TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	17/01/2024	U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL
CURSO	2º	**HORA**	18:30	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	2 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1

Completa los siguientes apartados sobre números complejos:

a) Determina los números complejos que satisfacen la ecuación $|z-(1+i)| = |z-(3+2i)|$ e interpreta geométricamente dicho conjunto.

b) Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces cúbicas de $8i$, demuestra que $z_1 \cdot z_2 = (z_3)^2$.

Solución:

a) Vamos a sustituir $z = x + iy$ en la ecuación del enunciado:

$$|z-(1+i)| = |z-(3+2i)| \implies$$

$$\implies |(x+iy)-(1+i)| = |(x+iy)-(3+2i)| \implies$$

$$\implies |(x-1)+i(y-1)| = |(x-3)+i(y-2) \implies$$

$$\implies \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} \implies$$

$$\implies (x-1)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y-2)^2 \implies$$

$$\implies (x^2-2x+1)+(y^2-2x+1) = (x^2-6x+9)+(y^2-4y+4) \implies$$

$$\implies 4x+2y = 11$$

Luego el conjunto de soluciones representa una recta de ecuación $4x+2y-11=0$.

b) Comenzaremos calculando las raíces cúbicas de $8i$:

$$z^3 - 8i = 0 \implies z^3 = 8i \implies z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{3}} = \begin{cases} z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \\ z_2 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}} \\ z_3 = 2e^{\frac{i9\pi}{6}} \end{cases}$$

Comprobamos a continuación la relación del enunciado:

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \cdot 2e^{\frac{i5\pi}{6}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 4e^{i\pi}$$

$$(z_3)^2 = \left(2e^{\frac{i9\pi}{6}}\right)^2 = 2^2e^{\frac{i9\pi}{3}} = 4e^{i3\pi} = 4e^{i\pi}$$

Luego efectivamente se cumple que $z_1 \cdot z_2 = (z_3)^2$.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	17/01/2024
CURSO	2º	HORA	18:30
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 2

Determina si las siguientes integrales son convergentes o divergentes, calculando su valor en caso de que sean convergentes y su valor principal de Cauchy en caso de que sean divergentes (y sea apropiado su cálculo).

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx \qquad I_2 = \int_0^5 \frac{x}{x-2} dx$$

Solución:

1) Se trata de una integral impropia de primera especie. Vamos a demostrar que la integral es divergente mediante la comparación con otra integral:

$$f(x) = \frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} = g(x) \ \forall x \in [1, \infty)$$

A continuación vamos a demostrar que la integral $\int_1^{\infty} g(x)dx$ es divergente:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{K\to\infty} \int_1^{K} \frac{1}{x} dx = \lim_{K\to\infty} \left[\text{Ln}|x|\right]_1^K = \lim_{K\to\infty} \left(\text{Ln}|K| - Ln|1|\right) = \infty - 0 = \infty$$

Por lo tanto, la integral I_1 es <u>divergente</u>. En este caso no tiene sentido calcular el valor principal de Cauchy.

2) Se trata de una integral impropia de segunda especie con un punto problemático ($x = 2$), por lo que debemos calcular dos integrales de forma independiente:

$$I_2 = \int_0^5 \frac{x}{x-2} dx = \underbrace{\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{x}{x-2} dx}}_{I_{2a}} + \underbrace{\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{2+\epsilon}^{5} \frac{x}{x-2} dx}}_{I_{2b}}$$

Comenzaremos calculando la integral I_{2a}:

$$I_{2a} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{x}{x-2} dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \left(1 + \frac{2}{x-2}\right) dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[x + 2\text{Ln}|x-2|\right]_0^{2-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left((2 - \epsilon + 2\text{Ln}|\cancel{2} - \epsilon - \cancel{2}|) - (0 + 2\text{Ln}|0-2|)\right) = 2 - 2\text{Ln}(2) + 2 \lim_{\epsilon\to 0^+} \text{Ln}(\epsilon) = -\infty$$

Puesto que la integral I_{2a} no converge, e $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$, podemos afirmar que I_2 es una integral <u>divergente</u>. En este caso sí tiene sentido calcula el valor principal de Cauchy.

