todo $k \in \mathbb{R}$, y que $\lim_{x\to a} x = a$ (hágase como ejercicio). Entonces, por el teorema anterior, tenemos $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, y si $a \neq 0$, es $\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

(2) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de X y existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

Esto es consecuencia inmediata de la desigualdad $||x| - |y|| \leq |x - y|$, válida para todos $x, y \in \mathbb{R}$ (cf. teorema 1.2.6(3)).

(3) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de X, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ y existe $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}\,.$$

En efecto, sea $\lim_{x\to a} f(x) = L(\geq 0)$.

- Si $L > 0$, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ con $0 < |x - a| < \delta$, se tenga que $|f(x) - L| < \varepsilon\sqrt{L}$. Entonces, si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, se tiene que

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{L}}\,|f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Si $L = 0$, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ con $0 < |x - a| < \delta$, se tenga que $f(x) < \varepsilon^2$. Entonces, si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, se tiene que $\sqrt{f(x)} < \varepsilon$.

Se concluye que $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

[6] Es costumbre designar por $kf, f + g, fg$ y f/g las funciones cuyos valores para cada x son $kf(x), f(x) + g(x), f(x)g(x)$ y $f(x)/g(x)$, respectivamente. Estas funciones se denominan *producto de f por un escalar* y *suma, producto* y *cociente* de f y g, respectivamente. La *diferencia* $f - g$ es la función cuyo valor para cada x es $f(x) - g(x)$, es decir, $f - g = f + (-1)g$.

(4) Por el teorema 3.2.2, se tiene que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)(x^3-6) = 5\cdot 2 = 10$ y que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6}{x^2+1} = \frac{2}{5}$.
Veamos que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{4}{3}$. Observa que ahora no se puede aplicar el teorema 3.2.2(4), porque $\lim\limits_{x\to 2} 3x-6 = 0$. Ahora bien, si $x\neq 2$, resulta que

$$\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \frac{1}{3}(x+2).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{3}(x+2) = \frac{4}{3}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} 1-\sqrt{x} = 0$, tampoco podemos aplicar el teorema 3.2.2(4) para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$.
Sin embargo, si $x\geq 0, x\neq 1$, es

$$\frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{1-x} = -(1+\sqrt{x}),$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} -(1+\sqrt{x}) = -2.$$

(5) Sea $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función polinómica $p(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$. Del teorema 3.2.2 y del hecho de que $\lim\limits_{x\to a} x^j = a^j, j\in\mathbb{N}$, resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}(c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0)\\
&= \lim_{x\to a} c_nx^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to a} c_1x + \lim_{x\to a} c_0\\
&= c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0\\
&= p(a).
\end{aligned}$$

(6) Sean $p,q:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones polinómicas con $q(a)\neq 0$. Existe a lo sumo un número finito de números reales $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ (los ceros reales de $q(x)$) tales que $q(\alpha_j)=0$ y si $x\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$, entonces $q(x)\neq 0$. Por tanto, para $x\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ podemos definir la *función racional* r por

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Si a no es un cero de $q(x)$, entonces $q(a)\neq 0$ y del ejemplo 5 se deduce que $\lim\limits_{x\to a} q(x) = q(a)\neq 0$.
Por consiguiente, podemos aplicar el teorema 3.2.2(4) para concluir

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

El teorema siguiente muestra la relación existente entre desigualdades y paso al límite.

Teorema 3.2.3 *Sean $X \subset \mathbb{R}, f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de X. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$.*

(1) Si $k < L$ (resp. $k > L$), existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x-a| < \delta$, entonces $k < f(x)$ (resp. $k > f(x)$).

(2) Si existe un $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ con $0 < |x-a| < \delta$, se tiene $k < f(x)$ (resp. $k > f(x)$), entonces $k \leq L$ (resp. $k \geq L$).

(3) Si $L < M$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x-a| < \delta$, entonces $f(x) < g(x)$.

(4) Si existe un $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ con $0 < |x-a| < \delta$, se tiene $f(x) < g(x)$, entonces $L \leq M$.

Si en las cercanías de un punto a los valores de una función f están "atrapados" entre los valores de dos funciones que en a tienen el mismo límite, dicho límite es también el límite de f en a.

Teorema 3.2.4 (Teorema del sándwich) *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sean $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de X. Si existe $\delta > 0$ tal que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in X \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$, y además $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} \xi \leq 1 \Longleftrightarrow |\operatorname{sen} \xi| \leq 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, es $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Longleftrightarrow -|x| \leq x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y como $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, por el teorema anterior resulta que

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

La gráfica de la función f oscila infinidad de veces en la proximidad de 0, cortando al eje de abscisas en los puntos $\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por lo que no podemos esperar que la representación sea realmente "exacta" (Figuras 3.25 y 3.26).

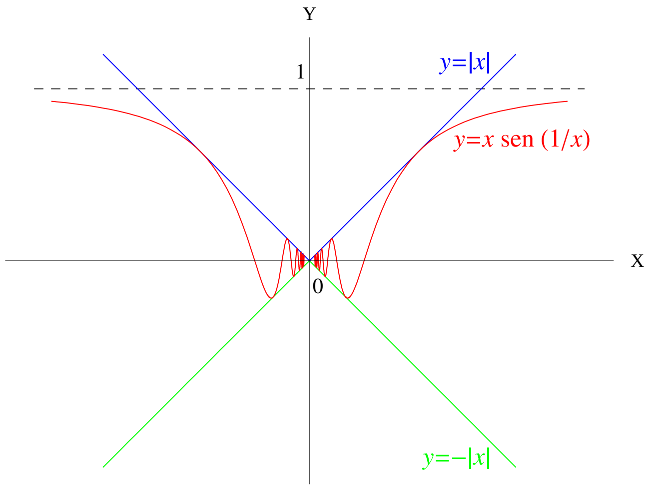

Figura 3.25: Gráfica de $y = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, $0.03 \leq |x| \leq 1.5$.

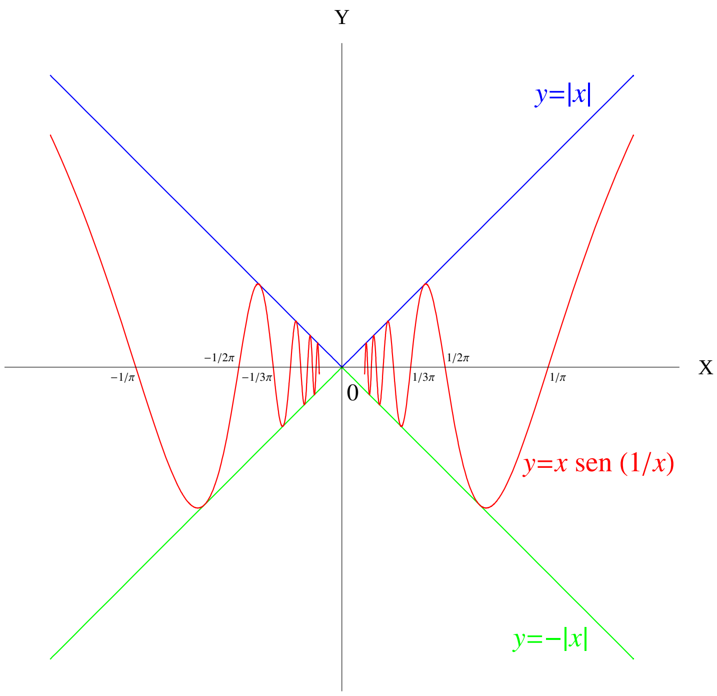

Figura 3.26: Gráfica de $y = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, $0.035 \leq |x| \leq 0.45$.

Nos ocupamos ahora de algunas extensiones del concepto de límite: *límites laterales, límites infinitos, límites en el infinito.*

Definición 3.2.3 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del conjunto $X \cap (a, +\infty) = \{x \in X : x > a\}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a por la derecha y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2) Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del conjunto $X \cap (-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a por la izquierda y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *se llaman límites laterales de f en a.*

Teorema 3.2.5 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de los conjuntos $X \cap (a, +\infty)$ y $X \cap (-\infty, a)$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Notas y ejemplos

(1) Es posible que no exista ninguno de los límites laterales, que exista uno de ellos y no exista el otro o que existan ambos y sean distintos. Un ejemplo de esta última situación lo proporciona la *función signo*, sgn, definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

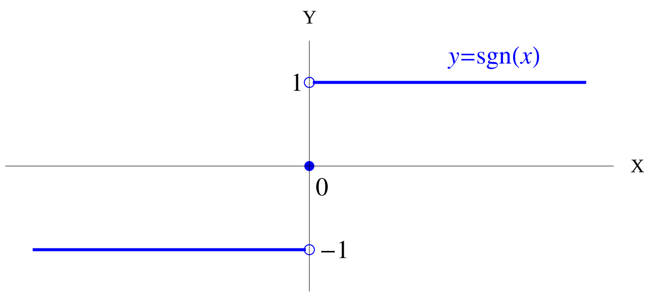

Figura 3.27: La función signo.

Vemos su gráfica en la Figura 3.27. Observa que $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$. Es claro que $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ y que $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Puesto que los límites laterales son distintos, la función signo no tiene límite en el punto 0 (teorema 3.2.5).

(2) Si X es un intervalo cuyo extremo izquierdo es a, entonces claramente $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite en a si, y sólo si, tiene límite en a por la derecha. Además, en este caso el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ y el límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x)$ son iguales y es preferible designar el límite con el símbolo $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Por ejemplo, si $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. La situación es análoga para el límite por la izquierda cuando X es un intervalo con extremo derecho a.

Definición 3.2.4 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de X.*

(1) Se dice que f tiende hacia $+\infty$ cuando x tiende hacia a y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > \alpha$.

(2) Se dice que f tiende hacia $-\infty$ cuando x tiende hacia a y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

si para cada $\beta \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < \beta$.

En la Figura 3.28 se ilustra la definición 3.2.4(1).

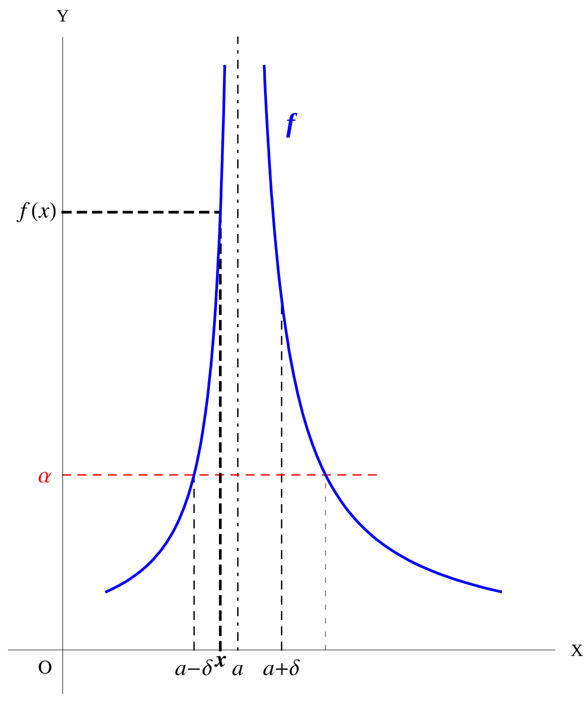

Figura 3.28: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

El siguiente es un resultado análogo al del teorema 3.2.4.

Teorema 3.2.6 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de X. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in X \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.

(1) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

(2) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Definición 3.2.5 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del conjunto $X \cap (a, +\infty) = \{x \in X : x > a\}$. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. f tiende hacia $-\infty$) cuando x tiende hacia a por la derecha y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \left(\textit{resp.} \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty\right)$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < x - a < \delta$, entonces $f(x) > \alpha$ (resp. $f(x) < \alpha$).

(2) Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del conjunto $X \cap (-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}$. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. f tiende hacia $-\infty$) cuando x tiende hacia a por la izquierda y se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \left(\textit{resp.} \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty\right)$$

si para cada $\beta \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $0 < a - x < \delta$, entonces $f(x) > \beta$ (resp. $f(x) < \beta$).

Teorema 3.2.7 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de los conjuntos $X \cap (a, +\infty)$ y $X \cap (-\infty, a)$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Ejemplos

(1) $\lim\limits_{x \to 0}(1/x^2) = +\infty$. En efecto, dado $\alpha > 0$ podemos elegir $\delta = 1/\sqrt{\alpha}$, y de esta forma, si $0 < |x| < \delta$, entonces $x^2 < 1/\alpha$ luego $1/x^2 > \alpha$ (Figura 3.29).

(2) Es fácil ver que $\lim\limits_{x \to 0^+}(1/x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-}(1/x) = -\infty$. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x \to 0}(1/x)$ (Figura 3.30).

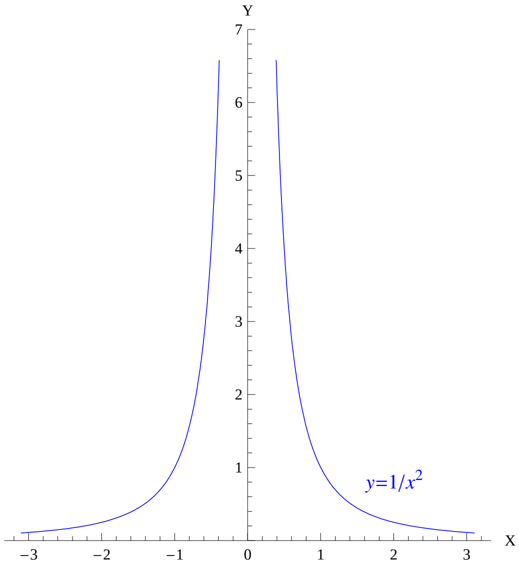

Figura 3.29: $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$.

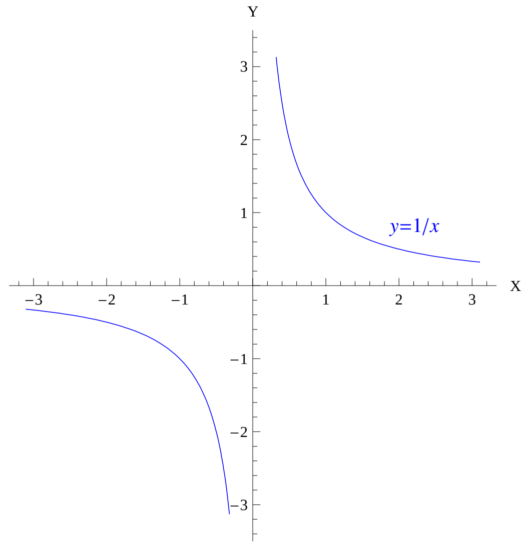

Figura 3.30: $\lim_{x\to 0^+}(1/x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-}(1/x) = -\infty$.

Definición 3.2.6 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Supongamos que $(a, +\infty) \subset X$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende hacia $+\infty$ y se escribe

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $K > a$ tal que si $x > K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2) Supongamos que $(-\infty, b) \subset X$ para algún $b \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende hacia $-\infty$ y se escribe

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $K < b$ tal que si $x < K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En la Figura 3.31 se ilustra la definición 3.2.6(1).

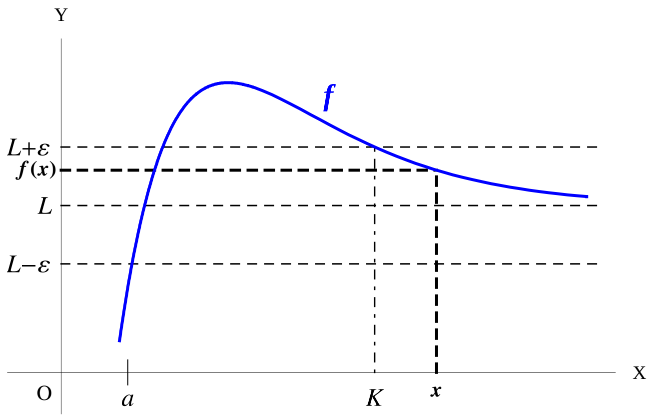

Figura 3.31: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$.

Ejemplo

Es fácil probar que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}(1/x)$ (cf. Figura 3.30).

Observación

Supongamos que $(a, +\infty) \subset X$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y sea $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Designemos por $-X$ el conjunto simétrico de X respecto de 0, es decir, $-X = \{x \in \mathbb{R} : -x \in X\}$, con lo que $(-\infty, -a) \subset -X$. Sea $f : -X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\xi) = g(-\xi)$ (las gráficas de f y g son simétricas respecto del eje de ordenadas). Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. En efecto, si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $K > a$ tal que si $x > K$, entonces $|g(x) - L| < \varepsilon$, luego existe $-K < -a$ tal que si $-x < -K$, entonces $|f(-x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon$, y resulta que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ (Figura 3.32).

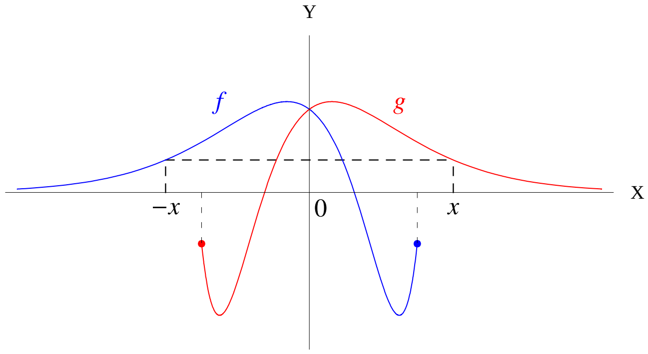

Figura 3.32: $g(x) = f(-x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

Definición 3.2.7 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Supongamos que $(a, +\infty) \subset X$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando x tiende hacia $+\infty$ y se escribe

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\textit{resp.} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right)$$

si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $K > a$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) > \alpha$ (resp. $f(x) < \alpha$).

(2) Supongamos que $(-\infty, b) \subset X$ para algún $b \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$) cuando x tiende hacia $-\infty$ y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \left(\textit{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right)$$

si para cada $\beta \in \mathbb{R}$ existe $K < b$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) > \beta$ (resp. $f(x) < \beta$).

Teorema 3.2.8 *Sea $X \subset \mathbb{R}, f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $(a, +\infty) \subset X$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Supongamos además que $g(x) > 0$ para todo $x > a$ y que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

con $L \in \mathbb{R}, L \neq 0$.

(1) Si $L > 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, y sólo si, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

(2) Si $L < 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si, y sólo si, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Se verifica un resultado análogo para $x \to -\infty$.

