

# Tema 7

## Introducción a las ecuaciones diferenciales

### 7.1. Introducción

Se entiende por *ecuación diferencial* cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Muchas leyes de la naturaleza, en física, química, biología o astronomía, encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo abundantes sus aplicaciones en la propia matemática, especialmente en geometría, y también en ingeniería, economía y en otros muchos campos de las ciencias aplicadas.

Es fácil comprender la razón que subyace tras una tan amplia gama de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Recordemos que si  $y = f(x)$  es una función dada, su derivada se puede interpretar como el ritmo de cambio de  $y$  con respecto a  $x$ . En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionadas entre sí por medio de los principios científicos básicos que gobiernan dicho proceso. Al expresar tal conexión en símbolos matemáticos el resultado es con frecuencia una ecuación diferencial.

El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la aceleración  $a$  de un cuerpo de masa  $m$  es proporcional a la fuerza total  $F$  que actúa sobre él con  $1/m$  como constante de proporcionalidad, de modo que  $a = F/m$ , o sea,

$$ma = F. \quad (1)$$

Supongamos, por ejemplo, que un cuerpo de masa  $m$  cae bajo la sola influencia de la gravitación. En tal caso, la única fuerza que actúa sobre él es  $mg$ , donde  $g$  denota la aceleración de la gravedad<sup>1</sup>. Si  $y$  es la altura medida hacia abajo desde una cierta posición prefijada, entonces su velocidad  $v = dy/dt$  es el ritmo de cambio de su posición y su aceleración  $a = dv/dt = d^2y/dt^2$  es el ritmo de cambio de la velocidad. Con esta notación, (1) se convierte en

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg,$$

o sea,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g. \quad (2)$$

Si alteramos la situación, admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es  $mg - k(dy/dt)$ , y (1) pasa a ser

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup> $g$  se puede considerar como constante sobre la superficie de la tierra en la mayoría de las aplicaciones, y es aproximadamente  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

Las ecuaciones (2) y (3) son las ecuaciones diferenciales que expresan los atributos esenciales de los dos procesos físicos bajo consideración.

Como ejemplos adicionales de ecuaciones diferenciales podemos citar:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad (4)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad (7)$$

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + p(p + 1)y = 0, \quad (8)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (9)$$

En cada una de las ecuaciones (4) a (9) la variable dependiente es  $y$ , mientras que la variable independiente es  $x$  o  $t$ . Las letras  $k$ ,  $m$  y  $p$  representan constantes. Una *ecuación diferencial ordinaria* es una en la que sólo existe una variable independiente, de manera que todas las derivadas que aparecen en ella son derivadas ordinarias. Todas las que acabamos de citar son ordinarias. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que contiene. Las ecuaciones (4) y (6) son de primer orden; las ecuaciones (5), (7), (8) y (9) son de segundo orden. Las ecuaciones (8) y (9) son clásicas, y se conocen como *ecuación de Legendre* y *ecuación de Bessel*, respectivamente.

Una *ecuación diferencial en derivadas parciales* es una ecuación que hace intervenir más de una variable independiente, de modo que las derivadas que aparecen en ella son derivadas parciales. Por ejemplo, si  $w = f(x, y, z, t)$  es una función del tiempo y de las tres coordenadas rectangulares de un punto del espacio, las que siguen son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0, \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial w}{\partial t}, \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

También estas ecuaciones diferenciales son clásicas. Se trata, respectivamente, de las *ecuaciones de Laplace, del calor y de ondas*. Cada una de ellas posee un importante significado en física teórica, y su estudio ha estimulado el desarrollo de muchas ideas matemáticas relevantes. En general, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aparecen en la mecánica de los medios continuos, en problemas relacionados con campos eléctricos, dinámica de fluidos, difusión y movimientos ondulatorios. Su teoría es muy diferente de la de las ecuaciones diferenciales ordinarias y notablemente más difícil en casi todos sus aspectos.

