CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

El espacio vectorial euclídeo

Problemas Resueltos

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

- **Problema 1**

Consideramos en R^3 el siguiente producto escalar

(x,y,z) o (x´,y´,z´)=xx´+2yy´+2zz´+xz´+zx´+yz´+zy´

a) Calcular la matriz de este producto escalar en la base canónica
b) Calcular el módulo del vector (1,1,1) y el ángulo que forman los vectores (1,0,1) y (0,1,0)
c) Calcular el subespacio ortogonal de S=L<(1,0,0), (0,1,0)>

- La matriz de Gram es G= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- Norma de un vector
- $\|(1,1,1)\| = \sqrt{<(1,1,1),(1,1,1)>} = \sqrt{(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}(1,1,1)} = 3$

- $\acute{A}ngulo\ entre\ dos\ v\ ectores$: $cos\ \alpha = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|}$
- Calculamos el producto escalar $<(1,0,1),(0,1,0)> = (1,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}(0,1,0) = 1$
- $\|(1,0,1)\| = \sqrt{<(1,0,1),(1,0,1)>} = \sqrt{(1,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}(1,0,1)} = \sqrt{5}$
- $\|(0,1,0)\| = \sqrt{<(0,1,0),(0,1,0)>} = \sqrt{(0,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}(0,1,0)} = \sqrt{2}$
- Entonces $cos\ \alpha = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

- Dado S=L<(1,0,0), (0,1,0)> vamos a calcular el subespacio ortogonal $S^{\perp}$

- Un vector (x,y,z) ∈ $S^{\perp}$ si es ortogonal a los vectores de la base de S

- Un vector (x,y,z) ∈ $S^{\perp}$ si es ortogonal a los vectores de la base de S
- Es decir (x,y,z) ∈ $S^{\perp}$ $\Longleftrightarrow$ $(1,0,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow$ x+z=0

  y $(0,1,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow$ 2y+z=0

$S^{\perp}$={(x,y,z)∈ R^3 / x+z=0; 2y+z=0}=L<(-2,-1,2)>

- **Problema 2**

  - Consideramos $R_2[x]$ *espacio vectorial de los polinomios* de coeficientes reales y grado ≤ 2 *y* B_c *su base canónica*

  Dados los subespacios S={p(x)∈ $R_2[x]$/1 es raíz de p(x)} y

  T={p(x))∈ $R_2[x]$/p(x) no tiene término independiente}.

a) Calcular una base de $S \cap T$ *y otra de* $S + T$

- Si p(x) ∈ $S \cap T$: p(x) = a+bx+cx^2 t.q. a=0 y p(1)=b+c=0 p(x)=bx-bx^2

  luego $S \cap T$ =L<x-x^2> Base: (0,1,-1)

Como $\dim(S \cap T) + \dim(S+T) = \dim S + \dim T$ (*fórmula de Grassmann*)

1 3 2 2 Entonces $S + T$=$R_2[x]$ Base:{1,x, x^2}

b) Hallar en la base B_c unas ecuaciones implícitas del subespacio suplementario de $S \cap T$

- =L<x-x^2> Base: (0,1,-1)
- Es una recta que pasa por el origen y tiene vector director (0,1,-1)
- El subespacio $(S \cap T)^{\perp}$ ortogonal a la recta es un plano que pasa por el origen y tiene (0,1,-1) como vector normal $\longrightarrow$ 0x+y-z=0 $\longrightarrow$ y-z=0
- Basta por tanto con encontrar dos vectores que generan dicho plano: (1,0,0); (0,1,1)
- Estos dos vectores son efectivamente ortogonales al vector director de la recta
- ¿Quiénes son estos vectores? Son los polinomios 1 y x+x^2
- Entonces $(S \cap T)^{\perp} = L <1$; x+x^2 $>$
- Ecuaciones implícitas; {a+bx+cx^2 t.q. b=c}

- **Problema 3**

En R^4 con el producto escalar usual, obtener el subespacio ortogonal suplementario de W={(x,y,z,t)/ x+y-z+t=0; 2x+y-z+3t=0}

- W={(x,y,z,t)/ x+y-z+t=0; 2x+y-z+3t=0}={(2z-2y,y,z,y-z)/ y,z ∈ R}

- $W^{\perp}$={v∈ R^4 t.q <v,w>=0 ∀w∈ W}
- $Equivalentemente\ basta\ encontrar\ qué\ vectores\ de\ R^4\ anulan\ con\ ese\ producto$ escalar a los vectores de una base de W
- Con el producto escalar usual:

  (x,y,z,t).(1,1,-1,1)=0 y (x,y,z,t).(2,1,-1,3)=0

Por tanto estos dos vectores son ortogonales a W y son linealmente independientes en un espacio de dimensión 2 ($W^{\perp}$): entonces son base de $W^{\perp} \Longleftrightarrow W^{\perp}$=L<(1,1,-1,1) ,(2,1,-1,3)>

- **Problema 4** $\boxed{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \Longleftrightarrow < u, v >=0 \text{ Teorema de Pitágoras}}$

- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2<u,v> = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \Longleftrightarrow <u,v> = 0$

- **Problema 5** $\boxed{\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{2}(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2) \text{Ley del paralelogramo}}$

- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2<u,v> + \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2<u,v> = \boldsymbol{2}(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$

- **Problema 6** $\boxed{\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| \Longleftrightarrow u+v \ y \ u-v \ son \ ortogonales.}$

- $u+v \ y \ u-v \ son \ ortogonales \Longleftrightarrow < u+v, u-v >= 0$

- $< u+v, u-v > =< u,u > - < u,v > + < v,u > \ - < v,v > = \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 0$

- **Problema 7**

Si (R^3, <,>) es un espacio euclídeo con

$$< \mathrm{x,y} >= x_1y_1 + 2x_2y_2+3x_3y_3$$

Determinar una base de $F^\perp$ siendo F el subespacio de R^3 de ecuación implícita $x_1+x_2 + 2x_3=0$