Ejemplos

(1) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ para $n \in \mathbb{N}$.
Sea $f(x) = x^n$ para $x \in (0, +\infty)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $K = \max\{1, \alpha\}$. Entonces para todo $x > K$, se tiene $f(x) = x^n \geq x > \alpha$. Como $\alpha \in \mathbb{R}$ es arbitrario, resulta que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ para $n \in \mathbb{N}$, n par, y $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ para $n \in \mathbb{N}$, n impar.
Teniendo en cuenta el ejemplo (1), basta considerar la observación posterior a la definición 3.2.6 y que se ilustra en la Figura 3.32.

(3) Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función polinómica

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Entonces $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ si $a_n > 0$, y $\lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$ si $a_n < 0$.
En efecto, pongamos $g(x) = x^n$ y apliquemos el teorema 3.2.8. Como

$$\frac{p(x)}{g(x)} = a_n + a_{n-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \cdots + a_1 \left(\frac{1}{x^{n-1}} \right) + a_0 \left(\frac{1}{x^n} \right),$$

resulta que $\lim_{x \to +\infty} (p(x)/g(x)) = a_n$, y puesto que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, la afirmación se sigue del citado teorema.

(4) Sea p la función polinómica del ejemplo (3). Entonces $\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) si n es par (resp. impar) y $a_n > 0$.
En efecto, basta tener en cuenta los resultados del ejemplo (2).

(5) Supongamos que $(a, +\infty) \subset X$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es fácil probar que si $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe y es finito, entonces $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$, y que si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Las nociones de cota inferior y cota superior para un conjunto de números reales son aplicables a una función real. Basta asociar estos conceptos al recorrido de la función.

Definición 3.2.8 *Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ está **acotada superiormente** (resp. **inferiormente**) si lo está su recorrido $f(X)$. Una cota inferior A y una cota superior B para f son una cota inferior y una cota superior respectivamente para $f(X)$, es decir*

$$A \leq f(x),\, x \in X \quad y \quad f(x) \leq B,\, x \in X.$$

*Se dice que f es **acotada** si está acotada superior e inferiormente, lo que equivale a decir que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$.*

Teorema 3.2.9 *Sean $X \subset \mathbb{R}, a$ un punto de acumulación de X y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f tiene límite finito en el punto a, entonces existe un $\delta > 0$ tal que f es acotada en $X \cap \big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big)$.*

Definición 3.2.9 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.*

*(1) Se dice que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es **creciente** (resp. **decreciente**) en I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Se dice que f es **monótona** en I si es creciente en I o es decreciente en I.*

*(2) Se dice que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** (resp. **estrictamente decreciente**) en I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$). Se dice que f es **estrictamente monótona** en I si es estrictamente creciente en I o es estrictamente decreciente en I.*

Las funciones monótonas tienen un comportamiento muy sencillo en relación con sus posibles límites. El siguiente resultado, válido para una función monótona creciente, se extiende de forma natural al caso de una función monótona decreciente.

Teorema 3.2.10 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente.*

(1) Si $a \in I$, entonces existen y son finitos los límites laterales de f en a, y se verifica

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\}, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I, x > a\},$$

y

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

(2) Si I es acotado, a es su ínfimo y b es su supremo, entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I\} \qquad y \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I\},$$

y estos límites laterales son infinitos cuando f no tiene la correspondiente cota.

(3) Si I no tiene cota inferior, entonces

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I\},$$

y si I no tiene cota superior, entonces

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Estos límites son infinitos cuando f carece de la cota correspondiente.

Existe una relación importante entre el concepto de límite de una sucesión estudiado en el tema 2 y el concepto de límite de una función que venimos estudiando en este tema.

Teorema 3.2.11 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de X y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(2) Para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que converge hacia a con $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge hacia L.

En muchas ocasiones tendremos que ser capaces de afirmar que cierto número *no es* el límite de una función en un punto, o bien que la función *no tiene* límite en un punto. Para ello disponemos del resultado siguiente, consecuencia del teorema anterior.

Teorema 3.2.12 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de X y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(a) Si $L \in \mathbb{R}$, entonces f no tiene límite L en a si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X con $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a pero la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia L.

(b) La función f no tiene límite en a si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X con $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a pero la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge en $\mathbb{R}$.

Ejemplos

(1) Ya sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe (cf. pág. 24). Veámoslo ahora utilizando el criterio anterior. Para ello, vamos a proporcionar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, pero tal que $(\operatorname{sgn}(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge.
Sea $x_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ y como $\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\operatorname{sgn}(x_n))_{n=1}^{\infty}$ diverge. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. En las Figuras 3.33 y 3.34 aparece la gráfica de f en representaciones necesariamente aproximadas pues oscila infinidad de veces en las cercanías de 0, cortando al eje de abscisas en los puntos $\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (compara con la función $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, para la que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, y representada en las Figuras 3.25 y 3.26)). Veremos que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ mostrando dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tales que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$, pero $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$. En virtud del teorema 3.2.11, esto implica que no puede existir $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

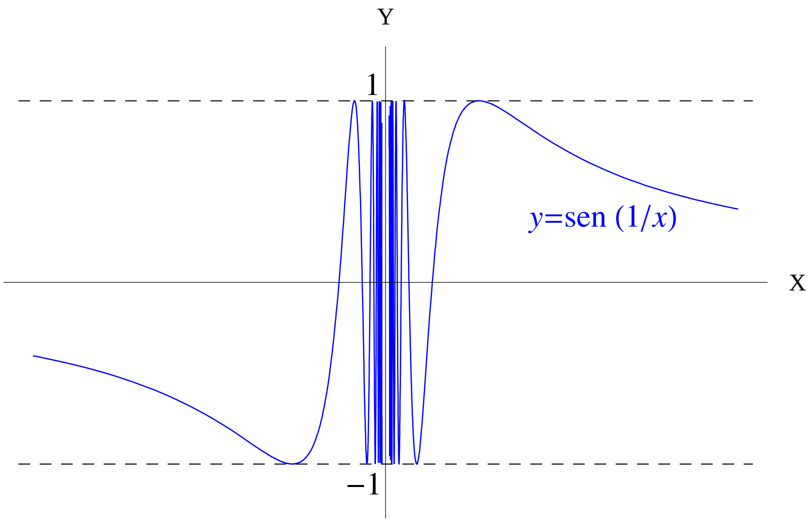

Figura 3.33: Gráfica de $y = \operatorname{sen}(1/x)$, $0.025 \leq |x| \leq 2.4$.

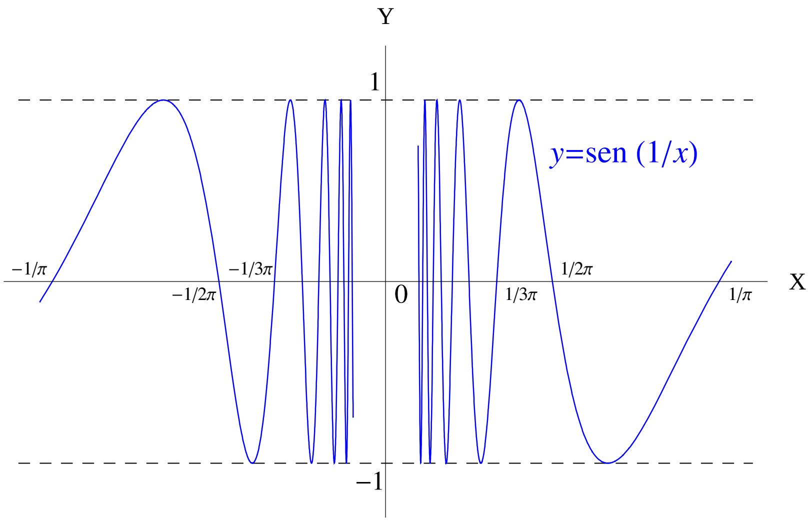

Figura 3.34: Gráfica de $y = \operatorname{sen}(1/x)$, $0.031 \leq |x| \leq 0.33$.

Recordemos que $\operatorname{sen} t = 0$ si $t = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y que $\operatorname{sen} t = 1$ si $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ para $k \in \mathbb{Z}$. Sea $x_n = (n\pi)^{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $f(x_n) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Por otra parte, sea $y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ y $f(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$. Se concluye que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe.

(3) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales que converge hacia 0, con $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, las definiciones geométricas de seno y coseno establecen que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} x_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1$. Por tanto, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Naturalmente existen teoremas análogos a los dos anteriores para límites infinitos y límites en el infinito, así como versiones para límites laterales. Dejamos como ejercicio escribir los enunciados de dichos teoremas.

Un límite importante

Sea f la función definida para $x \neq 0$ mediante $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? En caso afirmativo, ¿cuál es su valor? La siguiente fórmula da respuesta a estas preguntas:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Observando la Figura 3.35, si comparamos las áreas de los triángulos OAB y OAC y el área del sector OAB del círculo unidad, encontramos que si $0 < x < \pi/2$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

De aquí se deduce

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

que es equivalente a

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

para $0 < |x| < \pi/2$ (nótese el caráter *par* de las funciones $y = (\operatorname{sen} x)/x$ e $y = \cos x$). Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, resulta que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, en virtud del teorema del sándwich.

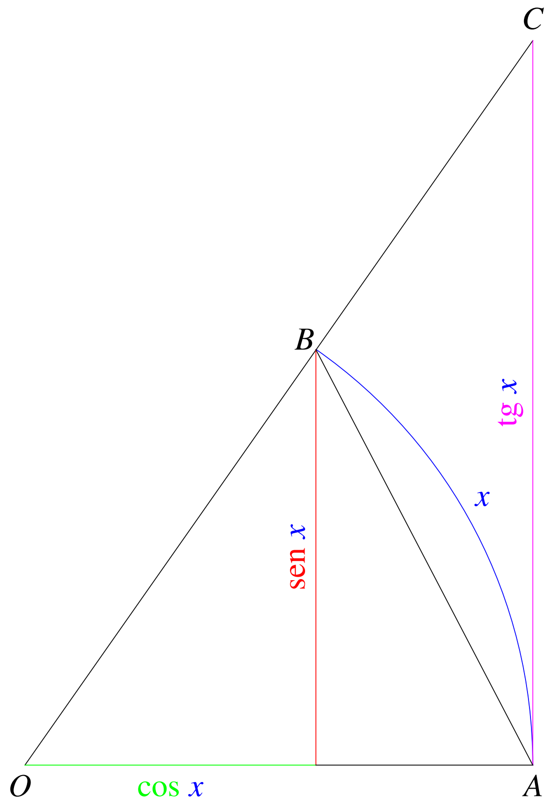

Figura 3.35

A partir de $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ para $0 < |x| < \pi/2$, es inmediato que $|\operatorname{sen} x| < |x|$ para $0 < |x| < \pi/2$. Ahora bien, como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, la desigualdad $|\operatorname{sen} x| < |x|$ también se verifica para $|x| \geq \pi/2 > 1$. Además, $\operatorname{sen} 0 = 0$. Por consiguiente,

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, verificándose la igualdad si, y sólo si, $x = 0$.

La fórmula $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ nos permite deducir otros resultados interesantes como, por ejemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1,$$

y también

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Este último se deduce de la fórmula, válida para $0 < |x| < \pi$,

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot \operatorname{sen} x.$$

Cuando $x \to 0$ el primer factor por la derecha tiende hacia 1, el segundo hacia $1/2$ y el tercero hacia 0; por tanto, el producto tiende hacia 0, como habíamos afirmado.

Si en la fórmula anterior dividimos por x, obtenemos

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x},$$

de donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Notación de Landau. Funciones equivalentes

El matemático alemán Edmund Landau (1877-1938) popularizó dos símbolos, "O" y "o",[7] que resultan particularmente ventajosos cuando se estudia cómo se comporta una función en las proximidades de un punto (número real, $+\infty$ o bien $-\infty$), es decir, su *comportamiento asintótico*. Habitualmente, el comportamiento asintótico se determina utilizando una segunda función que sea más simple o esté mejor estudiada y que reproduzca los valores de la función que estemos estudiando en las cercanías del punto en cuestión con un error relativo pequeño.

[7] El símbolo O fue introducido por el matemático alemán Paul Bachmann (1837-1920), y apareció en el segundo volumen de su obra *Analytische Zahlentheorie*, publicada en 1894. El símbolo o es original de Landau y aparece en su *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, de 1909, donde Landau también utiliza la notación O, manifestando haberla visto por primera vez en el libro de Bachmann.

Definición 3.2.10 *Sean $a \in \mathbb{R}^\sharp = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y f, g dos funciones reales definidas al menos en un entorno reducido de a.*

(1) Se dice que f es una O de g en el punto a (se lee 'f es una o grande de g en a'), y se escribe $f = O(g)$ en a, si existe $M > 0$ tal que se verifica la relación

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

en las proximidades de a, es decir, cuando $|x-a|$ es positivo y menor que algún δ (si a es un número), cuando x es mayor que algún α (si a es $+\infty$) o cuando x es menor que algún β (si a es $-\infty$).

(2) Se dice que f es una o de g en el punto a (se lee 'f es una o pequeña de g en a'), y se escribe $f = o(g)$ en a, si existe una función ε definida en un entorno (o en un entorno reducido) de a, con $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ y tal que se verifica la relación

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

en las proximidades de a, es decir, cuando $|x-a|$ es positivo y menor que algún δ (si a es un número), cuando x es mayor que algún α (si a es $+\infty$) o cuando x es menor que algún β (si a es $-\infty$).

Nota

$f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$) en a, también se expresa escribiendo $f(x) = O(g(x))$ (resp. $f(x) = o(g(x))$) cuando $x \to a$.

Observación

Si $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y $f = o(g)$ en a, entonces dado $\epsilon > 0$, se verifica $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ en las proximidades de a y, por tanto, $f = O(g)$ en a. Si g no se anula en un entorno reducido de a, $f = o(g)$ en a significa que $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = 0$ y $f = O(g)$ en a significa que f/g es acotada en las proximidades de a.

En particular, cuando $g(x) \equiv 1$, la notación $f(x) = o(1)$ en a significa que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y la notación $f(x) = O(1)$ en a significa que f es acotada en las proximidades de a. Así, $x = o(1)$ en 0 y $\operatorname{sen} x = O(1)$ en $\pm\infty$.

Una expresión de la forma $f_1 = f_2 + o(g)$ (resp. $f_1 = f_2 + O(g)$) en a, significa $f_1 - f_2 = o(g)$ (resp. $f_1 - f_2 = O(g)$) en a.

Definición 3.2.11 *Sea $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y f una función real definida al menos en un entorno reducido de a. Se dice que f es un **infinitésimo** (resp. **infinito**) en a si f tiene límite 0 (resp. infinito[8]) en el punto a.*

[8]¡Atención! Aquí la palabra infinito aparece sin signo determinado. En este contexto, la expresión *límite infinito* incluye situaciones en las que un límite lateral es $+\infty$ y el otro $-\infty$ (en cuyo caso, como sabemos, no existe el límite). Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} (1/x) = -\infty$ (cf. Figura 3.30). Así, la función dada por $f(x) = 1/x, x \neq 0$ es un infinito en 0.

Definición 3.2.12 *Sean $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y f, g dos funciones reales definidas al menos en un entorno reducido de a.*

(1) Si $f = o(g)$ en a y g es un infinitésimo en a, se dice que f es un infinitésimo de orden superior a g en a.

(2) Si f y g son infinitos en a y $f = o(g)$ en a, se dice que g tiene orden superior a f en a.

Ejemplos

(1) $x^2 = o(x)$ en 0 y $x = o(x^2)$ en $\pm\infty$.

(2) x^2 es un infinitésimo de orden superior a x en 0.
x^2 es un infinito de orden superior a x en $\pm\infty$.
$x^{-2} = 1/x^2$ es un infinitésimo de orden superior a $x^{-1} = 1/x$ en $\pm\infty$.
$x^{-2} = 1/x^2$ es un infinito de orden superior a $x^{-1} = 1/x$ en 0.

(3) $\left(\frac{1}{x} + \operatorname{sen} x\right) x = O(x)$ en $\pm\infty$.

Si convenimos en designar por $O(g)$ (resp. $o(g)$) *una función no especificada que sea una O de g* (resp. *una o de g*),[9] entonces podemos escribir expresiones como, por ejemplo,

$$O(1) + O(1) = O(1)$$

que, por tanto, significa 'si $f_1 = O(1)$ y $f_2 = O(1)$, entonces $f_1 + f_2 = O(1)$'. Con frecuencia, las fórmulas en las que aparezcan los símbolos O y o no serán reversibles. Así, $o(1) = O(1)$, es decir, 'si $f = o(1)$, entonces $f = O(1)$', es verdadera, pero $O(1) = o(1)$ es falsa. De hecho, se verifica $o(g) = O(g)$.

En el teorema siguiente se reúnen algunas reglas sencillas para el manejo de los símbolos o y O.

Teorema 3.2.13 *En $a \in \mathbb{R}^\sharp$, tenemos*

(1) $O(O(\varphi)) = O(\varphi)$,
(2) $o(o(\varphi)) = o(\varphi)$,
(3) $O(o(\varphi)) = o(\varphi)$,
(4) $O(\varphi) + O(\varphi) = O(\varphi)$,
(5) $o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi)$,
(6) $O(\varphi) + o(\varphi) = O(\varphi)$,
(7) $O(\varphi) + O(\psi) = O(\varphi + \psi)$,
(8) $\varphi\, O(\psi) = O(\varphi\psi)$,
(9) $\varphi\, o(\psi) = o(\varphi\psi)$,
(10) $O(\varphi)O(\psi) = O(\varphi\psi)$,
(11) $o(\varphi)o(\psi) = o(\varphi\psi)$,
(12) $O(\varphi)o(\psi) = o(\varphi\psi)$.

El símbolo O también se utiliza en ocasiones con un significado global: si $S \subset \mathbb{R}$, $f = O(g)$ en S significa que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ cuando $x \in S$. Así, $\ln x = O(x)$ para $x > 1$, $x = O(\operatorname{sen} x)$ para $|x| < \pi/2$ y $\cos x = 1 + O(x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

[9] Es decir, pensamos $O(g)$ (resp. $o(g)$) como el conjunto de funciones f que verifican la propiedad de la definición 3.2.10(1) (resp. 3.2.10(2)). Por esta razón, podemos encontrar en la literatura las notaciones $f \in O(g)$ (resp. $f \in o(g)$) en lugar de $f = O(g)$ (resp. $f = o(g)$). Nosotros utilizamos las notaciones clásicas (con el signo de igualdad), pero observa que desde el principio en tales notaciones hemos usado el signo "=" en el sentido de 'es', es decir, en el sentido de 'ser miembro de', considerando, por tanto, la idea de *pertenencia*.