## 7.2. Soluciones y problemas de valores iniciales

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden  $n$  es una expresión del tipo

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad (10)$$

o usando la notación con primas para las derivadas

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

donde  $F$  es una función real de  $1 + (n + 1)$  variables reales. La variable independiente  $x$  pertenece a un intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Suele resultar sencillo comprobar que una función dada  $y = y(x)$  es solución de una ecuación (10). Basta calcular las derivadas de  $y(x)$  y mostrar que  $y(x)$  y sus derivadas, cuando se sustituyen en la ecuación (10), la transforman en una identidad para todo  $x \in I$ . Se dice entonces que  $y(x)$  es una *solución* de la ecuación (10) en el intervalo  $I$ . Así vemos que

$$y = e^{2x}, \quad y = e^{3x}$$

son ambas soluciones de la ecuación de segundo orden

$$y'' - 5y' + 6y = 0;$$

y más generalmente que

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

también lo es para toda elección de las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . Con frecuencia aparecen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas implícitamente, y a veces es difícil o incluso imposible expresar la variable dependiente explícitamente en términos de la variable independiente.<sup>2</sup> Así, por ejemplo,

$$xy = \ln y + c \quad (11)$$

es una solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

para todo valor de la constante  $c$ , como podemos comprobar sin más que derivar (11) y reordenar el resultado. Estos ejemplos ilustran también el hecho de que una solución de una ecuación diferencial contiene habitualmente una o más constantes arbitrarias, tantas como indique el orden de la ecuación.

Generalmente ningún fenómeno queda totalmente descrito mediante una ecuación diferencial. La descripción se debe completar con la ayuda de ciertas condiciones sobre la solución.

---

<sup>2</sup> Se dice que una relación  $G(x, y) = 0$  es una *solución implícita* de la ecuación (10) en el intervalo  $I$  si define una o más soluciones explícitas en  $I$ .

**Teorema de la función implícita.** Sea  $G(x, y)$  una función con derivadas parciales continuas en el rectángulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$  que contiene al punto  $(x_0, y_0)$ . Si  $G(x_0, y_0) = 0$  y  $G_y(x_0, y_0) \neq 0$  entonces existe una función derivable  $y = \varphi(x)$  definida en cierto intervalo  $I = (x_0 - h, x_0 + h)$  que satisface  $G(x, \varphi(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ .

**Definición 7.2.1** Se llama **problema de valores iniciales** de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  a lo siguiente:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

donde  $x_0 \in I$  e  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  son constantes dadas.

La ecuación diferencial general de primer orden es el caso especial de (10) que corresponde a tomar  $n = 1$ :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (12)$$

Esperaríamos normalmente que una tal ecuación tenga solución y que esta solución contenga una constante arbitraria. Sin embargo,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

carece de soluciones reales, y

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

sólo admite la solución  $y = 0$ , la función nula, (que no contiene constante arbitraria alguna). Situaciones como éstas plantean cuestiones difíciles de índole teórica sobre la existencia y naturaleza de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Por simplicidad, supongamos que es posible despejar  $dy/dx$  en (12):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (13)$$

A continuación establecemos un teorema de existencia y unicidad para problemas de valor inicial de primer orden.

**Teorema 7.2.1** Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

supongamos que  $f$  y  $\partial f/\partial y$  son funciones continuas en un rectángulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

que contiene al punto  $(x_0, y_0)$ . Entonces el problema de valor inicial tiene una solución única en un intervalo  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , donde  $h$  es un número positivo.

## Ejemplos

(1) El problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3, \quad y(1) = 6,$$

tiene solución única. En efecto, en este caso  $f(x, y) = x^2 - xy^3$  y  $\partial f/\partial y = -3xy^2$  son funciones continuas en cualquier rectángulo que contenga al punto  $(1, 6)$  y puede aplicarse el teorema anterior. Existe una solución única en un intervalo de la forma  $(1 - h, 1 + h)$ , donde  $h$  es un número positivo.

(2) Para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0,$$

¿existe una solución única? En este caso  $f(x, y) = 3y^{2/3}$  y  $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3}$ . La función  $\partial f/\partial y$  no está definida en los puntos de la forma  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Por consiguiente, no existe un rectángulo que contenga a  $(2, 0)$  en el cual  $\partial f/\partial y$  sea continua. Así pues no podemos utilizar el teorema 7.2.1 para determinar si el problema de valor inicial tiene o no solución única. Observemos que  $\varphi_1(x) = 0$  (función nula) y  $\varphi_2(x) = (x - 2)^3$  son soluciones. Por consiguiente el problema de valor inicial no tiene solución única.

El teorema de existencia y unicidad 7.2.1 tiene gran importancia, pero no dice nada sobre la naturaleza de la solución. Por razones prácticas se puede requerir conocer el valor de la solución en un punto determinado, los intervalos en los cuales la solución es creciente o los puntos en donde la solución alcanza un valor máximo. Obviamente, conocer una representación explícita (una fórmula) de la solución sería una ayuda considerable para responder a estas preguntas. Sin embargo encontrar una fórmula de ese tipo resulta en muchas ocasiones difícil o incluso imposible.

