CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Formas bilineales y cuadráticas

TEMA 5

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Formas bilineales y cuadráticas

5.1. Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.
5.2. Matriz asociada a una forma bilineal.
5.3. Formas cuadráticas.
5.4. Forma polar de una forma cuadrática.
5.5. Matriz asociada a una forma cuadrática.
5.6. Conjugación respecto de una forma cuadrática.
5.7. Diagonalización por congruencia.
5.8. Clasificación de formas cuadráticas reales.
5.9. Teorema de inercia de Silvester.
5.10. Determinación práctica del carácter de una forma cuadrática.
5.11. Desigualdad de Schwarz.
5.12. Formas sesquilineales.

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

❑ Aplicación multilineal

- ❑ Dados $V_1, V_2, \ldots V_n$ y W espacios vectoriales sobre K. La aplicación
  f: V_1x V_2x… x$V_n \longrightarrow W$ que verifica $\forall i = 1,2 \ldots n; u, w \in V_i;$ λ ∈ K

1) f($v_1 \ldots v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1} \ldots v_n$)= λ f($v_1 \ldots v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \ldots v_n$)
2) f($v_1 \ldots v_{i-1}, u + w, v_{i+1} \ldots v_n$)= f($v_1 \ldots v_{i-1}, u, v_{i+1} \ldots v_n$)+f($v_1 \ldots v_{i-1}, w, v_{i+1} \ldots v_n$)

Se denomina **aplicación multilineal**

- ❑ Una aplicación multilineal es por tanto una aplicación lineal en cada una de sus componentes
- ❑ Si f: Vx Vx… x$V \longrightarrow K$, f se denomina $\boldsymbol{forma\ multilineal}$

❖ **Ejemplo 1**

- ❖ $f: K^n$xK^nx… x$K^n \longrightarrow K$
  f($v_1, \ldots \ldots v_n$)=det(v_{ij}) es una forma multilineal

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

Forma bilineal

- Dado V $espacio\ vectorial\ sobre\ K, una\ aplicación\ f : VxV \longrightarrow K\ es\ una\ forma\ bilineal$ si $\forall u, v, w \in V\ y\ \forall$ a , b$\in K\ se\ verifica$:
- 1) *f(u+v,w)=f(u,w)+f(v,w)*
- *2) f(au,v)=af(u,v)*
- *3) f(u, v+w)=f(u,v)+f(u,w)*
- *4) f(u,bv))=bf(u,v)*

O equivalentemente:

- *f(au+bv,w)=af(u,w)+bf(v,w)*
- *f(u, av+bw)=af(u,v)+bf(u,w)*

- *f es por tanto lineal en sus dos componentes*
- *Es lineal en la 1ª cuando es fija la 2ª, y lineal en la 2ª cuando es fija la 1ª*

- El conjunto de todas las formas bilineales de V : $\mathfrak{L}$ **(V,K)**

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

❑Propiedades

- ❑ Si f: VxV $\longrightarrow$ K es una forma bilineal, se verifica:
- ❑ f(u,0)=f(0,v)=0 $\forall u, v \in V$
- ❑ f(-u,v)=f(u,-v)=-f(u,v) $\forall u, v \in V$
- ❑ $f(\sum_i a_i\, u_i, \sum_j b_j\, v_j) = \sum_{ij} a_i b_j\, f(u_i, v_j)\ \forall u, v \in V \quad \forall a_i, b_j \in K$

❖ **Ejemplo 2**

❖ $<,>: VxV \longrightarrow R\ el\ producto\ escalar, es\ una\ forma\ bilineal\ porque\ verifica$

- ❑ *<au+bv,w>=a<u,w>+b<v,w>*
- ❑ *<u, av+bw>=a<u,v>+b<u,w>*

Verifica además que 1) <u,v>=<v,u> $\forall u, v \in V$

2) <u,u> $\geq 0\ y < u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

Formas bilineales simétricas y antisimétricas

- Una **forma bilineal** f: VxV $\longrightarrow$ K es **simétrica** si verifica:

$$f(y,x)=f(x,y)\ \forall x,y \in V$$

- Una **forma bilineal** f: VxV $\longrightarrow$ K es **antisimétrica** si verifica:

$$f(y,x)=-f(x,y)\ \forall x,y \in V$$

Ejemplos

- $<,>: VxV \rightarrow R$ *el producto escalar, es una forma bilineal simétrica*
- f $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) =$
  $= x_1y_2 + x_2y_1$ es simétrica porque f $((y_1,y_2),(x_1,x_2)) = y_1 x_2 + y_2x_1$
- f $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) =$
  $= x_1y_2 - x_2y_1$ es antisimétrica porque f $(y_1,y_2),((x_1,x_2)) = y_1x_2 - y_2x_1$
- f $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1 y_1 - x_1 y_2$ no es simétrica ni antisimétrica

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

❑ Lema

f: VxV ⟶ K es una forma bilineal. Si K=R o K=C, se verifica que

f es antisimétrica ⟷ f(x,x)=0

- ❑ ⟹ Si f es antisimétrica f(x,x)=-f(x,x); entonces f(x,x)=0
- ❑ ⟸ Si f(x,x)=0 para todo x de V, f(x+y,x+y)=f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y) ⟹ f(x,y)+f(y,x)=0