Definición 3.2.13 *Sean $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y f, g dos funciones reales definidas al menos en un entorno reducido de a. Se dice que f se comporta asintóticamente como g en a o bien, en forma más breve, que* ***f* es equivalente a *g* en *a*** *si existe una función α definida en un entorno (o en un entorno reducido) de a, con $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$ y tal que se verifica la relación*

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

en las proximidades de a, es decir, cuando $|x - a|$ es positivo y menor que algún δ (si a es un número), cuando x es mayor que algún α (si a es $+\infty$) o cuando x es menor que algún β (si a es $-\infty$). En este caso escribimos $f \sim_a g$ o bien $f \sim g$ en a.

Nota

$f \sim g$ en a también se expresa escribiendo $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to a$.

Observaciones

Es sencillo comprobar que la relación establecida en la definición anterior es de equivalencia, es decir, verifica las propiedades reflexiva ($f \sim_a f$), simétrica $\big((f \sim_a g) \Rightarrow (g \sim_a f)\big)$ y transitiva $\big([(f \sim_a g) \text{ y } (g \sim_a h)] \Rightarrow (f \sim_a h)\big)$. En particular, por la simetría, la expresión "f es equivalente a g en a" puede sustituirse por "f y g son equivalentes en a".

Si $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y g no se anula en un entorno reducido de a, $f \sim g$ en a significa que $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = 1$.

Es inmediato que si dos funciones son equivalentes en $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y una de ellas tiene límite $L \in \mathbb{R}^\sharp$ en a, entonces la otra también tiene límite L en a.

Por otra parte, es claro también que si dos funciones tienen el mismo límite en $a \in \mathbb{R}^\sharp$ y ese límite es finito y distinto de cero, entonces son equivalentes en a. Es necesario que el límite sea distinto de cero (x^2, x son infinitésimos no equivalentes cuando $x \to 0$) y que el límite sea finito (x^2, x son infinitos no equivalentes cuando $x \to +\infty$).

Observemos que $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$ equivale a la existencia de una función ε definida en un entorno (o en un entorno reducido) de a con $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ y tal que $\alpha(x) = 1 + \varepsilon(x)$ en las proximidades de a. Entonces la relación $f \sim_a g$ equivale a

$$f(x) = \alpha(x)g(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{cuando } x \to a,$$

es decir,

$$f \sim_a g \iff f = g + o(g) \quad \text{en } a.$$

Vemos pues, que si aproximamos f en las cercanías de a por una función g (que no se anula en un entorno reducido de a) equivalente a f en a, el error relativo

$$|\varepsilon(x)| = \left| \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right| \to 0$$

cuando $x \to a$.

A continuación se presenta una relación de equivalencias usuales. La función ε designa un infinitésimo en $a \in \mathbb{R}^\sharp$.

$$\begin{array}{rlrl}
\operatorname{sen}\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & \operatorname{sen} x \sim x & \text{cuando } x \to 0 \\
\operatorname{tg}\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & \operatorname{tg} x \sim x & \text{cuando } x \to 0 \\
\operatorname{arcsen}\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & \operatorname{arcsen} x \sim x & \text{cuando } x \to 0 \\
\operatorname{arctg}\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & \operatorname{arctg} x \sim x & \text{cuando } x \to 0 \\
1-\cos\varepsilon(x) \sim \dfrac{(\varepsilon(x))^2}{2} & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} & \text{cuando } x \to 0 \\
e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & e^x - 1 \sim x & \text{cuando } x \to 0 \\
\ln(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) & \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} & \ln(1+x) \sim x & \text{cuando } x \to 0
\end{array}$$

Siendo α una función con $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$, la última fila puede escribirse de forma equivalente así:

$$\ln\alpha(x) \sim \alpha(x) - 1 \quad \text{cuando } x \to a, \quad \text{en particular,} \quad \ln x \sim x - 1 \quad \text{cuando } x \to 1.$$

Si ω es una función con $\lim\limits_{x\to a} \omega(x) = \pm\infty$, y $P(\xi) = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_k\xi^k$ es una función polinómica de grado $k \geq 1$ ($a_k \neq 0$), entonces $P(\omega(x)) \sim a_k(\omega(x))^k$ cuando $x \to a$ y, en particular, $P(x) \sim a_k x^k$ cuando $x \to \pm\infty$.

A la hora de calcular el límite en $a \in \mathbb{R}^\sharp$ de una función que es el producto de otras, una cualquiera de las funciones factor puede sustituirse por otra que sea equivalente a ella en a. Precisando, si $f \sim \widetilde{f}$ en a, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} \widetilde{f}(x)g(x)$, siempre que uno de estos límites exista. En efecto, al existir una función α con $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$ y tal que $f(x) = \alpha(x)\widetilde{f}(x)$ en las proximidades de a, tenemos

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \alpha(x)\widetilde{f}(x)g(x) = \lim_{x\to a} \alpha(x) \cdot \lim_{x\to a} \widetilde{f}(x)g(x) = \lim_{x\to a} \widetilde{f}(x)g(x).$$

Esta “regla de sustitución” no se extiende a sumas o diferencias de funciones (cf. ejemplo (2) siguiente).

Ejemplos

(1) Se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\operatorname{sen}^2 x)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Hemos usado las equivalencias siguientes (cuando $x \to 0$): $\frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon_1(x)} \sim \frac{1}{\varepsilon_1(x)}$, que se deduce de $\operatorname{sen}\varepsilon_1(x) \sim \varepsilon_1(x)$, con $\varepsilon_1(x) = x^2$; $\ln(1+\varepsilon_2(x)) \sim \varepsilon_2(x)$, con $\varepsilon_2(x) = -\operatorname{sen}^2 x$; $\operatorname{sen}^2 x \sim x^2$, que se deduce de $\operatorname{sen} x \sim x$.

(2) $\sqrt{x^2+x} \sim x$ cuando $x \to +\infty$, puesto que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Pero

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) \neq \lim_{x\to+\infty} (x-x) = 0.$$

De hecho,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Las definiciones y resultados sobre comportamiento asintótico que hemos visto pueden aplicarse a las sucesiones, pues una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. En este caso, a solamente puede ser $+\infty$. Así, por ejemplo, $\sqrt{n} = o(n), n = o(n^2)$ y $n = O(\sqrt[n]{n!})$ (pues $n/\sqrt[n]{n!} \to e$ (cf. tema 2, pág. 7)) cuando $n \to +\infty$. En el contexto de las sucesiones suprimiremos habitualmente la expresión "cuando $n \to +\infty$".

Una de las equivalencias más importantes en el ámbito de las sucesiones es la siguiente:

Teorema 3.2.14 (Fórmula de Stirling)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

es decir,

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Ejemplos

(1) Si $a_n \sim b_n$, ¿se verifica que $e^{a_n} \sim e^{b_n}$? La respuesta es negativa. Por ejemplo, $n+1 \sim n$ pero e^{n+1} y e^n no son equivalentes, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e\cdot e^n}{e^n} = e \neq 1.$$

Ahora bien, si $b_n = O(1)$ para $n \in \mathbb{N}$ (i.e., $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada) y $a_n \sim b_n$, entonces $e^{a_n} \sim e^{b_n}$. En efecto, sea $M > 0$ tal que $|b_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \sim b_n$, existe una sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ y tal que $a_n = \alpha_n b_n$ para todo n mayor que un cierto n_0. Entonces

$$|a_n - b_n| = |b_n||\alpha_n - 1| \le M|\alpha_n - 1|, \;\; n > n_0,$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n - 1 = 0$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} - 1 = \lim_{n\to\infty} e^{a_n-b_n} - 1 = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

donde se ha utilizado la equivalencia $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = a_n - b_n$.

(2) Sean ahora $a_n, b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $a_n \sim b_n$, ¿será verdad que $\ln a_n \sim \ln b_n$? De nuevo, la respuesta es negativa. Por ejemplo, $e^{1/n} \sim e^{1/2n}$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{1/2n}} - 1 = \lim_{n\to\infty} e^{1/2n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

(se ha aplicado la equivalencia $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = 1/2n$), pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^{1/n})}{\ln(e^{1/2n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/2n} = 2 \neq 1.$$

Ahora bien, si la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}^{\sharp}$, $L \neq 1$, y $a_n \sim b_n$, entonces $\ln a_n \sim \ln b_n$. En efecto, como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 1$, la sucesión $(\ln b_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene límite (en $\mathbb{R}^{\sharp}$) distinto de cero.[10] Entonces, por ser $a_n \sim b_n$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{\ln b_n} - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n - \ln b_n}{\ln b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n/b_n)}{\ln b_n} = 0$$

(para establecer la última igualdad se ha aplicado la equivalencia $\ln \alpha_n \sim \alpha_n - 1$, con $\alpha_n = a_n/b_n$).

(3) Veamos que $n = o(e^n)$ (e^n es un infinito de orden superior a n). Si hacemos $a = e - 1 > 0$ y para $n \geq 2$ usamos el teorema binomial (cf. ejercicio 2(b) del tema 1), se tiene que

$$e^n = (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k > \binom{n}{2} a^2 = \frac{n(n-1)}{2}\, a^2,$$

luego

$$0 < \frac{n}{e^n} < \frac{2}{a^2(n-1)},$$

y, como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{a^2(n-1)} = 0$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} n/e^n = 0$.

(4) Veamos ahora que $n! = o(n^n)$ (n^n es un infinito de orden superior a $n!$). Se tiene $0 < \frac{\sqrt{n}}{e^n} \leq \frac{n}{e^n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y como $\lim\limits_{n\to\infty} n/e^n = 0$ (ejemplo 3), resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}/e^n = 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n} = \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} e^{-n}\sqrt{n} = 0.$$

Ahora bien, $\ln(n!) \sim \ln(n^n)$. En efecto, por la fórmula de Stirling y el ejemplo 2, tenemos que $\ln(n!) \sim \ln(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,)$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)}{\ln(n^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2\pi + \ln n) + n\ln n - n}{n \ln n} = 1.$$

[10] En esta afirmación aparece implícitamente la noción de *continuidad* (cf. sección 3.3).

3.3. Funciones continuas

La noción de continuidad es uno de los conceptos centrales del Análisis Matemático. Consideremos un punto a que pertenece al conjunto en el que está definida una función f; existe, pues, $f(a)$. Ahora la situación no es la que teníamos en la sección anterior al referirnos al límite de f en a, pues entonces a podía ser $\pm\infty$ o, si era un número, f podía no estar definida en a. En términos intuitivos, la función f es *continua* en a si $f(x)$ se aproxima al valor $f(a)$ cuando x se acerca hacia a.

Definición 3.3.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in X$. Se dice que f es* ***continua en a*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Si f no es continua en a, entonces se dice que f es discontinua en a.*

Las desigualdades $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ significan que los puntos de la gráfica de f correspondientes al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ están en el producto de intervalos abiertos (rectángulo abierto) $(a - \delta, a + \delta) \times (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ coloreado en la Figura 3.36.

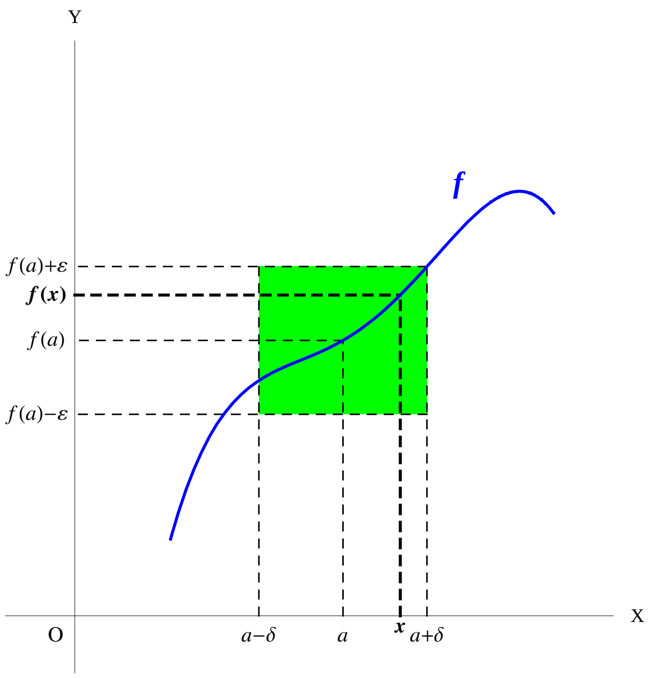

Figura 3.36: La función f es continua en a.

Observaciones

(1) Si $a \in X$ es un punto de acumulación de X, comparando las definiciones 3.2.2 y 3.3.1 se concluye que f es continua en a si, y sólo si,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Así pues, si a es un punto de acumulación de X, deben verificarse tres condiciones para que f sea continua en a:

(a) f debe estar definida en a (de modo que $f(a)$ tenga sentido),

(b) el límite de f en a debe existir en $\mathbb{R}$ (de modo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tenga sentido y sea un número), y

(c) estos dos valores deben ser iguales.

También pueden considerarse los límites laterales de f en a. Quizá uno de ellos es $f(a)$ y el otro no existe, o sí existe pero no es $f(a)$. Decimos entonces que f es continua a un lado de a y no al otro. En términos precisos: f es *continua en a por la derecha* (resp. *por la izquierda*) si, y sólo si,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right).$$

Naturalmente, si f está definida a ambos lados de a, la continuidad de f en a equivale a la continuidad en a por la derecha y por la izquierda.

(2) Si $a \in X$ no es un punto de acumulación de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a-\delta, a+\delta) = \{a\}$ y por tanto, f es automáticamente continua en a (no hay más puntos x en X que satisfagan $|x-a| < \delta$ que el propio a y, para él, obviamente, se tiene $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$). Tales puntos reciben el nombre de *puntos aislados* de X. Estos puntos tienen poco interés práctico para nosotros porque no tienen relación con los procesos de límite. Así pues, se estudiará la continuidad solamente en puntos de acumulación y, por consiguiente, la continuidad en a vendrá caracterizada por la condición $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teniendo en cuenta el teorema 3.2.11, la continuidad de una función en un punto a puede expresarse en términos de límites de sucesiones. Observa que ahora, a diferencia de la sección anterior, no hay que exigir que los términos de las sucesiones sean distintos del punto a.

Teorema 3.3.1 *Sean $X \subset \mathbb{R}, a \in X$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es continua en a si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X que converge hacia a, la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $f(a)$.*

Compara el siguiente criterio de discontinuidad con el teorema 3.2.12(a), para $L = f(a)$.

Teorema 3.3.2 *Sean $X \subset \mathbb{R}, a \in X$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es discontinua en a si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a pero la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge hacia $f(a)$.*

Hasta ahora hemos hablado de continuidad en un *punto*. La definición de continuidad en un *conjunto* es sencilla.

Definición 3.3.2 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si A es un subconjunto de X, se dice que f es* ***continua en el conjunto A*** *si f es continua en cada punto de A.*

Ejemplos

(1) Las tres funciones siguientes son continuas en $\mathbb{R}$: la función constante $f(x) = k$, la función $g(x) = x$ y la función $h(x) = x^2$ (cf. ejemplo 1, pág. 19).

(2) La función $\varphi(x) = 1/x$ es discontinua en $x = 0$, pues en este punto no está definida. Es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (cf. ejemplo 1, pág. 19).

(3) La función signo, sgn, es discontinua en 0, pues sabemos que no existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$. Es un ejercicio fácil ver que sgn es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4) La función parte entera $E(x) = [x]$ (cf. tema 1, teorema 1.4.2) es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En cada número entero es continua por la derecha y no lo es por la izquierda (Figura 3.37).

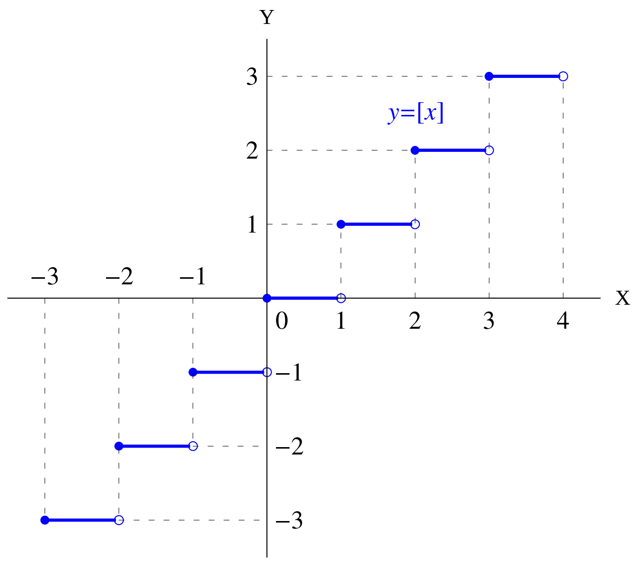

Figura 3.37: La función parte entera.

(5) Sea $\mathcal{D} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la *función de Dirichlet* definida por

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Esta función fue introducida en 1829 por P. G. L. Dirichlet.[11] Se trata de una función discontinua en cada número real.

En efecto, si α es un número racional, sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números irracionales que converge hacia α (tal sucesión existe, cf. tema 1, teorema 1.6.3). Como $\mathcal{D}(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(x_n) = 0$, mientras que $\mathcal{D}(\alpha)$=1. Por consiguiente, $\mathcal{D}$ es discontinua en el número racional α.

[11] El matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) la presentó en un destacado artículo titulado “Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donées”, publicado en la revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 4 (1829), págs. 157-169. Estas son sus palabras: «... si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationelle» (pág. 169).

Por otra parte, si β es un número irracional, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números racionales que converge hacia β (tal sucesión existe, cf. tema 1, teorema 1.6.2). Como $\mathcal{D}(y_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}(y_n) = 1$, mientras que $\mathcal{D}(\beta)$=0. Por consiguiente, $\mathcal{D}$ es discontinua en el número irracional β.

A veces una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no es continua en un punto a porque no está definida ahí. Sin embargo, si la función f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a y definimos $F : X \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \begin{cases} L & \text{si } x = a, \\ f(x) & \text{si } x \in X, \end{cases}$$

entonces F es continua en a. La función F se denomina *extensión continua de f para el punto a*. Si f no tiene límite en a, entonces es claro que no hay manera de proporcionar una entensión continua de f para el punto a.

Ejemplos

(1) La función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en el punto 0 (cf. ejemplo 2, págs. 30-31 y Figuras 3.33, 3.34). Por tanto, no es posible obtener una extensión continua de f para el punto 0.

(2) Sea ahora $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$. Como f no está definida en 0, f es discontinua ahí. Sin embargo, sabemos que $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$ (cf. pág. 21 y Figuras 3.25, 3.26). Por tanto, la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

es la extensión continua de f para el punto 0.

