

Algoritmos y estructuras de datos

Estructuras Jerárquicas

CEIS

Escuela Colombiana de Ingeniería

2024-2

Agenda

- 1 Árboles binarios
- 2 Árboles de búsqueda
- 3 Árboles balanceados
- 4 Aspectos finales
Ejercicios

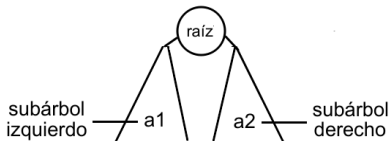
Agenda

- 1 Árboles binarios
- 2 Árboles de búsqueda
- 3 Árboles balanceados
- 4 Aspectos finales
Ejercicios

Árbol binario

Un **árbol binario** es una estructura recursiva, compuesta por un elemento, denominado la raíz, y por dos árboles binarios asociados, denominados subárbol derecho y subárbol izquierdo.

El hecho de definir la estructura de datos en términos de sí misma es lo que hace que se denomine recursiva.



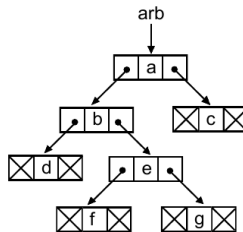
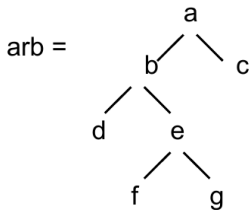
árbol
vacío

El diagrama muestra el texto "árbol vacío" a la izquierda de un símbolo Δ . Una línea diagonal desciende desde el texto hacia el símbolo Δ .

Árbol binario

Un árbol binario se puede representar como una estructura de datos enlazadas en donde cada nodo es un objeto.

Generalmente cada nodo tiene tres atributos el valor asociado (v), el apuntador al hijo izquierdo (*left*) y el apuntador al hijo derecho (*right*).



Árbol binario

Se puede recorrer todos los los nodos de un árbol de tres formas diferentes:

- *Inorden:*

- 1 visita en inorden el subarbol izquierdo
- 2 visita la raíz
- 3 visita en inorden el subarbol derecho

- *Preorden:*

- 1 visita la raíz
- 2 visita en preorden el subarbol izquierdo
- 3 visita en preorden el subarbol derecho

- *Postorden:*

- 1 visita en postorden el subarbol izquierdo
- 2 visita en postorden el subarbol derecho
- 3 visita la raíz

INORDER-TREE-WALK(x)

```
1  if  $x \neq \text{NIL}$ 
2      INORDER-TREE-WALK( $x.\text{left}$ )
3      print  $x.v$ 
4      INORDER-TREE-WALK( $x.\text{right}$ )
```

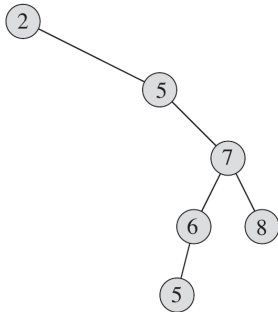
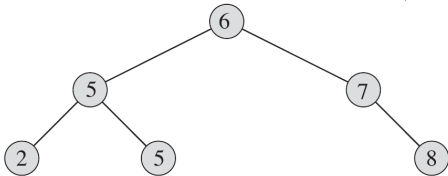
INORDER-TREE-WALK($T.\text{root}$)

Agenda

- 1 Árboles binarios
- 2 Árboles de búsqueda
- 3 Árboles balanceados
- 4 Aspectos finales
Ejercicios

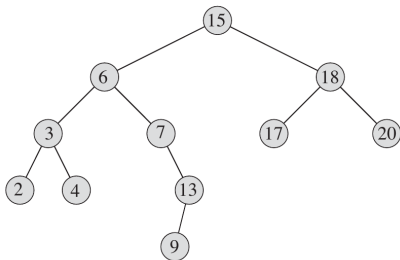
Arbol binario de búsqueda

Los arboles binarios de búsqueda **BST** tienen la llave como atributo adicional *key* y deben cumplir la siguiente condición: Sea x un nodo en un árbol binario de búsqueda. Si y es un nodo en el subárbol izquierdo de x , entonces $y.key \leq x.key$. Si y es un nodo en el subárbol derecho de x , entonces $y.key \geq x.key$.