❑ Proposición

f: VxV ⟶ K es una forma bilineal. V es un espacio vectorial de dimensión finita Y A es la matriz asociada a f respecto de una base cualquiera de V. Entonces

1) f es simétrica ⟷ A es una matriz simétrica
2) f es antisimétrica ⟷ A es antisimétrica

⟸ f(y,x) = $Y^t AX = (Y^t AX)^t = X^t A^t Y = X^t AY = f(x,y)$; ⟹ $si\ f\ es\ simétrica\ f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación

❑Proposición

- ❑ toda forma bilineal f: VxV $\longrightarrow$ K se puede descomponer como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica

  - ❑ $f_s=\frac{1}{2}(f(u,v)+f(v,u))$ $\qquad$ $f_a=\frac{1}{2}(f(u,v)-f(v,u))$

❖ **Ejemplo 3**

- ❖ $f(x,y)=x_1y_1-3x_1y_2+9x_2y_1+5x_2y_2$
- ❖ $f(y,x)=y_1x_1-3y_1x_2+9y_2x_1+5y_2x_2$

- ❖ $f_s=\frac{1}{2}\big(f(x,y)+f(y,x)\big)=\frac{1}{2}[2x_1y_1+6y_2x_1+6x_2\,y_1+10x_2y_2]$
- ❖ $f_a=\frac{1}{2}\big(f(x,y)-f(y,x)\big)=\frac{1}{2}[-12y_2x_1+12x_2\,y_1]$

Formas bilineales. Definición, propiedades y clasificación.

❑ Forma bilineal definida por una matriz cuadrada

Si A es una matriz cuadrada de orden n , $x = (x_1, \dots \dots x_n)$ y $y = (y_1, \dots \dots y_n) \in K^n$
La aplicación f: K^nx $K^n \longrightarrow$ K definida por:

$$f(x,y)= X^t A Y = (x_1, \dots \dots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ es una forma bilineal}$$

- **Ejemplo 4**
  - $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} define\ f(x,y) = X^t\ AY = (x_1\ \ , x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1$

❑ Matriz asociada a una forma bilineal

Si f es una forma bilineal de un $espacio\ vectorial\ V, dimV = n\ y\ B = \{v_1, \ldots \ldots v_n\}$ es una base de V; dados un par de vectores cualesquiera x,y∈ $V\ de\ coordenadas$ x= $(x_1, \ldots \ldots x_n)$ y= $(y_1, \ldots \ldots y_n)$ en la base B, entonces

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\, f(v_i, v_j)$$

Si $\boldsymbol{M_B(f)} = (f(v_i, v_j))$ entonces $M_B(f)$ es la **matriz de f en la base B**

$$f(x,y) = (x_1, \ldots \ldots x_n)\, M_B(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t M_B(f) Y$$

Es la **expresión analítica o ecuación de f en la base B**

Matriz asociada a una forma bilineal

❖ **Ejemplo 5 Matriz asociada a una aplicación bilineal en una base**

- f $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3$

$$A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Porque verifica f(x,y)= $(x_1, x_2, x_3)\, A_B(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

-  *Y si cambiamos de base?*
- $B' = (c_1, c_2, c_3)$ tales que $e_1 = 2c_1 + c_2; e_2 = c_1 - c_3; e_3 = c_1 + c_3$

X=PX´ ⟺ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Coordenadas de un vector en base B

Coordenadas de un vector en base B´

P=(|vectores de B´en función de B|)

Matriz asociada a una forma bilineal

¿Y cómo cambia la expresión de la forma bilineal?

f(x,y)= $(x_1, x_2 , x_3)\ A_B(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$=$X^t$AY   Expresión de f en la base B

- ❑ Como X=PX´ Y=PY´, en la base B´ tendremos

$$f(x,y)= (PX')^t A(PY')=X'^t \underbrace{P^t APY'}_{M}= X'^t MY'$$

Es la expresión de f en la base B´

- ❑ M=P^tAP es la matriz de la forma bilineal en la base B´.
- ❑ Dos matrices corresponden a una misma forma bilineal si y sólo si son congruentes

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

❑ Matrices congruentes

➢ Dos matrices A y B cuadradas de orden n son congruentes si existe una matriz P regular P_{nxn} $tal\ que$ $A = P^t$BP (P se denomina matriz de paso)

❑ Recuerda:

- Si dos matrices A y B son congruentes, entonces A y B son equivalentes
  Basta considerar M = P^t y N=P
- **Si dos matrices A y B son congruentes, entonces rang A = rang B**
- La congruencia de matrices es una relación de equivalencia en M_{nxn}
  - Propiedad reflexiva $A = I^t$AI P=I
  - Propiedad simétrica $A = P^t$BP $\longrightarrow$ B=$(P^{-1})^t AP^{-1}$
  - Propiedad transitiva $A = P^t$BP y $B = Q^t$CQ $\longrightarrow$ A= $P^t Q^t$CQP= $(QP)^t CQP$

Matriz asociada a una forma bilineal

❑Rango de una forma bilineal

Se llama rango de una forma bilineal f al rango de cualquier matriz asociada a f

❖ **Ejemplo 6 Rango de una aplicación bilineal**

❑ f $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1$

$$A_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \; donde \; B=\{(1,0), (0,1)\} \qquad rangA = 2 \Rightarrow rang\, f = 2$$

