Endomorfismos. Diagonalización

Problemas resueltos

Mar Angulo Martínez

mar.angulo@u-tad.com

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 5**

$f: V \longrightarrow V$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K. Demostrar que si B es una base de V formada por autovectores de f, entonces la matriz $M_B(f)$ *es diagonal*

- B=$\{v_1, v_2,\ldots v_n\}$ *base de* V *formada por autovectores de* f
- Existen $\lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_n \in$R que verifican f($v_1$)= $\lambda_1 v_1$; f(v_2)= $\lambda_2 v_2$… f(v_n)= $\lambda_n v_n$
- Construimos la matriz asociada a esta aplicación lineal

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ f(v_1) & & f(v_n) \end{array}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 6**

- Matriz 2x2: M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}= ad-a\lambda-d\lambda+\lambda^2-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$$

- Matriz 3x3: M=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$-\lambda^3+(a+e+i)\lambda^2-[(ei-hf)+(ai-cg)+(ae-db)]\lambda+aei+dhc+bfg-gec-hfa-dbi$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 7**

Demostrar que si A es una matriz de orden n con polinomio característico

p$(\lambda) = (a-\lambda)^n$

a$\in K$; $\quad entonces, A\ es\ diagonalizable\ si\ y\ sólo\ si\ es\ una$ matriz escalar, es decir si A =aI_n.

- p$(\lambda) = (a-\lambda)^n$ a$\in K$ la multiplicidad algebraica de λ_1=a es por tanto n
- A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ S(a) =ker (A-aI) tiene dimensión n
  $\Longleftrightarrow$ rang (A-aI)=0 $\Longleftrightarrow$ A-aI$\equiv 0$ $\Longleftrightarrow$ $A = aI$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 8**
  - Una matriz cuadrada A y su matriz traspuesta A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores

1) λ es autovalor de A $\Longleftrightarrow$ el sistema (A-λI)X=0 tiene solución no trivial $\Longleftrightarrow$ rang (A-λI)<n (no es completo) $\Longleftrightarrow$ |A-λI|=0

Pero |A-λI|= |(A−λI)^t|= |A^t-λI|=0 y entonces λ *es autovalor de* A^t

- Una matriz cuadrada A y su matriz traspuesta A^t NO tienen los mismos autovectores

Ejemplo: A=$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ A^t **=**$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

- Su ecuación característica $|A-\lambda I|$ =$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$=0
- Autovalor:λ=0 con multiplicidad 2

- **S(0):** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y = 0$ **S(0):** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ **x=0**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 9**

A=$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{13} & \mathbf{-3-\lambda} \end{vmatrix} = (\mathbf{-1}-\lambda)(4-\lambda)(\mathbf{-3}-\lambda)+(4-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=4 con multiplicidad 1 λ_2=-2 con multiplicidad 2
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(4) = ker (A-4I)= {v=$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in R^3$/Av=4.v}= {v∈ R^3/(A-4I)v=0}
- (A−4I)v=0 ⟹ $\begin{pmatrix} -5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-5x-7y+z=0; -x+13y-7z=0;$
- S(1) ={(x,-x,-2x)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,-1,-2)**

- S(-2) = ker (A+2I)= {v=$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in R^3$/Av=-2.v}= {v∈ R^3/(A+2I)v=0}
- (A−3I)v=0 ⟹ $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 13 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-7\,y+z=0; 6y=0;$ -z+13y-z=0
- S(1) ={(x,0,-x)/ x ∈R} dimS(-2)=1 **< 2 (multiplicidad de $\lambda=-2$)**
- **No es posible encontrar una base de autovectores de A por tanto la matriz NO es diagonalizable**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

B=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5-\lambda} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-6} & \mathbf{4-\lambda} \end{vmatrix} = (\mathbf{-1}-\lambda)(4-\lambda)(\mathbf{-3}-\lambda)+(4-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=4 con multiplicidad 1 y λ_2=-2 con multiplicidad 2
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=4.v}= {v∈ R^3/(A-4I)v=0}
- (A−4I)v=0 ⟹ $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y + z = 0;\ x - 3y + z = 0;\ x\text{-}y\text{=}0$
- S(4) ={(x,x,2x)/ x ∈R} dimS(4)=1 **Base de S(4): (1, 1,2)**

- S(-2) = ker (A+2I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=-2.v}= {v∈ R^3/(A+2I)v=0}
- (A+2I)v=0 ⟹ $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y + z = 0$ ⟹ $y = x + z$
- S(1) ={(x,x+z,z)/ x ∈R} dimS(-2)=2 **Base de S(-2):{(1,1,0);(0,1,1)}**
- **B es diagonalizable**
- **La matriz de paso P se obtiene poniendo los autovectores en columnas**

P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y D=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Comprobar D= P^{-1}AP ⟺ PD=AP

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 10**

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)\lambda^2 = 0$$

- Autovalores: λ_1=0 con multiplicidad 2; λ_2=2 y λ_3=-1 con multiplicidad 1
- Calculamos ahora los subespacios propios

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(0) = ker (A-0I)= {v=(x, y, z, t) $\in R^4$/Av=0}= {v$\in R^4$/Av=0}
- (A−0I)v= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x - z = 0;\ 2x - y - 3z = 0;\ t=0$
- S(0) ={(z,-z,z,0)/ x ∈R} dimS(0)=1$\neq$ 2 **(multiplicidad de λ=0)**
- **A no es diagonalizable**

Problema 11

A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1-\lambda} \end{vmatrix} =(3-\lambda)(\lambda^2\text{-}2\lambda+3)= (3-\lambda)[\ (1+i\sqrt{2})-\lambda]\ [\ (1-i\sqrt{2})-\lambda] = 0$$

- Autovalores: λ_1=3 λ_2= 1+i$\sqrt{2}$ y λ_3= 1-i$\sqrt{2}$ con multiplicidad 1
- No es diagonalizable en R; es diagonalizable en C.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 12** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

➢ 1º) Planteamos la ecuación característica

➢ P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4=0$$

➢ Autovalores: λ_1=0 con multiplicidad 4;

➢ Calculamos ahora los subespacios propios

➢ S(0) = {v=(x, y, z, t) ∈ R^4/Av=0}= {v∈ R^4/Av=0}

$$(A-0I)v=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

➢ S(0)= {v=$(x, 0,0,0)$ $/x \in R$} dimS(0)=1<4

➢ NO es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 13**

- M_{B_C}(f)=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$

Sea f: $el\ endomorfismo\ en\ R^3 \quad tal\ que:$

f(x,y,z)=(3x, -y+az, 3x+bz)

¿para qué valores de “a” y “b” es f diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1-\lambda} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b-\lambda} \end{vmatrix}=(\mathbf{-1}-\lambda)(3-\lambda)(b-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 y λ_2=3 y λ_3=b
- Caso 1: si b$\neq -1, 3$ f tiene 3 valores propios distintos $\Longrightarrow$ f es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Caso 2: Si b=-1 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=3 con multiplicidad 1
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

> S(-1) = ker (A+I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=-1.v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x = 0; az = 0;$$

- *Si a=0 :* S(-1) ={(0,y,z)/ x ∈R} dimS(-1)=2 **Base de S(-1): {(0, 0,1);(0,1,0)}**