Arbol binario de búsqueda

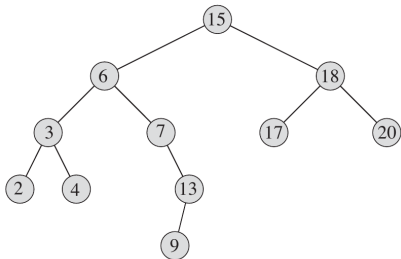
Búsqueda



Para buscar 13 seguimos la ruta,
 $15 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 13$

Arbol binario de búsqueda

Búsqueda



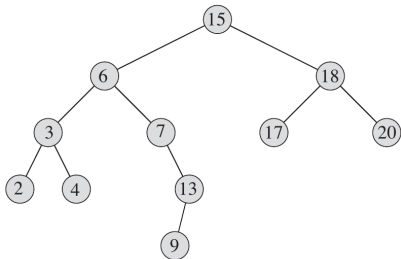
TREE-SEARCH(x, k)

```
1  if  $x == \text{NIL}$  or  $k == x.key$ 
2    return  $x$ 
3  if  $k < x.key$ 
4    return TREE-SEARCH( $x.left, k$ )
5  else return TREE-SEARCH( $x.right, k$ )
```

$O(h)$
h es la altura del árbol

Arbol binario de búsqueda

Búsqueda



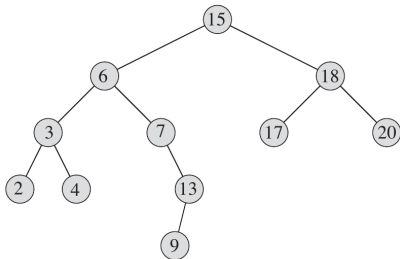
ITERATIVE-TREE-SEARCH(x, k)

```
1  while  $x \neq \text{NIL}$  and  $k \neq x.\text{key}$ 
2      if  $k < x.\text{key}$ 
3           $x = x.\text{left}$ 
4      else  $x = x.\text{right}$ 
5  return  $x$ 
```

$O(h)$
h es la altura del árbol

Arbol binario de búsqueda

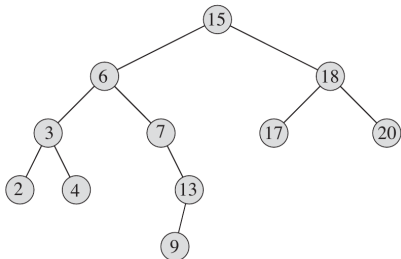
Mínimo y Máximo



- El mínimo, 2, se encuentra siguiendo los apuntadores izquierdos
- El máximo, 20, se encuentra siguiendo los apuntadores derechos

Arbol binario de búsqueda

Búsqueda



TREE-MINIMUM(x)

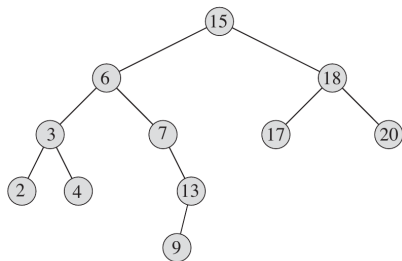
```
1  while  $x.left \neq \text{NIL}$   
2       $x = x.left$   
3  return  $x$ 
```

TREE-MAXIMUM(x)

```
1  while  $x.right \neq \text{NIL}$   
2       $x = x.right$   
3  return  $x$ 
```

$O(h)$
h es la altura del árbol

Búsqueda



TREE-SUCCESSOR(x)

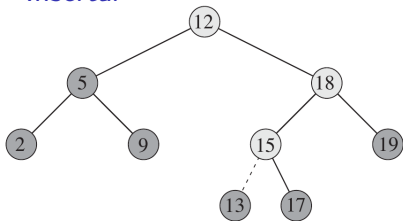
```
1  if  $x.right \neq \text{NIL}$   
2      return TREE-MINIMUM( $x.right$ )  
3   $y = x.p$   
4  while  $y \neq \text{NIL}$  and  $x == y.right$   
5       $x = y$   
6       $y = y.p$   
7  return  $y$ 
```