- Calculamos ahora la matriz asociada a f en otra base B´={(1,1), (1,-3)}

$$M_B = P^t A_B P \quad \text{donde } P = M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$rangM = 2 \Rightarrow rang\, f = 2$$

$$M_B = P^t A_B P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 9x_2y_1 + 5x_2y_2$$

Matriz asociada a una forma bilineal

¿Qué significado tienen los elementos de la matriz asociada?

$$f\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1$$

- Calculamos las imágenes de los vectores de la base B:
  - $f\left((1,0),(1,0)\right) = 2$ $\qquad$ $f\left((1,0),(0,1)\right) = 1$
  - $f\left((0,1),(1,0)\right) = -2$ $\qquad$ $f\left((0,1),(0,1)\right) = 0$

$$A_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \ \textit{donde} \ B=\{(1,0),(0,1)\}$$

- Calculamos las imágenes de los vectores de la base B´:
  - $f\left((1,1),(1,1)\right) = 1$ $\qquad$ $f\left((1,1),(1,-3)\right) = -3$
  - $f\left((1,-3),(1,1)\right) = 9$ $\qquad$ $f\left((1,-3),(1,-3)\right) = 5$

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \ \textit{donde} \ B, =\{(1,1),(1,-3)\}$$

Matriz asociada a una forma bilineal

- Si dim V =n, y f: VxV $\longrightarrow$K es una forma bilineal de rango menor que n se dice que f es una **forma degenerada**.
- Si rang f = n se trata de una forma no degenerada
- Una forma bilineal es degenerada $\Longleftrightarrow$ $|A|$=0 siendo A cualquier matriz asociada a la forma bilineal.

Núcleo de una forma bilineal

- Se llama núcleo de una forma bilineal y se denota N(f) al conjunto

$$N(f)=\{x\in V / f(x,y) = 0 \quad \forall y \in E\}$$

Es por tanto el conjunto de vectores conjugados con todos los vectores del espacio E

- N(f) se obtiene resolviendo el sistema AX=0 siendo A la matriz asociada a f
- N(f)={0} $\Longleftrightarrow$ f es no degenerada

❑ Formas cuadráticas

Si f :VxV $\longrightarrow$ K es una forma bilineal de un *espacio vectorial V*, *se llama* ***forma cuadrática*** *asociada a f* a la aplicación $\phi: V \longrightarrow K$ definida por $\phi(\mathrm{v}) = \mathrm{f}(\mathrm{v},\mathrm{v})$

❖ **Ejemplo 7**

❖ f $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_2$ *define la forma cuadrática*

$$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{f}\big((\mathrm{x},\mathrm{y}),(\mathrm{x},\mathrm{y})\big) = 2x^2 + xy - 2y^2$$

❖ g $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - 2x_2y_2$ *define la forma cuadrática*

$$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{f}\big((\mathrm{x},\mathrm{y}),(\mathrm{x},\mathrm{y})\big) = 2x^2 + xy - 2y^2$$

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **NO simétrica** $\quad M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$ **simétrica**

Formas cuadráticas

Observa:

- Dos formas bilineales pueden dar lugar a una misma forma cuadrática
- Entre todas las formas bilineales que dan lugar a una misma forma cuadrática, sólo una de ellas es simétrica

Caracterización de una forma cuadrática

Una aplicación $\phi: V \to K$ es una forma cuadrática si y sólo si verifica

1) $\phi(\lambda v)=\lambda^2\phi(v) \quad \forall v \in V$

2) La aplicación f_ϕ: VxV $\to$ K definida por $f_\phi(u,v)=\frac{1}{2}[\phi(u+v)-\phi(u)-\phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica que se denomina **forma polar de ϕ**.

Formas cuadráticas

Demostración

⟹)Si mes una forma cuadrática asociada a una forma bilineal f. Se verifica:

- ϕ (λv) =f(λv, λv)=λ^{2}f(v,v)=λ$^2\phi$ (v)
- f_ϕ(u,v))= $\frac{1}{2}[\phi(u$ +v)- $\phi(u)$- ϕ(v)]= $\frac{1}{2}[f(u$ +v, u+v)- $f(u$,u)- f(v,v)]= $\frac{1}{2}[f(u$, u)+ $f(u$, v)+ $f(v$, u)+ $f(v$, v)- $f(u$,u)- f(v,v)]= $\frac{1}{2}[f(u$, v)+ $f(v$, u)] (es la parte simétrica de la descomposición)

⟸) Si ϕ: V $\to$ K verifica las condiciones:

f_ϕ(u,u))= $\frac{1}{2}[\phi(u+$ u)- $\phi(u)$- ϕ(u)]= $\frac{1}{2}[4\phi(u)$- $2\phi(u)]=\phi(u)$ ⟹ ϕ es la forma cuadrática de f

Formas cuadráticas

❖ Ejemplo 8 Distintas formas bilineales de una forma cuadrática

- f $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_1y_3 - x_2y_2 + 3x_3y_3$

$$A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como f no es simétrica, no es la forma polar de ϕ;

1ª forma: La forma polar vendrá dada por la parte simétrica de f

$$M_B(\phi) = \frac{A + A^t}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es simétrica, por tanto es la forma polar

¿Cómo se construye?

