Publicaciones IFEM

Problemas y Soluciones: Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico 2001-2004

Luis F. Cáceres
Stanislaw Dziobiak
Moisés Delgado
Gerardo Hernández
Arturo Portnoy

Departamento de Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

Primera Edición, 2004

Director: Dr. Luis F. Cáceres
Co-Director: Dr. Arturo Portnoy

Esta producción ha sido subvencionada por el proyecto IFEM-HaCuMa mediante una propuesta del Programa de Título V del Departamento de Educación de Puerto Rico.

Realizado Por
Luis F. Cáceres
Stanislaw Dziobiak
Moisés Delgado
Gerardo Hernández
Arturo Portnoy

Departamento de Matemáticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez

Impreso y hecho en Puerto Rico

PRÓLOGO

En este folleto presentamos los exámenes de olimpiadas matemáticas que hemos realizado en los últimos años en las competencias organizadas bajo los proyectos IFEM-HaCuMa, subvencionados por el Departamento de Educación de Puerto Rico y realizados en el Departamento de Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez.

Gran parte de los ejercicios que conforman estos exámenes son problemas de diferentes olimpiadas a nivel mundial. Esperamos que este trabajo sirva para que estudiantes de las escuelas de Puerto Rico se motiven y se preparen para la participación en olimpiadas de matemáticas y que sirva también para facilitar la labor de entrenamiento por parte de los maestros.

Miles de estudiantes de las escuelas públicas y privadas de la Isla han participado en estas olimpiadas y algunos de ellos han llegado a formar parte de los equipos que han representado a Puerto Rico en olimpiadas internacionales de matemáticas. Estos equipos que han representado a la Isla en los últimos años han realizado un trabajo sobresaliente y esto se debe al esfuerzo y entusiasmo de los estudiantes, de sus padres y sus maestros y a todas las personas que han contribuido para que el proyecto IFEM-HaCuMa sea uno de gran éxito. A todas estas personas dedicamos este trabajo.

Luis F. Cáceres
Arturo Portnoy
Noviembre de 2004

IFEM
Instituto para el Fortalecimiento en la Enseñanza de las Matemáticas

HaCuMa
Hacia Una Cultura de Matemáticos

Estos proyectos están subvencionados por el Departamento de Educación de Puerto Rico y son realizados en el Departamento de Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez de la Universidad de Puerto Rico.

Índice General

Nivel I

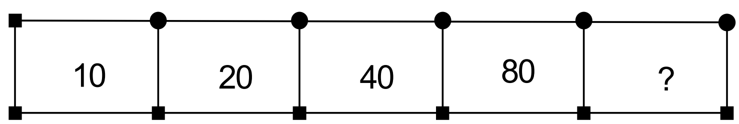
Año Académico 2003-04

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Ana dibuja una secuencia de canguros así: uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, uno amarillo, uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro y así sucesivamente. ¿De qué color es el decimoséptimo canguro de la secuencia?

a) azul
b) amarillo
c) rojo
d) negro
e) verde

Problema 2 ¿Cuál número va en la última cajita?



a) 100
b) 200
c) 140
d) 160
e) 180

Problema 3 En la biblioteca hay 6 mesas con 4 sillas cada una, 4 mesas con dos sillas cada una y 3 mesas con 6 sillas cada una. ¿Cuántas sillas hay en total?

a) 25
b) 36
c) 40
d) 44
e) 50

Problema 4 En un criadero de peces hay peces rojos y peces blancos. Si hay 600 peces, y la sexta parte son rojos, ¿cuántos peces blancos hay?

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

Problema 5 Juan se durmió a las 9:30 p.m. y despertó a las 6:45 a.m. Su hermano Carlos durmió 1 hora 50 minutos más que él. ¿Cuánto tiempo durmió Carlos?

a) 30 h. 5 min.
b) 11 h. 5 min.
c) 11 h. 35 min.
d) 9 h. 5 min.
e) 8 h. 35 min.

Problema 6 Una máquina tiene una entrada y una salida. Si entra 2 sale 6, si entra 4 sale 8, si entra 10 sale 14. ¿Qué sale si entra 6?

a) 8
b) 10
c) 11
d) 14
e) 16

Problema 7 María tiene 6 años, Juan tiene el doble de la edad de María y una tercera parte de la edad de Eva. ¿Cuántos años tiene Eva?

a) 12
b) 24
c) 36
d) 48
e) 54

Problema 8 En el cuadrado mágico que se muestra faltan cinco números. En un cuadrado mágico la suma de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. ¿Cuál es el valor de la letra A?

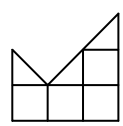
15		35
50		
25	A	

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

Problema 9 Imagina que cierta enfermedad se transmite de tal modo que un enfermo contagia 5 personas en el transcurso de un mes y que en ese momento hay 100 personas contagiadas. ¿Cuántas personas contagiadas habrá dentro de tres meses?

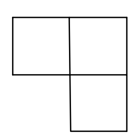
a) 300
b) 500
c) 2,500
d) 12,500
e) 21,600

Problema 10 Si cada uno de los cuatro cuadraditos de la figura tiene un área de 10 centímetros cuadrados, hallar el área de la figura.



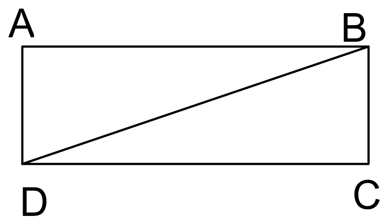
a) 40
b) 45
c) 50
d) 55
e) 60

Problema 11 Cada cuadradito tiene 8 cm. de perímetro. Con 3 cuadraditos iguales se formó esta figura. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



a) 3
b) 6
c) 8
d) 16
e) 24

Problema 12 En el rectángulo $ABCD, \measuredangle DBC$ mide $60°$. ¿Cuánto mide $\measuredangle ADB$?



a) $0°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$
e) $120°$

Problema 13 Luis tenía 18 figuritas el sábado pasado. El domingo y el lunes compró 10 figuritas cada día. El martes y el miércoles también compró figuritas. El miércoles compró el doble de figuritas que el martes. Hoy, que es jueves y no compró figuritas, tiene un total de 74 figuritas. ¿Cuántas figuritas compró Luis el martes?

a) 8
b) 10
c) 12
d) 18
e) 24

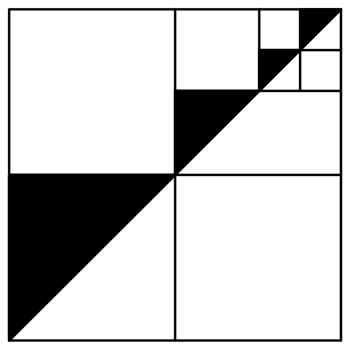
Problema 14 En una ciudad, un sexto de la población es menor de 7 años. La mitad de los menores de 7 años son varones. Si en esa ciudad hay 3,250 varones menores de 7 años, ¿cuántos habitantes hay en esa ciudad?

a) 3,250
b) 6,500
c) 13,000
d) 22,750
e) 39,000

Problema 15 Una familia quiere viajar de Mayagüez a San Juan haciendo dos paradas en el camino. La primera parada puede ser en Isabela, Quebradillas o Camuy. Para la segunda parada, pueden elegir entre Vega Alta o Vega Baja. ¿De cuántas maneras puede hacer el viaje la familia?

a) 1
b) 2
c) 5
d) 6
e) 8

Problema 16 ¿Qué fracción del cuadrado más grande representa la parte sombreada?



a) 1/4
b) 11/64
c) 7/32
d) 11/16
e) 3/8

Problema 17 María se inventó un código en el que cada letra representa un dígito distinto. Con ese código, María escribe la siguiente cuenta:

$$\begin{array}{r} T\ A\ S \\ +\ C\ O\ Z \\ \hline Z\ O\ N\ A \end{array}$$

¿Cuánto vale Z?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Problema 18 Dibuja un triángulo ABC que tenga $\measuredangle A = 30°$ y $\measuredangle B = 70°$. Sobre la prolongación del lado $\overline{AC}$ marca el punto D de manera que $\overline{CD} = \overline{CB}$. Completa el triángulo DCB. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

a) $60°$, $60°$, $60°$
b) $80°$, $50°$,$50°$
c) $70°$, $55°$,$55°$
d) $90°$, $45°$, $45°$
e) $100°$, $40°$, $40°$

Problema 19 En el campamento de verano los chicos tienen 3 baldes de 22, 18 y 10 litros de capacidad. Van a buscar agua al río, llenan los 3 baldes pero en el camino, de cada balde, se riega la quinta parte. ¿Con cuánta agua llegaron al campamento?

a) 10 litros
b) 20 litros
c) 30 litros
d) 40 litros
e) 50 litros

Problema 20 Susana dice que hace 16 años tenía $\frac{2}{3}$ de su edad actual. ¿Cuántos años tiene Susana?

a) 16
b) 24
c) 32
d) 36
e) 48

Problema 21 ¿Cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar usando solamente el 1, el 2, el 5 y el 9?

a) 4
b) 12
c) 24
d) 36
e) 48

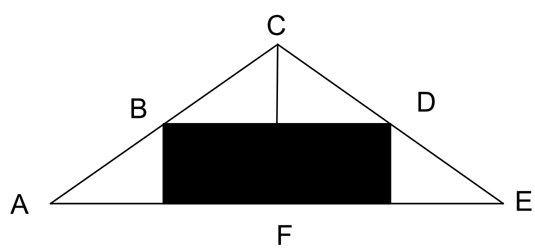
Problema 22 Un anciano tiene 7 casas en cada una de siete ciudades distintas. En cada casa hay 7 graneros, en cada granero, 7 ratones. Cada ratón comió 7 granos de trigo. ¿Cuántos granos de trigo comieron en total los ratones?

a) 35
b) 49
c) 343
d) 2,401
e) 16,807

Problema 23 Entre todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 201 y 699, ¿cuántos son divisibles por 4?

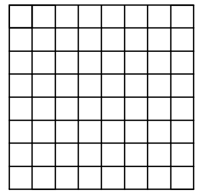
a) 10
b) 12
c) 16
d) 24
e) 48

Problema 24 Calcula el área de la figura sombreada sabiendo que $\overline{AB} = \overline{BC}, \overline{CD} = \overline{DE}, \overline{AF} = \overline{FE}, \overline{AE} = 5cm, FC = 4cm$ y el ángulo en A es igual al ángulo en E.



a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

Problema 25 Se quieren construir cuadrados de área mayor que 25, tomando como unidad el área de un cuadradito de la cuadrícula. Si los vértices deben estar en las intersecciones de la cuadrícula, y los lados deben coincidir con las líneas de la misma, ¿cuántos cuadrados puedes dibujar?



a) 4
b) 5
c) 9
d) 14
e) 25

Problema 26 En un triángulo isósceles cuyo perímetro es 15 m, la base mide la mitad de lo que miden cada uno de los otros lados. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

a) 3, 3, 9
b) 3, 3, 9
c) 5, 5, 5
d) 6, 6, 3
e) 7, 7, 1

Problema 27 Dos atletas recorren una pista circular. Ambos parten de la salida S. El primero da una vuelta entera cada 6 minutos; el segundo tarda 8 minutos para dar la misma vuelta. ¿Después de cuantos minutos vuelven a pasar juntos por S?

a) 12 minutos
b) 14 minutos
c) 16 minutos
d) 24 minutos
e) 30 minutos

Problema 28 "Juan tiene por lo menos 6 primos", dice José.

"No, tiene menos de 6", corrige Ramiro.

"Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tienes más de 1 primo", agrega Ezequiel.

¿Cuántos primos puede tener Juan si se sabe que uno solo de los muchachos dice la verdad?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

Problema 29 Si a, b, c, d son dígitos tales que, $0 \leq a < b < c < d$, ¿cuántos números de la forma $1a1b1c1d1$ son múltiplos de 33?

a) 12
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

Problema 30 Gabriela debe escribir un trabajo de n páginas en la computadora. El lunes escribe la mitad del trabajo. El martes la tercera parte de lo que le falta, el miércoles la cuarta parte del resto y el jueves la quinta parte de lo que queda. El viernes decide terminar el trabajo y observa que le quedan menos de 15 páginas para finalizarlo. Si todos los días escribió un número entero de páginas, ¿cuántas páginas tenía el trabajo?

a) 20
b) 40
c) 60
d) 80
e) 100

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Son 5 canguros, el quinto canguro es amarillo, el décimo también lo es, así como el décimo quinto. El décimo sexto será azul, y por lo tanto el décimo séptimo será verde.

Problema 2 En cada caja, a partir de la segunda caja, va un número que es el doble del que está en la caja de la izquierda. Por lo tanto en la última caja debe ir un 160.

Problema 3 6 mesas con 4 sillas ($6 \times 4 = 24$ sillas), 4 mesas con 2 sillas ($4 \times 2 = 8$ sillas) y 3 mesas con 6 sillas ($3 \times 6 = 18$ sillas). En total hay $24 + 8 + 18 = 50$.

Problema 4 La sexta parte de 600 es 100 ($\frac{1}{6} \times 600 = 100$). Si hay 100 peces rojos, el resto deben ser blancos. Es decir hay 500 peces blancos.

Problema 5 De 9:30 p.m. a la medianoche, hay 2 horas 30 minutos. Entre la medianoche y las 6:45 a.m. hay 6 horas 45 minutos. En total Juan durmió 9 horas 15 minutos. Si Carlos durmió 1 hora 50 minutos mas que Juan, entonces Carlos durmió 11 horas 5 min.

Problema 6 La diferencia entre la salida y la entrada siempre es 4 :

$$\begin{aligned} 6-2 &= 4 \\ 8-4 &= 4 \\ 14-10 &= 4 \end{aligned}$$

Otra forma de decirlo es:

$$salida = entrada + 4$$

Entonces, si la entrada es 6, $6+4=10$, y la salida será 10.

Problema 7 Si María tiene 6 años, y Juan tiene el doble, Juan tiene 12 años. Si la edad de Juan es una tercera parte de la edad de Eva, entonces la edad de Eva es el triple de la de Juan. Eva tiene 36 años.

Problema 8

15		35
50		
25	A	

La suma en la primera columna da 90 ($15+50+25=90$). Como es un cuadrado mágico, todas las filas, todas las columnas y la diagonales deben sumar 90 también. Inmediatamente podemos añadir 2 números en el cuadrado:

15	40	35
50	30	
25	A	

El 40 lo añadinos para que la primera fila sumara 90, y el 30 para que la diagonal sumara 90. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 40+30+A &= 90 \\ A &= 90-70 \\ A &= 20 \end{aligned}$$

Problema 9 El primer mes 500 (100×5) personas se contagiarán y en total habrá 600 $(100 + 500)$ personas contagiadas. El segundo mes $3,000$ (600×5) personas se contagiarán y habrá en total $3,600$ $(600 + 3,000)$ personas contagiadas. El tercer mes $18,000$ $(3,600 \times 5)$ personas se contagiarán y en total habrá $21,600$ $(3,600 + 18,000)$ personas contagiadas.

Problema 10 Si cada cuadradito tiene un área de 10 cm^2, entonces los triángulos tienen la mitad de esa área, es decir 5 cm^2. La figura tiene 4 cuadrados (con10 cm^2 cada uno) y 3 triángulos (con 5 cm^2 cada uno). El área de la figura es

$$\begin{aligned} A &= (10cm^2 \times 4) + (5cm^2 \times 3) \\ A &= 40\ cm^2 + 15\ cm^2 \\ A &= 55\ cm^2 \end{aligned}$$

Problema 11 Si el perímetro de cada cuadrado mide 8 cm, entonces sus lados miden 2 cm. La figura tiene 8 lados en su frontera, por lo tanto

$$\begin{aligned} p &= 2\ cm \times 8 \\ p &= 16\ cm \end{aligned}$$

Problema 12 Los ángulos internos de un triángulo suman $180°$. Como $ABCD$ es un rectángulo, $\measuredangle BCD = 90°$ y $\measuredangle ADC = 90°$ además $\measuredangle DBC = 60°$, entonces

$$\begin{aligned} \measuredangle BCD + \measuredangle DBC + \measuredangle BDC &= 180° \\ 90° + 60° + \measuredangle BDC &= 180° \\ \measuredangle BDC &= 180° - 150° \\ \measuredangle BDC &= 30° \end{aligned}$$

$\measuredangle BDC$ y $\measuredangle ADB$ son ángulos complementarios, es decir

$$\begin{aligned} \measuredangle BDC + \measuredangle ADB &= 90° \\ 30° + \measuredangle ADB &= 90° \\ \measuredangle ADB &= 60° \end{aligned}$$

Problema 13 Llamemos x la cantidad de figuritas que Luis compró el martes, el miércoles compró el doble de figuritas que el martes; es decir; $2x$, entonces

$$\begin{aligned}
18+10+10+x+2x+0 &= 74\\
38+3x &= 74\\
3x &= 74-38\\
3x &= 36\\
x &= 12
\end{aligned}$$

Problema 14 Sea x el número de habitantes, *un sexto* de la población es menor de 7 años; es decir; $\frac{1}{6}x$. La mitad de los menores de 7 años son varones; es decir; $\frac{1}{2}\frac{1}{6}x = \frac{1}{12}x$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}x &= 3,250\\
x &= 3,250 \times 12\\
x &= 39,000
\end{aligned}$$

Problema 15 Sea n el numero de maneras en las que se puede hacer el viaje, para la primera parada hay 3 posibilidades, para la segunda hay 2 posibilidades, entonces

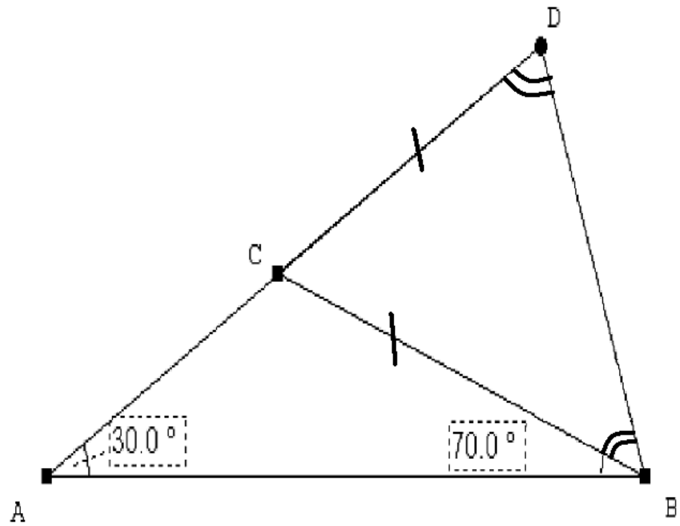
$$\begin{aligned}
n &= 3 \times 2\\
n &= 6
\end{aligned}$$

Problema 16 Sea A el área sombreada y x el área del cuadrado mas grande, ese cuadrado está dividido en 4 cuadrados iguales, el triángulo sombreado grande es la mitad de uno de esos 4 cuadrados; es decir; $\frac{1}{8}x$. Del mismo modo, el triángulo sombreado que le sigue en tamaño es un octavo de un cuarto del cuadrado grande ($\frac{1}{4}\frac{1}{8}x = \frac{1}{32}x$), y así con el siguiente ($\frac{1}{4}\frac{1}{32}x = \frac{1}{128}x$), de éste último hay 2 iguales, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}x + 2\frac{1}{128}x\\
A &= (\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64})x\\
A &= \frac{8+2+1}{64}x\\
A &= \frac{11}{64}x
\end{aligned}$$

Problema 17 Si al sumar 2 números de 3 cifras, obtenemos uno de 4 cifras, la cifra de las unidades de mil debe ser uno. Por lo tanto $Z = 1$.

Problema 18



Los ángulos internos de un triángulo suman 180°

$$\begin{aligned} \measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle ACB &= 180^\circ \\ 30^\circ + 70^\circ + \measuredangle ACB &= 180^\circ \\ \measuredangle ACB &= 80^\circ \end{aligned}$$

Como el $\triangle DBC$ es isóceles; $\measuredangle BDC = \measuredangle CBD$. Además, como $\measuredangle ACB = 80^\circ$, entonces, $\measuredangle DCB = 100^\circ$, luego

$$\begin{aligned} \measuredangle BDC + \measuredangle CBD + \measuredangle DCB &= 180^\circ \\ \measuredangle BDC + \measuredangle BDC + 100^\circ &= 180^\circ \\ 2\measuredangle BDC &= 80^\circ \\ \measuredangle BDC &= 40^\circ \\ \measuredangle CBD &= 40^\circ \end{aligned}$$

Problema 19 La cantidad de agua que recogieron en el río es $22+18+10 = 50$, la quinta parte de $22, 18$ y 10 es $\frac{22}{5}$, $\frac{18}{5}$ y $\frac{10}{5}$ respectivamente, entonces la cantidad de agua r que se regó es

$$\begin{aligned} r &= \frac{22}{5} + \frac{18}{5} + \frac{10}{5} \\ r &= \frac{22+18+10}{5} \\ r &= \frac{50}{5} = 10 \end{aligned}$$

Si recogieron 50 litros y se regaron 10 litros, entonces la cantidad de agua a con la que llegaron al campamento es

$$\begin{aligned} a &= 50 - 10 \\ a &= 40 \end{aligned}$$

Problema 20 Sea x la edad actual de Susana, hace 16 años la edad de Susana $(x - 16)$ era $\frac{2}{3}$ de su edad actual; es decir; $\frac{2}{3}x$, entonces

$$\begin{aligned} x - 16 &= \frac{2}{3}x \\ x - \frac{2}{3}x &= 16 \\ \frac{3-2}{3}x &= 16 \\ \frac{1}{3}x &= 16 \\ x &= 48 \end{aligned}$$

Problema 21 En la primera posición hay 4 posibilidades $(1, 2, 5, 9)$, para la segunda posición hay 3 posibilidades (las cifras deben ser distintas, no se puede volver a usar la cifra que se usó en la primera posición), para la tercera posición hay 2 posibilidades (las 2 cifras que ya se usaron no se pueden usar mas), para la cuarta y última posición sólo queda una posibilidad (la cifra que no se haya usado en ninguna de las otras 3 posiciones). Por lo tanto la cantidad de números c que se pueden formar es

$$\begin{aligned} c &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ c &= 4! \\ c &= 24 \end{aligned}$$

Problema 22 7 casas en 7 ciudades distintas son (7×7) 49 casas en total, si en cada casa hay 7 graneros, en total hay (49×7) 343 graneros. Como en cada granero hay 7 ratones, en total hay (343×7) $2,401$. Cada ratón se comió 7 granos de trigo, es decir, en total se comieron $(2,401 \times 7)$ 16,807 granos de trigo.

Problema 23 Los múltiplos de 5 que también son múltiplos de 4, son también múltiplos de 20. Los múltiplos de 20 comprendidos entre 201 y 699 son: 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360, 380, 400, 420, 440, 460, 480, 500, 520, 540, 560, 580, 600, 620, 640, 660, 680. Por lo tanto la respuesta correcta es 24.

Problema 24 El triángulo AEC es isóceles, ($\measuredangle EAC = \measuredangle CEA$). La gráfica dada es simétrica con respecto a $\overline{CF}$. B es el punto medio de $\overline{AC}$. Una recta perpendicular a $\overline{AE}$ (o a $\overline{AF}$) que pase por B, corta a $\overline{AF}$ en la mitad; es decir; la base del rectángulo sombreado mide la mitad de $\overline{AE}$. Por otro lado, una recta perpendicular a $\overline{CF}$ que pase por B, corta a $\overline{CF}$ por la mitad; es decir; la altura del rectángulo sombreado es la mitad de $\overline{CF}$. Entonces el área A de la figura sombreada es

$$\begin{aligned} A &= \frac{5\ cm}{2} \times \frac{4\ cm}{2} \\ A &= \frac{20\ cm^2}{4} = 5\ cm^2 \end{aligned}$$

Problema 25 Los únicos tamaños permitidos son de 6×6, 7×7 y 8×8. Se pueden construir 9 cuadrados de 6×6, 4 de 7×7 y 1 de 8×8 para un total de 14 cuadrados.

Problema 26 Llamemos a, b las dimensiones de los lados del triángulo (un triangulo isósceles tiene 2 lados iguales), donde b es la base. Entonces

$$\begin{aligned} a + a + b &= 15m \\ 2a + b &= 15m \end{aligned}$$

Como la base mide la mitad de cada uno de los otros lados, $b = \frac{1}{2}a$, o lo que es lo mismo, $2b = a$, entonces:

$$\begin{aligned} 2(2b) + b &= 15m \\ 5b &= 15m \\ b &= 3m \\ a &= 6m \end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es $6, 6, 3$.

Problema 27 Sea t el tiempo en el cual los 2 atletas vuelven a pasar al tiempo por S, entonces t debe ser múltiplo de 6 y de 8. El mínimo común múltiplo entre 6 y 8 es 24.

Por lo tanto la respuesta correcta es la d (24).

Problema 28 Sólo uno de ellos está diciendo la verdad. Juan no puede tener por lo menos 6 primos, porque tanto José como Ezequiel estarían diciendo la verdad, asi que esa posibilidad esta descartada. Si Juan tiene entre 2 y 5 primos, tanto Ramiro como Ezequiel estarían diciendo la verdad, así que las descartamos también. En cambio si Juan tiene sólo *un* primo, sólo Ramiro estaría diciendo la verdad.

Por lo tanto la respuesta es 1.

Problema 29 (ver la solución del Problema 45 de la Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel II)

Problema 30 El lunes escribe la mitad del tabajo y le falta la otra mitad ($\frac{1}{2}n$). El martes hace $1/3$ de $n/2$ es decir; $n/6$, lleva hecho $n/2 + n/6 = 2n/3$ y le falta $n/3$. El miércoles hace $1/4$ de $n/3$; es decir; $n/12$, hasta el momento lleva hecho $2n/3 + n/12 = 3n/4$, y le falta $n/4$. El jueves hace $1/5$ de $n/4$; es decir; $n/20$, lleva hecho $3n/4 + n/20 = 4n/5$, y le falta $n/5$. El viernes finaliza el trabajo.

Como todos los dias escribió un número entero de páginas, n debe ser divisible por 2, 6, 12 y 20, además n debe ser menor que 75 (para que el viernes le falten menos de 15 páginas). El mínimo común múltiplo entre esos números es 60.

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 El papá de Luis pesa 46 kilos más que Luis. Los dos juntos pesan 110 Kg. ¿Cuánto pesa Luis?

a) 23 Kg
b) 32 Kg
c) 46 Kg
d) 55 Kg
e) 78 Kg

Problema 2 Supongamos que hoy es martes y es el día 1. ¿Qué día de la semana será el día 100?

a) lunes
b) martes
c) miércoles
d) jueves
e) viernes

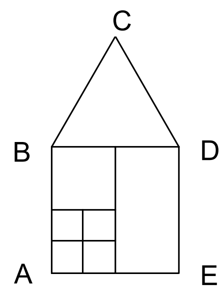
Problema 3 En una caja hay 6 fichas cuadradas de 1 cm de lado. Usando todas o algunas de las fichas, Francisco arma y desarma figuras sobre la mesa. ¿Cuántos rectángulos distintos de 10 cm de perímetro puede formar?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Problema 4 Hay 4 bloques grandes y 3 pequeños. Los bloques de igual tamaño pesan lo mismo. El peso de un bloque grande es el triple de uno pequeño. Todos los bloques juntos pesan 75 libras. ¿Cuánto pesa un bloque grande?

a) 5 libras
b) 10 libras
c) 15 libras
d) 20 libras
e) 25 libras

Problema 5 Se dibujó un triángulo equilátero BCD y un cuadrado $ABDE$. Este cuadrado se dividió en cuatro cuadrados iguales y uno de estos se dividió de nuevo en cuatro cuadraditos como se ve en la figura. Sabiendo que el lado de cada uno de estos cuadraditos mide 5 cms, calcular el perímetro del polígono $ABCDE$.

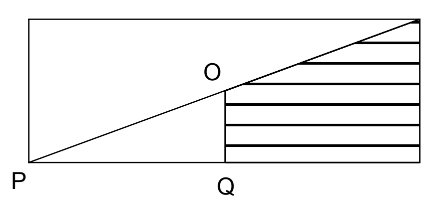


a) 20 cm
b) 60 cm
c) 80 cm
d) 100 cm
e) 120 cm

Problema 6 Encontrar la suma de los números naturales del 1 al 50 inclusive. En otras palabras, si $S = 1 + 2 + 3 + ... + 50$, hallar el valor de S.

a) 1,225
b) 1,235
c) 1,245
d) 1,265
e) 1,275

Problema 7 Se ha dibujado un rectángulo con centro O. Se sabe que el área del triángulo OPQ vale $7cm^2$. Calcular el área de la figura rayada.



a) 7
b) 14
c) 21
d) 28
e) 35

Problema 8 José escribió un libro de 1,276 páginas. El mismo numeró todas las páginas a mano. ¿Cuántas veces escribió el número 6?

a) 218
b) 258
c) 308
d) 318
e) 358

Problema 9 Ignacio, Diego, Santiago, Eduardo y Ana van al cine y encuentran 5 sillas consecutivas libres. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si Ana y Eduardo quieren estar juntos, Ana siempre a la izquierda de Eduardo?

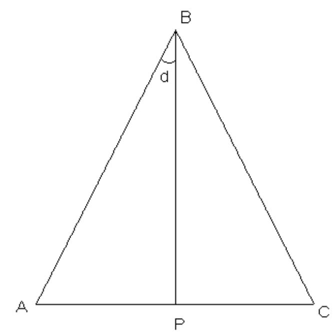
a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 30

Problema 10 Clarita sube los escalones de uno en uno o de dos en dos, pero nunca de tres en tres. Si tiene que subir una escalera de 10 escalones pisando obligatoriamente el sexto escalón donde hay un descanso, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

a) 55
b) 65
c) 75
d) 85
e) 95

Problema 11 Leida y Lourdes salieron de cacería y trajeron conejos y gallinas. Entre las dos trajeron 21 cabezas y 54 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas cazaron?

Problema 12 Sabiendo que el triángulo ABC es isósceles $(\overline{AB} = \overline{BC}), \overline{BP}$ perpendicular a $\overline{AC}$ y $\measuredangle d = 25°$, hallar la medida del $\measuredangle C$.



Problema 13 Encontrar cuatro fracciones distintas de numerador 1 y denominador par que al sumarlas den 1.

Problema 14 En el problema siguiente de suma A, B y C son dígitos. Si C se coloca en la columna de las decenas como se muestra en la segunda suma, el resultado es 97. ¿Cuáles son los valores de A, B y C?

$$\begin{array}{cc} A & B \\ + & C \\ \hline 5 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ + & C & \\ \hline & 9 & 7 \end{array}$$

Problema 15 Una noche exactamente a las 12 a.m. la familia López se despertó porque sus tres relojes daban la media noche en el mismo momento. La familia López sabía que uno de sus relojes daba siempre la hora exacta, uno adelantaba 10 minutos por día y el otro atrasaba 15 minutos por día. ¿Cuántos días pasarán para que los tres relojes vuelvan a dar las 12 a.m. en el mismo momento?

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Sea l=peso de Luis, entonces $l+46$ es el peso del papa de Luis. Luego tenemos la ecuación

$$l + 46 + l = 110$$

Resolviendo se tiene que $l = 32$. Por lo tanto, Luis pesa 32 kg.

Problema 2 Hoy es martes 1, luego los días $1 + n \times 7$, donde n es natural también serán martes. Además $99 = 1 + 14 \times 7$, es decir el día número 99 es martes.

Luego el día número 100 es miércoles.

Problema 3 Usando 1, 2 ó 3 fichas, los rectángulos formados tienen a lo mas perímetro 8, o sea queda descartada la posibilidad de usar este número de fichas. Con 4 fichas se puede formar un único rectángulo de perímetro 10 (poniéndolas en fila); con 5 fichas, de la misma forma anterior, el único rectángulo que se puede formar es de perímetro 12, finalmente con 6 fichas se puede formar también un único rectángulo de perímetro 10 (poniéndolas en dos filas).

Por lo tanto se pueden formar solo 2 rectángulos de perímetro 10.

Problema 4 Sea B=peso del bloque grande y b=peso del bloque pequeño. Luego tenemos que

$$B = 3b, \quad 4B + 3b = 75$$

Resolviendo se tiene que $B = 15$. Por lo tanto el bloque grande pesa 15 libras.

Problema 5 Como el lado de cada cuadrado pequeño es 5, el lado del cuadrado mediano es 10 y el lado del cuadrado grande es 20. Además dado que el triángulo es equilátero, cada lado mide 20 (ya que uno de sus lados es lado del cuadrado grande).

Por lo tanto, el perímetro del polígono ABCDE es

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100.$$

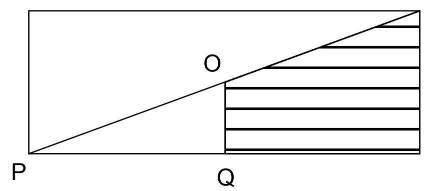
Problema 6 La suma de los n primeros números está dada por

$$S = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Luego para $n = 50$ tenemos: $S = \dfrac{50 \times 51}{2} = 1,275$.

Por lo tanto $S = 1,275$.

Problema 7 Se puede ver que el triángulo está formado por 8 triángulos de la forma del triángulo OPQ, como se ve en la figura; además la figura rayada está formada por tres de ellos. Luego el área de esta es tres veces el área del triángulo OPQ o sea $3 \times 7 = 21$.



Problema 8 Primero calculemos los números seis de las primeras 1,200 páginas.

