CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Endomorfismos. Diagonalización

TEMA 3

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 3.- Endomorfismos. Diagonalización

3.1.Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

3.2.Subespacios invariantes.

3.3.Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor.

3.4.Endomorfismos y matrices diagonalizables.

3.5.Diagonalización por semejanza.

3.6.Teorema de Cayley-Hamilton.

3.7.Forma canónica de Jordan.

3.8. Exponencial de una matriz.

3.9. Factorización LDU.

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

- **Endomorfismo** es una aplicación lineal $f:V \longrightarrow V$ de un espacio vectorial en sí mismo
- La matriz asociada a un endomorfismo tiene dimensión nxn (si dim V = n)
- Endomorfismo biyectivo: es inyectivo y suprayectivo

Caracterización de los endomorfismos biyectivos

Si f:V V es un endomorfismo y M es su matriz asociada; son equivalentes:

ker f ={0}	dim (Imf)=n	rang(M)=n	$\det M \neq 0$
f inyectiva	f suprayectiva	f biyectiva	
f transforma bases en bases		0 no es un autovalor	

- Son endomorfismos biyectivos los giros, las simetrías y las homotecias

Matriz de cambio de base

Recuerda:

- *La matriz asociada a un endomorfismo es una matriz cuadrada* $M_B(f)$

Si f∈ $\mathscr{L}$ (V), para todas las bases B y B´ de V se verifica:

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}\, M_B(f)\, M_{B'B}$$

- *Como* $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$ son matrices inversas: si las llamamos P^{-1} *y* P, *tenemos*

$$M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f)\, P$$

- *Las matrices asociadas a un endomorfismo en distintas bases son semejantes*

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

En particular, **cuando una de las bases es la base canónica:**

A: matriz de f en la base canónica

M: matriz de f en la base B

P: matriz de cambio de base: de la base B a la canónica

$$M = P^{-1}AP$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V \\
\text{base canónica} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & \text{base canónica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
\text{base B} \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[r, "M"] & \text{base B} \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

- Nota: utilizaremos siempre la misma base en el espacio de partida y en el de llegada

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

❑ Matrices semejantes

- Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si están asociadas a un mismo endomorfismo, es decir si existe una matriz P cuadrada y regular P_{nxn} $tal\ que\ \ B = P^{-1}\text{AP}$ (P se denomina matriz de paso)

Matrices semejantes:

- ✓ representan al mismo endomorfismo en distintas bases
- ✓ tienen el mismo rango
- ✓ Tienen la misma traza
- ✓ Tienen el mismo determinante

Esto significa que rango, traza y determinante son invariantes para la semejanza de matrices: son en realidad propiedades o características del endomorfismo

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

Vamos a tratar de elegir la base en la que la matriz del endomorfismo sea lo más sencilla posible: diagonal

Dado f ¿existe siempre una base tal que $M_B(f)$ sea diagonal?

No!!!!

Dada A matriz cuadrada, ¿es siempre semejante a una matriz diagonal?

No!!!!

Autovalores y autovectores de un endomorfismo

- Para que exista una base B = $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ de forma que $M_B(f)$ sea diagonal, los vectores de dicha base tienen que cumplir que

$$f(v_i) = \lambda_i\, v_i \qquad \lambda_i \in R \qquad 1 \leq i \leq n$$

- Si existe una base B cuyos vectores cumplen esta condición decimos que el endomorfismo f es diagonalizable

Se trata por tanto de encontrar las soluciones no triviales de la ecuación

$$f(v)=Av=\lambda v \longleftrightarrow (A-\lambda I)v=0$$

Este sistema homogéneo tendrá solución no trivial cuando rang$(A-\lambda I)<n \longleftrightarrow |A-\lambda I|=0$

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- **Autovector (o vector propio) del endomorfismo f es un vector v no nulo que verifica f(v) = λv con** λ escalar;
- $\boldsymbol{\lambda}$ **es el autovalor (o valor propio) asociado a v**

- ✓ Un autovector es por tanto un vector no nulo tal que su imagen por f es múltiplo suyo
- ✓ Todos los autovectores asociados a un mismo autovalor λ forman un subespacio de V, que se denomina **subespacio propio (o invariante)asociado a $\boldsymbol{\lambda}$**, y se denota $S(\lambda)$
- ✓ $S(\lambda)$ es el conjunto de soluciones no triviales de la ecuación f(v)=Av= λv; es decir

$$S(\lambda) = \{v/(A-\lambda I)v=0\} = \ker(A-\lambda I)$$

- ✓ $|A-\lambda I|$ =P(λ) es un polinomio de grado n en λ: **polinomio característico** que sólo tendrá soluciones no triviales si $|A-\lambda I|=0$ (**ecuación característica** del endomorfis

Propiedades

- Los autovalores de A son los mismos que los de la matriz traspuesta A^t
- Los autovalores de una matriz triangular o diagonal son sus elementos diagonales
- Si los autovalores de A son $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_n$, entonces los autovalores de la matriz A^k son $\lambda_1^k, \lambda_2^k \ldots \lambda_n^k$
- Si los autovalores de A son $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_n$, entonces los autovalores de la matriz αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\, \lambda_2 \ldots . \alpha\, \lambda_n$
- Si los autovalores de A son $\lambda_1, \lambda_2 \ldots . \lambda_n$, entonces los autovalores de la matriz A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \ldots \frac{1}{\lambda_n}$
- Si A y B son matrices semejantes, A y B tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores.

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Propiedades

- Si λ es un autovalor de A, λ-k es un autovalor de A-kI
- λ =0 es autovalor de A $\longrightarrow$ ker A $\neq \{0\}$ y $S(0) = \ker A$
- Si $v_1, v_2 .... v_n$, es un conjunto de vectores propios asociados a autovalores distintos, entonces son vectores linealmente independientes
- Si v es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces
  - v es vector propio de kA asociado al valor propio k λ
  - v es vector propio de A-kI asociado al valor propio λ-k
  - v es vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $\frac{1}{\lambda}$
  - v es vector propio de A^n asociado al valor propio λ^n

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Nota importante

La **ecuación característica** del endomorfismo $|A-\lambda I|=0$ no depende de la base utilizada para construir la matriz A.

¿Por qué?

Supongamos que M y N son respectivamente las matrices asociadas al endomorfismo f en las bases B y B´: son por tanto matrices semejantes, es decir, Existe P regular (matriz del cambio de base) tal que $N = P^{-1}MP$

Entonces $|N-\lambda I| = |P^{-1}MP-\lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(M-\lambda I)P| = |P^{-1}|\,|(M-\lambda I)|\,|P| = |M-\lambda I|$

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

Proposición

- λ es autovalor de A $\longleftrightarrow$ λ *es autovalor de* A^t

Es decir, una matriz y su traspuesta tienen los mismos autovalores

- Si A es una matriz regular, $\lambda \neq 0$ es autovalor de A $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}

Demostración

1) λ es autovalor de A $\Longleftrightarrow$ el sistema (A-λI)X=0 tiene solución no trivial $\longleftrightarrow$ rang (A-λI)<n (no es completo) $\longleftrightarrow$ |A-λI|=0

Pero |A-λI|= |$(A-\lambda I)^t$|= |A^t-λI|=0 y entonces λ *es autovalor de* A^t

2) Si A es una matriz regular y f es un endomorfismo de matriz asociada A, f es un isomorfismo ($\exists f^{-1}$ *y su matriz asociada es* A^{-1})

Si v es un vector no nulo; v es autovector de f asociado a λ si y sólo si f(v)= λv de donde deducimos

$$v = f^{-1} \circ f(v) = f^{-1}[f(v)] = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v) \longrightarrow f^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$$

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- La suma de todos los autovalores de una matriz, contado cada uno tantas veces como indica su multiplicidad, es igual a la traza de la matriz

Demostración

$Si\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ son los autovalores de una matriz A =(a_{ij}) de dimensión n, tenemos

$|A- \lambda I|=(a_{11}- \lambda)\ (a_{22}- \lambda) \ldots\ (a_{nn}- \lambda)+P_{n-2}(\lambda)$

tal que $P_{n-2}(\lambda)$ es un polinomio de grado $\leq$n-2

Si $p(\lambda)$ tiene n raíces reales y distintas

$p(\lambda)\ = (\lambda_1- \lambda)\ (\lambda_2- \lambda) \ldots\ (\lambda_n- \lambda)$

Si igualamos los coeficientes de grado n-1 en las dos expresiones anteriores:

$$(-1)^{n-1}(a_{11}+\ldots\ a_{nn})= (-1)^{n-1}\ (\lambda_1+\ldots\ \lambda_n)$$

Entonces: $(\lambda_1+\ldots\ \lambda_n)=(a_{11}+\ldots\ a_{nn})$ que es la traza de la matriz

