Algoritmos y estructuras de datos

Programación Dinámica

CEIS

Escuela Colombiana de Ingeniería

2024-2

Agenda

Agenda

Formulación

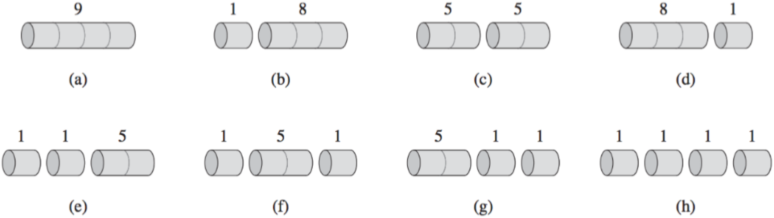
Dado una varilla de longitud n y una tabla de precios $p_i \; para \; i = 1,2,..,n$. Determinar la ganancia máxima r_n obtenible de cortar la varilla y vender las piezas.

length i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
price p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Diseño

Se puede cortar la varilla de 2^{n-1} formas diferentes

n=4



(a) (b) (c) (d)
(e) (f) (g) (h)

length i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
price p_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Dividir y conquistar

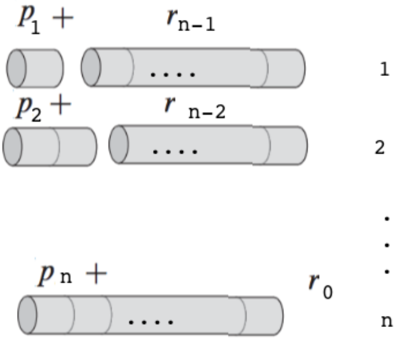
r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

Dividir y conquistar

r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

r_n $\quad$ 0
$n = 0$

r_n
$n \geq 1$



$$\max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i})$$

Dividir y conquistar

r_n : La máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

$$r_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} (p_i + r_{n-i}) & n \geq 1 \end{cases}$$

n llamadas recursivas

Dividir y conquistar

CUT-ROD(p, n) es la máxima ganancia para una varilla de longitud n considerando los precios $p[1..N]$, $n <= N$

$$r_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \max\limits_{1 \le i \le n} (p_i + r_{n-i}) & n \ge 1 \end{cases}$$

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = -∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i))
return q
```

Análisis

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = -∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i))
return q
```

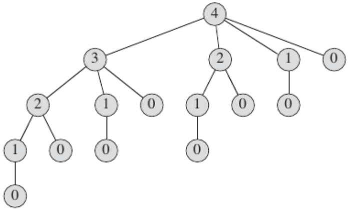
$$T(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} T(j) . \qquad (15.3)$$

$$T(n) = 2^n , \qquad (15.4)$$

Análisis

n=4

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```



Se resuelven repetidamente algunos problemas.

Programación dinámica

Al ver que que una función recursiva resuelve repetidamente el mismo problema, podemos modificar el algoritmo para solo solucionar estos subproblemas solo una vez y almacenar la solución.

Se hace un trade-off entre memoria y tiempo. Pudiendo convertir soluciones exponenciales a un tiempo polinómico.

Programación dinámica

```
CUT-ROD(p, n)
if n == 0
    return 0
q = −∞
for i = 1 to n
    q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n − i))
return q
```

Se escribe un algoritmo recursivo de forma normal, pero lo modificamos para guardar el resultado de cada subproblema. Entonces el procedimiento verifica si ese subproblema ha sido resuelto previamente o no.

```
MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)
let r[0 . . n] be a new array
for i = 0 to n
    r[i] = −∞
return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

```
MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
if r[n] ≥ 0
    return r[n]
if n == 0
    q = 0
else q = −∞
    for i = 1 to n
        q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n − i, r))
r[n] = q
return q
```

Agenda

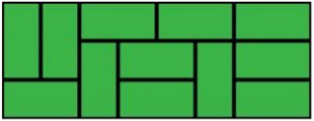
Baldosas

Dado un table de 3 x *n*, encuentre el número de formas en que puede completar con dominós de tamaño 2 x 1.

3 x 2

3 formas

3 x 8



n	# formas
2	3
8	153
12	2131

Amigos

Suponga que hay *n* amigos, quienes pueden permanecer solos o ser emparejados con otro amigo. Cada amigo puede ser emparejado una sola vez. Encuentre el número de formas en que los amigos pueden quedar solos o emparejados.

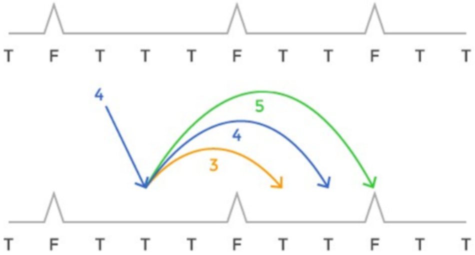
3 amigos

- [1, 2, 3]
- [1], [2, 3]
- [1, 2], [3]
- [1, 3], [2]

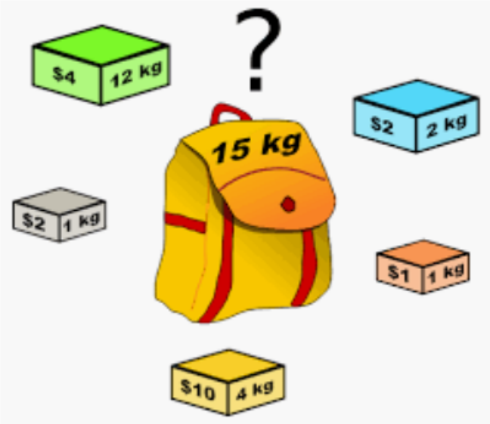
4 formas

Clavos

1. Considere un camino plano con clavos en el camino. Usted puede saltar de punto en punto según una velocidad S; luego de llegar a un punto, puede ajustar su velocidad en 1 unidad antes de dar el siguiente salto. La idea es no pisar ningún clavo durante el camino, y se detiene una vez su velocidad llego a 0. Dado un camino, una posición y una velocidad inicial, indique si es posible detenerse a lo largo del camino sin pisar ningún clavo.

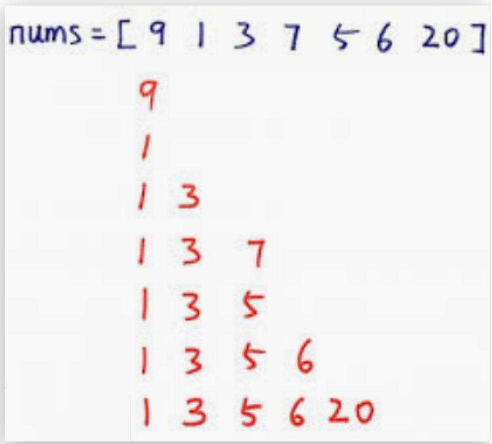


Knapsack



Dada una mochila con una capacidad de 15 kg que puedo llenar con objetos de distinto peso y valor, ¿qué objetos elijo para maximizar mis ganancias y no exceder los 15 kg de peso permitidos?

LIS



El problema de la subsecuencia creciente máxima consiste en encontrar una subsecuencia de una secuencia dada donde los elementos de la subsecuencia están ordenados, de menor a mayor, y la subsecuencia sea tan larga como sea posible. Esta subsecuencia no es necesariamente continua, o única.
LIS: Longest Increasing Subsequence