De 1 a 99 hay 20 números seis (6, 16, 26, 36, 46, 56, 76, 86, 96, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69), lo mismo sucede de 100 a 199; 200 a 299;...;1,100 a 1,199 ; excepto en el caso de 600 a 699 donde hay 120 seis (ya que cada número empieza en seis), luego el total de números seis en las primeras 1,200 páginas es

$$11 \times 20 + 120 = 340$$

Por otro lado de 1,200 a 1,276 hay 18 números seis.

Por lo tanto José escribió $340 + 18 = 358$ veces el número seis.

Problema 9 Si Eduardo y Ana se sientan en la primera y segunda silla, los tres restantes se pueden sentar de seis formas distintas (ya que es una permutación de tres), si Eduardo y Ana se sientan en la segunda y tercera silla, nuevamente los tres restantes lo pueden hacer de seis formas distintas, sucede lo mismo si Eduardo y Ana se sientan en la tercera y cuarta silla, o si se sientan en la cuarta y quinta. Por lo tanto el número de maneras de sentarse los cinco es $6 + 6 + 6 + 6 = 24$.

Problema 10 Como Clarita debe subir 10 escalones pisando necesariamente el sexto escalón, entonces el número de maneras para hacerlo será igual al número de maneras para llegar al sexto, multiplicado por el número de maneras para ir del sexto al décimo.

Calculemos el número de maneras para llegar al sexto.

Las sucesiones que aparecen a continuacion indican la forma en que Clarita sube. Ejemplo: 1, 1, 2, 1, 1 quiere decir que subió los 2 primeros escalones de

1 en 1, luego el tercero y cuarto los subió de 2 en 2 (es decir dos escalones de un solo paso) y el quinto y sexto lo hizo de 1 en 1. Como Clarita nunca sube de tres en tres los términos de las sucesiones son 1 ó 2. Luego las maneras para llegar al sexto escalon son:

1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 2
1, 1, 1, 2, 1
1, 1, 2, 1, 1,
1, 2, 1, 1, 1
2, 1, 1, 1, 1
1, 1, 2, 2
1, 2, 2, 1
2, 2, 1, 1
1, 2, 1, 2
2, 1, 2, 1
2, 1, 1, 2
2, 2, 2.

Luego hay 13 formas para llegar al sexto escalón. Observe que hemos agrupado las sucesiones de acuerdo a que si Clarita no dió pasos de 2 en 2, dió un sólo paso de 2 en 2, dió sólo dos pasos de 2 en 2 o si dió tres pasos de 2 en 2.

Como en el caso anterior calculemos las formas de ir del sexto al décimo escalón.

1, 1, 1, 1
1, 1, 2
1, 2, 1
2, 1, 1
2, 2.

Tenemos 5 formas de llegar del sexto al décimo escalón.

Por lo tanto el número de formas de subir la escalera son $13 \times 5 = 65$.

Problema 11 Sea y=número de gallinas y x=número de conejos. Luego tenemos las ecuaciones

$$x + y = 21, \quad 4x + 2y = 54$$

Resolviendo tenemos que $x = 6$, $y = 15$

Por lo tanto cazaron 6 conejos y 15 gallinas.

Problema 12 Como el triángulo ABP es rectángulo:

$\measuredangle A = 65°$ (ya que el $\measuredangle d = 25°$); además como el triángulo ABC es isósceles; $\measuredangle A = \measuredangle C$.

Luego $\measuredangle C = 65°$.

Problema 13 Sabemos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

además

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Por lo tanto las fracciones son

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6} \text{ y } \frac{1}{12}$$

Problema 14 De la segunda suma tenemos que $B = 7$, de la primera $C = 5$ (ya que $B+C$ termina en 2) , finalmente de la primera o segunda suma tenemos que $A = 4$.

Problema 15 Sea A el reloj que se adelantaba 10 minutos por día y sea B el que se atrasaba 15 minutos por día. En 6 días el reloj A se adelanta 60 minutos (1 hora), o sea para que se adelante 24 horas deben pasar $6 \times 24 = 144$ días y de esa forma volver a coincidir con el reloj de la hora exacta.

Por otro lado el reloj B en 4 días se atrasa 60 minutos (1 hora), es decir, para que se atrase 24 horas deben pasar $4 \times 24 = 96$ días y asi coincidir nuevamente con el reloj exacto. O sea para que el reloj A dé la hora exacta deben pasar 144 días o un múltiplo de de éste y para que el reloj B dé la hora exacta deben pasar 96 días o un múltiplo de éste.

Si queremos que ambos relojes vuelvan a dar la hora exacta en el mismo momento, el número de días que debe pasar es un común múltiplo de 144 y 96. Por lo tanto para que los tres relojes den las 12 a.m. nuevamente deben pasar 288 días (o un múltiplo de éste).

Problemas - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Encuentra tres números enteros consecutivos cuya suma sea 3,699.

Problema 2 Un editor empaca libros en cajas de 10 o 24. Ayer empacó 198 libros y usó más de 10 cajas. ¿Cuántas cajas de cada tipo usó ayer?

Problema 3 La profesora de ingles pidió una libreta de 100 hojas. Como tarea, hay que enumerar todas las hojas, por ambos lados. El cuaderno tiene 4 páginas que no se enumeran. ¿Cuántas veces habrá que escribir el número 5?

Problema 4 Los chicos de la cuadra formaron un club. Se reúnen todos los sábados a jugar a las canicas, y compran, entre todos, siempre la misma cantidad de canicas, que al terminar el juego, reparten en partes iguales, sin que sobre ninguna. Un sábado, Rodrigo falta a la cita, pero como ellos no lo sabían compran la misma cantidad de canicas que siempre. Cuando termina el juego, al hacer el reparto, no sobra ninguna canica y cada uno se lleva 7 canicas más que de costumbre. El sábado siguiente, Rodrigo viene con un amigo sin avisar. Al terminar el juego, de nuevo el reparto es exacto y a cada uno le tocan 5 canicas menos que de costumbre. ¿Cuántos miembros tiene el club?

Problema 5 Si un rombo tiene diagonales que miden 6 cm. y 8 cm. respectivamente, ¿cuánto mide su perímetro y su área?

Problema 6 Un hombre viaja con un lobo, una cabra y un saco de lechugas. La cabra no se puede dejar sola con las lechugas, ni el lobo con la cabra, porque uno se comería al otro. Sin embargo, al lobo no le interesan las lechugas. El grupo tiene que cruzar un río, pero la lancha solo puede aguantar al hombre y a uno de sus acompañantes (lobo, cabra o lechugas). ¿Cómo hacer el viaje? ¿Cuál es el mínimo número de viajes que hay que dar?

Soluciones - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Llamemos n al menor de esos tres números, por lo tanto los dos siguientes serán $n+1$ y $n+2$. La suma de esos tres números debe ser 3,699:

$$\begin{aligned} n+(n+1)+(n+2) &= 3,699 \\ 3n+3 &= 3,699 \\ 3n &= 3,696 \\ n &= 1,232 \end{aligned}$$

Los números enteros consecutivos cuya suma es 3,699 son: $1,232$; $1,233$ y $1,234$.

Problema 2 Vamos a suponer que tratamos de empacar todos los libros en cajas de 10, eso significa que usariamos 19 cajas y sobrarían 8 libros, como con 8 libros no podemos llenar ninguna caja, esta combinación no nos sirve (todas las cajas deben estar completamente llenas).

Si usamos 18 cajas de 10, sobrarían 18 libros, con lo que no podemos llenar completamente una caja de 24.

Si usamos 17 cajas de 10, sobrarían 28 libros, podemos poner 24 de esos 28 libros en una caja, pero sobrarían 4.

Si usamos 16 cajas de 10, sobrarían 38 libros, podemos poner 24 de esos libros en una caja, pero sobrarían 14.

Si usamos 15 cajas de 10, sobrarían 48 libros, esos 48 libros los podemos poner en 2 cajas de 24 y no sobra ni falta nada.

Se puede verificar fácilmente que la siguiente combinacion exacta es 7 cajas de 24 y 3 cajas de 10, pero en este caso se usarían sólo 10 cajas.

Por lo tanto, se usaron 15 cajas de 10 libros y 2 cajas de 24 libros para empacar los 198 libros.

Otra forma de resolver este problema es hallando las soluciones de la ecuación $10x + 24y = 198$, donde y representa el número de cajas de 24 libros y x representa el número de cajas de 10 libros. Como 198 es divisible por 3 y $24y$ es divisible por 3, entonces x es divisible por 3. Esto reduce el número de pruebas que hay que realizar en el tanteo.

Problema 3 En total hay que enumerar 196 páginas, los números menores que 100 en los que hay que escribir al menos un 5 son: 5, 15, 25, 35, 45, $50-59$, 65, 75, 85, 95. En estos números hay que escribir 20 veces el número 5. La lista de números mayores de 100 en los que hay que escribir al menos un 5 es igual a la de los menores; sumándole 100 a cada número (105, 115, etc). Por lo tanto hay que escribir; en total; 40 veces el número 5.

Problema 4 Llamemos x la cantidad de canicas que compran usualmente, m el número de miembros y c el número de canicas que usualmente le corresponde a cada miembros. Entonces se cumple que:

$$x = mc$$

El sábado que Rodrigo faltó a la cita

$$\begin{aligned} x &= (m-1)(c+7) \\ x &= mc + 7m - c - 7 \end{aligned}$$

y como $x = mc$, entonces

$$
\begin{aligned}
mc &= mc + 7m - c - 7 \\
0 &= 7m - c - 7 \\
c &= 7m - 7
\end{aligned}
$$

El sábado que Rodrigo trajo a su amigo

$$
\begin{aligned}
x &= (m+1)(c-5) \\
x &= mc - 5m + c - 5
\end{aligned}
$$

Como $x = mc$, entonces

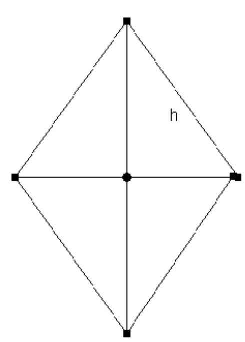
$$
\begin{aligned}
mc &= mc - 5m + c - 5 \\
0 &= -5m + c - 5 \\
c &= -5m - 5
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
7m - 7 &= -5m - 5 \\
7m + 5m &= 7 - 5 \\
12m &= 2 \\
m &= 6
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el club tiene 6 miembros.

Problema 5 Las diagonales del rombo son perpendiculares entre si, con ellas podemos dividir el rombo en 4 triángulos rectángulos cuyas hipotenusas miden h (las hipotenusas de los triángulos rectángulos así construidos son los lados del rombo).



La medida de la hipotenusa la podemos encontrar usando el famoso Teorema de Pitágoras

$$
\begin{aligned}
h^2 &= 4^2 + 3^2 \\
h^2 &= 16 + 9 \\
h^2 &= 25 \\
h &= 5
\end{aligned}
$$

Como las hipotenusas miden 5 cm, el perímetro de dicho rombo es 5 $cm \times 4 =$ 20 cm.

El área del rombo será la suma de las áreas a de los 4 triángulos formados, pero como estos son iguales; basta hallar el área de uno de ellos y multiplicarla por 4.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} \\
a &= \frac{12\ cm^2}{2} \\
a &= 6\ cm^2
\end{aligned}
$$

Como el área de cada uno de los 4 triángulos es 6 cm^2, el área del rombo es 6 $cm^2 \times 4 = 24\ cm^2$.

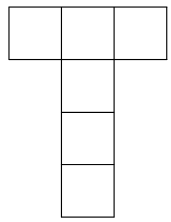
Problema 6 Es claro que no se pueden dar sólo 3 viajes; es decir; llevarlos uno por uno, ya que eso implicaría que la cabra en algún momento se quedaría sola con la lechuga, o el lobo con la cabra. Por lo tanto debe dar por lo menos 4 viajes.

El hombre en el primer viaje deja al lobo y a la lechuga, y se lleva a la cabra. Despues regresa y se lleva consigo a la lechuga y deja al lobo, pero se regresa con la cabra (la cabra se comería la lechuga si la dejan sola con ella). Al llegar a la orilla, deja la cabra y se lleva al lobo. Finalmente regresa por la cabra.

En total el hombre tiene que hacer exactamente 4 viajes.

Problemas - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Colocar en cada casilla un dígito diferente de modo que la suma de los números de la horizontal sea 22 y la suma de los números de la vertical sea 11.



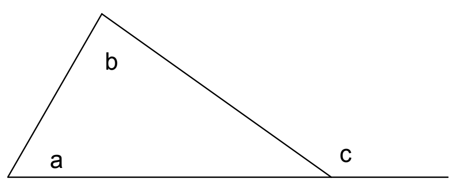
Problema 2 El último viernes de cierto mes es el día 25 del mes. ¿Qué día de la semana es el primer día de ese mes?

Problema 3 Juan quiere hacer un viaje de Mayagüez a San Juan haciendo dos paradas. La primera parada puede ser Aguada o Añasco. La segunda parada puede ser Quebradillas, Camuy o Hatillo. ¿De cuántas maneras puede hacer Juan el viaje?

Problema 4 Si a se divide por b el resultado es $\frac{3}{4}$. Si b se divide por c, el resultado es $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es el resultado cuando a se divide por c?

Problema 5 La suma de 7 números impares consecutivos es 119. ¿El menor de esos números es?

Problema 6 Si el ángulo $a = 40°$ y el ángulo $b = 60°$, hallar el ángulo c.



Problema 7 Hallar todos los números de 4 dígitos de la forma $3AA2$ que sean divisibles por 3.

Problema 8 El perímetro de un rectángulo es 20 pies y la medida de cada lado es un número entero. ¿Cuántos rectángulos distintos con estas condiciones existen?

Problema 9 A y B son dos números diferentes seleccionados de los primeros cuarenta números naturales (1 al 40 inclusive). ¿Cuál es el máximo valor que la siguiente expresión puede tener?

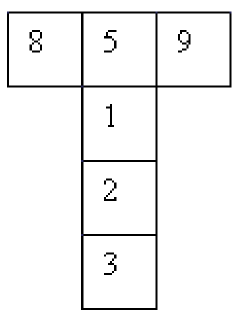
$$\frac{A \times B}{A - B}$$

Problema 10 Seis niños toman 16 dulces. Ángela toma un dulce, Andrea toma dos y Vanesa toma tres. Carlos Gil toma tantos dulces como su hermana, Pedro Pérez toma el doble de su hermana y Ramón Martínez el triple de su hermana. ¿Cuál es el apellido de Ángela?

Soluciones - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Sea x el valor del cuadrado que comparten la horizontal y la vertical, como se puede ver en la figura.

Entonces $x \leq 5$,de lo contrario la suma de la vertical sería mayor que 11 (ya que la mínima suma sería $x + 1 + 2 + 3$). Además $x \geq 5$, de lo contrario la suma de la horizontal sería menor que 22 (ya que la máxima suma sería $x + 9 + 8$), luego tenemos que $x = 5$. Finalmente los números que corresponden a la vertical son 1, 2, 3, 5 y los que corresponden a la horizontal son 8, 9, 5.



Problema 2 La fecha del último viernes es 25. Calculando las fechas de los viernes anteriores tenemos:

viernes $25 - 7 = 18$,
viernes $18 - 7 = 11$,
viernes $11 - 7 = 4$.
Luego el 3 es jueves, el 2 es miércoles y el 1 es martes.
Por lo tanto el primer día del mes es martes.

Problema 3 Si Juan hace la primera parada en Aguada, tiene tres formas de hacer el viaje (haciendo la segunda parada en Quebradillas, Camuy o Hatillo).

Igualmente, si hace la primera parada en Añasco tiene otras tres formas de hacer el viaje.

Por lo tanto Juan puede hacer el viaje de 6 formas distintas.

(ver la solución del Problema 15 de la Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel I)

Problema 4 Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \quad \frac{b}{c} = \frac{5}{6}$$

multiplicando ambas ecuaciones y simplificando tenemos que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{8}$$

Por lo tanto $\frac{a}{c} = \frac{5}{8}$.

Problema 5 Sean $2x-5$, $2x-3$, $2x-1$, $2x+1$, $2x+3$, $2x+5$, $2x+7$ siete números impares consecutivos, luego tenemos la ecuación:

$$2x-5+2x-3+2x-1+2x+1+2x+3+2x+5+2x+7 = 119$$

Resolviendo tenemos

$$\begin{aligned} 14x+7 &= 119 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto el menor número es $2 \times 8 - 5 = 11$.

Problema 6 En el triángulo, el $\measuredangle c$ es un ángulo externo del triángulo, luego su medida es igual a la suma de la medida de los ángulos internos no adyacentes, entonces

$$m\measuredangle c = m\measuredangle a + m\measuredangle b = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$$

Problema 7 Los posibles números son:

$$3,002; 3,112; 3,222; 3,332; 3,442; 3,552; 3,662; 3,772; 3,882; 3,992$$

Además para que un número sea divisible por tres la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de tres.

Por lo tanto, verificando la propiedad anterior tenemos que los números de la forma $3AA2$ que son divisibles por tres son:

3,222; 3,552 y 3,882.

Otra forma de resolver el problema es sabiendo que $3 + A + A + 2 = 5 + 2A$ debe ser divisible por 3. Sustituyendo A por $0, 1, 2..., 9$ se tiene que $A = 2$, $A = 5$ o $A = 8$.

Problema 8 Sea l=largo del rectángulo, a=ancho del rectángulo; luego tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 2a + 2l &= 20 \\ l + a &= 10 \end{aligned}$$

Luego las posibles soluciones enteras para l y a son: 9,1 ; 8,2 ; 7,3 ; 6,4 ; 5,5. Por lo tanto existen 5 rectángulos con dichas condiciones.

Problema 9 Buscando dos números del 1 al 40 tal que su producto (numerador) sea lo mayor posible y cuya diferencia (denominador) sea la menor posible, vemos que para $A = 40$, $B = 39$ las condiciones se satisfacen. Luego

$$\frac{A \times B}{A - B} = \frac{40 \times 39}{40 - 39} = \frac{1,560}{1} = 1,560$$

Este resultado es óptimo pues se obtiene el menor denominador posible (uno) y el mayor numerador posible (1,560), por lo tanto se obtiene la mayor fracción posible.

Problema 10 Indiquemos los dulces que toman cada uno de los niños.

Angela 1	Carlos Gil tantos como su hermana
Andrea 2	Pedro Pérez el doble de su hermana
Vanesa 3	Ramon Martínez el triple de su hermana

Claramente Ramón no puede ser hermano de Vanesa, ya que habría tomado 9 dulces que sumado con los de las niñas serían 15 dulces, imposible ya que Carlos y Pedro deben tomar por lo menos 4, y en total sumarían 19.

De la misma forma Ramón no puede ser hermano de Andrea, ya que habría tomado 6 dulces que sumado con los de las niñas serían 12 dulces, imposible ya que Carlos y Pedro por lo menos habrían tomado 5 dulces.

Por lo tanto Ramón es hermano de Angela, luego el apellido de Angela es Martínez.

Problemas - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 La plaza es un cuadrado de 5 bloques de lado. Pablo camina siempre al mismo ritmo y tarda 60 minutos en dar dos vueltas a la plaza. ¿Cuánto tiempo tarda Pablo en recorrer un bloque?

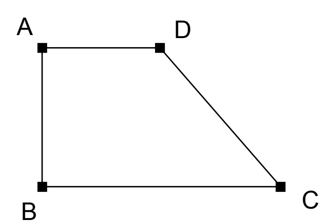
Problema 2 Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 se quieren formar números de 4 dígitos distintos. Si el 3 debe ocupar el lugar de las centenas o el lugar de las decenas, ¿cuántos números distintos se pueden armar?

Problema 3 El abuelo retiró \$145 del banco. El banco disponía solo de billetes de \$2 y de \$5. No le dieron ninguna moneda. ¿Cuántos billetes de cada clase pudo haber retirado? Enumera todas las posibilidades.

Problema 4 Un frasco de medicinas con 20 tabletas iguales pesa 270 gramos. El mismo frasco, con 15 tabletas, pesa 240 gramos. ¿Cuánto pesa el frasco vacío?

Problema 5 ¿Cuántos números impares de tres dígitos hay tales que cada dígito es un divisor de 12?

Problema 6 El trapecio rectángulo $ABCD$ tiene $196cm^2$ de área, $AB = BC$ y $BC = 2AD$. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



Soluciones - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2003-04 - Nivel I

Problema 1 Dar vuelta a la plaza es equivalente a caminar 20 bloques (5 bloques por cada lado), 2 vueltas a la plaza son 40 bloques. Pablo tarda 60 minutos en dar 2 vueltas a la plaza (o lo que es lo mismo: Pablo tarda 60 minutos caminando 40 bloques).

Como Pablo camina siempre al mismo ritmo, siempre emplea el mismo tienpo en caminar un bloque, entonces el tiempo que emplea en caminar un bloque será:

$$\begin{aligned} t &= \frac{60 \text{ min}}{40} = \frac{6}{4}\text{min} \\ t &= \frac{3}{2}\text{ min} \quad = 1.5 \text{ min} \end{aligned}$$

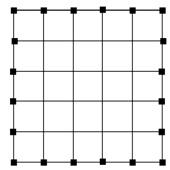


Figura 1:

Pablo tarda en recorrer un bloque 1.5 min.

Problema 2 Hay 2 casos: el 3 está en las centenas o el 3 está en las decenas. Examinemos el primer caso:

Si el 3 está en las centenas, quedan 3 dígitos retantes para ocupar la casilla de los miles. Una vez escogida la casilla de los miles, quedan 2 dígitos para las decenas. Al esgoger el de las decenas, sólo queda un dígito restante para las unidades. Es decir, la cantidad de números que se pueden construir será: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

El segundo caso es muy similar. Si el 3 ocupa el lugar de las decenas, quedan 3 dígitos restantes para ocupar la casilla de los miles. Una vez escogida la casilla de los miles, quedan 2 dígitos para las centenas. Al escoger el de las decenas, sólo queda un dígito restante. Es decir, la cantidad de números que se pueden construir será: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

La cantidad total de números que se pueden formar sera la suma de las cantidades en los 2 casos: $6 + 6 = 12$.

Problema 3 \$10 dólares se pueden entregar con 2 billetes de \$5, o con 5 billetes de \$2, y es la cantidad de dinero mas pequeña que se puede dar sólo con billetes de \$2 o sólo con billetes de \$5. Teniendo eso en cuenta

Billetes de \$5	Billetes de \$2
29	0
27	5
25	10
23	15
21	20
19	25
17	30
15	35
13	40
11	45
9	50
7	55
5	60
3	65
1	70

Problema 4 La direrencia entre los pesos $(270g - 240g = 30g)$ es el peso de 5 tabletas. Eso significa que cada tableta pesa $6g$. Entonces 20 tabletas pesan $20 \times 6g = 120g$. Si el frasco con 20 tabletas pesa $270g$, entonces el frasco vacío pesa: $270g - 120g = 150g$.

Problema 5 En la cifra de las centenas puede ir cualquier divisor de 12 $(6, 4, 3, 2, 1)$; es decir; hay 5 posibilidades, al igual que en el de las decenas. En el de las unidades puede ir cualquier divisor de 12 que sea impar $(3, 1)$, o sea 2 posibilidades. Es decir en total hay $5 \times 5 \times 2 = 50$ números distintos.

Problema 6 El área el trapecio es

$$\frac{(\text{base menor} + \text{base mayor})\text{altura}}{2} = \frac{(\overline{BC} + \overline{AD})\overline{AB}}{2}$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, y $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, entonces:

$$\begin{aligned} area &= \frac{(2\overline{AD} + \overline{AD})2\overline{AD}}{2} \\ 196\ cm^2 &= 3\overline{AD}^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para $\overline{AD}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \frac{196\ cm^2}{3} \\ \overline{AD}^2 &= \frac{196}{3} cm^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, el área del triángulo ABC es

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} \\
b &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \\
b &= 2\overline{AD}^2 \\
b &= 2(\frac{196}{3}cm^2) \\
b &= \frac{392}{3}cm^2
\end{aligned}$$

Nivel II

Año Académico 2001-02

Problemas - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2001-02 - Nivel II

Problema 1 Catalina tiene 20 billetes en su billetera. Son billetes de \$1, \$2 y \$5 y su valor total es de \$50. Si tiene más billetes de \$5 que de \$1, ¿Cuántos billetes de \$1 tiene Catalina?

Problema 2 Encuentre una lista de cinco primos diferentes donde la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la lista sea seis. Pruebe que la lista es única.

Problema 3 Suponer que n es un entero impar positivo y n no es divisible por 3. Halle el residuo al dividir n^2 entre 24.

Problema 4 Dados seis números positivos a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Pruebe que la desigualdad siguiente es cierta:

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

Problema 5 En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar los números enteros del 1 al 16 (uno en cada cuadrito).

a) Pruebe que es posible colocarlos de tal forma que los números que aparecen en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 4.

b) Pruebe que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparezcan en cuadritos que comparten un lado tengan diferencia menor o igual que 3.

Problema 6 Sea ABC un triángulo, y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F puntos diferentes, distintos de D, de modo que:

a) La línea determinada por E y F pasa por D.

b) El segmento $\overline{AE}$ es perpendicular al segmento $\overline{BE}$.

c) El segmento $\overline{AF}$ es perpendicular al segmento $\overline{CF}$.

Demuestre que si M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ respectivamente, entonces el segmento $\overline{AN}$ es perpendicular al semento $\overline{NM}$.

Soluciones - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2001-02 - Nivel II

Problema 1 Sean u, d, c las cantidades de billetes de \$1, \$2, y \$5, respectivamente, que tiene Catalina. Del enunciado sabemos lo siguiente:

$$\begin{cases} u + d + c = 20 & (1) \\ u + 2d + 5c = 50 & (2) \\ u, d, c \geqslant 1 \text{ y } c > u & (3) \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos: $d + 4c = 30$. Por lo tanto, $3 \leqslant c \leqslant 7$, ya que si $c \geqslant 8$, entonces $4c \geqslant 32$, y $30 = d + 4c \geqslant 32$, absurdo; y si $c \leqslant 2$, entonces $4c \leqslant 8$, entonces $30 = d + 4c \leqslant d + 8$, y $d \geqslant 22$, contradicción con (1) y (3).

Si $c = 3$, entonces $d = 18$, contradicción con (1) y (3).

Si $c = 7$, entonces $d = 2$, entonces $u = 11$, contradicción con (3), ya que $c > u$.

Si $c = 6$, entonces $d = 6$, entonces $u = 8$, contradicción con (3), ya que $c > u$.

Si $c = 5$, entonces $d = 10$, entonces $u = 5$, contradicción con (3), ya que $c > u$.

Si $c = 4$, entonces $d = 14$, entonces $u = 2$, y esto es consistente con (2).

Por lo tanto, Catalina tiene 2 billetes de \$1.

Problema 2 Enumerando los primeros números primos, encontramos que una lista con dicha propiedad es $5, 11, 17, 23, 29$. Ahora probaremos que es la única con dicha propiedad. Sea p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 una lista con dicha propiedad, donde $p_2 = p_1 + 6$, $p_3 = p_2 + 6 = p_1 + 12$, $p_4 = p_1 + 18$, $p_5 = p_1 + 24$. Tenemos que:

$p_1 \equiv p_1 \bmod 5$

$p_2 = p_1 + 6 \equiv p_1 + 1 \bmod 5$

$p_3 = p_1 + 12 \equiv p_1 + 2 \bmod 5$

$p_4 = p_1 + 18 \equiv p_1 + 3 \bmod 5$

$p_5 = p_1 + 24 \equiv p_1 + 4 \bmod 5$

Por lo tanto, exactamente uno de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 es divisible entre 5.

Como p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 son primos, esto significa que uno de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 es igual a 5. Como la diferencia entre cualesquiera dos primos consecutivos en la lista es 6, tenemos que $p_1 = 5$, y la lista es $5, 11, 17, 23, 29$.

Problema 3 Como n es un entero impar positivo que no es divisible entre 3, n tiene que ser de la forma $6k + 1$ ó $6k + 5$ para algun entero no negativo k, porque no puede ser de la forma $6k$, ni $6k+2$, ni $6k+4$, ya que éstos son pares, y no puede ser de la forma $6k + 3$, ya que éste es divisible entre 3.

Caso $n = 6k + 1$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (6k+1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 \\ &= 24k^2 + 12k^2 + 12k + 1 \\ &= 24k^2 + 12k(k+1) + 1 \end{aligned}$$

Ahora, $24 \mid 24k^2$, y como k y $k+1$ son dos enteros consecutivos, uno de ellos es par, por lo tanto $24 \mid 12k(k+1)$.

Entonces, $n^2 = 24k^2 + 12k(k+1) + 1 \equiv 1 \bmod 24$
Caso $n = 6k+5$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (6k+5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 \\ &= 24k^2 + 12k^2 + 48k + 12k + 24 + 1 \\ &= 24(k^2 + 2k + 1) + 12k(k+1) + 1 \end{aligned}$$

Similarmente $24 \mid 24(k^2+2k+1)$ y $24 \mid 12k(k+1)$.
Entonces, $n^2 = 24(k^2+2k+1) + 12k(k+1) + 1 \equiv 1 \bmod 24$
Por lo tanto, si n es un entero impar positivo que no es divisible entre 3, entonces el residuo al dividir n^2 entre 24 es 1.

Problema 4 Para $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3} \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}} \geqslant \frac{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}} + \frac{\sqrt[3]{b_1b_2b_3}}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sqrt[3]{\frac{a_1+b_1}{a_1} \times \frac{a_2+b_2}{a_2} \times \frac{a_3+b_3}{a_3}} \geqslant 1 + \sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1} \times \frac{b_2}{a_2} \times \frac{b_3}{a_3}} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sqrt[3]{\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)\left(1+\frac{b_3}{a_3}\right)} \geqslant 1 + \sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1} \times \frac{b_2}{a_2} \times \frac{b_3}{a_3}} \end{aligned}$$

Ahora, como $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 > 0$, podemos tomar $x = \frac{b_1}{a_1}$, $y = \frac{b_2}{a_2}$, $z = \frac{b_3}{a_3}$, donde $x, y, z > 0$, y sustituir en la última ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)} \geqslant 1 + \sqrt[3]{xyz} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sqrt[3]{1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz} \geqslant 1 + \sqrt[3]{xyz} \\ \Longleftrightarrow\quad & 1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz \geqslant 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz \\ \Longleftrightarrow\quad & x+y+z+xy+xz+yz \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{x+y+z}{3} + \frac{xy+xz+yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{(xyz)^2} \end{aligned}$$

Pero ésta última desigualdad es cierta, ya que por las desigualdades de Media Aritmética y Media Geométrica, tenemos: $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, y $\frac{xy+xz+yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{(xy)(xz)(yz)} = \sqrt[3]{(xyz)^2}$. Por lo tanto, la desigualdad original es cierta.

Problema 5

Parte (a) La siguiente cuadrícula cumple con la propiedad deseada:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Parte (b) Denotemos por (i, j) el cuadrito en la fila i y en la columna j de la cuadrícula. Definamos *la distancia* entre dos números que aparecen en cuadritos (i_1, j_1) y (i_2, j_2) respectivamente, como el número $|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2|$. Por ejemplo, en la cuadrícula de la Parte (a), la distancia entre el 1 y el 15 es 5.

Observe que para que los números que aparezcan en cuadritos adyacentes tengan diferencia $\leqslant 3$, la distancia entre cualquier m y n ($m, n \in \{1, 2, \ldots, 16\}$) tiene que ser por lo menos $\left\lceil \frac{|m-n|}{3} \right\rceil$, (el menor número entero mayor o igual que $\frac{|m-n|}{3}$).

Por lo tanto, la distancia entre el 1 y el 16 tiene que ser por lo menos 5, ya que el 1 puede estar adyacente a lo más al 4, el 4 a lo más al 7, el 7 al 10, el 10 al 13, y el 13 al 16. Por lo tanto, uno de 1 o 16 tiene que aparecer en un cuadrito de la esquina, de lo contrario si ninguno de los dos aparecería en un cuadrito de la esquina, entonces la distancia entre ellos sería a lo más 4, que es absurdo. Asumamos entonces, sin perder la generalidad, que el 1 aparece en el cuadrito $(1, 1)$.

También, la distancia entre el 2 y el 16 y entre el 3 y el 16 tiene que ser por lo menos 5, por lo tanto el 16 tiene que ir en $(4, 4)$, de lo contrario, como el $(1, 1)$ ya está ocupado la distancia entre el 2 y el 16 sería a lo mas 4, que sería absurdo.

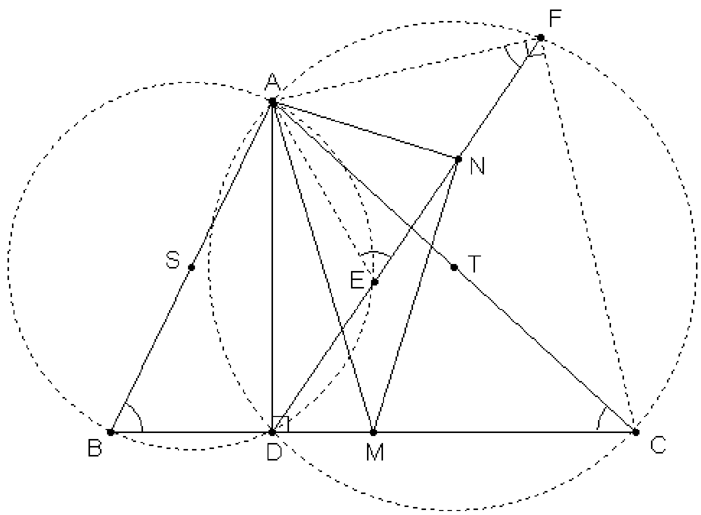
Como la distancia entre el 1 y el 15 y entre el 1 y el 14 tiene que ser por lo menos 5, el 14 y el 15 tienen que ir en $(3, 4)$ y $(4, 3)$. Asumamos, sin perder la generalidad, que el 14 va en $(4, 3)$ y el 15 en $(3, 4)$. Similarmente, como la distancia entre el 2 y el 16 y entre el 3 y el 16 tiene que ser por lo menos 5, el 2 y el 3 tienen que ir en $(2, 1)$ y $(1, 2)$. Asumamos, sin perder la generalidad, que el 2 va en $(2, 1)$ y el 3 en $(1, 2)$.