Si b=-1 y a=0 f sí es diagonalizable porque las dim S (λ_i)= a_i

- *Si a≠0 :* S(-1) ={(0,y,0)/ x ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): {(0,1,0)}**

En este caso, f no es diagonalizable porque dim S(-1)< multip. λ_1=-1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Caso 3: Si b=3 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 1 y λ_2=3 con multiplicidad 2
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

➢ S(3) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=3.v}= {v∈ R^3/(A-3I)v=0}

(A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 0; \quad -4y + az = 0;$

- dim S(3) =1 porque rang (A-3I)=2; entonces dim S(3)<2

Entonces, f no es diagonalizable porque dim S(3)< multip. λ_2=3

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 14**

En R^4 consideramos un endomorfismo f tal que:

Ker $(f - Id)^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Ker $(f - Id)^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / \ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \ x_4 = 0\}$

Ker $(f - Id) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / \ x_1 + x_3 = 0; x_4 = 0; \ x_2 = 0\}$

Ker $(f) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / \ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$

a) Determinar una base B´ de vectores tal que $M_{B'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f que cumpla las condiciones anteriores. Indicar cuál es la forma canónica de Jordan y qué condiciones verificará el endomorfismo.

b) Calcular la matriz A asociada al endomorfismo f en la base canónica de R^4 y la expresión analítica de f.

c) Determinar los autovalores de $(A - 2I)^{-2}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- λ=1 es autovalor y el esquema que podemos deducir es el siguiente:
- Ker $(f-Id)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/\ x_1+x_3=0; x_4=0;\ x_2=0\}$=$\{(x_1,0,-x_1,0)/x_1\in R\}$

- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)** $\boldsymbol{E^1}$ ***(λ=0)***

1 **2** **3**

v_3 v_2 v_1 v_4

¿Cómo elegimos los vectores de la base?

- $v_1\in ker(f-Id)^3-ker(f-Id)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0,1)**

  $v_2\in ker(f-Id)^2$- $\ker(f-Id)$ v_2=(1,1,0,0)

  $v_3\in \ker(f-Id)$ v_3=(1,0,-1,0)
- Por último, v_4 es un autovector que está en Ker (f): $es\ un\ autovector\ asociado\ al\ autovalor\ 0$
- $\boldsymbol{v_4}$ =(0,0,0,1)
- $Y\ el\ endomorfismo\ f\ es\ tal\ que\ verifica\ que\ \ v_2= (f-Id)v_1\ y\ \mathrm{v_3}=(\mathrm{f}-\mathrm{Id})\mathrm{v_2}=(\mathrm{f}-\mathrm{Id})^2\mathrm{v_1}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- La forma canónica de Jordan es por tanto:

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right)$$

- Tiene un bloque 3x3 correspondiente al autovalor 1 y un bloque 1x1 correspondiente al autovalor 0

- Y , ¿qué relación existe entre las matrices $M=M_{B_c}$(f) y J? Son semejantes

$$P^{-1}MP=J \quad \Longleftrightarrow \quad PJP^{-1}=M$$

- Entonces M= $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&0&1&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$

c) Determinar los autovalores de $(A-2I)^{-2}$

- Los autovalores de A son 1 con multiplicidad algebraica 3 y 0 con multiplicidad algebraica 1
- Los autovalores de A-2I son -1 con multiplicidad algebraica 3 y -2 con multiplicidad algebraica 1
- Los autovalores de $(A-2I)^{-2}$ son 1 con multiplicidad algebraica 3 y 1/4 con multiplicidad algebraica 1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Calcular la matriz A asociada al endomorfismo f en la base canónica de R^4 y la expresión analítica de f.

- La matriz J es la matriz del endomorfismo en la base B ={(1,0,0,1); (1,1,0,0);(1,0,-1,0); ((0,0,0,1)
- Queremos obtener la matriz asociada al endomorfismo en la base canónica: matriz A
- Ambas matrices son semejantes: verifican que $P^{-1}AP = J$ siendo P la matriz que contiene en sus columnas los vectores de la base B

$$M_{B_c}(\text{f})=\text{A}=M_{B_cB}M_B(\text{f})M_{BB_c}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M_B(\text{f})=\text{J}"] & B \arrow[d, "M_{B_cB}"] \\
B_c \arrow[u, "M_{BB_c}"] \arrow[r, "M_{B_c}(\text{f})=\text{A}"'] & B_c
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 15**

- Estudiar para qué valores de t es la matriz A diagonalizable en R

$$A=\begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{t+3-\lambda} & t^2-10 \\ 1 & \boldsymbol{t+1-\lambda} \end{vmatrix}=(t+3-\lambda)(t+1-\lambda)-(t^2-10)=0=\lambda^2-2(t+2)\lambda+4t+13$$

- $\lambda=\frac{2(t+2)\pm\sqrt{4(t+2)^2-4(4t+13)}}{2}=t+2\pm\sqrt{t^2-9}$

- Si $t\in(-3,3)$: $\lambda\in C$: valores propios complejos ⟶ A no es diagonalizable en R
- Si $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$: 2 *valores propios reales y distintos* ⟶ A diagonalizable en R
- Si t=3 ó t=-3: λ=t+2: A tiene un autovalor doble.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Analizamos la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ=t+2 en cada caso:
  - **Si t=3** λ=5 con a_i(multiplicidad algebraica)=2
  - ¿Cuál es su multiplicidad geométrica? dim S(5)
  - g_i =dim S(5)=dim ker(A-5I)=2-rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$=2-1=1
  - Las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden $\Longrightarrow$ A no es diagonalizable

  - **Si t=-3** λ=-1 con a_i(multiplicidad algebraica)=2
  - ¿Cuál es su multiplicidad geométrica? dim S(-1)
  - g_i =dim S(-1)=dim ker(A+I)=2-rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$=2-1=1
  - Las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden $\Longrightarrow$ A no es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 16**

Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Demostrar que A es diagonalizable y determinar una matriz P de paso que permita la diagonalización

- 1º) Planteamos la ecuación característica
- P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1}-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \mathbf{1}-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(-\lambda \text{ -2})=0$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Autovalores: λ_1=2 con multiplicidad 3 y λ_2=-2 con multiplicidad 1
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:
  - S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z, t) ∈ R^4/Av=2.v}= {v∈ R^3/(A-2I)v=0}
  - (A−2I)v= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-y-z-t=0;$
  - S(2)= {v=(y + z + t, y, z, t) $con\ \ y,z,t \in R$}   dimS(2)=3; **Base de S(2)={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(1,0,0,1)}**
  - S(-2) = {v=(x, y, z, t) ∈ R^4/Av=-2v}= ker (A+2I)
  - (A+2I)v= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $3x+y+z+t=0;\ x+3y-z-t=0;\ x-y+3z-t=0$;x-y-z+3t=0
  - S(-2)= { (−z, z, z, z) $con\ \ y,z,t \in R$}   dimS(-2)=1; **Base de S(-2)=(-1,1,1,1)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Recuerda

- f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:
  1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
  2) $a_i = g_i \; i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

Por tanto nuestra matriz A es diagonalizable
La matriz de paso P

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{y} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Diagonalizar A^2 y A^{-1}

Se verifica D= P^{-1}AP $\Longleftrightarrow$ A=PD P^{-1}

- Entonces A^2= PD P^{-1} PD P^{-1}=PD^2 P^{-1}=P$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ P^{-1}

