PRONTUARIO DE
GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Altura (de un triángulo)

Segmento rectilíneo perpendicular desde un vértice al lado opuesto.

Área (de un círculo y de un sector circular)

El área de un círculo de radio r es πr^2. El área de un sector circular (porción de un círculo limitada por dos radios y el arco de circunferencia que ellos determinan) es $\frac{1}{2}r^2\alpha$, donde r es el radio de la circunferencia y α el ángulo que forman los dos radios expresado en radianes.

Área (de un triángulo)

El triángulo ABC con lados a, b, c opuestos a los ángulos A, B, C y respectivas alturas h_a, h_b, h_c tiene área $[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, o bien $[ABC] = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ca \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$, o bien $[ABC] = \frac{1}{2}(a+b+c)r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita (la circunferencia que está dentro del triángulo y es tangente a los lados), o bien $[ABC] = \frac{abc}{4R}$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita (la circunferencia que pasa por los tres vértices).

Baricentro

El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas. Su distancia a cada vértice es $2/3$ de la longitud de la mediana correspondiente. Desde el punto de vista de la física, el baricentro de un triángulo es el centro de gravedad, por eso suele designarse con la letra G.

En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son puntos en el plano o en el espacio, su baricentro G es el único punto para el cual

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}\,.$$

Bisectriz

Bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del mismo y lo divide en dos ángulos iguales.

Teorema de la bisectriz

En un triángulo ABC, sea D un punto del lado BC tal que el segmento AD biseca $\angle BAC$. Entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}\,.$$

Ceva (Teorema de)

Sean AA', BB' y CC' tres cevianas de un triángulo ABC. Entonces AA', BB', CC' son concurrentes si, y sólo si,

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

En el teorema de Ceva, las razones son todas *con signo*. Si el punto de concurrencia está dentro del triángulo, entonces todas las razones son positivas; si el punto de concurrencia está fuera del triángulo, entonces dos de las razones serán negativas.

Ceviana

En un triángulo, segmento rectilíneo que une un vértice con un punto del lado opuesto.

Cíclico (Polígono)

Un polígono que puede inscribirse en una circunferencia. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si, y sólo si, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D\,(= 180°)$, lo que equivale a $PA \cdot PC = PB \cdot PD$, donde P es el punto de intersección de las diagonales.

Circuncentro

Centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo. El circuncentro de un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices de sus lados.

Convexa (Envolvente)

La envolvente convexa de un conjunto S (en el plano o en el espacio) es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S. La envolvente convexa es un conjunto convexo y por tanto, es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S.

Convexo (Conjunto)

Es un conjunto (en el plano o en el espacio) que contiene al segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.

Cosenos (Teorema de los)

En un triángulo ABC, sean a, b, c las longitudes de los lados opuestos respectivamente a los ángulos A, B, C. Entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Euler (Fórmula de)

Sean O e I el circuncentro y el incentro, respectivamente, de un triángulo con radio de la circunferencia circunscrita R y radio de la circunferencia inscrita r. Entonces

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Euler (Recta de)

En cualquier triángulo, el ortocentro H, el baricentro G y el circuncentro O están siempre alineados, y $GH = 2\,OG$. La recta en la que están situados estos tres puntos se llama *recta de Euler* del triángulo.

Herón (Fórmula de)

El área de un triángulo ABC con lados de longitudes a, b, c es

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = (a+b+c)/2$ es el semiperímetro del triángulo.

Supongamos que P, Q, R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados AB, BC, CA, respectivamente. Sea $AP = x$, $BQ = y$, $CR = z$. Entonces $AR = x$, $BP = y$, $CQ = z$, y

$$x = s-a,\ y = s-b,\ z = s-c,\ x+y+z = s.$$

Entonces, la fórmula de Herón se escribe así:

$$[ABC] = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Incentro

Centro de la circunferencia inscrita a un triángulo. El incentro de un triángulo es el punto de intersección de las bisectrices de sus ángulos.

Mediana (de un triángulo)

Segmento rectilíneo que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Mediatriz

Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo y que pasa por su punto medio.

Menelao (Teorema de)

En un triángulo ABC, sean X, Y, Z puntos en las rectas BC, CA, AB, respectivamente. Entonces X, Y, Z están alineados si, y sólo si,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

En el teorema de Menelao, las razones son todas *con signo*. Si la recta que contiene X, Y, Z atraviesa el interior del triángulo, entonces una de las razones es negativa; en otro caso, todas las razones son negativas.

Ortocentro

El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

Potencia de un punto

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio R y P un punto cuya distancia al centro de la circunferencia es d. La potencia de P con respecto a $\mathcal{C}$ es el número $d^2 - R^2$.

Teorema de la potencia de un punto

Para cualesquiera dos puntos A y B de la circunferencia alineados con P, se tiene

$$PA \cdot PB = d^2 - R^2.$$

Las longitudes se consideran *con signo*.

Ptolomeo (Teorema de)

En un cuadrilátero convexo $ABCD$, se verifica la *desigualdad de Ptolomeo*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

La igualdad se verifica si, y sólo si, el cuadrilátero es cíclico (teorema de Ptolomeo).

Senos (Teorema de los)

En un triángulo ABC, sean a, b, c las longitudes de los lados opuestos respectivamente a los ángulos A, B, C y sea R el radio de la circunferencia circunscrita. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Simson (Teorema de)

Sea ABC un triángulo y P un punto cualquiera de su circunferencia circunscrita. Los puntos de intersección de las rectas que pasan por P y son perpendiculares a los lados del triángulo ABC, están alineados. La recta que los contiene se llama *recta de Simson* del punto P respecto del triángulo ABC.

Trigonometría (Fórmulas de)

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Fórmulas de adición y sustracción:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \, \cos\beta \pm \cos\alpha \, \operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \, \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \, \operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \, \operatorname{tg}\beta}.$$

Fórmulas del ángulo-doble:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\alpha) &= 2 \operatorname{sen}\alpha \, \cos\alpha \\
&= \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}, \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \\
&= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}, \\
\operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo-triple:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(3\alpha) &= 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha,\\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(3\alpha) &= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo-mitad:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2},\\
\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}.
\end{aligned}$$

Fórmulas de suma-a-producto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta}.
\end{aligned}$$

Fórmulas de diferencia-a-producto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta}.
\end{aligned}$$

Fórmulas de producto-a-suma:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta &= \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta),\\
2\cos\alpha\,\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),\\
2\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta &= -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$