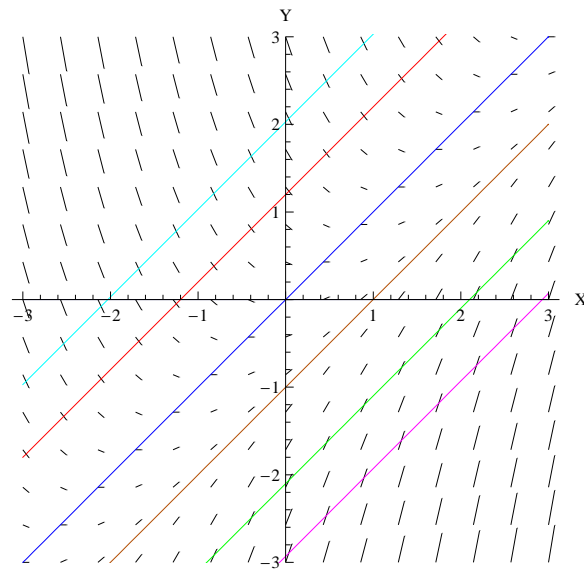
Una técnica útil para visualizar las soluciones de la ecuación diferencial (13) consiste en trazar el campo de direcciones de la ecuación. Observemos que la ecuación (13) especifica una pendiente en cada punto del plano donde  $f$  está definida; es decir, proporciona la dirección que una curva solución de la ecuación debe tener en cada punto. La gráfica de una solución, llamada aquí curva solución, recibe también el nombre de *curva integral*. La representación gráfica de las direcciones asociadas con varios puntos del plano se llama *campo de direcciones* de la ecuación diferencial. Puesto que el campo de direcciones proporciona el “flujo de soluciones”, facilita el trazado de cualquier curva solución particular (tal como la curva solución de un problema de valor inicial).

Una manera sistemática de construir el campo de direcciones de la ecuación (13) consiste en determinar primero todos los puntos del plano que están asociados a la misma pendiente  $c$ ; esto es todos los puntos donde  $f(x, y) = c$ . Dicho lugar geométrico se denomina *isoclima* para la pendiente  $c$ . Una vez que se han determinado las isoclinas, a lo largo de ellas (en la práctica sólo unas cuantas) se dibujan pequeños segmentos con pendiente igual al valor correspondiente de  $c$ . Este procedimiento se llama *método de las isoclinas*.

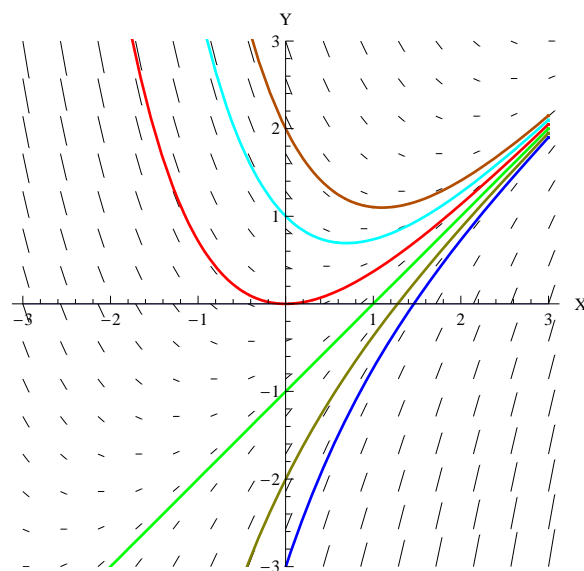
## Ejemplo

Para la ecuación  $\frac{dy}{dx} = x - y$ , las isoclinas son las rectas  $x - y = c$ . En la Figura 7.1 se han trazado seis isoclinas y los correspondientes segmentos con la pendiente apropiada a lo largo de cada una de ellas. Se muestran unos cuantos segmentos más que junto con los anteriores proporcionan, con un buen grado de refinamiento, el campo de direcciones de la ecuación. Para  $c = 0$  se obtiene la isoclima  $y = x$ . Esta recta divide el plano en dos partes en cada una de las cuales la derivada  $y'$  tiene un mismo signo. Las gráficas de las soluciones, cortándose con la recta  $y = x$  pasan de la región de decrecimiento estricto de la función  $y$  a la región de crecimiento estricto de la misma y viceversa. Por tanto, en esta recta se encuentran los puntos de mínimo relativo de las soluciones (de hecho de mínimo absoluto). En la Figura 7.2 se incorporan al campo de direcciones algunas soluciones, concretamente las que verifican las condiciones  $y(0) = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ .

Observemos que  $y'' = 1 - y' = 1 - x + y$ . La recta  $y = x - 1$  en la que  $y'' = 0$  es la isoclima para la pendiente 1 y a la vez es solución de la ecuación. Esta recta divide el plano en dos partes, en una de las cuales (la que está situada sobre la recta)  $y'' > 0$ , y por lo tanto, aparecen las gráficas de las soluciones convexas, y en la otra,  $y'' < 0$ , aparecen las gráficas de las soluciones cóncavas.



**Figura 7.1:** Isoclinas para las pendientes  $-2.03$ ,  $-1.2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2.1$ ,  $2.93$ , y campo de direcciones de  $\frac{dy}{dx} = x - y$ .



**Figura 7.2:** Campo de direcciones y algunas soluciones de  $\frac{dy}{dx} = x - y$ .

## 7.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

En términos generales, es muy difícil resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Incluso la sencilla ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

no puede resolverse, en general, en el sentido de que no existen fórmulas para obtener su solución en todos los casos. Por otra parte, hay ciertos tipos canónicos de ecuaciones de primer orden para las cuales sí se dispone de métodos rutinarios de resolución. En esta sección discutimos brevemente algunos de los tipos frecuentes en las aplicaciones.

### Ecuaciones separables

El más simple de los tipos canónicos es aquel en que las variables son separables. Son aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \quad (14)$$

donde el miembro de la derecha es producto de dos funciones cada una dependiente de sólo una de las variables. En primer lugar, si  $r$  es raíz de la función  $h$  (o sea  $h(r) = 0$ ), entonces  $y = r$  es solución de la ecuación (14). Por lo tanto, la ecuación (14) posee las raíces de  $h$  como soluciones constantes. En las zonas del plano delimitadas por estas soluciones constantes, o sea, para los  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $y$  no es raíz de  $h$ , es posible dividir por  $h(y)$  dejando la ecuación en la forma

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x). \quad (15)$$

Si  $H(y)$  y  $G(x)$  son primitivas de  $1/h(y)$  y  $g(x)$ , respectivamente, esto es,  $H'(y) = 1/h(y)$ ,  $G'(x) = g(x)$ , la ecuación (15) se convierte en

$$H'(y) \frac{dy}{dx} = G'(x). \quad (16)$$

Sea ahora  $y(x)$  una solución de la ecuación (16). Recordando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{d}{dx} H(y(x)) = \frac{d}{dx} G(x).$$

En otras palabras,  $H(y(x))$  y  $G(x)$  son dos funciones de  $x$  que tienen la misma derivada; por consiguiente, deben diferir en una constante. Es decir,

$$H(y(x)) = G(x) + C, \quad (17)$$

lo cual define la solución  $y(x)$  implícitamente.

Observemos que esencialmente, el procedimiento es el siguiente: para resolver la ecuación

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x),$$

se “multiplica por  $dx$ ” para obtener

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx,$$

y luego se integran ambos miembros

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + K,$$

es decir,

$$H(y) = G(x) + C.$$

La última ecuación es la solución implícita obtenida en (17).

### Ejemplo

La ecuación  $xy' + y = y^2$  es separable ya que puede escribirse en la forma

$$\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x} \quad (18)$$

con tal que  $y(y-1) \neq 0$  y  $x \neq 0$ . Las funciones  $y = 0$  e  $y = 1$  son soluciones de  $xy' + y = y^2$ . Las restantes soluciones, si existen, satisfacen (18) y, por tanto, también satisfacen

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \frac{1}{x} dx + K$$

para un cierto valor de la constante  $K$ . Puesto que el integrando del primer miembro puede escribirse como  $1/(y-1) - 1/y$ , cuando integramos, encontramos que

$$\ln |y-1| - \ln |y| = \ln |x| + K.$$

Esto nos da  $|(y-1)/y| = |x|e^K$ , o bien  $(y-1)/y = Cx$  para un cierto valor de  $C (\neq 0)$ . Despejando  $y$ , obtenemos la fórmula explícita  $y = 1/(1 - Cx)$ . Si en ella permitimos que  $C$  tome el valor 0, obtenemos la solución constante  $y = 1$ . Por consiguiente hemos determinado todas las soluciones: la función constante  $y = 0$  y todas las funciones definidas por