  - A= PD P^{-1} $\Longrightarrow$ A^{-1} =PD^* P^{-1} con D^*= $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  - Porque si

    λ valor propio con multiplicidad m de A(regular), entonces $\frac{1}{\lambda}$ *es valor propio con multiplicidad m* de A^{-1}

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 17**

Dada la matriz M= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que M no es diagonalizable en R

b) Demostrar que es diagonalizable en C y hallar una matriz P de paso

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3}-\lambda & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-3}-\lambda & \mathbf{2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-6} & \mathbf{5}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2\text{-}4\lambda+5) = 0$$

- Autovalores: λ_1=1 λ_2= 2+i λ_3= 2-i todos ellos con multiplicidad 1
- No es diagonalizable en R porque no tiene 3 autovalores reales (sean o no repetidos)
- Tiene 3 valores propios simples en C $\Longrightarrow$ es diagonalizable en C.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=1.v}= {v$\in R^3$/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x - y = 0; 3x - 2y + z = 0; 4x - 3y + 2z = 0$

S(1) ={(x,2x,x)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,2,1)**

- S(2+i) = ker (A-(2+i)I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=(2+i).v}= {v$\in R^3$/(A-(2+i)I)v=0}

(A−(2+i)I)v=0 $\begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 6 & -5-i & 2 \\ 8 & -6 & 3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S(2+i) ={(x,(1-i)x,-2ix)/ x ∈R} dimS(2+i)=1 **Base de S(2+i): (i,i+1,2)**

- S(2-i) = ker (A-(2-i)I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=(2-i).v}= {v$\in R^3$/(A-(2-i)Iv=0}

(A−(2−i)I)v=0 $\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 0 \\ 6 & -5+i & 2 \\ 8 & -6 & 3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S(2-i) ={(x,(1+i)x,2ix)/ x ∈R} dimS(2-i)=1 **Base de S(2-i): (i,i-1,-2)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

$$P=\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ 2 & i+1 & i-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Base de S(1) Base de S(2+i) Base de S(2-i):

verifica $\begin{pmatrix} 1 & i & i \\ 2 & i+1 & i-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ 2 & i+1 & i-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 18**

> Si f es un endomorfismo de R^6 y A es su matriz asociada respecto a una base dada B. Si sabemos que rang A=1
>
> a) ¿Qué puedes decir de los autovalores del endomorfismo?
> b) Determinar si existe algún caso en que f es diagonalizable
> c) Encontrar las posibles formas de Jordan del endomorfismo f razonando la elección de vectores.

- Si rang A=1 dim ker (A-0I)=6-1=5
- Es decir, dim S(0)=5 es la multiplicidad geométrica del autovalor 0
- Entonces la multiplicidad algebraica del autovalor 0 puede ser a=5 o a=6
- **Caso 1: Si a=6** 0 es el único autovalor y la matriz no es diagonalizable (multiplicidades distintas)
- **Caso 2: Si a=5** La matriz tiene autovalor 0 con multiplic. algebraica 5 y otro autovalor (distinto de cero): k. La matriz es diagonalizable

- Formas de Jordan

➢ **caso 1:**E^1**(λ=0)** ⊆ E^2**(λ=0)** Un bloque 2x2 y 4 bloques 1x1

5 **6**

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

➢ **caso 2:**E^1**(λ=0)** 6 bloques 1x1

6

E^1**(λ=k)**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

- **Problema 19**

Razonar en cada caso si existe un endomorfismo f de R^6 que tenga un único autovalor λ real de multiplicidad algebraica 6 tal que para cualquier matriz A se verifique:

$a)\ rang\ (A-\ \lambda I)=4 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^2=2 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^3=1 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^4=0$

$b)\ rang\ (A-\ \lambda I)=3 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^2=2 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^3=1 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^4=0$

En caso afirmativo, razonar cuál sería la forma de canónica de Jordan correspondiente y detallar cómo se realiza la construcción de la base de vectores correspondiente. Indicar además en su caso cuáles serían los autovectores y los subespacios invariantes.

Problema 19

- *Aplicando que* g_i=dim S(λ_i) =$dim\ ker\,(f-\lambda_i Id)$=n- rang (A- $\lambda_i I$) sabemos que:

$Caso\ a)$

$rang\ (A-\lambda I)=4$ $\quad$ $dimS(4)=dim\,E^1(\lambda)=dim\ ker\,(f-\lambda Id)=2$

$rang\ (A-\lambda I)^2=2$ $\quad$ $dim\,E^2(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^2=4$

$rang\ (A-\lambda I)^3=1$ $\quad$ $dim\,E^3(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^3=5$

$rang\ (A-\lambda I)^4=0$ $\quad$ $dim\,E^4(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^4=6$

$Caso\ b)$

$rang\ (A-\lambda I)=3$ $\quad$ $dimS(4)=dim\,E^1(\lambda)=dim\ ker\,(f-\lambda Id)=3$

$rang\ (A-\lambda I)^2=2$ $\quad$ $dim\,E^2(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^2=4$

$rang\ (A-\lambda I)^3=1$ $\quad$ $dim\,E^3(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^3=5$

$rang\ (A-\lambda I)^4=0$ $\quad$ $dim\,E^4(\lambda)=dim\ ker(f-\lambda Id)^4=6$

- Caso a)

Autovectores

- λ tiene multiplicidad algebraica 6

  dim S(λ) $= dim E^1$(λ)=2 multiplicidad geométrica de λ: 2

- $\boldsymbol{E^1}$**(λ)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ)** ⊆ $\boldsymbol{E^3}$**(λ)** ⊆ $\boldsymbol{E^4}$**(λ)** =**M(3)**

2	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{v_4}$	$\boldsymbol{v_3}$	$\boldsymbol{v_2}$	$\boldsymbol{v_1}$
$\boldsymbol{v_6}$	$\boldsymbol{v_5}$		

- Recuerda Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(f-\lambda Id)^4 - ker(f-\lambda Id)^3$
- $v_5 \in ker(f-\lambda Id)^2 - \mathrm{ker}(f-\lambda Id)$
- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2=(A-\lambda I)v_1}$ $\mathbf{v_3}=\boldsymbol{(A-\lambda I)v_2=(A-\lambda I)^2v_1}$ $\mathbf{v_4}=\boldsymbol{(A-\lambda I)v_3=(A-\lambda I)^3v_1}$
- $\boldsymbol{v_6=(A-\lambda I)v_5}$

- **Recuerda: Hay 2 bloques (tantos como filas) y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número de bloques será 2 (dimensión de S(λ)= E^1(λ), es decir, igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ**
  - Bloque 1: 4x4: corresponde a los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores de la segunda fila v_5 y v_6 que generan otro subespacio f-invariante
- **Forma canónica de Jordan:**

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

- Caso b)
- λ tiene multiplicidad algebraica 6

  dim S(λ) $= dimE^1$(λ)=2   multiplicidad geométrica de λ: 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^3}$**(λ)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^4}$**(λ)** =**M(3)**

3	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{v_4}$	$\boldsymbol{v_3}$	$\boldsymbol{v_2}$	$\boldsymbol{v_1}$
$\boldsymbol{v_5}$			
$\boldsymbol{v_6}$			

Autovectores

- Recuerda Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(f-\lambda Id)^4 - ker(f-\lambda Id)^3$
- $v_5 \in \ker(f-\lambda Id)$ y $v_6 \in \ker(f-\lambda Id)$
- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2 = (A-\lambda I)v_1}$ $\mathbf{v_3} = \boldsymbol{(A-\lambda I)v_2 = (A-\lambda I)^2 v_1}$ $\mathbf{v_4} = \boldsymbol{(A-\lambda I)v_3 = (A-\lambda I)^3 v_1}$

- **Recuerda: Hay 3 bloques que corresponden a los tres autovectores.**
- **El número de bloques será 3 (dimensión de S(λ)= E^1(λ), es decir, igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ**
  - Bloque 1: 4x4: corresponde a los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 1x1 corresponde al vector v_5 que genera otro subespacio f-invariante
  - Bloque 3: 1x1 corresponde al vector v_6
- **Forma canónica de Jordan:** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 20**

¿para qué valores de las constantes a,b,c,d,e,f la matriz

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}$ tiene como vectores propios (1,0,1), (-1,1,0) y (0,1,-1)?