- F={x=(x_1, x_2, x_3)/ $x_1+x_2 + 2x_3$=0}={$-x_2 - 2\,x_3, x_2, x_3$)/ y,z ∈ R}
- Base de F: {(-1,1,0); (-2,0,1)}

- $F^\perp$={v∈ R^3 t.q <v,x>=0 ∀x∈ F}
- *Equivalentemente basta encontrar qué vectores de* R^3 *anulan con ese producto* escalar a los vectores de una base de F
- Con el producto escalar dado:

<(x_1, x_2, x_3),(-1,1,0)>=0 $\quad -x_1 + 2x_2=0$ y

< (x_1, x_2, x_3),(-2,0,1)>=0 $\quad -2x_1 + 3x_3=0$

Por tanto, $F^\perp$ ={(x_1, x_2, x_3)/ $-x_1 + 2x_2$=0 ; $-2x_1 + 3x_3$=0 }=L<(6,3,4)>

- **Problema 8**

En (R^4, <,>) donde <> es el producto escalar usual
a) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a (1,2,1,0) (0,-1,1,0) y (1,1,-2,1)
b) Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para V=L<(1,2,-1,0), (0,1,1,0) y (1,0,-2,1)>

- Imponemos la ortogonalidad
  - (x,y,z,t).(1,2,1,0)=0 $\Longleftrightarrow$ x+2y+z=0
  - (x,y,z,t).(0,-1,1,0)=0 $\Longleftrightarrow$ -y+z=0
  - (x,y,z,t).(1,1,-2,1)=0 $\Longleftrightarrow$ x+y-2z+t=0

- Obtenemos un vector (-3z,z,z,4z); tomamos por ejemplo v= (-3,1,1,4)
- Obtenemos un vector unitario en esa dirección
  - $\|v\|^2 = <(-3,1,1,4),(-3,1,1,4)> = 27$
  - $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{27}}}$ (-3,1,1,4)

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Método de Gram-Schmidt

b) Ortonormalización por el método de Gram-Schmidt

- *ortonormalizamos la base* $B=\{v_1=(1,2,-1,0);\ v_2=(1,0,-2,1),\ v_3=(0,1,1,0)\}$

- *Expresión del producto escalar usual* $<\mathrm{x},\mathrm{y}>= x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$
  - 1) *Llamamos* $u_1=v_1=(1,2,-1,0)$
    - $\|u_1\|^2=<(1,2,-1,0),(1,2,-1,0)>=6$ *por tanto* $\longrightarrow$ $\boldsymbol{e_1}=\frac{\boldsymbol{u_1}}{\|\boldsymbol{u_1}\|}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\boldsymbol{(1,2,-1,0)}$
  - 2) $u_2=v_2-a\,u_1=(1,0,-2,1)-a(1,2,-1,0)=(1-a,-2a,-2+a,1)$ *Exigimos la ortogonalidad*

    $<u_2,u_1>=<(1-a,-2a,-2+a,1)(1,2,-1,0)>=0$

    $1-a-4a+2-a=\mathbf{0}$ $\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $\quad u_2=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(1,-2,-3,2)$

    $\|u_2\|^2=<u_2,u_2>=<\frac{1}{2}(1,-2,-3,2),\frac{1}{2}(1,-2,-3,2)>=18/4$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{e_2}=\frac{\boldsymbol{u_2}}{\|\boldsymbol{u_2}\|}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{18}}}(1,-2,-3,2)$

Para terminar…

- $u_3=v_3-a\,u_1-b\,u_2=(0,1,1,0)-a(1,2,-1,0)-b\frac{1}{2}(1,-2,-3,2)$

  $<v_3-a\,u_1-b\,u_2,u_1>=0$ $\quad a=1/6 \quad b=-5/9 \quad u_3=(\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{1}{3},\frac{5}{9})$

  $<v_3-a\,u_1-b\,u_2,u_2>=0$

- **Problema 9**

Calcular la proyección ortogonal del vector (1,2,1) sobre el subespacio S= L{(0,1,2); (1,2,3)}
Utilizar el producto escalar habitual

- **1ª forma: u=s+w donde s∈ S y $w = u - s$ ⊥s (Es decir w∈ $S^{\perp}$)**

- Descomposición del vector: $(1,2,1)=\underbrace{\alpha(0,1,2)+\beta(1,2,3)}_{\in S}+\underbrace{w}_{\perp s}$

- Si hacemos el producto escalar por cada uno de los vectores de la base:
  - $(1,2,1).(0,1,2)=[\alpha(0,1,2)+\beta(1,2,3)+w].(0,1,2)=\alpha(0,1,2)(0,1,2)+\beta(1,2,3)(0,1,2)$
  - $(1,2,1).(1,2,3)=[\alpha(0,1,2)+\beta(1,2,3)+w].(1,2,3)=\alpha(0,1,2)(1,2,3)+\beta(1,2,3)(1,2,3)$

$$\Downarrow$$

$4=5\alpha+8\beta \qquad 8=8\alpha+14\beta \longrightarrow \alpha=\frac{-4}{3};\ \beta=\frac{4}{3}$

  - Entonces $proy_S(1,2,1)=\frac{-4}{3}(0,1,2)+\frac{4}{3}(1,2,3)=(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

2ª forma: expresión matricial

- Si B= $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de S y A (nxk) es la matriz cuyas columnas son $v_1, v_2, \dots v_k$,
  - A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
  - Entonces P= $A(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
  - Y $proy_S(1,2,1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

- **3ª forma:** $proy_S(v) = \frac{<v,v_1>}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{<v,v_k>}{\|v_k\|^2} v_k$ construyendo previamente una base ortogonal

(CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL)