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- El producto de todos los autovalores de una matriz, contado cada uno tantas veces como indica su multiplicidad, es igual al determinante de la matriz

|A- λI|=(λ_1- λ) (λ_2- λ)… (λ_n- λ)
Haciendo λ=0, obtenemos que |A|= $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- ❑ **Consecuencias**
- ❑ Los autovalores de un endomorfismo son los mismos respecto de cualquier base
- ❑ Todas las matrices de un endomorfismo f, respecto de distintas bases, tienen la misma traza y el mismo determinante
- ❑ Una matriz es singular $\Longleftrightarrow$ λ=0 es autovalor

- ❑ *Si A es una matriz 2x2 y $P(\lambda)$ es su polinomio característico,*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (trA)\lambda + detA$$

- Matriz 2x2: M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico:

P(λ)=$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$= ad-a λ-d λ+λ^2-bc= λ^2-(a+d) λ+ad-bc

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- **Ejemplo 1 Cálculo de autovalores y autovectores de un endomorfismo**

$f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ **es un endomorfismo cuya matriz en una base B es** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A$-$ λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3}-\lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{1}-\lambda)(\mathbf{3}-\lambda)(-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=1 λ_2=3 λ_3=0
- Calculamos ahora los subespacios propios (invariantes) y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y+z=0; 2y+z=0; -z=0$

S(1) ={(x,0,0)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,0,0)**

- S(3) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=3.v}= {v∈ R^3/(A-3I)v=0}

(A−3I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -2x+\ y+z=z=0; -3z=0$

S(1) ={(x,2x,0)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): (1,2,0)**

- S(0) = ker (A-0I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=0.v}= {v∈ R^3/(Av=0}

(A−0I)v=0 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x+y+z=0;\ 3y+z=0$

S(1) ={(2y,y,-3y)/ x ∈R} dimS(0)=1 **Base de S(0): (2,1,-3)**

Autovalores y autovectores de un endomorfismo.

- Los tres autovectores v_1=(1,0,0) ∈ $S(1)$, v_2=(1,2,0) ∈ $S(3)$ y v_3=(2,1,-3) ∈ $S(0)$ forman una base B
- La matriz asociada al endomorfismo f respecto a esa base B de autovectores es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son precisamente los autovalores del endomorfismo

$$D= M_B(f)= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P es la matriz de cambio de base (tiene en sus columnas los autovectores

$P=\boldsymbol{M_{B_c}}(v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

- Tanto el endomorfismo f como la matriz A se dicen diagonalizables
- Vemos cuál es la relación entre A y D

$$\boxed{D= P^{-1}AP}$$

$$\begin{array}{ccc} {R^3}_{B_c} & \xrightarrow{A} & {R^3}_{B_c} \\ \uparrow P & & \downarrow P^{-1} \\ {R^3}_{B} & \xrightarrow{D} & {R^3}_{B} \end{array}$$

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Un **endomorfismo** f es **diagonalizable** si existe una base B de vectores de V tal que M_B(f) es diagonal

- Una **matriz** cuadrada A es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz regular P tal que P^{-1}AP=D

- Una matriz cuadrada A es diagonalizable si y sólo si el endomorfismo cuya matriz en cierta base es A, es diagonalizable

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Proposición

Una matriz A es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por autovectores de f

f es diagonalizable si y sólo si existe una base B=$\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ $tal\ que$

$$M_B(\text{f})=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

Es decir que las coordenadas en la base B son :

f(v_1)=(d_1,0….0) f(v_2)=(0, d_2….0) … f(v_1)=(0….0, d_n) $\longrightarrow$ f(v_1)=$d_1 v_1$ …. f(v_n)=$d_n v_n$

Si B es la base de autovectores y A es la matriz de f respecto a otra base B´, se verifica D= P^{-1}AP $\longleftrightarrow$ PD=AP donde P es la matriz de cambio de base de B´a B : $M_{B'B}$

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Si la base de partida es la base canónica:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr] & & V \\ \text{Base canónica} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & & \text{Base canónica} \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\ \text{base } B \arrow[u, shift right, "P"'] \arrow[rr, "D"] & & \text{base} B \arrow[u, shift right, "P"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$

P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica: sus columnas son las coordenadas de los vectores de B expresados en la base canónica $P = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}_c}(v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3)$

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Diagonalizar un endomorfismo es encontrar una base B en la que la matriz asociada al endomorfismo sea diagonal: B es una base de formada por autovectores de f
- Los elementos diagonales de D son los autovalores de f

¿Es posible siempre formar una base de autovectores de f?

¿Es posible siempre diagonalizar la matriz de un endomorfismo?

NO

Endomorfismos y matrices diagonalizables

❖ Ejemplo 2 Un endomorfismo no siempre es diagonalizable

$$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \textbf{ tal que } A_B(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

No va a ser posible encontrar una base de autovectores, por tanto f no es diagonalizable

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}-\lambda \end{vmatrix} = (\mathbf{1}-\lambda)^2(-1-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2 λ_2=-1 con multiplicidad 1
- Tratamos ahora de conformar una base de autovectores:
- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = 0;\ -2z = 0;$

S(1) ={(x,0,0)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,0,0)**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=(-1).v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x + y = 0;\ 2y = 0$

S(1) ={(0,0,z)/ z ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): (0,0,1)**

¿Dónde está el problema?

λ_1=1 tiene multiplicidad 2
Pero dimS(1)=1
Para que f fuese diagonalizable la dimensión de cada subespacio propio tendrá que coincidir con la multiplicidad algebraica del autovalor

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Recuerda:

- A es diagonalizable si existe una base en la cual M_B(f) es diagonal

  - Los elementos diagonales de D son los autovalores de f :

    $$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$$

  - La base B es una base de autovectores de f asociados a esos autovalores: $B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$
  - La matriz P es la que tiene en sus columnas los autovectores de B

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- ¿Y cuándo es posible encontrar una base en la que el endomorfismo f se represente mediante una matriz diagonal?

- ¿En qué condiciones podemos asegurar la existencia de dicha base?

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Proposición

1) Si $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ *son autovectores no nulos asociados a autovalores* distintos, entonces son linealmente independientes
2) Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ son autovalores distintos, entonces tenemos una suma directa de subespacios propios : V=S(λ_1) $\oplus$S(λ_2) $\oplus$ ….. $\oplus$ S(λ_n)

Demostración

1) Reducción al absurdo.

Supongamos que son dos autovectores no nulos linealmente dependientes, entonces, $v_1 = \mu v_2$

Entonces f(v_1)= f(μv_2)=μf(v_2)= $\mu\ \lambda_2\ v_2$=$\lambda_2 v_1 \Longrightarrow v_1$ *sería un vector propio asociado a* $\lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Ahora vemos que si el resultado es cierto para s autovectores, también se cumple para s+1

Si $\{v_1, v_2, \ldots v_{s+1}\}$ *son autovectores no nulos asociados a autovalores distintos* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{s+1}\}$

SPG suponemos que $\lambda_1 \neq 0$

RA) Si los vectores fuesen l.d, existiría $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots \mu_{s+1}\ v_{s+1} = 0$ *con algún* μ_i *no nulo*

Multiplicando $\lambda_1(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots \mu_{s+1}\ v_{s+1}) = 0$

Aplicando f($\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots \mu_{s+1}\ v_{s+1}$) $= \mu_1\lambda_1 v_1 + \mu_2\lambda_2 v_2 + \ldots \mu_{s+1}\lambda_{s+1} v_{s+1}$=0

Si restamos miembro a miembro ambas igualdades queda: $\mu_2(\lambda_1$-$\lambda_2)\ v_2$+…+ $\mu_{s+1}(\lambda_1$-$\lambda_{s+1})\ v_{s+1}$=0

Es una c.l de s vectores igual a 0: como son l.i, todos los coeficientes son nulos con que los val. Propios son distintos.

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r\}$ son autovalores distintos de un endomorfismo f de V (dimV=n)

- La **multiplicidad algebraica** del valor propio λ_i es la multiplicidad de dicho valor como raíz del polinomio característico. Se denota a_i

- La **multiplicidad geométrica** del valor propio λ_i es la dimensión del subespacio propio S(λ_i). Se denota g_i.

$$g_i = \dim S(\lambda_i) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda_i I)$$

Nota importante

- S(λ_i) es el subespacio solución de un sistema compatible indeterminado (A- λ_iI)X=0 por tanto g_i=dim S(λ_i) =n- rang (A- λ_iI).

Así que

1) dim S(λ_i)>0
2) 1≤ dim S(λ_i) $\leq a_i$ (exponente con el que aparece el factor x- λ_i)

Por tanto, si un autovalor tiene multiplicidad algebraica 1, dim S(λ) =1

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Proposición

La multiplicidad algebraica de un autovalor siempre es mayor o igual que su multiplicidad geométrica $a_i \geq g_i$

¿Cuál era el problema en el ejemplo 2?