1	3		
2			
			15
		14	16

Ahora, como la distancia entre el 1 y el 13 tiene que ser por lo menos 4, y como los cuadritos $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$ ya están ocupados, el 13 solo puede ir en $(4, 2)$, $(3, 3)$, o $(2, 4)$. Dondequiera que vaya el 13, su distancia del 3 va a ser 3, que es absurdo, ya que su distancia del 3 tiene que ser por lo menos 4.

Por lo tanto, no es posible colocar los números en la cuadrícula en la manera enunciada.

Problema 6



Sean S y T los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Como $\overline{AE} \perp \overline{BE}$, el punto E está en el círculo con centro en S cuya diagonal es $\overline{AB}$. Este círculo S también pasa por D, ya que $\measuredangle ADB = 90°$. Por lo tanto, el cuadrilátero $AEDB$ es cíclico. Similarmente, como $\overline{AF} \perp \overline{CF}$, el punto F está en el círculo con centro en T cuya diagonal es $\overline{AC}$. Este círculo T también pasa por D, ya que $\measuredangle ADC = 90°$. Por lo tanto, el cuadrilátero $ADCF$ es cíclico.

Como $AEDB$ es cíclico, los ángulos $\measuredangle ABD$ ($= \measuredangle ABC$) y $\measuredangle AED$ son suplementarios. Como los ángulos $\measuredangle AED$ y $\measuredangle AEF$ también son suplementarios, tenemos que $\measuredangle ABC = \measuredangle AEF$. Como $ADCF$ es cíclico, $\measuredangle DCA = \measuredangle DFA$, por lo tanto $\measuredangle BCA = \measuredangle EFA$. Por lo tanto, tenemos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AEF$ son similares.

Como $\triangle ABC$ y $\triangle AEF$ son similares, y M y N son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ respectivamente, tenemos que los triángulos $\triangle AMC$ y $\triangle ANF$ son similares. Por lo tanto, $\measuredangle MAC = \measuredangle NAF$.

Entonces, $\measuredangle MAC + \measuredangle CAN = \measuredangle CAN + \measuredangle NAF$, así que $\measuredangle MAN = \measuredangle CAF$.

Pero como $ADCF$ es cíclico, $\measuredangle CAF = \measuredangle CDF (= \measuredangle MDN)$, y entonces $\measuredangle MAN = \measuredangle MDN$.

Por lo tanto, el cuadrilátero $ADMN$ es cíclico, así que los ángulos $\measuredangle ADM$ y $\measuredangle ANM$ son suplementarios, y entonces $\measuredangle ANM = 90°$.

Año Académico 2002-03

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 Cuando los alumnos van de la escuela al campamento, lo hacen en filas de tres. Maty, Ana y Carolina observan que son las séptimas contando desde el principio y las quintas contando desde el final. ¿Cuántos alumnos van al campamento?

a) 2
b) 12
c) 30
d) 33
e) 36

Problema 2 Las maestras Nilsa, Helen y Madeline tienen apellidos Nuñez, Hernández y Méndez, no necesariamente en ese orden. Determina el apellido de Madeline sabiendo que:
- El nombre y el apellido no tienen las mismas iniciales.
- Nilsa come carne y la Srta. Méndez es vegetariana.

a) Nuñez
b) Hernández
c) Méndez
d) Martínez
e) ninguna de las anteriores

Problema 3 30! representa el producto de todos los números naturales del 1 al 30. Si este producto se factoriza en factores primos, ¿Cuántos 5 tendrá la factorización?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) ninguna de las anteriores

Problema 4 La siguiente figura es un cuadrado mágico al que le faltan algunas entradas. Cuando se completa, la suma de las cuatro entradas en cada columna, en cada fila, y en cada diagonal es la misma. Hallar el valor de A y B.

A		7	12
	4	9	
	5	16	
8	11		B

a) A=1, B=13
b) A=13, B=1
c) A=5, B=7
d) A=7, B=5
e) ninguna de las anteriores

Problema 5 El promedio de 3 fracciones es 1. Dos de las fracciones son "*seis quintos*" y "*tres medios*". ¿Cuál es la otra fracción?

a) 1/2
b) 2/5
c) 1/10
d) 2/10
e) ninguna de las anteriores

Problema 6 La hora en las Islas Bermudas es 4 horas más adelante que la hora en Los Ángeles. Un avión sale de las Bermudas a las 10:00 a.m. (tiempo local) y llega a Los Ángeles a la 1:00 p.m. (tiempo local) del mismo día. ¿Cuál fue el tiempo del vuelo en horas?

a) 5
b) 61
c) 2
d) 7
e) 3

Problema 7 Observa la secuencia: 1, 3, 7, 15, 31, 63,... ¿Cuál número sigue?

a) 103
b) 127
c) 131
d) 137
e) ninguna de las anteriores

Problema 8 A y B son dos números diferentes seleccionados de los números naturales del 1 al 40 inclusive. ¿Cuál es el máximo valor que $\frac{AB}{A-B}$ puede tener?

a) 380
b) 420
c) 1,560
d) 2,020
e) ninguna de las anteriores

Problema 9 Soy un número de dos dígitos. La suma de mis dígitos es 8. Si mis dígitos se invierten, el número así formado es yo menos 18. ¿Quién soy?

a) 17
b) 35
c) 53
d) 80
e) ninguna de las anteriores

Problema 10 En la siguiente multiplicación las letras representan dígitos diferentes, ¿el valor de la letra E es?

$$\begin{array}{r} AB \\ \times 5D \\ \hline AB \\ BE5 \\ \hline BA2B \end{array}$$

a) 1
b) 6
c) 8
d) 9
e) ninguna de las anteriores

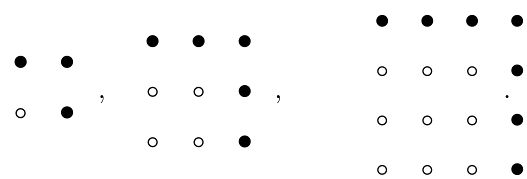
Problema 11 Cuatro alumnos pertenecen tanto al equipo de beisbol como al de baloncesto. Ellos representan el 10% del equipo de beisbol y el 25% del equipo de baloncesto. ¿Cuántos alumnos pertencen solo al equipo de baloncesto?

a) 24
b) 20
c) 16
d) 12
e) ninguna de las anteriores

Problema 12 Si $A + 1 = B + 2 = C - 3 = D + 4 = E - 5$, ¿Cuál de los números es el mayor?

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

Problema 13 Considera la siguiente sucesión de figuras:



. ¿Cuántos círculos blancos tendrá la décima figura?

a) 100
b) 120
c) 150
d) 200
e) ninguna de las anteriores

Problema 14 Julio, Uroyoán y Nilsa tienen edades diferentes. Si la suma de sus edades es tres veces la edad de Nilsa, entonces

a) Julio debe ser el menor
b) Nilsa puede ser la menor
c) La edad de Nilsa está entre las de Uroyoán y Julio
d) Uroyoán debe ser el menor
e) ninguna de las anteriores

Problema 15 ¿Cuántos números de dos dígitos son divisibles por 2 y por 7?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Problema 16 Escribimos en orden creciente los números enteros positivos que son iguales al producto de sus divisores positivos (distintos de ellos mismos). ¿Cuál es el *sexto* de esos números?

a) 14
b) 15
c) 21
d) 22
e) 25

Problema 17 Hallar el último dígito de la representación decimal finita del número $\frac{1}{5^{2,000}}$.

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 8

Problema 18 Considere el siguiente sistema de 25 ecuaciones y 26 incógnitas:

$$A + B = 1,\ B + C = 2,\ C + D = 3, \ldots, X + Y = 24,\ Y + Z = 25$$

¿Cuánto vale $A + Z$?

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

Problema 19 Un polígono regular de n lados tiene $6n$ diagonales (una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos). ¿Cuánto vale n?

a) 3
b) 15
c) 17
d) 35
e) 65

Problema 20 ¿Cuántos números enteros tienen la siguiente propiedad: su mayor divisor distinto de ellos mismos, es 91? (nota: cualquier entero es divisible por el mismo y por *uno*).

a) 8
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

Problema 21 Lápices de igual longitud se usan para construir una cuadrícula rectangular. ¿Si la cuadrícula tiene 20 lápices de alto y 10 lápices de ancho, el número de lápices utilizados es?

a) 30
b) 200
c) 410
d) 420
e) 430

Problema 22 El área de un triángulo con lados 21, 34 y 55 es:

a) 13/2
b) 2/5
c) 0
d) 5
e) 3

Problema 23 Suponga que n es tal que $3(1+2+3...+n) = 1,998$. Entonces n es igual a:

a) 30
b) 34
c) 35
d) 36
e) 37

Problema 24 Consideremos dos cuadrados, uno de lado x y uno de lado $x+y$, con $x, y > 0$. Supongamos que el área del cuadrado menor es una tercera parte del área del cuadrado mayor. ¿Cuál es la razón $\frac{x}{y}$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\sqrt{3}$-1
e) ninguna de las anteriores

Problema 25 El conjunto de números impares consecutivos $1, 3, 5, ..., N$ suma 400. ¿Cuántos números hay en este conjunto?

a) 19
b) 20
c) 21
d) 39
e) 40

Problema 26 El señor Zapata y su señora quieren bautizar al bebe Zapata de tal forma que las iniciales de sus dos nombres y su apellido estén en orden alfabético sin letras repetidas. ¿Cuántas combinaciones de iniciales, que cumplen con estas condiciones, pueden darse? (suponga que el alfabeto contiene 26 letras)

a) 276
b) 300
c) 552
d) 600
e) 15,600

Problema 27 Los puntos P y Q dividen al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC en tres partes iguales. Si el área del $\triangle PBQ$ es 12 cm^2, ¿cuál es el área en centímetros cuadrados del triángulo ABQ?

a) 12
b) 24
c) 36
d) no es posible determinarla
e) ninguna de las anteriores

Problema 28 Si a, b son números tales que $a > b > 0$ y $a^2 + b^2 = 6ab$ ¿a qué es igual $\frac{a+b}{a-b}$?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
c) $\sqrt{2}$
d) 2
e) 4

Problema 29 Los números $1, 2, 3, ..., 12$ se escriben en 2 filas y 6 columnas de tal modo que la suma de los números en cada una de las 2 filas son iguales entre si, y la suma de los números en cada una de las 6 columnas son también iguales entre si. Si el número 8 aparece en la primera fila, entonces el número de números pares en la segunda fila debe ser:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Problema 30 Considere la sucesión no decreciente de enteros positivos 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,..., en la cual el n-ésimo entero positivo aparece n veces. El residuo cuando el término $1,993$ de la sucesión se divide entre 5 es:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Problema 31 La sucesión creciente de enteros positivos $a_1, a_2, ...$ tiene la siguiente propiedad: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ para $n \geq 1$. Si $a_7 = 120$, entonces a_8 es?

a) 128
b) 168
c) 193
d) 194
e) 210

Problema 32 Consideremos *cinco* filas de *cinco* puntos cada una, una arriba de la otra, formando un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar con vértices en la colección de puntos anteriormente descrita?

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) ninguna de las anteriores

Problema 33 ¿Cuántos dígitos tiene el número $999999999999^2 - 1$?

a) 12
b) 18
c) 20
d) 24
e) ninguna de las anteriores

Problema 34 El producto de *tres* enteros positivos es $1,500$ y su suma es 45. ¿Cuál es el mayor de esos *tres* números?

a) 8
b) 15
c) 30
d) 45
e) 50

Problema 35 Un agente viajero debe visitar 5 ciudades. Las siguientes ciudades están unidas por carretera: 1 y 4, 1 y 5, 1 y 2, 5 y 4, 5 y 2, 5 y 3, 2 y 3, 4 y 3, 4 y 2. Si sólo puede visitar cada ciudad una vez y si parte de la ciudad 1, ¿cuántos caminos diferentes puede tomar?

a) 9
b) 18
c) 27
d) 36
e) 40

Problema 36 Considere el triángulo ABC. Sea X el pie de la altura desde B al lado $\overline{AC}$ y sea Y el pie de la altura desde A hasta el lado $\overline{BC}$. Sea T la intersección de estas dos alturas. Si $\measuredangle ABC = 50°$ y $\measuredangle BAC = 60°$, entonces $\measuredangle BTY$ es igual a:

a) $20°$
b) $25°$
c) $65°$
d) $30°$
e) $70°$

Problema 37 Sea ABC un triángulo equilátero. Considere el círculo inscrito en $\triangle ABC$. Sea EFG un triángulo equilátero inscrito en el círculo. ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos ABC y EFG?

a) $1/3$
b) $1/2$
c) 3
d) 4
e) 5

Problema 38 Una muestra consiste de cinco observaciones numéricas y tiene una media aritmética de 10 y una mediana de 12. El rango mas pequeño (el rango es la mayor observación menos la menor observación) que puede asumir tal muestra es:

a) 2
b) 5
c) 10
d) 3
e) 7

Problema 39 En la fiesta de Halloween cada varón le dió la mano a todos los invitados excepto a su pareja y ningún apretón de manos se llevó a cabo entre mujeres. Si 13 parejas asistieron a la fiesta, ¿cuántos apretones de manos se dieron entre estas 26 personas?

a) 78
b) 234
c) 312
d) 185
e) 325

Problema 40 Nueve esferas congruentes están empacadas dentro de un cubo de lado uno de tal forma que una de ellas tiene su centro en el centro del cubo y las otras son tangentes a la esfera central y a tres caras del cubo. ¿Cuál es el radio de las esferas?

a) 1-$\sqrt{3}/2$
b) $(2\sqrt{3}-3)/2$
c) $(\sqrt{3}(2-\sqrt{2}))/4$
d) $\sqrt{2}/6$
e) $1/4$

Problema 41 Un triángulo con lados enteros tiene perímetro 8, el área del triángulo es:

a) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{16}{9}\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) 4
e) $4\sqrt{2}$

Problema 42 Un *punto reticulado* es un punto en el plano con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos reticulados yacen en el segmento que une al punto $(3, 17)$ con el punto $(48, 281)$? (Incluya los extremos en su cuenta)

a) 2
b) 4
c) 6
d) 16
e) 46

Problema 43 ¿Cuántas parejas ordenadas (m, n) de enteros positivos son soluciones de $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) más de 4

Problema 44 Sea $\overline{PQ}$ una cuerda de un círculo con centro O y sea R un punto sobre el arco mayor determinado por PQ . Si el $\measuredangle OPR = 5°$ y el $\measuredangle OQP = 40°$, entonces el $\measuredangle OQR$ es de:

a) 30°
b) 35°
c) 40°
d) 45°
e) 50°

Problema 45 ¿Para cuántos números reales a tiene solamente soluciones enteras la ecuación cuadrática $x^2 + ax + 6a = 0$?

a) 0
b) 1
c) 4
d) 10
e) 12

Problema 46 Un entero positivo de n dígitos se llama "*curioso*" si sus n dígitos son un arreglo (*permutación*) del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ y sus primeros k dígitos forman un entero que es divisible por k, para $k = 1, 2, 3, ..., n$. Por ejemplo, 321 es un entero curioso de 3 dígitos. ¿Cuántos enteros positivos de 6 dígitos son curiosos?

a) 0
b) 2
c) 4
d) 12
e) 132

Problema 47 10 puntos son seleccionados en el eje x positivo y 5 son seleccionados en el eje y positivo. Se dibujan los 50 segmentos que conectan los 10 puntos seleccionado sobre el eje x con los 5 puntos seleccionados sobre el eje y. ¿Cuál es el máximo número posible de puntos de intersección de estos segmentos que caen en el interior del primer cuadrante?

a) 250
b) 450
c) 500
d) 1,250
e) 2,500

Problema 48 Un subconjunto de los enteros 1, 2,3,4,..., 100 tiene la propiedad que ninguno de sus miembros es tres veces otro. ¿Cuál es el máximo número de elementos que tal conjunto puede tener?

a) 50
b) 66
c) 67
d) 76
e) 78

Problema 49 Hallar el mayor entero distinto de $p+q$ que divide a $p+q$ para todo p y q primos cuyo producto es uno menos que un cuadrado perfecto y $p > 100$.

a) 6
b) 8
c) 12
d) 17
e) ninguna de las anteriores

Problema 50 Dos circunferencias son tangentes exteriormente en el punto C. Sea $\overline{AB}$ una tangente común, donde A y B son los puntos de tangencia. Hallar la longitud de los radios si sabemos que $\overline{AC} = 8$ y $\overline{BC} = 6$.

a) 20/3, 15/4
b) 10/3, 7/4
c) 5/3, 3/4
d) 26/3, 17/4
e) ninguna de las anteriores

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 Si Maty, Ana y Carolina observan que son las séptimas contando desde el principio, quiere decir que hay 6 alumnos delante de cada una de ellas, o sea 18 en total; además, si son las quintas contando desde el final, quiere decir que hay 4 alumnos detrás de cada una de ellas, o sea 12 en total.

Por lo tanto el total de alumnos que van al campamento es $3+18+12 = 33$.

Problema 2 Dado que Nilsa come carne y Méndez es vegetariana, Nilsa se apellida Nuñez o Hernández, entonces Nilsa se apellida Hernández (ya que el nombre y el apellido no deben tener las mismas iniciales); luego el apellido de Madeline o es Nuñez o es Méndez. Como Madeline no se puede apellidar Méndez (por la misma razon de antes), se tiene que Madeline se apellida Nuñez.

Problema 3 Sin realizar la factorización, podemos darnos cuenta que el número de cincos que la factorización tenga, se obtendrá de los factores que son múltiplos de cinco en el producto $1 \times 2 \times 3 \times ... \times 29 \times 30,$ es decir de 5, 10, 15, 20, 25 y 30; luego vemos que el primero tiene un 5, el segundo tiene un 5, el tercero tiene un 5 el cuarto también un 5, el quinto tiene dos 5 y el sexto uno. Por lo tanto el número de cincos de la factorización es 7.

Problema 4 Observe que la diagonal suma 34, luego cada fila y columna debe sumar 34 entonces el espacio en blanco de la tercera columna es claramente 2, de donde se tiene que $B = 13$ (sumando la última fila e igualando a 34). Por otro lado, el espacio en blanco de la segunda columna es 14 luego sumando la primera fila e igualando a 34, resulta que A=1.

Problema 5 Resolviendo la ecuación:

$$\frac{\frac{6}{5} + \frac{3}{2} + x}{3} = 1$$

tenemos que

$$x = 3 - \frac{27}{10}$$

o sea $x = \frac{3}{10}$.

Problema 6 Si el avión llegó a los Angeles a la 1:00 p.m., quiere decir que llegó cuando en las Islas Bermudas eran las 5:00 p.m.(por la diferencia de 4 horas), es decir que el avión salió a las 10:00 a.m. y aterrizó a las 5:00 p.m. con respecto al tiempo de las Islas Bermudas.

Por lo tanto el tiempo de vuelo fue 7 horas.

Problema 7 Claramente en la sucesión, todo término (excepto el primero) se consigue multiplicando el anterior por dos y sumando uno. Luego el número que sigue será :

$$2 \times 63 + 1 = 127$$

Problema 8 Para que $\dfrac{AB}{A-B}$ pueda tomar el valor máximo, debemos tratar que el numerador (AB) sea lo mayor posible y que el denominador $(A - B)$ sea lo menor posible.
Luego para $A = 40$, $B = 39$ se cumple con lo requerido y el máximo valor de $\dfrac{AB}{A-B}$ será $\dfrac{40 \times 39}{40 - 39} = 1,560.$

Problema 9 Sea ab el número, luego el número que resulta de invertir los dígitos es ba, entonces tenemos la ecuación

$$ba = ab - 18$$

que descomponiéndolo en unidades y decenas resulta

$$\begin{aligned} 10b + a &= 10a + b - 18 \\ 9b - 9a &= -18. \end{aligned}$$

Resolviendo esta última ecuación con la ecuación

$$a + b = 8$$

se tiene que $a = 5$, $b = 3$.

Problema 10 Al empezar la multiplicación tenemos que $D \times AB = AB$, luego el valor de D es 1. Además en la suma tenemos que $A + 5$ termina en 2, o sea que el valor de A debe ser 7; siguiendo con la suma tenemos que $E + 1 = A$.

Por lo tanto $E = 6$.

Problema 11 Dado que los 4 alumnos representan el 25 por ciento del equipo de baloncesto, entonces al equipo de baloncesto pertenecen 16 alumnos. Como 4 de ellos pertenecen a ambos equipos, el número de alumnos que pertenecen sólo al equipo de baloncesto es 12.

Problema 12 De $A + 1 = B + 2$ tenemos que $A - B = 1$, luego $A > B$

De $A + 1 = C - 3$ tenemos que $C - A = 4$ o sea $C > A$

De $C - 3 = D + 4$ se sigue que $C - D = 7$, luego $C > D$

Es decir C es mayor que A, B, D; pero de la igualdad

$C - 3 = E - 5$ se sigue que $E - C = 2$, o sea $E > C$

Por lo tanto E es el número mayor.

Problema 13 Si formamos una sucesión con el número de círculos blancos que aparecen en cada figura, tendríamos la sucesión:

$$1^2, 2^2, 3^2, ...$$

Vemos que el décimo término es 10^2. Por lo tanto la décima figura tendrá 100 círculos blancos.

Problema 14 Supongamos j, u, n son las edades de Julio, Uroyoan y Nilsa respectivamente. Luego tenemos que

$$j + u + n = 3n$$

de donde

$$j + u = 2n$$

y

$$n = \frac{j + u}{2}$$

Es decir, n es el punto medio entre j y u.

Por lo tanto la edad de Nilsa está entre las de Julio y Uroyoán.

Problema 15 El menor de ellos es 14. Hallando los múltiplos de 14 que tengan solo 2 dígitos tenemos:

$14,\ 28,\ 42,\ 56,\ 70,\ 84,\ 98.$

Por lo tanto son 7 los números de 2 dígitos que son divisibles por 2 y por 7.

Problema 16 Los números son:
$6 = 2 \times 3,$
$8 = 2 \times 4,$
$10 = 2 \times 5,$
$14 = 2 \times 7,$
$15 = 3 \times 5,$
$21 = 3 \times 7.$
Luego el sexto número es el 21.

Problema 17 Tenemos que:

$$\frac{1}{5^{2,000}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2,000} = (0.2)^{2,000} = ((0.2)^4)^{500} = (0.0016)^{500}$$

Como el producto de números que terminan en $6,$ es un número que termina en $6,$ se tiene que el último dígito de la representación decimal finita de $\frac{1}{5^{2000}}$ es 6.

Problema 18 Restando a la primera la segunda ecuación tenemos:

$A - C = -1,$ sumando ésta a la tercera tenemos:

$A + D = 2,$ restando a ésta la cuarta tenemos:

$A - E = -2,$ sumando a ésta la quinta nos da:

$A + F = 3,$ restando a ésta la sexta obtenemos:

$A - G = -3$.

Y así sucesivamente, es decir se forma la sucesión $-1, 2, -2, 3, -3, 4, ...$ Observe que entre sumas y restas hay 24 operaciones (ya que hay 25 ecuaciones), de éstas 12 son sumas y 12 restas. Como se empezó restando, la última operación es la suma $(A + Z)$.

Para saber el valor de esta suma vemos que la sucesión de sumas que se ha formado es:

$$2, 3, 4, 5, ...$$

Como esta sucesión tiene 12 términos, entonces $A + Z = 13$.

Problema 19 En todo polígono de n lados, el número de diagonales está dado por:

$$\frac{n \times (n-3)}{2}$$

luego resolviendo

$$\frac{n \times (n-3)}{2} = 6n$$

se tiene que $n = 15$.

Problema 20 Tenemos que $91 = 7 \times 13$, además es fácil ver que $2 \times 7 \times 13 = 182$ tiene la propiedad requerida, ya que sus otros divisores distintos de él mismo son $2 \times 7 = 14$ y $2 \times 13 = 26$ los cuales son menores que 91; lo mismo sucede para :

$3 \times 7 \times 13$,

$5 \times 7 \times 13$,

$7 \times 7 \times 13$.

Sin embargo para los números de la forma $p \times 7 \times 13$, donde p es primo mayor que 7, ya no se cumple, ya que $p \times 13 > 91$ y $p \times 13 < p \times 13 \times 7$.

Por lo tanto los 5 enteros que cumplen la propiedad son: 182, 273, 455, 637.

Problema 21 Como la cuadrícula tiene 20 lápices de alto, hay 21 filas de 10 lápices, haciendo un total de 210 lápices; además como la cuadrícula tiene 10 lápices de ancho, hay 11 columnas de 20 lápices, sumando 220 lápices.

Por lo tanto el total de lápices utilizados en la cuadrícula es 210+220=430 lápices.

Problema 22 Para un triángulo de lados a, b, c su área está dada por

$$A = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)},$$

donde p es la mitad del perímetro. Para nuestro triángulo su perímetro es $21 + 34 + 55 = 110$, luego $p = 55$ y su área será:

$$\sqrt{55 \times (55-21) \times (55-34) \times (55-55)} = 0$$

Otra forma de probar que el área del triángulo es *cero* es notando que la suma de dos de sus lados es igual a la medida del tercer lado.

Problema 23 Resolviendo la ecuación : $3(1+2+3+...+n) = 1,998$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{n \times (n+1)}{2} &= 666 \\ n^2 + n - 1332 &= 0 \end{aligned}$$

luego $n = 36$.

Problema 24 Tenemos la ecuación

$$x^2 = \frac{1}{3}(x+y)^2$$

y dividamos la ecuación por y^2.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} &= \frac{1}{3}\frac{(x+y)^2}{y^2} \\ (\frac{x}{y})^2 &= \frac{1}{3} \times (\frac{x}{y}+1)^2 \end{aligned}$$

Luego haciendo el cambio de variable $w = \frac{x}{y}$ tenemos:

$$3w^2 = (w+1)^2$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que la solución positiva es $w = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Finalmente la razón es

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 25 Sabemos que: $1+2+3+4+...+N = \frac{N(N+1)}{2}$, como $1+3+5+...+N = 400$, entonces:

$$2+4+6+...+(N-1)+400 = \frac{N \times (N+1)}{2}$$

Por otro lado $2+4+6+..+(N-1)$

$$\begin{aligned} &= 2(1+2+3+...+\frac{N-1}{2}) \\ &= 2\frac{\frac{N-1}{2}(\frac{N-1}{2}+1)}{2} \\ &= (\frac{N-1}{2})(\frac{N+1}{2}) = \frac{N^2-1}{4} \end{aligned}$$

reemplazando este resultado en la primera ecuación tenemos que:

$$\frac{N(N+1)}{2} = 400 + \frac{N^2-1}{4}$$

simplificando e igualando a cero tenemos la ecuación cuadrática:

$$N^2 + 2N - 1599 = 0$$

que resolviéndola nos da $N = 39$.

Problema 26 El número de combinaciones de iniciales de sus dos nombres y apellido será igual al número de combinaciones de iniciales de sus dos nombres (ya que el apellido es Zapata).

Si el primer nombre empieza con a, el número de combinaciones será 24, ya que el segundo nombre empezaría con cualquier letra que no sea a ni z. Si el primer nombre empieza con b, el número de combinaciones será 23, ya que el segundo nombre empezaría con cualquier letra que no sea a, b ni z ; y así sucesivamente.

Luego el número de combinaciones será:

$$24+23+22+...+1 = \frac{24 \times 25}{2} = 300.$$

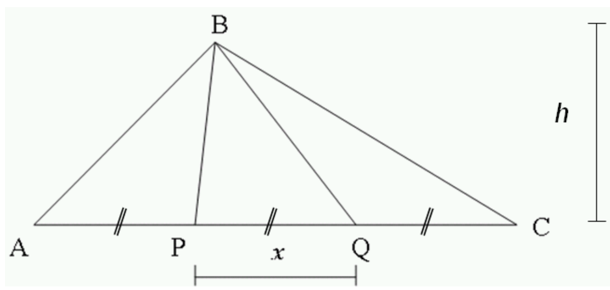
Problema 27 Sea x la base del triángulo PBQ y h su altura como se puede ver en la figura luego el triángulo ABQ tiene base $2x$ y altura h, ya que el segmento $\overline{AC}$ está dividido en partes iguales.

Además por hipótesis tenemos que

$$\frac{x \times h}{2} = 12$$

Por lo tanto el área del triángulo ABQ es:

$$\frac{2xh}{2} = 2 \times 12 = 24.$$



Problema 28 Tenemos que:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab = 8ab \\
(a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab = 4ab
\end{aligned}$$

Dividiendo tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} &= \frac{8ab}{4ab} \\
(\frac{a+b}{a-b})^2 &= 2
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}.$$

Problema 29 Como $1 + 2 + 3 + ... + 12 = 78$, tenemos que cada fila debe sumar 39 y cada columna debe sumar 13, luego las 6 columnas deben ser:

$$(1, 12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8) \text{ y } (6, 7).$$

Observe que son parejas de un número impar y un par. Como la suma de cada fila es impar, en cada fila debe haber un número impar de números impares dado que hay 6 números impares las posibilidades son: 5 impares en la primera fila y 1 impar en la segunda, 1 impar en la primera y 5 impares en la segunda y por último 3 impares en la primera y 3 en la segunda.

Como el 8 está en la primera fila el 5 está en la segunda así tenemos la primera posibilidad:

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 1 & 3 & 7 & 9 & 11 \\ \\ 5 & 12 & 10 & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

La posibilidad 1 impar en la primera y 5 en la segunda no es posible, ya que se obtendría de la anterior invirtiendo el orden a 4 columnas que no sea la primera y verificando los 5 casos correspondientes se prueba de manera fácil que no se cumple la condición de la suma de las filas igual a 39.

La posibilidad 3 impares en la primera y 3 en la segunda tampoco es posible, ya que se obtendría de la primera opción invirtiendo el orden de 2 columnas que no sean la primera. Observe que estas 2 columnas suman en total 26 (ya que cada columna suma 13), luego para mantener cada fila sumando 39, los números superiores de las 2 columnas deben sumar igual a los inferiores, o sea 13; lo cual es imposible ya que los superiores son impares y la suma de 2 impares nunca es 13.

Por lo tanto la primera es la única posibilidad, luego el número de pares en la segunda fila es 5.

Problema 30 Observemos que el último 2 de la sucesión aparece en el tercer lugar (lugar 1+2) ya que hay un 1 y dos 2 antes de él; el último tres aparece en el sexto lugar (lugar 1+2+3), ya que hay un 1, dos 2 y tres 3 antes de él. Nos damos cuenta que el último número n del grupo de números n estará en el puesto $1 + 2 + 3 + ... + n$ es decir $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Luego para hallar que número aparece en el puesto 1,993, buscamos el mayor número menor o igual a 1,993 que tenga la forma de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ para algun n entero. Intentando con algunos números vemos que $1,953 = \dfrac{62 \times 63}{2}$, o sea el último 62 estará ubicado en el puesto 1,953 y entonces los 63 números siguientes serán números 63.

Por lo tanto el término 1,993 de la secesión es 63 y su residuo entre 5 es 3.

Problema 31 Usando la propiedad tenemos que:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_3 \\ a_2 + a_3 &= a_4 \\ a_3 + a_4 &= a_5 \\ a_4 + a_5 &= a_6 \\ a_5 + a_6 &= 120 \end{aligned}$$

Eliminando a_6 de la última ecuación (reemplazando su equivalente $a_4 + a_5$ de la ecuación anterior) obtenemos $2a_5 + a_4 = 120$; eliminando a_5 de esta última ecuación (de la misma forma que en primer caso) otenemos $2a_3 + 3a_4 = 120$. Repitiendo el mismo procedimiento hasta quedar con las variables a_1 y a_2 tenemos la siguiente ecuación $5a_1 + 8a_2 = 120$ ó también $a_1 = \dfrac{120 - 8a_2}{5}$.

Luego las únicas soluciones para los enteros positivos a_1, a_2 son:

$a_1 = 16, a_2 = 5$ y $a_1 = 8, a_2 = 10$.

La primera de estas no es posible ya que la sucesión es creciente, luego la única solución es

$$a_1 = 8,\ a_2 = 10$$

Hallando los demás valores de forma recursiva tenemos:

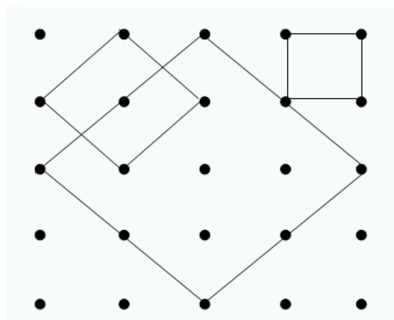
$$\begin{aligned} a_3 &= 8 + 10 = 18 \\ a_4 &= 10 + 18 = 28 \\ a_5 &= 18 + 28 = 46 \\ a_6 &= 28 + 46 = 74 \\ a_7 &= 120 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_8 = 74 + 120 = 194$.

Problema 32 Observemos de la figura que se pueden formar cuadrados de dos formas, llamémoslos cuadrados parados (pequeños, medianos, grandes y uno mas grande) y cuadrados inclinados (pequeños y grandes).

Contemos primero los cuadrados parados. Claramente hay 16 cuadrados pequeños, 9 cuadrados medianos, 4 cuadrados grandes y el cuadrado mas grande; haciendo un total de 30 cuadrados parados.