- $Exigimos\ que\ esos\ vectores\ efectivamente\ sean\ vectores\ propios\ f(v)=\lambda v$
- $\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ λ_1=6 λ_2=-4 λ_3=0 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 21**

Una ciudad A es de tránsito, estimándose que de los habitantes que tiene al principio de cada año, al final del mismo han emigrado 2/3 a otra región B y 1/3 a una región C. Por otra parte, dentro de ese mismo año, 1/3 de la población B y 1/3 de la población de C se establecen en la ciudad A. Calcular las poblaciones en régimen estacionario (al final de n años, cuando n→ ∞) sabiendo que en un año determinado las poblaciones de A, B y C eran respectivamente de 60, 200 y 300.

- Consideramos $X_k = (x_{kA}, x_{kB}, x_{kC})$ x_{kA}, x_{kB}, x_{kC} son las poblaciones de las regiones A, B y C al inicio del año k
- ¿Cómo evoluciona cada una de estas poblaciones?

$$x_{k+1A}=x_{kA}-\frac{2}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kA}+\frac{1}{3}\ x_{kB}+\frac{1}{3}\ x_{kC}$$

$$x_{k+1B}=x_{kB}+\frac{2}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kB}$$

$$x_{k+1C}=x_{kC}+\frac{1}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kC}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- En forma matricial:

$$X_{k+1} = AX_k \qquad \begin{pmatrix} x_{k+1A} \\ x_{k+1B} \\ x_{k+1C} \end{pmatrix} = 1/3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{M}} \begin{pmatrix} x_{kA} \\ x_{kB} \\ x_{kC} \end{pmatrix}$$

- $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = A^3X_{n-3} = \ldots = A^nX_0$
- A=$\frac{1}{3}$M $\qquad A^n = (\frac{1}{3})^n\, M^n$

- 1º) Planteamos la ecuación característica para la matriz M: P(λ) = |M− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2\text{-}2\lambda\text{-}3) = 0$$

- Autovalores: λ_1=2, λ_2= 3 λ_3= -1 todos ellos con multiplicidad 1
- Es diagonalizable en R porque tiene 3 autovalores reales distintos

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=2.v}= {v∈ R^3/(A-2I)v=0}
- (A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2x+y+z=0;\ x=0$
- S(2) ={(0,-z,z)/ z ∈R} dimS(2)=1 **Base de S(2): (0, -1,1)**

- S(3) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=3.v}= {v∈ R^3/(A-3I)v=0}
- (A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-3x+y+z=0\,;2x-y=0;\ x-z=0$
- S(3) ={(x,2x,x)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): {(1,2,1)}**
- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=-1.v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}
- (A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+y+z=0\,;2x+3y=0;\ x+3z=0$
- S(-1) ={(-3z,2z,z)/ z ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): {(-3,2,1)}**
- **M es diagonalizable**
- **La matriz de paso P tal que $P^{-1}MP=D$ se obtiene poniendo los autovectores en columnas**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **La matriz de paso P tal que $P^{-1}MP = D$ se obtiene poniendo los autovectores en columnas** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3^n} M^n X_0 = \frac{1}{3^n} P D^n P^{-1} X_0$
- $\lim_{n\to\infty} X_n = P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n) P^{-1} X_0$
- Y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 3^n & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- Entonces si el estado inicial es el vector $X_0 = (60,200,300)$
- $\lim_{n\to\infty} X_n = P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n) P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 140 \\ 280 \\ 140 \end{pmatrix}$

- **Problema 22**

En R^3 consideramos un endomorfismo f cuya matriz asociada en una base B es A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de "a" y de "b" la matriz M es diagonalizable

b) $Para\ a = -1\ y\ b = -1$ determinar una base B´ de vectores tal que $M_{B'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan del endomorfismo f. Indicar cuál es la forma canónica de Jordan y explicar adecuadamente el proceso y el significado de cada uno de los elementos.

c) $Para\ a = -1\ y\ b = -1, utilizar\ el\ teorema\ de\ Cayley\ Hamilton$ para calcular A^9

(Dar expresión en función de A)

- M_{B_C}(f)=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de "a" y de "b" la matriz M es diagonalizable

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A$-$ λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{5-\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1-\lambda} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a-\lambda} \end{vmatrix}=(-\mathbf{1}-\lambda)(5-\lambda)(a-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 y λ_2=5 y λ_3=a
- Caso 1: si a$\neq -1, 5$ f tiene 3 valores propios distintos $\Rightarrow$ f es diagonalizable

- Caso 2: Si a=-1 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=5 con multiplicidad 1
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

> S(-1) = ker (A+I)= {v=$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in R^3$/Av=-1.v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 0; bz = 0;$

- *Si b=0 :* S(-1) ={(0,y,z)/ x ∈R} dimS(-1)=2 **Base de S(-1): {(0, 0,1);(0,1,0)}**

Si a=-1 y b=0 f sí es diagonalizable porque las dim S (λ_i)= a_i

- *Si b≠0 :* S(-1) ={(0,y,0)/ x ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): {(0,1,0)}**

En este caso, f no es diagonalizable porque dim S(-1)< multip. λ_1=-1

- Caso 3: Si a=5 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 1 y λ_2=5 con multiplicidad 2
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

➢ S(5) = ker (A-5I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=5.v}= {v∈ R^3/(A-5I)v=0}

(A−5I)v=0 $\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = 0; \quad -6y + bz = 0;$

- dim S(5) =1 porque rang (A-5I)=2; entonces dim S(5)<2

Entonces, f no es diagonalizable porque dim S(5)< multip. algebraica de λ_2=5

b) $Para\ a = -1\ y\ b = -1$ determinar una base B´ de vectores tal que $M_{B'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan del endomorfismo f. Indicar cuál es la forma canónica de Jordan y explicar adecuadamente el proceso y el significado de cada uno de los elementos.