- **Problema 10**

$(P_1(x)$, <,>) es un espacio euclídeo con el siguiente producto escalar

$$<p(x) , q(x)>=\int_0^1 p(x).q(x)dx$$

a) Obtener la matriz del producto escalar referida a la base canónica
b) ¿Qué ángulo forman los polinomios x+3 y 2x+4?
c) Calcular la proyección ortogonal de x+3 sobre x+2
d) Determinar una base ortonormal a partir de la base canónica

- a) $M_{B_c}(<>)$
- $< 1,1 > = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1 \quad < 1,x > = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad < x,x > = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$M_{B_c}(<>) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{Ángulo\ entre\ dos\ vectores}$: $\boldsymbol{cos\ \alpha}=\frac{\boldsymbol{<u,v>}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{\frac{53}{3}}{\sqrt{\frac{37}{3}}\sqrt{\frac{76}{3}}}$ =0,999

- $< x+3, 2x+4 >=(3,1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}(4,2)=\frac{53}{3} = \int_0^1 (x+3)(2x+4)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 5x^2 + 12x\right]_0^1 = \frac{53}{3}$
- $\|(x+3)\|^2=(3,1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}(3,1) = \frac{37}{3} = \int_0^1 (x+3)(x+3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x\right]_0^1 = \frac{37}{3}$
- $\|(2x+4)\|^2= (4,2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}(4,2) = \frac{76}{3} = \int_0^1 (2x+4)(2x+4)dx = \left[\frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 16x\right]_0^1 = \frac{76}{3}$

c) proyección ortogonal de x+3 sobre x+2

- **Expresamos x+3=$\alpha(x+2)$+w(x) donde $w(x) \perp$ (x+2)**

proyección ortogonal de x+3 sobre x+2

- *Imponemos que w(x)*=p(x)-s(x)= x+3-$\alpha(x+2) \Longleftrightarrow \perp$ (x+2)

$\Longleftrightarrow$ (1-$\alpha)x+3-2\alpha \perp$ (x+2)

$\Longleftrightarrow$ $<(1-\alpha)x+3-2\alpha$, x+2>=0

- $(3-2\alpha, 1-\alpha)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\binom{2}{1} = \int_0^1 [(1-\alpha)x+3-2\alpha](x+2)dx = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{53}{38}$

$$s(x) = \frac{53}{38}x + \frac{106}{38}$$

d) Determinar una base ortonormal a partir de la base canónica

- **Ortonormalización por el método de Gram-Schmidt**

- *ortonormalizamos la base B={v_2=(0,1); v_1=(1,0)}={v_2=x; v_1=1}*

- *Expresión del producto escalar* $< \mathrm{x,y} >= \int_0^1 \mathrm{p(x).q(x)dx}$
  - *1) Llamamos* $u_1 = v_1$ *=(1,0)*
    - $\|u_1\|^2 =< (1,0)\,,(1,0) > =< 1,1 > = 1$ *por tanto* $\boldsymbol{e_1} = 1$
    - *2)* u_2= v_2- $a\ u_1$ =*x-a*
    - *Exigimos la ortogonalidad* $<x-a,1>= \int_0^1 (x-a)\mathrm{dx} = \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_0^1 = \frac{1}{2} - a = 0$

$\|u_2\|^2 = <x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}>= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})\mathrm{dx} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{u_2}}{\|\boldsymbol{u_2}\|} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$

  - *Entonces B={1;* $2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ *}*

- **Problema 11**

Obtener la proyección del vector (1,1,1) sobre el subespacio S= {(1,0,0); (0,1,0); (2,1,0)}

  - dim S = 2 $\longrightarrow$ S=L<(1,0,0); (0,1,0)>

- **1ª forma: u=s+w donde s$\in$ S y $w=u-s$ $\perp$s (Es decir w$\in$ $S^{\perp}$)**

- Descomposición del vector: $(1,1,1)=\underbrace{\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)}_{\in S}+\underbrace{w}_{\perp s}$

- Si hacemos el producto escalar por cada uno de los vectores de la base:
  - $1=(1,1,1).(1,0,0)=[\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+w].(1,0,0)=1$
  - $1=(1,1,1).(0,1,0)=[\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+w].(0,1,0)=1$

$$\Downarrow$$

$$\alpha=1;\ \beta=1$$

  - Entonces $proy_S(1,1,1)=1(1,0,0)+1(0,1,0)=(1,\ 1,\ 0)$

2ª forma: expresión matricial

- Si B= $\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)\}$ es una base de S y A (3x2) es la matriz cuyas columnas son $v_1, v_2, \dots v_k$,
  - A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - **Como A es una matriz de columnas ortonormales, A^tA es la matriz identidad y entonces P =A A^t**
  - P= $A(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t$=A A^t= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - Y $proy_S(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- **3ª forma:** $proy_S$(v)= $\frac{<(1,1,1),(1,0,0)>}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) + \frac{<(1,1,1),(0,1,0)>}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$

Ajuste por mínimos cuadrados

- **Problema 12**

Dados los puntos (1,1), (2,4), (3,7), (4,9), ajustar dichos puntos utilizando el método de mínimos cuadrados

a) utilizando una función polinómica de grado dos

b) utilizando un polinomio de grado 3

Y = AX $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

$y = \frac{-130}{8} + \frac{316}{80} x - \frac{1}{4} x^2$

Si hacemos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t A)^{-1} A^t Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 30 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -130/8 \\ 316/80 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados

- Vamos a hacer ahora el ajuste utilizando un polinomio de grado 3

Y = AX
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$y=-1+\frac{7}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3$$

Si hacemos:

$$A^t\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 & 100 \\ 10 & 30 & 100 & 354 \\ 30 & 100 & 354 & 1300 \\ 100 & 354 & 1300 & 4890 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=(A^t\mathrm{A})^{-1}\,A^t\,\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 & 100 \\ 10 & 30 & 100 & 354 \\ 30 & 100 & 354 & 1300 \\ 100 & 354 & 1300 & 4890 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 7/6 \\ 1 \\ -1/6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados

- **Problema 13**

En una exposición de automóviles, un vendedor decidió realizar una serie de observaciones relacionando el precio de los vehículos con sus pesos *ai*. Se han obtenido los datos de la tabla adjunta

Dados los datos de la tabla, hallar por el método de mínimos cuadrados el mejor ajuste lineal

Y = AX $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1,2 \\ 1 & 1,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a_i pesos en Tm	b_i precio en 10^4euros
0,8	1
1	2
1,2	3
1,3	5

Si hacemos:

$$A^t\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 1 & 1,2 & 1,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1,2 \\ 1 & 1,3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4,3 \\ 4,3 & 4,77 \end{pmatrix}$$

$$\text{X}=(A^t\text{A})^{-1}\, A^t\ \text{Y}=\begin{pmatrix} 5 & 4,3 \\ 4,3 & 4,77 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,8 & 1 & 1,2 & 1,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Modelo y=a+bx

- **Problema 14**

En un cultivo de laboratorio se estudia la evolución de una población de un microorganismo. Se mide el número de individuos cada hora y se obtienen los datos:
Determinar cuál será la población aproximada al cabo de 7 horas

Tiempo (h)	1	2	3	4
Miles de microorganismos	4	8	11	14

- $x_i: tiempo\ en\ horas$
- $y_i: nº\ de\ microorganismos\ en\ miles$
- Puntos de R^2para ajustar: (1,4); (2,8); (3,11); (4,14)

Y = AX $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$

- Despejamos $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$= $(A^t$A$)^{-1}$ A^t Y=$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{33}{10} \end{pmatrix}$

- Recta de ajuste: y=1+ $\frac{33}{10}x$

- **Problema 15**

Determinar una matriz ortogonal P que diagonalice ortogonalmente al endomorfismo que en la base canónica tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema espectral

- ✓ f endomorfismo simétrico $\Longrightarrow$ existe una base ortonormal B´de V formada por autovectores de f
- ✓ Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que D=$P^{-1}AP = P^{t}AP$

- ✓ *Las columnas de P son las coordenadas de los autovectores de B´ respecto de la base B: P=*$(v_1´| \ldots |v_n´)_B$

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2-\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1-\lambda} \end{vmatrix} = (\lambda)(1-\lambda)(\lambda-3)=0$$

- Autovalores: λ_1=0, λ_2=1 λ_3=3 cada uno con multiplicidad 1
- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(0) = ker (A)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=0}= {v∈ R^3/Av=0}

- Av=0 $$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x+y=0; x+2y+z=0; y+z=0$$
- S(0) ={(-y,y,-y)/ x ∈R} dimS(0)=1 **Base de S(0): (-1, 1,-1)**

- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

- (A−I)v=0 $$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x+\ y+z=0 \qquad y=0$$
- S(1) ={(x,0,-x)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1):{(1,0,-1)}**

- S(3) = ker (A-3I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=3v}= {v$\in R^3$/(A-3I)v=0}

(A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x - y = 0$ $x - z = 0$

S(3) ={(x,2x, x)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3):{(1,2,1)}**

- ✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={u_1=(1,1,-1); u_2=(1,0,-1); u_3=(1,2,1)} que es una base ortogonal
- ✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={e_1=($-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$); e_2=($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,$-\frac{1}{\sqrt{2}}$); e_3=($\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$)}

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

P= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

- **Problema 16**

E es un espacio vectorial euclídeo de dimensión3; G=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

matriz del producto escalar o en una base B=$\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$.

Sea otra base B´=$\{e_1, e_2, e_3\}$ *otra base de E*.

1) $(2e_1+e_2)o(2e_1+e_2)=5$

El vector (2,1,0) está en base canónica; ¿sus coordenadas en base B?

(2,1,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=b=1; c=0

$$(1,1,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=3\neq 5$$

1) ***Los subespacios*** $S_1=L\{e_1\}$ **y** $S_2=L\{e_1+e_2.,e_3\}$ **son ortogonales**

Vemos cuáles son las coordenadas en B de los vectores:

(1,0,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=1; b=c=0 $\quad (1,0,0)=(1,0,0)_B$

(0,1,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) b=1; a=-1;c=0 $\quad (0,1,0)=(-1,1,0)_B$

(0,0,1)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=0; b=-1 c=1 $\quad (0,0,1)=(0,-1,1)_B$

Ahora ya comprobamos si hay ortogonalidad

e_1o e_1+e_2= $(1,0,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=0$ $\quad$ e_1o e_3= $(1,0,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=0$ $\quad$ Son ortogonales

1) ***La matriz del producto escalar en la base B´es*** $G' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base que tiene en sus columnas los vectores de B´ en la base B

Entonces G´= ${M_{B'B}}^t G M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1) ***El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1***

$/A^t$A|=|I| $/A^t$| |A|=$|A|^2 = 1$ *Es cierto*

1) ***Los únicos valores propios de una matriz ortogonal son 1 ó -1***

Si A es una matriz ortogonal y λ es un valor propio de A: existe un vector x no nulo tal que Ax= λx

Hacemos $< Ax, Ax>= (Ax)^t\ Ax= x^t A^t Ax = x^t\ Ix$=<x,x>=$\|x\|^2$ y, por otra parte

$< Ax, Ax>=$ <λx,λx>= $\lambda^2 \|x\|^2$ Entonces λ=1 ó λ=-1

- **Problema 17**

Demostrar:
El producto de dos matrices ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal
La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal

a) El producto de dos matrices ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal

$(AB)^t$(AB)=$B^t \underbrace{A^t A}_{\text{I(A es ortogonal)}} B = B^t I B = I$ $\Longrightarrow$ $(AB)^t$= $(AB)^{-1}$ luego AB es ortogonal

b) La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal

$(A^{-1})^t A^{-1}$=$(A^t)^t A^{-1} = AA^{-1} = I \quad luego$ $\qquad (A^{-1})^t$= $(A^{-1})^{-1}$