$El\ autovalor\ \lambda_1$=1 tiene multiplicidad algebraica 2 pero multiplicidad geométrica 1 (dimS(1)=1)

$$Como \sum g_i = \sum \dim S(\lambda_i) < n$$

no se podía completar una base de autovectores

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Teorema. Caracterización de endomorfismos diagonalizables

Si f es un endomorfismo en V y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ son los autovalores distintos de f con multiplicidades algebraicas $a_1, a_2, \ldots a_k$ y geométricas $g_1, g_2, \ldots g_k$ respectivamente, Entonces,

f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
2) $a_i = g_i \quad i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ dim S(λ_1)+ ….+ dim S(λ_k)=n

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Demostración

⇒

Si f es diagonalizable, existe una base B= $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ formada por autovectores de f
Supongamos estos vectores ordenados $\{v_1 \ldots v_{1s_1}, v_2 \ldots v_{2s_2}, \ldots v_{k1} \ldots v_{ks_k}\}$
donde $v_i \ldots v_{is_i} \in S(\lambda_i)$ i=1…k

Como dim $S(\lambda_i)$= g_i se verifica que $s_i \leq g_i$, $entonces$
n= $s_1 + \ldots + s_k \leq g_1 + \ldots + g_k \leq a_1 + \ldots + a_k \leq$n Entonces $a_1 + \ldots + a_k =$n y $a_i = g_i$

⇐

Ahora suponemos que $a_1 + \ldots + a_k =$n y $a_i = g_i$
entonces el espacio total se descompone en una suma directa V=S(λ_1) ⊕S(λ_2) ⊕ ….. ⊕ S(λ_n)
Tomando una base de cada subespacio propio S(λ_i) y uniendo todas ellas, obtenemos una base de V formada por autovectores y por tanto f es diagonalizable.

Endomorfismos y matrices diagonalizables

Volvamos al ejemplo 2…

Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2: a_1=2
λ_2=-1 con multiplicidad 1 a_2=1

Por tanto a_1+ a_2=3

Pero g_1=dim S($\lambda_1) = 1 < a_1$

Por tanto f no es diagonalizable

Corolario

Si un endomorfismo f de un espacio vectorial sobre K de dimensión n tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- **Ejemplo 3 ¿Para qué valores de "a" son los endomorfismos f_a diagonalizables?**
- $f_a: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ $\quad f_a$**(x,y,z,t)= (ax, (a-1)x+y, (a-1)x+(1-a)y+az+(1-a)t, t)**
- $M_{B_c}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1-a & a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Calculamos el polinomio característico:** $|M-\lambda I|=0$
- $\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ a-1 & 1-a & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-a & a-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)^2\,(1-\lambda)^2$

Tenemos por tanto 2 casos:

- Si a$\neq$ 1: f_a tiene dos autovalores λ_1=a con multiplic. a_1=2 y λ_2=1 con multiplic. a_2=2
- Si a= 1: f_a tiene un solo autovalor λ_1=1 con multiplic. a_1=4

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- **Caso 1: a$\neq$ 1** λ_1=a con multiplic. a_1=2 y λ_2=1 con multiplic. a_2=2
- Vemos cuáles son las dimensiones de los subespacios propios asociados a cada uno de los autovalores:
- dim S(a) = dim ker (f_a-aI)=4- rang (M- aI)=4- rang $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \mathbf{0} & \boldsymbol{1-a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{1-a} \end{pmatrix}$=2
- dim S(1)=dim ker (f_a-I)=4- rang (M- I)=4- rang $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{1-a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$=2

- ***Por tanto a_1= g_1 y también a_2= g_2 y además a_1+ a_2=4, es decir las dimensiones de cada subespacio propio coinciden con las multiplicidades algebraicas de sus respectivos autovalores asociados: por tanto en este caso $f_a$es diagonalizable***

Endomorfismos y matrices diagonalizables

- Caso 2: a= 1 λ_2=1 con multiplic. a_2=4
- Vemos cuáles son las dimensiones de los subespacios propios asociados a ese autovalor

- dim S(1)=dim ker (f_a-I)=4- rang (M- I)=4- rang $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ =4

- ***Por tanto*** $\boldsymbol{a_1}$***=*** $\boldsymbol{g_1}$ ***y también la dimensión del único subespacio propio coincide con la multiplicidad del autovalor asociado: por tanto en este caso*** $\boldsymbol{f_a}$ ***también es diagonalizable***

Diagonalización por semejanza

Procedimiento de diagonalización

- Obtener el polinomio característico $|A-\lambda I|=0$ y calcular los autovalores (sus raíces)
- Para cada autovalor λ, calcular la dimensión del subespacio propio $S(\lambda)$
- Si algún autovalor no verifica que dim $S(\lambda)$= multiplic. algebraica de λ, f no diagonalizable
- Si $\sum \dim S(\lambda)=n$, el endomorfismo es diagonalizable. En caso contrario, no lo es.

Si f es diagonalizable…

- Resolver, para cada autovalor, el sistema $(A-\lambda I)X=0$ y obtener así una base de cada $S(\lambda)$
- Uniendo esas bases obtenemos una base de autovectores del espacio vectorial
- La matriz P es la que tiene en sus columnas los vectores propios
- La matriz diagonal D es la que tiene en su diagonal los valores propios repetidos tantas veces como indique su multiplicidad
- Se puede comprobar que $P^{-1}AP = D$

Diagonalización por semejanza

Cómo saber que f NO es diagonalizable...

cuando las raíces del polinomio característico no pertenecen al cuerpo K en el que trabajamos

Cuando dim $S(\lambda)$ es menor que la multiplicidad algebraica del valor λ

Diagonalización por semejanza

Endomorfismos simétricos

f: V $\longrightarrow$ A endomorfismo de V es un endomorfismo simétrico si

$$\vec{u}.\,\mathrm{f}(\vec{v})=\mathrm{f}(\vec{u})\,\vec{v} \qquad \forall\, \vec{u},\, \vec{v} \in V$$

- Si V es de dimensión finita y si A es la matriz del endomorfismo en una base ortonormal de V, entonces

f es simétrico $\Longleftrightarrow$ A es simétrica

Proposición

Si f es un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo:

- 1) Todos los autovalores de f son reales
- 2) Los vectores propios asociados a autovalores distintos son ortogonales

Teorema espectral

- Si f es un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita V≠ ∅, entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.
- En términos matriciales:
- Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que

$$P^{-1}AP = D = P^{t}AP$$

- En este caso tenemos una **diagonalización por semejanza ortogonal**

Diagonalización por semejanza

❖ Ejemplo 4 Diagonalización por semejanza ortogonal

$$f: \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3 \textbf{ tal que } A_B(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\lambda \end{vmatrix} = -(\mathbf{1}-\lambda)^2(1+\lambda)=0$$

Autovalores: λ_1=1 con multiplicidad 2 λ_2=-1 con multiplicidad 1

- Tratamos ahora de conformar una base de autovectores:
- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -x+z=0; x-z=0;$

S(1) ={(x,y,x)/ x,y ∈R} dimS(1)=2 **Base de S(1): {(1,0,1); (0,1,0)}**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=(-1).v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x+z=0;\ 2y=0$

S(1) ={(x,0,-x)/ z ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): (1,0,-1)**

Diagonalización por semejanza

Base de autovectores {(1,0,1); (0,1,0) ;(1,0,-1)}

- Normalizando, obtenemos una base ortonormal de vectores, que, por columnas, forman la matriz de paso P

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Y $\boldsymbol{P^{-1}AP = P^{t}AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Teorema de Cayley-Hamilton

- Toda matriz cuadrada sobre un cuerpo K, algebraicamente cerrado (cada polinomio de grado ≥ 1, con coeficientes en *K*, tiene al menos una raíz en k), es raíz de su polinomio característico.
- El polinomio característico de un endomorfismo f es un polinomio anulador de f
- El teorema de Cayley-Hamilton establece que cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica.
- Es decir, si $p(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces p(A) es la matriz nula

Teorema de Cayley-Hamilton

❖ Ejemplo 5 Teorema de Cayley-Hamilton

$$f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3 \text{ tal que } A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1/2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Longrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

- **El teorema asegura que p(A)= $-A^3$+4A^2-5 A+2I=0**

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

❑ Subespacios invariantes

Dado un espacio vectorial V y un endomorfismo f: V $\longrightarrow$ multiplica, W es un **subespacio f- invariante o invariante respecto a f** si f(W)⊆W, es decir, si la imagen de todo vector de W está en W

❖ Ejemplo 3

f es un endomorfismo de matriz asociada $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los conjuntos W_1={(x_1,0) / x_1 ∈R} y W_2={(0, x_2) / x_2 ∈R} son f-invariantes