- *los coeficientes de x_i^2 se colocan en la diagonal principal y el resto se reparten en la mitad de cada una de las posiciones ij + ji*

Formas cuadráticas

Recuerda:

Toda forma bilineal determina una forma cuadrática

pero…

Una forma cuadrática puede quedar determinada por varias formas bilineales

Dada una forma cuadrática ϕ la forma polar f_ϕ es la ***única*** forma bilineal y simétrica tal que f_ϕ (u,u)= ϕ(u)

Formas cuadráticas

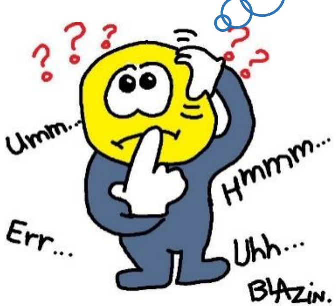
❑ Matriz asociada a una forma cuadrática

Si f es una forma bilineal de un $espacio\ vectorial\ V$, $B = \{v_1, \dots \dots v_n\}$ es una base de V y ϕ es una forma cuadrática de V determinada por f

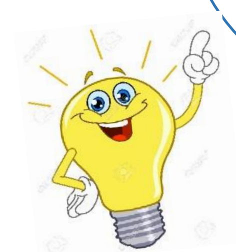
Para cualquier vector $x = (x_1, \dots \dots x_n)$ en la base B, su imagen

$$\phi\ (x)= f(x,x)=X^t AX$$

¿Y sirve la matriz asociada a cualquiera de las formas bilineales que generan la ϕ?



La matriz de la forma cuadrática es la matriz de la forma polar



Formas cuadráticas

❖ Ejemplo 9 Forma polar de una forma cuadrática

- ❖ $q(x_1, x_2\ x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 5x_1x_3 - 4x_2x_3$

- ❖ 1ª forma: Aplicar directamente la fórmula
- ❖ $f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y)\text{-}\ q(x)\text{-}\ q(y)] = \frac{1}{2}[\ (x_1+y_1)^2 + 7(x_2+y_2)^2) + \ldots\ \text{-}4(x_2+y_2)(x_3+y_3)$
  $\text{-}x_1^2\text{-}7x_2^2 + \ldots + 4x_2x_3\ \text{-}y_1^2\text{-}7y_2^2 + \ldots + 4y_2y_3]$
- ❖ 2ª forma: La forma polar viene dada por la parte simétrica de f:

$$M_B(\phi) = \frac{A + A^t}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5/2 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La forma polar de q es f(x,y)= $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5/2 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$=

$$x_1y_1 + 7x_2y_2 - x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + \frac{5}{2}x_1y_3 + \frac{5}{2}y_1\ x_3 - 2x_2y_3\ \text{-}2x_3y_2$$

Matriz de una forma cuadrática

- $\phi: V \longrightarrow K$ en una base B de V y la matriz de su forma polar en dicha base: $M_B(\phi)$
- Expresión analítica de ϕ: $\phi(x)=X^t M_B(\phi)X$

¿Cuál es la matriz asociada a q en el ejemplo 9?

- $q(x_1, x_2\ x_3)= x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + 5x_1x_3 - 4x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5/2 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5/2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La forma polar de q

Conjugación respecto de una forma cuadrática

- Dada una forma bilineal f: VxV $\longrightarrow$ K **simétrica**
- u, v $\in V$ $son\ \boldsymbol{vectores\ conjugados}\ respecto\ a\ f\ si\ f(u,v)=0$
- Un **vector** v $\in V\ (\neq 0)\ es\ \boldsymbol{autoconjugado}$ si f(v,v)=0 (si es conjugado de sí mismo)
- **Núcleo de f** es el conjunto de vectores que son conjugados de todos los vectores de V

  ker f= N(f)={u $\in V$/f(u,v)=0 $\forall v \in V\}$

- Si ker f $\neq \{0\}\ f\ es\ una\ \boldsymbol{forma\ bilineal\ degenerada}$

- Dada una forma bilineal ϕ : V $\longrightarrow$ K simétrica y f_ϕ es su forma polar
- u, v $\in V$ $son\ \boldsymbol{vectores\ conjugados}\ respecto\ a\ \phi\ si\ lo\ son\ respecto\ a\ f_\phi$
- Un **vector** v $\in V\ (\neq 0)\ es\ \boldsymbol{autoconjugado}\ respecto\ a\ \phi\ si\ lo\ es\ respecto\ a\ f_\phi$
- **Núcleo de** ϕ es el núcleo de f_ϕ
- $\phi\ es\ una\ \boldsymbol{forma\ cuadrática\ degenerada}$ $\Longleftrightarrow$ f_ϕ **es degenerada**

Conjugación respecto de una forma cuadrática

- Dada una forma bilineal f: VxV $\longrightarrow$ K simétrica; B es una base de V
- El núcleo de f es un subespacio vectorial de V
- Las ecuaciones implícitas de ker f en la base B se obtienen resolviendo la ecuación matricial

  $M_B(f)X=0$ (porque x $= (x_1, x_2 \ldots x_n) \in ker f \; si \; f(v,x) = 0 \; \forall v \in V$

- f es degenerada $\Longleftrightarrow$ ker f $\neq \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ $rang \; M_B(f)<n$

- Dada una forma bilineal f: VxV $\longrightarrow$ K simétrica, el conjunto formado por los vectores conjugados de todos los vectores de un S subconjunto no vacío de V se denomina **conjugado del subconjunto S**.