$O(h)$

h es la altura del árbol

Arbol binario de búsqueda

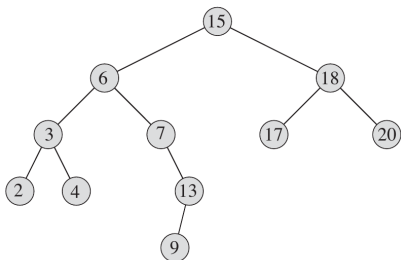
Insertar



Para insertar, por ejemplo 13, debemos encontrar primero la posición en el arbol

Arbol binario de búsqueda

Búsqueda



TREE-INSERT(T, z)

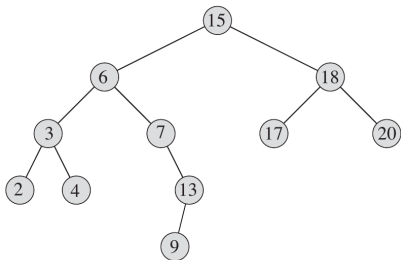
```
1   $y = \text{NIL}$ 
2   $x = T.\text{root}$ 
3  while  $x \neq \text{NIL}$ 
4       $y = x$ 
5      if  $z.\text{key} < x.\text{key}$ 
6           $x = x.\text{left}$ 
7      else  $x = x.\text{right}$ 
8   $z.p = y$ 
9  if  $y == \text{NIL}$ 
10      $T.\text{root} = z$       // tree  $T$  was empty
11 elseif  $z.\text{key} < y.\text{key}$ 
12      $y.\text{left} = z$ 
13 else  $y.\text{right} = z$ 
```

$O(h)$

h es la altura del árbol

Arbol binario de búsqueda

Sucesor



TREE-SUCCESSOR(x)

```
1  if  $x.right \neq \text{NIL}$ 
2      return TREE-MINIMUM( $x.right$ )
3   $y = x.p$ 
4  while  $y \neq \text{NIL}$  and  $x == y.right$ 
5       $x = y$ 
6       $y = y.p$ 
7  return  $y$ 
```

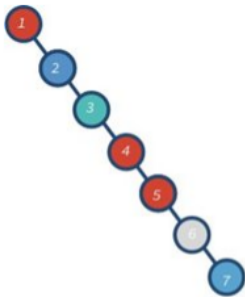
$O(h)$
h es la altura del árbol

Agenda

- 1 Árboles binarios
- 2 Árboles de búsqueda
- 3 Árboles balanceados**
- 4 Aspectos finales
Ejercicios

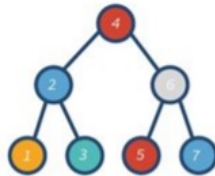
Arbol binario de búsqueda balanceados

Un **BST** está balanceado si dos subárboles hermanos no difieren en su altura por más de un nivel, o en otras palabras, no existen dos hojas cuya diferencia en profundidad sea mayor a un nivel.



Non-Balanced Tree v

Altura $h=n$
 $O(n)$



s Balanced Tree

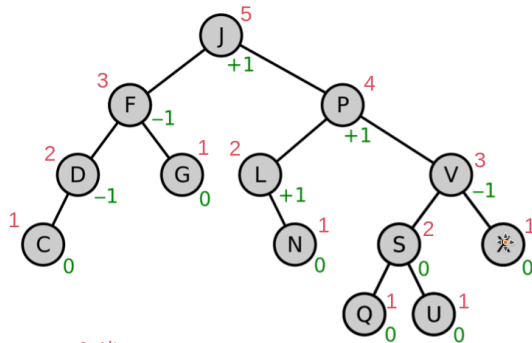
Altura $h=\log(n)$
 $O(\log(n))$

Árbol AVL

Un árbol **AVL** es un tipo especial de árbol binario ordenado balanceado ideado por los matemáticos rusos **Adelson-Velskii** y **Landis**.

Si los subárboles de un nodo tienen altura h_1 y h_2 , entonces $|h_1 - h_2| \leq 1$