$\uparrow$

(A es ortogonal)

- **Problema 18**

Calcular los valores de s y t para los que

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{t} & \mathrm{s} \\ 3 & \mathrm{s} & 2 \\ \mathrm{s} & -2 & \mathrm{t} \end{pmatrix} \quad sea\ una\ matriz\ ortogonal$$

- Exigimos que cada vector columna sea unitario (cada columna debe tener norma 1)

$\|(2,3,s)\| = \sqrt{<(2,3,s),(2,3,s)>} = \frac{4+9+s^2}{49} = 1$ $\quad s^2=36 \quad$ s=± 6

$\|(t,s,-2)\| = \sqrt{<(t,s,-2),(t,s,-2)>} = \frac{4+t^2+s^2}{49} = 1$ $\quad t^2+s^2=45 \quad$ t=± 3

$\|(2,3,s)\| = \sqrt{<(2,3,s),(2,3,s)>} = \frac{4+9+s^2}{49} = 1$

- Comprobar la ortogonalidad dos a dos
- Sólo son ortogonales si s=6 y t=-3

- **Problema 19**

Demostrar que una matriz es ortogonal si y sólo si sus vectores columna forman un sistema ortonormal con el producto escalar usual.

- Si llamamos $C_1, C_2, \ldots C_n$ a los vectores columna de la matriz
- $A^t A = \begin{pmatrix} C_1^t \\ C_2^t \\ \vdots \\ C_n^t \end{pmatrix} (C_1, C_2, \ldots C_n) = \begin{pmatrix} C_1^t C_1 & C_1^t C_2 & \ldots & C_1^t C_n \\ C_2^t C_1 & C_2^t C_2 & \ldots & C_2^t C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^t C_1 & C_n^t C_2 & \ldots & C_n^t C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < C_1, C_1 >< C_1, C_2 > & \ldots < C_1, C_n > \\ < C_2, C_1 >< C_2, C_2 > & \ldots < C_2, C_n > \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ < C_n, C_1 >< C_n, C_2 > & \ldots < C_n, C_n > \end{pmatrix}$
- Entonces
  - A es ortogonal si $A^t A = I$ $\quad < C_i, C_j > = \left\{ \begin{matrix} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{matrix} \quad i = 1,2, \ldots n \right\}$

- **Problema 20**

Diagonalizar la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obteniendo la matriz de paso P que permitan una expresión J=P^tAP

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda-3)=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=3 con multiplicidad 1
- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A+I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+z=0;$

S(0) ={(x,y,-x)/ x ∈R} dimS(0)=2 ***Tenemos que elegir dos vectores de este subespacio que… ¡podrían no ser ortogonales!***

Elegimos un primer vector u_1=(1,0,-1) y un segundo vector que tiene que verificar: x+z=0 y además (x,y,z)(1,0,-1)=0 $\longrightarrow$ u_2=(0,1,0)

- *S(3) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A-3I)v=0}=* $\begin{pmatrix} -\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-z=0; y=0$ u_3=(1,0,1)

- **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={u_1=(1,0,-1); u_2=(0,1,0); u_3=(1,0,1)} que es una base ortogonal
- **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={e_1=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0,- $\frac{1}{\sqrt{2}}$); e_2=(0,1,0); e_3=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)}

- **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & & \\ & \mathbf{-1} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

- **Problema 21**

Determinar si las matrices reales y simétricas siguientes

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ son congruentes

- Aplicamos que las matrices reales simétricas son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura

$$¿\,\boldsymbol{y\ c\acute{o}mo\ obtenemos\ la\ signatura}?$$

- 1) diagonalizando (calculando valores propios)
- 2) analizando el signo de los valores propios según la regla de Descartes

- P(λ) $=$ |A− λI| $= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 16\lambda$
- P(λ) $=$ |B− λI| $= -\lambda^3 + 10\lambda^2 + 8\lambda$

- $los\ dos\ tienen\ raíz\ \lambda = 0$
- En A hay 2 cambios de signo en los coeficientes luego p(A) tiene 2 raíces reales positivas: signatura (2,0)
- En B hay un ´solo cambio de signo en los coeficientes; la signatura es (1,1)
- **Las matrices no son congruentes**.

- **Problema 22**

En R^2 se considera un producto escalar cuya matriz en una base ortonormal B=$\{u_1, u_2\}$ es M=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; hallar una base ortonormal formada por vectores propios y la matriz diagonal correspondiente.

Recuerda Teorema espectral

- ✓ f endomorfismo simétrico $\Longleftrightarrow$ existe una base ortonormal B´de V formada por autovectores de f
- ✓ Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que D=$P^{-1}AP = P^tAP$

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(1-\lambda)-4=0$$

- Autovalores: λ_1=3, λ_2=-1 cada uno con multiplicidad 1

Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

- S(3) = ker (A-3I)= {v=$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in R^2$/(A-3I)v=0}
- (A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + y = 0;$

- S(3) ={(-y,y)/ y ∈R} dimS(3)=1 $\boldsymbol{v_1\ de\ S(3)}$: **(-1, 1)**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in R^2$/(A+I)v=0}
- (A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y = 0;$

- S(3) ={(y,y)/ y ∈R} dimS(-1)=1 $\boldsymbol{v_2\ de\ S(-1)}$: **(1, 1)**

- **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={v_1=(-1,1); v_2=(1,1)} que es una base ortogonal
- **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={e_1=(-$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$); e_2=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)}

- **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

P= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 3 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

- **Problema 23**

Diagonalizar la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obteniendo la matriz de paso P que permitan una expresión J=P^tAP

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{\mathbf{3}} + \mathbf{2} + 3\lambda = 0$$

- Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=2 con multiplicidad 1
- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A+I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x + y + z = 0;$

S(-1) ={(x,y,-x-y)/ x,y ∈R} dimS(-1)=2 ***Tenemos que elegir dos vectores de este subespacio que… ¡podrían no ser ortogonales!***