$$S^c = \{u \in V \; t.q. f(u,v) = 0 \quad \forall v \in S\}$$

Conjugación respecto de una forma cuadrática

Proposición

f: VxV $\longrightarrow$ K es una forma bilineal simétrica y S$\neq \emptyset$ $subconjunto\ de\ V$. Entonces

1) S^c=$[L(S)]^c$
2) Si S es subespacio vectorial de V: S^c es subespacio vectorial de V
3) Si S =L<v_1, v_2,... v_k>: x∈ S^c $\Longleftrightarrow$ $f(x, v_1)$=0; ... $f(x, v_k)$=0

Se verifica:

1) dim S^c+dim S$\geq n$
2) Si f es no degenerada dim S^c+dim S$= n$

Conjugación respecto de una forma cuadrática

❖ Ejemplo 10 Conjugado de un subespacio

- **Consideramos dos formas bilineales cuyas matrices en una base B =**$\{v_1, v_2, v_3\}$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - ¿Cuál será el subespacio conjugado de un plano $\pi \equiv x_1 - x_2 + x_3 = 0$ respecto a f y respecto a g?
  - Basta encontrar un conjunto de vectores conjugados de los vectores de una base de π
  - $= \{(x_1, x_1 + x_3, x_3)/x_1, x_3 \in R\}$ $\longrightarrow$ Base de π: {(1,1,0); (0,1,1)}
  - **Conjugado de π respecto a f:**

$$\pi^C(\mathrm{f}) = \{(x_1, x_2, x_3)/(1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ y } (0,1,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

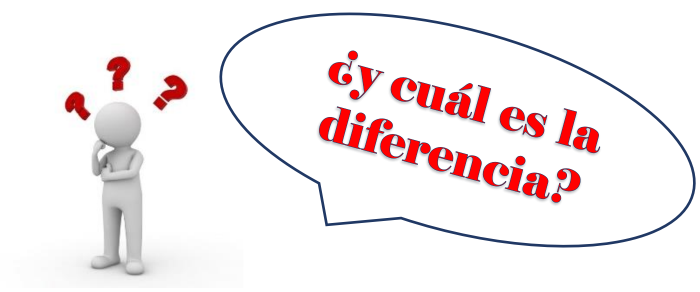
$$\pi^C(\mathrm{f}) = \{(x_1, x_2, x_3)/\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\} \longrightarrow \text{Es un plano}$$

  - Entonces ***$dim\ \pi + dim\ \pi^C(f) = 2 + 2 = 4 > dimV\ (=3)$***

Conjugación respecto de una forma cuadrática

- **Conjugado de π respecto a g:** $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- π^C(g)={$(x_1, x_2, x_3)/(1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$=0 y $(0,1,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$=0}

  π^C(f)={$(x_1, x_2, x_3)/x_2 - x_3 = 0; -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$} $\Rightarrow$ Es una recta
- Entonces ***dim π + dim π^C(g)= 2 + 1 = 3 = dimV (=3)***



Rang f = rang$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$=2 f degenerada

Rang g = rang$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=3 g no degenerada

Conjugación respecto de una forma cuadrática

Recuerda:

Una forma cuadrática ϕ es degenerada cuando $\ker \phi \neq \{\emptyset\}$

$\Updownarrow$

Cuando hay algún vector que es conjugado de todos los vectores del espacio

$\Updownarrow$

Cuando rang ϕ <n

Diagonalización por congruencia

❑ Teorema

- ❑ Si f es una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial V de dimensión finita n, existe una base de vectores conjugados respecto a f.
- ❑ Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal

En una base B

En una base B´de vectores conjugados

B´=$\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$

A= $M_B(f)$

simétrica

D=$P^t AP$

D= $M_{B'}(f)$ = $\begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & & & 0 \\ & f(v_2,v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{P=}M_{B'B} = (|\text{vectores de B´en función de B}|)}$

Diagonalización por congruencia

❖ Ejemplo 11 Base de vectores conjugados para una forma bilineal simétrica

- **B ={**u_1, u_2 , u_3 } $\quad M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- **Vamos a construir una base B´={v_1, v_2 , v_3} de vectores conjugados de modo que $M_{B'}(f)$ =D**
- Elegimos un vector v_1 tal que f(v_1, v_1)$\neq$ 0 $\quad p.ej. \quad v_1 = u_1$ ⟶ f(v_1, v_1) =1
- Construimos una base del subespacio conjugado $L < v_1 >^c$ ={(x,y,z)/(1,0,0) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=0}

  ={(x,y,z)/x+y+z=0}

  Elegimos v_2= (0,1,-1) $\quad$ f(v_2, v_2) =6
- Construimos una base del subespacio conjugado $L < v_1, v_2 >^c$=$L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$
- $L < v_2 >^c$ ={(x,y,z)/(0,1,-1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$={(x,y,z)/2y-z=0}
- $L < v_1, v_2 >^c$=$L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$={(x,y,z)/x+y+z=0; 2y-z=0}

  Elegimos v_3= (-3,1,2) $\quad$ f(v_3, v_3) =3
- Por tanto en la base **B´ ={**$v_1 = (1,0,0), v_2$ =(0,1,-1), $v_3 = (-3,1,2)$} $\quad M_{B'}(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonalización por congruencia

- $La\ matriz\ de\ paso\ M_{B'B} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{array}$$

- *Las matrices A y D son congruentes*
- D=$P^t AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

¿Y cuál es la expresión de la forma cuadrática en B y en B´?