Factor de balance



● Altura

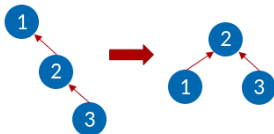
● Factor de balance

Árbol AVL

Rotaciones simples

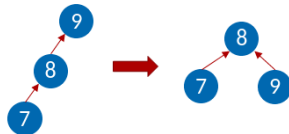
Rotaciones a la izquierda

Desbalance al insertar un nodo en el subárbol derecho de un subárbol derecho



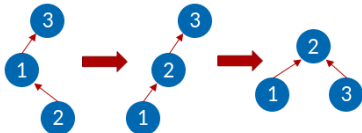
Rotaciones a la derecha

Desbalance al insertar un nodo en el subárbol izquierdo de un subárbol izquierdo

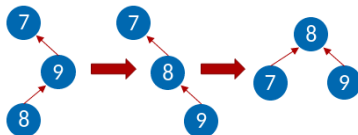


Rotaciones dobles

Rotaciones izquierda-derecha



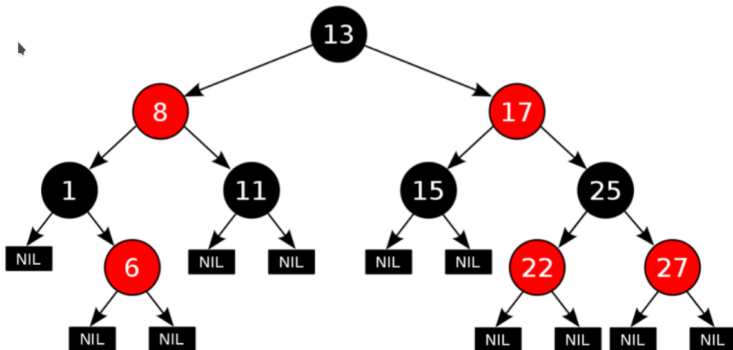
Rotaciones derecha-izquierda



Árbol Rojo Negro

A red-black tree is a binary tree that satisfies the following *red-black properties*:

1. Every node is either red or black.
2. The root is black.
3. Every leaf (NIL) is black.
4. If a node is red, then both its children are black.
5. For each node, all simple paths from the node to descendant leaves contain the same number of black nodes.

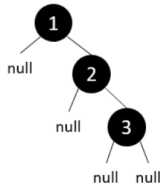
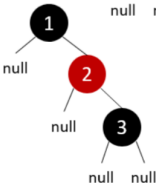
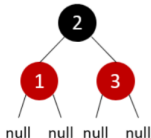
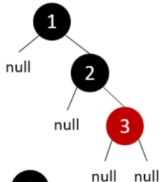
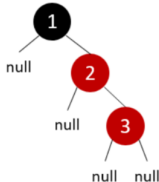
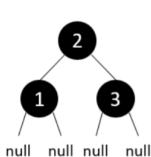


Árbol Rojo Negro

¿Son Rojo Negro?

A red-black tree is a binary tree that satisfies the following *red-black properties*:

1. Every node is either red or black.
2. The root is black.
3. Every leaf (NIL) is black.
4. If a node is red, then both its children are black.
5. For each node, all simple paths from the node to descendant leaves contain the same number of black nodes.

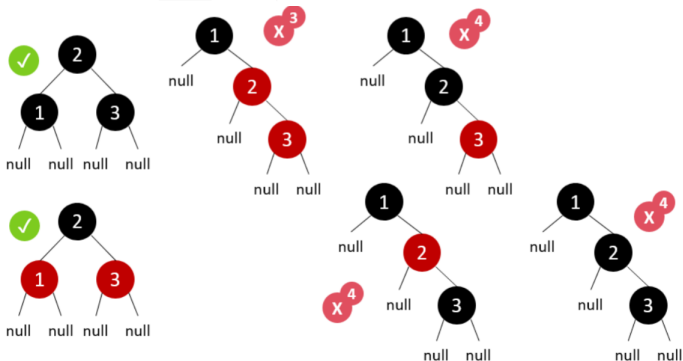


Árbol Rojo Negro

¿Son Rojo Negro?

A red-black tree is a binary tree that satisfies the following *red-black properties*:

1. Every node is either red or black.
2. The root is black.
3. Every leaf (NIL) is black.
4. If a node is red, then both its children are black.
5. For each node, all simple paths from the node to descendant leaves contain the same number of black nodes.