❖ Ejemplo 4

f es una rotación de ángulo $\alpha \neq 0 \; en \; R^3$respecto al eje OZ. M=$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El plano OXY : W_1={(x_1, x_2 ,0) /x_1, x_2 ∈R} y la recta OZ : W_1={(0,0, x_3) / x_3 ∈R} son invariantes
Porque la imagen de un elemento del plano OXY es también un elemento del plano OXY.
Lo mismo ocurre para los elementos del eje OZ

Subespacios invariantes

1) ker f e Im f son subespacios invariantes del endomorfismo

- **Demostración**
- Vamos a demostrar que $\forall x \in ker f, f(x) \in ker f$
- Si x ∈ $ker f: f(x) = 0$=f(0) (por ser f lineal) $\longrightarrow$ f[f(x)]=f(0)=0 $\longrightarrow$ f(x) ∈ $ker f$

2) El subespacio generado por un vector propio es invariante

- Consideramos S(λ)={v ∈V/ f(v)= λv}
- Si v ∈ S(λ), su imagen f(v)= λv y λv ∈ $S(\lambda)$ *por ser subespacio*
- (pero f(λv)= λf(v)= $\lambda\lambda$v ∈ S(λ)
- Si v es un vector propio de f, el subespacio generado por dicho vector es invariante

Nota

Un subespacio invariante puede “variar” cuando se aplica el endomorfismo

El concepto de invariante significa que f(W)⊆W (no que f(W)=W)

Rectas e hiperplanos invariantes

Sea f *un endomorfismo de* V *y* A *su matriz asociada respecto a una base* B

1) L(v) es una recta f invariante si y sólo si v es un autovector de f
2) El hiperplano de ecuación $u_1\ x_1 + u_2\ x_2 + \ldots\ u_n\ x_n = 0$ es f invariante si y sólo si $(u_1\ , u_2\ , \ldots u_n)$

es un autovector no nulo del endomorfismo f^t(endomorfismo cuya matriz respecto de B es A^t)

- L(v) recta f- invariante $\Longleftrightarrow$ f(v)= f(v)= λv que está en L(v)
- $H \equiv u_1\ x_1 + u_2\ x_2 + \ldots\ u_n\ x_n = 0$ con u(no nulo)=$(u_1\ , u_2\ , \ldots u_n)_B \in V$.

Si tomamos x ∈ H, *el hiperplano será* $f -$ *invariante* si y sólo si f(x) ∈ H

f(x) ∈ H $\Longleftrightarrow$ $f(x) = Ax$ *verifica la ecuación de* H $\Longleftrightarrow$ u^tAx=0 $\Longleftrightarrow$ $x^t A^t$u=0

Pero $x^t A^t$u=0 se verifica si y sólo si A^tu= λu (es proporcional a u), equivalente a decir que u es un autovector de A^t asociado al mismo valor propio λ.

❑ Corolario

Para todo $endomorfismo\ f de\ V$

1) Todas las rectas f-invariantes son las contenidas en los subespacios propios S(λ)
2) El número de rectas f-invariantes es igual al número de hiperplanos f-invariantes

➢ Algunos casos prácticos...

❑ Subespacios invariantes de dimensión 2

Sea f $un\ endomorfismo\ de\ V\ de\ dimensión\ 2$

Los posibles subespacios f invariantes de V distintos de V y de {0} son **rectas**

- **Caso 1** f tiene autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $Forma\ canónica\ de\ Jordan$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
- Tiene dos rectas invariantes: S (λ_1) y S (λ_2) (los dos subespacios propios)

- **Caso 2** f tiene

  un único $autovalor\ \lambda\ y$ $\dim S(\lambda) = 2$ $Forma\ canónica\ de\ Jordan$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Todos los vectores de V son autovectores $\longrightarrow$ todas las rectas de V son f invariantes

Subespacios invariantes

- **Caso 3** f tiene

  un único $autovalor\ \lambda\ y$ dim $S(\lambda) = 1$ *Forma canónica de Jordan* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$
- Tiene una única recta invariante: S(λ)={v=(x,y)∈ $V\ t.q.\ Av = \lambda$v}

- **Caso 4** Si K = R y f no tiene autovalores, *entonces no tiene rectas invariantes*
- El polinomio característico tiene dos valores propios complejos conjugados a$\pm bi$
- No admite forma canónica de Jordan; su forma real de Jordan es $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
- No hay rectas f-invariantes

Forma canónica de Jordan

- Un **bloque de Jordan de orden n** es una matriz cuadrada de orden n: $B_n(\lambda)$ tal que $b_{ii} = \lambda$ con $\lambda \in K$ $\quad i = 1,2 \ldots n$;

$$b_{ii-1} = 1 \qquad i = 1,2 \ldots n$$

  y el resto de elementos del bloque son iguales a 0.

- Son bloques formados por un único escalar en la diagonal y en la subdiagonal inferior aparecen "unos"

- Una **matriz de Jordan** es una matriz cuadrada diagonal por bloques de forma que los bloques de la diagonal son bloques de Jordan

- Es una matriz triangular con todos sus elementos nulos salvo en la diagonal principal, donde aparecen los autovalores, y la subdiagonal, donde únicamente aparecen ceros o unos estratégicamente situados.

Forma canónica de Jordan

❖ Ejemplo 6

$$B_1(\lambda) = (\lambda) \quad B_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad B_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

bloques de Jordan de orden 1,2,3

¿Cuántos bloques de Jordan tienen las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

❑ Proposición

- Si $U_1,\dots. U_k$ son subespacios f invariantes con dim $U_i = n_i\ y\ tal\ que$
  V= $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots . \oplus U_k$ y $B_i\ es\ una\ base\ de\ U_i$ i=1,2...k
  Entonces la matriz del endomorfismo f respecto de la base B= $B_1 \cup B_2 \dots \cup B_k$
  es una matriz diagonal por bloques

❖ **Ejemplo 7**

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & -1 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{2} & -1 & 0 & \boxed{0} \\ \hline \boxed{0} & 0 & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & 0 & 2 & \boxed{-1} \end{array}\right) \qquad M_B(g) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

f(v_1) f(v_4) g(v_4)

Observa:

f(v_1)= v_1+2 $v_2 \in U$ f(v_2)= $-v_1$- $v_2 \in U$

g(v_1)= v_1+2 $v_2 \in U$ g(v_2)= $-v_1$- $v_2 \in U$

Por tanto, U=L<v_1, v_2> es un plano f-invariante y g-invariante

f(v_3)= v_3+2 $v_4 \in W$ f(v_4)= $-v_3$- $v_4 \in W$

g(v_3)= v_3+2 $v_4 \in W$ g(v_4)= v_2 $-v_3$- $v_4 \notin W$

Por tanto, W=L<v_3, v_4> es un plano f-invariante pero no es g-invariante

- **Ejemplo 8** $h: \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ **tal que** $A_B(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **B=**$\{e_1, e_2, e_3\}$
- h(e_1)= e_1+ e_3
- h(e_2)= e_1+ $2e_2 + e_3$ $Si\ U = L < e_1, e_3 >$ U es h-invariante y $A_{B|U}(f|U)$=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- h(e_3)= $3e_1$+ e_3

Submatriz de f restringida a un subespacio invariante

Forma canónica de Jordan

Y ahora…
¿qué condiciones deberá tener una base B para que M_B(f) sea un bloque de Jordan?

¿Cuáles serán los vectores?

¿Dónde los buscamos?

Forma canónica de Jordan

- A_B(f)= $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

  $[f(\vec{v}_1)]_B \ [f(\vec{v}_2)]_B \ [f(\vec{v}_3)]_B$

- f$(v_1) = \lambda v_1 + v_2 \Longrightarrow v_2 =f(v_1) - \lambda v_1 = (A - \lambda I)v_1$
- f$(v_2) = \lambda v_2 + v_3 \Longrightarrow v_3 =f(v_2) - \lambda v_2 = (A - \lambda I)v_2$
- f$(v_3) = \lambda v_3 \Longrightarrow 0 =$ f$(v_3) - \lambda v_3 = (A - \lambda I)v_3$

- **v_3 es por tanto un vector propio de f**
- $Como\ v_3 = (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)^2 v_1$
- $0 = (A - \lambda I)v_3 = (A - \lambda I)^2\ v_2 = (A - \lambda I)^3\ v_1$

Forma canónica de Jordan

- Otra forma de expresarlo:
- $v_3 \in S(\lambda)$; $v_3 \in ker\ (f - \lambda I)$
- *¿y qué ocurre con v_2?*

$0 = (f - \lambda I)^2(v_2)$ pero $(f - \lambda I)(v_2) = v_3 \neq 0 \longrightarrow v_2 \in ker(f - \lambda I)^2 - ker\ (f - \lambda I)$

- *¿y v_1?*

$0 = (f - \lambda I)^3(v_1)$ pero $(f - \lambda I)^2(v_1) = v_2 \neq 0 \longrightarrow v_1 \in ker(f - \lambda I)^3 - ker(f - \lambda I)^2$