ϕ(x,y,z)=$X^t\ M_B(f)X = x^2$+2xy+4y^2+2xz+2z^2

ϕ(x,y,z)=$X^t\ M_{B'}(f)X = x^2$+6y^2+3z^2

Diagonalización por congruencia

- Si la matriz de una forma cuadrática es diagonal

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & & \dots & 0 \\ & d_2 & \dots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Entonces su expresión analítica es una suma de cuadrados

$$\phi(x_1, x_2, \dots x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots d_n x_n^2$$

Proposición

Toda forma bilineal simétrica f: VxV $\longrightarrow$ K es congruente con una matriz diagonal cuyos elementos d_i son $1, -1$ ó 0

- Si K=R: consideramos los vectores $w_i = \frac{v_i}{\sqrt{f(v_i, v_i)}}$ si $f(v_i, v_i)>0$ ó $w_i = \frac{v_i}{\sqrt{-f(v_i, v_i)}}$ si $f(v_i, v_i)<0$
- Si K=C: consideramos los vectores $w_i = \frac{v_i}{\sqrt{f(v_i, v_i)}}$

Diagonalización por congruencia

Ejemplo 11 Normalizamos la base B´

B´ ={$v_1 = (1,0,0)$, v_2 =(0,1,-1), $v_3 = (-3,1,2)\}$ $\quad M_{B'}(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- B´´={$\frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{\sqrt{6}}, \frac{v_3}{\sqrt{3}}$} ={(1,0,0); (0, $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}$); ($\frac{-3}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$)
- Comprueba que f(w_2, w_2)=$\frac{1}{(\sqrt{6})^2}$f(v_2, v_2)=1 (Igual para el resto)

Conclusión

Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal

Diagonalización por congruencia

- **Diagonalización por transformaciones elementales**
- Dada A simétrica, existen P regular y D diagonal tal que D=$P^t AP$
- **¿Cómo podemos calcular P y D?**
- Aplicamos $f_1,\ldots f_k$ $\boldsymbol{operaciones\ por\ filas\ para\ obtener\ una\ matriz\ triangular}$
- Aplicamos las mismas operaciones por columnas para obtener una matriz diagonal

$$D = \boldsymbol{E_k \ldots E_1 A E_1^t \ldots E_k^t = E_k \ldots E_1 A (E_k \ldots E_1)^t}$$

Llamamos $P^t = \boldsymbol{E_k \ldots E_1}$

Recuerda:

- El producto de matrices elementales $\boldsymbol{E_k \ldots E_1}$ es la matriz que resulta de aplicar las operaciones por filas a la matriz $\boldsymbol{I_n}$

$$(A_B(f)|\boldsymbol{I_n}) \longrightarrow (D|\ P^t)$$

- P es la matriz de cambio de base $M_{B'B}$ $\quad las\ columnas\ de\ P\ (las\ filas\ de\ P^t)$ son las coordenadas en B de una base de vectores conjugados respecto de f

❑Transformación de matrices

❑ Operaciones elementales

En una matriz se definen las siguientes operaciones elementales por filas (o por columnas) a:

- La permutación de las filas i y j (intercambio de dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$)
- El producto de la fila i por una constante no nula : k F_i
- La suma de la fila i más la fila j multiplicada por k$\neq$ 0: $F_i + \text{k } F_j$

❑Matriz elemental

Es una matriz cuadrada que se obtiene de la matriz unidad al efectuar una sola operación elemental en sus filas (o columnas)

❖ **Ejemplo 2**

- la matriz I_3 se transforma en la matriz E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con la operación $F_3 = F_1 + F_2 + F_3$

Diagonalización por congruencia

❖ Ejemplo 12 Diagonalización por el método de transformaciones elementales

- $M_B(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&4&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&3&-1&-1&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{C_2-C_1\\C_3-C_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&-1&-1&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{F_3+\frac{1}{3}F_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&-1&-1&1&0\\0&0&2/3&-4/3&1/3&1\end{array}\right)\underset{C_3+\frac{1}{3}C_2}{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&0&-1&1&0\\0&0&2/3&-4/3&1/3&1\end{array}\right)$$

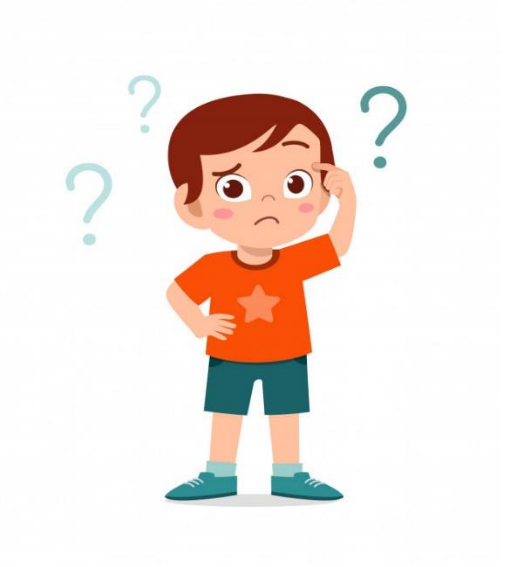
D $\qquad P^t$

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

La matriz diagonal asociada a una forma cuadrática no es única

pero...