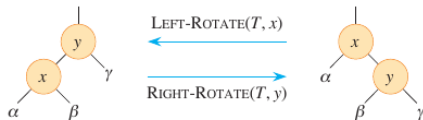


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

15

Rotación

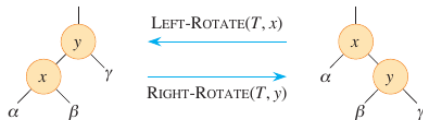


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso



Rotación

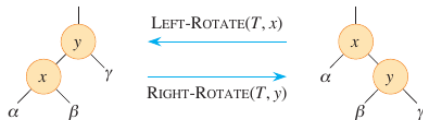


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso



Rotación

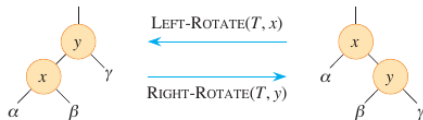


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

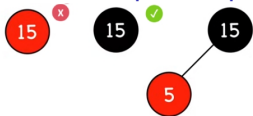


Rotación

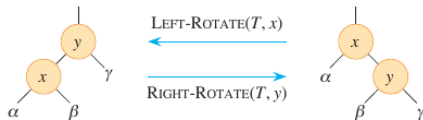


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

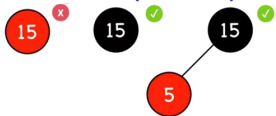


Rotación

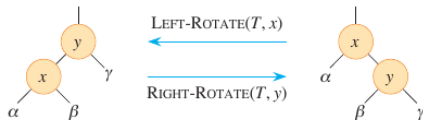


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

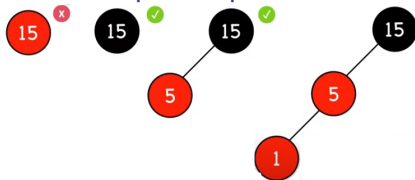


Rotación

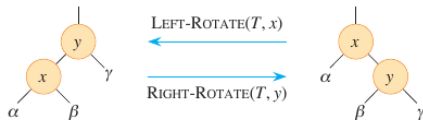


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

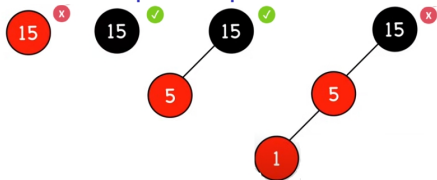


Rotación

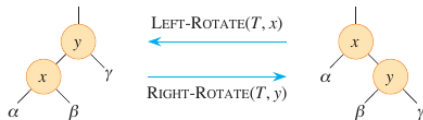


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

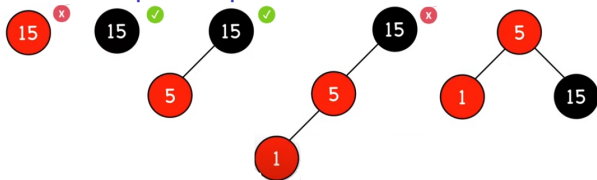


Rotación

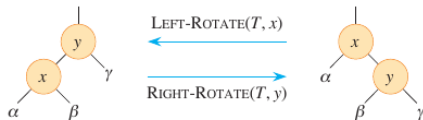


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

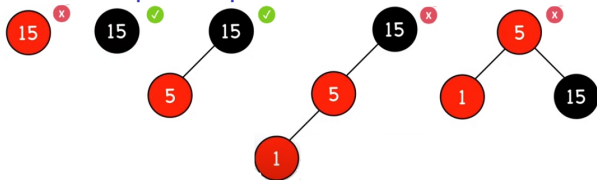


Rotación

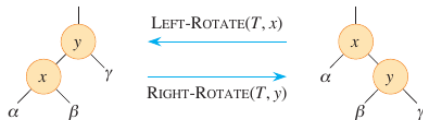


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

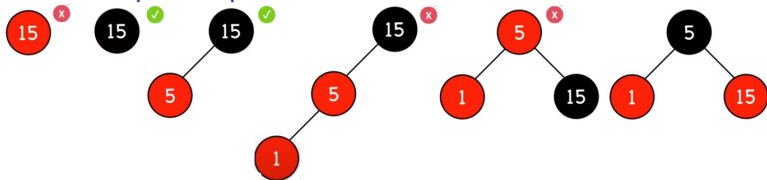


Rotación

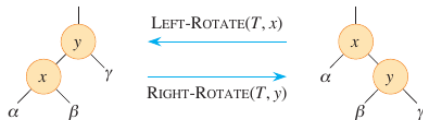


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

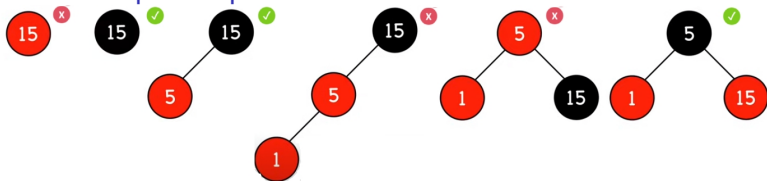


Rotación

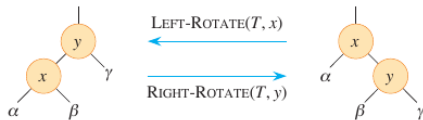