A partir de los teoremas 3.2.3(1) y 3.2.9 deducimos de forma inmediata el teorema siguiente:

Teorema 3.3.3 *Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es continua en el punto $a \in X$.*

(1) Existe un $\delta > 0$ tal que f es acotada en $(a - \delta, a + \delta) \cap X$.

(2) Si $f(a) \neq 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$.

El resultado siguiente es similar al teorema 3.2.2, del cual se deduce.

Teorema 3.3.4 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $a \in X$ y que f y g son continuas en a. Entonces:*

(1) kf es continua en a para todo $k \in \mathbb{R}$.

(2) $f + g$ es continua en a.

(3) fg es continua en a.

(4) Si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

El próximo resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior, aplicado a cada punto de X.

Teorema 3.3.5 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en X. Entonces:*

(1) kf es continua en X para todo $k \in \mathbb{R}$.

(2) $f + g$ es continua en X.

(3) fg es continua en X.

(4) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces f/g es continua en X.

Ejemplos

(1) Si p es una función polinómica entonces $p(a) = \lim_{x\to a} p(x)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ (cf. pág. 20). Así pues, *las funciones polinómicas son continuas en* $\mathbb{R}$.

(2) Sean p, q funciones polinómicas y r la función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$. Si $q(a) \neq 0$, entonces

$$r(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to a} r(x),$$

(cf. pág. 20). Es decir, r es continua en a. Como a es un número real que no es raíz de q, se deduce que *las funciones racionales son continuas en todos los números reales para los que están definidas.*

(3) Recordemos que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (cf. pág. 33). Utilizaremos esta desigualdad para probar la continuidad de las funciones seno y coseno.

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se tiene

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| &= \left| 2\cos\frac{x+a}{2} \operatorname{sen}\frac{x-a}{2} \right| \\ &\leq 2\left| \operatorname{sen}\frac{x-a}{2} \right| \leq 2\left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a| < \varepsilon, \end{aligned}$$

siempre que $|x - a| < \delta = \varepsilon$. Como a es arbitrario, se deduce que la función seno es continua en $\mathbb{R}$. Para deducir la continuidad de la función coseno en $\mathbb{R}$ se procede de manera análoga, aplicando la fórmula

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2},$$

válida para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(4) Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Por ejemplo, la función cotangente, definida por $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, es continua en su dominio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $|f|$ la función definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para $x \in X$. Observa que si ponemos $g(x) = |x|$ para $x \in \mathbb{R}$, es $|f| = g \circ f$.

Si f es continua en un punto $a \in X$, entonces $|f|$ es continua en a. Esto es inmediato a partir de la igualdad $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)|$ (cf. ejemplo 2, pág. 19). Por tanto, si f es continua en X, entonces $|f|$ es continua en X. En particular, si $f(x) = x$ para $x \in \mathbb{R}$, se deduce que g es continua en $\mathbb{R}$.

(6) Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Sea $\sqrt{f}$ la función definida por $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$ para $x \in X$. Observa que si ponemos $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, es $\sqrt{f} = g \circ f$.

Si f es continua en un punto $a \in X$, entonces $\sqrt{f}$ es continua en a. Esto se deduce inmediatamente de la igualdad $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ (cf. ejemplo 3, pág. 19). Por consiguiente, si f es continua en X, entonces $\sqrt{f}$ es continua en X. En particular, si $f(x) = x$ para $x \geq 0$, se deduce que g es continua en $[0, +\infty)$.

El siguiente teorema generaliza las situaciones presentadas en los ejemplos 5 y 6 anteriores.

Teorema 3.3.6 *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(X) \subset Y$.*

(a) Si f es continua en un punto $a \in X$ y g es continua en $b = f(a) \in Y$, entonces la función compuesta $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en a.

(b) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en X y $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en Y, entonces la función compuesta $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en X.

El teorema anterior es muy útil para establecer la continuidad de funciones compuestas y puede usarse en muchas situaciones en las que sería difícil aplicar directamente la definición de continuidad.

Ejemplos

(1) Sean $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Las funciones f y g son continuas en sus respectivos dominios. Por el teorema anterior, $\varphi = g \circ f$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se trata de la función dada por $\varphi(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Recordemos que la función φ no tiene una extensión continua para el punto 0 (cf. ejemplo 1, pág. 43).

(2) Como consecuencia del teorema 3.3.6, se tiene que la composición de un número finito de funciones continuas es una función continua en su dominio. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^3 \left| 2 - \frac{1}{\cos x} \right|$$

tiene por dominio el conjunto $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z} \right\}$, en el cual es continua.

Si somos menos restrictivos y, en concreto, no exigimos la continuidad de f en el punto a, obtenemos el resultado siguiente para funciones compuestas.

Teorema 3.3.7 *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(X) \subset Y$. Sea a un punto de acumulación de X. Supongamos que f tiene límite $b \in Y$ en el punto a y que g es continua en b. Entonces*

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(b).$$

Ejemplo

Sean $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $g(x) = \cos x$ para $x \in \mathbb{R}$. La función f es discontinua en 0, por no estar definida ahí. Ahora bien, g es continua en $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(1/x) = 0$ (para esta igualdad, cf. pág. 21 y Figuras 3.25 y 3.26). Entonces, por el teorema anterior, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \cos[x\,\mathrm{sen}(1/x)] = 1.$$

Las funciones continuas en intervalos gozan de importantes propiedades, de las que vamos a ocuparnos a continuación.

El siguiente resultado nos asegura que una función continua en un intervalo toma (al menos una vez) cada valor situado entre dos de sus valores. Esta propiedad expresa la idea intuitiva básica de continuidad: la gráfica de una función continua se puede dibujar de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Teorema 3.3.8 (Teorema del valor intermedio) *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Sean $a, b \in I$ tales que $f(a)$ es distinto de $f(b)$. Si k es un número situado entre $f(a)$ y $f(b)$ (i.e., $f(a) < k < f(b)$ o bien $f(b) < k < f(a)$), entonces existe $c \in I$ entre a y b tal que $f(c) = k$.*

Naturalmente, el punto c de cuya existencia se habla en la conclusión del teorema del valor intermedio no tiene por qué ser único (Figura 3.38).

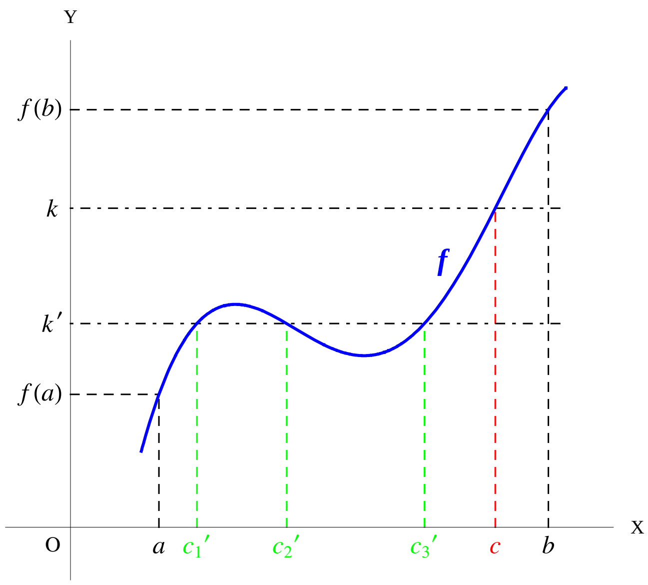

Figura 3.38: Teorema del valor intermedio.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el resultado siguiente, que a su vez, puede utilizarse para obtener el teorema 3.3.8.

Teorema 3.3.9 (Teorema de Bolzano) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, es decir, $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

En la Figura 3.39 se ilustra este resultado en una situación en la que existe un único c tal que $f(c) = 0$.

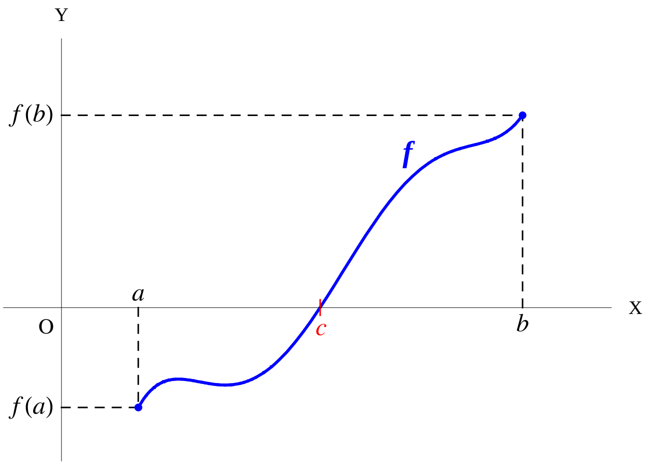

Figura 3.39: Teorema de Bolzano.

La función f definida en el intervalo $(0, +\infty)$ por $f(x) = 1/x$ es continua, y no es acotada ya que para $M > 0$ podemos tomar el punto $x_M = \frac{1}{M+1} \in (0, +\infty)$ y entonces $f(x_M) = 1/x_M = M + 1 > M$. Así pues, las funciones continuas no tienen por qué ser acotadas. Ahora bien:

Teorema 3.3.10 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces f es acotada.*

Observaciones

Cada hipótesis del teorema 3.3.10 es necesaria.

(1) *El intervalo debe ser acotado.* La función dada por $f(x) = x$, $x \in [0, +\infty)$, es continua pero no acotada.

(2) *El intervalo debe ser cerrado.* La función dada por $g(x) = 1/x$, $x \in (0, 1]$, es continua pero no acotada.

(3) *La función debe ser continua.* La función $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0, 1], \end{cases}$$

es discontinua (en 0) y no acotada.

Definición 3.3.3 *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f tiene un* ***máximo absoluto*** *en X si existe un punto $x^* \in X$ tal que*

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Se dice que f tiene un ***mínimo absoluto*** *en X si existe un punto $x_* \in X$ tal que*

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Se dice que x^* es un ***punto de máximo absoluto*** *para f en X y que x_* es un* ***punto de mínimo absoluto*** *para f en X, si existen.*

Observaciones

Una función continua en un conjunto no tiene necesariamente un máximo absoluto o un mínimo absoluto en dicho conjunto. Por ejemplo, si f está definida por $f(x) = 1/x$ para $x \in (0, +\infty)$, en este conjunto f no está acotada superiormente y, por tanto, no tiene máximo absoluto. Además, no hay ningún punto en el que f tome el valor $0 = \inf\{f(x) : x \in (0, +\infty)\}$, por lo que f tampoco tiene mínimo absoluto en $(0, +\infty)$. La función $f|_{(0,1)}$ tampoco tiene ni máximo absoluto ni mínimo absoluto en su dominio, el intervalo $(0, 1)$, mientras que la restricción $f|_{[1,2]}$ sí tiene tanto máximo absoluto como mínimo absoluto en $[1, 2]$. La función $f|_{[1,+\infty)}$ tiene máximo absoluto pero no mínimo absoluto en $[1, +\infty)$; la función $f|_{(1,+\infty)}$ no tiene en su dominio ni máximo absoluto ni mínimo absoluto.

Es claro que si una función tiene un máximo (resp. mínimo) absoluto en un conjunto no tiene por qué existir un único punto de máximo (resp. mínimo) absoluto para la función en dicho conjunto. Por ejemplo, la función definida por $g(x) = x^2$ para $x \in [-1, 1]$, tiene dos puntos de máximo absoluto, ± 1, y un único punto de mínimo absoluto, 0, en $[-1, 1]$. Si consideramos la función constante dada por $h(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, *cada número real* es un punto de máximo absoluto y de mínimo absoluto para h.

El teorema 3.3.10 nos dice que si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces su recorrido $f(I)$ es un conjunto acotado. El teorema siguiente es muy importante y afirma que existen puntos x_* y x^* en I tales que $\inf f(I) = f(x_*)$ y $\sup f(I) = f(x^*)$.

Teorema 3.3.11 (Teorema del máximo-mínimo) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[a, b]$.*[12]

El teorema del máximo-mínimo y el teorema del valor intermedio, nos permiten deducir el resultado siguiente.

Teorema 3.3.12 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Si $m = \min f(I)$ y $M = \max f(I)$, entonces $f(I)$ es el intervalo cerrado y acotado $[m, M]$.*

Observación

Si $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, el teorema anterior dice que $f(I) = [m, M]$. Pero *no dice* que $f(I)$ sea el intervalo $[f(a), f(b)]$; puede suceder que $f(I)$ no sea $[f(a), f(b)]$ (Figura 3.40).

[12] Este teorema se debe al matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). En su curso titulado *Differential Rechnung* impartido en la Universidad de Berlín en 1861, se refería a él como *Hauptlehrsatz* ("teorema principal").

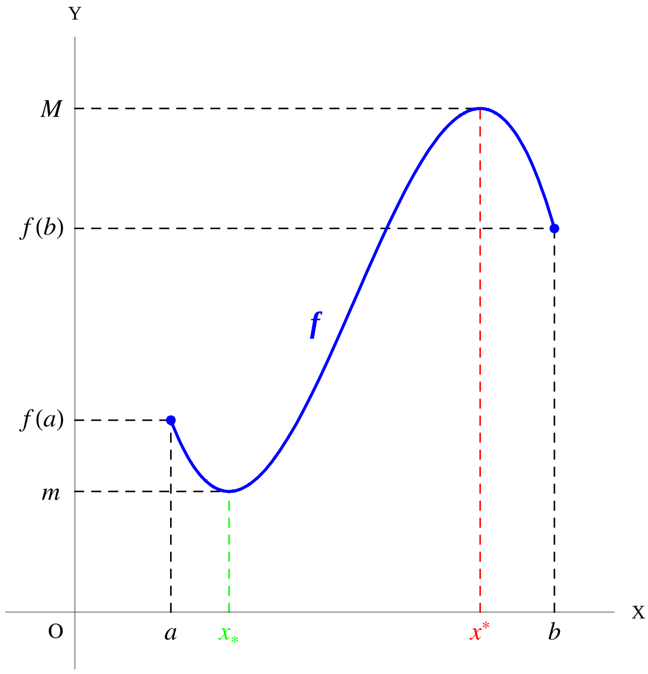

Figura 3.40: $f([a,b]) = [m,M]$.

El siguiente teorema extiende el resultado anterior a intervalos generales. No obstante, debemos advertir que aunque la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo, no es verdad que el intervalo imagen tenga necesariamente la misma forma que el intervalo dominio. Por ejemplo, la imagen por una función continua de un intervalo abierto no tiene por qué ser un intervalo abierto y la imagen por una función continua de un intervalo cerrado no acotado no tiene por qué ser un intervalo cerrado. En efecto, si $f(x) = 1/(x^2+1)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y es fácil ver que si $I_1 = (-1,1)$, entonces $f(I_1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, que no es un intervalo abierto; si $I_2 = [0,+\infty)$, entonces $f(I_2) = (0,1]$, que no es un intervalo cerrado (Figura 3.41).

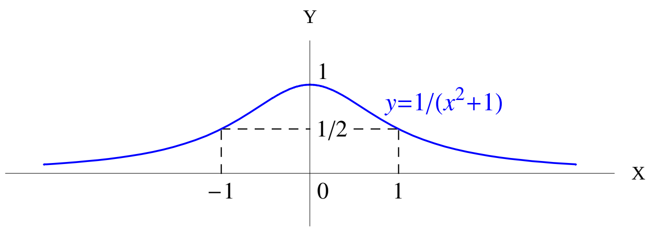

Figura 3.41

Teorema 3.3.13 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I. Entonces el conjunto $f(I)$ es un intervalo.*

Recordemos que una función tiene inversa si, y sólo si, es inyectiva (debe ser biyectiva, pero una función inyectiva se convierte automáticamente en biyectiva sin más que restringir, si es preciso, el conjunto de llegada al recorrido de la función (cf. págs. 2-4)). Es obvio que una función estrictamente monótona es inyectiva y, por tanto, tiene inversa. El siguiente teorema nos dice que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

es una función estrictamente monótona *continua*, entonces f tiene una función inversa definida en $J = f(I)$ que es estrictamente monótona y continua en J.

Teorema 3.3.14 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua en I. Entonces f^{-1}, la inversa de f, es estrictamente monótona y continua en $f(I)$. Además, si f es estrictamente creciente (resp. decreciente), f^{-1} es estrictamente creciente (resp. decreciente).*

Ejemplos

(1) Recordemos que la función exponencial ha sido introducida en el tema 2, pág. 19, y que se trata de una función positiva (cf. tema 2, pág. 20) que viene definida por la serie $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/(2e^a)\}$. Entonces, si $|h| < \delta$, se verifica

$$|e^{a+h} - e^a| = e^a \cdot |e^h - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta} |h| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{\varepsilon}{2} (e - 1) < \varepsilon.$$

Como a es arbitrario, se deduce que la función $y = e^x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Si $x < y$, entonces $e^x < e^y$ (cf. tema 2, pág. 20), luego la función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ (por tanto, inyectiva en $\mathbb{R}$).

Puesto que $e^x > 1 + x$ si $x > 0$ (es inmediato a partir de la definición), y $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + x) = +\infty$, resulta que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, y entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. De aquí y del teorema del valor intermedio se deduce que cada $y > 0$ pertenece al recorrido de la función exponencial, y como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, dicho recorrido es el intervalo $(0, +\infty)$.

(2) El dominio de la función logarítmica, $y = \ln x$, es $(0, +\infty)$ y su recorrido es $\mathbb{R}$, por ser la función inversa de la exponencial. Además, por el teorema 3.3.14, la función logarítmica es estrictamente creciente y continua en $(0, +\infty)$.

Que la función logarítmica tenga por recorrido $\mathbb{R}$ y sea estrictamente creciente traen como consecuencia que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

(3) Si $a > 0, a \neq 1$, la función $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, +\infty)$, es continua y estrictamente monótona:

- Si $a > 1$, es estrictamente creciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.
- Si $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Si $a > 0, a \neq 1$, la función $y = \log_a x$ tiene dominio $(0, +\infty)$, recorrido $\mathbb{R}$, es continua y estrictamente monótona:

- Si $a > 1$, es estrictamente creciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$.
- Si $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$.

(4) La definición geométrica de la función seno establece que $\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ es estrictamente creciente, y ya sabemos que es continua (cf. ejemplo 3, pág. 44). Entonces, por el teorema 3.3.14, su función inversa, $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es continua y estrictamente creciente.

Análogamente, como $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ es estrictamente decreciente y continua, su inversa $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ es también continua y estrictamente decreciente.