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### Ecuaciones exactas

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

también puede expresarse en la “forma diferencial”

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (19)$$

Así, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 1} \quad (20)$$

puede expresarse como

$$(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0,$$



donde  $M(x, y) = y - 3x^2$  y  $N(x, y) = x - 1$ . Hay otras maneras de expresar la ecuación (20) en forma diferencial, por ejemplo

$$\left(\frac{y - 3x^2}{x - 1}\right) dx + dy = 0.$$

Para resolver la ecuación (19) es útil saber si el primer miembro es una *diferencial total*. La diferencial total  $dF(x, y)$  de una función  $F(x, y)$  de dos variables se define mediante

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy,$$

donde  $dx$  y  $dy$  son incrementos arbitrarios.

**Definición 7.3.1** *Se dice que la forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*es **exacta** en un rectángulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$ , si existe una función  $F(x, y)$  tal que*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \quad (21)$$

*para todo  $(x, y) \in R$ . Esto es, la diferencial total de  $F(x, y)$  satisface*

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

*Si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  es una forma diferencial exacta, entonces la ecuación*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*se llama **ecuación exacta**.*

Por ejemplo, la ecuación  $ydx + xdy = 0$  es exacta, ya que  $d(xy) = ydx + xdy$  es la diferencial total de  $F(x, y) = xy$ .

La resolución de las ecuaciones exactas es una cuestión sencilla una vez que se obtiene la función  $F(x, y)$  que satisface las condiciones (21). Si se considera a  $y$  como una función de  $x$  en cierto intervalo  $I$ , la ecuación  $dF(x, y) = 0$  es equivalente a  $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$  para  $x \in I$ . Por consiguiente,  $F(x, y(x)) = C$ . Es decir, las soluciones de

$$dF(x, y) = 0$$

están dadas implícitamente por

$$F(x, y) = C.$$

A veces una reagrupación de los términos facilita el reconocimiento de una función  $F(x, y)$  cuya diferencial total es  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ . En otras ocasiones podría no ser sencillo determinar  $F(x, y)$  mediante inspección. El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar si una ecuación es exacta.

**Teorema 7.3.1** Supongamos que las derivadas parciales de  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son continuas en un rectángulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$ . Entonces

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación exacta en  $R$  si, y sólo si,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in R$ .

Emplearemos el siguiente **método para resolver ecuaciones exactas**:

- (a) Si  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es exacta entonces  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$ . Se integra esta última ecuación con respecto a  $x$  para obtener

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y). \quad (22)$$

- (b) Para determinar  $g(y)$  se deriva parcialmente con respecto a  $y$  en ambos lados de la ecuación (22) y se sustituye  $N(x, y)$  por  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ . Se despeja  $g'(y)$ .

- (c) Se integra  $g'(y)$  para obtener  $g(y)$ , prescindiendo de la constante numérica. Sustituyendo  $g(y)$  en la ecuación (22) resulta  $F(x, y)$ .

- (d) La solución de  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  está dada implícitamente por

$$F(x, y) = C.$$

### Nota

En la construcción de  $F(x, y)$  se puede integrar primero  $N(x, y)$  con respecto a  $y$  para obtener

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x). \quad (23)$$

y luego continuar para encontrar  $h(x)$ . Si una de las integrales que aparecen en (22) y (23) es más fácil de calcular que la otra, esa será una razón suficiente para escoger el método de resolución.

### Ejemplo

Consideremos la ecuación  $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$ . Se tiene que

$$M(x, y) = e^y \quad \text{y} \quad N(x, y) = xe^y + 2y,$$

luego

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = e^y = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Por tanto, la ecuación es exacta. Eso quiere decir que existe una función  $F(x, y)$  para la que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^y \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + 2y.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones respecto de  $x$  vemos que

$$F(x, y) = \int e^y dx + g(y) = xe^y + g(y),$$

de manera que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = xe^y + g'(y).$$

Como esta derivada parcial ha de ser igual a  $xe^y + 2y$ , deducimos  $g'(y) = 2y$ , de modo que  $g(y) = y^2$  y  $F(x, y) = xe^y + y^2$ . La solución de la ecuación está dada implícitamente por  $xe^y + y^2 = C$ .