Contemos ahora los cuadrados inclinados. Tenemos 9 cuadrados pequeños y 1 cuadrado grande, haciendo un total de 10 cuadrados inclinados. Por lo tanto el número total de cuadrados formados es 40.



Problema 33 Observe que:

$$
\begin{aligned}
& (999999999999)^2 - 1 \\
= \; & (999999999999 + 1)(999999999999 - 1) \\
= \; & (1000000000000)(999999999998)
\end{aligned}
$$

Claramente el producto es el segundo factor seguido de los 12 ceros. Como el segundo factor tiene 12 dígitos, su producto tiene 24 dígitos.

Problema 34 Sean a, b, c los tres enteros positivos. Entonces

$$
\begin{aligned}
a \times b \times c &= 1,500 \\
a + b + c &= 45
\end{aligned}
$$

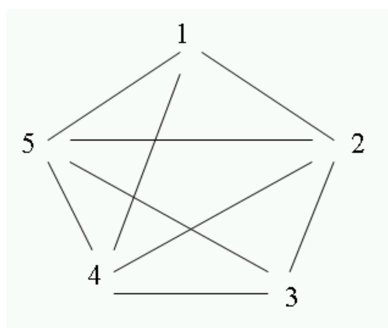
Analizando los factores de 1,500 menores de 45 tenemos que $a = 5$, $b = 10$, $c = 30$. Por lo tanto el mayor de los números es 30.

Problema 35 El gráfico muestra las 5 ciudades y las carreteras existentes entre ellas (cada número es una ciudad y el segmento que los une es la carretera para ir de una a la otra). Mostremos los caminos que se pueden tomar para visitar las 5 ciudades (las flechas indican el orden de visita):

$$
\begin{array}{c}
1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \\
1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \\
1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \\
1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \\
1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c}
1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3\\
1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 5\\
1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3\\
1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 5\\
1 \to 4 \to 3 \to 5 \to 2\\
1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3\\
1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2\\
1 \to 5 \to 2 \to 3 \to 4\\
1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3\\
1 \to 5 \to 3 \to 2 \to 4\\
1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 2\\
1 \to 5 \to 4 \to 2 \to 3\\
1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2.
\end{array}$$

Por lo tanto, el viajero puede tomar 18 caminos
.



Problema 36 Note que el $\measuredangle ACB = 70°$ (La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$), luego el $\measuredangle YTX = 110°$ (La suma de ángulos internos de un cuadrilátero es $360°$). Finalmente el $\measuredangle BTY = 180° - 110° = 70°$.

Problema 37 De la figura se puede ver que $\overline{AE} = \overline{AG}$ (ya que el $\measuredangle EAG$ es externo a la circunferencia). Entonces tenemos que $\measuredangle AEG = \measuredangle AGE$, pues el triángulo AEG es isósceles. Én el mismo triángulo AEG

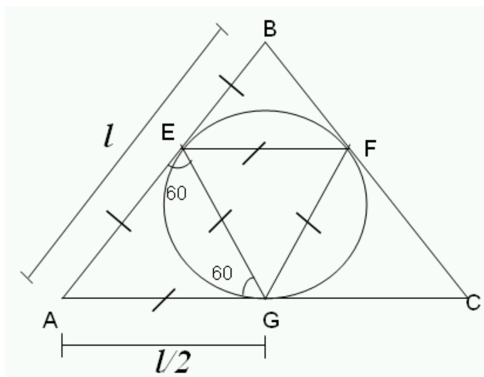
$$\measuredangle AEG = \frac{180° - \measuredangle EAG}{2} = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Luego el triángulo AEG es equilátero y lo mismo sucede con los triángulos EBF y GFC. Por lo tanto $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{EF} = \overline{EB}$, de donde tenemos que

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{EG}$$

Es decir, si el triángulo ABC tiene lado l, entonces el triángulo EFG tiene lado $\frac{l}{2}$. Luego el área del triángulo ABC es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ y el área del triángulo EFG es $\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}$ de donde la razón entre ellos será

$$\frac{\frac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}} = 4$$



Problema 38 Sean a, b, c, d, e las cinco muestras numéricas ordenadas en forma ascendente. Dado que la media aritmética de las observaciones es 10, tenemos:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 10$$

Además como su mediana es 12, tenemos que $c = 12$. Reemplazando el valor de c en la ecuación tenemos:

$$\frac{a+b+12+d+e}{5} = 10$$

o sea

$$a+b+d+e = 38$$

Como queremos ver cual es el menor rango, o sea la menor diferencia posible de la mayor observación con la menor observacion $(e-a)$, que puede tener dicha muestra, tratemos de dar el menor valor posible a e y el mayor valor posible a a.

Observe que como $c = 12$, el menor valor posible de e es 12, ya que las muestras están ordenadas en forma ascendente; luego se tendría que $d = 12$ (por la misma razón).

Además como a, b, d, e suman 38, debemos tener que $a + b = 14$; luego el mayor valor posible para a es 7.

Finalmente tenemos que el menor rango que puede asumir la muestra es $12 - 7 = 5$.

Problema 39 Como a la fiesta asistieron 13 parejas, hubo 13 hombres en la fiesta. Si ordenamos a los 13 hombres y los identificamos por su orden, tenemos que el primero dió 24 apretones de manos (ya que no le dió la mano a su pareja ni a él mismo), el segundo dió 23 apretones de manos distintos a los 24 primeros apretones (ya que el apretón de manos con el primero ya se contó), el tercero dió 23 apretones distintos de los anteriores (ya que el dado con el primero y con el segundo ya se contaron), siguiendo la secuencia tenemos que el treceavo hombre dió 12 apretones de manos distintos a los antes dados. Por lo tanto el número de apretones de manos que se dieron las 26 personas está dado por la suma:

$$\begin{aligned} S &= 12 + 13 + 14 + ... + 24 \\ &= (1 + 2 + 3 + ... + 24) - (1 + 2 + 3 + ... + 11) \\ &= \frac{24 \times 25}{2} - \frac{11 \times 12}{2} = 234 \end{aligned}$$

Problema 40 Formemos el triángulo ABC que se obtiene trazando el segmento del centro del cubo hacia uno de sus vértices, el segmento trazado del centro del cubo al centro de la base del cubo y el segmento trazado del centro de la base del cubo hacia el vértice señalado anteriormente, además sea D el centro de la esfera inferior, como se observa en la figura. Luego tenemos que el segmento $\overline{AC}$ es la mitad de la diagonal de la base del cubo, o sea:

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

además

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}$$

Por Pitágoras tenemos que $\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por semejanza de triángulos tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{r}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

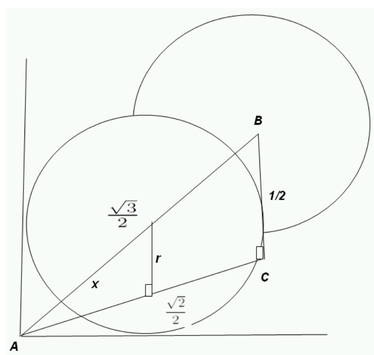
donde r es el radio de las esferas y x la distancia del centro al vértice del cubo A.

Resolviendo tenemos que $x = r\sqrt{3}$.

Además, por la tangencia entre las esfreras, tenemos que $r + r + x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir:

$$2r + r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolviendo y racionalizando tenemos que $r = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3)$.



Problema 41 Sean a, b, c los posibles valores enteros de los lados del triángulo. Dado que el perímetro es 8 las posibles soluciones son:

$$\begin{array}{l} a = 1,\ b = 1,\ c = 6. \\ a = 1,\ b = 2,\ c = 5. \\ a = 1,\ b = 3,\ c = 4. \\ a = 2,\ b = 2,\ c = 4. \\ a = 2,\ b = 3,\ c = 3. \\ a = 2,\ b = 5,\ c = 1. \end{array}$$

Note que el primero no puede ser ya que en todo triángulo se cumple que cada lado es mayor que la diferencia de los otros dos y menor que su suma y para éste a no es mayor que $b - c$. Analizando de esta forma vemos que la única solución es: $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$.

Por lo tanto el área del triángulo es :

$$\sqrt{4 \times 2 \times 1 \times 1} = 2\sqrt{2}$$

Problema 42 Calculemos la pendiente m del segmento.

$$m = \frac{281 - 17}{48 - 3} = \frac{88}{15}$$

Como 88 y 15 no tienen factores comunes, el punto reticulado mas cercano a $(3, 17)$ se obtiene partiendo de éste 15 unidades hacia la derecha y 88 hacia arriba, es decir el punto $(3 + 15, 17 + 88) = (18, 105)$, el punto reticulado mas cercano a este último punto reticulado se obtiene de la misma forma, o sea $(18 + 15, 105 + 88) = (33, 193)$, calculando el próximo punto reticulado a este último, obtenemos el extremo del segmento $(48, 281)$.

Por lo tanto los puntos reticulados que yacen en el segmento son 4.

Problema 43 Tenemos la ecuación:

$$4n + 2m = mn$$

Luego tenemos que m divide a $4n + 2m$, o sea m divide a $4n$ (m ya divide a $2m$). De la misma forma n divide a $2m$, luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4n = mk, \quad 2m = nl$$

De la última ecuación obtenemos

$$m = \frac{nl}{2}$$

reemplazándola en la primera tenemos

$$4n = \frac{nl}{2} \times k$$

luego

$$l \times k = 8$$

Las soluciones enteras positivas para l, k son:$(1, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 1)$.

Tomando la primera solución de l, k
$l = 1$, $k = 8$
Reemplazando estos valores en el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos

$$4n = 8m, \quad 2m = n$$

las cuales son equivalentes. Reemplazando esto último en la ecuación inicial resulta

$$8m + 2m = 2m^2$$

Resolviendo tenemos que

$$m = 5$$

luego $n = 10$ y la primera solución es $(5, 10)$.
Tomando la segunda solución de l, k
$l = 2$, $k = 4$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$4n = 4m, \quad 2m = 2n$$

es decir $m = n$. Reemplazando en la ecuación inicial resulta

$$4m + 2m = m^2$$

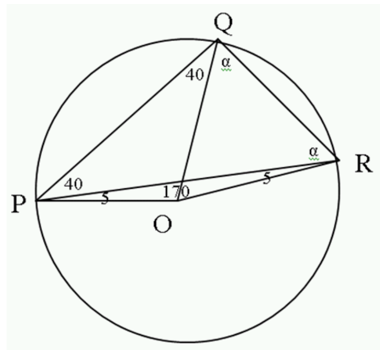
Resolviendo tenemos que $m = 6$, luego $n = 6$ y la segunda solución es $(6, 6)$
Análogamente a lo anterior, tomando la tercera y cuarta solución de l, k
$l = 4$, $k = 2$ y $l = 8$, $k = 1$ tenemos que la tercera y cuarta soluciones son $(8, 4)$ y $(12, 3)$.
Por lo tanto son 4 las soluciones enteras de la ecuación $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

Problema 44 Tenemos que el triángulo POR es isósceles (ya que 2 de sus lados son radios de la circunferencia), luego como $\measuredangle OPR = 5°$ entonces se tiene también que $\measuredangle ORP = 5°$. De igual manera los triángulos POQ, QOR son isósceles, por lo tanto $\measuredangle OPQ = 40°$ y $\measuredangle ORQ = \alpha$.
Finalmente en el triángulo PQR:

$$5° + 40° + 40° + \alpha + \alpha + 5° = 180°$$

(suma de ángulos internos)
Resolviendo tenemos que $\alpha = 45°$. Por lo tanto

$$\measuredangle OQR = 45°$$



Problema 45 Sean u, v las soluciones enteras de la ecuacion $x^2+ax+6a=0$, entonces $uv=6a$ y $u+v=-a$. Entonces a es un entero.

Por otro lado las soluciones de la ecuación son

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-24a}}{2}$$

Entonces

$$u-v=\pm\sqrt{a^2-24a}$$

y $\sqrt{a^2-24a}$ es un entero. Luego a^2-24a es un cuadrado perfecto.

Note que

$$a^2-24a=(a-12)^2-144$$

luego

$$(a-12)^2-144=n^2$$

para algún entero n.

Entonces

$$(a-12)^2-n^2=144$$

La diferencia entre cuadrados perfectos consecutivos $(m+1)^2$ y m^2 es $2m+1$. La diferencia más pequeña entre cuadrados perfectos se obtiene cuando ellos son consecutivos. Por lo tanto

$$|a-12|\leq\frac{144-1}{2}=\frac{143}{2}$$

Entonces

$$\frac{-121}{2} \leq a \leq \frac{167}{2}$$

Las únicas posibilidades son $a = 0$, $a = -8$, $a = 24$ y $a = 32$.

Problema 46 En la figura, cada casilla representa un dígito. Tratemos de ver de cuantas formas podemos llenar las casillas de tal manera que nos resulte un entero curioso.

Observe que la quinta casilla tiene al número 5, ya que para que el número sea divisible por 5 debe terminar en 5.

Observemos además que en las casillas pares deben ir números pares ya que de lo contrario los números de 2, 4, 6 dígitos no serían divisibles por 2, 4, 6 respectivamente luego tenemos que las casillas impares serán llenadas por números impares.

Empecemos analizando que pasa si en la primera casilla va el 1, en este caso el 3 debe ir en la tercera casilla; veamos luego quien puede ir en la segunda (el 2, 4 ó 6). Si el 4 estaría en la segunda casilla, los primeros tres dígitos formarían el número 143; pero este no es divisible por tres con lo cual estaríamos consiguiendo un número que no es curioso. Lo mismo sucede si intentamos poner el 6 en la segunda casilla. Por lo tanto el número de la segunda casilla es el 2.

1	2	3		5	

Nos falta ver que número va en la cuarta y sexta casilla. El que vaya en la cuarta debe ser tal que los primeros cuatro dígitos formen un número divisible por cuatro, o sea que sus últimos dos dígitos sea múltiplo de cuatro; lo cual obliga al 6 estar en la cuarta casilla (ya que de estar el 4, 34 no es divisible por 4), por último en la sexta casilla va el 4 y el número curioso es 123654.

Por otro lado analicemos que pasa si en la primera casilla va el 3 (y éste es el último caso ya que el 5 solo puede ir en la quinta), con lo cual el 1 va en la tercera.

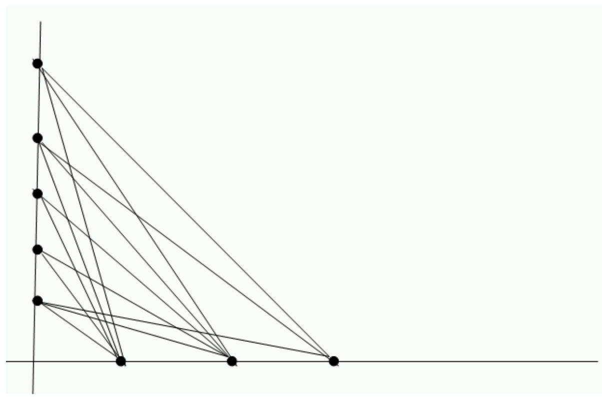
Para ver quien va en la segunda (el 2, 4 o 6), por la misma razon anterior la única posibilidad es para el 2. De esta forma podemos formar el siguiente cuadro:

3	2	1		5	

Usando el mismo razonamiento podemos ver que en la cuarta y sexta casilla van el 6 y 4 respectivamente. De esta forma el segundo número curioso es 321654.

Por lo tanto existen dos enteros curiosos de 6 dígitos.

Problema 47 En el dibujo se muestran los puntos de interseccion, en el interior del primer cuadrante, que generan los segmentos trazados de 3 puntos del eje x hacia 5 puntos del eje y.



Como se puede ver, los segmentos trazados del primer punto en el eje x no genera puntos de intersección en el interior del primer cuadrante, los segmentos trazados del segundo punto generan 10 puntos de intersección, los trazados del tercero generan 20 puntos de intersección; si damos un cuarto punto sobre el eje x éste generara 30 puntos de intersección. Observe que a medida que aumentamos los puntos en el eje x, los puntos de intersección se van acercando cada vez mas entre ellos, de esta forma corremos el riesgo que los puntos de intersección que se van generando coincidan con algunos de los anteriores.

También es cierto que si tenemos la libertad de elegir los puntos sobre el eje x, podemos hacerlo de tal forma que los nuevos puntos de intersección que generan los segmentos trazados de éste hacia los puntos en el eje y, no coincidan con ninguno de los anteriores. Por lo tanto el máximo número posible de puntos de intersección de los 50 segmentos que conectan 10 puntos en el eje x con 5 puntos en eje y son:

$$\begin{aligned} & 10+20+30+40+50+60+70+80+90 \\ = & \; 10\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \\ = & \; 10\times\frac{9\times 10}{2}=450 \end{aligned}$$

Problema 48 Podemos pensar que si le quitamos todos los múltiplos de 3 $(3,6,9,12,...,99)$ al conjunto 1, 2, 3, ...100, obtenemos el subconjunto con la propiedad requerida, luego el número de elementos sería $100-33=67$. El conjunto formado anteriormente no es el que tiene el máximo número de elementos, para obtenerlo procedamos de la siguiente manera.

Sea el subconjunto de 67 elementos $34, 35, 36, ..., 100$, vemos que este conjunto cumple la propiedad requerida, además vemos que es posible aumentarle elementos de tal forma que se mantenga dicha propiedad. Los posibles números a aumentar deben ser menores que doce, es decir :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

ya que si aumentamos el 12, su triple (el 36) estaría en el conjunto y lo mismo sucede para los mayores de 12; además de estos últimos números debemos anular algunos, ya que por ejemplo el 1 y el 3 no pueden estar a la vez. Anulando el menor número posible (el 2 y el 3), obtenemos que el subconjunto con el máximo número de elementos que cumple con la propiedad que ninguno de sus miembros es tres veces el otro es:

$$1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 34, 35, 36, ..., 100$$

Luego el máximo número de elementos es 76.

Problema 49 Tenemos que :

$$pq = a^2 - 1 = (a+1)(a-1) \text{ para algún } a$$

Luego tenemos que $a+1$ divide a pq o sea :
$a+1 = pq$,
$a+1 = 1$,
$a+1 = p$, ó
$a+1 = q$
Las 2 primeras no pueden ser, pues:

$$\begin{aligned}
\text{si } a+1 = pq &\Rightarrow a-1 = 1 \\
&\Rightarrow a = 2 \\
&\Rightarrow pq = 2^2 - 1 = 3, \text{ (imposible)} \\
\text{si } a+1 = 1 &\Rightarrow a = 0 \\
&\Rightarrow pq = -1, \text{ (imposible)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a+1 = p$ y $a-1 = q$, es decir

$$p = q + 2$$

Además: $p, q \equiv 1, 2 \bmod 3$

La opción $p \equiv 2 \bmod 3$ no es posible pues tendríamos que $q \equiv 0 \bmod 3$ (es decir q divisible por tres con q primo)

La opción $q \equiv 1 \bmod 3$ tampoco es posible por la misma razón anterior.

Por lo tanto tenemos que

$$p \equiv 1 \bmod 3 \text{ y } \quad q \equiv 2 \bmod 3$$

o sea

$$p + q \equiv 0 \bmod 3$$

Hagamos lo mismo para módulo 4: $p, q \equiv 1, 3 \bmod 4$

Haciendo un razonamiento como el anterior, Las opciones $p \equiv 3 \bmod 4$ y $q \equiv 1 \bmod 4$ no son posibles. Además $p \equiv 2 \bmod 4$ no es posible, ya que si fuese así, tendríamos $p = 4k + 2$ para algún valor de k, luego p sería divisible por 2.

Por lo tanto tenemos que

$$p \equiv 1 \bmod 4, \quad q \equiv 3 \bmod 4$$

sea

$$p + q \equiv 0 \bmod 4$$

Juntando las ecuaciones $p + q \equiv 0 \bmod 3 \equiv 0 \bmod 4$ (es decir 3 y 4 dividen a $p + q$) tenemos que 12 divide a $p + q$. Probemos que 12 es el número que buscamos (12 es menor que $p + q$ ya que $p > 100$).

Como $p > 100$, luego $q > 100$, entonces para los primos 101, 103, 107, 109 tenemos:

$$\begin{aligned} 101 + 103 &= 204 = 12 \times 17 \\ 107 + 109 &= 216 = 12 \times 18 \end{aligned}$$

Finalmente dado que el número buscado debe dividir $p + q$ para todo p y q primos, debe cumplirlo para los 4 primos dados. Por lo tanto este número debe ser 12 (de ser mayor que 12, debería ser 17, pero de ser asi no dividiría a $107 + 109$).

Problema 50 Sean E, F centros de las circunferencias; R, r radios de las circunferencias, D punto de intersección de la tangente $\overline{AB}$ y la tangente que pasa por C; luego se han formado 4 triángulos isósceles ya que

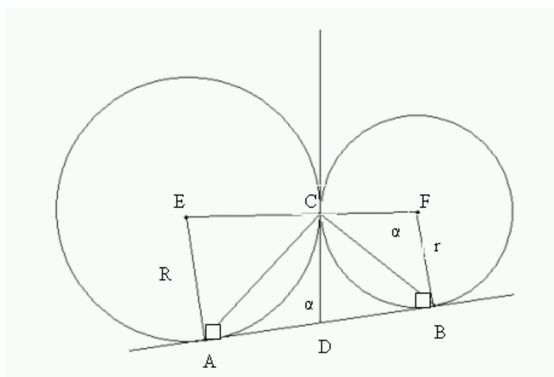
$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$$

además llamemos

$$\alpha = \measuredangle ADC$$

Por propiedad de ángulos suplementarios tenemos que:

$$\measuredangle CFB = \alpha \quad , \quad \measuredangle AEC = 180 - \alpha$$



Luego los triángulos ACD, CFB y AEC, CDB son semejantes. Por otro lado

$$\begin{aligned} \measuredangle BCF &= \frac{180 - \alpha}{2} \\ \measuredangle DCB &= 90 - \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\measuredangle ACB = \frac{180 - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90$$

Luego el triángulo ACB es rectángulo y por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{AD}+\overline{DB} &= 10\\ 2\overline{AD} &= 10\\ \overline{AD} &= 5\end{aligned}$$

o sea

$$\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{DB}=5$$

Por último, utilizando la semejanza de los triángulos ACD, CFB y AEC, CDB tenemos las ecuaciones:

$$\frac{r}{5}=\frac{6}{8}$$

y

$$\frac{R}{5}=\frac{8}{6}$$

Resolviendo tenemos que: $R=\dfrac{20}{3}$ y $r=\dfrac{15}{4}$.

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$

a) 6^6
b) 6^7
c) 36^{36}
d) 6^{36}
e) 36^{26}

Problema 2 ¿Cuál es el 20% del 60% de 80?

a) 0.96
b) 9.6
c) 8.4
d) 0.84
e) 9.8

Problema 3 Una mujer gastó *una cuarta parte* de su dinero y perdió \$10 del dinero que le quedaba. Terminó con \$2. ¿Cuánto tenía originalmente?

a) \$14
b) \$48
c) \$12
d) \$16
e) \$10

Problema 4 Considere la siguiente sucesión: $1, 11, 111, 1111, ...$ ¿Cuál es el dígito de las decenas de la suma de los primeros 30 elementos de esta sucesión?

a) 2
b) 7
c) 5
d) 8
e) Ninguna de las anteriores

Problema 5 El menor número positivo que deja residuo 4 cuando se divide por 7, y residuo 5 cuando se divide por 12 está entre:

a) 19 y 31
b) 32 y 42
c) 60 y 72
d) 51 y 58
e) 76 y 84

Problema 6 Nilsa miente de lunes a miércoles, y dice la verdad el resto de la semana. ¿Qué día puede haber dicho: "mentí ayer, mentiré mañana"?

a) Lunes
b) Martes
c) Jueves
d) Domingo
e) Ninguna de las anteriores

Problema 7 ¿Cuántos números primos entre 10 y 99 siguen siendo primos si se invierte el orden de sus dígitos?

a) 7
b) 8
c) 11
d) 13
e) Ninguna de las anteriores

Problema 8 ¿De cuántas maneras se puede expresar el número 447 como la suma de al menos *dos* números naturales impares consecutivos?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Problema 9 Llámese *memorable* a un número telefónico $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ de 7 dígitos si la sucesión de prefijo $d_1d_2d_3$ es exactamente igual a cualquiera de las sucesiones $d_4d_5d_6$ o $d_5d_6d_7$ (o ambas). Suponiendo que cada dígito puede ser cualquiera de los dígitos decimales $0, 1, 2, ..., 9$; la cantidad de números telefónicos memorables distintos es:

a) 19,810
b) 19,910
c) 19,990
d) 20,000
e) 20,100

Problema 10 La razón de los radios de dos círculos concéntricos es $1 : 3$. Si $\overline{AC}$ es un diámetro del círculo mayor, $\overline{BC}$ es una cuerda del círculo mayor que es tangente al círculo menor y $\overline{AB} = 12$, entonces el radio del círculo mayor es:

a) 13
b) 18
c) 21
d) 24
e) 26

Problema 11 En la siguiente suma, cada letra representa un dígito decimal: $AH + A = HEE$. ¿Qué dígito representa cada letra?

Problema 12 ¿Cuánto mide el ángulo interior de un hexágono regular?

Problema 13 Si la suma de *dos* ángulos de un triángulo es igual al *tercero*, ¿qué clase de triángulo es?

Problema 14 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de 3 puntos fijos no colineales en el plano?

Problema 15 Si N es un entero positivo y $N^2 - 2,000$ es un cuadrado perfecto, ¿cuántos posibles valores distintos existen para N?

Problema 16 El número -1 es solución de la ecuación cuadrática $3x^2 + bx + c = 0$. Si b y c son primos, ¿cuál es el valor de $3c - b$?

Problema 17 Encuentre todos los enteros positivos a, b, c tales que $abc = a + b + c$.

Problema 18 Considere el conjunto $M = \{1;\ 2;\ 3; ...;\ 2,003\}$. ¿Cuál es el promedio de la suma de los elementos de todos los subconjuntos de M?

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1

$$\begin{aligned} 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 &= 6^6(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &= 6^6 6 = 6^7 \end{aligned}$$

Problema 2 El 60% de 80 es: $0.6 * 80 = 48$
el 20% de esa cantidad es: $0.2 * 48 = 9.6$

Problema 3 Sea x la cantidad de dinero original. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x - 10 &= 2 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Problema 4 Sea $s = 1 + 11 + ... + 11111111111111111111111111111$

Para hallar el dígito de las decenas de s, basta hallar el dígito de las decenas de $r = 1 + 11 * 29 = 320$. Por lo tanto la respuesta correcta es 2.

Problema 5 Los primeros números que dejan residuo 4 cuando se divide entre 7 son: 4,11,18,25,32,39,46,53,60.

Los primeros números que dejan residuo 5 cuando se divide entre 12 son: 5,17,29,41,53.

Por lo tanto el número buscado está entre 51 y 58.

Problema 6 Si Nilsa dijo que mintió ayer ayer fue miércoles o domingo; y hoy debería ser jueves o lunes pero en ninguno de los dos casos Nilsa diría que mañana mentirá.

Por lo tanto la respuesta correcta es ninguna de las anteriores.

Problema 7 Primos entre 10-19: 11,13,17,19

Primos entre 30-39: 31,37

Primos entre 70-79: 71,73,79

Primos entre 90-99: 91,97

A los once números primos anteriores si se les invierten las cifras de las unidades y las de las decenas, el resultado es otro número primo.

Por lo tanto la respuesta correcta es 11.

Problema 8 Sea n la cantidad de números naturales, impares consecutivos sumados. Entonces n debe ser impar, para que la suma de n numeros impares sea impar.

$$\begin{aligned} (m - (n-1)) + ... + (m-2) + m + (m+2) + ... + (m + (n-1)) &= 447 \\ mn &= 447 \end{aligned}$$

Hay 2 posibilidades: $n = 3, m = 149$; ó $n = 149, m = 3$.

La segunda posibilidad se descarta ya que tiene sumandos negativos.

Problema 9 Hay tres posibilidades:

$$
\begin{aligned}
d_1d_2d_3 &= d_4d_5d_6, \text{ ó} \\
d_1d_2d_3 &= d_5d_6d_7, \text{ ó} \\
&\text{Ambas}
\end{aligned}
$$

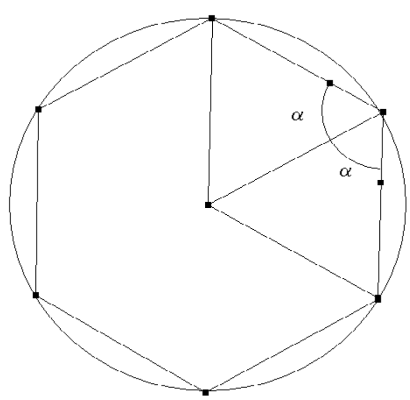
Con cada una de las 2 primeras se puede formas 10,000 números, mientras que con la tercera 10, por lo tanto, descontando las repeticiones, la cantidad de números que se pueden formar en total es 19,990.

Problema 10 $R = 3r$
Tenemos 2 triángulos semejantes de donde obtenemos que $r = 6$, y por consiguiente $R = 18$.

Problema 11 Si se suman 2 números de dos cifras y el resultado es un número de tres cifras, la cifra de las centenas debe ser 1, entonces

$$
\begin{aligned}
A &= 9 \\
H &= 1 \\
E &= 0
\end{aligned}
$$

Problema 12



En el interior del hexágono regular se pueden construir 6 triángulos equiláteros, es decir, $\alpha = 60°$.
Por lo tanto los angulos internos de un hexagono regular miden $2\alpha = 120°$.

Problema 13 La suma de los angulos internos de un triángulo es 180°. Entonces $a+b+c=180°$ y $b+c=a$. Entonces

$$\begin{aligned} 2a &= 180^\circ \\ a &= 90^\circ \end{aligned}$$

El triángulo es un triángulo rectángulo.

Problema 14 Sean A, B y C los tres puntos fijos, el lugar geométrico consta de un sólo punto, el circuncentro del triángulo ABC. Esto se deduce del hecho que el lugar geométrico de los puntos que equidistan a dos puntos es la mediatríz del segmento que los une y la mediatrices de AB, BC y CA tienen un sólo punto en común.

Problema 15

$$\begin{aligned} N^2 - 2{,}000 &= M^2 \\ N^2 - M^2 &= 2{,}000 \\ (N+M)(N-M) &= 2{,}000 \end{aligned}$$

Las diferentes formas de factorizar 2,000 como producto de dos números pares (de otra forma no se puede) son:

$$\begin{aligned} 2{,}000 &= 1000 \times 2 & N &= 501, M = 499 \\ &= 500 \times 4 & N &= 252, M = 248 \\ &= 250 \times 8 & N &= 129, M = 121 \\ &= 200 \times 10 & N &= 105, M = 95 \\ &= 100 \times 20 & N &= 60, M = 40 \\ &= 50 \times 40 & N &= 45, M = 5 \end{aligned}$$

Existen 6 valores distintos para N: 501, 252, 129, 105, 60, 45.

Problema 16 Como -1 es solución de $3x^2+bx+c=0$, entonces $3-b+c=0$. Luego $b=c+3$. Si $c \neq 2$, entonces c es impar, luego b es par y mayor que 3; lo cual es imposible ya que b es primo. Entonces $c=2$ y $b=5$.

Por lo tanto $3c-b=1$.

Problema 17 Debemos encontrar todos los enteros positivos tales que

$$abc = a+b+c$$

Primero demostraremos que los tres no pueden ser mayores que 2.

Sean a, b, $c > 2$. Entonces

$$ab > a + b$$

ya que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned} abc &= ab + ab(c-1) \\ &> a + b + c \end{aligned}$$

ya que

$$ab(c-1) > 4(c-1) > c$$

si $c > \frac{4}{3}$.

Por lo tanto si a, b, $c > 2$, tenemos que $abc > a + b + c$.

Ahora consideremos $a = 1$ ó $a = 2$:

Si $a = 1$

$$\begin{aligned} bc &= 1 + b + c \\ b &= 1 + \frac{2}{c-1} \end{aligned}$$

si $c > 3$, entonces $1 < b < 2$. Por lo tanto $c \leq 3$, y similarmente $b \leq 3$.

Si $a = 2$

$$\begin{aligned} 2bc &= 2 + b + c \\ b &= \frac{1}{2} + \frac{5}{4(c - \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

si $c > 3$ entonces $0 < b < 1$. Por lo tanto $c \leq 3$, y similarmente $b \leq 3$.

Por lo tanto hay que analizar un número finito de casos: a, b, $c \leq 3$ y el único caso que funciona es $1, 2, 3$ y sus permutaciones.

Problema 18 Una estrategia para este problema es contar el número de subconjuntos de M que contienen a cada número $1; 2; 3; ...; 2,003$.

El número total de subconjuntos de M es $2^{2,003}$. Los subconjuntos de $\{2, 3, ..., 2,003\}$ son $2^{2,002}$ y al añadir el 1 en cada uno de esos subconjuntos se obtienen los subconjuntos de M que contienen al 1, de igual manera para el 2, 3, ..., $2,003$.

La suma de todos lo números de todos los subconjuntos de M es

$$\begin{aligned} 2^{2,002}\times 1+2^{2,002}\times 2+...+2^{2,002}\times 2,003 &= 2^{2,002}(1+2+3+...+2,003)\\ &= 2^{2,002}\frac{2,003\times 2,004}{2} \end{aligned}$$

Entonces el promedio buscado es

$$\frac{2^{2,002}\frac{2,003\times 2,004}{2}}{2^{2,003}}=\frac{2,003\times 2,004}{4}=1,003,503$$

Problemas - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2002-03 - Nivel II

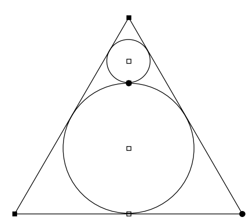
Problema 1 La resta de los cuadrados de dos números enteros positivos no consecutivos es 93. ¿Cuál es el mayor de esos dos números?