Elegimos un primer vector u_1=(1,0,-1) y un segundo vector que tiene que verificar: x+y+z=0 y además (x,y,z)(1,0,-1)=0 $\Longrightarrow$ u_2=(1,-2,1)

- $S(2) = ker\ (A\text{-}2I) = \{v=(x,y,z) \in R^3 / (A\text{-}2I)v=0\} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $-2x + y + z = 0; x + y - 2z = 0 \qquad u_3=(1,1,1)$

- **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={u_1=(1,0,-1); u_2=(1,-2,1); u_3=(1,1,1)} que es una base ortogonal
- **Construimos ahora una base ortonormal :**

$$B' = \{e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}});\ e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}});\ e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$$

- **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

- **Problema 24**

Dado V espacio vectorial euclídeo con un producto escalar <> en V cuya matriz de Gram es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtener la proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el plano de ecuación x+2z=0

Vectores ortogonales a todos los vectores de S $\Longleftrightarrow$ vectores ortogonales a los vectores de una base de S
Base de S {(-2,0,1); (0,1,0)} porque S={(-2α,β, α)/ y,z∈R}

- $S^{\perp} = \{(x,y,z)/(x,y,z) \perp$ (-2,0,1); y $(x,y,z) \perp$(0,1,0)}
- v- $proy_S$(v) =(1,1,1)-$(-2\alpha,\beta,\alpha)$=$(1+2\alpha,\ 1-\beta,1-\alpha)$ es un vector de $S^{\perp}$ $\Longleftrightarrow$
  - $(1+2\alpha,\ 1-\beta,1-\alpha)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$=0 1-20$\alpha$ -5β=0
  - $(1+2\alpha,\ 1-\beta,1-\alpha)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$=0 1-5$\alpha$ -2β=0 $\Longleftrightarrow$ α =-1/5 β =1
- Entonces $s = proy_S(1,1,1) = (\frac{2}{5}, 1, \frac{-1}{5})$ y $w=(1,1,1)-proy_S(1,1,1) = = (\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5})$

- **Problema 25**

Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que A es diagonalizable en R

b) Comprobar que los autovectores son ortogonales con el producto escalar usual

c) Encontrar una base ortonormal de vectores propios de R^3

d) Comprobar que la matriz P de cambio de base de la base canónica a la anterior es ortogonal

e) Clasificar la forma cuadrática definida por q(x)= x^tAx

a) Comprobar que A es diagonalizable en R
A es real y simétrica, es decir, el teorema espectral asegura que existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que D=$P^{-1}AP = P^t AP$

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- $$\begin{vmatrix} \mathbf{2-\lambda} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2-\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} = (\mathbf{2}-\lambda)^3+\mathbf{2}+3(2-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2 y λ_2=4 con multiplicidad 1

b) Comprobar que los autovectores son ortogonales con el producto escalar usual

- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A-I)v=0}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+y+z=0;$

S(1) ={(x,y,-x-y)/ x,y ∈R} dimS(1)=2 ***Tenemos que elegir dos vectores de este subespacio que… ¡podrían no ser ortogonales!***

Elegimos un primer vector u_1=(1,0,-1) y un segundo vector que tiene que verificar: x+y+z=0 y además (x,y,z)(1,0,-1)=0 ⟹ u_2=(1,-2,1)

- *S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A-4I)v=0}=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $-2x+y+z=0; x+y-2z=0$ u_3=(1,1,1)

- Es fácil comprobar que $u_1\ u_2$=0; $u_1\ u_3$=0; $u_2\ u_3$=0

d) Comprobar que la matriz P de cambio de base de la base canónica a la anterior es ortogonal

Basta comprobar que P^t=P^{-1}, es decir que P^tP=I_3

c) Encontrar una base ortonormal de vectores propios de R^3

- ✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={u_1=(1,0,-1); u_2=(1,-2,1); u_3=(1,1,1)} que es una base ortogonal
- ✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

$$B' = \{e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}});\ e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}});\ e_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$$

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

e) Clasificar la forma cuadrática definida por q(x)= x^tAx

q es definida positiva

- **Problema 26**

> Sea f el endomorfismo de R^2 definido por
> f(1,1)=(-1,1); f(1,2)=(-1,2); demostrar que verifica que si A es la matriz del endomorfismo en una base B cualquiera y G es la matriz del producto escalar en dicha base, entonces $G_B = A^t G_B$A (Esta es una condición equivalente de isometría vectorial)

- Calculamos A=M_B(f) matriz del endomorfismo f en la base B
  - f(1,1)=(-1,1)=$\alpha(1,1)+\beta(1,2)$ $\alpha=-3$ $\beta=2$
  - f(1,2)=(-1,2)=$\alpha(1,1)+\beta(1,2)$ $\alpha=-4$ $\beta=3$

$$A=M_B(f)=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

- Obtenemos ahora la matriz del producto escalar en la base B
  - $G_B=\begin{pmatrix}<(1,1),(1,1)> & <(1,1),(1,2)>\\ <(1,2),(1,1)> & <(1,2),(1,2)>\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$
- Comprobamos que efectivamente se verifica la igualdad
  - $A^t G_B A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}=G_B$

- **Problema 27**

Sea A una matriz simétrica 3x3 con traza 2a+b. Sabemos que el subespacio propio asociado al valor propio a contiene a S={(x,y,z)/ x+y+z=0}. Calcular:

a) Los valores de a y b para los que A puede ser la matriz de un producto escalar

b) Si a y b toman los valores más pequeños que hacen que A sea la matriz de un producto escalar, calcular el ángulo que forman los vectores (1,-1,0) y (1,1,1) respecto del mismo

- A es simétrica $\longrightarrow$ A es diagonalizable
- Tenemos λ=a su multiplicidad≥ 2 *(el subespacio propio contiene a un subespacio de dimensión* 2*)*
- La suma de los tres autovalores es 2a+b