- Si a=-1 y b==-1
- Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=5 con multiplicidad 1
  dim S(-1) = $dimE^1$(–1)=1 ≡ multiplicidad geométrica de -1: 1

$\boldsymbol{E^1}$**(λ=-1)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=–1)**		$\boldsymbol{E^1}$**(λ=5)**
1	**2**	**1**
$\boldsymbol{v_2}$	$\boldsymbol{v_1}$	$\boldsymbol{v_3}$

- $v_1 \in ker(f + Id)^2 - ker(f + Id)$
- $v_2 \in \ker(f + Id)\ de\ forma\ que\ v_2 = (A + I)v_1$
  $v_3 \in \ker(f - 5Id)$

- **J contiene un solo bloque correspondientes a λ=−1 es decir, igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ que vale 1**
  - Bloque 1: 2x2: corresponde a los vectores v_1, v_2, que generan un subespacio f-invariante
  - El vector v_3 es vector propio asociado al autovalor λ=0 y genera otro subespacio f-invariante

$a)\ \ Para\ a = -1\ y\ b = -1, utilizar\ el\ teorema\ de\ Cayley\ Hamilton$ para calcular A^9

P(λ) $=$ |A− λI|= $(-\mathbf{1} - \lambda)$(5- λ)$(-1 - \lambda)$=$-\lambda^3$+3λ^2+9$\lambda + 5$

- Aplicamos el algoritmo de la división: λ^n =($-\lambda^3$+3λ^2+9$\lambda + 5$). c(λ) + r(λ)
  con r(λ) polinomio de grado $\leq 2, es\ decir$ r(λ) $= a\lambda^2 + b\lambda$ +c
- Sustituyendo λ por A: A^n= $a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{A}$ +c
- (porque $-\ \mathrm{A}^3$+3A^2+9$\mathrm{A} + 5$=0)

- Vamos a calcular ahora los valores de a , b, c
- Sustituyendo por los valores propios en la igualdad λ^n =($-\lambda^3$+3λ^2+9$\lambda + 5$). c(λ) + r(λ)
  - Si λ=-1 $(-1)^n = a - b$ +c
  - Si λ=5 $5^n = 25a + 5b$ +c

- Derivando la igualdad: nλ^{n-1}= (-3$\lambda^2 + 6\lambda$+9). c(λ) + ($-\lambda^3$+3λ^2+9$\lambda + 5$). c´(λ) + 2aλ +b (que es r´(λ))
- Y sustituyendo por el valor propio doble λ=-1 en esta nueva igualdad: n$(-1)^{n-1}$=-2a+b

- Tenemos entonces las siguientes ecuaciones
- $(-1)^n = a - b$ +c $\quad 5^n = 25a + 5b$ +c $\quad$ n$(-1)^{n-1}$=-2a+b

- Para n=9:
- $-1 = a - b$ +c $\quad 5^9 = 25a + 5b$ +c $\quad$ 9=-2a+b

$\Downarrow$

- Se obtiene que a=54.252 b=108.513 c=54.260

- Y A^9= $54.252\mathrm{A}^2 + 108.513\mathrm{A}$ +54.260

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 23**

¿Existe alguna base de $P_2(x)$ $formada\ por\ vectores\ propios,$ cuya matriz asociada,

en la base $\{1,x,x^2\}$ sea M=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

En caso afirmativo, dar una base formada por vectores propios de f.

➢ ***¿QUÉ HARÍAS?***

- Rang A =1; traza A = 3 $\Longrightarrow$ $|A-\lambda I|=\lambda^2(3-\lambda)$
- $Observamos\ que\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$ y $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$ (rangA=1)
- Si rang A=1 $\longrightarrow$ dim S(0)=dim ker(A-0I) = 3 – rang A =2 $\longrightarrow$ la multiplicidad algebraica del autovalor 0 es ≥ 2 $\Longrightarrow$ por tanto es 2

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(0) = ker (M)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Mv=0}=
- (M−0I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + 2y + 3z = 0$
- S(0) ={(-2y-3z,y,z)/ x ∈R} dimS(0)=2 **Base de S(0): {(-2, 1,0); (-3,0,1)}**

- S(3) = ker (M-3I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Mv=3.v}= {v∈ R^3/(M-3I)v=0}
- (M−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2x + 2y + 3z = 0; x - 4y + 3z = 0$;x+2y-6z=0
- S(3) ={(0,$\frac{3}{2}z$,z)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): (0,3,2)**
- **Entonces una base de vectores propios es:**
  {-2+x, -3+x^2, $3x + 2x^2$}

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 24**

Considera un endomorfismo de $P_2(x)$, cuya matriz, en la base $\{1,x,x^2\}$ es

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Probar que este endomorfismo es diagonalizable

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

- Autovalores: λ_1=-1 $con\ multiplicidad\ algebraica$ 2 y λ_2= 2multiplicidad 1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(-1) = ker (A+I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=-1.v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + 3\,y + 9z =$0 x=-3y-9z

S(1) ={(-3y-9z,y,z)/ x ∈R} dimS(-1)=2 **Base de S(-1): {(-3,1,0);(-9,0,1)}**

- S(2) = ker (A-2I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=2v}= {v∈ R^3/(A-2I)v=0}

(A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & -2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-2x + 3y + 9z = 0;\ \frac{1}{3}x - 2y + 3z = 0; \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$y-2z=0

S(2) ={(9z,3z,z)/ x ∈R} dimS(2)=1 **Base de S(2): (9,3,1)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$=n La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
2) $a_i = g_i \; i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

- Dim S(-1)= a_1 y Dim S(2)= a_2 y la suma es 3 $\Longrightarrow$ f diagonalizable
- Hemos encontrado por tanto una base de vectores propios en la que la matriz asociada al endomorfismo es diagonal.
- ¿Quién es la base de autovectores? **Base : {(-3,1,0);(-9,0,1); (9,3,1)}**
- c) Determinar A^{-1} a partir del teorema de Cayley-Hamilton
- **El teorema asegura que p(A)=** $-A^3 + 3A + 2I = 0$ $\Longrightarrow$ 2I= $A^3 - 3A \rightarrow I = \frac{1}{2}A(A^2 - 3I)$
- Entonces $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)$= $\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}^2 - 3I\right)$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Como D= P^{-1}MP M=PDP^{-1} $\Rightarrow$ $\boldsymbol{M^p}$=P$\boldsymbol{D^p P^{-1}}$

- La matriz de paso P se obtiene poniendo por columnas los autovectores obtenidos:
- P= $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz diagonal: D= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M^p} = \underbrace{\mathrm{PD}P^{-1}\ \mathrm{PD}P^{-1}\ \mathrm{PD}P^{-1} \ldots \mathrm{PD}P^{-1}}_{\text{n veces}} = \mathbf{P}\boldsymbol{D^p P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 18 & -27 \\ -1 & -3 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 25**

Calcular A^{-1} utilizando el teorema de Cayley-Hamilton A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1º) El polinomio característico es P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2-\lambda & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (desarrollando\ por\ la\ 2^{a}\ columna) = (-\lambda-1)^2(2-\lambda)^2 = 0 =$$

$$\lambda^4 - 2\,\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\,\lambda + 4 = 0$$

- Autovalores: λ_1=-1 $con\ multiplicidad\ algebraica$ 2 y λ_2= 2multiplicidad algebraica 2
- Por el teorema de Cayley-Hamilton: $A^4 - 2\,A^3 - 3A^2 + 4\,A$ +4I=0 I=$\frac{1}{4}$A($-\,A^3 + 2A^2$+3 A -4I)

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(-\,A^3 + 2A^2 + 3\,A - 4I)$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 26**

