

El eminente matemático español Miguel de Guzmán Ozámiz (1936-2004) mostró durante toda su vida profesional un profundo interés y preocupación por la educación matemática. Las ideas que aquí te ofrezco proceden de sus libros *Aventuras matemáticas* y *Para pensar mejor* (ambos publicados en su 2ª edición por Pirámide, en 2006), cuya lectura te recomiendo vivamente.

---

# UN MODELO PARA LA OCUPACIÓN CON PROBLEMAS

A continuación se presenta un modelo posible al que se puede tratar de ajustar la ocupación con problemas de naturaleza matemática. En él se señalan algunos procesos básicos típicos del pensamiento matemático. Ahora bien, no pienses que estos procesos sólo son buenos para resolver problemas matemáticos. En líneas generales, cambiando lo que hay que cambiar, los puedes utilizar también para resolver problemas de la vida ordinaria.

## 1. Familiarízate con el problema

Antes de hacer, trata de entender. Se cae de su peso, pero a veces, por apresurados que somos o por prisas que nos imponen desde fuera, nos ponemos inmediatamente en camino... hacia ninguna parte. Cuando te propongan un juego, un problema, un rompecabezas, que todo viene a ser lo mismo, debes asegurarte de que entiendes a fondo la situación: las reglas del juego, los datos, y el posible lugar que tiene cada una de sus piezas y cómo se engarzan unas con otras. Con paz, con tranquilidad, a tu ritmo. Juega con la situación un rato, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdete el miedo. Aunque al principio te parezca otra cosa, ganarás tiempo.

## 2. Búsqueda de estrategias

En esta etapa del proceso debes tratar de hacerte con un montón de posibles modos de ataque del problema. Se trata de que fluyan de tu mente muchas ideas, aunque en principio puedan parecerte totalmente descabelladas. Las ideas más estrafalarias pueden resultar después las mejores. Como dicen los técnicos del *brainstorming*<sup>1</sup> ("torbellino de ideas", una de las técnicas de creatividad), cantidad engendra calidad. Todavía no vas a poner en práctica ninguna. Para procurar que fluyan muchas ideas, es necesario que actúes con espontaneidad, que aplaces el juicio crítico sobre ellas, no se trata ahora de decidir si una es mejor que otra. No te importe

---

<sup>1</sup> En 1953, Alex Osborn publicó un libro, *Applied Imagination*, en el que introducía los principios de la técnica del *brainstorming*. La técnica obtuvo inmediatamente una magnífica acogida en el mundo empresarial norteamericano. El *brainstorming* tiene por finalidad ayudar a un grupo de personas que se enfrentan colectivamente con un problema bien definido, a producir un buen número de ideas valiosas de las que después habrá que entresacar las más adecuadas. Osborn propone que el grupo actúe según las cuatro reglas siguientes, bajo la orientación de un moderador que vigile su estricto cumplimiento: 1) Aplazamiento de juicio; 2) Espontaneidad de ideas; 3) Cantidad conduce a calidad; 4) Perfeccionamiento de las ideas que surgen. El método del *brainstorming* consigue, bien empleado, desarrollar un espíritu de cooperación, un contagio de entusiasmo en el grupo que rompe las posibles inhibiciones de sus componentes, estimulando a todos a participar en la resolución del problema con la confianza que proporciona la aceptación inicial sin críticas de las ideas propuestas. Las cuatro reglas del *brainstorming*, con la interpretación adecuada, son también válidas para el proceso individual de producción de ideas ante un problema.

nada que a primera vista puedan parecer ridículas. ¡Ya veremos si lo son! Para facilitar este flujo de ideas posibles aquí tienes unas cuantas pautas que puedes ensayar. Estoy seguro de que tu experiencia irá aumentando la lista con sugerencias útiles distintas que *a ti* te servirán mejor.