¿existe alguna relación entre las distintas matrices diagonales que podemos obtener?



Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

Ley de inercia de Sylvester

- Todas las matrices diagonales asociadas a una misma forma cuadrática real tienen el mismo número de elementos positivos (p), negativos (q) y nulos (n)
- Se llama **signatura** de una forma cuadrática (o de la forma bilineal simétrica asociada) al par (p,q). sg(ϕ)= (p,q)
- O bien se llama signatura a la diferencia p-q e **índice** al número de elementos positivos
- En la práctica: como rang f es el rango de cualquier matriz asociada a f, calculamos el rango a partir de la matriz diagonal: **rang f = p+q** (número de elementos no nulos de la diagonal).

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

- Una forma bilineal simétrica f es
  - **Definida positiva** si f(v,v)>0 $\forall v \neq 0 \; v \in V$
  - **Semidefinida positiva** si f(v,v)≥0 $\forall v \in V \; y \; f(v,v) = 0 \; para \; algún \;\; v \neq 0$
  - **Definida negativa** si f(v,v)<0 $\forall v \neq 0 \; v \in V$
  - **Semidefinida negativa** si f(v,v)≤0 $\forall v \in V \; y \; f(v,v) = 0 \; para \; algún \;\; v \neq 0$
  - **Indefinida** en cualquier otro caso

Ejemplos

- $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ *es definida positiva (d.p.): para cada vector no nulo* $x^2 + y^2$>0
- $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ *es indefinida: podemos encontrar* $\phi(1{,}0)$*>0;* $\phi(0{,}1)$*<0;*
- ¿Y $= x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$? ¿ *es definida positiva?*

¡NO! Es semidefinida positiva (sdp) porque $\phi(1, -1)$=0

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

❑Criterio práctico

Una forma bilineal simétrica f en un espacio vectorial de dimensión n es

- ❑ **Definida positiva** ⟺ $sg(f)=(n,0)$
- ❑ **Semidefinida positiva** ⟺ $sg(f)=(p,0)$ $p<n$
- ❑ **Definida negativa** ⟺ $sg(f)=(0,n)$
- ❑ **Semidefinida negativa** ⟺ $sg(f)=(0,q)$ $q<n$
- ❑ **Indefinida** ⟺ $sg(f)=(p,q)$ $p>0$ $q>0$
- ❑ No degenerada ⟺ $sg(f)=(p,q)$ con $p+q=n$

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

Como toda matriz simétrica real es congruente con una matriz diagonal cuyos elementos d_i son $1, -1$ ó 0

- ✓ Si ϕ es definida positiva A es congruente a la matriz identidad

y

- ✓ Si ϕ es definida negativa A es congruente a menos la matriz identidad

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

❑Criterio de Sylvester

Si A es la matriz de una forma bilineal simétrica f en un espacio vectorial de dimensión n y Δ_k k=1,2…n son los menores principales de la matriz A. Entonces,

- ❑ f es definida positiva $\Longleftrightarrow$ Δ_k=det A_k >0 para todo k=1,2…n
- ❑ f es definida negativa $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k$ Δ_k >0 para todo k=1,2…n
- ❑ En un espacio vectorial de dim 3 si Δ_1>0, Δ_2>0 y Δ_3=0 es semidefinida positiva

❖ **Ejemplo 13 Signo de una forma cuadrática real**

- $M_B(f)=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ b & b^2+1 & b+1 & b+1 \\ 1 & b+1 & 3 & 3 \\ 1 & b+1 & 3 & 5-a \end{pmatrix}$ Δ_4=detA=2-a; Δ_3=det$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=1>0

det$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=1>0 Δ_1=1 Es def. positiva si 2-a>0

Clasificación de formas cuadráticas reales. Teorema de inercia de Sylvester

❑ Criterio basado en análisis de elementos diagonales

- ❑ Como toda matriz simétrica real es congruente con una matriz diagonal de elementos d_i $\mathrm{i} = 1,2 \dots \mathrm{n}$. La matriz A es
  - ❑ **Definida positiva** $\Leftrightarrow$ $d_i > 0$ $\mathrm{i} = 1, \dots \mathrm{n}$
  - ❑ **Semidefinida positiva** $\Leftrightarrow$ $d_i \geq 0$ $\mathrm{i} = 1, \dots \mathrm{n}$ con d_i=0 para algún i
  - ❑ **Definida negativa** $\Leftrightarrow$ $d_i < 0$ $\mathrm{i} = 1, \dots \mathrm{n}$
  - ❑ **Semidefinida negativa** $\Leftrightarrow$ $d_i \leq 0$ $\mathrm{i} = 1, \dots \mathrm{n}$ con d_i=0 para algún i
  - ❑ **Indefinida** $\Leftrightarrow$ en cualquier otro caso
  - ❑ No degenerada $\Leftrightarrow$ sg(f)=(p,q) con p+q=n