Finalmente, la función $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente creciente (para el crecimiento estricto, se considera el significado geométrico de $\operatorname{tg} x$, basado en el de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$). Como el crecimiento es estricto y el recorrido es $\mathbb{R}$, tenemos $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$. La función inversa $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es continua y estrictamente creciente. Puesto que el recorrido es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y el crecimiento es estricto, se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

3.4. Funciones derivables

Supongamos que una partícula se mueve en una recta horizontal con su localización x en el tiempo t dada por su *función de posición* $x = s(t)$. Así, la línea de movimiento se considera como un eje coordenado con un origen y un sentido positivo; $s(t)$ es la coordenada x de la partícula en movimiento en el tiempo t.

Consideremos un intervalo de tiempo, de un instante t_1 a otro t_2. La partícula se mueve de la posición $s(t_1)$ a la posición $s(t_2)$ en ese intervalo. Su desplazamiento es $s(t_2) - s(t_1)$. La *velocidad media* de la partícula en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 es el cociente

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Podemos considerar este tipo de cocientes cuando t_1 es un instante fijo τ, mientras que t_2 varía alrededor de τ y se designa por t. Se define así una función de la variable t:

$$\frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau},\ t \neq \tau.$$

Si nos fijamos en la diferencia (positiva o negativa) $h = t - \tau$, el cociente anterior se expresa

$$\frac{s(\tau + h) - s(\tau)}{h},\ h \neq 0.$$

Estas funciones cociente pueden tener límite finito cuando $t \to \tau$, o bien $h \to 0$, y tal límite se interpreta como una *velocidad instantánea* en el momento τ.

La situación que acabamos de presentar, motiva a hacer la siguiente construcción para cualquier función real f cuyo dominio es un intervalo I. Se fija a en I y se considera la función de la variable x definida mediante el cociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},\ x \in I, x \neq a.$$

El cambio de variable $h = x - a$ permite expresar también este cociente mediante

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},\ a + h \in I, h \neq 0$$

(razón entre lo que ha variado f y el cambio experimentado por a, al pasar de a a $a + h$).

Definición 3.4.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que f es* ***derivable en a*** *si existe y es finito el límite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

que se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de ***derivada de f en a****.*

Observaciones

(1) *Derivadas laterales.*

Permitimos la posibilidad de que a sea un extremo del intervalo. Si el límite existe y es finito cuando $x \to a^+$ $(h \to 0^+)$ (resp. cuando $x \to a^-$ $(h \to 0^-)$), se le llama derivada por la derecha (resp. derivada por la izquierda), de f en a, y se designa por $f'(a^+)$ o bien por $f'_+(a)$ (resp. $f'(a^-)$ o bien por $f'_-(a)$). Si a es un punto interior del intervalo I, f es derivable en a si, y sólo si, existen las derivadas laterales de f en a y son iguales. Si el punto a es un extremo del intervalo I y se habla de la derivada de la función f en el punto a, se entenderá que dicha derivada es lateral.

(2) Es posible formular la noción de derivada evitando recurrir a un cociente. Para ello se introduce la función

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

definida para $x \in I, x \neq a$. De esta igualdad se obtiene la siguiente

$$f(x) - f(a) = (x - a)[f'(a) + \varepsilon(x)],$$

lo que permite redefinir $f'(a)$ como un número tal que existe una función ε con límite 0 en a que verifica la relación anterior. Esta última igualdad también es válida para $x = a$ siempre que definamos en este punto la función ε; así, podemos definir $\varepsilon(a) = 0$ para que ε sea continua en a. Con la notación de Landau, podemos expresar la situación así:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(a) + o(x - a), \text{ cuando } x \to a, x \in I.$$

La sustitución de $x - a$ por h permite hacer una formulación paralela en términos de la variable h.

(3) *Función derivada y derivadas sucesivas.*

La función cuyo dominio es el subconjunto de I formado por los puntos en los que f es derivable y que asigna a cada punto la derivada de f en ese punto se designa por f' (o por Df) y recibe el nombre de la función derivada de f o, simplemente, la **derivada de f**.

Si la derivada $f'(x)$ existe en cada punto x de un intervalo J que contenga al punto a, entonces podemos considerar la existencia de la derivada de la función f' en el punto a. En el caso de que f' sea derivable en el punto a, el número resultante se llama *segunda derivada de f en a*, y designamos este número por $f''(a)$ o por $f^{(2)}(a)$. De forma similar se define la *tercera derivada*, $f'''(a)$ o bien $f^{(3)}(a)$,..., la *n-ésima derivada* o *derivada de orden n*, $f^{(n)}(a)$, siempre que estas derivadas existan. Observa que la existencia de la n-ésima derivada en a presupone la existencia de la $(n-1)$-ésima derivada en un intervalo que contenga al punto a, y se permite la posibilidad de que a pueda ser un extremo de tal intervalo. De forma análoga a como hemos definido la función derivada de f, se definen las funciones *derivada segunda de f*, f'' o bien $f^{(2)}$, *derivada tercera de f*, f''' o bien $f^{(3)}$,..., *derivada n-ésima de f* o *derivada de orden n de f*, $f^{(n)}$. Para $n > 3$ se utilizan exclusivamente las notaciones $f^{(n)}(a)$ y $f^{(n)}$.

Ejemplos

(1) Supongamos que f es una función constante, digamos $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$ fijo). En este caso
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{k-k}{x-a} = 0.$$
Así pues, f es derivable en a para cualquier número a, y $f'(a) = 0$. La función f' está definida en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

(2) Sea ahora f una *función afín*, es decir, una función de la forma $f(x) = mx + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (m y b son constantes reales). Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, tenemos
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{mx+b-(ma+b)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{m(x-a)}{x-a} = m,$$
luego f es derivable en a y $f'(a) = m$. La derivada de f es la función constante definida en todo $\mathbb{R}$ por $f'(x) = m$.

(3) Si f se define por $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a.$$
Por tanto, la derivada de f es la función f' definida en todo $\mathbb{R}$ por $f'(x) = 2x$.

(4) Consideremos la función exponencial $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se verifica
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a h}{h} = e^a$$
(hemos usado la equivalencia $e^h - 1 \sim h$ cuando $h \to 0$). Así pues, la derivada de f es la propia función f, es decir, $f'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

(5) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, y a un número real cualquiera. Entonces
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos a\end{aligned}$$
(hemos usado la equivalencia $\operatorname{sen}\varepsilon(h) \sim \varepsilon(h)$, con $\varepsilon(h) = h/2$, cuando $h \to 0$). Por consiguiente, $f'(x) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se prueba de manera análoga (cf. identidad trigonométrica para la diferencia de cosenos del ejemplo 2, pág. 44) que si $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$.

(6) Consideremos la función definida por $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$, la función f es derivable en a. En efecto: $f'(a) = 1$ si $a > 0$ y $f'(a) = -1$ si $a < 0$ (téngase en cuenta la derivada de una función afín; cf. ejemplo 2). ¿Qué sucede en el punto 0? Se tiene
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ahora bien, si $h > 0$ es $|h|/h = h/h = 1$, y si $h < 0$ es $|h|/h = (-h)/h = -1$. Por tanto,

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$$

y

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1,$$

luego f no es derivable en 0. La derivada de f es la función definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La función f es continua en 0 (cf. ejemplo 5, pág. 45) y acabamos de ver que no es derivable en 0. Por consiguiente, *la continuidad de una función en un punto no asegura la existencia de derivada en ese punto.*

El teorema siguiente nos dice algo importante: para que una función pueda ser derivable en un punto es necesario que sea continua en ese punto. Si no hay continuidad, ya podemos concluir que no hay derivabilidad. Por tanto, nos aseguraremos primero de que la función es continua antes de investigar si es derivable.

Teorema 3.4.1 *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.*

Si f es continua en a, entonces puede ocurrir que f no sea derivable en a (lo hemos visto con la función valor absoluto, en el último ejemplo). En resumen: la continuidad de una función en un punto es una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de derivada en dicho punto.

Significado geométrico de la derivada

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y a un punto interior de I. Supongamos que f es derivable en a. Sea $P(a, f(a))$ y, para $x \neq a$, $P_x(x, f(x))$. Sea α_x el ángulo de inclinación de la recta PP_x (Figura 3.42).[13] La pendiente de la recta PP_x es

$$\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Cuando x tiende hacia a esta pendiente tiende hacia $f'(a)$, el punto P_x "tiende" hacia P (i.e. P_x se mueve hacia P recorriendo la gráfica de f) y entonces podemos asignar el valor $f'(a)$ a la pendiente de la recta que pasa por P y es la "posición límite" de las rectas PP_x cuando P_x tiende hacia el punto fijo P. Si designamos por α el ángulo de inclinación de esta recta, tenemos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \operatorname{tg} \alpha_x = \operatorname{tg} \alpha.$$

[13] El ***ángulo de inclinación*** ϕ de una recta es el ángulo medido en sentido antihorario desde la parte positiva del eje x hasta encontrar por primera vez a dicha recta. Así pues, se tiene $0 \leq \phi < \pi$. Si este ángulo es 0, la recta es horizontal; si es $\pi/2$, la recta es vertical. La ***pendiente*** m de una recta no vertical se define como la tangente de su ángulo de inclinación: $m = \operatorname{tg} \phi$. Una recta vertical no tiene pendiente.

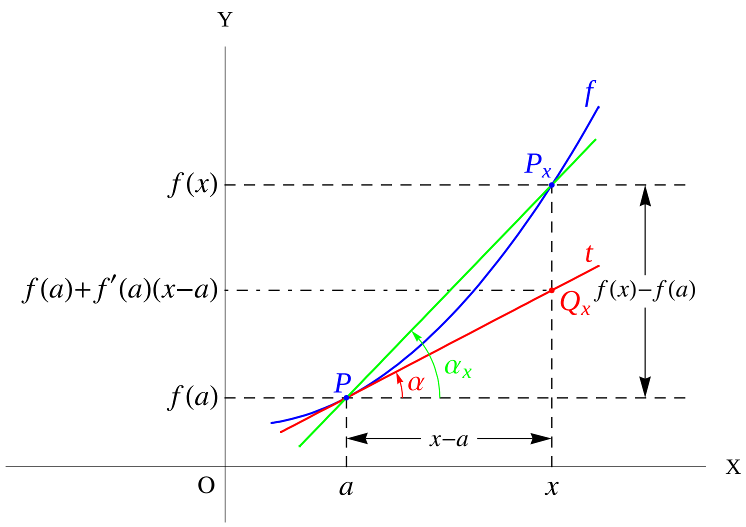

Figura 3.42: $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente t.

A la recta t que pasa por P y tiene como pendiente $f'(a)$ se la llama *tangente a la gráfica de f en el punto P*. La ecuación de esta recta tangente es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Observemos que la recta vertical que pasa por P_x corta a la recta tangente en P, en el punto $Q_x(x, f(a) + f'(a)(x - a))$. La separación entre los puntos P_x y Q_x viene dada por

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)] = o(x - a), \text{ cuando } x \to a, x \in I,$$

es decir, la separación de la gráfica y la tangente en la vertical determinada por P_x es un infinitésimo de orden superior a $x - a$, cuando $x \to a$.

Las derivadas laterales de f en a tienen una interpretación análoga. Cuando existen y son distintas conducen a la idea geométrica de semirrectas tangentes a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Suele decirse que la gráfica presenta en $(a, f(a))$ un *punto anguloso* (Figura 3.43).

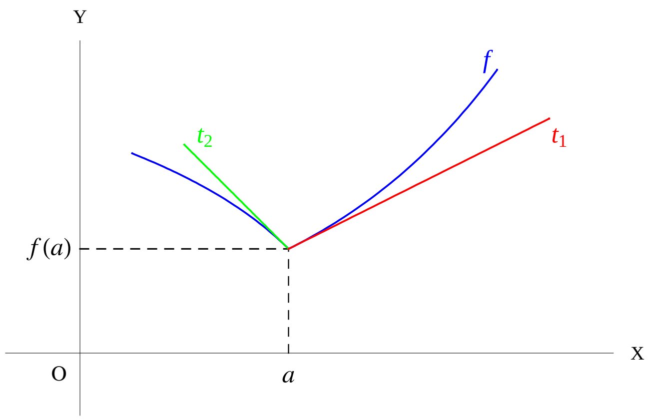

Figura 3.43: $(a, f(a))$ es un punto anguloso.
$t_1 : y - f(a) = f'(a^+)(x - a), x \geq a,$
$t_2 : y - f(a) = f'(a^-)(x - a), x \leq a.$

Nota

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto interior a de I.

- Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ se dice que $(a, f(a))$ es un *punto de inflexión de tangente vertical* de la gráfica de f. Por ejemplo, $(0, 0)$ es un punto de inflexión de tangente vertical para la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (compruébese).
- Si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$ y $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{Bmatrix} -\infty \\ +\infty \end{Bmatrix}$, se dirá que la gráfica de f presenta en $(a, f(a))$ un *punto de retroceso* y que en este punto tiene semirrecta tangente vertical. El origen de coordenadas es un punto de retroceso para la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{|x|}$ (compruébese).

El siguiente teorema relaciona la noción de derivada con las operaciones algebraicas entre funciones, proporcionando unas reglas básicas para el cálculo de derivadas.

Teorema 3.4.2 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $a \in I$ y sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en a. Entonces:*

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la función αf es derivable en a, y

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

(b) La función $f + g$ es derivable en a, y

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(c) (Regla del producto) La función fg es derivable en a, y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(d) (Regla del cociente) Si $g(a) \neq 0$, la función f/g es derivable en a, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Es fácil establecer extensiones del teorema 3.4.2(b,c), utilizando inducción.

Corolario 3.4.1 *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones reales definidas en un intervalo I y derivables en $a \in I$. Entonces:*

(a) La función $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ es derivable en a y

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_n'(a).$$

(b) La función $f_1 f_2 \cdots f_n$ es derivable en a y

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(a) = f_1'(a)f_2(a)\cdots f_n(a) + f_1(a)f_2'(a)\cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a)f_2(a)\cdots f_n'(a).$$

Ejemplos

(1) Un caso especial importante del corolario 3.4.1(b) surge cuando las funciones son iguales, es decir, $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$. Entonces, se tiene

$$(f^n)'(a) = n(f(a))^{n-1} f'(a).$$

En particular, si $f(x) = x$, entonces la derivada de $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Esta fórmula es también válida si el exponente es un entero negativo. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$ y $h(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$, tenemos, aplicando la regla del cociente (teorema 3.4.2(d)), que

$$h'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(-n)-1}.$$

(2) Consideremos la función polinómica dada por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Su derivada viene dada por la expresión

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

(teorema 3.4.2(a,b) y ejemplo anterior).

(3) Según acabamos de ver, una función polinómica es derivable en cada punto de la recta real. Por consiguiente, una función racional $r = p/q$ será derivable en cada punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$. Su derivada se obtiene aplicando la fórmula del teorema 3.4.2(d).

Por ejemplo, sea $r(x) = \frac{-x^3}{x^2+1}$. En este caso, $q(x) = x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la derivada de r está definida en todo $\mathbb{R}$ y viene dada por

$$r'(x) = \frac{-3x^2(x^2+1) - (-x^3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\,.$$

(4) Recordando que $\mathrm{sen}' = \cos$ y $\cos' = -\mathrm{sen}$, aplicamos de nuevo el teorema 3.4.2(d), y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'x = \left(\frac{\mathrm{sen}}{\cos}\right)'(x) &= \frac{\mathrm{sen}'x \cos x - \mathrm{sen}\, x \cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\end{aligned}$$

en cada x tal que $\cos x \neq 0$, es decir, en el dominio de la función tangente.

Análogamente se prueba que $\mathrm{cotg}'x = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$, para $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

El teorema siguiente proporciona una fórmula, de extraordinaria importancia, para encontrar la derivada de una función compuesta $g \circ f$ en términos de las derivadas de g y f.

Teorema 3.4.3 (Regla de la cadena) *Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, definidas en sendos intervalos I y J, tales que $f(I) \subset J$, y sea $a \in I$. Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a y*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Nota

Obviamente la regla de la cadena se puede extender al caso de una composición de más de dos funciones. Así, para tres funciones, tenemos: si f es derivable en a, g es derivable en $f(a)$ y h es derivable en $g(f(a))$, entonces la función compuesta $h \circ g \circ f$ es derivable en a y

$$(h \circ g \circ f)'(a) = h'(g(f(a))) \cdot g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Por ejemplo, sea F la función definida en todo $\mathbb{R}$ por $F(x) = \operatorname{sen}(e^{\cos x})$. En este caso, $F = h \circ g \circ f$, con $f(x) = \cos x$, $g(y) = e^y$ y $h(z) = \operatorname{sen} z$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$F'(x) = \cos(e^{\cos x}) \cdot e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x).$$

Una vez establecido que si una función es continua y estrictamente monótona entonces su inversa es también continua (cf. teorema 3.3.14), abordamos ahora el asunto de la derivabilidad.

Teorema 3.4.4 (Derivada de la función inversa) *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua en I. Sean $J = f(I)$ y $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la función inversa de f. Si f es derivable en $a \in I$ y es $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a) \in J$ y*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Nota

En el teorema anterior, es esencial la hipótesis $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) = 0$, entonces la función inversa f^{-1} no es derivable en $b = f(a)$. En efecto, como $f(f^{-1}(b)) = b$, si f^{-1} fuese derivable en b, la regla de la cadena implicaría que

$$f'(f^{-1}(b)) \cdot (f^{-1})'(b) = 1,$$

de donde $0 \cdot (f^{-1})'(b) = 1$, lo cual es absurdo. La función dada por $f(x) = x^3$ proporciona un ejemplo sencillo de esta situación. Al ser $f'(0) = 0$, la función f^{-1} no es derivable en $0 = f(0)$.

Teorema 3.4.5 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente monótona en I. Sean $J = f(I)$ y $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la función inversa de f. Si $y = f(x)$ es derivable en I y $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces $x = f^{-1}(y)$ es derivable en J y*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},\ y \in J \qquad \textit{o bien} \qquad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)},\ x \in I,$$

y también podemos escribir

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

en los correspondientes valores x e y.

Ejemplos

(1) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en I y $g(\xi) = \xi^n$ para $\xi \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces, puesto que $g'(\xi) = n\xi^{n-1}$, aplicando la regla de la cadena resulta

$$(f^n)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

para $x \in I$, como ya habíamos visto (cf. ejemplo 1, pág. 57).

(2) La función exponencial $y = f(x) = e^x$ (estrictamente creciente) es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (cf. ejemplo 4, pág. 53) . Entonces la derivada de la función logarítmica $x = f^{-1}(y) = \ln y$ es

$$\ln' y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}\,,\ y \in (0, +\infty)$$

en virtud del teorema 3.4.5.