- *Busca un problema semejante.* ¿A qué te recuerda la situación? ¿No presientes que tal vez sea como aquella otra?
- *Empieza por lo fácil.* El problema es complicado tal vez porque hay muchos elementos. ¿Por qué no lo haces más fácil tú mismo? Fabrícate uno semejante, con menos piezas. Tal vez con él saltará en ti la chispa que te sirva para resolver el más complicado.
- *Experimenta y busca regularidades, pautas.* La experiencia es la madre de la ciencia, también de la matemática. Los grandes teoremas de la historia de la matemática son fruto de muchos experimentos, más o menos locos. También la matemática procede por ensayo y error, otro ensayo y otro error...
- *Hazte un esquema, una figura, un diagrama.* Somos muchos los que pensamos mejor con imágenes que con palabras. Una imagen vale más que mil palabras.
- *Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.* Muchos problemas se enrevesan endiabladamente con una notación inadecuada y se vuelven transparentes como el agua en cuanto tomas los ejes adecuados, los nombres apropiados de los elementos... La notación mejor es la que se presta mejor a la expresión de las simetrías, la que expresa abreviadamente la función misma de los elementos que representa.
- *Explota la simetría.* Son muchos los problemas que se resuelven mediante apoyo en la simetría que presentan de forma expresa o velada. Piensa en esta posibilidad en tu caso particular.
- *Inducción.* Esta estrategia es una verdadera joya del pensamiento matemático, increíblemente sencilla y potente a la vez.
- *Supongamos que no... ¿a dónde nos lleva?* Esto es el argumento que se llama indirecto o por reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*, en latín). Quieres demostrar que una situación se comporta de la forma A. Empiezas suponiendo que no se comporta así. Vas deduciendo y razonando correctamente y tu cadena de razonamientos te conduce a que lo blanco es negro. Entonces es claro que tu punto de partida, no A, tiene que ser falso. Así, la situación inicial tiene que ser A.
- *Supongamos el problema resuelto.* Esta táctica te será de especial utilidad en los juegos y problemas en los que tengas que construir alguna figura, algún elemento que deba estar relacionado de forma determinada por las reglas del juego, con otros que te den. Al imaginarte el problema resuelto, construyendo de forma aproximada, a ojo, cómo debe ir la cosa, tienes la oportunidad de explorar las relaciones entre los elementos dados y los que buscas y así, al aproximarlos, puede saltar la chispa que te haga ver claro cómo debes proceder a partir de los datos.

### 3. Lleva adelante tu estrategia

Tienes ya unas cuantas estrategias posibles para atacar tu problema, acumuladas en la etapa anterior. Lo más aconsejable es que tengas delante una lista escrita de todas ellas, sin olvidar las que en un principio te parecieron más absurdas. Lo mejor sería que ahora, para incubar tus

ideas y esperar la *iluminación*, te dedicaras un buen rato a otra actividad muy diferente, puede ser incluso una de tus aficiones preferidas. Deja que tu subconsciente amase a su gusto el revoltijo de ideas que le has preparado...

Has vuelto al problema. Ahora llega el momento de juzgar cuáles de las estrategias que tienes en tu papel tienen más probabilidades de éxito. Tal vez la idea que antes parecía tan descabellada ahora te parezca precisamente la mejor.

- *Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior.* Una a una. No las mezcles en un principio. Trabaja con decisión y confianza en ti mismo, ordenadamente, con paz, sin aturullamientos. Si al poner en práctica una idea se te ocurre otra totalmente inconexa con ella que piensas que puede ayudarte, ¡no la deseches! ¡Apúntala en tu lista! Pero tampoco dejes desviar tu atención de la que ahora estás llevando adelante.
- *No te arrugues fácilmente. Pero tampoco te emperres demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.* No abandones fácilmente una idea que te pareció buena, pero debes estar preparado para reconocer que tal vez su bondad fue un espejismo que resulta claro al adentrarte más en ella. Si ves que no te acerca nada a la solución, ensaya otra. Actúa con flexibilidad. Recuerda: ensayo y error, ensayo y error...
- *¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.* No te engañes a ti mismo. Las medias ideas y medias soluciones sirven de poco. Cerciórate bien de que has llegado a la solución.