Problema 2 Un polígono con un número par de lados se circunscribe a una circunferencia. Los lados se colorean alternadamente de rojo y negro. ¿Es la suma de de las longitudes de lados rojos igual a la suma de longitudes de lados negros?

Problema 3 Demostrar que dados *ocho* números enteros diferentes entre 1 y 15, hay *tres* pares de ellos que tienen la misma diferencia (positiva).

Problema 4 ¿Se puede construir un cuadrado mágico de seis columnas y seis renglones con los primeros 36 números primos?

Problema 5 Inscriba un círculo dentro de un triángulo equilátero de lado 1. Ahora, inscriba *tres* círculos en las esquinas del triángulo, que sean tangentes al círculo inscrito original y a *dos* lados consecutivos del triángulo. ¿Cuál es el radio de los tres pequeños círculos?



Problema 6 Sea $n \geq 3$ un entero. Se tienen n bolsas, cada una con n monedas y hay n personas que van a tomar monedas por turnos (iniciando la persona 1, después la persona 2, etc., hasta al persona n; después de nuevo la persona 1, y así sucesivamente). Las condiciones que deben respetar son:

-cada persona en su turno toma sólo una moneda,

-la persona i no puede tomar monedas de la bolsa i .

Pierde la primera persona que no puede tomar una moneda en su turno. Muestre que $n-1$ personas pueden ponerse de acuerdo para hacer perder a la persona restante.

Soluciones - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2001-02 - Nivel II

Problema 1 Sean $r, s\,(r > s)$, los números enteros positivos no consecutivos. Luego tenemos la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
r^2 - s^2 &= 93 \\
(r+s)(r-s) &= 93
\end{aligned}
$$

Como las únicas formas de factorizar 93 son: 31×3 y 93×1; luego tenemos los 2 sistemas de ecuaciones posibles:
$(r+s) = 31$ y $(r-s) = 3$ ó $(r+s) = 93$ y $(r-s) = 1$ (ya que para r, s positivos tenemos que $r+s > r-s$).

Resolviendo el segundo sistema tenemos que: $r = 47$, $s = 46$; lo cual no es posible dado que r s no son consecutivos. Finalmente resolviendo el primer sistema de ecuaciones tenemos que $r = 17$ y $s = 14$.

Por lo tanto el mayor número es 17.

Problema 2 Sean l_1, l_2, l_3 tres lados consecutivos del polígono circunscrito a la circunferencia, α_1, α_2, α_3 los vértices del polígono, y p_1, p_2, p_3 los puntos de tangencia de los lados con la circunferencia tal como lo muestra la figura.

Supongamos que l_1 es rojo, l_2 es negro, l_3 es rojo y asi sucesivamente.

La suma de las longitudes pintadas de rojo son:

$$
\begin{aligned}
S_r &= l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + ... + l_{n-1} \\
&= \overline{\alpha_1 p_1} + \overline{p_1 \alpha_2} + \overline{\alpha_3 p_3} + \overline{p_3 \alpha_4} + ... + \overline{\alpha_{n-1} p_{n-1}} + \overline{p_{n-1} \alpha_n}
\end{aligned}
$$

La suma de las longitudes pintadas de negro son:

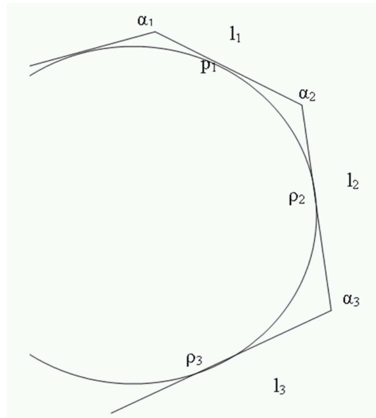
$$
\begin{aligned}
S_n &= l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + ... + l_n \\
&= \overline{\alpha_2 p_2} + \overline{p_2 \alpha_3} + \overline{\alpha_4 p_4} + ... + \overline{\alpha_n p_n} + \overline{p_n \alpha_1}
\end{aligned}
$$

Además de la figura podemos ver que:

$\overline{\alpha_1 p_1} = \overline{p_n \alpha_1}$, $\overline{p_1 \alpha_2} = \overline{\alpha_2 p_2}$, $\overline{\alpha_3 p_3} = \overline{p_2 \alpha_3}$, ..., $\overline{p_{n-1} \alpha_n} = \overline{\alpha_n p_n}$.

Luego tenemos que $S_r = S_n$

Por lo tanto la suma de las longitudes de los lados rojos es igual a la suma de las longitudes de lados negros.



Problema 3 El número de diferencias (no necesariamente distintas) entre los 8 números es igual al número de combinaciones de 8 en 2 (número de parejas), o sea $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7\times 8}{2} = 28$. Como los números son entre 1 y 15, solo hay 14 diferencias distintas posibles: 1,2,3,...,14.

Además la diferencia 14 aparece una sola vez (con la pareja 1,15); luego hay 27 diferencias para las 13 diferencias distintas: 1,2,3,...,13. Por lo tanto alguna de las trece diferencias debe aparecer por lo menos tres veces (ya que si agrupamos 27 números en trece parejas, alguno de los grupos debe tener al menos tres números).

Problema 4 No. Sea S la suma de los primeros 36 números primos, es decir:

$$S = 2 + 3 + 5 + 7 + ... + p$$

donde p es el 36avo número primo.

Además tenemos que la suma

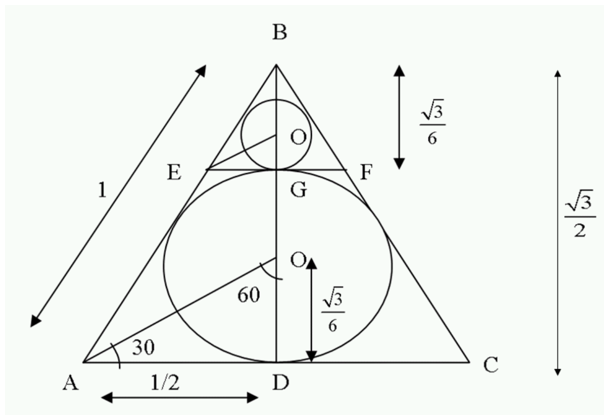
$$3 + 5 + 7 + 11 + ... + p$$

es un número impar, ya que es una suma de un número impar de números impares; luego S es un número impar (es suma de 2 mas un número impar).

Si se pudiese construir un cuadrado mágico con los 36 primeros números primos, cada fila del cuadrado tendría una suma constante, digamos c; es decir que las 6 filas sumarian $6c$, pero la suma de las 6 filas es la suma de los 36 números primos, luego $S = 6c$. O sea tenemos que S es divisible por 6 y entonces divisible por 2, pero vimos que S es impar.

Por lo tanto es imposible construir un cuadrado mágico con estos 36 primeros primos.

Problema 5 Sea ABC el triángulo equilátero y O, $\overline{O}$ centros de las circunferencias tangentes en el punto G, además sea BD la altura del triángulo y E, F los puntos de interseccion de de los lados AB, BC con la tangente común a ambas circunferencias respectivamente; tal como se muestra en la figura.



Vemos que como $\overline{AB} = 1$, entonces

$$\overline{AD} = \frac{1}{2} \quad , \quad \overline{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ya que el tri ángulo recto ABD es de $30°$ y $60°$, usando el mismo razonamiento en el triángulo $A\overline{O}D$ tenemos que:

$$\overline{O}D = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

luego el diámetro del círculo grande es $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y el segmento BG será:

$$\overline{BG} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

usando este valor en el triángulo recto de 30 y 60 grados EBG, el segmento EG es:

$$\overline{EG} = \frac{1}{6}$$

Finalmente usando este último valor en el triángulo EOG tenemos que :

$$\overline{OG} = \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Por lo tanto el radio del círculo pequeño es $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$.

Problema 6 La estrategia para hacer perder a un jugador j, es que los $n-1$ jugadores no saquen monedas de la bolsa j antes del último turno; además, cada vez que saquen monedas, lo hagan de una bolsa con mayor número de monedas (de esta forma después de cada turno las $n-1$ bolsas difieren a lo mas en una moneda).

Veamos ahora si es posible que en el último turno queden exactamente las n monedas de el jugador j.

El número total de monedas es n^2, ya que hay n bolsas con n monedas cada una; además como en cada turno se sacan n monedas (ya que son n jugadores), el juego consta de n turnos.

Después de $n-2$ turnos, quedan $2n$ monedas para los dos últimos turnos ; n de estas monedas están en la bolsa j (ya que nadie sacó de esta bolsa) y las n restantes están entre las $n-1$ bolsas, o sea de éstas $n-2$ tienen 1 moneda y la otra tiene 2 (las bolsas difieren a lo mas en 1 moneda). En el turno $n-1$, de acuerdo a la estrategia, se sacan n monedas de las $n-1$ bolsas (ya que se sacará primero de la bolsa que tenga 2 monedas), quedando para el último turno las n monedas de la bolsa j; de esta manera el jugador j no puede sacar moneda en este turno y así pierde el juego.

Problemas - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 Pedro, Ana, Juan e Inés se ubican en una fila y comienzan a contar de tres en tres: Pedro dice "*tres*", Ana dice "*seis*", Juan dice "*nueve*", e Inés dice "*doce*". Luego Pedro dice "*quince*", Ana dice "*dieciocho*", y así siguen contando en el mismo orden. ¿Quién dice el número "*quinientos treinta y cuatro*".

Problema 2 Un grupo de hombres, algunos de ellos acompañados por sus esposas, gastaron $\$1,000$ en un hotel. Cada hombre gastó $\$19$ y cada mujer gastó $\$13$. Determine cuantos hombres y cuantas mujeres estaban en el hotel.

Problema 3 ¿Cuántos triángulos rectángulos, cuyos lados tienen longitudes enteras, tienen un cateto de longitud 15?

Problema 4 Sean a, b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c la longitud de la hipotenusa. Encuentre el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo en términos de a, b y c.

Problema 5 Sobre una mesa se encuentra una semiesfera (mitad de una esfera) de radio 1, con su parte plana apoyada en la mesa. En forma circular; rodeando la semiestera; se colocan *seis* esferas de radio r de tal forma que cada esfera toca la semiesfera, la mesa y las *dos* esferas adyacentes. ¿Cuánto vale r?

Soluciones - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 Fácilmente se puede verificar que Inés siempre dice números que son múltiplos de 12 (12,24, etc.); es decir; congruentes con 0 mod 4, Pedro dice números congruentes con 3 mod 4, Ana dice los congruentes con 2 mod 4, y Juan los congruentes con 1 mod 4. El número 534 es congruente con 2 mod 4, por lo tanto lo dice Ana.

Problema 2 Debemos encontrar las soluciones enteras de la ecuación:

$1,000 = 19h + 13m$, donde h es el número de hombres y m el número de mujeres.

$1,000 \equiv 12 \bmod 13$

$19 \equiv 6 \bmod 13$, entonces $6h \equiv 12\ mod 13$, $h \equiv 2 \bmod 13$ luego $h = 2$, 15, 28, 41, 54, 57. Como $h > m$, $h = 41$ y $m = 17$.

Problema 3 El teorema de Pitágoras nos dice que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$c_1^2 + c_1^2 = h^2$, si un cateto (c_2 por ejemplo) mide 15, entonces:

$225 = h^2 - c_1^2$

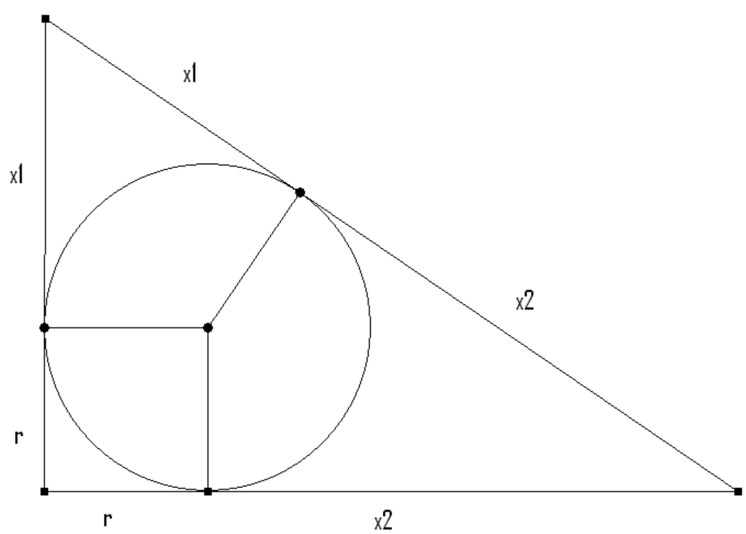
$225 = (h - c_1)(h + c_1)$, es claro que $h + c_1 > h - c_1$

Hay tres formas de descomponer 225 como producto de 2 enteros distintos: 3×75, 5×45 y 9×25.

$$\begin{array}{lll} h - c_1 = 3 & h + c_1 = 75 & h = 39, c_1 = 36 \\ h - c_1 = 5 & h + c_1 = 45 & h = 25, c_1 = 20 \\ h - c_1 = 9 & h + c_1 = 25 & h = 17, c_1 = 8 \end{array}$$

Por lo tanto existen 3 triángulos rectángulos de lados enteros con un cateto de longitud 15.

Problema 4



Por Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

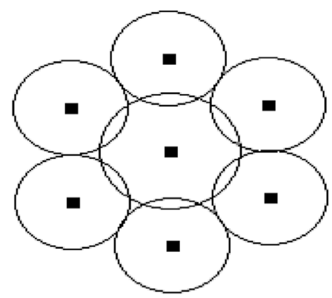
$$\begin{aligned} a &= x1 + r \\ b &= x2 + r \\ c &= x1 + x2 \\ a + b &= x1 + x2 + 2r \\ a + b &= c + 2r \end{aligned}$$

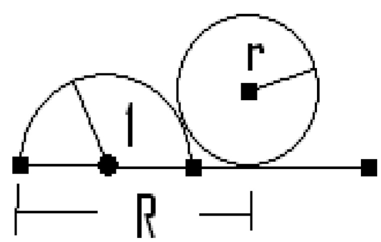
elevando al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 4r^2 + 2cr \\
4r^2 + 4cr - 2ab &= 0 \\
r &= \frac{-2c \pm \sqrt{16c^2 + 32ab}}{8} \\
r &= \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2ab}}{2}
\end{aligned}
$$

La solución negativa se descarta.

Problema 5 A continuación tenemos una vista superior y una lateral del montaje:





Por Pitágoras, tenemos:

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (1 + r)^2 - r^2 \\
R &= \sqrt{1 + 2r}
\end{aligned}
$$

Además, como son 6 esferas de radio r, el hexágono que forman sus centros es regular, luego $R = 2r$. Entonces

$$
\begin{aligned}
2r &= \sqrt{1 + 2r} \\
4r^2 - 2r - 1 &= 0 \\
r &= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Como $r > 0$, se descarta la solución negativa, entonces

$$r = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}.$$

Problemas - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2002 –03 - Nivel II

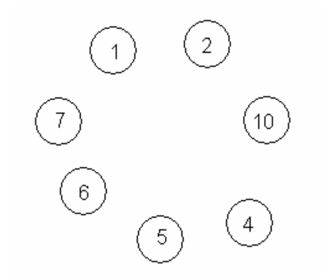
Problema 1 ¿Cuántos enteros tienen la siguiente propiedad: Su mayor divisor distinto de ellos mismos es 91?

Problema 2 Solucionar para x, y enteros positivos:

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= y \\ y^{x+y} &= x^2 y \end{aligned}$$

Problema 3 Sean $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ y $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$, $n = 1, 2, 3, ...$. Evaluar $f_{2,003}(2,003)$.

Problema 4 Los siete enteros del arreglo circular de *siete* discos que se muestra en la figura tienen la propiedad de que cada uno de los enteros $1, 2, 3, ..., 14$ está en un disco o es la suma de los enteros de *dos* discos adyacentes. ¿Es posible reemplazar los números de los discos por enteros que ninguno de ellos sea 5 y que se mantenga la propiedad?



Problema 5 Muestre que 111 no puede representar un cuadrado en ninguna base.

Problema 6 Sea p el perímetro y m la suma de las longitudes de las tres medianas de un triángulo cualesquiera. Demostrar que $\frac{3}{4}p < m < p$.

Soluciones - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2002-03 - Nivel II

Problema 1 Tenemos que $91 = 7 \times 13$, además es fácil ver que $2 \times 7 \times 13 = 182$ tiene la propiedad requerida, ya que sus otros divisores distintos de él mismo son $2 \times 7 = 14$ y $2 \times 13 = 26$ los cuales son menores que 91; lo mismo sucede para :

$3 \times 7 \times 13$,
$5 \times 7 \times 13$,

$7 \times 7 \times 13$.

Sin embargo para los números de la forma $p \times 7 \times 13$, donde p es primo mayor que 7, ya no se cumple, ya que $p \times 13 > 91$ y $p \times 13 < p \times 13 \times 7$.

Por lo tanto los 5 enteros que cumplen la propiedad son:182, 273, 455, 637.

Problema 2 Tenemos las dos ecuaciones para x,y enteros positivos:

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= y \\ y^{x+y} &= x^2 y \end{aligned}$$

Multiplicando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^{x+y} y^{x+y} &= y x^2 y \\ (xy)^{x+y} &= (xy)^2 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$$

luego $x = 1$, $y = 1$

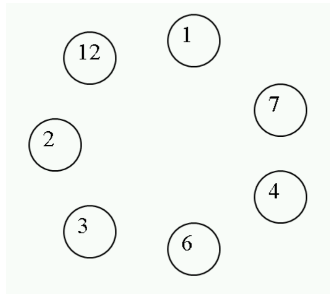
Problema 3 Calculando de forma recursiva las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$ a partir de $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_0(f_0(x)) = f_0(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} \\ f_2(x) &= f_0(f_0(f_0(x))) = f_0(\frac{x-1}{x}) = x \\ f_3(x) &= \frac{1}{1-x} \\ f_4(x) &= \frac{x-1}{x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vemos que se ha formado una sucesión de periodo tres, luego cualquier $f_s(x)$ con s múltiplo de 3 es igual a $\dfrac{1}{1-x}$. Como 2,001 es múltiplo de 3, entonces $f_{2,001}(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Por lo tanto $f_{2,003}(x) = x$ y $f_{2,003}(2,003) = 2,003$.

Problema 4 Sí es posible. Considere el arreglo siguiente



Problema 5 Suponga que sí lo es, entonces:

$$(111)_b = x^2$$

además:

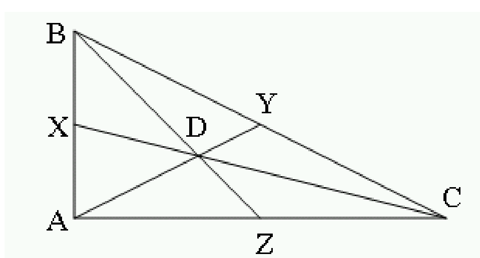
$$(111)_b = b^2 + b + 1$$

Luego:

$$\begin{array}{rcl} b^2 & < & b^2 + b + 1 < b^2 + 2b + 1 \\ b^2 & < & x^2 < (b+1)^2 \\ b & < & x < b + 1 \end{array}$$

Es decir hemos encontrado un entero entre dos enteros consecutivos, todos distintos; lo cual es imposible.

Problema 6 En la figura que se muestra a continuación; AY, BZ, CX son las medianas de un triángulo ABC; D es la intersección de dichas medianas y p es su perímetro.



Se sabe que en todo triángulo la suma de 2 de sus lados es mayor que el tercero.

Aplicando esto al triángulo ABC tenemos:

$$\begin{aligned} AD + DB &> AB \\ BD + DC &> BC \\ AD + DC &> AC \end{aligned}$$

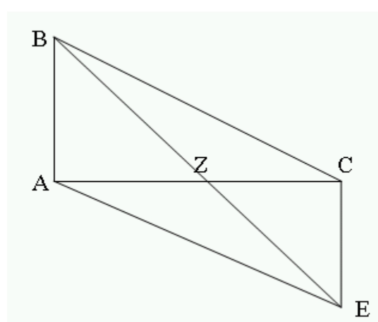
Sumando estas desigualdades resulta:

$$2(AD + BD + DC) > p$$

Además por propiedad de las medianas de un triángulo, tenemos que el punto de intersección de éstas divide cada mediana en proporciones de 1 a 2; es decir: $AD = \frac{2}{3}AY$ $BD = \frac{2}{3}BZ$ $DC = \frac{2}{3}CX$ luego tenemos que:

$$\begin{aligned} 2(\frac{2}{3}AY + \frac{2}{3}BZ + \frac{2}{3}CX) &> p \\ \frac{4}{3}(AY + BZ + CX) &> p \\ AY + BZ + CX &> \frac{3}{4}p \\ m &> \frac{3}{4}p \end{aligned}$$

Por otro lado, en el triángulo ABC tomemos solo la mediana BZ y formemos el paralelogramo $ABCE$ prolongando dicha mediana, tal como se muestra en la figura.



Aplicando la desigualdad hecha al inicio para el triángulo ABE tenemos que:

$$BZ + ZE < AB + AE$$

Observe que $BZ = ZE$ y que $AE = BC$ luego tenemos:

$$2BZ < AB + BC$$

Formando de forma similar paralelogramos con las otras 2 medianas, obtenemos las desigualdades:

$$\begin{aligned} 2CX &< BC + AC \\ 2AY &< AC + AB \end{aligned}$$

Sumando las tres desigualdades tenemos:

$$\begin{aligned} 2(BZ + CX + AY) &< 2(AB + BC + AC) \\ (BZ + CX + AY) &< (AB + BC + AC) \\ m &< p \end{aligned}$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que

$$\frac{3}{4}p < m < p.$$

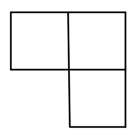
Año Académico 2003-04

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 El rosal del jardín tiene 3 ramas. Cada rama tiene un ramillete de 3 rosas y sobre cada rosa se paran 2 abejas. ¿Cuántas abejas hay en el rosal?

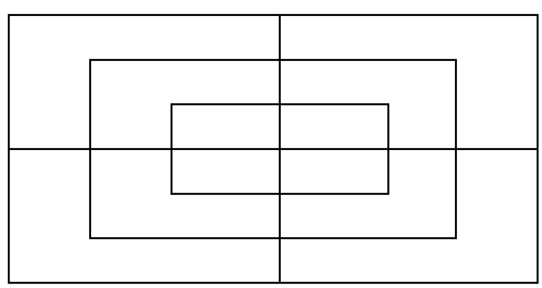
a) 6
b) 8
c) 9
d) 18
e) 24

Problema 2 Cada cuadradito tiene 8 cms de perímetro. Con 3 cuadraditos iguales se formó esta figura. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



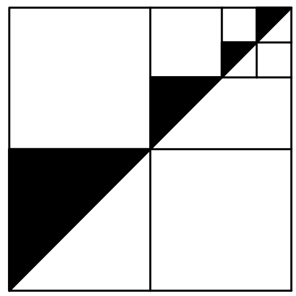
a) 3
b) 6
c) 8
d) 16
e) 24

Problema 3 ¿Cuántos rectángulos distintos puedes ver en la figura?



a) 12
b) 18
c) 24
d) 27
e) 30

Problema 4 ¿Qué fracción del cuadrado más grande representa la parte sombreada?



a) 1/4
b) 11/64
c) 7/32
d) 11/6
e) 3/8

Problema 5 Susana dice que hace 16 años tenía $\frac{2}{3}$ de su edad actual. ¿Cuántos años tiene Susana?

a) 16
b) 24
c) 32
d) 36
e) 48

Problema 6 Dibuja un triángulo ABC que tenga $\measuredangle A = 30°$ y $\measuredangle B = 70°$. Sobre la prolongación del lado $\overline{AC}$ marca el punto D de manera que $\overline{CD} = \overline{CB}$. Completa el triángulo DCB. ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

a) 60°,60°,60°
b) 70°,55°,55°
c) 80°,50°,50°
d) 90°,45°,45°
e) 100°,40°,40°

Problema 7 En el campamento de verano los chicos tienen 3 baldes de 22, 18 y 10 litros de capacidad. Van a buscar agua al río, llenan los 3 baldes pero en el camino, de cada balde, se riega la quinta parte. ¿Con cuánta agua llegaron al campamento?

a) 10 litros
b) 20 litros
c) 30 litros
d) 40 litros
e) 50 litros

Problema 8 ¿Cuántos números impares de 4 dígitos, menores que 6,765 y divisibles por 5 hay?

a) 6
b) 70
c) 500
d) 576
e) 604

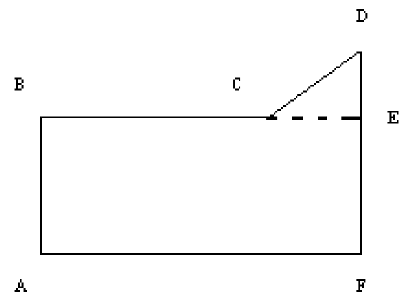
Problema 9 Dos quintos de los ahorros de Laura son \$56.40. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado?

a) \$21.36
b) \$74.76
c) \$88.50
d) \$93.60
e) \$141

Problema 10 Luis tenía 18 figuritas el sábado pasado. El domingo y el lunes compró 10 figuritas cada día. El martes y el miércoles también compró figuritas. El miércoles compró el doble de figuritas que el martes. Hoy, que es jueves y no compró figuritas, tiene un total de 74 figuritas. ¿Cuántas figuritas compró Luis el martes?

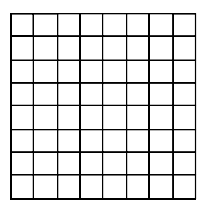
a) 8
b) 10
c) 12
d) 18
e) 24

Problema 11 En al figura, $ABEF$ es un rectángulo y CDE es un triángulo isóceles. $\overline{AB} = 1m$, $\overline{AF}$ es el triple de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ es el doble de $\overline{AB}$. Sabiendo que el perímetro de la figura es $9.41m$, calcular la longitud $\overline{CD}$.



a) $1.41m$
b) $2.41m$
c) $3.41m$
d) $4.41m$
e) $5.41m$

Problema 12 Se quieren construir cuadrados de área mayor que 25, tomando como unidad el área de un cuadradito de la cuadrícula. Si los vértices deben estar en las intersecciones de la cuadrícula, y los lados deben coincidir con las líneas de la misma, ¿cuántos cuadrados puedes dibujar?



a) 4
b) 5
c) 9
d) 14
e) 25

Problema 13 "Juan tiene por lo menos 6 primos", dice José.

"No, tiene menos de 6", corrige Ramiro.

"Tal vez tengas razón, pero lo que yo sé, es que tienes más de 1 primo", agrega Ezequiel.

¿Cuántos primos puede tener Juan si se sabe que uno solo de los muchachos dice la verdad?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

Problema 14 En una ciudad, un sexto de la población es menor de 7 años. La mitad de los menores de 7 años son varones. Si en esa ciudad hay 3,250 varones menores de 7 años, ¿cuántos habitantes hay en esa ciudad?

a) $3,250$
b) $6,500$
c) $13,000$
d) $22,750$
e) $39,000$

Problema 15 En un triángulo isósceles cuyo perímetro es $15m$, la base mide la mitad de lo que miden cada uno de los otros lados. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

a) 3, 3, 9
b) 4, 4, 7
c) 5, 5, 5
d) 6, 6, 3
e) 7, 7, 1

Problema 16 Una piscina rectangular tiene $3m$ más de largo que de ancho. El borde exterior esta rodeado por lozas cuadradas de $1m$ de lado cada una. Si se necesitan 30 lozas para rodear la piscina, ¿cuál es el ancho de la piscina?

a) $5m$
b) $8m$
c) $11m$
d) $14m$
e) $17m$

Problema 17 Un trabajador gana $220 por las primeras 40 horas que trabaja a la semana. Si trabaja más, por las horas extra gana un quinto más. La última semana cobró \$319. ¿Cuántas horas extra trabajó?

a) 10
b) 15
c) 35
d) 55
e) 99

Problema 18 Andrea, Carla, Julieta, Paola y María compraron boletos de tren para un viaje. Los números de sus asientos eran 7, 8, 9, 10 y 11. Los asientos impares están del lado de las ventanas. Andrea y Carla ocuparon asientos del lado de las ventanas. ¿De cuántas maneras distintas pudieron sentarse las cinco muchachas?

a) 12
b) 24
c) 36
d) 48
e) 60

Problema 19 Un número de 4 cifras es *equilibrado* si uno de sus dígitos es el promedio de los otros 3. Por ejemplo, $1,654$ es equilibrado porque 4 es el promedio de 1, 6 y 5; $2,222$ es equilibrado porque 2 es el promedio de 2, 2 y 2. ¿Cuántos números equilibrados mayores que $1,000$ y menores que $1,999$ hay?

a) 55
b) 66
c) 77
d) 88
e) 99

Problema 20 Si 64 se divide en 3 partes proporcionales a 2, 4 y 6, la parte más pequeña es:

a) $5 + \frac{1}{3}$
b) 11
c) $10 + \frac{2}{3}$
d) 5
e) ninguna de las anteriores

Problema 21 Si el radio de un círculo se aumenta en un 100%, su área aumenta en un:

a) 100%
b) 200%
c) 300%
d) 400%
e) 500%

Problema 22 Para el sistema de ecuaciones $2x-3y=8$, $6y-4x=9$, tenemos que:

a) $x=4$, $y=0$
b) $x=0$, $y=\frac{3}{2}$
c) $x=0$, $y=0$
d) no hay soluciones
e) hay un número infinito de soluciones

Problema 23 Dos atletas recorren una pista circular. Ambos parten de la salida S. El primero da una vuelta entera cada 6 minutos; el segundo tarda 8 minutos para dar la misma vuelta. ¿Después de cuantos minutos vuelven a pasar juntos por S?

a) 12 minutos
b) 14 minutos
c) 16 minutos
d) 24 minutos
e) 30 minutos

Problema 24 Descuentos sucesivos del 10% y del 20% son equivalentes a un solo descuento de:

a) 30%
b) 15%
c) 72%
d) 28%
e) niguna

Problema 25 Una escalera de 25 pies se recarga en una pared vertical. La base de la escalera está a 7 pies de la pared vertical. Si la parte superior de la escalera desciende 4 pies, la base se aleja:

a) 9 pies
b) 15 pies
c) 5 pies
d) 8 pies
e) 4 pies

Problema 26 Si 5 medias geométricas se insertan entre 8 y 5,832 el quinto término en la serie geométrica es:

a) 648
b) 832
c) 1,168
d) 1,944
e) ninguna de las anteriores

Problema 27 El área del triángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio r es:

a) r^2
b) r^3
c) $2r^2$
d) $2r^3$
e) $\frac{r^2}{2}$

Problema 28 ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 12:35 pm?

a) $166°30'$
b) $156°20'$
c) $176°30'$
d) $167°30'$
e) $167°$

Problema 29 $ABCD$ es un trapecio de bases $\overline{AB} = 10$ y $\overline{CD} = 6$. La altura mide 4. Sea P el punto medio del lado $\overline{AD}$ y Q el punto medio de $\overline{PB}$. Entonces el área del triángulo PQC es:

a) 16
b) 6
c) 14
d) 12
e) 8

Problema 30 Papo ahorra para pagar su viaje de graduación. Para ello deposita en su alcancía un número entero de dólares en marzo, y en abril una cantidad mayor que la de marzo (también entera). A partir del tercer mes deposita todos los meses una cantidad igual a la suma de los depósitos de los dos meses anteriores. Después del décimo depósito, la alcancía contiene \$407. ¿De cuánto fueron los depósitos de marzo y abril?

a) \$2 y \$4
b) \$1 y \$3
c) \$3 y \$4
d) \$1 y \$4
e) \$2 y \$3

Problema 31 $ABCD$ es un recángulo, $AB = 5$ y $CB = 3$. P es un punto en el lado BC, y N es un punto en AP tal que $DN \perp AP$. Entonces $AP \times DN =$

a) 7.5
b) 15
c) 30
d) 12
e) ninguna de las anteriores

Problema 32 A medida que el número de lados de un polígono convexo crece de 3 a n, la suma de sus ángulos exteriores:

a) crece
b) decrece
c) permanece constante
d) no puede predecirse
e) se convierte en $n - 3$ angulos rectos

Problema 33 El mayor divisor de la expresión $n^3 - n$ para toda n natural es:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Problema 34 28 apretones de mano se intercambiaron al terminar una fiesta. Asumiendo que cada asistente a la fiesta era igualmente educado y amistoso, el número de invitados presentes era:

a) 14
b) 28
c) 56
d) 8
e) 7

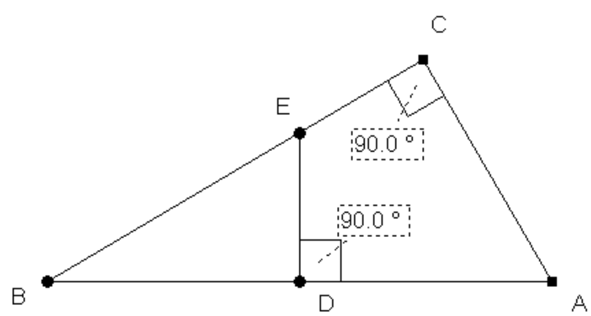
Problema 35 Si r y s son raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} =$

a) $b^2 - 4ac$
b) $\frac{b^2-4ac}{2a}$
c) $\frac{b^2-4ac}{c^2}$
d) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$
e) ninguna de las anteriores

Problema 36 Si $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ entonces:

a) $x = 1$
b) $0 < x < 1$
c) $1 < x < 2$
d) $2 < x < \infty$
e) ninguna de las anteriores

Problema 37 En la figura $\measuredangle C = 90°$, $\overline{AD} = \overline{DB}$, $\overline{DE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AB} = 20$, $\overline{AC} = 12$



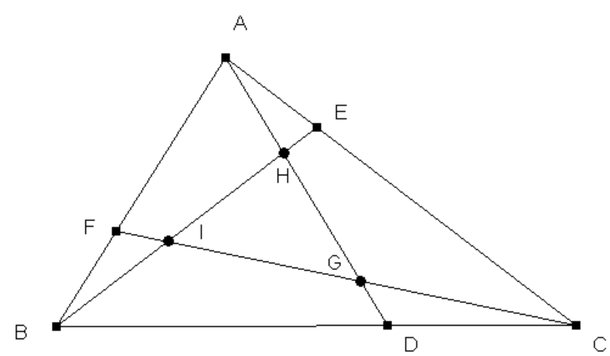
El área del cuadrilátero $ADEC$ es:

a) 75
b) 58.5
c) 48
d) 37.5
e) ninguna de las anteriores

Problema 38 La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 10 y el radio del círculo inscrito es 1. El perímetro del triángulo es:

a) 15
b) 22
c) 24
d) 26
e) 30

Problema 39 En la figura, CD, AE y BF son $\frac{1}{3}$ parte de sus respectivos lados:



Entonces el área del triángulo GHI es:

a) (*área* $\triangle ABC$)/10
b) (*área* $\triangle ABC$)/9
c) (*área* $\triangle ABC$)/7
d) (*área* $\triangle ABC$)/6
e) ninguna de las anteriores

Problema 40 Se forma una cuadrícula con 12 puntos, dispuestos en 4 filas y 3 columnas. ¿Cuántos triángulos hay que tengan sus vértices en dichos puntos?

a) 60
b) 310
c) 80
d) 220
e) 200

Problema 41 Determine el valor mínimo de n tal que la siguiente proposición es cierta: De cada n enteros positivos consecutivos, hay al menos uno que es menor que la suma de sus divisores propios (divisores mayores que 1 y menores que n).