(3) Sea n un número natural *par*. Sean $I = [0, +\infty)$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. La función f es estrictamente creciente y continua en I, luego su inversa, que viene dada por $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ para $y \in J = [0, +\infty)$, es también estrictamente creciente y continua en J. Además, se tiene $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo $x \in I$. Por tanto, si $y > 0$, entonces

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}\, y^{(1/n)-1}.$$

La función f^{-1} no es derivable en 0 (cf. nota posterior al teorema 3.4.4).

(4) Sea n un número natural *impar*, distinto de 1. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^n$ es estrictamente creciente y continua, por lo que su inversa, $F^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F^{-1}(y) = y^{1/n}$, también es continua y estrictamente creciente. Como en el ejemplo anterior, se concluye que F^{-1} es derivable para $y \neq 0$, siendo $(F^{-1})'(y) = (1/n)y^{(1/n)-1}$, y F^{-1} no es derivable en 0.

(5) Consideremos la función $f(x) = x^\alpha, x > 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fijo). Para encontrar la derivada de f escribiremos $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ y aplicaremos la regla de la cadena. Si ponemos $h(\xi) = e^\xi$ y $g(x) = \alpha \ln x$, resulta

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

para $x > 0$.

(6) Haciendo uso, de nuevo, del teorema 3.4.5, podemos obtener las derivadas de las funciones arcsen, arccos y arctg, inversas de sen, cos y tg, respectivamente.

Sabemos que la función $\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ (estrictamente creciente) tiene por inversa $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Además, $\operatorname{sen}' x = \cos x \neq 0$ si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Para $|x| < \pi/2$, se tiene $|y| < 1$ para los valores $y = \operatorname{sen} x$. Por tanto, para todo $y \in (-1, 1)$,

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\operatorname{sen}' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,.$$

El signo que precede a la raíz se ha escogido teniendo en cuenta que $\cos x > 0$ para $|x| < \pi/2$.

Análogamente se prueban las fórmulas

$$\operatorname{arccos}' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,,\ |y|<1, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{arctg}' y = \frac{1}{1+y^2}\,,\ y\in\mathbb{R}.$$

Las funciones arco seno y arco coseno no son derivables ni en -1 ni en 1 (cf. nota posterior al teorema 3.4.4).

(7) Sean $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I y $g(\xi)=|\xi|$. Recordemos que g es derivable en cada $\xi\neq 0$ y que $g'(\xi)=\operatorname{sgn}(\xi), \xi\neq 0$ (cf. ejemplo 6, págs. 53-54). Entonces, por la regla de la cadena, la función $g\circ f=|f|$ es derivable en todo punto $x\in I$ tal que $f(x)\neq 0$, y

$$|f|'(x)=\operatorname{sgn}(f(x))\cdot f'(x)=\begin{cases} f'(x) & \text{si } f(x)>0,\\ -f'(x) & \text{si } f(x)<0.\end{cases}$$

Si el intervalo I es abierto, $a\in I$ y $f(a)=0$, entonces $|f|$ es derivable en a si, y sólo si, $f'(a)=0$ (cf. ejercicio 25).

Por ejemplo, si $f(x)=x^2-1$ para $x\in\mathbb{R}$, entonces su valor absoluto es $|f|(x)=|x^2-1|$ y $|f|'(x)=\operatorname{sgn}(x^2-1)\cdot 2x$ para $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. En la Figura 3.44 vemos las gráficas de las funciones $|f|$ y $|f|'$.

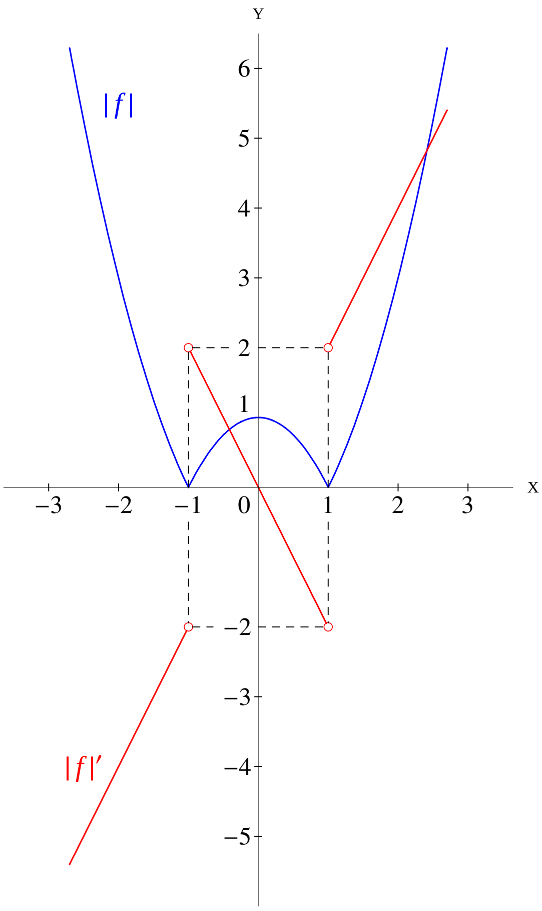

Figura 3.44

(8) Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I. Consideremos la función F definida por $F(x) = \ln|f(x)|$ para cada x tal que $f(x) \neq 0$. Si $h(\xi) = \ln \xi$, $\xi > 0$, se tiene que $F = h \circ |f|$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$F'(x) = h'(|f|(x)) \cdot |f|'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|f(x)|} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} & \text{si } f(x) > 0, \\ -\dfrac{1}{|f(x)|} \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,,$$

para todo x tal que $f(x) \neq 0$.

(9) Sean f y g funciones derivables y supongamos que $f(x) > 0$ para todo x. Consideremos la función φ definida por $\varphi(x) = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. Teniendo en cuenta el resultado del ejemplo anterior, si $F(x) = \ln \varphi(x) = g(x) \ln f(x)$, entonces

$$F'(x) = g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)},$$

luego

$$\varphi'(x) = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x)\,\ln f(x) + g(x)\,\frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

En particular, si $\varphi(x) = x^x, x > 0$, entonces $\varphi'(x) = x^x(1 + \ln x)$ para $x > 0$.

En la tabla siguiente, como resumen, se muestran las derivadas de algunas funciones básicas:

$f(x)$	$f'(x)$	Dominio de f'
k (constante)	0	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n < 0$	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^{1/n}, n \in \mathbb{N}$ par	$\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}$	$x > 0$
$x^{1/n}, n \in \mathbb{N}$ impar	$\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

La notación de Leibniz

Estamos utilizando el símbolo f' para referirnos a la derivada de una función f. Esta notación, fue introducida en 1797 por el matemático francés J.-L. Lagrange (1736-1813) en su libro *Théorie des fonctions analytiques*, en el que aparece por primera vez la denominación "función derivada". El símbolo D para indicar la derivada fue introducido por L. F. A. Arbogast (1759-1803) en su obra *Du calcul des dérivations*, publicada en 1800. El filósofo y matemático alemán G. W. Leibniz (1646-1716) empleaba para designar la derivada una notación algo diferente de las anteriores. Utilizando y en lugar de $f(x)$, el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lo escribía en la forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, poniendo Δx en vez de h, y Δy en vez de $f(x+h)-f(x)$ (el símbolo Δ no es un factor sino que sirve para indicar una diferencia en los valores de la variable que lo sigue). El límite del cociente de diferencias cuando $h \to 0$, es decir, la derivada $f'(x)$, la designaba Leibniz por $\frac{dy}{dx}$ o bien $\frac{df(x)}{dx}$ o también $\frac{d}{dx}f(x)$. Con esta notación la definición de derivada se escribe así:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

No solamente era distinta la notación, sino también la manera que tenía Leibniz de pensar las derivadas, pues consideraba el límite anterior como un cociente de cantidades "infinitamente pequeñas" o "infinitesimales" dy y dx, que llamaba "diferenciales", y entonces la derivada $\frac{dy}{dx}$ era un "cociente diferencial". En vez de utilizar el paso al límite para definir la derivada, pasaba de Δy y Δx a dy y dx indicando simplemente que Δy y Δx se transformaban en infinitesimales.[14]

El manejo de las cantidades infinitamente pequeñas proporcionó al cálculo diferencial en sus comienzos un cierto aire de misterio, siempre asociado a la palabra "infinito". Gradualmente, durante el siglo XIX, se fue prescindiendo de las cantidades infinitesimales. Sin embargo, la notación de Leibniz sigue utilizándose debido a su gran flexibilidad. El símbolo $\frac{dy}{dx}$ tiene la ventaja de ayudarnos a recordar el proceso completo del cálculo de un cociente de diferencias y posterior paso al límite. Ahora bien, no debe olvidarse que $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo y no una razón o cociente. Muchos cálculos y expresiones formales en los que aparece involucrado dicho símbolo, muestran que se puede tratar con él *como si* dy y dx fueran números reales, pero ¡no lo son!

Una fórmula tal como

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

[14]La *diferencial* de una variable es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de dicha variable. Leibniz consideraba que una curva estaba formada por segmentos indivisibles de longitud infinitesimal, con lo que asociaba a la curva distintas sucesiones de números: la sucesión de las abscisas, la sucesión de las ordenadas, la sucesión de las longitudes de los segmentos, etc. Así, dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas y sucesivas, mientras que dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x sucesivas. El símbolo d (que proviene de la palabra latina *differentia*), es introducido por Leibniz en un manuscrito fechado el 29 de octubre de 1675, situándolo en un denominador (por cuestiones de dimensionalidad en las que no entraremos aquí). Pronto se da cuenta de que esto constituye una desventaja notacional, por lo que piensa que es mejor situar el símbolo d precediendo a la variable. Así, el 11 de noviembre de 1675, escribe: «Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas». Más adelante en el mismo manuscrito se pregunta si $(dx)(dy)$ es lo mismo que $d(xy)$ y si $\frac{dx}{dy}$ es lo mismo que $d\frac{x}{y}$. En otro manuscrito posterior, fechado el 11 de julio de 1677, Leibniz expone las reglas de la diferencial de un producto y de un cociente: $d(xy) = x\,dy + y\,dx$; $d\frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$.

El primer artículo que publicó Leibniz sobre su *calculus differentialis* lleva por título "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus" y apareció en la revista *Acta Eruditorum*, vol. 3 (1684), págs. 467-473 (*Leibnizens Mathematische Schriften* (ed. C. I. Gerhardt), vol. V (1858), págs. 220-226). En este artículo, Leibniz, consciente de que su cálculo utilizaba cantidades infinitamente pequeñas que no estaban definidas rigurosamente, tomó la decisión de presentar la diferencial no como una cantidad infinitesimal, sino mediante el siguiente artificio geométrico: introduce un segmento finito que denomina dx, y define la diferencial dy en un punto P de la curva como el segmento que es a dx como la ordenada y es a la subtangente σ. Es decir, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sigma}$. Definida de esta forma, dy resulta ser también un segmento finito. En terminología moderna, como $\frac{y}{\sigma}$ coincide con la pendiente de la recta tangente en P, Leibniz está diciendo que $\frac{dy}{dx}$ es la derivada.

tiene un significado suficientemente claro: la derivada de la función f definida por $f(x) = x^2$ es la función f' definida por $f'(x) = 2x$. Ahora bien, en una ecuación no podemos tener en un lado una función y en el otro un número. En la práctica, el símbolo $\frac{df(x)}{dx}$ unas veces significa f' (función) y otras veces significa $f'(x)$ (número). Para evitar esta ambigüedad, $f'(a)$, la derivada de la función f en el punto a (que es un número), se designa por

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

Así, por ejemplo,

$$\left.\frac{d(x^2)}{dx}\right|_{x=-1} = 2(-1) = -2.$$

La regla de la cadena (teorema 3.4.3) nos dice que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones, definidas en sendos intervalos I y J, tales que $f(I) \subset J$, y existen $f'(x)$ y $g'(f(x))$, entonces existe $(g \circ f)'(x)$ y

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{1}$$

Si escribimos $y = f(x)$ y $z = g(y)$, entonces

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

La notación de Leibniz nos hace designar por $\frac{dy}{dx}$ la derivada $f'(x)$, por $\frac{dz}{dy}$ la derivada $g'(y)$ y por $\frac{dz}{dx}$ la derivada $(g \circ f)'(x)$, con lo que la regla de la cadena expresada en (1) se escribe ahora en la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Por ejemplo, si queremos hallar con la notación de Leibniz la derivada de la función F definida por $F(x) = \cos(x^2)$, escribiremos $y = x^2$ y $z = \cos y$. Entonces $z = \cos(x^2)$ y $\frac{dz}{dx} = F'(x)$. Por tanto,

$$\frac{d\cos(x^2)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} y \cdot 2x = -2x \operatorname{sen}(x^2).$$

El teorema 3.4.5 también presenta un aspecto atractivo con la notación de Leibniz. Si escribimos $\frac{dy}{dx}$ en lugar de $f'(x)$ y cambiamos $(f^{-1})'(y)$ por $\frac{dx}{dy}$, entonces

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Por ejemplo, si f esta definida por $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ impar, distinto de 1, y queremos hallar la derivada de su inversa f^{-1}, definida por $f^{-1}(y) = y^{1/n}$, utilizando la notación de Leibniz se escribe $y = x^n$ y $x = y^{1/n}$, con lo que, para $y \neq 0$, se tiene

$$\frac{d(y^{1/n})}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{ny^{1-(1/n)}} = \frac{1}{n}\, y^{(1/n)-1}.$$

Finalmente, mencionamos la notación de Leibniz para las derivadas sucesivas. El uso de la notación de Leibniz para la segunda derivada $f''(x)$ nos llevaría a escribir

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

pero para ella, Leibniz introdujo la notación $\frac{d^2y}{(dx)^2}$. Análogamente para la tercera derivada $f'''(x)$, Leibniz escribe $\frac{d^3y}{(dx)^3}$. Estas notaciones suelen abreviarse así: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$. En general, para la derivada n-ésima $f^{(n)}(x)$, se escribe $\frac{d^ny}{dx^n}$. Naturalmente, se utilizan también las versiones $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ o bien $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.

3.5. Propiedades de las funciones derivables

Definición 3.5.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un* ***máximo relativo*** *(resp.* ***mínimo relativo****) en $a \in I$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$) para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap I$. Se dice que f tiene un* ***extremo relativo*** *en $a \in I$ si tiene o bien un máximo relativo o bien un mínimo relativo en a. Si para todo $x \in ((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \cap I$ se verifica $f(x) < f(a)$ (resp. $f(a) < f(x)$) decimos que f tiene un* ***máximo relativo estricto*** *(resp.* ***mínimo relativo estricto****) en a. Se dice que f tiene un* ***extremo relativo estricto*** *en a si tiene o bien un máximo relativo estricto o bien un mínimo relativo estricto en a.*

El teorema siguiente proporciona una condición necesaria para que una función derivable en un punto *interior* de su intervalo de definición tenga en dicho punto un extremo relativo.

Teorema 3.5.1 *Sea a un punto interior del intervalo I en el que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo. Si f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.*

Observaciones

(1) Es esencial que a sea un punto interior de I. Por ejemplo, la función definida por $f(x) = x$ en $[0, 1]$ tiene un mínimo relativo en 0 y un máximo relativo en 1 y $f'(0^+) = f'(1^-) = 1 \neq 0$.

(2) La condición $f'(a) = 0$ no es suficiente para que f tenga en a un extremo relativo: la función definida por $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$, verifica $f'(0) = 0$ pero no tiene un extremo relativo en 0.

(3) Es claro que puede haber extremo relativo en un punto en el que la función no es derivable: si $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$, entonces f tiene un mínimo relativo en 0, pero no existe la derivada de f en 0.

Si la función f es derivable en el punto a, interior a su dominio de definición (usualmente el dominio será un intervalo o una unión de intervalos), y $f'(a) = 0$, se dice que a es un *punto crítico* o *estacionario* de f. Los únicos puntos en los que f puede tener un extremo relativo son los puntos críticos, los puntos interiores en los que no es derivable y los puntos no interiores al dominio.

Los teoremas 3.5.1 y del máximo-mínimo implican el resultado siguiente.

Teorema 3.5.2 (Teorema de Rolle) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

El teorema de Rolle nos dice, en términos geométricos, que en algún punto $(c, f(c))$, estando c situado entre a y b, la tangente es horizontal y paralela, por tanto, al segmento que une los extremos de la gráfica de f.

Uno de los resultados más importantes del Análisis Matemático se debe a Joseph-Louis Lagrange y es el llamado *teorema del valor medio*. El teorema de Rolle es un caso particular a partir del cual puede deducirse el teorema general.[15]

Teorema 3.5.3 (Teorema del valor medio) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

La pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, luego el significado geométrico del teorema del valor medio es el siguiente: en algún punto $(c, f(c))$, estando c situado entre a y b, la tangente es paralela al segmento que une los extremos de la gráfica de f. Naturalmente, el punto c de cuya existencia se habla en la conclusión del teorema no tiene por qué ser único (Figura 3.45).

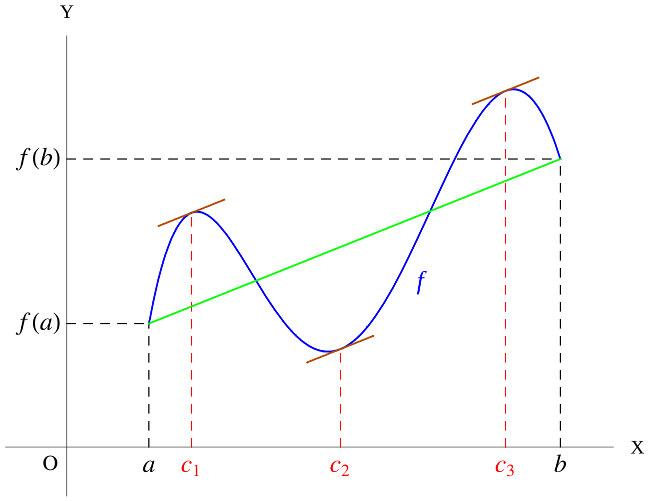

Figura 3.45: El teorema del valor medio.