- **Caso 1 Si a$\neq$ *b*:** *a es autovalor doble y b es autovalor simple* J=$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$
- S(a) ={(x,y,z)/ x+y+z=0}=L{(1,0,-1); (0,1,-1)}
- S(b): subespacio del valor propio b $\Rightarrow$ su base: un vector ortogonal a los vectores de S(a)

Tomamos (1,1,1) por tanto B ortogonal={(1,0,-1); (0,1,-1); (1,1,1)} $\Rightarrow$ P= $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

- **Caso 2 Si a= $\boldsymbol{b}$**: $a\ es\ autovalor\ triple\ y$ J=$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$
- S(a) es todo el espacio R^3 y podemos tomar como base ortogonal la base canónica

P= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

- Como P es ortogonal $J = P^t A$P= $P^{-1}A$P
- A es la matriz de un producto escalar si y sólo si J también lo es
- Tiene que ser definida positiva $\Longleftrightarrow$ a>0 y b>0

- Si a=1 y b=1 $I = P^t A$P= $P^{-1}A$P $\Longrightarrow$ A=PP^{-1}=I $\Longrightarrow$ <> usual

$$\boldsymbol{cos}\ \alpha = \frac{<(1,-1,0),(1,1,1)>}{\|(1,-1,0)\|\|(1,1,1)\|} = 0$$

- **Problema 28**

Consideramos el espacio euclídeo R^3 y el vector u=(1,1,1)
a) Calcular la matriz de Householder asociada al vector u
b) Obtener los transformados de los vectores (3,3,3) (1,-1,0) y (1,2,3) por la matriz H.

- Si u=(1,1,1), U=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ U^tU=3
- H(u)= I-$\frac{2}{U^tU}UU^t$= $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- Obtenemos ahora los transformados de los vectores (3,3,3) (1,-1,0) y (1,2,3) por la matriz H
- H(3,3,3)=(-3,-3,-3); H(1,-1,0)=(1,-1,0); H(1,2,3)=(-3,-2,-1)
- **Se trata de una simetría respecto al subespacio ortogonal al L<(1,1,1)**

- **Problema 29**

Sea E un espacio euclídeo en el que se ha definido un producto escalar <> y B $=\{e_1, e_2, e_3\}$ *es una base de* E.
Sabiendo que

$$e_2 \ y \ e_3 \ forman \ un \ ángulo \ de \ \frac{\pi}{3}$$

los tres vectores e_1, e_2, e_3 tienen por normas los números naturales pares más pequeños que hacen que <> sea un producto escalar
$B´ = \{e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3\}$ es una base ortogonal de E
Calcular
a) La matriz del producto escalar en la base B
b) Dado el subespacio S=L< $e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_2$ > *calcular una base ortogonal de* $S^{\perp}$
c) Calcular la proyección ortogonal de $e_2 - e_3$ sobre $S^{\perp}$

- Aplicamos que los vectores de la base B´ son ortogonales
  - $< e_1, e_2 + e_3 >=0 \Longleftrightarrow < e_1, e_2 > + < e_1, e_3 >=0$
  - $< e_1, e_2 - e_3 >=0 \Longleftrightarrow < e_1, e_2 > - < e_1, e_3 >=0 \Longrightarrow < e_1, e_2 >= < e_1, e_3 >=0$
  - $<e_2 + e_3 , e_2 - e_3 >=0 \Longleftrightarrow < e_2, e_2 > - < e_2, e_3 > + < e_3, e_2 > - < e_3, e_3 >=0 \Longrightarrow$
    $< e_2, e_2 > - < e_3, e_3 >=0 \Longrightarrow < e_2, e_2 >= < e_3, e_3 >=a$
  - Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{<e_2, e_3>}{\|e_2\|\|e_3\|} = \frac{1}{2} \Longrightarrow < e_2 , e_3 > = \frac{a}{2}$ $\quad G=\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & a/2 \\ 0 & a/2 & a \end{pmatrix}$

- Exigimos la condición que no hemos utilizado: <> es un producto escalar si se trata de una forma definida positiva, si y sólo si (criterio de Sylvester) los 3 menores principales son positivos
  - Entonces b>0 $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ ba>0 $\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & a/2 \\ 0 & a/2 & a \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}a^2 b > 0$
- $Como\ e_1, e_2, e_3$ tienen por normas los números naturales pares más pequeños que hacen que <> sea un producto escalar: $\| e_2 \| = 2$ y $\| e_1 \| = 2$
- Entonces $\langle e_1, e_1 \rangle = b = 4$; $\quad y \ \langle e_2, e_2 \rangle = a = 4$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $S = L\langle e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 \rangle\ calcular\ una\ base\ ortogonal\ de\ S^{\perp}$
- Como dim S=2 dim $S^{\perp} = 1$
- $S^{\perp} = \{u = (x,y,z) \in R^3 / \langle u, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = 0; \langle u, e_1 + 2e_2 \rangle = 0\}$

- <u, $e_1 + e_2 + e_3$>=(x,y,z) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=4x+6y+6z=0
- <u,$e_1 + 2e_2$>=(x,y,z) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$=4x+8y+4z=0 $\Longrightarrow$ u=(-3λ, λ, λ)
- *Por tanto* $S^{\perp}$=L$< -3e_1 + e_2 + e_3 >$ Como queremos una base ortogonal de $S^{\perp}$ tenemos que normalizar $Base: \{(\frac{-3e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{48}})\}$

  (-3,1,1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=$\sqrt{48}$

- v- $proy_{S^{\perp}}$(v) =(0,1,-1)-(-3α,α, α)=(3α,$1-\alpha$, -1-α) es un vector de S *por tanto exigimos que*
  - (3α,$1-\alpha$, -1-α) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=0 α =0
  - *Entonces* $proy_{S^{\perp}}$*(v) =(0,0,0)* *¿por qué?* ***Porque (0,1,-1) es un vector de S***