#### **4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él**

¿Has resuelto tu problema? ¡Enhorabuena! ¿O bien lo has trabajado durante horas, has acabado por no resolverlo y has decidido mirar la solución? ¡Enhorabuena también! Si has pasado un buen rato interesado, entretenido, intentando, y finalmente has decidido mirar cómo se resuelve, la experiencia puede ser incluso más satisfactoria que en el primer caso. Muchas veces aprende uno mucho más y más profundamente de los problemas intentados con interés y tesón... y no resueltos, que de los que uno resuelve casi a primera vista. Lo que hace falta en todo caso ahora es que reflexiones sobre todo el proceso durante un rato para darte a ti mismo una idea de cuáles fueron tus dificultades, los callejones sin salida en los que te metiste y por qué..., y cómo podrías proceder en el futuro para resolver mejor otros problemas, semejantes o no. Esta etapa del proceso puede ser la más provechosa de todas... y la que más a menudo olvidamos realizar.

- *Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste? ¿Ibas bien encaminado desde el principio? ¿Habías intuido la estrategia correcta en la etapa 2? O bien, ¿por qué no se te ocurrió pensar en ella? ¿Qué es lo que te engañó al escoger estrategias? ¿Cuál fue la chispa que te hizo intuir que iba a ir bien?*
- *Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.* No te contentes con ser el afortunado a quien le sonó la flauta por casualidad. Si no te exigés más, la mayor parte de las veces serás más desafortunado. Por definición, las casualidades son raras.

- *Mira a ver si encuentras un camino más simple.* A la sencillez se tarda en llegar, porque es fruto de la experiencia. Poco a poco nos iremos perfeccionando si permanentemente buscamos la sencillez.
- *Mira hasta dónde llega el método que has seguido para ver si lo puedes usar en otras circunstancias.* Tal vez puedas inventar tú mismo otros problemas más interesantes que se resuelvan con los mismos procedimientos.
- *Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.* Con experiencias repetidas como ésta tal vez puedas hacer un diagnóstico de tu propio estilo de conocimiento. Cada uno tiene el suyo peculiar. ¿Cómo es tu pensamiento? ¿Visual o analítico? ¿Dependes mucho de la expresión verbal o de la fórmula escrita? ¿Tiendes a pensar en círculos, obsesivamente? ¿Tiendes al compromiso con una sola idea, sin flexibilidad? ¿Cómo podrías fomentar la fluencia espontánea de ideas variadas, originales, novedosas? Si lo consigues, te situarás en una posición beneficiosa al saber en qué clases de problemas te puedes ocupar con ventaja y en cuales tu probabilidad de éxito no es tan grande. Sabrás cómo abordar problemas, no ya matemáticos, sino de toda clase, aproximándote a ellos tratando de sacar el mejor partido posible de las características de tu propio estilo.

## **EL EXAMEN DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ELABORACIÓN Y ANÁLISIS DE PROTOCOLOS**

Si pretendemos mejorar nuestros procesos de pensamiento en el tratamiento de problemas de forma eficaz es absolutamente necesario disponer de técnicas que nos permitan examinarlos a fondo, compararlos con los modelos que nos fijamos como deseables, para así poder señalar nuestras líneas de acción y detectar nuestros progresos hacia el objetivo de crear en nosotros hábitos eficientes.

Cuando se nos propone un problema que atrae nuestro interés, sucede muy frecuentemente que nos absorbe por completo por un largo rato y que, una vez resuelto o no, lo dejamos a un lado sin preocuparnos por reflexionar en ningún momento, ni a lo largo del proceso ni después de él, sobre el modo como hemos actuado.

Naturalmente, si nos enfrentamos repetidas veces con problemas semejantes a él iremos eliminando de nuestros procedimientos pasos inútiles, callejones sin salida, defectos en los que caímos las veces anteriores y así, de modo espontáneo, nuestro proceso se va depurando hasta alcanzar un grado de eficacia satisfactorio. Probablemente el virtuosismo de muchos expertos se debe a su capacidad de intuir rápidamente y con pocos ejemplos, aun sin hacer un esfuerzo reflejo, dónde se encuentra el camino adecuado y más directo entre la maraña de posibilidades que se presentan ante un problema verdaderamente intrincado. Así, muy ordinariamente, el experto es incapaz de señalar explícitamente, tras la resolución de un problema, el porqué de las múltiples elecciones que ha tenido que hacer para dar con ella. Pero para quien desea asimilar a fondo los mecanismos de reacción de los expertos es extraordinariamente útil ejercitarse no sólo en resolver muchos problemas, sino también en examinar sus propios procesos mentales al tiempo que lo hace.