Observaciones

(1) En la fórmula $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ se observa que a y b se pueden intercambiar, por lo que no es necesario pensar que $a < b$. Asimismo esta fórmula puede expresarse de otra manera. Poniendo $h = b-a$ resulta $f(a+h)-f(a) = f'(c)h$, y h puede ser positivo o negativo. El número c situado entre a y b admite la expresión $c = a + \theta h$, siendo θ algún número del intervalo $(0,1)$, con lo cual la fórmula se escribe así:

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

(2) Supongamos que hemos recorrido en un automóvil 170 kilómetros en 2 horas. Designamos por $f(t)$ la distancia recorrida en el tiempo t, con $t \in [0,2]$. La *velocidad media* del viaje es $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{170}{2} = 85$ km/h y $f'(\tau)$ es la *velocidad instantánea* en el instante $t = \tau$. El teorema del valor medio nos dice que *en algún momento* habremos estado viajando exactamente a 85 km/h.

[15] Lagrange incluye el teorema del valor medio en la primera edición, publicada en 1797, de su famoso libro *Théorie des fonctions analytiques*. En la obra *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrez*, de 1691, el matemático francés Michel Rolle (1652-1719) incluyó el teorema que lleva su nombre. Rolle presenta el teorema de modo incidental al tratar de un método para resolver ecuaciones de una manera aproximada.

Gracias al teorema del valor medio, la derivada f' se convierte en una excelente fuente de información para obtener propiedades de la función f.

Teorema 3.5.4 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces f es constante en $[a, b]$.*

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado, de gran importancia para el cálculo integral.

Corolario 3.5.1 *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces existe una constante C tal que $f = g + C$ en $[a, b]$.*

A partir del signo de la derivada, deducimos propiedades de monotonía.

Teorema 3.5.5 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Entonces:*

(a) f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

(b) f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

(c) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I.

(d) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I.

Observación

Las afirmaciones recíprocas de (c) y (d) no son ciertas. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, pero $f'(0) = 0$.

El teorema del valor medio permite establecer una conexión importante entre derivada lateral y límite lateral de la derivada.

Teorema 3.5.6 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [a, a + \delta)$ (resp. $I = (a - \delta, a]$), $\delta > 0$. Si f es continua en I, es derivable en $I \setminus \{a\}$ y existe y es finito el límite de $f'(x)$ cuando $x \to a^+$ (resp. cuando $x \to a^-$), entonces existe la derivada de f en a por la derecha (resp. por la izquierda) y*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} f'(x) \qquad \left(\textit{resp. } f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} f'(x) \right).$$

Nota

Con las hipótesis del teorema anterior, si existe el límite de $f'(x)$ cuando $x \to a^+$ (resp. cuando $x \to a^-$) pero no es finito, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x) \qquad \left(\textit{resp. } \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} f'(x) \right).$$

Observación

¿La existencia de derivada lateral implica la existencia del correspondiente límite lateral de la derivada? La respuesta es negativa. Para verlo, consideremos la función f definida por $f(x) = x^2 \mathrm{sen}(1/x)$ si $x > 0$, y $f(0) = 0$. Para cada $x > 0$ es

$$f'(x) = 2x \,\mathrm{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,,$$

por lo que no existe el límite de $f'(x)$ cuando $x \to 0^+$ (pues no existe el límite de $\cos(1/x)$ cuando $x \to 0^+$; la prueba es similar a la que vimos en las págs. 30-31 para $\operatorname{sen}(1/x)$). Sin embargo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

(cf. ejemplo pág. 21), luego $f'(0^+) = 0$.

Usando el teorema del valor medio se obtienen las siguientes condiciones suficientes para que una función tenga un extremo relativo en un punto.

Teorema 3.5.7 *Sea f continua en un entorno U de un punto c y derivable en $U \setminus \{c\}$. Entonces:*

(a) *Si existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta) \subset U$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $c-\delta < x < c$ y $f'(x) \leq 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un máximo relativo en c. Si $f'(x) > 0$ para $c-\delta < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un máximo relativo estricto en c.*

(b) *Si existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta) \subset U$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $c-\delta < x < c$ y $f'(x) \geq 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un mínimo relativo en c. Si $f'(x) < 0$ para $c-\delta < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un mínimo relativo estricto en c.*

Observación

Las condiciones suficientes del teorema anterior no son necesarias. Por ejemplo, consideremos la función definida por $f(x) = 2x^2 + x^2\operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Como para todo x se tiene que $x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$ es claro que la función tiene un mínimo relativo estricto en el punto 0. Ahora bien, si $\delta > 0$, en cada intervalo $(-\delta, \delta)$ la derivada

$$f'(x) = 4x + 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,, \;\; f'(0) = 0,$$

toma valores positivos y negativos tanto en $(-\delta, 0)$ como en $(0, \delta)$. En efecto, basta observar que $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) < 0$ y que $f'\left(\frac{1}{(2k-1)\pi}\right) > 0$, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

A partir del teorema de Rolle puede deducirse un resultado para dos funciones que se debe al matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y que generaliza el teorema del valor medio.

Teorema 3.5.8 (Teorema del valor medio de Cauchy) *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Observaciones

Si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $g(b) \neq g(a)$ por el teorema de Rolle, y la conclusión puede escribirse así:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

El teorema del valor medio es el caso particular del teorema 3.5.8 en el que $g(x) = x$. En la fórmula que establece el teorema del valor medio de Cauchy, se observa que a y b se pueden intercambiar, por lo que no es necesario pensar que $a < b$.

El teorema del valor medio de Cauchy o teorema generalizado del valor medio, es la herramienta fundamental necesaria para demostrar un teorema que facilita el cálculo del límite de un cociente de funciones, conocido con el nombre de regla de L'Hôpital.[16]

En el cálculo de límites aparecen con frecuencia las llamadas *formas indeterminadas:*

$$\frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ \infty-\infty\,,\ 0\cdot\infty\,,\ 0^0\,,\ 1^\infty\,,\ \infty^0\,.$$

Son expresiones simbólicas correspondientes a la tendencia de dos funciones f y g hacia sus respectivos límites en diferentes situaciones. Por ejemplo, si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y queremos estudiar el comportamiento de la función f/g en las cercanías del punto a, decimos que se presenta una indeterminación del tipo $0/0$. Las formas indeterminadas esenciales son $0/0$ y ∞/∞ ya que las otras situaciones de indeterminación se reducen a ellas, realizando manipulaciones algebraicas y utilizando las funciones exponencial y logarítmica.

Teorema 3.5.9 (Regla de L'Hôpital) *Sean $a,b\in\mathbb{R}^\sharp=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ con $a<b$ y sean f y g funciones reales derivables en (a,b) con $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Supongamos que o bien*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$$

o bien

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\pm\infty.$$

Supongamos además que

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}^\sharp.$$

[16]El matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748) escribió en los años 1691-1692 dos pequeños libros, que se publicarían mucho más tarde, sobre el cálculo diferencial y el cálculo integral, desarrollando las ideas de Leibniz, a quien Johann reconoció siempre como su maestro y fiel amigo. En 1691, Bernoulli conoce en París a un joven y competente matemático francés, el marqués Guillaume-François-Antoine de L'Hôpital (1661-1704), perteneciente al círculo elitista del filósofo Nicolas Malebranche, que era el foco de la intelectualidad francesa de esa época. Sin embargo, L'Hôpital no conocía el *nuevo cálculo* en la forma en que ya era dominado por Johann. A raíz de las conversaciones que ambos mantuvieron sobre el tema, el marqués de L'Hôpital, muy impresionado, contrató a Johann para que fuera su maestro. Las lecciones se desarrollaron tanto en París como en la casa de campo de L'Hôpital, en Oucques. A finales de 1692, Bernoulli abandona París y regresa a su ciudad natal, Basilea. Las clases continúan por correspondencia. Y es precisamente en la correspondencia entre Bernoulli y L'Hôpital donde se menciona un acuerdo establecido entre las dos partes, en 1694, que obligaba a Johann a transmitir al marqués todos sus descubrimientos para que L'Hôpital los utilizase a su voluntad, y a abstenerse de comunicar a otros los contenidos transmitidos, a cambio de un elevado salario regular. Uno de los resultados que Johann comunicó al marqués por carta se ha conocido siempre con el nombre de “regla de L'Hôpital”, y data de 1694. Esta regla la incorporó L'Hôpital en el primer texto sobre cálculo diferencial que apareció impreso, su *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en París en 1696. Parte del material de esta obra es resultado indudablemente de los trabajos del propio L'Hôpital, sobre todo en cuanto a la forma de exposición, pero los teoremas del libro son esencialmente de Bernoulli. La prueba de esto se obtuvo en 1922, cuando el matemático Paul Schafheitlin (1861-1924) descubrió en la biblioteca de la Universidad de Basilea una copia en latín del texto de cálculo diferencial de Johann realizada por su sobrino Nikolaus I Bernoulli, probablemente en 1705. Schafheitlin se encargó de publicar el mismo año de su descubrimiento el citado documento, *Johannis (I) Bernoullii Lectiones de calculo differentialium*, y asimismo publicó en 1924 una traducción al alemán titulada *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*. En este libro *no aparece* la “regla de L'Hôpital”. El texto de Bernoulli sobre cálculo integral mencionado antes fue publicado en sus *Opera omnia* de 1742, en donde Johann afirma en una nota a pie de página que omitía sus lecciones sobre el cálculo diferencial, dado que su contenido estaba ya al alcance de cualquiera en el *Analyse* de L'Hôpital. Después de la muerte de L'Hôpital, Bernoulli reclamó enérgicamente, pero con escaso éxito, la autoría del *Analyse*, por supuesto, sin mencionar el curioso y poco honorable acuerdo. El resarcimiento definitivo de Johann llegó en 1955, cuando se publica, editada por Otto Spiess, una parte de su correspondencia (*Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli. Band 1: Der Briefwechsel mit Jakob Bernoulli, dem Marquis de l'Hôpital u. a.*), donde *sí aparece* la famosa “regla”. Naturalmente seguiremos refiriéndonos a la “regla de L'Hôpital” así, con el nombre de siempre, pero no debemos olvidar que en realidad se trata de un resultado debido a Johann Bernoulli.

Entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Se verifica el mismo resultado si $x \to a^+$ se sustituye por $x \to b^-$.

Nota

El teorema anterior permite las posibilidades $a = -\infty$ y $b = +\infty$. En estos casos se consideran los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ respectivamente.

Ejemplos

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x = 0.$

Las funciones f y g dadas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son derivables en $(0, +\infty)$ y ambas tienden hacia 0 cuando $x \to 0^+$. Además $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$, luego puede aplicarse la regla de L'Hôpital.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

Aquí se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital (cf. pág. 33, para otra prueba diferente de este resultado).

(3) Se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1,$$

con lo que hemos probado $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$, es decir, $\ln x \sim x - 1$ cuando $x \to 1$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

Si $\alpha > 0$, tenemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Mediante el cambio de variable $t = 1/x$, se obtiene

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln t,$$

luego

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \ln t = 0.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{-x} x^2 = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

Aquí se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x}=0.$

La forma indeterminada $\infty-\infty$ se ha transformado en $0/0$ y después se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^{-1}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{-1}}{x^{-2}+x^{-1}}=\frac{1}{2}.$

Como en el ejemplo 8, dos aplicaciones de la regla de L'Hôpital nos han conducido al resultado.

(10) Consideremos $\lim_{x\to 0^+} x^x$. Se tiene $x^x = e^{x\ln x}$. Entonces, teniendo en cuenta el ejemplo 5 y la continuidad de la función exponencial en 0, resulta (cf. teorema 3.3.7)

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

(11) Consideremos $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x$. Se tiene $(1+1/x)^x = e^{x\ln(1+1/x)}$. Además

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-1/x^2)/(1+1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1.$$

Así pues

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e^1 = e,$$

por la continuidad de la función exponencial en 1.

(12) Consideremos $\lim_{x\to 0^+}(1+1/x)^x$. Se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+1/x} = 0.$$

Por tanto, por la continuidad de la función exponencial en 0, resulta

$$\lim_{x\to 0^+}(1+1/x)^x = e^0 = 1.$$

La derivada f' de una función derivable f no tiene por qué ser una función continua. Por ejemplo, la función f definida por $f(x) = x^2\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$, y $f(0)=0$, es derivable en cada número real, siendo $f'(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$, para $x\neq 0$, y $f'(0)=0$, y no existe el límite de esta función cuando $x\to 0$, luego f' no es continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, la derivada de una función derivable posee la propiedad del valor intermedio al igual que las funciones continuas (cf. teorema 3.3.8). El resultado se debe al matemático francés Gaston Darboux (1842-1917).[17]

Teorema 3.5.10 (Teorema de Darboux) *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$ y supongamos que γ es un número comprendido entre $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$. Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\gamma$.*

[17] El teorema apareció en el artículo "Mémoire sur les fonctions discontinues" publicado en *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Serie 2, vol. 4 (1875), págs. 57-112, concretamente en las páginas 109-110.

3.6. Funciones convexas

La noción de convexidad juega un papel importante en un gran número de áreas, en particular en la moderna teoría de la optimización. Terminamos este tema fijando nuestra atención en los aspectos básicos de las funciones convexas de una variable real.

Definición 3.6.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es* ***convexa*** *si para cualesquiera $a, b \in I$ y $0 \leq t \leq 1$, se tiene*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b). \tag{2}$$

Se dice que f es ***cóncava*** *si $-f$ es convexa. Se dice que f es* ***estrictamente convexa*** *si para cualesquiera $a, b \in I$ con $a \neq b$ y $0 < t < 1$, se tiene*

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Se dice que f es ***estrictamente cóncava*** *si $-f$ es estrictamente convexa.*

Observaciones

(a) Si escribimos $x = (1-t)a + tb$,[18] vemos que la desigualdad (2) es equivalente a

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a). \end{aligned}$$

Esto significa, geométricamente, que f es convexa si, y sólo si, los puntos de la gráfica de $f|_{[a,b]}$ están por debajo de (o en) la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, para todos $a, b \in I$ con $a < b$. Esta situación geométrica puede expresarse también mediante el llamado *criterio de las tres cuerdas*: f es convexa si, y sólo si, para cualesquiera $a, b, c \in I$ con $a < c < b$, se tiene que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

(desigualdades estrictas si, y sólo si, f es estrictamente convexa). En la Figura 3.46 se ilustra el significado geométrico de la convexidad.

(b) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces f es acotada en cada subintervalo cerrado $[a, b]$ de I. En efecto, f está acotada superiormente por $M = \max\{f(a), f(b)\}$, puesto que si $x = (1-t)a + tb \in [a, b]$,

$$f(x) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \leq (1-t)M + tM = M.$$

[18] Los puntos del intervalo abierto de extremos a y b son precisamente los de la forma $(1-t)a + tb$ para $0 < t < 1$. En efecto, si por ejemplo $a < b$, entonces

$$a = (1-t)a + ta < (1-t)a + tb < (1-t)b + tb = b,$$

y recíprocamente, si $a < x < b$, entonces

$$x = (1-t)a + tb \quad \text{para} \quad 0 < t = \frac{x-a}{b-a} < 1.$$

Escribamos ahora un punto arbitrario x del intervalo $[a,b]$ en la forma $x = \frac{a+b}{2} + \lambda$, para algún λ con $|\lambda| \leq \frac{b-a}{2}$. Entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + \lambda\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - \lambda\right),$$

es decir,

$$f\left(\frac{a+b}{2} + \lambda\right) \geq 2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - \lambda\right).$$

Ahora bien, se tiene que $-f\left(\frac{a+b}{2} - \lambda\right) \geq -M$, luego

$$f\left(\frac{a+b}{2} + \lambda\right) \geq 2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$$

y f está acotada inferiormente por $2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$.

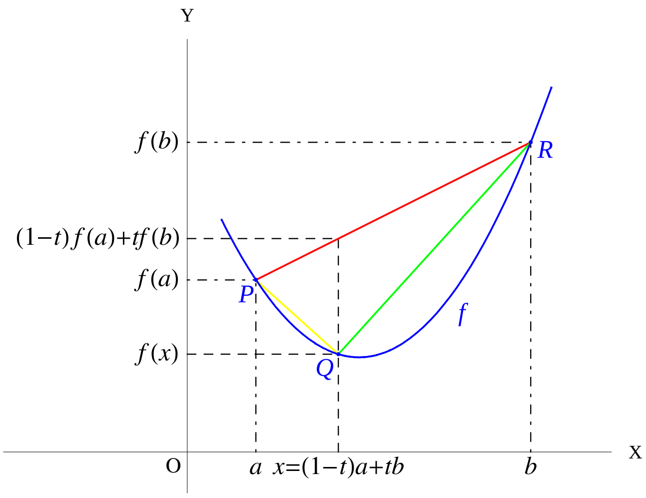

Figura 3.46: Función convexa: pendiente de $PQ \leq$ pendiente de $PR \leq$ pendiente de QR.

Una función convexa no tiene por qué ser derivable en cada punto. Basta considerar por ejemplo $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si f está definida en un intervalo abierto I y es convexa, las derivadas laterales de f existen en cada punto de I.

Teorema 3.6.1 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces*

(1) $f'_+(x)$ *y* $f'_-(x)$ *existen en cada* $x \in I$*,*

(2) f'_+ *y* f'_- *son funciones crecientes en* I *(son estrictamente crecientes si* f *es estrictamente convexa),*

(3) $f'_- \leq f'_+$ *en* I*,*

(4) Si $[\alpha,\beta] \subset I$ *y* $K = \max\{|f'_+(\alpha)|, |f'_-(\beta)|\}$*, entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

para todos $x, y \in [\alpha,\beta]$*,*

(5) f *es continua en* I*.*

Notas

(1) Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es convexa, entonces existen y son finitos $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

Si f es monótona en el intervalo (a,b), este resultado es consecuencia del teorema 3.2.10, puesto que f, por ser convexa en $[a,b]$, es acotada. Si f no es monótona en (a,b), entonces existen puntos $x_1<x_2<x_3$ en (a,b) tales que $f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$. Como f es continua en $[x_1,x_3]$, alcanza su ínfimo en este intervalo en un punto $\alpha\in(x_1,x_3)$, es decir, $f(\alpha)=\operatorname{ínf} f([x_1,x_3])$. De hecho, $f(\alpha)=\operatorname{ínf} f((a,b))$. En efecto, si $x\in(a,b)$, $x<x_1$, entonces

$$\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}\leq\frac{f(\alpha)-f(x_1)}{\alpha-x_1},$$

de donde

$$(\alpha-x_1)f(x)\geq(x-x_1)f(\alpha)+(\alpha-x)f(x_1)\geq(\alpha-x_1)f(\alpha),$$

es decir, $f(x)\geq f(\alpha)$. El caso $x\in(a,b)$, $x_3<x$, se trata de forma similar. Observemos ahora que si $u,v\in(a,b)$, $u<v<\alpha$, entonces

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leq\frac{f(\alpha)-f(u)}{\alpha-u}\leq 0$$

de donde $f(u)\geq f(v)$ y, por tanto, f es decreciente en (a,α). Análogamente, si $u,v\in(a,b)$, $\alpha<u<v$, se deduce que $f(u)\leq f(v)$, luego f es creciente en (α,b). Nuevamente, se deduce el resultado como consecuencia del teorema 3.2.10.

