Juan Esteban Hernandez
1002.635.781

Punto 1. Solucion

El sistema masa, resorte y amortiguadores se puede modelar a partir de la conservacion de las fuerzas

$$F_S(t) + F_f(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

donde: $F_S(t) = Kg(t)$, $F_f(t) = C\frac{dg(t)}{dt}$ y $F_I = \frac{m\,d^2y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C\frac{dy(t)}{dt} + Kg(t) = F_E(t) = x(t)$$

Aplicando la transformada de laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt}\right\} = \int^n x(s) \quad \text{tenemos que}$$

$$ms^2 y(s) + Csy(s) + Ky(s) = x(s)$$

y

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{ms^2 + Cs + K}$$

Funcion de transferencia sistema masa, resorte y amortiguador

ahora, para el CTO electrico presentado, hallamos la respectiva funcion de transferencia

LVK malla int

$$-V_i(t) + L\frac{d}{di}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos

$$V_i(s) = Ls\,I_1(s) + I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{Cs} \quad (1)$$

ahora hallamos LVK malla $i_2(t)$

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - I_1(t))\,dt = 0$$

donde $V_o(t) = i_2(t)R$

Utilizando las impedancias obtenemos.

$$I^2(s)R + (I_2(s) - I_1(s))\frac{1}{Cs} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene

$$\frac{I_1(s)}{Cs} + \frac{I_2(s)}{Cs} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)}{Cs}Cs + I_2(s)RCs$$

$$I_1(s) = I_2(s)(1+CRs)$$

Remplazando (2) en (1)

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s)(1+CRs) + (I_2(s)(1+CRs) - I_2(s))\frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s) + CRLs^2 I_2(s) + (I_2(s) + CRs I_2(s) - I_2(s))\frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s) + (CLs^2 I^2(s) + RI_2(s)$$

$$V_i(s) = I_2(s)[CRLs^2 + Ls + R]$$

$$\frac{I_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

Remplazando $I_2(s) = \frac{V_o(s)}{R}$ obtenemos:

$$\frac{V_o(s)}{RV_i(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{CRLs^2 + Ls + R}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Función transferencia cto eléctrico

Equivalencia Cto eléctrico en Pendulo elastico

Cto eléctrico	Pendulo elastico
C	m
L/R	C
1	K

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{Lcs^2 + L/R\,s + 1}$$

Su equivalente en Pendulo es:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}\right)}$$

Hallando la forma canonica de segundo orden

- Comparando

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}$$

- igualando coeficiente

$1 = 1 \longrightarrow$ Coef s^2

$2\xi w_n = \frac{c}{m} \longrightarrow$ Coef s

$w_n^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow$ Coef independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguada

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Hallando factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{m}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Hallando la ganancia K

$$K w_n^2 = \frac{1}{m}$$

$$K = \frac{1}{m\, w_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\,\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{k}}$$

Finalmente la forma canonica de segundo orden es:

$$H(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{K} \frac{K/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{K/m}\,s + \frac{K}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}\right)}$$

- Hallando la frecuencia natural amortiguada

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = \left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\left(\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2m\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)^2}\right)}\right)$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{4Km - c^2}}{2\sqrt{Km}}$$

- El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por
  - Hallando el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$t_s = \frac{3}{\left(\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{K}{m}}\right)\sqrt{Km}}$$

$$t_s = \frac{6m}{s}$$

Función de transferencia masa resorte amortiguado lazo cerrado

- Podemos representar la función de transferencia de un sistema de lazo cerrado de la siguiente manera

$$H_{LC} = \frac{H(s)}{1 + A(s)H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K} \longrightarrow \text{"Función de transferencia lazo abierto"}$$

$$A(s) = 1$$

- Calculamos $H_{LC}(s)$

$$H_{LC}(s) = \frac{\frac{1}{ms^2 + Cs + K}}{1 + \left(\frac{1}{ms^2 + Cs + K}\right) \cdot 1} = \frac{\frac{1}{ms^2 + Cs + K}}{\frac{ms^2 + Cs + K + 1}{ms^2 + Cs + K}}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{ms^2 + Cs + K}{(ms^2 + Cs + K)\cdot(ms^2 + Cs + K + 1)}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K + 1} \quad o' \quad \frac{1/m}{s^2 + \frac{C}{m}s + \left(\frac{K+1}{m}\right)}$$

- Hallando la forma canónica de segundo orden
  - Comparando

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{C}{m}\cdot s + \left(\frac{K+1}{m}\right)$$

- Igualando Coeficiente

$1 = 1 \longrightarrow$ Coef s^2

$2\xi\cdot\omega_n = \frac{C}{m} \longrightarrow$ Coef s

$\omega_n^2 = \frac{K+1}{m} \longrightarrow$ Coef independiente

Hallando frecuencia natural no amortiguada

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K+1}{m}}$$

- Hallando Factor amortiguamiento

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} = \boxed{\frac{C}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}}}$$

- Hallando la ganancia

$$K\omega_n^2 = \frac{1}{m}$$

$$K = \frac{1}{m\ \omega_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{K+1}{m}}\right)^2}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{K+1}}$$

- Entonces la forma canonica de segundo orden es:

$$HLC(S) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

$$HLC(S) = \frac{\frac{K+1}{m}}{S^2 + 2\left(2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}\right)\sqrt{\frac{K+1}{m}}\cdot S + \frac{K+1}{m}}$$

$$\boxed{HLC(S) = \frac{1}{m\left(S^2 + \frac{C}{m}S + \frac{K+1}{m}\right)}}$$

- Hallando frecuencia natural amortiguado

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{K+1}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{C}{2m\sqrt{(K+1)/m}}\right)^2}$$

$$\boxed{\omega_d = \frac{\sqrt{\frac{K+1}{m}}\sqrt{4Km+4m-C^2}}{2\sqrt{m(K+1)}}}$$

- Hallando el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\sqrt{\frac{k+1}{m}}} = \boxed{\frac{6m}{c}}$$