✓ *Ya tenemos nuestra base*

$\boxed{\text{B}=\{v_1 , (f - \lambda I)(v_1), (f - \lambda I)^2(v_1)\}}$

Forma canónica de Jordan

- Y en general, la base asociada a un bloque de Jordan de orden n es:

$$\mathbf{B}=\{\boldsymbol{v_1}\ ,\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{v_1},\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})^{2}\boldsymbol{v_1},\ldots(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})^{n-1}\boldsymbol{v_1}\}$$

$$=\{\boldsymbol{v_1}\ ,\ (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})(\boldsymbol{v_1}),\ (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})^{2}(\boldsymbol{v_1}),\ldots(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})^{n-1}(\boldsymbol{v_1})\}$$

$donde \qquad v_1 \in ker(f-\lambda I)^{n} - ker(f-\lambda I)^{n-1}$

Proposición

- El subespacio E generado por los vectores $\{v,\ (f-\lambda I)(v),\ \ldots(f-\lambda I)^{k-1}(v)\}$ donde v es un vector propio asociado a un valor propio λ (subespacio k-cíclico) es un subespacio f invariante de dimensión k y la matriz asociada de f|E respecto de la base $\boldsymbol{B_T}=\{\boldsymbol{v_1}\ ,\ (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})(\boldsymbol{v_1}),\ (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})^{2}(\boldsymbol{v_1}),\ldots(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})^{k-1}(\boldsymbol{v_1})\}$ es el bloque de Jordan $M_E(\lambda)$
- Nota: el bloque de Jordan $M_E(\lambda)$ es la matriz asociada a f|E respecto de la base $\mathrm{B_E}$

Forma canónica de Jordan

Subespacios propios generalizados

- Dado V espacio vectorial de dimensión finita n y f: V $\longrightarrow$ V endomorfismo cuya matriz asociada en una base B es A_B(f); λ es un autovalor de f los **subespacios propios generalizados** asociados al autovalor λ son:

$$\boldsymbol{E^i(\lambda)=\ker\,(f-\lambda I)^i}$$

- Es decir v∈ E^i(λ) $\Longleftrightarrow$ $(f-\lambda I)$ (v) ∈ E^{i-1}(λ)
- E^1(λ)=S(λ) es el subespacio propio asociado al autovalor λ
- La expresión implícita es E^i(λ)={v ∈V/ $(f-\lambda I)^i$(v)=0}= {v ∈V/ $(A-\lambda I)^i$X=0}=
- Si v∈ E^i(λ): $(f-\lambda I)^{i+1}$(v)= $(f-\lambda I)$ [$(f-\lambda I)^i$](v)= $(f-\lambda I)$ (0)=0 $\Longrightarrow$ v∈ E^{i+1}(λ):

  Es decir, $$\boldsymbol{E^i(\lambda) \subseteq E^{i+1}(\lambda)}$$
- Los subespacios propios generalizados son invariantes
- Si dim E^i(λ)= d_i , entonces la diferencia de dimensiones entre dos subespacios propios generalizados consecutivos d_{i+1} - d_i es una sucesión decreciente.

Forma canónica de Jordan

❑ Subespacio máximo

- ❑ Como todos los subespacios propios generalizados E^i(λ) son de dimensión finita, esta cadena llega a estabilizarse, es decir, $\exists k\ t.q. \forall t \geq k$, E^t(λ)= E^k(λ). El subespacio E^k(λ) se denomina **subespacio máximo del autovalor λ** y se denota M(λ).
- ❑ Para cada autovalor λ de un endomorfismo, el subespacio máximo M(λ) es f invariante. Es decir, si v∈ M(λ) $\longrightarrow$ f(v)∈ M(λ).
- ❑ la dimensión del subespacio máximo es la multiplicidad algebraica de λ.

❑ La base de M(λ)

- ❑ Si f es un endomorfismo en V y λ es un autovalor de f. Entonces existe una base de M(λ) de modo que la matriz asociada a la restricción $f_{M(\lambda)}$ respecto de esta base es una matriz de Jordan.

Forma canónica de Jordan

❖ Ejemplo 9 Subespacios propios generalizados.

M_B(f)=$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vamos a obtener la forma canónica de Jordan

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2}-\lambda & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =(1-\lambda)^4=0$$

- Autovalores λ=1 $con\ multiplicidad\ 4$

Forma canónica de Jordan

- Tratamos de encontrar una base de modo que la matriz asociada respecto de esta base sea una matriz de Jordan.

➢ E^1(λ=1)=S(1) =ker (A-I)= {v∈ R^4/(A-I)v=0}

- (A−I)v=0 : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-y+2z+2t=0;$ x-y=0

- E^1(λ=1)= S(1) ={(x,x,z,-z)/ x ∈R} $dimE^1(1)$=2 **Base de E^1(λ=1)= {(1,1,0,0); (0,0,1,-1)}**

➢ E^2(λ=1)=ker $(A-I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-I)^2$ v=0}

$(A-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $z+t=0$

E^2(λ=1)={(x,y,z,-z)/ x ∈R} $dimE^2(1)$ =3 **Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0,0); (0,1,0,0);(0,0,1,-1)}**

Forma canónica de Jordan

- E^3(λ=1)=ker $(A-I)^3$= {v∈ R^4/ $(A-I)^3$ v=0}

$(A-I)^3$v=0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E^3(λ=1)={(x,y,z,t)/ x,y,z,t ∈R} $dimE^3(1)$ =4 **Base de E^2(λ=1)= Base canónica de R^4**

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- Esquema del problema
- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 4
  dim S(1)= $dimE^1(1)$=2 multiplicidad geométrica 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1) ⊆** $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)**

2	**3**	**4**
v_3	v_2	v_1
v_4		

- Colocamos bajo cada subespacio $E^i(\lambda)$ un número de vectores igual a la diferencia entre dim$E^i(\lambda)$ y dim $E^{i-1}(\lambda)$
- $v_1 \in ker(f-\lambda I)^3$- $ker(f-\lambda I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,0,0,1)**
  $v_2 \in ker(f-\lambda I)^2$- $\ker(f-\lambda I)$
- ¿y el resto? Recuerda: $\boxed{\textbf{B=}\{\boldsymbol{v_1}, (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})(\boldsymbol{v_1}), (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{\lambda I})^2(\boldsymbol{v_1})\}}$
-
- $\boldsymbol{v_2 = (A-I)v_1}$**=(1,0,0,0)** $\boldsymbol{v_3 = (A-I)v_2 = (A-I)^2 v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)}$

Forma canónica de Jordan

- ¿y v_4? Basta elegir un vector de $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** que sea linealmente independiente con v_3:(0,0,1,-1)

- **Hay tantos bloques como filas y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número total de bloques coincide con la dimensión del subespacio S(λ)=** $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1), es decir, es igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ**
  - Bloque 1: 3x3: corresponde a los vectores v_1, v_2 y v_3 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: corresponde al vector v_4 de la segunda fila

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas* ***de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo***

- Una base de cada subespacio propio generalizado $\boldsymbol{E^i}$**(λ)** se obtiene a partir de los vectores de las columnas 1 hasta i

Forma canónica de Jordan

Base de Jordan de M(1): B´={v_1, v_2, v_3, v_4}

$$M_{B'}(\text{f})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\text{=J (matriz de Jordan)}$$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a L< v_1, v_2 , v_3> subespacio f-invariante y 3 cíclico (generado por v_1, (f- λI)(v_1), (f– λI)^2(v_1))

- Bloque 2: 1x1 corresponde al vector v_4 de la segunda fila

Y la matriz de cambio de base…

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- f es un endomorfismo en V $y\ M\ es\ la\ matriz\ asociada\ en\ una\ base\ B$. Si existe una base B´ tal que la matriz asociada a f en la base B´ es una matriz de Jordan semejante a M, diremos que **es la forma canónica de Jordan del endomorfismo f.**

Teorema de existencia

- f es un endomorfismo en V $de\ dimensión\ n$.

Entonces existe una base B en la que la matriz asociada al endomorfismo M_B(f) es una matriz de Jordan si y sólo si tiene n autovalores contados con su multiplicidad

Forma canónica de Jordan

¿la matriz de Jordan es única para cada endomorfismo f?