Dada la matriz M=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcular su potencia n-sima

a) por diagonalización b) por Cayley-Hamilton

- 1º) El polinomio característico es P(λ) $=$ |A– λI|=0

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)\text{ -6=0}$$

- Autovalores: λ_1=1 $con\ multiplicidad\ 1\ y\ \lambda_2$= 6 también simple
- Como los dos valores propios son reales y simples: M es diagonalizable
- Vamos a obtener una base de vectores propios

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ∈ R^3/Av=v}=
- (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $3x+2y=0$
- S(1) ={(x,-3x/2)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (2,-3)**

- S(6) = ker (A-6I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ∈ R^3/Av=6.v}= {v∈ R^3/(A-6I)v=0}
- (A−6I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2\,x+2\,y=0;$
- S(6) ={(x,x)/ x ∈R} dimS(6)=1 **Base de S(6): (1,1)**
- **Entonces una base de vectores propios es:**

{(2,-3); (1,1)} $\boldsymbol{A^n}$=P$\boldsymbol{D^n P^{-1}}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton

- El polinomio característico es $P(\lambda)=(4-\lambda)(3-\lambda)-6=0=\lambda^2-7\lambda+6$
- Dividimos λ^n entre el polinomio característico y obtenemos un cociente $c(\lambda)$ y un resto $r(\lambda)$ que tendrá grado ≤ 1 $\Longrightarrow$ $r(\lambda)=a\lambda+b$
- Es decir $\lambda^n=(\lambda^2-7\lambda+6).\,c(\lambda)+r(\lambda)$
- Sustituyendo λ por A: $\boldsymbol{A^n}$**= a** $\boldsymbol{A}$**+bI** (porque $A^2-7A+6I=0$)

- Vamos a calcular ahora los valores de a y b: ¿cómo?
- Sustituyendo por los valores propios en la igualdad $\lambda^n=(\lambda^2-7\lambda+6).\,c(\lambda)+r(\lambda)$:

$$1=a+b \qquad 6^n=6a+b \longrightarrow a=\frac{1}{5}(6^n-1) \quad b=\frac{1}{5}(6-6^n)$$

- $A^n=aA+bI=\frac{1}{5}(6^n-1)\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\frac{1}{5}(6-6^n)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 27**

Dada la matriz real A=$\begin{pmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}$, calcular$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} A^n$

- El polinomio característico es P(λ)=$\lambda^2 - 2\lambda$+1 porque trA=2; y det A =1
- Dividimos λ^n entre el polinomio característico y obtenemos un cociente c(λ) y un resto r(λ) que tendrá grado ≤ 1 r(λ)=a λ+b
- Es decir λ^n =($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c(λ) + r(λ)
- Sustituyendo λ por A: A^n= a A+bI (porque $A^2 - 2A$+I=0)

- Vamos a calcular ahora los valores de a y b
- Sustituyendo por los valores propios en la igualdad λ^n =($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c(λ) + r(λ):

  1=a+b
- Derivando la igualdad nλ^{n-1} =(2λ-2). c(λ) + ($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c´(λ) +a (que es r´(λ))
- Y sustituyendo por el valor propio en esta nueva igualdad: n=a; b=1-n
- A^n= n A+(1-n)I= $n\begin{pmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}$+$(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} -15n+1 & 25n \\ -9n & 15n+1 \end{pmatrix}$
- Por último: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}A^n$= $\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} -15+1/n & 25 \\ -9 & 15+1/n \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} -15 & 25 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 28**

Obtener la forma reducida de Jordan y la base en la que el endomorfismo queda representado por la misma: M=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)^5 = 0$$

- Autovalor λ=3 $con\ multiplicidad$ 5

Forma canónica de Jordan

- Tratamos de encontrar una base de modo que la matriz asociada respecto de esta base sea una matriz de Jordan.

➢ E^1(λ=3)=S(3) =ker (A-3I)= {v∈ R^4/(A-3I)v=0}

- (A−3I)v=0 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-t+u=0$; -x+t=0; x=0

- E^1(λ=3)= S(3) ={(0,y,z,0,0)/ x ∈R} $dimE^1$(3)=2 **Base de E^1(λ=3)= {(0,1,0,0,0); (0,0,1,0,0)}**

➢ E^2(λ=3)=ker $(A-3I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-3I)^2$ v=0}

$(A-3I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-t+u=0$

E^2(λ=3)={(x,y,z,x+u,u)/ x ∈R} $dimE^2$(1) =4

Base de E^2(λ=3)= {(1,0,0,1,0); (0,1,0,0,0);(0,0,1,-1,0);(0,0,0,0,1)}

Forma canónica de Jordan

- E^3(λ=3)=ker $(A-3I)^3$= {v∈ R^4/ $(A-3I)^3$ v=0}

$(A-3I)^3$v=0 : $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E^3(λ=3)={(x,y,z,t,u)/ x,y,z,t,u ∈R} $dimE^3(1)$ =5 **Base de E^3(λ=3)= Base canónica de R^5**

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- Esquema del problema
- λ=3 tiene multiplicidad algebraica 5

  dim S(3) $dim E^1$(3)=2 multiplicidad geométrica 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=3)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=3)** ⊆ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=3) =M(3)**

2	**4**	**5**
v_3	v_2	v_1
v_5	v_4	

- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-3I)^3$- $ker(A-3I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0,0,0)**

  $v_4 \in ker(A-3I)^2$- $\ker(A-3I)$
- ¿y el resto? Recuerda:
-
- $\boldsymbol{v_2=(A-3I)v_1}$**=(1,-1,1,1,0)** $\mathbf{v_3}=\boldsymbol{(A-3I)v_2}$= $\boldsymbol{(A-3I)^2v_1}$ =$\boldsymbol{(0,0,}$1,0,0)

Forma canónica de Jordan

- ¿y v_4 y v_5 ? $Elegimos\ v_4 \in ker(A-3I)^2$- $\ker(A-3I)$ $que\ sea\ l.i.con\ \boldsymbol{v_2}$ y $\boldsymbol{v_3}$
- $\boldsymbol{v_4}$**=(0,0,0,1,1)**
- $\boldsymbol{v_5=(A-3I)v_4}$**=(0,1,0,1,0)**

- **Hay tantos bloques como filas y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número de bloques será 2 (dimensión de S(3)=** $\boldsymbol{E^1}$**(λ=3), es decir, igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ**
  - Bloque 1: 3x3: corresponde a los vectores v_1, v_2 y v_3 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores de la segunda fila v_4 y v_5 (que generan otro subespacio f-invariante)

- $La\ base\ de\ Jordan\ se\ conforma\ escribiendo\ los\ vectores\ por\ filas$ $\boldsymbol{de\ derecha}$ **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a L< v_1, v_2 , v_3> subespacio f-invariante y 3 cíclico (generado por v_1, (f- λI)(v_1), (f− λI)^2(v_1))

- Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores L<v_4 y v_5 > subespacio f-invariante y 2 cíclico (generado por v_4, (f- λI)(v_4))

- La matriz de cambio de base es:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo*

Forma canónica de Jordan

- **Problema 29**

Obtener la forma reducida de Jordan y la base en la que el endomorfismo queda representado por la misma: M=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,(2+\lambda)^2 = 0$$

- Autovalores λ=2 $con\ multiplicidad\ 2$ y λ=-2 $con\ multiplicidad\ 2$

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=2)=S(2) =ker (A-2I)= {v∈ R^4/(A-2I)v=0}