- **Problema 30**

Dada la curva de R^2 C={(x,y)∈ R^2 $/10x^2 - 12xy + 5y^2 = 1\}$,
Encontrar una base en la que la matriz asociada sea diagonal

- Su ecuación matricial es $(x \quad y)\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \quad 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1=0$

- Paso 1: **Diagonalización ortogonal de A**

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

➢ 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 14 = 0$$

➢ Autovalores: λ_1=14, λ_2=1 cada uno con multiplicidad 1

- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

➢ S(14) = ker (A-14I)= {v=(x, y) ∈ R^2/(A- 14 I)v=0}= {v∈ R^2/(A- 14I)v=0}

- (A−14I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x + 3y = 0$
- S(14) ={(x,-2x/3,)/ x ∈R} **Tomamos un primer vector v_1 =(3, -2)**

➢ S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y) ∈ R^2/(A- I)v=v}= {v∈ R^2/(A- I)v=0}

- (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{9} & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $3x - 2y = 0$
- S(1) ={(x,3x/2)/ x ∈R} **Tomamos un segundo vector v_2 =(2, 3)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores**

B={v_1=(3,-2); v_2=(2,3)}

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={e_1=($\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\frac{-2}{\sqrt{13}}$); e_2=($\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\frac{3}{\sqrt{13}}$)}

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

P= $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 14 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

Ahora la expresión matricial de la cónica es:

$(X')^t DX'$+BPX´ $+ a_0 = 0$ $(x' \quad y')\begin{pmatrix} 14 & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-1 \quad -1)\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1=0$

- ✓ **y la expresión analítica es** $14x'^2 + y'^2 - \frac{1}{\sqrt{13}}x' - \frac{5}{\sqrt{13}}y' - 1=0$

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- Paso 2: Traslación
  - $14x'^2 - \frac{1}{\sqrt{13}}x' = 14(x'^2 - \frac{1}{14\sqrt{13}}x') = 14[\left(x' - \frac{1}{28\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{1}{784x13}] = 14(x'')^2 - \frac{1}{182}$

$$\boxed{x'' = x' - \frac{1}{28\sqrt{13}}}$$

$$y'^2 - \frac{5}{\sqrt{13}}y' = \left(y' - \frac{5}{2\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{25}{4x13} = (y'')^2 - \frac{25}{52}$$

$$\boxed{y'' = y' - \frac{5}{2\sqrt{13}}}$$

Ecuación reducida de la cónica

- $14x'^2 + y'^2 - \frac{1}{\sqrt{13}}x' - \frac{5}{\sqrt{13}}y' - 1 = 14(x'')^2 - \frac{1}{182} + (y'')^2 - \frac{25}{52} - 1 = 0$

- **Problema 31**

En un espacio vectorial euclídeo E de dimensión 3 se define un producto escalar $<,>$ cuya matriz en la base B={$e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3$} es G= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B´={e_1, e_2, e_3} es otra base de E.

a) $Calcular < 2e_1+e_2, 2e_1+e_2 >$
b) $Obtener\ la\ matriz\ del\ producto\ escalar <,> en\ la\ base\ B´$
c) Comprobar si los subespacios $V_1 = L < e_1 > y\ V_2 = L < e_1+e_2, e_3 >$ $son\ ortogonales$

$a)\ \ Calcular < 2e_1+e_2, 2e_1+e_2 >$

Como G es la matriz del producto escalar en la base B, calculamos las coordenadas del vector $2e_1+e_2$ en la base B

$2e_1+e_2 = \alpha e_1+\beta(e_1+e_2)+\gamma(e_1+e_2+e_3)$ $\quad \alpha = 1 = \beta \quad \gamma=0$

Es decir $(2,1,0)_{B´} = (1,1,0)_B$

$$(1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=3$$

b) $Obtener\ la\ matriz\ del\ producto\ escalar <,> en\ la\ base\ B´$

Tenemos que calcular P=$M_{B´B}$ =$(|vectores\ de\ B´)_B$ porque

Si <x,y>= $(x_1, x_2 , x_3)\ G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$=$X^t G_B$Y Expresión de <> en la base B

- ❑ Como X=PX´ Y=PY´, en la base B´ tendremos

<x,y>= (PX´)$^t G_B$ (PY´)=$X^{´t} P^t G_B$ PY´= $X^{´t}$MY´

$G´_B$ =$P^t G_B$ P

Es la expresión del producto escalar <> en la base B´

$G´_B$ =$P^t G_B$ P es la matriz de la forma bilineal en la base B´.

Vemos cuáles son las coordenadas en B de los vectores:

(1,0,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=1; b=c=0 $\Longrightarrow$ $(1,0,0)=(1,0,0)_B$

(0,1,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) b=1; a=-1; c=0 $\Longrightarrow$ $(0,1,0)=(-1,1,0)_B$

(0,0,1)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=0; b=-1 c=1 $\Longrightarrow$ $(0,0,1)=(0,-1,1)_B$

$M_{B'B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base que tiene en sus columnas los vectores de B´ en la base B

Entonces G´= ${M_{B'B}}^t$G$M_{B'B}$= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$

y (2,1,0)$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$=3

c) Comprobar si los subespacios $V_1 = L < e_1 > y\, V_2 = L < e_1 + e_2, e_3 >$ $son\ ortogonales$

comprobamos si hay ortogonalidad teniendo en cuenta que en la base B

(1,0,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=1; b=c=0 $(1,0,0)=(1,0,0)_B$

(1,1,0)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) b=1; a=0; c=0 $(1,1,0)=(0,1,0)_B$

(0,0,1)= a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1) a=0; b=-1 c=1 $(0,0,1)=(0,-1,1)_B$

$\boldsymbol{e_1}$o $\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}$= (1,0,0) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$=0 $\boldsymbol{e_1}$o $\boldsymbol{e_3}$= (1,0,0) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$=0

Son ortogonales

O bien (1,0,0)$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$=0 y (1,0,0)$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$=0