❑ Unicidad (salvo permutación de bloques)

❑ *Si cambiamos el orden de las filas de la tabla, óbtendremos* una matriz de Jordan con los bloques colocados de forma diferente

Forma canónica de Jordan

❖ Ejemplo 10 Posibles formas canónicas de Jordan

$$M_B(\mathrm{f})=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 13 \\ 5 & 3-\lambda & 7 \\ -9 & -4 & -12-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$$

- Autovalores λ=1 $con\ multiplicidad\ 2\ y\ \lambda=-1\ con\ multiplicidad\ 1\ (No\ es\ diagonalizable)$

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=1)=S(1) =ker (A-I)= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

- (A−I)v=0 : $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 13 \\ 5 & 2 & 7 \\ -9 & -4 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $9x+4y+13z=0; 5x+2y+7z=0$

- E^1(λ=1)= S(1) ={(x,x,-x)/ x ∈R} $dimE^1(1)$=1 $\longrightarrow$ **Base de E^1(λ=1)= {(1,1,-1)}**

- E^2(λ=1)=ker $(A-I)^2$= {v∈ R^3/ $(A-I)^2$ v=0}

$(A-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} -16 & -8 & -24 \\ -8 & -4 & -12 \\ 16 & 8 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x+y+3z=0$

E^2(λ=1)={(x,-2x-3z,z)/ x ∈R} $dimE^2(1)$ =2 $\longrightarrow$ **Base de E^2(λ=1)= {(1,-2,0);(0,-3,1)}**

- E^1(λ=-1)=S(−1) =ker (A+I)= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 : $\begin{pmatrix} 11 & 4 & 13 \\ 5 & 4 & 7 \\ -9 & -4 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $11x+4y+13z=0; 5x+4y+7z=0$

E^1(λ=-1)= S(-1) ={(-z,-z/2,z)/ x ∈R} $dimE^1(1)$=1 $\longrightarrow$ **Base de E^1(λ=1)= {(-1,$\frac{-1}{2}$, 1)}**

Forma canónica de Jordan

- $Como\ dimE^2(1)$ =2 que es la multiplicidad de λ=1: $E^2(1)$es el subespacio máximo: M(1)

- Esquema del problema
- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 2
  dim S(1)= $dimE^1(1)$=1 multiplicidad geométrica 1
- **E^1(λ=1)** ⊆ **E^2(λ=1)=M(1)** **E^1(λ=−1)=S(-1)**
  1 **2** **1**
  v_2 v_1 v_3

- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(f-\lambda I)^2$- $ker(f-\lambda I)$ ⟶ **v_1=(1,-2,0)**
- ¿y el resto? un vector de **E^1(λ=−1):**
- **$v_2 = (A-I)v_1$=(1,1,-1)** **y** **v_3 =(-1,$\frac{-1}{2}$, 1)**

Forma canónica de Jordan

- Si $B_1=\{v_1, v_2, v_3\}$ la matriz de Jordan asociada será

$$J_1=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ siendo la matriz de paso } P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$$

Porque M v_1=(M-I) v_1+ v_1= v_2+ v_1

M v_2=v_2

M v_3=$-v_3$

Si intercambiamos los vectores del bloque correspondiente a λ=1: aparece el bloque traspuesto (si se toman los vectores de cada fila de izquierda a derecha)

- Si $B_2=\{v_2, v_1, v_3\}$ la matriz de Jordan asociada será

$$J_2=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ siendo la matriz de paso } P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_2 & v_1 & v_3 \end{matrix}$$

Porque M v_1=v_1

M v_2=(M-I) v_2+ v_2= v_1+ v_2

M v_3=$-v_3$

Forma canónica de Jordan

❖ Ejemplo 11 Permutaciones de bloques

$$M_B(\text{f})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Autovalores: $\lambda_1 = 1\ con\ multiplicidad\ algebraica\ 2\ y\ geométrica\ 1$
  $\lambda_2 = 2\ con\ multiplicidad\ algebraica\ 4\ y\ geométrica\ 2$
  $\lambda_3 = 3\ con\ multiplicidad\ algebraica\ 1\ y\ geométrica\ 1$
- M(2)= ker $(f-2I)^3 \neq$ ker $(f-2I)^2$

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=1) ⊆ E^2(λ=1)=M(1)

  1 **2**

  v_2 v_1
- E^1(λ=2) ⊆ E^2(λ=2) ⊆ E^3(λ=2)=M(2) E^1(λ=3)

  2 **3** **4** **1**

  v_5 v_4 v_3 v_7

  v_6

➢ Para **λ=1** tenemos un solo bloque porque la multiplicidad geométrica es dim **S(λ)=1**

Será un bloque de orden 2 porque la multiplicidad algebraica es 2 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

➢ Para **λ=3** tenemos un solo bloque porque la multiplicidad geométrica es dim **S(λ)=1**

Será un bloque de orden 1 porque la multiplicidad algebraica es 1 $(\mathbf{3})$

➢ Para **λ=2** tenemos 2 bloques porque la multiplicidad geométrica es dim **S(λ)=2**

Será un bloque de orden 3 y otro de orden 1 como vemos en el esquema: (2) y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad J' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- J es la forma canónica de Jordan en la base $\{ v_1, v_2, v_7, v_6, v_3, v_4, v_5\}$
- J´ es la forma canónica de Jordan en la base $\{ v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2\}$
- J´´ es la forma canónica de Jordan en la base $\{ v_5, v_4, v_3, v_7, v_1, v_2, v_6\}$
- J´´´ es la forma canónica de Jordan en la base $\{ v_7, v_2, v_1, v_6, v_3, v_4, v_5\}$

$$J''' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad J'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

¿Y si las raíces del polinomio característico no son reales?

Si las raíces de p(**λ**) son complejas, entonces el número de autovalores reales contando multiplicidades es menor que n: Ese endomorfismo no admite una forma canónica de Jordan (no se dan las condiciones del teorema de existencia)

¡Vamos a encontrar una forma canónica real!

Forma canónica de Jordan

Forma real de Jordan

- Si f es un endomorfismo y A es su matriz asociada respecto a una base B= $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$

Si λ=a+bi es un autovalor complejo de f, su conjugado $\bar{\lambda} = a - bi$ también es autovalor.

- ***Por cada par de raíces complejas conjugadas λ=a+bi y $\bar{\lambda} = a - bi$ aparece en la matriz canónica real un bloque 2x2 de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$***
- Idea: Se basa en considerar que A es la matriz de un endomorfismo real f y, a la vez es la matriz de un endomorfismo complejo en el espacio vectorial $\widehat{V}$={u+wi/u,w∈ V}
- $\widehat{V}$ se denomina **extensión compleja de V.** Es un espacio vectorial de la misma dimensión que V y B también es una base de V.
- Además V⊆ $\widehat{V}$ porque V={u+0i/u ∈ V}
- El endomorfismo $\widehat{f} : \widehat{V} \longrightarrow \widehat{V}$

u+wi $\longrightarrow$ f(u)+f(w)i es la **extensión compleja de f**

Forma canónica de Jordan

- Se cumple que las matrices $M_B(f) = M_B(\hat{f})$ *tienen el mismo polinomio* característico
- Pero $\hat{f}$ verifica el teorema de existencia $\longrightarrow$ admite una matriz de Jordan compleja
- Para cada par de autovalores complejos de f: λ=a+bi y $\bar{\lambda} = a - bi$
- **Si v es un autovector asociado a $\boldsymbol{\lambda}$: $\bar{v}$ *es un autovector asociado a* $\bar{\lambda}$**

$\hat{f}(v) = \lambda v$ $\overline{\hat{f}(v)} = \overline{\lambda v}$

Por otra parte: (propiedades de conjugados y f lineal): $\hat{f}(\bar{v}) = \bar{\lambda}\,\bar{v}$

Proposición

- Si B= $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ *es una base de* $M(\boldsymbol{\lambda})$, entonces $\bar{B} = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots \overline{v_n}\}$ *es una base de* $M(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$

- La idea es que los vectores $\{u_1, w_1, u_2, w_2, \ldots u_n, w_n\}$ están en $M(\boldsymbol{\lambda}) \oplus M(\bar{\boldsymbol{\lambda}})$, son linealmente independientes y dan lugar a un bloque 2j con aspecto de bloque de Jordan en la matriz del endomorfismo.