(A−2I)v=0 : $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-4x+y-t=0;$ -4y+4t=0; -4x+5y-4t=0

E^1(λ=2)= S(2) ={(0,0,z,0)/ x ∈R} $dimE^1$(2)=1 **Base de E^1(λ=2)= {(0,0,1,0)}**

- $Para\ este\ valor\ propio\ hay\ un\ sólo\ bloque\ de\ Jordan\ y\ como\ tiene\ multiplic.$ algebraica =2, es una caja 2x2

- E^2(λ=2)=ker $(A-2I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-2I)^2$ v=0}

$(A-2I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 & -16 \\ 16 & -24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x-y+t=0\ y-t=0;\ \ 2x-3y+3t=0$

E^2(λ=2)={(0,y,z,y)/ x ∈R} $dimE^2$(2) =2

Base de E^2(λ=2)= {(0,1,0,1); (0,0,1,0)}

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=-2)=S(-2) =ker (A+2I)= {v∈ R^4/(A+2I)v=0}

(A+2I)v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y - t = 0; -4x + 5y + 4z - 4t = 0$; t=0

E^1(λ=-2)= S(2) ={(x,0,x,0)/ x ∈R} $dimE^1$(-2)=1 **Base de E^1(λ=-2)= {(1,0,1,0)}**

- *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica =2, es también una caja 2x2

  - E^2(λ=-2)=ker $(A+2I)^2$= {v∈ R^4/ $(A+2I)^2$ v=0}

$(A+2I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ -16 & 16 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t = 0;\ \ 2x - 2y - 2z + t = 0$

E^2(λ=-2)={(y+z,y,z,0)/ x ∈R} $dimE^2$(2) =2

Base de E^2(λ=2)= {(1,1,0,0); (1,0,1,0)}

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- λ=2 tiene multiplicidad algebraica 2
  dim S(2) $=$ $dimE^1(2)$=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=2)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=2)** $=$**M(2)**
  1 **2**
  v_2 v_1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=−2)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=−2)** $=$**M(-2)**
  1 **2**
  v_4 v_3
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-2I)^2$-$\ker(A-2I)$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,1,0,1)**
- $\boldsymbol{v_2 = (A-2I)v_1}$**=(0,0,1,0)**

Forma canónica de Jordan

- $v_3 \in ker(A+2I)^2$-ker$(A+\ 2I)$ **v_3=(1,1,0,0)**
- $\boldsymbol{v_4 = (A+2I)v_3}$**=(1,0,1,0)**

- **Hay tantos bloques como filas y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número de bloques será 1 por cada valor propio, igual a la multiplicidad geométrica de cada valor propio λ**
  - Bloque 1: 2x2: corresponde a los vectores v_1, v_2 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores v_3, v_4

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas de derecha* **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante
  (generado por v_1, (f- λI)(v_1)
- Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores L<v_3 y v_4 $>$ subespacio f-invariante y 2 cíclico
  (generado por v_3, (f- λI)(v_3))

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas de derecha* **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- **Problema 30**

Hallar la forma reducida de Jordan según los valores de $\alpha \in R$:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de M

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |M - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\alpha & 1+\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\,(1+\alpha-\lambda) = 0$$

- Autovalores $1, 1\ y\ 1+\alpha$

Caso 1: si $\alpha \neq 0$: $\lambda=1$ con multiplicidad 2 y $\lambda = 1+\alpha$ simple

Caso 2: si $\alpha = 0$: $\lambda=1$ con multiplicidad 3

- Caso 1. Si $\alpha \neq 0$: λ=1 con multiplicidad 2 y λ= $1+\alpha$ simple

---

- E^1(λ=1)=S(1) =ker (M-I)= {v∈ R^3/(M-I)v=0}

(M−I)v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -y+z=0$; x=0; x $-\alpha$ y $+\alpha$ z=0

E^1(λ=1)= S(1) ={(0,y,y)/ y ∈R} $dimE^1(1)$=1 **Base de E^1(λ=1)= {(0,1,1)}**

- *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica 2, es una caja 2x2

- E^2(λ=1)=ker $(M-I)^2$= {v∈ R^3/ $(M-I)^2$ v=0}

$(M-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1-\alpha^2 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -\alpha y+\alpha z=0 \quad -y+z=0;$

E^2(λ=1)={(x, y, y)/ x ∈R} $dimE^2(1)$ =2= multiplicidad algebraica

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0); (0,1,1)}

Para el valor propio 1+α:

- E^1(λ= 1+α)=S(1+α) =ker (M-(1+α)I)= {v∈ R^3/(M-(1+α) I)v=0}

M−(1+α)v=0 : $\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-\alpha x - y + z = 0;\ x - \alpha y = 0;$

- E^1(λ=1+ α)= S(1+ α) ={(αy,y,(1+α^2)y)/ x ∈R} $dimE^1$(1+ α)=1

Base de E^1(λ= 1+α)=**{(**α**, 1,** 1+α^2**)}**

Cálculo de la base de Jordan

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 2
  dim S(1) $dimE^{1}$(1)=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^{1}}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^{2}}$**(λ=1) =M(1)**
  1 **2**

  v_2 v_1
- $\boldsymbol{E^{1}}$**(λ=**1+ α**)**
  1

  v_3
- Colocamos bajo cada subespacio E^{i}(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^{i}(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-I)^2$-ker$(A- I)$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0)**
- $\boldsymbol{v_2 = (M-I)v_1}$**=(0,1,1)**

Forma canónica de Jordan

- Caso 1. Si $\alpha \neq 0$: La forma canónica de Jordan es:

J= $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1+\alpha \end{array}\right)$

- Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante
  (generado por v_1, (f- λI)(v_1)
- Bloque 2: 1x1 corresponde al L$<v_3 >$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3 por columnas

P= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $\alpha = 0$: λ=1 con multiplicidad 3

➢ E^1(λ=1)=S(1) =ker (M-I)= {v∈ R^3/(M-I)v=0}

(M−I)v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -y+z=0;$ x=0; x =0

E^1(λ=1)= S(1) ={(0,y,y)/ y ∈R} $dimE^1$(1)=1 **Base de E^1(λ=1)= {(0,1,1)}**

➢ E^2(λ=1)=ker $(M-I)^2$= {v∈ R^3/ $(M-I)^2$ v=0}

$(M-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -y+z=0$

➢ E^2(λ=1)={(x, y, y)/ x ∈R} $dimE^2$(1) =2= multiplicidad algebraica

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0); (0,1,1)}

Forma canónica de Jordan

- E^3(λ=1)=S(1) =ker $(M-I)^3$ {v∈ R^3 /$(M-I)^3$ v=0}

$$(M-I)^3\text{v=0 :}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

E^3(λ=1)= S(1) ={(x,y,z)/ y ∈R} $dimE^3$(1)=3 **Base de $\boldsymbol{E^3}$(λ=1)= base canónica de** R^3

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema
- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 3

  dim S(1) $dimE^1(1)$=1   multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)**   ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1) ⊆** $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)**

  1   **2**   **3**

  v_3 v_2 v_1

- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(M-I)^3$- $ker(M-I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,1,0)**
- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1}$= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v_3} = (\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v_2}$= = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $\alpha = 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a $L< v_1, v_2, v_3 >$ subespacio f-invariante