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

Problema 42 Sean $ABCD$ un rectángulo, E el punto medio de BC y F el punto medio de CD. Sea G el punto de intersección de DE con BF. Si $\measuredangle FAE = 20°$, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle EGB$?

a) 20°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 70°

Problema 43 En un tablero de dimensiones $m \times n$ se escribe un número (no necesariamente entero) en cada cuadro de manera que la suma de estos números en cada fila y columna es 1. Entonces tenemos que:

a) $m = n$
b) $m > n$
c) $m < n$
d) m y n son pares
e) m y n son impares

Problema 44 Consideremos los enteros del 1 al $1,000,000$ inclusive. Se calculan dos sumas: la suma de los números que tienen todos sus dígitos pares (P) y la suma de los números que tienen todos sus dígitos impares (I). Entonces tenemos que:

a) $P = I$
b) $P > I$
c) $I > P$
d) es imposible determinarlo
e) ninguna de las anteriores

Problema 45 Si a, b, c, d son dígitos tales que $0 \leqslant a < b < c < d$, ¿cuántos números de la forma $1a1b1c1d1$son múltiplos de 33?

a) 7
b) 10
c) 16
d) 20
e) 32

Problema 46 Hallar la cantidad de números naturales tales que ninguno de sus dígitos es 1 y el producto de todos sus dígitos es 48.

a) 36
b) 38
c) 39
d) 40
e) 42

Problema 47 Dada una circunferencia de radio 1, hallar el lado de un decágono convexo regular inscrito en ella.

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) ninguna de las anteriores

Problema 48 ¿Cuántos números naturales menores que un millón, son múltiplos de 9, y estan formados exclusivamente por los dígitos 5 y 8?

a) 18
b) 20
c) 22
d) 24
e) 26

Problema 49 Si $55\ldots556$ y $44\ldots445$ tienen n dígitos cada uno, ¿cuántos dígitos tiene el número $(55\ldots556)^2-(44\ldots445)^2$?

a) $2n-1$
b) $2n-2$
c) $2n+1$
d) $3n$
e) ninguna de las anteriores

Problema 50 ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene $x^3 - y^3 = 602$?

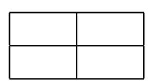
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Primera Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel II

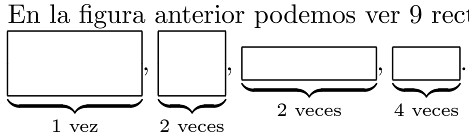
Problema 1 El rosal tiene 3 ramas. Para cada rama hay 3 rosas, y para cada rosa hay 2 abejas. Por lo tanto, hay $3 \times 3 \times 2 = 18$ abejas en el rosal.

Problema 2 Como cada cuadrito tiene 8 cm de perímetro, cada uno de sus lados mide 2 cm. El perímetro de la figura es 8 veces un lado de un cuadrito, por lo tanto es 8×2 cm $= 16$ cm.

Problema 3 La figura consiste de 3 rectángulos concéntricos, cada uno dividido en cuatro partes por un segmento vertical y uno horizontal que pasan por su centro:



En la figura anterior podemos ver 9 rectángulos, de siguientes tamaños:



Como los 3 rectángulos concéntricos no forman nuevos rectángulos entre si, en la figura original podemos ver $3 \times 9 = 27$ rectángulos.

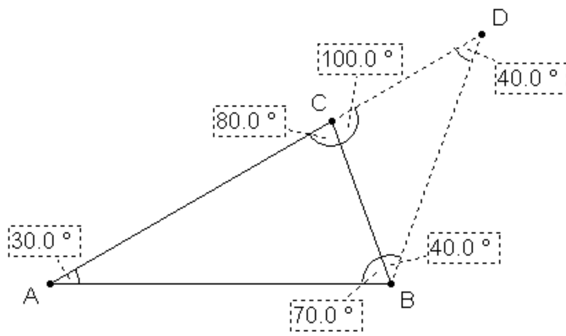
Problema 4 Sea 1 el lado del cuadrado más grande. Entonces el área del cuadrado es 1. La parte sombreada consiste de 4 triángulos rectángulos isóceles. Los catetos del triángulo más grande miden $\frac{1}{2}$ cada uno, los del triángulo mediano miden $\frac{1}{4}$ cada uno, y los de los dos triángulos más pequeños miden $\frac{1}{8}$ cada uno. Por lo tanto, el área de la parte sombreada es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \\ = & \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{8+2+1}{64} = \frac{11}{64} \end{aligned}$$

Entonces, la parte sombreada representa una $\frac{11}{64}$ parte del cuadrado más grande.

Problema 5 Sea x la edad actual de Susana. Del enunciado sabemos que $x - 16 = \frac{2}{3}x$. Resolviendo esta ecuación obtenemos: $\frac{1}{3}x = 16$. Por lo tanto, $x = 48$.

Problema 6



$\measuredangle ACB = 180° - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC = 180° - 30° - 70° = 80°$
Entonces, $\measuredangle BCD = 180° - \measuredangle ACB = 180° - 80° = 100°$.
Ahora, como $\overline{CD} = \overline{CB}$, $\triangle BCD$ es isósceles, y $\measuredangle CBD = \measuredangle CDB$.
Sabemos que $\measuredangle CBD + \measuredangle CDB + \measuredangle BCD = 180°$.
Por lo tanto, $2\measuredangle CBD + 100° = 180°$.
Resolviendo obtenemos: $\measuredangle CBD = 40° = \measuredangle CDB$.
Por lo tanto, los ángulos del $\triangle BCD$ miden $100°$, $40°$, $40°$.

Problema 7 Como de cada balde se riega la quinta parte, en cada balde quedan cuatro quintas partes. Por lo tanto los chicos llegan al campamento con $\frac{4}{5} \times 22 + \frac{4}{5} \times 18 + \frac{4}{5} \times 10 = \frac{4}{5}(22 + 18 + 10) = \frac{4}{5} \times 50 = 40$ litros de agua.

Problema 8 Un número impar divisible por 5 tiene como su último dígito al 5. Los números impares de 4 dígitos divisibles por 5 y estríctamente menores que 6,765 son (en orden ascendente):

$$1005, 1015, 1025, \ldots, 6745, 6755$$

Para contarlos, ignoramos el último dígito de cada número y consideramos la siguiente lista:

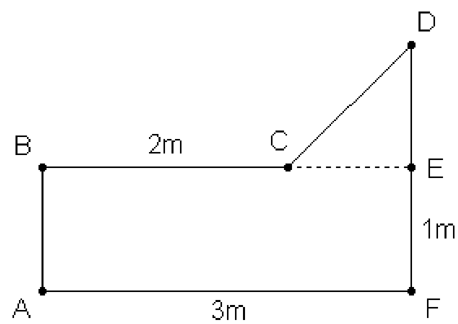
$$100, 101, 102, \ldots, 674, 675$$

Se puede notar fácilmente que esta última lista tiene 576 números.
Por lo tanto, hay 576 números impares de 4 dígitos divisibles por 5 y menores que 6,765.

Problema 9 Sea x la cantidad de dólares que tiene ahorrado Laura. Del enunciado sabemos que $\frac{2}{5}x = \$56.40$. Por lo tanto, $x = \frac{5}{2} \times \$56.40 = 5 \times \$28.20 = \$141$.

Problema 10 Sea x la cantidad de figuritas que Luis compró el martes. Entonces, el miércoles compró $2x$ figuritas. Del enunciado sabemos que $18 + 10 + 10 + x + 2x = 74$. Resolviendo para x obtenemos $3x = 74 - 38$. Por lo tanto, $x = \frac{36}{3} = 12$.

Problema 11



Como $\overline{AB} = 1m$, entonces $\overline{AF} = 3 \times \overline{AB} = 3m$, y $BC = 2 \times \overline{AB} = 2m$.

Por lo tanto, $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = 3m - 2m = 1m$.

Como $\triangle CDE$ es un triángulo rectángulo isósceles con $\measuredangle CED = 90°$, tenemos que $\overline{CE} = \overline{ED} = 1m$. Por el Teorema de Pitágoras

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{ED}^2} = \sqrt{(1m)^2 + (1m)^2} = \sqrt{2}m \approx 1.41m.$$

Problema 12 Imaginemonos que la cuadrícula está en un sistema de coordenadas con su esquina inferior izquierda en el origen $(0,0)$, y su esquina superior derecha en $(8,8)$. Para que el cuadrado construido tenga área mayor que 25, su lado debe ser mayor que 5. Por lo tanto, queremos contar cuántos cuadrados de lado 6, 7, y 8 caben en la cuadrícula.

Solo hay un cuadrado de lado 8 que cabe en la cuadrícula, el que tiene su esquina inferior izquierda en $(0,0)$.

Hay 4 cuadrados de lado 7 que caben en la cuadrícula, los que tienen sus esquinas inferiores izquierdas en: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, y $(0,1)$ respectivamente.

Finalmente, hay 9 cuadrados de lado 6 que caben en la cuadrícula, los que tienen sus esquinas inferiores izquierdas en: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$ respectivamente.

Problema 13 Entre José y Ramiro, exactamente uno de ellos está diciendo la verdad, ya que el número de primos de Juan tiene que ser mayor o igual que 6 ó menor que 6. Pero José no puede estar diciendo la verdad, porque entonces Ezequiel también estaría diciendo la verdad, y esto no puede pasar, ya que solo uno de los muchachos está diciendo la verdad.

Por lo tanto, Ramiro es el que dice la verdad.

Entonces, Ezequiel está mintiendo, por lo tanto es mentira que el número de primos de Juan es mayor que 1.

Entonces, el número de primos de Juan es menor o igual que 1.

Por lo tanto, Juan tiene exactamente un primo ó no tiene primos.

Problema 14 Sea x la población de la ciudad. Sabemos que el número de personas menor de 7 años en la ciudad es $\frac{1}{6}x$, y que la mitad de estas personas son varones.

Por lo tanto, el número de varones menores de 7 años en la ciudad es $\frac{1}{2}(\frac{1}{6}x)$.

Entonces, obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{6}x) = 3250$$

Por lo tanto, $x = 12 \times 3,250 = 39,000$

Problema 15 Sea x la longitud de la base. Entonces los otros dos lados miden $2x$ cada uno. Como el perímetro del triángulo es $15m$, obtenemos la ecuación

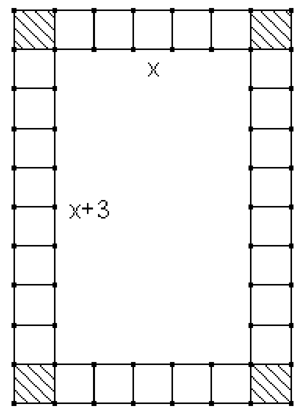
$$x + 2x + 2x = 15m$$

Resolviendo obtenemos

$$x = \frac{15}{5}m = 3m$$

Por lo tanto, los lados del triángulo miden $3m$, $6m$, y $6m$.

Problema 16



Como se necesitan 30 lozas cuadradas de $1m$ de lado cada una para rodear la piscina, entonces podemos quitar las 4 lozas de las esquinas y ver que el perímetro de la piscina es $(30-4)m = 26m$. Sea x el ancho de la piscina. Entonces el largo es $x+3$. Como el perímetro es $26m$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$26 = 2x + 2(x+3)$$

Resolviendo, obtenemos

$$\begin{aligned} 20 &= 4x \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ancho de la piscina es $5m$.

Problema 17 Por las primeras 40 horas que trabaja, el sueldo por hora del trabajador es $\frac{\$220}{40hr} = \$5.50/hr$. Por lo tanto, por las horas extra su sueldo por hora es $\$5.50/hr + \frac{1}{5}\$5.50/hr = \$6.60/hr$.

Sea x el número de horas extra que trabajó el trabajador. Por las horas extra, el trabajador se ganó en total $\$319 - \$220 = \$99$. Por lo tanto, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\$6.60}{hr} \times x = \$99$$

Resolviendo, obtenemos

$$x = \frac{99}{6.60} hr = 15hr$$

Problema 18 Como hay 3 asientos del lado de las ventanas (7, 9, y 11), Andrea y Carla pueden sentarse de $\binom{3}{2} \times 2! = 6$ maneras, ya que primero se escoge dos de los tres asientos donde se van a sentar Andrea y Carla y esto se puede hacer de $\binom{3}{2}$ maneras, y luego se puede permutar la posición de las dos muchachas de 2! maneras. Las tres muchachas restantes pueden tomar cualquier de los 3 asientos restantes y lo pueden hacer de 3! maneras.

Por lo tanto, las cinco muchachas pudieron sentarse de $\binom{3}{2} \times 2! \times 3! = 36$ maneras distintas.

Problema 19 Si un número mayor que $1,000$ y menor que $1,999$ es equilibrado, entonces obviamente su primer dígito es 1.

Sea N un número equilibrado, $1,000 < N < 1,999$, y sean $1, a, b, c$ sus dígitos. Si 1 es el promedio de a, b, c, entonces $a + b + c = 3$. Entonces $\{a, b, c\}$ puede ser $\{0, 0, 3\}$, ó $\{0, 1, 2\}$ ó $\{1, 1, 1\}$. Entonces usando los dígitos del primer conjunto $\{0, 0, 3\}$, podemos formar N de $\frac{3!}{2!} = 3$ maneras: 1,003; 1,030; 1,300. Similarmente, usando $\{0, 1, 2\}$, podemos formar N de $3! = 6$ maneras: 1,012; 1,021; 1,102; 1,120; 1,201; 1,210. Finalmente, usando $\{1, 1, 1\}$, podemos formar N de $\frac{3!}{3!} = 1$ manera: 1,111.

Si 2 es uno de los dígitos, digamos $a = 2$, y es el promedio de los otros tres, entonces $1 + b + c = 3a = 6$, por lo tanto $b + c = 5$. Entonces $\{b, c\}$ puede ser $\{0, 5\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, entonces $\{a, b, c\}$ puede ser $\{0, 2, 5\}$, ó $\{1, 2, 4\}$ ó $\{2, 2, 3\}$. Entonces usando los dígitos del primer conjunto $\{0, 2, 5\}$, podemos formar N de $3! = 6$ maneras. Usando $\{1, 2, 4\}$, podemos formar N de $3! = 6$ maneras. Finalmente, usando $\{2, 2, 3\}$, podemos formar N de $\frac{3!}{2!} = 3$ maneras.

Ahora, el último caso y los demás los enumeramos en la siguiente tabla:

promedio a	dígitos	$b+c=3a-1$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	número de N's
$a=2$	$1,2,b,c$	$b+c=5$	$0,5$	$0,2,5$	$3!=6$
			$1,4$	$1,2,4$	$3!=6$
			$2,3$	$2,2,3$	$\frac{3!}{2!}=3$
$a=3$	$1,3,b,c$	$b+c=8$	$0,8$	$0,3,8$	$3!=6$
			$1,7$	$1,3,7$	$3!=6$
			$2,6$	$2,3,6$	$3!=6$
			$3,5$	$3,3,5$	$\frac{3!}{2!}=3$
			$4,4$	$3,4,4$	$\frac{3!}{2!}=3$
$a=4$	$1,4,b,c$	$b+c=11$	$2,9$	$2,4,9$	$3!=6$
			$3,8$	$3,4,8$	$3!=6$
			$4,7$	$4,4,7$	$\frac{3!}{2!}=3$
			$5,6$	$4,5,6$	$3!=6$
$a=5$	$1,5,b,c$	$b+c=14$	$5,9$	$5,5,9$	$\frac{3!}{2!}=3$
			$6,8$	$5,6,8$	$3!=6$
			$7,7$	$5,7,7$	$\frac{3!}{2!}=3$
$a=6$	$1,6,b,c$	$b+c=17$	$8,9$	$6,8,9$	$3!=6$
$a=7$	$1,7,b,c$	$b+c=20$	–	–	–

Note que para $a \geqslant 7$, no hay soluciones para los dígitos b,c, ya que en este caso $b+c=3a-1 \geqslant 3 \times 7-1=20$. Sumando los números de la última columna obtenemos $6 \times 10+3 \times 6=78$. Añadiendo el número de posibilidades cuando $a=1$, obtenemos $78+3+6+1=88$.

Por lo tanto, hay 88 números equilibrados mayores que 1,000 y menores que 1,999.

Problema 20 Sea x la parte más pequeña. Entonces, la segunda parte es $\frac{4}{2}x=2x$, y la tercera parte es $\frac{6}{2}x=3x$. Como las tres partes suman a 64, obtenemos: $x+2x+3x=64$. Resolviendo, obtenemos $x=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$.

Problema 21 Si el radio r de un círculo aumenta en un 100%, significa que el nuevo radio es $r+100\% \times r=2r$. Entonces el área del círculo es $\pi(2r)^2=4\pi r^2$. El área original del círculo era πr^2. Como $4\pi r^2=\pi r^2+3\pi r^2=\pi r^2+300\% \times \pi r^2$, podemos ver que el área del círculo aumentó en un 300%.

Problema 22 Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 6y-4x=9 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} -4x+6y=-16 \\ -4x+6y=9 \end{cases}$$

Podemos ver claramente que no existen x, y reales que satisfagan ambas ecuaciones, por lo tanto, el sistema de ecuaciones original no tiene soluciones.

Nota: En el plano cartesiano, las gráficas de las dos ecuaciones son rectas paralelas (no tienen punto de intersección).

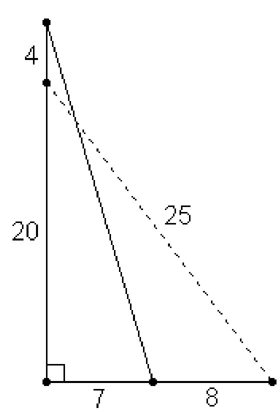
Problema 23 El primer atleta pasa por S 6 minutos después de la partida, luego 12 minutos después, luego 18 minutos, luego 24 minutos, etc. El segundo atleta pasa por S 8 minutos después de la partida, luego 16 minutos después, 24 minutos, etc. Podemos ver entonces que los dos atletas vuelven a pasar juntos por S 24 minutos después de la partida. En general, la contestación al problema es el mínimo común múltiplo de t_1 y t_2, $mcm(t_1, t_2)$, donde t_1 y t_2 son los tiempos que le toman al primero y al segundo atleta, respectivamente, en dar una vuelta entera. En nuestro caso $mcm(6, 8) = 24$.

Problema 24 Sea p el precio original. Entonces, el precio después de dos descuentos sucesivos del 10% y 20% es:

$$\begin{aligned} & (p - 10\% \times p) - 20\% \times (p - 10\% \times p) \\ = \; & 80\% \times 90\% \times p = \frac{8}{10}\frac{9}{10}p \\ = \; & \frac{72}{100}p = 72\% \times p = p - 28\% \times p \end{aligned}$$

Por lo tanto, los descuentos sucesivos de 10% y 20% son equivalentes a un solo descuento de 28%.

Problema 25



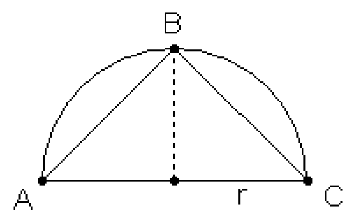
Inicialmente, la escalera junto con la pared y el piso forman un triángulo rectángulo cuyos lados miden 25 (la longitud de la escalera), 7 (la distancia de la base a la pared), y $\sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24$ (la altura a la que está la parte superior de la escalera). Luego de deslizarse, obtenemos un nuevo triángulo rectángulo cuyos lados miden 25 (la longitud de la escalera), $24 - 4 = 20$ (la altura a la que está la parte superior de la escalera), y $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (la distancia de la base a la pared). Por lo tanto, la base de la escalera se alejó $15 - 7 = 8$ pies de la pared.

Problema 26 Si se insertan 5 medias geométricas entre 8 y 5,832, entonces los primeros términos de la serie geométrica así obtenida son: 8, $8r$, $8r^2$, $8r^3$, $8r^4$, $8r^5$, $5,832 = 8r^6$.

Resolviendo obtenemos, $r^6 = \frac{5{,}832}{8} = 729$, así que $r = \pm 3$.

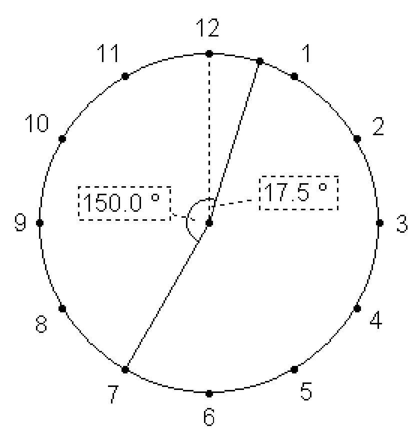
Por lo tanto, el quinto término en la serie geométrica es $8r^4 = 8 \times (\pm 3)^4 = 648$.

Problema 27



El triángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio r tiene como su base al diámetro del semicírculo, y como su altura al radio del semicírculo. Por lo tanto, su área es $\frac{1}{2} \times (2r) \times r = r^2$.

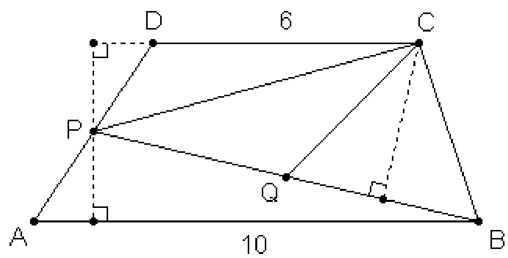
Problema 28



Imaginémonos que hay una tercera aguja (de referencia) apuntando hacia 12 (ver figura). Entonces el ángulo formado por la aguja de minutos y la aguja de referencia es $\frac{5}{12} \times 360° = 150°$. Luego, el ángulo formado por la aguja de horas y la aguja de referencia es $\frac{35}{60} \times \frac{360°}{12} = 17.5°$.

Por lo tanto, el ángulo formado por las agujas de horas y de minutos es $150° + 17.5° = 167.5° = 167°30'$.

Problema 29



Como P es el punto medio de AD, la altura del $\triangle CDP$ es la mitad de la altura del trapecio $ABCD$. Similarmente, la altura del $\triangle ABP$ es la mitad de la altura del trapecio $ABCD$.

Entonces, $\acute{a}rea_{PDC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$, y $\acute{a}rea_{ABP} = \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10$.

También tenemos que $\acute{a}rea_{ABCD} = \frac{1}{2}(10 + 6) \times 4 = 32$.

Por lo tanto, $\acute{a}rea_{PBC} = \acute{a}rea_{ABCD} - \acute{a}rea_{PDC} - \acute{a}rea_{ABP} = 32 - 6 - 10 = 16$.

Como Q es el punto medio de PB, $PQ = \frac{1}{2}PB$. Note que los triángulos $\triangle PQC$ y $\triangle PBC$ tienen la misma altura h sobre sus respectivas bases PQ y PB.

Por lo tanto, $\acute{a}rea_{PQC} = \frac{1}{2} \times PQ \times h = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}PB) \times h = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}PB \times h) = \frac{1}{2} \times \acute{a}rea_{PBC} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

Problema 30 Sean m y a las cantidades (enteras) depositadas en marzo y abril, respectivamente. Entonces la tabla de depósitos de Papo es:

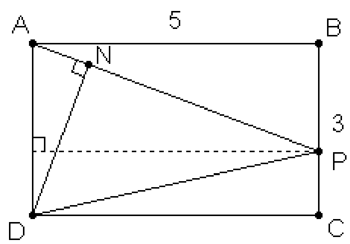
# de deposito	cantidad depositada
1	m
2	a
3	$m+a$
4	$m+2a$
5	$2m+3a$
6	$3m+5a$
7	$5m+8a$
8	$8m+13a$
9	$13m+21a$
10	$21m+34a$
TOTAL	$55m+88a$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente ecuación: $55m + 88a = 407$, o más simplificado $5m + 8a = 37$.

Ahora, $a \neq 1$, de lo contrario $5m = 29$, absurdo. Similarmente, $a \neq 2$, de lo contrario $5m = 21$, absurdo. Similarmente, $a \neq 3$, de lo contrario $5m = 13$, absurdo. Si $a = 4$, entonces $5m = 5$, y $m = 1$. Esta es la única solución entera positiva de $5m + 8a = 37$.

Por lo tanto, los depósitos de marzo y abril fueron \$1 y \$4 respectivamente.

Problema 31



Note que la altura del $\triangle ADP$ desde P hasta la base $\overline{AD}$ mide 5.

Tenemos que $área_{ADP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{15}{2}$.

Pero también, $área_{ADP} = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{DN}$.

Por lo tanto, $\overline{AP} \times \overline{DN} = 2 \times área_{ADP} = 2 \times \frac{15}{2} = 15$.

Problema 32 La suma de los ángulos interiores de un n-gono convexo es $180°(n-2)$. Por lo tanto, la suma de los ángulos exteriores de un n-gono convexo es $180° \times n - 180° \times (n-2) = 360°$. Vemos que la suma de los ángulos exteriores no depende de n, por lo tanto, a medida que n crece la suma de los ángulos exteriores de un n-gono convexo permanece constante.

Problema 33 Estamos buscando el mayor común divisor de todos los números en el conjunto $S = \{n^3 - n \mid n \text{ natural}\}$. Observe que para todo n natural, $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = (n-1)\,n\,(n+1)$, un producto de tres enteros consecutivos. Por lo tanto, exactamente uno de ellos es divisible entre 3. Por la misma razón, por lo menos uno de ellos es divisible entre 2.

Así que $6 \mid n^3 - n$, para todo n natural.

Por lo tanto, 6 es un común divisor de todos los números en S.

Ahora observe que para $n = 2$, $n^3 - n = 6 \in S$. Entonces, no hay un número mayor que 6 que divida a todos los números en S.

Por lo tanto, 6 es el mayor común divisor de todos los números en S.

Problema 34 Sea n el número de invitados presentes. Suponiendo que todos los invitados se dan la mano una vez, el numero de apretones de mano es

$$(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Entonces $\frac{(n-1)n}{2} = 28$. Luego $n^2 - n - 56 = 0$.

Por lo tanto $(n-8)(n+7) = 0$ y $n = 8$ o $n = -7$.

Entonces $n = 8$.

Problema 35 Como r y s son raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, entonces el polinomio se puede escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-s) = ax^2 - a(r+s)x + ars$$

Igualando coeficientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} r + s &= -\frac{b}{a} \\ rs &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ahora,

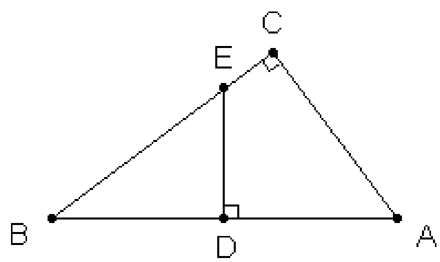
$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} &= \frac{r^2 + s^2}{r^2 s^2} = \frac{r^2 + 2rs + s^2}{r^2 s^2} - \frac{2rs}{r^2 s^2} \\ &= \frac{(r+s)^2}{(rs)^2} - \frac{2}{rs} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{2}{\frac{c}{a}} = \\ &= \frac{b^2}{c^2} - \frac{2a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2} \end{aligned}$$

Problema 36 Como $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, podemos ver que $x = \sqrt{1+x}$. Cuadrando ambos lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1+x \\ x^2 - x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Pero $x > 0$, por lo tanto $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Como $2 < \sqrt{5} < 3$, tenemos que $3 < 1+\sqrt{5} < 4$.
Dividiendo la desigualdad entre 2: $\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$.
Por lo tanto, $1 < \frac{3}{2} < x < 2$.

Problema 37



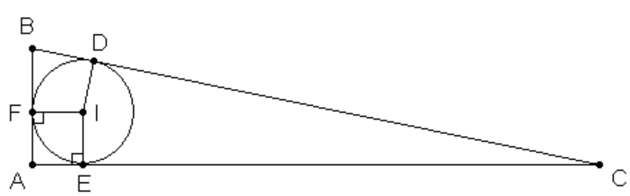
Como $\overline{AB} = 20$, y $\overline{AC} = 12$, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $\overline{BC} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{4^2(5^2 - 3^2)} = 4\sqrt{25-9} = 16$. Como $\overline{AD} = \overline{BD}$, y $\overline{AB} = 20$, tenemos que $\overline{BD} = 10$.

Como $\measuredangle BDE = 90°$, y los triángulos $\triangle BDE$ y $\triangle BCA$ comparten el ángulo $\measuredangle B$, tenemos que $\triangle BDE \sim \triangle BCA$.

Por lo tanto, $\frac{\overline{ED}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Resolviendo obtenemos: $\frac{\overline{ED}}{10} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, y $\overline{ED} = 7.5$.

Ahora, $\acute{a}rea_{ADEC} = \acute{a}rea_{ABC} - \acute{a}rea_{BDE} = \frac{1}{2} \times AC \times BC - \frac{1}{2} \times ED \times BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 - \frac{1}{2} \times 10 \times 7.5 = 96 - 37.5 = 58.5$.

Problema 38 Nombremos los vértices del triángulo por A, B, C, el centro del círculo inscrito por I, y los puntos de tangencia por D, E, F, donde D esta en el lado $\overline{BC}$, E en $\overline{AC}$, y F en $\overline{AB}$.

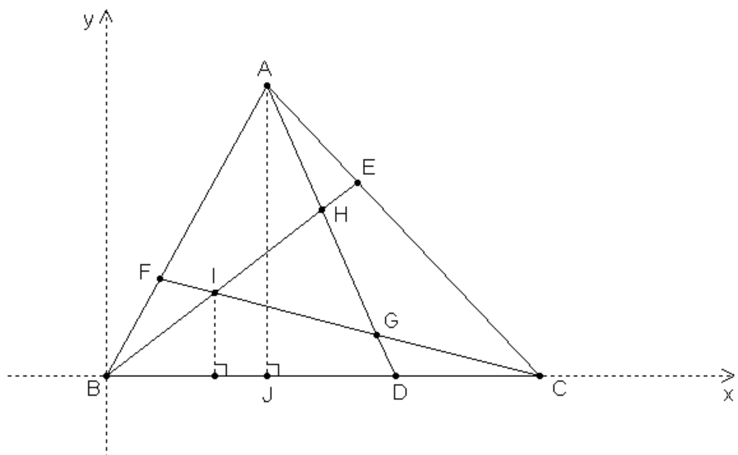


Como D, E, F son puntos de tangencia, tenemos que $\overline{AE} = \overline{AF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$. También, como $AEIF$ es un cuadrado de lado 1, tenemos que $\overline{AF} = \overline{AE} = 1$.

Recordando que $\overline{BD} + \overline{CD} = 10$, el perímetro del triángulo es:

$$\begin{aligned} & \overline{AE} + \overline{AF} + \overline{BD} + \overline{BF} + \overline{CD} + \overline{CE} \\ = \; & 1 + 1 + \overline{BD} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{CD} \\ = \; & 2 + 10 + 10 = 22 \end{aligned}$$

Problema 39



Imaginémonos que el triángulo $\triangle ABC$ está en un sistema de coordenadas con B en $(0, 0)$ y BC en el eje de x. Asumamos que las coordenadas de A son (p, q) y que las de C son $(r, 0)$, con $p, q, r > 0$. Queremos encontrar la coordenada en y del punto I.