Forma canónica de Jordan

- La **forma real de Jordan** $\boldsymbol{J_R(f)}$ se construye a partir de la forma compleja de Jordan cambiando las parejas de bloques complejos $\boldsymbol{B_j}(\lambda)$ y $\boldsymbol{B_j}(\bar{\lambda})$ por un bloque real de tamaño 2jx2j de la forma $\boldsymbol{C_{2j}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}(\lambda) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I_2} & \boldsymbol{C}(\lambda) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I_2} & \boldsymbol{C}(\lambda) \end{pmatrix}$ donde

$\boldsymbol{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

❖ Ejemplo 12 Forma real de Jordan

Un endomorfismo f tiene A=$M_B(\hat{f}\ )\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ p(λ)=$(\lambda^2-2\lambda+2)^2$

- Tiene dos raíces complejas: λ =1+i con multiplicidad 2 y $\bar{\lambda}$ =1-i con multiplicidad 2
- La **forma canónica compleja de Jordan** del endomorfismo $\hat{f}$ es

$$\boldsymbol{J(\hat{f}\ )= M_{B'}\ (\widehat{f})} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_2(1+i) & 0 \\ \hline 0 & B_2(1-i) \end{array}\right)$$

- Matriz de Jordan compleja del endomorfismo complejo $\hat{f}$ respecto a la base B´.

$$\boxed{\text{B´=}\{v_1,\ v_2 = \text{(A-(1+i)I)}\ v_1,\ \overline{v_1},\ \overline{v_2}\}}$$

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=1+i)=S(1+i) =ker$(A-(1+i)I)=$ {v∈ $R^4/(A-(1+i)I)$v=0}
- (A−(1+i)I)v=0 : $\begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -i & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $-ix+z=0; -x-iy+t=0;$ *-x-iz+2t=0; y-z+it=0*
- $dimE^1$(1+i)=1 E^1(1+i)={-iy,y,y,0)/x∈ R} $Base: (-i, 1,1,0)$

B´={v_1, v_2 = (A-(1+i)I) v_1, $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$}

Forma canónica de Jordan

- E^2(λ=1+i)=ker $(A-(1+i)I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-(1+i)I)^2$ v=0}

$(A-(1+i)I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2i & 2 \\ 2i & 0 & -2 & -2i \\ 2i & 2 & -4 & -4i \\ 0 & -2i & 2i & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\{(-iz+t, z+it, z, t)\}$

- *Elegimos* $v_1 \in ker(f-(1+i)I)^2 - ker(f-(1+i)I)$ ⟶ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,i,0,1)** ⟶ $\overline{\boldsymbol{v_1}}$**=(1,-i,0,1)**
- Y $\boldsymbol{v_2}$ un vector de $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1+i):**
- $\boldsymbol{v_2=(A-(1+i)I)v_1}$**=(-i,1,1,0)** ⟶ $\overline{\boldsymbol{v_2}}$**=(i,1,1,0)**

$\boldsymbol{E^1}$**(λ=1+i)** ⊆	$\boldsymbol{E^2}$**(λ=1+i)=M(1+i)**
1	**2**
v_2	v_1

$\boldsymbol{E^1}$**(λ=1−i)** ⊆	$\boldsymbol{E^2}$**(λ=1−i)=M(1-i)**
1	**2**
$\overline{v_2}$	$\overline{v_1}$

$\boxed{B' = \{v_1,\ v_2 = (A-(1+i)I)\,v_1,\ \overline{v_1},\ \overline{v_2}\}}$

¿y cuál será la forma real de Jordan?

- Si consideramos v_1=$u_1 + w_1$i y v_2=$u_2 + w_2$i
  B´´={u_1, w_1, u_2, w_2} son una base de V (vectores reales)
- En esta base $\boldsymbol{M_{B''}}\ (\widehat{\boldsymbol{f}})$= $\boldsymbol{M_{B''}}\ (\boldsymbol{f})$= $\boldsymbol{J_R}\ (\boldsymbol{f})$ es la matriz real de Jordan

$$\boldsymbol{J_R}\ (\boldsymbol{f})=\begin{pmatrix} c(1+i) & 0 \\ I_2 & C(1+i) \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- v_1=(1,i,0,1)=(1,0,0,1)+i(0,1,0,0) v_2=(-i,1,1,0)=(0,1,1,0)+i(-1,0,0,0)

u_1 w_1 u_2 w_2

P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{B''B}$

$\boxed{\text{B´´=}\{u_1, w_1, u_2, w_2\}}$

Exponencial de una matriz

- Dada una matriz A cuadrada de orden n, $definimos\ e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots \frac{A^k}{k!} \ldots$

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}A\right)^n$$

$$e^A \quad se\ denomina\ \boldsymbol{exponencial\ de\ la\ matriz\ A}$$

- Si J es la forma canónica de Jordan asociada, como A =PJP^{-1} $\Longrightarrow$ e^A =Pe^J P^{-1}
- Si J=$\left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array}\right)$ $\Longrightarrow$ e^J =$\left(\begin{array}{c|c|c} e^{J^1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & e^{J^r} \end{array}\right)$
- Si J_i=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ e^{J_i}= $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- Si $J_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es r_ix r_i $\Rightarrow$ $e^{J_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 & \\ \frac{1}{(r_i-1)!} & \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$

- Si $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ es r_ix r_i $\Rightarrow$ $e^{J_i} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 & \\ \frac{1}{(r_i-1)!} & \frac{1}{(r_i-2)!} & \frac{1}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- Si A tiene algún autovalor complejo λ=a+bi y $e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} = e^{a}\begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$
- $e^{At} = Pe^{Jt}\,P^{-1}$ siendo J= P^{-1}AP
- Si J= $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$ ⟹ $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r t} \end{pmatrix}$
- Si J_i= $\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$ es r_ix r_i ⟹ $e^{J_i t}= e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{t}{1!} & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 & \\ \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} & \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} & \frac{t^{r_i-3}}{(r_i-3)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$

Factorización LDU

- ❑ A veces queremos calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales AX=B en el que la matriz de coeficientes A es fija e invertible y la matriz de términos independientes es variable.
- ❑ Tratamos con la factorización de evitar tener que calcular un sistema para cada vector de términos independientes distinto.
- ❑ **Factorización LU** es una descomposición de la matriz invertible A$\in M_n(k) como\ un\ producto\ A = LU$ con
  - L $\in M_n(k)$ matriz invertible triangular inferior
  - U $\in M_n(k)$ matriz invertible triangular superior

❑ Así AX=B $\Longleftrightarrow$ LUX=B $\Longleftrightarrow$ LY=B y UX=Y

- Resolver LY=B despejando las incógnitas de arriba hacia abajo
- Resolver UX=Y despejando incógnitas de abajo hacia arriba

Factorizaciones triangulares

TEOREMA. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y U una matriz escalonada por filas equivalente con todos los pivotes 1 (la cual será triangular superior)

- Si U se puede obtener a partir de A sin necesidad de hacer ninguna permutación entre sus filas, entonces existe una matriz triangular inferior L de forma que $A = LU$. Además, si A es invertible, entonces esta factorización es única.

- Si para llegar a U se requieren permutaciones de filas y A es invertible, entonces existe una matriz P tal que $PA = LU$ donde P es simplemente un producto de matrices elementales de la forma F_{ij}. Para cada P (ya que puede haber más de una) la factorización es única.

Factorización LDU

- **Algoritmo para encontrar una factorización LU de una matriz**

Pasos:

- Encontrar una matriz escalonada por filas con pivotes=1 equivalente a A $\longrightarrow$ U
- Para llegar a esa matriz habremos realizado una serie de transformaciones elementales que corresponden a una serie de matrices elementales $U = L_n x \ldots x L_1$A
- Entonces A=$(L_n x \ldots x L_1)^{-1}$U=LU

Factorización LDU

Recuerda:

Matriz Elemental (por filas). Se obtiene a partir de la matriz identidad I_m de la siguiente manera:

- F_{ij} : matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le han intercambiado las filas i, j
- $F_i(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le ha multiplicado la fila i por $\alpha \in \mathbb{K}$
- $F_{ij}(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la cual se le ha sumado a la fila i la fila j multiplicada por α

Factorización LDU

❖ Ejemplo 13 Factorización LU

Resolver el sistema de ecuaciones lineales AX=B $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$

- 1)Hacemos la descomposición A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$

- 2) Resolvemos LY=B $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$ $y_1=11;\ 5y_1+y_2=70;\ -2y_1+3y_2+y_3=17$

$y_1=11;\ y_2=15;\ y_3=-6$

Factorización LDU

- Resolvemos UX=Y $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$ $-2x_3$=-6; $3x_2$+ $7x_3 = 15$; $4x_1$-$2x_2$+ x_3=11

x_3=3; $x_2 = -2$; $x_1 = 1$

- X=(1,-2,3) es la solución del sistema AX=B

Teorema

Si A∈ $M_n(k)$ *es una matriz invertible. Son equivalentes*:

1) Es posible transformar A en una matriz triangular mediante operaciones elementales de filas (sin intercambiar filas)
2) Todos los menores principales de A son distintos de 0
3) A admite una factorización LU

Factorización LDU

Descomposición LU $de\ la\ matriz\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

- A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \underset{f_1(\frac{1}{4})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 - 20f_1 \\ f_3 + 8f_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \underset{f_2(\frac{1}{3})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix}$

$\underset{f_3 - 9f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$= U(matriz triangular superior equivalente a A)

- U=$F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right).\ F_{31}(8).\ F_{21}(-20).F_1\left(\frac{1}{4}\right)$A $\longrightarrow$ A=$\left(F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right).\ F_{31}(8).F_{21}(-20).F_1\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1}$.U

Factorización LDU

❖ Ejemplo 13 Factorización LU

¿Cómo se construye la matriz L?