## Factores integrantes

La ecuación

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0 \quad (24)$$

no es exacta, porque  $\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 1$  y  $\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 2xy - 1$ . No obstante, si la multiplicamos por el factor  $1/x^2$ , la ecuación se convierte en

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0,$$

que ya es exacta.

**Definición 7.3.2** Si la ecuación (19) no es exacta, pero la ecuación

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

que resulta de multiplicar la ecuación (19) por la función  $\mu(x, y)$  es exacta, entonces  $\mu(x, y)$  se llama **factor integrante** de la ecuación (19).

¿Cómo hallar factores integrantes en la práctica? En general es muy difícil. En algunos casos, sin embargo, se dispone de métodos directos. Para ver cómo surgen éstos, consideremos la condición de que  $\mu$  sea un factor integrante para (19):

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Desarrollando esa igualdad resulta

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

o sea,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu. \quad (25)$$

Con ello hemos “reducido” el problema de resolver la ecuación diferencial ordinaria (19) al mucho más duro de resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales (25). Ahora bien, no necesitamos la solución general de (25) sino que cualquier solución particular servirá a nuestros propósitos. Y desde este punto de vista, (25) es más útil de lo que parece. Supongamos, por ejemplo, que (19)

tiene un factor integrante  $\mu$  que es sólo función de  $x$ . Entonces  $\partial\mu/\partial x = d\mu/dx$  y  $\partial\mu/\partial y = 0$ , luego (25) se puede escribir en la forma

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

que tiene sentido cuando

$$g = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} \quad (26)$$

depende sólo de  $x$ . En ese caso, es

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = g$$

que tiene como solución, entre otras,

$$\mu(x) = e^{\int g(x) dx}. \quad (27)$$

Este razonamiento es obviamente reversible: si la expresión (26) es sólo función de  $x$ , entonces (27) proporciona una función  $\mu$  que depende sólo de  $x$  y satisface (25), de manera que se trata de un factor integrante para (19).

### Ejemplo

En el caso de la ecuación (24) tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)}{N(x, y)} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{-2(xy - 1)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x},$$

que es sólo función de  $x$ . Por consiguiente,

$$\mu(x) = e^{\int -(2/x) dx} = e^{-2 \ln |x|} = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante para (24), como ya habíamos visto.

Razonamientos análogos proporcionan el siguiente procedimiento paralelo, aplicable cuando (19) tiene un factor integrante que sólo depende de  $y$ : si

$$h = \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$$

es sólo función de  $y$ , entonces

$$\mu(y) = e^{\int h(y) dy}$$

es un factor integrante para (19).

### Ecuaciones lineales

El tipo más importante de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es el de las *ecuaciones lineales*, es decir, aquellas que pueden expresarse en la forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \quad (28)$$

donde  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  y  $b(x)$  dependen sólo de  $x$  y son funciones continuas en un intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Supondremos además que  $a_1(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Dividiendo por  $a_1(x)$  se puede reescribir la ecuación (28) en la forma canónica (o forma estándar)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (29)$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones continuas en el intervalo  $I$ .

Expresemos la ecuación (29) en la forma diferencial

$$[P(x)y - Q(x)] dx + dy = 0. \quad (30)$$

La ecuación (30) es exacta solamente cuando  $P = 0$ . No obstante, puede obtenerse fácilmente un factor integrante  $\mu$ , que depende sólo de  $x$ , para la ecuación (30). Se tiene  $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$  y  $N = 1$ , luego

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = P$$

y entonces

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad (31)$$

es el factor integrante deseado.

Regresando a la ecuación (29), se multiplica por  $\mu(x)$  definida en (31) para obtener

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = \mu(x)Q(x), \quad (32)$$

que se puede escribir en la forma

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx} y = \mu(x)Q(x),$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x). \quad (33)$$

Integrando (33) con respecto a  $x$ , resulta

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x) dx + C,$$

y despejando  $y$  se obtiene

$$y = \mu(x)^{-1} \left( \int \mu(x)Q(x) dx + C \right),$$

es decir, si  $\alpha(x)$  es una primitiva cualquiera de  $P(x)$ ,

$$y = e^{-\alpha(x)} \left( \int e^{\alpha(x)} Q(x) dx + C \right). \quad (34)$$

La expresión (34) es la **solución general** de la ecuación (29).