Sea J el pie de la altura del $\triangle ABC$ desde A. Las coordenadas de J son $(p, 0)$. Entonces, como $AE = \frac{1}{3}AC$, las coordenadas de E son $\left(p + \frac{1}{3}(r - p), \frac{2}{3}q\right) = \left(\frac{2p+r}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Entonces la pendiente de la recta BE es $\frac{2q}{2p+r}$, y la ecuación de la recta BE es $y = \frac{2q}{2p+r}x$. Similarmente, como $BF = \frac{1}{3}BA$, las coordenadas de F son $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$. Entonces la pendiente de la recta CF es $\frac{\frac{1}{3}q - 0}{\frac{1}{3}p - r} = \frac{q}{p-3r}$, y la ecuación de la recta CF es $y - 0 = \frac{q}{p-3r}(x - r)$, ó equivalentemente $y = \frac{q}{p-3r}x - \frac{qr}{p-3r}$. Queremos encontrar la coordenada en y del punto I. Por lo tanto, necesitamos resolver el siguiente sistema para y.

$$\begin{cases} y = \frac{2q}{2p+r}x \\ y = \frac{q}{p-3r}x - \frac{qr}{p-3r} \end{cases}$$

Despejando para x, obtenemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2p+r}{2q}y \\ x = \frac{(p-3r)y+qr}{q} \end{cases}$$

Igualando las dos ecuaciones, y resolviendo para y obtenemos:

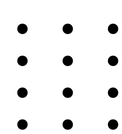
$$\begin{aligned} \frac{2p+r}{2q}y &= \frac{(p-3r)y+qr}{q} \\ (2p+r)y &= (2p-6r)y+2qr \\ 7ry &= 2qr \\ y &= \frac{2}{7}q \end{aligned}$$

Entonces, la altura del $\triangle IBC$ sobre la base BC es $\frac{2}{7}q$. Como la altura del $\triangle ABC$ sobre BC es q, tenemos que $\acute{a}rea_{\triangle IBC} = \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC}$. Similarmente, por simetría, tenemos que $\acute{a}rea_{\triangle HAB} = \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC}$, y que $\acute{a}rea_{\triangle GAC} = \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \acute{a}rea_{\triangle GHI} &= \acute{a}rea_{\triangle ABC} - \acute{a}rea_{\triangle IBC} - \acute{a}rea_{\triangle HAB} - \acute{a}rea_{\triangle GAC} \\ &= \acute{a}rea_{\triangle ABC} - \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC} - \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC} - \frac{2}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{7}\acute{a}rea_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

Problema 40 Hay $\binom{12}{3}$ maneras de escoger 3 puntos de los 12 que forman la cuadrícula. Pero no cada 3 puntos que escogamos van a formar un triángulo. La única posibilidad para que los 3 puntos no formen un triángulo es cuando estén colineales.



Por lo tanto, del $\binom{12}{3}$, necesitamos restar el número de subconjuntos de 3 puntos tales que los 3 puntos son colineales (desde ahora llamado *un triple*). En cada fila hay un triple, por lo tanto hay 4 triples en las filas. En cada columna hay $\binom{4}{3}$ triples, ya que de cada columna de 4 puntos podemos escoger cualesquiera 3 puntos y estos formarán un triple. Por lo tanto hay $3\times\binom{4}{3}$ triples en las columnas. Finalmente, hay 4 diagonales que forman un triple.

Por lo tanto, el número de triángulos que tengan sus vértices en los puntos de la cuadrícula es $\binom{12}{3} - 4 - 3\times\binom{4}{3} - 4 = \frac{10\times 11\times 12}{2\times 3} - 4 - 3\times 4 - 4 = 220 - 20 = 200$.

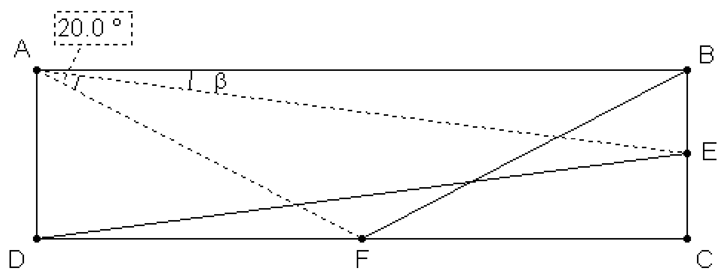
Problema 41 Primero, es fácil notar que entre los primeros 12 enteros positivos, el único número con dicha propiedad es el 12, ya que sus divisores propios son: $2, 3, 4, 6$, y $2+3+4+6 = 15 > 12$.

Así que $n \geqslant 12$.

Note que en la observación anterior no tuvimos que considerar los números primos $(2, 3, 5, 7, 11)$, ya que éstos, por su definición, no tienen divisores propios. Ahora, veamos que $n = 12$, ya que entre cada 12 enteros positivos, hay exactamente uno que es divisible entre 12, llamémoslo k. Como 2, 3, y 4 son divisores propios de 12, y $12 \mid k$, entonces 2, 3, y 4 son divisores propios de k. Por lo tanto, $\frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}$ son divisores propios de k, y $\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} > k$.

Así que el más pequeño n que satisface dicha propiedad es 12.

Problema 42



Sea $\beta = \measuredangle BAE$. Como E es el punto medio de BC, $\triangle ABE \simeq \triangle DCE$. Por lo tanto, $\measuredangle CDE = \measuredangle BAE = \beta$, y $\measuredangle CED = 90° - \beta$. Ahora, $\measuredangle DAF = 90° - \measuredangle BAF = 90° - (\beta + 20°) = 70° - \beta$. Como F es el punto medio de DC, $\triangle ADF \simeq \triangle BCF$. Por lo tanto, $\measuredangle CBF = \measuredangle DAF = 70° - \beta$.

Ahora, como $\measuredangle CED = 90° - \beta$ y $\measuredangle BEG$ son ángulos suplementarios, entonces $\measuredangle BEG = 90° + \beta$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\measuredangle EGB &= 180° - (\measuredangle BEG + \measuredangle EBG) = \\
&= 180° - (\measuredangle BEG + \measuredangle CBF) = \\
&= 180° - (90° + \beta + 70° - \beta) = \\
&= 180° - 160° \\
&= 20°
\end{aligned}$$

Problema 43 El número de filas en el tablero es m, y el de columnas es n. Como la suma de los números en cada fila es 1, sumando las sumas de todas las filas obtenemos la suma S de todos los números, que es $S = m \times 1 = m$. Como la suma de los números en cada columna es 1, sumando las sumas de todas las columnas obtenemos $S = n \times 1 = n$.

Por lo tanto, $m = n$.

Problema 44 Sea

$$S_p = \{n \mid n \text{ entero, } 1 \leqslant n \leqslant 1,000,000, \text{ y todos los dígitos de } n \text{ son pares}\}.$$

Similarmente, sea

$$S_i = \{n \mid n \text{ entero, } 1 \leqslant n \leqslant 1,000,000, \text{ y todos los dígitos de } n \text{ son impares}\}.$$

Definamos una función $f : S_p \longrightarrow S_i$ por $f(a) = b$, donde b es obtenido sumándole 1 a cada dígito de a. Note que esta función es bien definida, ya que sí $a \in S_p$, entonces todos los dígitos de a son pares y $a \leqslant 888,888$, por lo tanto todos los dígitos de b son impares y $b \leqslant 999,999$, por lo tanto $b \in S_i$. También, note que f es uno-a-uno, ya que si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces restándole 1 a cada dígito de $f(a_1)$ obtenemos a_1, y restándole 1 a cada dígito de $f(a_2)$ obtenemos a_2, pero $f(a_1) = f(a_2)$, por lo tanto $a_1 = a_2$. Finalmente, note que $a < f(a)$ para toda $a \in S_p$, por la simple razón de que todos los dígitos de $f(a)$ son más grandes que los dígitos correspondientes de a.

Por lo tanto, $P = \sum\limits_{a \in S_p} a < \sum\limits_{a \in S_p} f(a) = \sum\limits_{b \in f(S_p)} b \leqslant \sum\limits_{b \in S_i} b = I$

Nota: La primera desigualdad se obtiene ya que $a < f(a)$ para toda $a \in S_p$. Luego, la igualdad se obtiene ya que f es uno-a-uno. Luego, la segunda desigualdad se obtiene ya que $f(S_p) \subseteq S_i$.

Problema 45 Para que $1a1b1c1d1$ sea divisible entre 33, tiene que ser divisible entre 3 y entre 11. Para que sea divisible entre 11, $a+b+c+d-5$ tiene que ser divisible entre 11. Como $0 \leqslant a < b < c < d \leqslant 9$, tenemos que $a+b+c+d = 5$ ó $a+b+c+d = 16$ ó $a+b+c+d = 27$. Para que $1a1b1c1d1$ sea divisible entre 3, $a+b+c+d+5$ tiene que ser divisible entre 3. Por lo tanto, $a+b+c+d \neq 5$, y $a+b+c+d \neq 27$. Así que

$$a+b+c+d = 16 \qquad (1)$$

Enumeramos todos los cuadruples (a, b, c, d) que satisfacen (1) y $0 \leqslant a < b < c < d \leqslant 9$ empezando con $a = 0$, luego $a = 1$, etc.:

$a = 0$:	$a = 1$:	$a = 2$:
$(0,1,6,9)$	$(1,2,4,9)$	$(2,3,4,7)$
$(0,2,5,9)$	$(1,2,5,8)$	$(2,3,5,6)$
$(0,3,4,9)$	$(1,3,4,8)$	
$(0,1,7,8)$	$(1,2,6,7)$	
$(0,2,6,8)$	$(1,3,5,7)$	
$(0,3,5,8)$	$(1,4,5,6)$	
$(0,3,6,7)$		
$(0,4,5,7)$		

Vemos que $a < 3$, de lo contrario si $a \geqslant 3$, entonces $b \geqslant 4$, $c \geqslant 5$, $d \geqslant 6$, y entonces $a + b + c + d \geqslant 3 + 4 + 5 + 6 = 18$, absurdo.

Por lo tanto, hay 16 números de la forma $1a1b1c1d1$ que son múltiplos de 33.

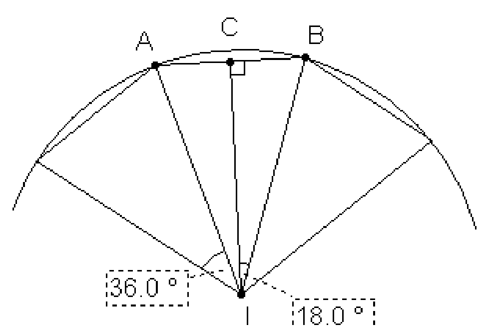
Problema 46 Sólo hay 7 maneras de escribir al 48 como un producto cuyos factores son dígitos diferentes de 1 y 0. Estas son:

$$\begin{aligned} 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 4 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 4 \times 4 \times 3 \\ &= 8 \times 2 \times 3 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 6 \\ &= 4 \times 2 \times 6 \\ &= 8 \times 6 \end{aligned}$$

Ahora,
- con los dígitos $2, 2, 2, 2, 3$ podemos formar $\frac{5!}{4!} = 5$ números distintos;
- con los dígitos $4, 2, 2, 3$ podemos formar $\frac{4!}{2!} = 12$ números distintos;
- con los dígitos $4, 4, 3$ podemos formar $\frac{3!}{2!} = 3$ números distintos;
- con los dígitos $8, 2, 3$ podemos formar $3! = 6$ números distintos;
- con los dígitos $2, 2, 2, 6$ podemos formar $\frac{4!}{3!} = 4$ números distintos;
- con los dígitos $4, 2, 6$ podemos formar $3! = 6$ números distintos;
- con los dígitos $8, 6$ podemos formar $2! = 2$ números distintos.

Por lo tanto, la cantidad de números que cumplen la dicha propiedad es $5 + 12 + 3 + 6 + 4 + 6 + 2 = 38$.

Problema 47 Sea I el centro de la circunferencia, y sea $\overline{AB}$ un lado del decágono convexo regular inscrito en ella. Entonces $\measuredangle AIB = \frac{360°}{10} = 36°$. En el $\triangle AIB$, sea C el pie de la altura desde I hasta $\overline{AB}$. Como $\triangle AIB$ es isósceles, $\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, y $\measuredangle CIB = \frac{1}{2}\measuredangle AIB = 18°$.



Como el $\triangle CIB$ es un triángulo rectángulo, tenemos que $\sin\measuredangle CIB = \frac{\overline{CB}}{\overline{BI}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{1} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Por lo tanto, $\overline{AB} = 2\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Problema 48 Para que un número sea divisible entre 9, la suma de sus dígitos tiene que ser divisible entre 9. Sea N un número natural menor que $1,000,000$ que es un múltiplo de 9 y que está formado exclusivamente por los dígitos 5 y 8. Sean a y b las cantidades de veces que 5 y 8, respectivamente, aparecen en N como dígitos. Como $N \leqslant 1,000,000$, tenemos que $a+b \leqslant 6$, y $5a+8b$ es un múltiplo de 9. Como $a+b \leqslant 6$, tenemos que $5a+8b \leqslant 8 \times 6 = 48$. Por lo tanto, $5a+8b$ solo puede ser 9, 18, 27, 36, ó 45.

Caso $5a+8b=9$: este caso obviamente no tiene solución;

Caso $5a+8b=18$: la única solución es $a=2$, $b=1$;

Caso $5a+8b=27$: este case tampoco tiene solución;

Caso $5a+8b=36$: la única solución es $a=4$, $b=2$;

Caso $5a+8b=45$: la única solución es $a=1$, $b=5$.

Entonces N solo puede estar formado por los dígitos 5, 5, 8, ó por los dígitos 5, 5, 5, 5, 8, 8, ó por los dígitos 5, 8, 8, 8, 8, 8.

Por lo tanto, N puede estar formado de $\frac{3!}{2!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{5!} = 3 + 15 + 6 = 24$ maneras.

Problema 49

$$
\begin{aligned}
& \Bigg(\underbrace{55\ldots556}_{n \text{ dígitos}}\Bigg)^2 - \Bigg(\underbrace{44\ldots445}_{n \text{ dígitos}}\Bigg)^2 \\
= & \Bigg(\underbrace{55\ldots556}_{n \text{ dígitos}} - \underbrace{44\ldots445}_{n \text{ dígitos}}\Bigg)\Bigg(\underbrace{55\ldots556}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{44\ldots445}_{n \text{ dígitos}}\Bigg) \\
= & \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}} \times \underbrace{100\ldots001}_{n+1 \text{ dígitos}} \\
= & \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}} \times \underbrace{100\ldots000}_{n+1 \text{ dígitos}} + \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}} \\
= & \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{00\ldots000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}} \\
= & \underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{11\ldots111}_{n \text{ dígitos}} \\
= & \underbrace{11\ldots11}_{2n \text{ dígitos}}
\end{aligned}
$$

Problema 50 Queremos encontrar las soluciones enteras positivas a $x^3 - y^3 = 602$, ó equivalentemente a:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 2 \times 7 \times 43 \qquad (1)$$

Como $x-y$ es divisor de 602, $x-y \in \{1, 2, 7, 14, 43, 86, 301, 602\}$. Ahora, $x-y \neq 602$, de lo contrario $x-y = 602$ y $x^2+xy+y^2 = 1$, absurdo.

Veamos que para todo N entero, N^3 es congruente a 0, 1, ó 8 modulo 9:

• Caso: $N \equiv 0 \bmod 3$

Entonces $N = 3n$ para algún entero n, y $N^3 = (3n)^3 = 27n^3 \equiv 0 \bmod 9$

• Caso: $N \equiv 1 \bmod 3$

Entonces $N = 3n+1$ para algún entero n, y $N^3 = (3n+1)^3 = 27n^3+27n^2+9n+1 \equiv 1 \bmod 9$

• Caso: $N \equiv 2 \bmod 3$

Entonces $N = 3n+2$ para algún entero n, y $N^3 = (3n+2)^3 = 27n^3+54n^2+36n+8 \equiv 8 \bmod 9$

Como $602 \equiv 8 \bmod 9$, entonces $x^3 - y^3 \equiv 8 \bmod 9$.

Por lo tanto, $\begin{cases} x^3 \equiv 8 \bmod 9 \\ y^3 \equiv 0 \bmod 9 \end{cases}$, ó $\begin{cases} x^3 \equiv 0 \bmod 9 \\ y^3 \equiv 1 \bmod 9 \end{cases}$.

Equivalentemente, $\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ y \equiv 0 \bmod 3 \end{cases}$, ó $\begin{cases} x \equiv 0 \bmod 3 \\ y \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$.

De cualquier manera tenemos que $x-y \equiv 2 \bmod 3$. Así que, $x-y \in \{2, 14, 86\}$.

Sea $k = x-y$. Entonces, sustituyendo $x = y+k$ en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} & k\left((y+k)^2 + (y+k)\,y + y^2\right) = 602 \\ \iff \quad & 3y^2 + 3ky + \left(k^2 - \frac{602}{k}\right) = 0 \end{aligned}$$

Para que la última ecuación cuadrática tenga solución real, su discriminante $\Delta = 9k^2 - 4 \times 3 \times \left(k^2 - \frac{602}{k}\right) = 12 \times \frac{602}{k} - 3k^2$ tiene que ser mayor que 0. Como $k \in \{2, 14, 86\}$, tenemos:

• Caso: $k = 2$

$\Delta = 12 \times \frac{602}{2} - 12 = 12 \times 300 = 3,600 > 0$

• Caso: $k = 14$

$\Delta = 12 \times \frac{602}{14} - 3 \times 14^2 = 516 - 588 < 0$

• Caso: $k = 86$

$\Delta = 12 \times \frac{602}{86} - 3 \times 86^2 = 12 \times 7 - 3 \times 86^2 < 0$

Por lo tanto, $k = 2$, y $3y^2 + 6y + \left(2^2 - \frac{602}{2}\right) = 0$. Resolviendo obtenemos: $y = \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{3600}}{6} = \frac{-6 \pm 60}{6}$. Como $y > 0$, $y = \frac{-6+60}{6} = 9$. Por lo tanto, $x = y + k = 9 + 2 = 11$.

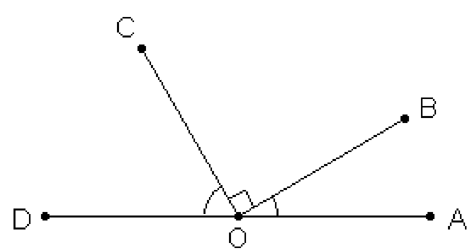
Entonces, $x = 11$, $y = 9$ es la única solución de (1).

Problemas - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 Supongamos que hoy es martes y es el día 1. ¿Qué día de la semana será el día 100?

a) lunes
b) martes
c) miércoles
d) jueves
e) viernes

Problema 2 $\measuredangle BOC$ es recto, $\measuredangle AOB$ es la mitad de $\measuredangle COD$. ¿Cuánto mide $\measuredangle COD$?



a) 30°
b) 60°
c) 45°
d) 90°
e) ninguna de las anteriores

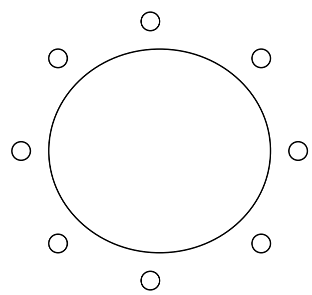
Problema 3 El señor López es dueño de tres cuartas partes de una empresa. Cuando se repartieron las ganancias del año, el señor López recibió como adelanto \$12,600, que representan el 30% de sus ganancias. ¿Cuánto dinero ganó la empresa durante el año?

a) \$42,000
b) \$72,000
c) \$65,000
d) \$56,000
e) ninguna de las anteriores

Problema 4 Entre todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 201 y 699, ¿cuántos son divisibles por 4?

a) 12
b) 22
c) 28
d) 30
e) ninguna de las anteriores

Problema 5 Ocho nenes están sentados alrededor de una mesa redonda de la siguiente forma:



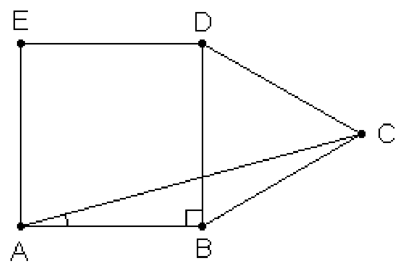
Intercambian lugares una pareja a la vez. Sólo está permitido intercambiar lugares con el vecino de la izquierda o con el de la derecha. ¿Cuál es el menor número de intercambios que deben hacerse para que cada chico ocupe el lugar del compañero que tenía enfrente del comienzo del juego?

a) 12
b) 15
c) 16
d) 18
e) ninguna de las anteriores

Problema 6 Ana, Bibiana y Cecilia se reparten 12 manzanas. Cada una se lleva por lo menos una. ¿De cuantas maneras distintas se puede hacer el reparto?

a) 25
b) 35
c) 45
d) 55
e) ninguna de las anteriores

Problema 7 $ABDE$ es un cuadrado. BCD es un triángulo equilátero. Sin medir, ¿podrías hallar el valor de $\measuredangle CAB$?



a) 15°
b) 20°
c) 25°
d) 30°
e) ninguna de las anteriores

Problema 8 ¿Cuántos números AB de dos cifras ($B \neq 0$) satisfacen $AB + BA = 88$?

a) 4
b) 6
c) 9
d) 10
e) ninguna de las anteriores

Problema 9 El número N tiene aspecto $N = 3a42b$ con a y b dígitos. ¿De cuántas maneras puedo elegir a y b para que N sea divisible por 6?

a) 15
b) 17
c) 18
d) 22
e) ninguna de las anteriores

Problema 10 Los ángulos de un pentágono forman una sucesión aritmética. Uno de esos ángulos (en grados) debe ser

a) $108°$
b) $90°$
c) $72°$
d) $54°$
e) ninguna de las anteriores

Problema 11 Las magnitudes de los lados del triángulo ABC son a, b, y c con $c \leqslant b \leqslant a$. Por un punto interior P y por los vértices A, B, C se trazan líneas que intersecan los lados opuestos en A', B', C' respectivamente. Sea $s = AA' + BB' + CC'$. Entonces, para cualquier punto interior P, s es menor que:

a) $2a + b$
b) $2a + c$
c) $2b + c$
d) $a + 2b$
e) $a + b + c$

Problema 12 Alicia tiene 5 llaves, y necesita dos de ellas para entrar a su casa. Si pierde 2 de las 5 llaves, ¿cuál es la probabilidad de que Alicia no pueda entrar a su casa?

Problema 13 Hallar todas las ternas x, y, z de números reales que satisfacen

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 26 \\ y(x+y+z) = 27 \\ z(x+y+z) = 28 \end{cases}.$$

Problema 14 Encuentre el dígito que representa las unidades del siguiente número: $2,137^{753}$.

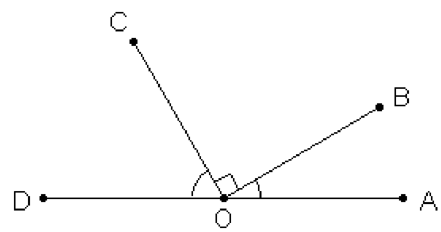
Problema 15 Diego vende libros todos los días. Desde el 10 de octubre está de novio con Carolina que, desde ese día, todos los días le pregunta: "¿Cuántos libros vendiste hoy?". Diego siempre le responde lo mismo: "Hoy vendí más libros que anteayer pero menos que hace una semana.". ¿Qué día tuvo Carolina la certeza absoluta de que Diego no siempre le dice la verdad?

Problema 16 En Hormigalandia se organiza una carrera de observación en la superficie de un cubo. Se debe partir de un determinado vértice del cubo, recorrer todos los vértices y regresar al vértice de partida. ¿De cuantas formas puede desarrollarse la carrera si la trayectoria debe recorrer los vértices en la menor distancia posible?

Soluciones - Competencia Preolímpica de Matemáticas - Segunda Fase - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 Como el día 1 es martes, el día 7 va a ser lunes. Entonces cada día cuyo número es múltiplo de 7 va a ser lunes. Como $98 = 7 \times 14$, el día 98 también va a ser lunes. Por lo tanto, el día 100 va a ser miércoles.

Problema 2



Tenemos la siguiente ecuación: $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COD = 180°$. Pero $\measuredangle BOC = 90°$, y $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}\measuredangle COD$.

Por lo tanto, $\frac{1}{2}\measuredangle COD + 90° + \measuredangle COD = 180°$. Resolviendo obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\measuredangle COD &= 90° \\ \measuredangle COD &= 60° \end{aligned}$$

Problema 3 Sea x las ganancias del señor López. Como su adelanto de \$12,600 representa el 30% de sus ganancias, tenemos que: $\$12,600 = 30\% \times x$.

Resolviendo obtenemos: $x = \$12,600 \times \frac{10}{3} = \$42,000$.

Asumimos que las ganancias se reparten proporcionalmente a la pertenencia. Entonces, los \$42,000 representan tres cuartas partes de las ganancias de la empresa.

Por lo tanto, las ganancias de la empresa eran $\$42,000 \times \frac{4}{3} = \$56,000$.

Problema 4 Un número que a la vez es un múltiplo de 4 y de 5 es un múltiplo de 20. Por lo tanto, queremos contar todos los múltiplos de 20 entre 201 y 699. Estos son: $220, 240, 260, \ldots, 660, 680$. Dividiendo la lista entre 20, obtenemos la lista $11, 12, 13, \ldots, 33, 34$. Note que ambas listas tienen 24 números.

Por lo tanto, hay 24 números entre 201 y 699 que son múltiplos de 4 y de 5 a la vez.

Problema 5 Identifiquemos a los niños sentados alrededor de la mesa consecutivamente con $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8$ donde el arreglo inicial de los niños está dado por el 8-tuple $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8)$ donde la primera y la última posición son adyacentes. Comenzando con el estado,

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8)$$

queremos intercambiar lugares una pareja a la vez hasta llegar al estado

$$(n_5, n_6, n_7, n_8, n_1, n_2, n_3, n_4)\,.$$

Primero, intercambiemos las posiciones 1 con 2; 3 con 4; 5 con 6; y 7 con 8, obteniendo el estado:

$$(n_2, n_1, n_4, n_3, n_6, n_5, n_8, n_7)$$

Ahora, intercambiemos las posiciones 2 con 3; 4 con 5; 6 con 7; y 8 con 1, obteniendo:

$$(n_7, n_4, n_1, n_6, n_3, n_8, n_5, n_2)$$

Ahora, otra vez intercambiemos las posiciones 1 con 2; 3 con 4; 5 con 6; y 7 con 8, obteniendo:

$$(n_4, n_7, n_6, n_1, n_8, n_3, n_2, n_5)$$

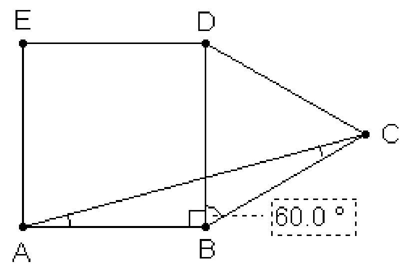
Finalmente, otra vez intercambiemos las posiciones 2 con 3; 4 con 5; 6 con 7; y 8 con 1, obteniendo el deseado estado final

$$(n_5, n_6, n_7, n_8, n_1, n_2, n_3, n_4)$$

En total hemos realizado $4 \times 4 = 16$ intercambios. Este es el menor número de intercambios que logra la tarea, ya que cada niño necesita moverse por lo menos 4 veces hasta llegar a su posición deseada. Como hay 8 niños, y cada intercambio sólo puede avanzar por un lugar a 2 niños en dirección de su posición deseada, el menor número de intercambios necesarios es $\frac{8\times 4}{2} = 16$.

Problema 6 Sean a, b, y c las cantidades de manzanas que se llevan Ana, Bibiana y Cecilia, respectivamente. Queremos encontrar el número de soluciones de la ecuación $a + b + c = 12$, donde a, b, c son naturales y $a, b, c \geqslant 1$. Si $a = 1$, entonces $b + c = 11$, y obtenemos 10 soluciones: $(b, c) \in \{(1, 10),\ (2, 9),\ \ldots,\ (10, 1)\}$. Si $a = 2$, entonces $b + c = 10$, y obtenemos 9 soluciones: $(b, c) \in \{(1, 9), (2, 8), \ldots, (9, 1)\}$. Similarmente, si $a = 3$ tenemos 8 soluciones, si $a = 4$ tenemos 7 soluciones, y así hasta que $a = 10$ y tenemos 1 solución. Por lo tanto, el reparto de manzanas se puede hacer de $10 + 9 + \ldots + 2 + 1 = \frac{10\times 11}{2} = 55$ maneras.

Problema 7



Como $ABDE$ es un cuadrado, $\overline{AB} = \overline{BD}$. Como BCD es un triángulo equilátero, $\overline{BD} = \overline{BC}$.

Por lo tanto, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Entonces, $\triangle ABC$ es isósceles, y $\measuredangle CAB = \measuredangle ACB$.

También, $\measuredangle ABD = 90°$, y $\measuredangle DBC = 60°$, por lo tanto $\measuredangle ABC = 90° + 60° = 150°$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \measuredangle CAB + \measuredangle ACB + 150° &= 180° \\ 2\measuredangle CAB &= 30° \\ \measuredangle CAB &= 15° \end{aligned}$$

Problema 8 Escribamos AB como $10A + B$, y BA como $10B + A$, donde A y B son naturales y $1 \leqslant A, B \leqslant 9$. Entonces,

$$\begin{aligned} (10A + B) + (10B + A) &= 88 \\ 11A + 11B &= 88 \\ A + B &= 8 \end{aligned}$$

Esta última ecuación sujeta a las condiciones donde A y B son naturales y $1 \leqslant A, B \leqslant 9$, tiene 7 soluciones. Estas son: $(A, B) \in \{(1, 7), (2, 6), \ldots, (7, 1)\}$. Por lo tanto, hay 7 números que satisfacen la propiedad del enunciado, estos son: 17, 26, 35, 44, 53, 62, y 71.

Problema 9 Para que $N = 3a42b$, con a y b dígitos, sea divisible entre 6, N tiene que ser divisible entre 2 y entre 3. Para que N sea divisible entre 2, b tiene que ser par. Para que N sea divisible entre 3, la suma de sus dígitos, es decir $3 + a + 4 + 2 + b = a + b + 9$ tiene que ser divisible entre 3, por lo tanto $a + b$ tiene que ser divisible entre 3. Consideremos los siguientes casos:

- si $b = 0$, entonces a puede ser 0, 3, 6, ó 9
- si $b = 2$, entonces a puede ser 1, 4, ó 7
- si $b = 4$, entonces a puede ser 2, 5, ó 8

- si $b = 6$, entonces a puede ser 0, 3, 6, ó 9
- si $b = 8$, entonces a puede ser 1, 4, ó 7

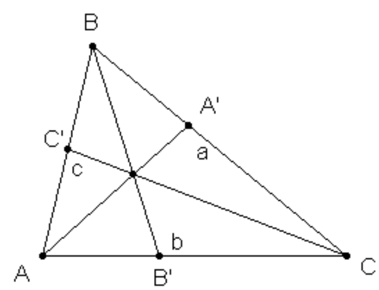
Por lo tanto, hay $4+3+3+4+3 = 17$ maneras de elegir a y b para que N sea divisible entre 6.

Problema 10 Sea $a-2x, a-x, a, a+x, a+2x$ la sucesión aritmética formada por los ángulos del pentágono. La suma de los ángulos de un pentágono es $(5-2)\ \times 180° = 540°$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}(a-2x)+(a-x)+a+(a+x)+(a+2x) &= 540° \\ 5a &= 540° \\ a &= 108°\end{aligned}$$

Note que a es uno de los ángulos de la sucesión. Por lo tanto, independientemente de x, uno de los ángulos de la sucesión debe ser 108°.

Problema 11



Note que:

$$\begin{aligned}AA' &< \max(AB, AC) = \max(c, b) = b \\ BB' &< \max(BA, BC) = \max(c, a) = a \\ CC' &< \max(CA, CB) = \max(b, a) = a\end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las tres desigualdades, obtenemos:

$$s = AA' + BB' + CC' < 2a + b$$

Es posible construir ejemplos donde s es mayor que cada una de las demás contestaciones. Por lo tanto, $2a + b$ es la única contestación correcta.

Problema 12 Para que Alicia sí pueda entrar a su casa, las 2 llaves que pierde tienen que ser 2 de las 3 que no necesita para entrar a su casa.

Entonces, la probabilidad de que Alicia sí pueda entrar a su casa es $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{3}{10}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que Alicia no pueda entrar a su casa es $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Problema 13 Queremos resolver el siguiente sistema para x, y, z reales:

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 26 \\ y(x+y+z) = 27 \\ z(x+y+z) = 28 \end{cases}$$

Sumando las tres ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) &= 81 \\ (x+y+z)(x+y+z) &= 81 \\ x+y+z &= \pm 9 \end{aligned}$$

Si $x+y+z = 9$, entonces sustituyendo este valor en el sistema original obtenemos:

$$\begin{cases} x \times 9 = 26 \\ y \times 9 = 27 \\ z \times 9 = 28 \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = \frac{26}{9}$, $y = 3$, $z = \frac{28}{9}$.

Si $x+y+z = -9$, entonces sustituyendo en el sistema original obtenemos:

$$\begin{cases} x \times (-9) = 26 \\ y \times (-9) = 27 \\ z \times (-9) = 28 \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = -\frac{26}{9}$, $y = -3$, $z = -\frac{28}{9}$.

Problema 14 Equivalentemente, queremos encontrar el residuo al dividir $2,137^{753}$ entre 10. Observe que:

$$\begin{aligned} 2,137 &\equiv 7 \bmod 10 \\ 2,137^2 &\equiv 7^2 \equiv 9 \bmod 10 \\ 2,137^3 &\equiv 9 \times 7 \equiv 3 \bmod 10 \\ 2,137^4 &\equiv 3 \times 7 \equiv 1 \bmod 10 \end{aligned}$$

Ahora, como $753 = 4 \times 188 + 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2,137^{753} &= \left(2,137^{4}\right)^{188} \times 2,137 \equiv 1^{188} \times 2,137 \bmod 10 \\ 2,137^{753} &\equiv 2,137 \equiv 7 \bmod 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dígito de unidades de $2,137^{753}$ es 7.