- $L = \left(F_{32}(-9).\ F_2\left(\frac{1}{3}\right)\ .F_{31}(8)\ .F_{21}(-20)\ .F_1\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-1} = F_1\ (4)F_{21}(20)F_{31}(-8)F_2(3)F_{32}(9) =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 20 & 3 & 0 \\ -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

(matriz triangular inferior)

- Podemos comprobar que LU= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 20 & 3 & 0 \\ -8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ =A

CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Factorización LDU

¿GAUSS O LU?

- Sistema de ecuaciones lineales
- n ecuaciones con n incógnitas

Sistema escalonado
$\frac{n^2}{2}\, operaciones$

Método de Gauss
$\frac{n^3}{3}\, operaciones$

Factorización LDU

- **Factorización LDU** es una descomposición de la matriz invertible A$\in M_n(k)$ *como un producto* $A = LDU$ con
  - L $\in M_n(k)$ matriz invertible triangular inferior
  - D $\in M_n(k)$ matriz invertible diagonal
  - U $\in M_n(k)$ matriz invertible triangular superior

✓ Idea: sacar los elementos diagonales de la matriz U para formar la matriz D

Factorización LDU

❖ Ejemplo 14 Factorización LDU

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

- 1)Hacemos la descomposición $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$

- 2) $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} y\ U=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

¿Cuál es el significado real de esta exp

- *f(v)=Av* es una transformación lineal; puede ser un giro o un estiramiento.
- *f(v)=Av=* λ*v* es un estiramiento
- La importancia de esto es ver claramente en qué aspectos una matriz puede producir el mayor efecto (potencia), y clasificar y discutir e investigar de acuerdo a cada vector propio generado (generalmente se estudian los que tienen los valores propios más grandes).
- Cuando la matriz tiene una dimensión grande, n, esa transformación puede tener muchas direcciones de transformación.
- Se trata de investigar cuáles son las direcciones cambiantes más importantes de una matriz (los nodos con mayor influencia de un grafo)
    - Los autovectores nos proporcionan las características más importantes de la matriz
    - Los autovalores nos dan una medida de la importancia de esas características.

$$f(v)=Av=\lambda v$$

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Principal Component Analysis (PCA)*** es un método estadístico que permite simplificar la complejidad de problemas con muchas dimensiones a la vez que conserva su información (Reducción de dimensionalidad).
- PCA permite encontrar un número de factores subyacentes que explican una parte importante de la variabilidad observada en los datos originales.
- Principal Component Analysis es una técnica de tipo "unsupervised learning" :el objetivo no es predecir YY sino extraer información empleando los predictores, por ejemplo, para identificar subgrupos.
- El método de PCA permite por lo tanto "condensar" la información aportada por múltiples variables en solo unas pocas componentes. Esto lo convierte en un método muy útil de aplicar previa utilización de otras técnicas estadísticas tales como

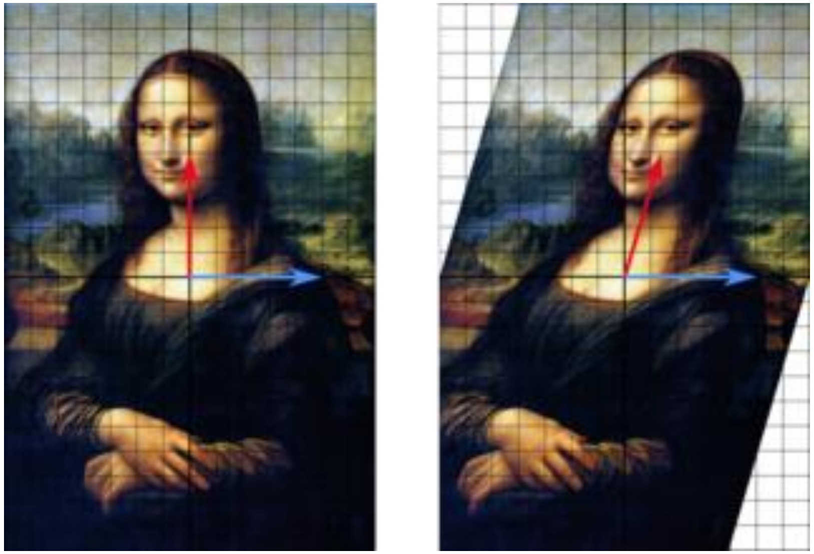
- ***Interpretación geométrica del PCA***
- El vector que define la primera componente principal (Z1Z1) sigue la dirección en la que las observaciones varían más La proyección de cada observación sobre esa dirección equivale al valor de la primera componente para dicha observación. La proyección de cada observación sobre esa dirección equivale al valor de la primera componente para dicha observación.

- La segunda componente sigue la segunda dirección en la que los datos muestran mayor varianza y que no está correlacionada con la primera. La condición de no correlación entre componentes principales equivale a decir que sus direcciones son perpendiculares/ortogonales.

- Cada componente principal se obtiene por combinación lineal de las variables originales.

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

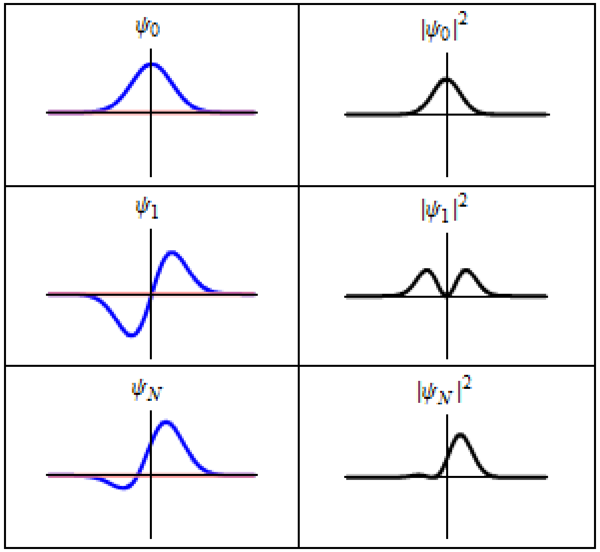
- Cada punto del cuadro se representa mediante un vector de posición
- La transformación lineal aquí se llama shear mapping..
- A base de transformaciones lineales se pueden obtener modificaciones de la imagen mapeando vectores en una variedad de espacios.



Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Ecuación de Schrödinger***

  - Cuando el operador Hamiltoniano actúa sobre cierta función de onda Ψ, y el resultado es proporcional a la misma función de onda Ψ, entonces Ψ es un estado estacionario, y la constante de proporcionalidad, el autovalor, es la energía del estado Ψ.



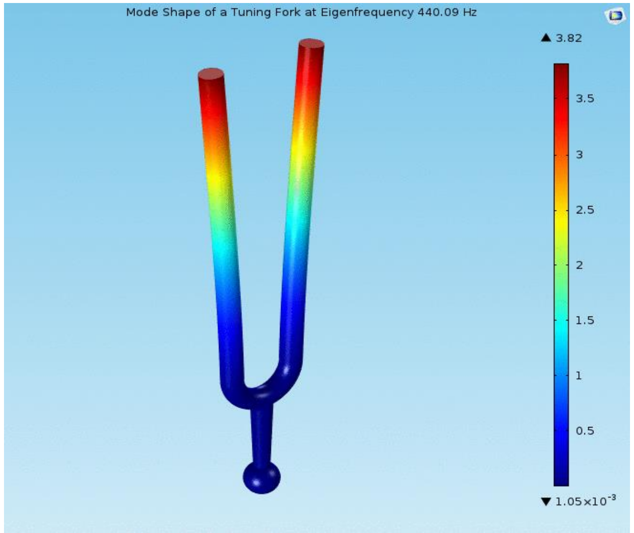
- ***Molecular orbitals***

En mecánica cuántica y en particular en la física atómica y molecular, eigenvalues y eigenvectors aparecen en la teoría de Hartree-Fock .
Los autovalores serían los potenciales de ionización (teorema de Koopman) y los autovectores los orbitales moleculares

Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Análisis vibratorio en estructuras mecánicas*** con un gran número de grados de libertad.

- Los autovalores son las frecuencias de vibración y los autovectores las formas.
- Movimiento sin amortiguación:
  $mx'' = -kx$ aceleración proporcional a la posición
- Al estudiar el problema en n dimensiones m es una matriz de masa y k una matriz de rigidez:
  Las soluciones se obtienen a partir de autovalores y autovectores



Eigenvalues/Eigenvectors. Casos de aplicación

- ***Eigenfaces/Eigenvoices***
  - En procesamiento de imágenes, el número de pixels sería la dimensión del subespacio vectorial
  - Es una aplicación de PCA que tiene muchas aplicaciones en reconocimiento e identificación facial.
  - De modo similar las "eigenvoices" representan una dirección de variabilidad en la pronunciación de una determinada persona.
  - A partir de combinaciones lineales de una serie de eigenvoices, podemos obtener/construir una nueva voz.