Para lograr establecer el hábito de analizar nuestros procesos de pensamiento, inicialmente resulta útil el siguiente esquema. Nuestra primera tarea consistirá en señalar un método para elaborar el *protocolo del proceso*, es decir, el acta que dé constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación con el problema. Luego será necesario estudiar cómo se realiza el *análisis del protocolo* a fin de conocer a fondo nuestras formas de proceder, nuestras tendencias, nuestras virtudes y nuestros errores. Tras el análisis habremos de realizar una *evaluación del proceso*, comparando nuestra realización con otras posibles formas de proceder, estudiando cómo y por qué hemos llegado a la solución o bien cómo y por qué no lo hemos logrado, dónde han estado nuestros aciertos y dónde nuestros despistes. Y finalmente, tras la diagnosis viene bien establecer el *tratamiento*, es decir, tras la comparación de lo que hemos hecho con lo que decidamos que deberíamos haber hecho, tal vez posiblemente tras cotejar nuestra actuación con el análisis del protocolo de un experto en el tratamiento del mismo problema, podremos determinar los puntos en los que debemos insistir para proceder mejor en lo sucesivo.

## LA REALIZACIÓN DEL PROTOCOLO DEL PROCESO

Durante nuestra ocupación mental con un problema ocurren muchas cosas interesantes. Normalmente, cuando anotamos algo, señalamos nuestros cálculos, los esquemas, figuras o diagramas que pensamos que nos van a ayudar a resolverlo. Pero para lo que aquí verdaderamente nos interesa, hay muchos otros fenómenos que, a menos que hagamos un poderoso esfuerzo, nos pasarán desapercibidos.

El mero *borrador* de nuestros intentos sucesivos de acercamiento a la solución no es el protocolo del proceso. Y mucho más lejos de él está, naturalmente, la solución *en limpio* que podamos elaborar tras nuestro trabajo.

El protocolo ideal del proceso debería hacerme capaz de reproducir, para mi estudio, cuanto ha pasado por mi mente a lo largo de él, en lo que se refiere a:

- Lo que he ido realizando.
- Lo que he ido pensando.
- Los sentimientos y situaciones afectivas por las que he ido pasando.

El protocolo ideal del proceso debería poder incluir los movimientos subconscientes que me han ayudado en mi camino y los que me han desviado de él.

Está claro que aún no se ha encontrado el modo de registrar todo este mundo mental tan complejo y tan profundo. A falta de él, nos hemos de contentar con registrar nosotros mismos con brevedad y con la mayor fidelidad posible sus rasgos más destacados para después someterlos a un análisis conveniente.

Una técnica concreta que nos puede ayudar en la realización del protocolo consiste en ir trabajando en borrador con orden, sin corregir nada de él, ocupándonos con ahínco, por supuesto, de resolver nuestro problema, pero procurando también señalar brevemente los aspectos de la situación de nuestro ánimo que inciden de algún modo en el proceso.

Ante un problema que llega a enfrascarte a fondo observarás que tus anotaciones sobre el contenido lo llenan todo y que el otro aspecto, que para nuestros objetivos es esencial, ha quedado totalmente relegado. Sólo son reflejados los pasos técnicos de la solución del problema.

Para contrarrestar esta tendencia se puede acudir a la ayuda de un reloj que cada cierto intervalo de tiempo, por ejemplo cada diez minutos, nos recuerde que debemos echar una mirada a los otros aspectos del proceso, tales como nuestro estado de ánimo, las vueltas y revueltas de nuestro pensamiento, la fase del proceso en que nos encontramos, según detallábamos antes (familiarización, búsqueda de estrategias, selección, realización, verificación,...).

¿Qué anotar? Se trata de dejar señalados los elementos que nos parezcan útiles para realizar el análisis del proceso que indicaremos después. Fundamentalmente, el color afectivo de mi toma de posición ante el problema, la fase del proceso en que me encuentro, mi estado de aburrimiento, desesperación, interés, entusiasmo..., los cambios en el tipo de actividad mental ante el problema..., los orígenes de las posibles ideas que van apareciendo en mi mente...