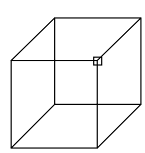
Problema 15 Sea x_k la cantidad de libros que Diego afirma que vendió el día k de octubre. El 10 de octubre Carolina recibe la siguiente información: $x_8 < x_{10} < x_3$, ya que Diego le dice que hoy (el 10 de octubre) vendió más libros que anteayer (el 8 de octubre) pero menos que hace una semana (el 3 de octubre). El 11 de octubre Carolina ya sabe que $x_9 < x_{11} < x_4$. Similarmente, obtenemos la siguiente tabla:

día	Información recibida por Carolina
10	$x_8 < x_{10} < x_3$
11	$x_9 < x_{11} < x_4$
12	$x_{10} < x_{12} < x_5$
13	$x_{11} < x_{13} < x_6$
14	$x_{12} < x_{14} < x_7$
15	$x_{13} < x_{15} < x_8$
16	$x_{14} < x_{16} < x_9$

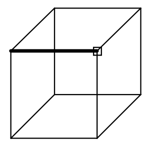
Observe que hasta el día 15 de octubre no hay ningunas inconsistencias en las afirmaciones de Diego. Pero el 16 de octubre Carolina ya pudo notar la inconsistencia, ya que

$$x_9 > x_{16} > x_{14} > x_{12} > x_{10} > x_8 > x_{15} > x_{13} > x_{11} > x_9, \text{ absurdo.}$$

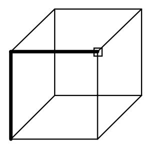
Problema 16 Para que la trayectoria que recorre todos los vértices tenga la menor longitud posible, tiene que ser hecha a lo largo de las aristas del cubo. Llamemos el paso de un vértice a un vértice adyacente *un movimiento*. Comenzando en el vértice inicial, marcado por el cuadrito, la hormiga puede hacer 3 diferentes movimientos, uno a lo largo de cada de las 3 aristas adyacentes al vértice inicial.



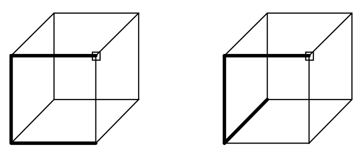
Luego puede hacer 2 diferentes movimientos, uno a lo largo de las 2 aristas todavía no recorridas.



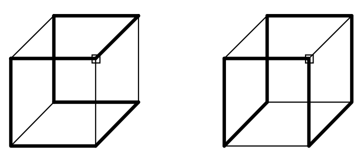
Ahora la hormiga está en el vértice opuesto al inicial en la cara del cubo formada por los primeros 3 vértices recorridos.



Ahora la hormiga puede hacer 2 diferentes movimientos: puede pasar al cuarto vértice de la cara formada por los primeros 3 vértices recorridos, ó puede pasar al vértice opuesto al inicial con respecto a la diagonal principal del cubo.



Ahora, independientemente de los dos casos, solamente hay una manera de terminar la carrera que recorre el resto de los vértices y regrasa al vértice inicial.



Por lo tanto, la carrera puede desarrollarse de 3 $\times 2$ $\times 2 = 12$ formas.

Problemas - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 En el salón de juegos hay cuatro máquinas de videojuegos: A, B, C y D. Las máquinas A y C requieren dos fichas por juego y las otras una ficha por juego. Martín gastó 24 fichas; jugó un total de 15 veces y al menos una vez en cada máquina. ¿De cuántas formas pudo haber jugado Martín?

Problema 2 Deseamos traer del río 1 litro de agua, pero solo tenemos un contenedor de 8 litros y uno de 5 litros y ningún otro contenedor. ¿Es posible hacerlo? ¿Si es posible, como? ¿Si no es posible, porqué?

Problema 3 Tome un número de 3 dígitos. Escríbalo en un papel, y escriba los tres dígitos de nuevo junto a los anteriores, de manera que termina con un número de 6 dígitos como 354354. Divídalo entre 7, el resultado será entero. Divida este resultado entre 11, el resultado será entero. Divida este resultado entre 13, el resultado será entero. De hecho, será el número con el que comenzó. ¿Porqué funciona esto?

Problema 4 Estamos en un concurso de televisión. El anfitrión muestra dos sobres y pide que elijas uno (cada uno contiene alguna cantidad de dinero). Después de elegir, te informan que uno de los sobres tiene 3 veces más dinero que el otro, pero no sabes cual. Abres tu sobre y notas que contiene \$150. Entonces el otro o tiene \$50, o tiene \$450. Ahora te ofrecen la oportunidad de cambiar sobres. ¿Debes cambiar? ¿Porqué si o porque no? ¿Si "tres veces" se cambia por "dos veces" o "una y media veces", cambia tu decisión?

Problema 5 Considere la siguiente proposición: Dado un número finito de puntos en el plano, si una línea que se traza por cualesquiera dos de estos puntos siempre pasa por un tercer punto, entonces todos los puntos son colineales. Si es cierta, demuéstrela, si es falsa, de un contraejemplo.

Problema 6 Si $n > 2$ es un entero, explique porque $(n!)^2 > n^n$.

Soluciones - Competencia Olímpica de Matemáticas por Equipos - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 Sean a, b, c, d las cantidades de veces que Martín jugó las máquinas A, B, C, D respectivamente. Del enunciado obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 24 = 2a + b + 2c + d \\ 15 = a + b + c + d \end{cases} \quad \text{donde } a, b, c, d \geqslant 1$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$9 = a + c$$

Como $a, c \geqslant 1$,

$$(a, c) \in \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), \dots, (7, 2), (8, 1)\}$$

Así que hay 8 maneras en las que Martín pudo haber jugado A y C.

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restando la primera, obtenemos:

$$6 = b + d$$

Como $b, d \geqslant 1$,

$$(b, d) \in \{(1, 5), (2, 4), \dots, (5, 1)\}$$

Entonces, para cada manera en la que Martín pudo haber jugado A y C, hay 5 maneras en las que pudo haber jugado B y D.

Por lo tanto, en total Martín pudo haber jugado las máquinas en $8 \times 5 = 40$ maneras distintas.

Problema 2 Denotemos por (a, b) el estado donde hay a litros en el contenedor de 8 litros (*contenedor grande*) y b litros en el contenedor de 5 litros (*contenedor pequeño*). Empezamos en el estado $(0, 0)$. Luego llenamos el contenedor grande, obteniendo el estado $(8, 0)$. Luego llenamos el contenedor pequeño pasando 5 litros del grande al pequeño, obteniendo $(3, 5)$. Ahora vaciamos el pequeño, obteniendo $(3, 0)$. Luego pasamos los 3 litros del contenedor grande al pequeño, obteniendo $(0, 3)$. Ahora llenamos el grande, obteniendo $(8, 3)$. Ahora llenamos el pequeño pasando 2 litros del grande al pequeño, obteniendo $(6, 5)$. Ahora vaciamos el pequeño, obteniendo $(6, 0)$. Finalmente, llenamos el contenedor pequeño pasando 5 litros del grande al pequeño, obteniendo $(1, 5)$ y así tenemos 1 litro de agua en el contenedor grande.

Problema 3 Podemos escribir cualquier número de 3 dígitos de la forma $100a + 10b + c$, donde $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ y $a \neq 0$. Al escribir los 3 dígitos de nuevo junto a los anteriores obtenemos el siguiente número de 6 dígitos: $100,000a + 10,000b + 1,000c +\ 100a + 10b + c$. Pero este se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
& 100,000a + 100a + 10,000b + 10b + 1000c + c \\
= \quad & 100a(1000 + 1) + 10b(1,000 + 1) + c(1,000 + 1) \\
= \quad & 1,001(100a + 10b + c) \\
= \quad & 7 \times 11 \times 13(100a + 10b + c), \text{ porque } 1,001 = 7 \times 11 \times 13
\end{aligned}$$

Así que, al dividir el nuevo número entre 7, obtenemos $11 \times 13(100a+10b+c)$, que es un número entero. Al dividir este resultado entre 11, obtenemos $13(100a + 10b + c)$, que es un número entero. Y finalmente, al dividir este resultado entre 13 obtenemos $100a + 10b + c$, que es un número entero, y de hecho es el número original.

Problema 4 Consideremos el caso general, donde uno de los sobres contiene n veces más dinero que el otro, donde $n > 1$ es un número real. Por lo tanto, como el primer sobre contiene \$150, el otro sobre contiene $\frac{\$150}{n}$ ó $\$150 \times n$. Ahora, si cambiamos sobres podemos perder $\$150 - \frac{\$150}{n} = \$150(1 - \frac{1}{n})$ con probabilidad $\frac{1}{2}$, y podemos ganar $\$150 \times n - \$150 = \$150(n - 1)$ con la misma probabilidad $\frac{1}{2}$. Ahora veamos que $\$150(n-1) > \$150(1-\frac{1}{n})$ para $n > 1$:

$$
\begin{aligned}
& \$150(n-1) \overset{?}{>} \$150(1-\frac{1}{n}) \\
\iff \quad & n - 1 \overset{?}{>} 1 - \frac{1}{n} \\
\iff \quad & n + \frac{1}{n} \overset{?}{>} 2 \\
\iff \quad & n^2 + 1 \overset{?}{>} 2n \\
\iff \quad & (n-1)^2 \overset{?}{>} 0 \\
\iff \quad & n - 1 \overset{?}{>} 0
\end{aligned}
$$

Pero la última desigualdad es cierta ya que $n > 1$. Por lo tanto, al cambiar sobres, podemos ganar más dinero que podemos perder. Entonces, como la probabilidad de ganar es la misma que la de perder, deberíamos cambiar sobres.

Problema 5 Vamos a demostar la proposición usando inducción con respecto al número n de puntos.

Caso $n = 3$:

Si una línea que se traza por cualesquiera dos de estos puntos siempre pasa por un tercer punto, entonces obviamente los tres puntos son colineales.

Caso $n > 3$:

Asumamos que la proposición es cierta para $n > 3$, entonces por la hipótesis inductiva tenemos n puntos colineales: p_1, p_2, ..., p_n. Ahora, añadamos un punto p_{n+1} al plano. Entonces, sea ℓ una línea que pasa por p_{n+1} y p_i para algún $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces, ℓ pasa por un tercer punto, digamos p_j para algún $1 \leqslant j \leqslant n$, donde $i \neq j$. Pero p_i y p_j son colineales por la hipótesis inductiva, pues como dos puntos determinan una línea, tenemos que $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ son colineales. Por lo tanto, la proposición es cierta para $n+1$, y la demostración está completa.

Problema 6 Queremos demostrar que para $n \geqslant 3$, $(n!)^2 > n^n$. Escribamos $(n!)^2$ como:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n\times 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n\\ &= ((1\times n)\times (2(n-1))\times (3(n-2))\times \ldots \times ((n-1)2)\times (n\times 1)\\ &= \prod_{k=1}^{n} k\times (n-k+1)\end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}n^n &= \underbrace{n\times n\times \ldots \times n}_{n \text{ veces}}\\ &= \prod_{k=1}^{n} n\end{aligned}$$

Entonces, para demostrar $(n!)^2 > n^n$ para $n \geqslant 3$, es suficiente demostrar que para $k = 2, 3, \ldots, n-1$, $k \times (n-k+1) > n$, ya que para $k = 1$, $k \times (n-k+1) = 1 \times (n-1+1) = n$, y para $k = n$, $k \times (n-k+1) = n \times (n-n+1) = n$. Veamos que para $k = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}& k\times (n-k+1) \overset{?}{>} n\\ \Longleftrightarrow\quad & kn - k^2 + k \overset{?}{>} n\\ \Longleftrightarrow\quad & kn - n \overset{?}{>} k^2 - k\\ \Longleftrightarrow\quad & n(k-1) \overset{?}{>} k(k-1), \text{ y como } k \neq 1\\ \Longleftrightarrow\quad & n \overset{?}{>} k\end{aligned}$$

Pero la última desigualdad $n \overset{?}{>} k$ es cierta ya que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Por lo tanto, tenemos que $k \times (n-k+1) > n$ para $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Ahora, como $n \geqslant 3$, existe por lo menos un k, tal que $2 \leqslant k \leqslant n-1$, y $k \times (n-k+1) > n$.

Por lo tanto, $\prod\limits_{k=1}^{n} k \times (n-k+1) > \prod\limits_{k=1}^{n} n$, ó equivalentemente $(n!)^2 > n^n$, para $n \geqslant 3$.

Problemas - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2003-04 - Nivel II

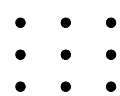
Problema 1 Seis niños toman 16 dulces. Ángela toma un dulce, Andrea toma dos y Vanesa toma tres. Carlos Gil toma tantos dulces como su hermana, Pedro Pérez toma el doble de su hermana y Ramón Martínez el triple de su hermana. ¿Cuál es el apellido de Ángela?

Problema 2 El promedio de un conjunto de 10 números es 20. Si uno de los números se remueve del conjunto, el promedio de los números restantes es 19. ¿Qué número fue removido?

Problema 3 En el paralelogramo $ABCD$ los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ miden 5 y los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ miden 6. Se traza la bisectriz del ángulo en A que corta al lado $\overline{BC}$ en el punto E. Calcular las medidas de $\overline{BE}$ y de $\overline{EC}$.

Problema 4 De los números naturales A y B se sabe que $B = \frac{A^2-1}{8}$ y que el mínimo común múltiplo entre A y B es igual a $3,720$. Hallar A y B.

Problema 5 Se colocan 9 puntos en el plano formando un cuadrado de la manera que se muestra en el dibujo. ¿Cuántos conjuntos distintos de 4 puntos tienen la propiedad de que no hay tres de ellos colineales?



Problema 6 Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

Problema 7 El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo se ha unido con cada vértice; de este modo, el triángulo se dividió en tres triángulos mas pequeños. Si uno de esos tres triángulos pequeños es semejante al triángulo original, hallar las medidas de sus ángulos.

Soluciones - Olimpiada Matemática de Puerto Rico - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 Sean a, b, c las cantidades de dulces tomados por las hermanas de Carlos Gil, Pedro Pérez, y Ramón Martínez, respectivamente. Del enunciado sabemos que $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$, y que

$$1 + 2 + 3 + a \times 1 + b \times 2 + c \times 3 = 16$$

Resolviendo obtenemos, $a + 2b + 3c = 10$.

Si $c = 3$, entonces $a + 2b = 1$, absurdo. Si $c = 2$, entonces $a + 2b = 4$, y $\{a, b\} = \{1, 3\}$, pero claramente esto también es imposible. Si $c = 1$, entonces $a + 2b = 7$, y $\{a, b\} = \{2, 3\}$, por lo tanto $a = 3$, y $b = 2$ es una solución.

Por lo tanto, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ es la única solución.

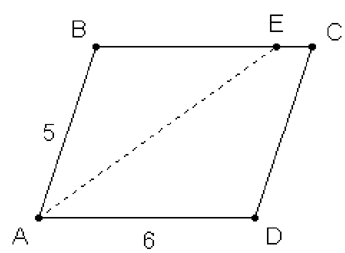
Como Ángela tomó un dulce y $c = 1$, Ángela es hermana de Ramón Martínez, por lo tanto su apellido es Martínez.

Problema 2 Sea x el número que fue removido. Como el promedio de los 10 números es 20, su suma es $10 \times 20 = 200$. Después que se remueve a x, la nueva suma de los nueve números restantes es $200 - x$, y su promedio es 19.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{200 - x}{9} &= 19 \\ x &= 200 - 19 \times 9 = 29 \end{aligned}$$

Problema 3



Sea $\alpha = \measuredangle BAE = \measuredangle EAD$. Como $\overline{AE}$ es una transversal que interseca segmentos paralelos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, tenemos que $\measuredangle EAD = \measuredangle BEA$.

Entonces, $\measuredangle BEA = \alpha$, y $\triangle ABE$ es isósceles con $\overline{AB} = \overline{BE}$.

Por lo tanto, $\overline{BE} = 5$, y $\overline{EC} = \overline{BC} - \overline{BE} = 6 - 5 = 1$.

Problema 4 Sabemos que $mcm(A, B) = 3,720 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 31$. Como $B = \frac{A^2-1}{8}$, entonces $A^2 = 8B + 1$, por lo tanto A^2 es impar, por lo tanto A es impar. Como 3,720 es un múltiplo de A, A es un divisor impar de 3,720.

Entonces A puede ser 1, 3, 5, 31, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 31 = 93$, $5 \times 31 = 155$, ó $3 \times 5 \times 31 = 465$.

Obviamente $A \neq 1$, de lo contrario $B = 0$, y esto es absurdo.

Para los demás posibles valores de A, veamos cual es el valor de $B = \frac{A^2-1}{8}$:

A	3	5	15	31	93	155	465
$B = \frac{A^2-1}{8}$	1	3	28	120	1,081	3,003	27,028

Como $mcm(A, B)$ tiene como factor a 2^3 y como A es impar, entonces B tiene que tener a 2^3 como factor, por lo tanto B es divisible entre 8. El único posible valor de B que es divisible entre 8 es 120. Note que $mcm(31, 120) = mcm(31, 2^3 \times 3 \times 5) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 31 = 3,720$.

Por lo tanto, la única solución es $A = 31$, $B = 120$.

Problema 5 En total, hay $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{6\times7\times8\times9}{2\times3\times4} = 126$ conjuntos distintos de 4 puntos. Llamemos un conjunto de 4 puntos que contiene 3 puntos colineales un *conjunto malo*. Queremos contar cuantos conjuntos malos hay. Los 3 puntos colineales tienen que formar una fila, ó una columna, ó una diagonal del cuadrado. Para cada conjunto de éstos 3 puntos colineales, podemos escoger cualquiera de los 6 puntos restantes para formar un conjunto malo. Es importante notar que en un conjunto malo, hay exactamente un subconjunto de 3 puntos que son colineales, porque si hubiese dos o más, entonces los 4 puntos serían colineales que es absurdo.

Como hay 3 filas, 3 columnas y 2 diagonales, podemos formar $(3 + 3 + 2) \times 6 = 48$ conjuntos malos disyuntos.

Por lo tanto, hay $126 - 48 = 78$ conjuntos distintos de 4 puntos que no contienen 3 puntos colineales.

Problema 6 Podemos considerar la ecuación dada como una ecuación cuadrática con respecto a y. Tenemos que

$$\begin{aligned} & y^2 + y - (x^4 + x^3 + x^2 + x) = 0 \\ & y = \tfrac{-1\pm\sqrt{1+4(x^4+x^3+x^2+x)}}{2} \end{aligned}$$

Para que y sea un entero, el discriminante $\Delta = 1 + 4(x^4 + x^3 + x^2 + x)$ tiene que ser un cuadrado perfecto. Note que $\Delta = (2x^2+x+1)^2 - (x^2 - 2x)$. Así que, por ejemplo, cuando $x = 0$ ó $x = 2$, $x^2 - 2x = 0$ y Δ es un cuadrado perfecto.

Caso $x = 0$: $\Delta = (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) = 1$, y $y = \frac{-1\pm1}{2}$, por lo tanto $y = 0$ ó $y = -1$

Caso $x = 2$: $\Delta = (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) = 121$, y $y = \frac{-1\pm11}{2}$, por lo tanto $y = 5$ ó $y = -6$

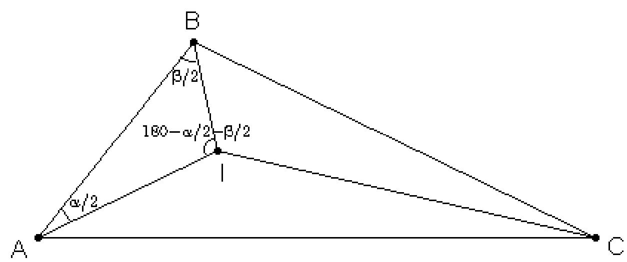
Cuando $x = 1$, $\Delta = (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) = 17$ no es un cuadrado perfecto. Para valores enteros de x distintos de 0, 1, y 2, $x^2 - 2x > 0$, por lo tanto $\Delta < (2x^2 + x + 1)^2$. Por lo tanto, como $2x^2 + x + 1 \geqslant 1$ para todo x, y como Δ es un cuadrado perfecto, tenemos que $\Delta \leqslant (2x^2+x)^2$. Veamos entonces para que valores de x, la desigualdad $(2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) \leqslant (2x^2 + x)^2$ es cierta:

$$\begin{aligned} & (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) \leqslant (2x^2 + x)^2 \\ \iff\ & 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \leqslant 4x^4 + 4x^3 + x^2 \\ \iff\ & 3x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \\ \iff\ & (3x + 1)(x + 1) \leqslant 0 \\ \iff\ & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces el único valor entero de x que satisface la desigualdad $\Delta \leqslant (2x^2 + x)^2$ es $x = -1$. Para $x = -1$ tenemos que $\Delta = (2x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x) = 1$ es un cuadrado perfecto, y $y = \frac{-1 \pm 1}{2}$, por lo tanto $y = 0$ ó $y = -1$.

Por lo tanto, las únicas soluciones enteras de la ecuación original son: $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(2, -6)$, y $(2, 5)$.

Problema 7 Sean los vértices del triángulo A, B, C y sea I la intersección de las bisectrices de $\triangle ABC$. Asumamos que los triángulos $\triangle ABI$ y $\triangle ABC$ son similares. Sea $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$. Asumamos, sin perder la generalidad, que $\beta \geqslant \alpha$. Entonces $\measuredangle ACB = 180° - \alpha - \beta$, $\measuredangle BAI = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.



Como $\triangle ABI$ y $\triangle ABC$ son similares, sus respectivos ángulos son iguales. Por lo tanto, $\{\alpha, \beta, 180° - \alpha - \beta\} = \{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\}$. Como $\alpha > \frac{\alpha}{2}$, $\beta > \frac{\beta}{2}$, y $180° - \alpha - \beta < 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, entonces, $\alpha \neq \frac{\alpha}{2}$, $\beta \neq \frac{\beta}{2}$, y $180° - \alpha - \beta \neq 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. También, como $\beta \geqslant \alpha > \frac{\alpha}{2}$, entonces $\beta \neq \frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto, la única posibilidad es que:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} \\ \beta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \\ 180° - \alpha - \beta = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Entonces, $\beta = 180° - \frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{2}$, así que $\beta = \frac{720°}{7}$. Entonces, $\alpha = \frac{360°}{7}$, y $180° - \alpha - \beta = 180° - \frac{360°}{7} - \frac{720°}{7} = \frac{180°}{7}$.

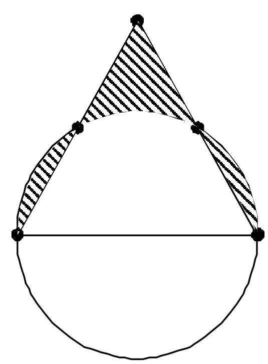
Por lo tanto, los ángulos de $\triangle ABC$ son $\frac{180°}{7}$, $\frac{360°}{7}$, y $\frac{720°}{7}$.

Problemas - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 El abuelo retiró \$145 del banco. En el banco solo habían billetes de \$2 y de \$5. No le dieron ninguna moneda. ¿Cuántos billetes de cada clase pudo haber retirado? Enumera todas las posibilidades.

Problema 2 Se tiene un cubo con las 6 caras de diferente color. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los números del 1 al 6 si 1 y 6; 2 y 5; 3 y 4 deben estar siempre en caras opuestas?

Problema 3 Hallar el área de la región sombreada que está comprendida entre el triángulo equilátero de lado 2 y la semicircunferencia de radio 1 ilustrada a continuación:



Problema 4 Se dispone de un tablero de ajedrez y de una ficha. Los movimientos permitidos para la ficha son:

- 3 casillas consecutivas en dirección horizontal.
- 3 casillas consecutivas en dirección vertical.

Si al intentar avanzar las 3 casillas se llega a un borde, entonces debe de completar el movimiento retrocediendo las casillas necesarias o utilizando la otra dirección. Hallar el menor número de movidas necesarias para llegar desde la casilla inferior izquierda hasta la casilla superior derecha.

Problema 5 Un entero positivo se llama doblón si al transferir su dígito inicial (extrema izquierda) al final (extrema derecha), el número resultante es el doble del original. Si existen, encuentre todos los números doblones.

Problema 6 Un triángulo ABC esta inscrito en un círculo. Sea M la intersección de las rectas tangentes al círculo en B y C. Por el punto M se traza la recta paralela a $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{AB}$ en el punto N.

a) Demuestre que $BNCM$ es un cuadrilátero cíclico.

b) Demuestre que $\overline{AN} = \overline{CN}$.

Soluciones - Examen Final para Estudiantes Olímpicos - Año Académico 2003-04 - Nivel II

Problema 1 Sean d, y c las cantidades de billetes de \$2 y \$5, respectivamente, retirado por el abuelo. Del enunciado sabemos que:

$$2d + 5c = 145 \qquad (1)$$

Entonces, $2d = 145 - 5c$.

Como $5 \mid 145 - 5c$, $5 \mid 2d$. Por lo tanto, $2d$ es divisible entre 5 y entre 2, por lo tanto entre 10.

Entonces $10 \mid 145 - 5c = 5(29 - c)$, así que $2 \mid 29 - c$, entonces c es impar, y $1 \leqslant c \leqslant 29$.

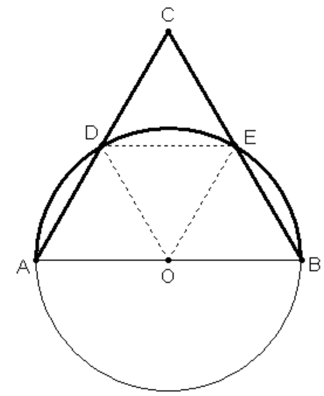
Por lo tanto, las soluciones de (1) son:

c	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
d	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

Problema 2 Como las 6 caras del cubo son de diferente color, hay 6 maneras para escoger la posición del 1. Al escoger la posición del 1, la posición del 6 está fija (en la cara opuesta a la del 1). Luego restan 4 posiciones para ubicar al 2 y al hacerlo la posición del 5 está fija. Finalmente restan 2 posiciones para ubicar al 3, y al hacerlo la posición del 4 está fija.

Por lo tanto, hay $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneras para ubicar los números en el cubo.

Problema 3 Sea O el centro del círculo, y sean D y E los puntos de intersección del círculo con $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.



Como $\triangle ABC$ es equilátero, $\measuredangle OBE = \measuredangle OAD = 60°$, y como $\overline{OB} = \overline{OE} = \overline{OD} = \overline{OA}$, los triángulos $\triangle AOD$ y $\triangle BOE$ son equiláteros. Como $\measuredangle DOE = 180° - \measuredangle AOD - \measuredangle BOE = 60°$, el triángulo $\triangle DOE$ es equilátero.

Entonces, los triángulos $\triangle AOD$, $\triangle DOE$, $\triangle BOE$ son triángulos equiláteros congruentes, ya que el lado de cada uno de ellos es el radio del círculo.

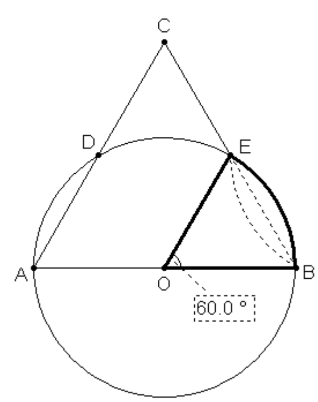
Como $\overline{AD} = \overline{BE}$, y $\overline{AC} = \overline{BC}$, tenemos que $\overline{CD} = \overline{CE}$, y como $\measuredangle ACB = 60°$, el triángulo $\triangle CDE$ es equilátero.

Entonces, $\triangle AOD$, $\triangle DOE$, $\triangle BOE$, y $\triangle CDE$ son triángulos equiláteros congruentes. Por lo tanto, $\overline{AD} = \overline{DC} = 1$. Entonces el radio de O es 1.

Como $\overline{AD} = \overline{DE}$, el área sombreada contenida entre el segmento $\overline{AD}$ y el arco AD, es igual al área contenida entre el segmento $\overline{DE}$ y el arco DE.

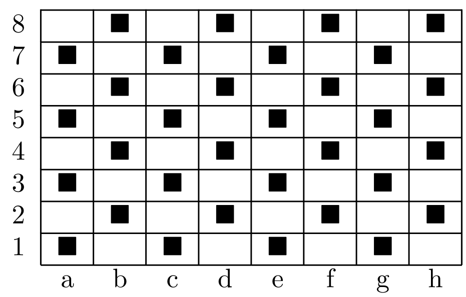
Por lo tanto, el área de toda la región sombreada es igual al área del $\triangle CDE$, y el área contenida entre el segmento $\overline{EB}$, y el arco EB.

Pero el área del $\triangle CDE$ es igual al área del $\triangle BOE$, por lo tanto el área de toda la región sombreada es igual al área determinada por el círculo y el ángulo $\measuredangle BOE = 60°$. Pero esto es $\frac{1}{6}$ parte del área del círculo.



Por lo tanto, el área de toda la región sombreada es igual a $\frac{1}{6}\pi \times 1^2 = \frac{\pi}{6}$.

Problema 4 Numeremos las filas del tablero con 1 al 8 desde abajo hasta arriba, y las columnas con las letras $a, b, \ldots, h$ desde la izquierda hacia la derecha, y asumamos que las casillas están coloreadas alternadamente de blanco y negro (como un típico tablero de ajedrez).



Llamemos cualquier movimiento de la ficha hacia arriba ó hacia la derecha un *avance*, y cualquier movimiento hacia abajo ó hacia la izquierda un *retroceso*. Para ir desde la casilla $a1$ hasta $h8$, hay que avanzar 14 casillas. Como en cada movimiento avanzamos a lo mas 3 casillas, se necesitan por lo menos $\lceil \frac{14}{3} \rceil =$ 5 movimientos. Ahora, note que en cada movimiento las casillas de partida y llegada son de diferentes colores. Por lo tanto, como $a1$ y $h8$ son casillas del mismo color, solo podemos llegar desde $a1$ hasta $h8$ en un número par de movimientos. Por lo tanto, necesitamos por lo menos 6 movimientos.

Ahora, con 6 movimientos si es posible llegar desde $a1$ hasta $h8$, por ejemplo: $a1 \longrightarrow a4 \longrightarrow a7 \longrightarrow c8 \longrightarrow b8 \longrightarrow e8 \longrightarrow h8$, donde el movimiento $c8 \longrightarrow b8$ es un retroceso.

Por lo tanto, el menor número de movimientos para llegar desde $a1$ hasta $h8$ es 6.

Problema 5 Sea $N = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$ un número doblón, donde a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 son los dígitos de N, y $a_n \neq 0$. Entonces,

$$2(10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0) = 10(10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0) + a_n$$

Sea $K = 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$, entonces,

$$\begin{aligned} 2(10^n a_n + K) &= 10K + a_n \\ (2 \times 10^n - 1)a_n &= 8K \end{aligned}$$

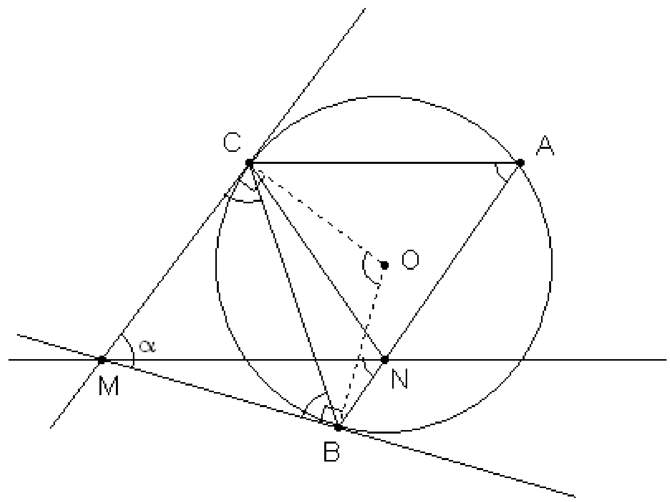
Entonces, $8 \mid (2 \times 10^n - 1)a_n$, y como $2 \times 10^n - 1$ es impar, $8 \mid a_n$. Entonces $a_n = 8$, ya que $a_n \neq 0$ es un dígito.

Luego, $K = 2 \times 10^n - 1$, pero esto es una contradicción ya que $2 \times 10^n - 1$ tiene $n+1$ dígitos y $K = 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$ tiene n dígitos.

Por lo tanto, no existen números doblones.

Problema 6

Parte (a)



Sea $\alpha = \measuredangle CMB$. Como $\overline{CM} = \overline{BM}$, $\measuredangle MCB = \measuredangle MBC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Como $\overline{CM}$ y $\overline{BM}$ son tangentes al círculo O, $\measuredangle MCO = 90° = \measuredangle MBO$, por lo tanto, considerando el cuadrilátero $MCOB$, $\measuredangle COB = 360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$.

Como $\measuredangle COB$ es un ángulo central, $\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\measuredangle COB = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Como $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\measuredangle MNB = \measuredangle CAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Entonces, $\measuredangle MNB = \measuredangle MCB$.

Por lo tanto, el cuadrilátero $BNCM$ es cíclico.

Parte (b) Como $BNCM$ es cíclico, los ángulos $\measuredangle CMB$ y $\measuredangle CNB$ son suplementarios, por lo tanto $\measuredangle CNB = 180° - \alpha$.

Entonces, $\measuredangle MNC = \measuredangle CNB - \measuredangle MNB = 180° - \alpha - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Como $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $\measuredangle NCA = \measuredangle MNC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Entonces, $\measuredangle NCA = 90° - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle NAC$.

Por lo tanto, el triángulo $\triangle ANC$ es isósceles, y $\overline{AN} = \overline{CN}$.