Determinación práctica del carácter de una forma cuadrática

- 1) Diagonalizar la forma cuadrática ϕ(x) =$a_{11}x_1^2$+ $a_{22}x_2^2$+ … $a_{nn}x_n^2$
  - Si a_{ii}>0 i=1,2…n es definida positiva
  - Si a_{ii}<0 i=1,2…n es definida negativa
  - Si a_{ii} ≥0 i=1,2…n con algún $a_{ii}= 0$ es semidefinida positiva
  - Si a_{ii} ≤0 i=1,2…n con algún $a_{ii}= 0$ es semidefinida negativa
  - Si hay a_{ii}positivos y negativos, la forma es indefinida
  - La forma es no degenerada si $a_{ii} \neq 0\ i = 1,2 \dots n$

- 2) Estudiar el signo de los menores principales Δ_k
  - Si Δ_k>0 k=1,2…n la forma es definida positiva
  - Si $los\ menores\ de\ orden\ impar\ son\ negativos\ y\ los\ de\ orden\ par\ son\ positivos,$ entonces la forma cuadrática es definida negativa
  - En un espacio vectorial de dim 3 si Δ_1>0, Δ_2>0 y Δ_3=0 es semidefinida positiva

Determinación práctica del carácter de una forma cuadrática

- 3) Analizar el signo de los autovalores de cualquier matriz asociada a ϕ
  - Si λ_i>0 i=1,2…n es definida positiva
  - Si λ_i<0 i=1,2…n es definida negativa
  - Si λ_i≥0 i=1,2…n con algún $a_{ii}=0$ es semidefinida positiva
  - Si λ_i≤0 i=1,2…n con algún $a_{ii}=0$ es semidefinida negativa
  - Si hay λ_i positivos y negativos, la forma es indefinida
  - La forma es no degenerada si $\lambda_i \neq 0 \; i = 1,2 \ldots n$

- 4) Analizar el rango y la signatura
  - **Definida positiva** ⟺ sg(f)=(n,0)
  - **Semidefinida positiva** ⟺ sg(f)=(p,0) p<n
  - **Definida negativa** ⟺ sg(f)=(0,n)
  - **Semidefinida negativa** ⟺ sg(f)=(0,q) q<n
  - **Indefinida** ⟺ sg(f)=(p,q) p>0 q>0
  - No degenerada ⟺ sg(f)=(p,q) con p+q=n

Desigualdad de Schwarz

❑ Desigualdad de Schwarz

Si ϕ es una forma cuadrática definida positiva y f es su forma polar asociada, entonces se verifica

$$f(u,v)^{2} \leq \phi(\mathrm{u})\, \phi(\mathrm{v})$$

❖ **Ejemplo 14 Comprobar la desigualdad de Schwarz**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $q(x_1, x_2\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3$

$\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} < 0$ $\longrightarrow$ q es indefinida

Entonces $\exists u \neq 0\ t.q.\ q(u) > 0$ y $\exists v \neq 0\ t.q.\ q(v) < 0$ $\longrightarrow$ q(u).q(v)<0

En cambio $f(u,v)^{2} \geq 0$ *luego la desigualdad de Schwarz no se cumple*

Formas sesquilineales

- Dados V, W *espacios vectoriales complejos una aplicación* $f: V \quad W$ *es una* $\boldsymbol{forma\ semilineal}$ si $\forall u, v \in V$ *y* $\forall a \in K$ *se verifica*:

  1) $f(u+v)=f(u)+f(v)$ 2) $f(au)= \bar{a}\, f(u)$

Forma sesquilineal

- Dado V *espacio vectorial complejo, una aplicación* $f: VxV \quad C$ *es una* $\boldsymbol{forma\ sesquilineal}$ si es lineal en la primera componente y semilineal en la segunda

Es decir, si $\forall u, v, w \in V$ *y* $\forall a \in C$ *se verifica*:

- 1) $f(u+v,w)=f(u,w)+f(v,w)$
- 2) $f(au,v)=af(u,v)$
- 3) $f(u, v+w)=f(u,v)+f(u,w)$
- 4) $f(u,bv))=\bar{b}f(u,v)$ donde $\bar{b}$ es el conjugado de b

Matriz asociada a una forma sesquilineal

Si f es una forma bilineal de un $espacio\ vectorial\ V, dimV = n\ y\ B = \{v_1, \dots \dots v_n\}$ es una base de V; dados un par de vectores cualesquiera x,y∈ $V\ de\ coordenadas$ x= $(x_1, \dots \dots x_n)$ y= $(y_1, \dots \dots y_n)$ en la base B, entonces

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\, \overline{y_j}\, f(v_i, v_j)$$

Si $\boldsymbol{M_B(f)} = (f(v_i, v_j))$ entonces $M_B(f)$ es la **matriz de f en la base B**

$$f(x,y) = (x_1, \dots \dots x_n)\, M_B(f) \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = X^t M_B(f) \overline{Y}$$

Es la **expresión analítica o ecuación de f en la base B**

Formas sesquilineales

f(x,y)= $(x_1, x_2\, , x_3\,)\, A_B(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$=$X^tA\overline{Y}$ Expresión de f en la base B

- Como X=PX´ Y=PY´, en la base B´ tendremos

f(x,y)= (PX´)^{t}A($\overline{PY´}$)=$X^{´t} P^t$A$\overline{P}\overline{Y}´$=

M=P^tA$\overline{P}$

- Una **forma** sesquilineal es una forma **hermítica** si

f(v,u)=$\overline{f\,(u,v)}$ para todo u,v

f es hermítica $\Longleftrightarrow$ toda matriz de f es hermítica (si $\bar{A}^t$=A)