**Teorema 7.3.2** *Supongamos que  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Entonces, para cualquier elección del valor inicial  $y_0$  existe una solución única  $y(x)$  en  $(a, b)$  del problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

La solución está dada por (34) para un valor apropiado de  $C$ .

**Ejemplo**

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 3x$$

es evidentemente lineal con  $P(x) = 1/x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , de modo que una primitiva de  $P(x)$  es  $\ln x$  y  $\mu(x) = e^{\ln x} = x$ . Multiplicando ambos miembros por  $x$  se llega a

$$\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2,$$

así que

$$xy = x^3 + C \quad \text{o bien} \quad y = x^2 + \frac{C}{x}.$$

Esta solución es válida en  $(0, +\infty)$ .

**7.4. Ejercicios**

1. Usando el método de las isoclinas, dibuja varias curvas solución, incluida la curva que satisfaga la condición inicial dada:

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2x, y(0) = -1,$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \sin(x + y), y(0) = 0,$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1,$$

$$(5) \frac{dy}{dx} = y(2 - y), y(0) = 3,$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2, y(0) = 0,$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, y(0) = 1.$$

**Ecuaciones separables**

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(1) (1 + x)y' = x,$$

$$(4) xy' = (1 - 2x^2) \operatorname{tg} y,$$

$$(2) y' = \frac{x^2 - 1}{y^2},$$

$$(5) (x + 1)y' + y^2 = 0,$$

$$(3) xy' = y - 1,$$

$$(6) yy' = e^{x+2y} \operatorname{sen} x.$$

3. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$(1) y' = 8x^3 e^{-2y}, y(1) = 0,$$

$$(4) (1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1,$$

$$(2) y' = y \operatorname{sen} x, y(\pi) = -3,$$

$$(5) y' = (1 + y^2) \operatorname{tg} x, y(0) = \sqrt{3},$$

$$(3) y' = 2\sqrt{y+1} \cos x, y(\pi) = 0,$$

$$(6) y' \operatorname{sen} x = y \ln y, y(\pi/2) = e.$$

**Ecuaciones exactas. Factores integrantes**

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(1) e^t(y-t)dt + (1+e^t)dy = 0,$$

$$(4) \frac{ydx + xdy}{1-x^2y^2} + xdx = 0,$$

$$(2) (x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0,$$

$$(5) (x+2) \operatorname{sen} y dx + x \cos y dy = 0,$$

$$(3) (xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0,$$

$$(6) 2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1})dy = 0.$$

5. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$(1) (e^x y + 1)dx + (e^x - 1)dy = 0, y(1) = 1,$$

$$(4) (x + y^2)dx - 2yxdy = 0, y(1) = 1,$$

$$(2) (1/x + 2y^2x)dx + (2yx^2 - \cos y)dy = 0, y(1) = \pi,$$

$$(5) (x^2 + y)dx - xdy = 0, y(-2) = 1,$$

$$(3) (ye^{xy} - 1/y)dx + (xe^{xy} + x/y^2)dy = 0, y(0) = 1,$$

$$(6) \frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2 - 3x^2)dy}{y^4} = 0, y(1) = 1.$$

**Ecuaciones lineales**

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(1) \frac{dy}{dx} = x^2 e^{-4x} - 4y,$$

$$(4) (y - 2xy - x^2)dx + x^2 dy = 0,$$

$$(2) y - x + xy \cotg x + xy' = 0,$$

$$(5) x \ln x \frac{dy}{dx} - y = x^3(3 \ln x - 1),$$

$$(3) x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2},$$

$$(6) y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

7. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

$$(1) y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x, y(0) = 1,$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, y(0) = 4/3,$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x, y(1) = e - 1,$$

$$(5) y' + \frac{1}{x+1}y = \operatorname{sen} x, y(\pi/2) = 1,$$

$$(3) y' - y \operatorname{tg} x = \sec x, y(0) = 0,$$

$$(6) \cos x \frac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 2x \cos^2 x, y(\pi/4) = \frac{-15\sqrt{2} \pi^2}{32}.$$

**Miscelánea**

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(1) e^x dx + (e^x \cotg y + 2y \operatorname{cosec} y)dy = 0,$$

$$(4) 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx = \sqrt{x^2 - y} dy,$$

$$(2) (2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0,$$

$$(5) (2y - x^3)dx = xdy,$$

$$(3) 3e^x \operatorname{tg} y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0,$$

$$(6) y' + y \cotg x = 2x \operatorname{cosec} x.$$