$$V.P.\left(\int_0^5 \frac{x}{x-2}dx\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_0^{2-\epsilon} \frac{x}{x-2}dx + \int_{2+\epsilon}^5 \frac{x}{x-2}dx\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\big[x + 2\mathrm{Ln}|x-2|\big]_0^{2-\epsilon} + \big[x + 2\mathrm{Ln}|x-2|\big]_{2+\epsilon}^5\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\big(\cancel{2} - \cancel{\epsilon} + 2\mathrm{Ln}|\cancel{2} - \epsilon - \cancel{2}| - 2\mathrm{Ln}(2) + 5 + 2\mathrm{Ln}(3) - (\cancel{2} - \cancel{\epsilon}) - 2\mathrm{Ln}|\cancel{2} - \epsilon - \cancel{2}|\big) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\big(\cancel{2\mathrm{Ln}(\epsilon)} - 2\mathrm{Ln}(2) + 5 + 2\mathrm{Ln}(3) - \cancel{2\mathrm{Ln}(\epsilon)}\big) = 5 + 2\mathrm{Ln}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 5.81$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	17/01/2024
CURSO	$2^{\underline{o}}$	**HORA**	18:30
GRUPO	A	**DURACIÓN**	2 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 3

Completa los siguientes apartados asociados a la sucesión de funciones cuyo término general es $f_n(x) = \sqrt{x^{2n} + \frac{1}{n}}$:

a) Determina su límite puntual.

b) Estudia si la convergencia es uniforme en los intervalos $[-1, 1]$ y $(-1, 1)$.

Solución:

a) Comenzaremos analizando la convergencia puntual mediante el cálculo de la función $f(x)$:

$$\boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)} \; f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x^2)^n + \frac{1}{n}} = \sqrt{\infty + 0} = \infty$$

$$\boxed{x \in (-1, 1)} \; f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x^2)^n + \frac{1}{n}} = \sqrt{0 + 0} = 0$$

$$\boxed{x = -1} \; f(-1) = \lim_{n\to\infty} f_n(-1) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{((-1)^2)^n + \frac{1}{n}} = \sqrt{1 + 0} = 1$$

$$\boxed{x = 1} \; f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(1^2)^n + \frac{1}{n}} = \sqrt{1 + 0} = 1$$

Luego $f_n(x)$ converge puntualmente en el intervalo $[0, 1]$ a $f(x) = \begin{cases} 1 & x = -1 \\ 0 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

b) La <u>convergencia</u> de la sucesión de funciones $f_n(x)$ a la función $f(x)$ <u>no</u> puede ser <u>uniforme</u> en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que todas las funciones $f_n(x)$ son continuas en dicho intervalo, mientras que $f(x)$ no lo es.

Vamos a estudiar ahora la convergencia uniforme en el intervalo $(-1, 1)$:

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^{2n} + \frac{1}{n}} - 0 \right| = \sqrt{x^{2n} + \frac{1}{n}} = \left(x^{2n} + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} n x^{2n-1} \left(x^{2n} + \frac{1}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{n x^{2n-1}}{\sqrt{x^{2n} + \frac{1}{n}}}$$

Claramente el único punto que anula $g'(x)$ es $x = 0$, que por lo tanto constituye el único punto crítico. Por otra parte, dada la expresión de la función es evidente que $x = 0$ es un mínimo, puesto que $g(0) = \sqrt{0 + \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt{x^{2n} + \frac{1}{n}}$ para todo $x \in (-1, 1)$. Ello significa que el supremo de $g(x)$ debe aparecer en los extremos del intervalo (que tienen el mismo valor). Con estos elementos ya podemos calcular el límite asociado al cuarto criterio:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup \left|f_n(x) - f(x)\right| : x \in (-1, 1)\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, podemos asegurar que la convergencia de la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ no es uniforme en el intervalo $(-1, 1)$.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	17/01/2024
CURSO	2º	**HORA**	18:30
GRUPO	A	**DURACIÓN**	2 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 4

Determina el campo de convergencia de la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{4^n (n+1)}$, incluyendo en el estudio los extremos del intervalo de convergencia.

Solución:

Utilizaremos el criterio del cociente para calcular el radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-5)^{2n+2}}{4^{n+1}(n+2)}}{\dfrac{(-1)^n (x-5)^{2n}}{4^n (n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-5)^{2n}}\,(x-5)^2\, \cancel{4^n}\,(n+1)}{\cancel{(x-5)^{2n}}\,\cancel{4^n}\,(n+2)\,4} \right| =$$

$$= \frac{(x-5)^2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{(x-5)^2}{4} < 1 \implies (x-5)^2 < 4 \implies |x-5| < 2$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 2$ y el centro del intervalo de convergencia es $x = 5$. Vamos a estudiar ahora el comportamiento en los extremos:

$\boxed{x = 3}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-5)^{2n}}{4^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^{2n}}{4^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{(4)^n}}{\cancel{4^n}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Claramente se trata de una serie convergente por el criterio de Leibniz, dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$.

$\boxed{x = 7}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (7-5)^{2n}}{4^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{2n}}{4^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{(4)^n}}{\cancel{4^n}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Se trata de la misma expresión del caso anterior, por lo que la serie es igualmente convergente.

Por todo ello, podemos afirmar que el campo de convergencia de la serie es $[3, 7]$.