(2) Una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ convexa, no tiene por qué ser continua en $[a,b]$: por el teorema 3.6.1(5), f puede ser discontinua en los extremos del intervalo. Ahora bien, por la nota 1, la discontinuidad, si existe, se presentará en forma de "salto hacia arriba" y entonces, la función $\widetilde{f}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) & \text{si } x=a\\ f(x) & \text{si } x\in(a,b)\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & \text{si } x=b,\end{cases}$$

continua en $[a,b]$, es también convexa. Así, por ejemplo, la función $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$ si $x\neq 1$, y $f(1)=2$ es convexa y es discontinua en 1, puesto que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1<f(1)$.

Definición 3.6.2 *Se dice que f definida en un intervalo I tiene* ***soporte*** *en $c\in I$ si existe una función afín $A(x)=m(x-c)+f(c)$ tal que $A(x)\leq f(x)$ para todo $x\in I$. La gráfica de la función soporte A recibe el nombre de* ***recta de soporte*** *para f en c.*

Geométricamente es evidente que por cada punto de la gráfica de una función convexa pasa una recta que nunca queda por encima de la gráfica. Sea $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo abierto. Supongamos que $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ es convexa y sea $c\in I$. Si m es cualquier número real que verifique $f'_-(c)\leq m\leq f'_+(c)$, entonces, para $x\in I$, si $x>c$ se tiene

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq f'_+(c)\geq m$$

y si $x < c$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'_-(c) \leq m.$$

Por tanto,

$$f(x) \geq m(x - c) + f(c)$$

para todo $x \in I$. Supongamos ahora que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una recta de soporte en cada punto de I. Sean $a, b \in I$. Si $c = (1 - t)a + tb$, $t \in [0, 1]$, sea $A(x) = m(x - c) + f(c)$ la función soporte para f en c. Entonces

$$f(c) = A(c) = (1 - t)A(a) + tA(b) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$$

y, por tanto, f es convexa. Así pues, hemos demostrado la siguiente caracterización de las funciones convexas.

Teorema 3.6.2 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si, existe al menos una recta de soporte para f en cada $c \in I$.*

El resultado siguiente está relacionado con el teorema anterior.

Teorema 3.6.3 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa y $c \in I$. La función f es derivable en c si, y sólo si, la recta de soporte para f en c es única. En este caso, la única función soporte es la definida por $A(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$.*

La convexidad estricta puede caracterizarse por medio de las funciones soporte, como muestra el teorema siguiente.

Teorema 3.6.4 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa si, y sólo si, para cada $c \in I$ existe una función soporte A tal que $f(x) > A(x)$ para todo $x \in I, x \neq c$.*

Como consecuencia del teorema 3.6.2 se obtiene la siguiente desigualdad importante, que lleva el nombre del matemático danés J. L. W. V. Jensen (1859-1925).

Teorema 3.6.5 (Desigualdad de Jensen) *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y que los números reales positivos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ satisfacen $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Entonces*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j).$$

Además se verifica la igualdad si, y sólo si, f es afín en el intervalo cerrado más pequeño que contiene a los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se proporciona ahora un criterio útil para la convexidad.

Teorema 3.6.6 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en I. Entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) si, y sólo si, f' es creciente (resp. estrictamente creciente).*

Corolario 3.6.1 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable dos veces en I. Entonces f es convexa si, y sólo si, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente convexa.*

Nota

La última afirmación del corolario anterior no es reversible. Basta considerar, por ejemplo, la función $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$. Como $f'(x) = 4x^3$ para $-1 < x < 1$, la derivada f' es estrictamente creciente y, por tanto, f es estrictamente convexa. Es claro que $f''(0) = 0$.

Ejemplos

(1) La función exponencial de base a, definida por $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente convexa, puesto que $f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) La función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ (función logarítmica de base a) es estrictamente convexa si $0 < a < 1$ y estrictamente cóncava si $a > 1$, puesto que

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a} \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ < 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

(3) La función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, verifica

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2},\ x \in (0, +\infty),$$

luego es convexa si $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$ (estrictamente convexa si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$) y es cóncava si $0 \leq \alpha \leq 1$ (estrictamente cóncava si $0 < \alpha < 1$).

Definición 3.6.3 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b), $c \in (a, b)$, y supongamos que la función f es convexa (resp. cóncava) en el intervalo (a, c) y cóncava (resp. convexa) en el intervalo (c, b). Entonces se dice que el punto $(c, f(c))$ es un* ***punto de inflexión*** *de la gráfica de f.*

Observación

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de una función f definida y derivable en un intervalo abierto y, además, f es dos veces derivable en c, entonces los teoremas 3.6.6 y 3.5.10 nos permiten concluir que f' tiene un extremo relativo en c y, por el teorema 3.5.1, resulta que $f''(c) = 0$. El recíproco no es cierto: si $f''(c) = 0$, el punto $(c, f(c))$ no tiene por qué ser de inflexión. Por ejemplo, para la función f definida en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^4$, se tiene $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2, x \in \mathbb{R}$. Se verifica que $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión. En el punto 0, la función f tiene un mínimo relativo estricto, pues $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

El teorema 3.5.7 hace uso de la derivada (primera) para determinar si una función tiene en un punto un extremo relativo. Las derivadas de orden superior, si existen, pueden utilizarse con ese mismo fin, así como para la determinación de puntos de inflexión, según muestra el resultado siguiente, que se deduce de un teorema importante no estudiado en este curso: el teorema de Taylor.

Teorema 3.6.7 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y c un punto de I. Supongamos que f tiene derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ en I, con $n \geq 2$, y que $f^{(n)}$ es continua en c. Supongamos además que*

$$f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

pero

$$f^{(n)}(c) \neq 0.$$

(1) Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

(2) Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

(3) Si n es impar, entonces f no tiene ni mínimo relativo ni máximo relativo en c. En este caso $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y, en ese punto, la tangente a la gráfica de f es paralela al eje de abscisas.[19]

Ejemplos

(1) Consideremos la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x, x \in \mathbb{R}$. Como $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, tenemos $f''(x) < 0$ si $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ y $f''(x) > 0$ si $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. El corolario 3.6.1 nos dice que la función seno es estrictamente cóncava en los intervalos $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$ y estrictamente convexa en los intervalos $\big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$, donde $k \in \mathbb{Z}$. En particular, se deduce que los puntos de la gráfica de $f|_{[0,\pi/2]}$, excepto $(0,0)$ y $\big(\frac{\pi}{2}, 1\big)$, están por encima de la cuerda que une los puntos exceptuados. Por tanto, $\operatorname{sen} x \geq \frac{2}{\pi} x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, verificándose la igualdad si, y sólo si, $x = 0$ o $x = \frac{\pi}{2}$.

Los puntos de inflexión de la gráfica de la función seno son $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

(2) Sea f la función definida por $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}, \qquad f'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La ecuación $f'(x) = 0$ tiene como única solución $x = 0$. Como $f'(x) > 0$ para $x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $x > 0$, la función f tiene un máximo relativo estricto en el punto 0; $f(0) = 1$. La ecuación $f''(x) = 0$ tiene dos soluciones: $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Evaluando la derivada tercera en x_1 y en x_2 vemos que $f'''(x_1) < 0$ y $f'''(x_2) > 0$, luego $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ son los puntos de inflexión de la gráfica de f.

3.7. Ejercicios

Los ejercicios señalados en rojo proporcionan resultados importantes que complementan la teoría.

1. Considera las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,,$$

para $x \in [0,1]$. Determina el recorrido de f y el de g. Obtén las fórmulas que definen a las funciones f^{-1} y g^{-1}. Traza en una misma figura las gráficas de las cuatro funciones.

[19] Si $n \geq 3$ es impar y se tiene

$$f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

pero

$$f^{(n)}(c) \neq 0,$$

entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f y, en ese punto, la tangente a la gráfica de f tiene pendiente $f'(c)$.

2. Dado un entero positivo fijo $n \geq 2$, demuestra que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(x\sqrt{k}) = \cos(x\sqrt{1}) + \cos(x\sqrt{2}) + \cdots + \cos(x\sqrt{n})$$

no es periódica.

3. Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} \ln(2xy) &= \ln x \, \ln y, \\ \ln(yz) &= \ln y \, \ln z, \\ \ln(2zx) &= \ln z \, \ln x. \end{aligned}$$

4. Determina el dominio de la función f dada por la fórmula

$$f(x) = \ln\{\ln[\ln(\ln x)]\}.$$

5. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de X. Demuestra que si f es acotada en $\big((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\big) \cap X$ para algún $\delta > 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = 0$.

6. Sean $a, b > 0$. Estudia la existencia del límite en 0 para las funciones definidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right],$$

($[\xi]$ designa la parte entera de ξ).

7. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \inf\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestra que no existe $\lim_{x\to 0} f(1/x)$ pero sí existe $\lim_{x\to 0} x f(1/x)$. Calcula este último límite.

8. Se considera la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} A + B\ln x & \text{si } x > 0, \\ C & \text{si } x = 0, \\ De^{3x} + \dfrac{E}{x^3} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde A, B, C, D y E son parámetros reales. Encuentra los valores de los parámetros para los que se verifica:

$$(1) \ \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \quad (2) \ \lim_{x\to 0} f(x) = 2, \quad (3) \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3, \quad (4) \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

9. Calcula los límites siguientes:

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x^4}{x^3-1}, \qquad (7)\ \lim_{x\to\pm 1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{5-x^2}},$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-x}, \qquad (8)\ \lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2-3x}{x^3+1},$$

$$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x+3}{3x-5}, \qquad (9)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}},$$

$$(4)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{3x^2+x}}, \qquad (10)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}},$$

$$(5)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-x, \qquad (11)\ \lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x},$$

$$(6)\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x, \qquad (12)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg} x}{\cos x\ \operatorname{sen}^2(2x)}.$$

10. Para las funciones siguientes, indica el dominio y los puntos de discontinuidad. ¿Puedes extender la definición de la función de modo que la función resultante sea continua en toda la recta real?

$$\text{(a) } f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}, \qquad \text{(b) } f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, \qquad \text{(c) } f(x)=\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}.$$

11. Sea $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{x^2-x}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

¿Cómo puede extenderse la definición de la función de modo que la función resultante sea continua en el intervalo cerrado $[0,1]$?

12. Estudia la continuidad de la siguiente función según los valores de a:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le a,\\ a+2 & \text{si } x>a.\end{cases}$$

13. Considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{si } 0<x\le 1,\\ ax^2+b & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Determina los valores de a y b para que f sea continua en $x=1$ y $f(2)=3$. Escribe la función resultante y dibuja su gráfica.

14. Halla a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si } 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\pi}{x} & \text{si } x \geq \pi. \end{cases}$$

15. Estudia la continuidad de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} \operatorname{sen}(\pi/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

16. Demuestra que la ecuación $\pi^x = e$ tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$.

17. ¿Puedes afirmar que la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real? Si es así, halla un intervalo en el cual se encuentre dicha raíz.

18. Demuestra que la función

$$f(x) = \frac{6}{2 + \operatorname{sen} x}$$

alcanza el valor 4 en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

19. Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continua. Demuestra que f tiene un punto fijo en $[a, b]$, es decir, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

20. Supongamos que $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica con periodo $p > 0$. Demuestra que existe c tal que

$$f\left(c + \frac{p}{2}\right) = f(c).$$

22. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Demuestra que, dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big).$$

23. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la siguiente relación (para todo x):

$$F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0.$$

Demuestra que F no es continua.

24. Halla la derivada de las siguientes funciones:

(1) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$,

(2) $f(x) = e^{-x}\ln(\cos x)$,

(3) $f(x) = \operatorname{sen}(7^{\sqrt{x}})$,

(4) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$,

(5) $f(x) = \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)}{\sqrt{x}}$,

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$,

(7) $f(x) = \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x}$,

(8) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} 2x)$,

(9) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$,

(10) $f(x) = \operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$,

(11) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$,

(12) $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}, x > 0$,

(13) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}, 0 < x < \pi$,

(14) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\cos x)$,

(15) $f(x) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+1})$,

(16) $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x\sqrt{1-x^2})$.

25. Sea f una función definida en un intervalo abierto al que pertenece a, derivable en a y tal que $f(a) = 0$. Demuestra que $|f|$ es derivable en a si, y sólo si, $f'(a) = 0$.

26. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}|x|$.

27. Demuestra que la función $f(x) = x|x-1|$ no es derivable en $x = 1$.

28. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1, \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x+1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

29. Halla los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx-1 & \text{si } x \leq 1, \\ 2(bx-1) & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

30. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x < 2, \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

según los valores del parámetro a.

31. Demuestra que si f es una función par y derivable, entonces la derivada f' es una función impar. Demuestra también que si g es una función impar y derivable, entonces g' es una función par.

32. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ en el intervalo $[-1, 1]$? ¿Existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$?

33. Determina a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 1, \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, c]$.

34. Considera la función $f(x) = e^x - x - 3$. Demuestra que f tiene un único cero en el intervalo $(0, +\infty)$.

35. Sean $0 < a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demuestra que si

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b},$$

entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

36. Demuestra que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

37. Sean a y b dos números reales tales que $0 < a < b$. Demuestra que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}\,.$$

38. Demuestra que

$$\ln(1 + x^2) \geq \frac{x^2}{1 + x^2}\ , x \in \mathbb{R}.$$

39. Demuestra la siguiente generalización de la *desigualdad de Bernoulli*: si $\alpha > 1$, entonces

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \text{para todo } \ x > -1,$$

verificándose la igualdad si, y sólo si, $x = 0$.

40. Supongamos que f es derivable en $(0, +\infty)$ y $f'(x) = O(x)$ cuando $x \to +\infty$. Demuestra que $f(x) = O(x^2)$ cuando $x \to +\infty$.

41. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right].$$

42. Encuentra las soluciones reales de la ecuación

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x.$$

43. Calcula los siguientes límites:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln x)^3 + 2x}$,

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$,

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{1/x} - 1)}{\ln x}$,

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} 3x)^{\operatorname{cotg} 2x}$,

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^x$,

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + 2\operatorname{tg}\frac{3}{x}\right)^x$,

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$,

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$,

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$,

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

(12) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$.

44. Demuestra que para $x > 0$, se verifica

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x\,.$$

45. Encuentra las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\frac{4x^2}{4x^2+1} = y,$$
$$\frac{4y^2}{4y^2+1} = z,$$
$$\frac{4z^2}{4z^2+1} = x.$$

46. Demuestra que para $x \geq 0$, se verifica
$$1 + x \leq e^x.$$
Como aplicación, demuestra que dados los números reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la *media geométrica*
$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
es menor o igual que la *media aritmética*
$$\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$
y que se verifica la igualdad si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

47. Demuestra que
$$x \ln x \geq x - 1 \quad \text{para } x > 0.$$
Utiliza esta desigualdad para probar que
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i$$
para $p_i > 0, q_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$. La igualdad se verifica si, y sólo si, $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

48. Encuentra las soluciones reales de la ecuación
$$\operatorname{sen}(\cos x) = \cos(\operatorname{sen} x).$$

49. Sea $0 < a < 1$. Resuelve
$$x^{a^x} = a^{x^a}$$
para números positivos x.

50. Encuentra el mínimo de
$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$
donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales del intervalo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

51. Encuentra los extremos relativos, los intervalos de monotonía, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad y de concavidad para las funciones siguientes:

(1) $f(x) = \sqrt{x} - x^2, x > 0,$

(2) $f(x) = |x^2 - 3|, -2 \leq x \leq 1,$

(3) $f(x) = (x-1)e^x,$

(4) $f(x) = xe^{-x^2},$

(5) $f(x) = x(\ln x)^2, x > 0,$

(6) $f(x) = x^2 \ln x, x > 0,$

(7) $f(x) = (|x| - 1)^2\, e^{-x},$

(8) $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x).$

52. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo equilátero de lado a.

53. Una pieza de alambre de longitud L se corta en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un círculo. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo sea mínima?

54. Halla la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente por una esquina de un pasillo de a metros de ancho a otro de b metros de ancho.

55. Determina el punto del suelo desde el cual se ve un segmento vertical AB bajo un ángulo máximo, siendo a y b las distancias desde el plano del suelo a los puntos A y B respectivamente.

56. Se quiere inscribir un cilindro en una esfera de radio R. Halla las dimensiones del cilindro si su volumen ha de ser máximo.

57. Las manecillas de un reloj miden 8 y 10 cm. Unimos sus extremos formando un triángulo. Determina el instante comprendido entre las 12:00 y las 12:30 para el cual el área del triángulo es máxima y halla dicha área máxima.

58. Un canal abierto, de fondo horizontal y cuyas paredes laterales tienen una inclinación de 45°, ha de tener una sección de 12 m^2. Determina las dimensiones de la sección para que con dicha área tenga un perímetro mínimo.

59. Sea f una función convexa en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Demuestra que para cualesquiera $a < b < c$ en I, se tiene

$$f(a-b+c) \leq f(a) - f(b) + f(c).$$

60. Sean $a, b > 0$ y n un entero positivo. Demuestra la desigualdad

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

61. Demuestra que

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}\,.$$

62. Sean $a, b, c > 0$. Demuestra la *desigualdad de Nesbitt*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}\,.$$

63. Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. Demuestra que

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}\,.$$

64. Sean a, b y c números reales positivos. Demuestra que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

65. Demuestra que si $x, y, z > 0$ y $x + y + z = 1$, entonces

$$64 \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

66. Demuestra que para cualquier triángulo con lados a, b, c y área A, se verifica la *desigualdad de Hadwiger-Finsler*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 4\sqrt{3}A.$$

67. *Desigualdad de Young.* Para $x, y > 0$ y $p, q > 0$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, demuestra que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

68. Sean $x_j > 0$ y $p_j > 0$ para $1 \leq j \leq n$ y $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$. Demuestra que

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j} \leq \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

verificándose la igualdad si, y sólo si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. ¿Qué nos dice esto cuando cada $p_j = \frac{1}{n}$?

69. Sea $x = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ con $x_1, \ldots, x_n \in (0, \pi)$. Demuestra que

(a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen} x_k \leq (\operatorname{sen} x)^n$, (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} x_k}{x_k} \leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n$.

70. Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa y tal que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Demuestra que la función g definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $(0, +\infty)$.