Árbol Rojo Negro

Insertando paso a paso

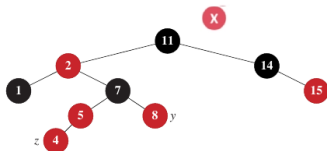


Rotación

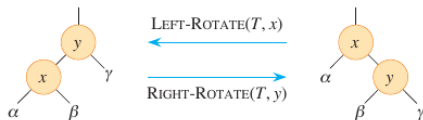


Árbol Rojo Negro

Insertando 4

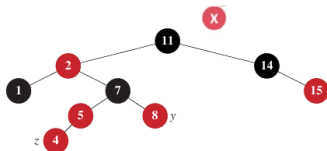


Rotación

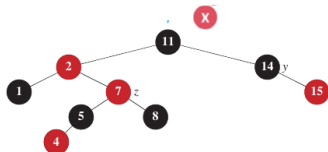


Árbol Rojo Negro

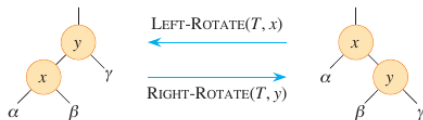
Insertando 4



Case 1

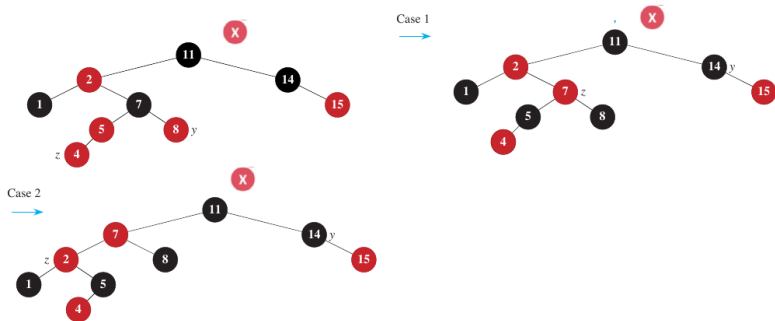


Rotación

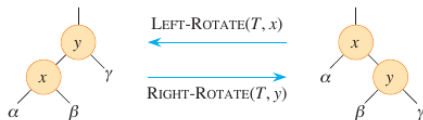


Árbol Rojo Negro

Insertando 4

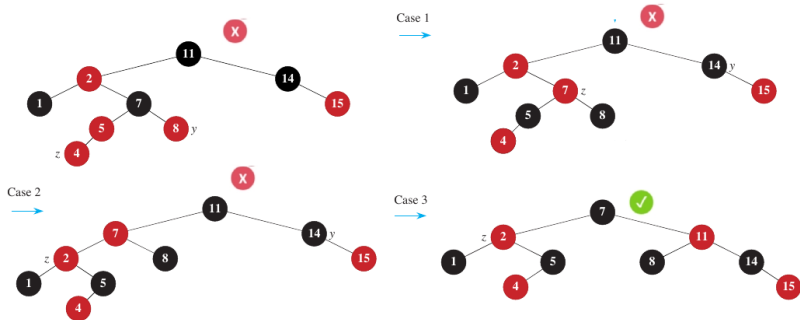


Rotación

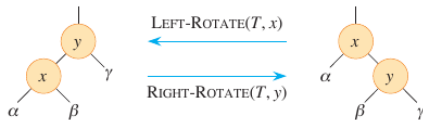


Árbol Rojo Negro

Insertando 4

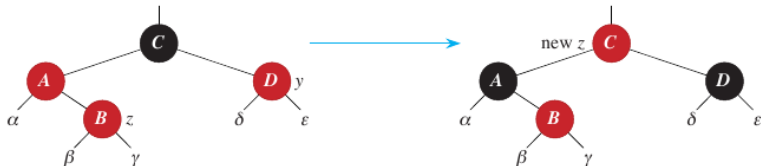


Rotación

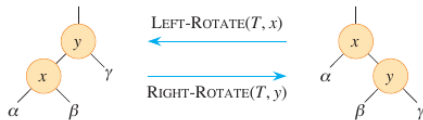


Árbol Rojo Negro

Tres casos

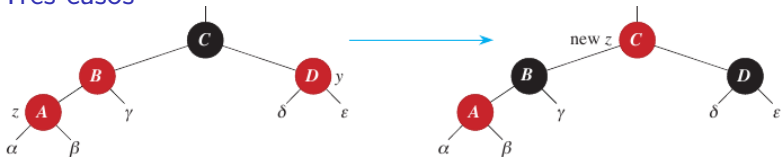


Rotación

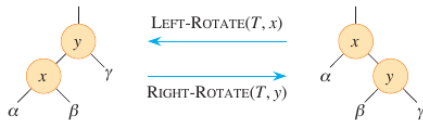


Árbol Rojo Negro

Tres casos

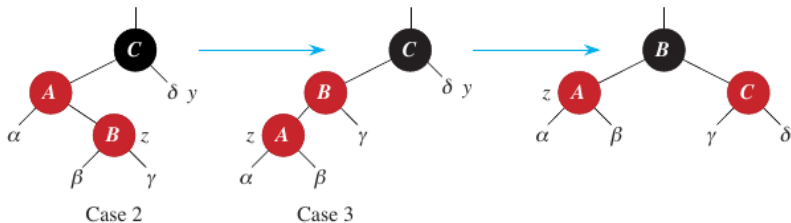


Rotación

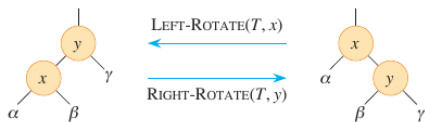


Árbol Rojo Negro

Tres casos



Rotación

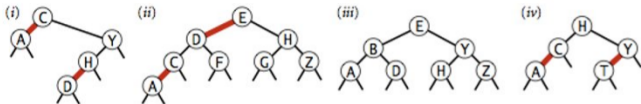


Agenda

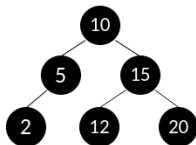
- 1 Árboles binarios
- 2 Árboles de búsqueda
- 3 Árboles balanceados
- 4 Aspectos finales
Ejercicios

Ejercicios

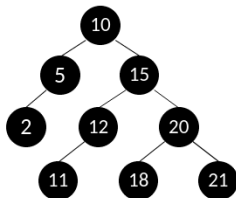
1. ¿Cuál de los siguientes árboles son red-black BSTs?



2. Dibuje el paso a paso de insertar las letras desde la A hasta la K, de manera ascendente y descendente, a un red-black BST que está vacío inicialmente.
3. Dibuje el árbol AVL resultante al aplicar las siguientes operaciones:



insert(4)



insert(25)

Ejercicios

12.2-1

Suppose that we have numbers between 1 and 1000 in a binary search tree, and we want to search for the number 363. Which of the following sequences could *not* be the sequence of nodes examined?

- a.* 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.
- b.* 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.
- c.* 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.
- d.* 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.
- e.* 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.

12.2-2

Write recursive versions of TREE-MINIMUM and TREE-MAXIMUM.

12.2-3

Write the TREE-PREDECESSOR procedure.

Ejercicios

12.2-4

Professor Bunyan thinks he has discovered a remarkable property of binary search trees. Suppose that the search for key k in a binary search tree ends up in a leaf. Consider three sets: A , the keys to the left of the search path; B , the keys on the search path; and C , the keys to the right of the search path. Professor Bunyan claims that any three keys $a \in A$, $b \in B$, and $c \in C$ must satisfy $a \leq b \leq c$. Give a smallest possible counterexample to the professor's claim.

12.2-5

Show that if a node in a binary search tree has two children, then its successor has no left child and its predecessor has no right child.

12.2-6

Consider a binary search tree T whose keys are distinct. Show that if the right subtree of a node x in T is empty and x has a successor y , then y is the lowest ancestor of x whose left child is also an ancestor of x . (Recall that every node is its own ancestor.)