## **EL ANÁLISIS DEL PROTOCOLO**

Una vez realizado el protocolo se trata, en primer lugar, de analizarlo, es decir de distinguir a través de él las diversas etapas por las que el proceso ha transcurrido, de ir señalando las motivaciones que explican el paso de cada una a la siguiente.

Si el protocolo ha sido bien realizado, de acuerdo con las directrices que se han dado antes, se observarán en él dos tipos de anotaciones fáciles de distinguir. Por un lado las que corresponden al contenido del proceso, es decir, las cábalas, las cuentas, las figuras, y por otra parte las notas que resultan de las observaciones que, a intervalos determinados, ha hecho el propio autor del protocolo. Ambos tipos de anotaciones son muy interesantes y se trata, en esta fase de análisis, de enmarcar el sentido de cada una de ellas dentro del propio proceso antes de pasar a su evaluación. Es decir, hemos de procurar, a través de lo que leemos, obtener una idea clara de la marcha del proceso en sí mismo, preguntándonos a propósito de cada una de las partes en que hemos dividido el protocolo:

- *¿A qué etapa del proceso corresponde? ¿Se trata de la fase inicial, de familiarización con el problema?, ¿pertenece a la búsqueda de estrategias?, ¿se está tratando de realizar alguna estrategia ya seleccionada?, ¿se está revisando el proceso?, ¿se está tratando de llegar a tomar una decisión, de cambiar la orientación de su actividad?*
- *¿Cómo se relaciona la acción contemplada aquí con el resto de la actuación?, es decir, ¿cómo se enlaza con lo que precede y qué influjo tiene sobre lo que sigue?, ¿qué grado de importancia tiene en el proceso?*
- *¿Se pueden señalar los momentos más decisivos en el éxito o fracaso en la resolución del problema?*

Estas son algunas preguntas que uno se puede hacer, entre otras muchas, a fin de encontrar el sentido de los movimientos mentales que ha ido realizando el autor del protocolo.

## **EVALUACIÓN DEL PROCESO**

Tras el examen de lo que el proceso ha sido en cada una de sus partes hay que compararlo con las que consideramos formas eficaces de proceder, a fin de determinar si se ajusta a ellas convenientemente o, por el contrario, se ha actuado de forma desacertada en alguna ocasión.

Esta comparación, en lo que se refiere a los rasgos globales del proceso, es decir, al modo de familiarización inicial, selección de estrategias, trabajo a fondo con alguna de ellas, revisión..., se puede hacer muy provechosamente si se dispone de uno o más protocolos relativos al mismo problema realizados por expertos. En ellos, tras un estudio a fondo, se puede observar la efectividad de ciertas formas de proceder.

En lo que respecta a la evaluación de los detalles de nuestro propio protocolo en sí mismo, el protocolo de un experto no ayuda mucho, pues difícilmente habrá pasado por las mismas circunstancias concretas a lo largo de su ocupación con el mismo problema.

Por ello, tanto por la posible ausencia de protocolos de expertos como por la necesidad de evaluar nuestros propios procesos en sí mismos, es útil disponer de algunas normas o recomendaciones valiosas y aplicables en gran número de casos, como las presentadas en el modelo para la ocupación con problemas expuesto en la primera parte de este documento. A su luz, podremos inspeccionar el protocolo en cuestión y determinar los puntos positivos y negativos del proceso con mayor facilidad.

## **DIAGNOSIS Y TRATAMIENTO**

De la evaluación de nuestro protocolo fácilmente se desprenden lecciones valiosas. Al hacernos conscientes de nuestros aciertos, reforzamos los hábitos que nos han conducido a ellos y además vamos adquiriendo un mejor conocimiento de nuestras capacidades específicas y de los campos concretos a los que nos podemos aplicar con más éxito. De nuestros desaciertos también podemos obtener un valioso conocimiento de nosotros mismos que nos conducirá a poner particular atención para corregir nuestros hábitos perjudiciales e improductivos, reemplazándolos por otros más eficaces.