- $Para\ este\ valor\ propio\ hay\ un\ sólo\ bloque\ de\ Jordan\ y\ como\ tiene\ multiplicidad\ algebraica\ = 3, es\ una\ caja\ 3x3$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3 por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 31**

Obtener la forma canónica de Jordan y la matriz de paso a la misma, según los valores del parámetro k:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 2k & 1+k & 1-k & k \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 1+k-\lambda & -k & k \\ 2k & 1+k & 1-k-\lambda & k \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4=0 \text{ (Idea: restar F3-F2 } \rightarrow c4+c3)$$

- Autovalores λ=1 con multiplicidad 4

Forma canónica de Jordan

- Vamos a calcular ahora la dimensión del subespacio propio correspondiente:
- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

• (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $y = 0; k(2x + y - z + t) = 0;$

• Caso 1. Si k $\neq$ 0: S(1) ={(x,0,2x+t,t)/ x,t ∈R} dimS(1)=2 **Base de S(1): {(1,0,2,0);(0,0,1,1)}**

• Caso 2. Si k=0: S(1) ={(x,0,z,t)/ x,z, t ∈R} dimS(1)=3 **Base de S(1): {(1,0,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}**

Forma canónica de Jordan

- E^2(λ=1)=ker $(A-I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-I)^2$ v=0}

$(A-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 2k & k & -k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ -2k & -k & k & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x+y-z+t=0$

E^2(λ=1)={(x, y, z,-2x-y+z)/ x,y,z ∈R} $dimE^2(1)$ =3

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0,-2); (0,1,0,-1);(0,0,1,1)}

- E^3(λ=1)=ker $(A-I)^3$= {v∈ R^4/ $(A-I)^3$ v=0}

$(A-I)^3$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E^3(λ=1)=R^4 $dimE^3(1)$ =4

Base de E^3(λ=1)= base canónica de R^4

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema **Caso 1. k $\neq 0$:**

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 4
  dim S(1) $=$ $dimE^1(1)$=2 multiplicidad geométrica 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)**
  2 **3** **4**
  v_3 v_2 v_1
  v_4
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-I)^3$- $ker(A-I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,0,0,1)**
  $v_2 \in ker(A-I)^2$- $\ker(A- I)$
- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2 = (A-I)v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Elegimos\ v_4}$ **en** $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1) (l. independ. con** $\boldsymbol{v_3}$**):**

  $\boldsymbol{v_4}$ **=(0,0,1,1)**

- $\mathbf{v_3} = \boldsymbol{(A-I)v_2} = = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- Caso 1. Si $k \neq 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a L$< v_1, v_2, v_3>$ subespacio f-invariante (generado por v_1, (f- λI)(v_1), (f− λI)^2(v_1))
- Bloque 2: 1x1 corresponde al L$\langle v_4 \rangle$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema **Caso 2. k $= 0$:**

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 4

  dim S(1) $=$ $dim E^1$(1)=2   multiplicidad geométrica 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1) =M(1)**

  3 v_2 v_3 v_4 **4** v_1
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-I)^2 - \ker(A-\ I)$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,1,0,0)**

- ¿y el resto?
- $$\boldsymbol{v_2 = (A-I)v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ **en $\boldsymbol{E^1}$(λ=1) (l. independ. con v_3):**

Elegimos $v_{3,}$ $v_{4,}$ $\in \boldsymbol{E^1}$**(λ=1) l.i. con $\boldsymbol{v_2}$** $v_{3,}$ =(1,0,0,0) $\boldsymbol{v_4}$ **=(0,0,1,0)**

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $k = 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  - Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante (generado por v_1, (f- λI)(v_1))
  - Bloque 2: 1x1 corresponde al L<v_3 >
  - Bloque 3: 1x1 corresponde al L<v_4 >

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3, v_4por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 32**

> Si A es una matriz real 6x6 que tiene autovalores
>
> - 1 *con multiplicidad algebraica* 2 y multiplicidad geométrica 1
> - $2+i$ *con multiplicidad algebraica* 2 y multiplicidad geométrica 1
>
> Obtener su forma real de Jordan

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 2

  dim S(1) $= \; dimE^1$(1)=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1) =M(1)**

  1 **2** $\longrightarrow$ **Tiene un bloque** $(dimE^1$(1)=1) **2x2**
- λ=2+i tiene multiplicidad algebraica 2

  dim S(1) $= \; dimE^1$(1)=2 multiplicidad geométrica 1

  $\longrightarrow$ un bloque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (Igual para 2-i)

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 33**

Obtener la forma real de Jordan y calcular la base en la que el endomorfismo correspondiente a la matriz dada queda representado por la misma

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de M

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |M-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2=0$$

- Autovalores λ=i con multiplicidad 2 y λ=-i con multiplicidad 2

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=i)=S(i) =ker$(A-iI)$ = {v∈ $R^4 (A-iI)$v=0}

$$(A-iI)v=0 : \begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1-i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-i & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1-i)x+y+z+t=0;\ 2x+(1+i)y+t=0;$ *(1+i)z+t=0; 2z+(1-i)t=0*

$dimE^1$(i)=1 E^1(i)={$\frac{(-1-i)}{2}y$,y,0,0)/x∈ R} $Base$: $(\frac{-1-i}{2}, 1,10,0)$

- E^2(λ=i)=ker $(A-iI)^2$= {v∈ R^4/ $(A-iI)^2$ v=0}

$$(A-iI)^2v=0 : 2\begin{pmatrix} -1-i & -i & 1-i & -i \\ 2i & -1+i & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & -1+i & i \\ 0 & 0 & -2i & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$dimE^2$(i)=2 E^2(i)={x,(i-1)x,z,-(1+i)z)/x∈ R} $Base$: $\{(1,-1+i,0,0);(0,0,1,-1-i)$

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica compleja de Jordan del endomorfismo $\hat{f}$ es

$$\boldsymbol{J(\hat{f})} = \boldsymbol{M_{B'}}(\widehat{f}) = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_2(i) & 0 \\ 0 & B_2(-i) \end{pmatrix}$$

- ¿y cuál es la base de autovectores complejos?

$\boldsymbol{E^1}$**(λ=i)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=i)=M(i)**	$\boldsymbol{E^1}$**(λ=−i)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=−i)=M(-i)**
1 v_2 **2** v_1	**1** $\overline{v_2}$ **2** $\overline{v_1}$

- $Elegimos\ \ v_1 \in ker(f - \mathrm{i}I)^2$ - $ker(f - \mathrm{i}I)$ $\quad Elegimos\ \ v_1$; $(0,0,1,-1-i)$
- Y $\boldsymbol{v_2}$un vector de $\boldsymbol{E^1}$**(λ=i):** $\boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{iI})\boldsymbol{v_1}$=(-i,1+i,0,0)

B´={v_1, v_2 = (A-iI) v_1, $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$}

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1-i & 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

¿y cuál es la forma real de Jordan?

- consideramos v_1=$u_1 + w_1$i =$(0,0,1,-1-i)$=(0,0,1,-1)+(0,0,0,-1)i
- y v_2=$u_2 + w_2$i = (-i,1+i,0,0) =(0,1,0,0)+(-1,1,0,0)i

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base de vectores correspondiente ahora es: $\boxed{\text{B´´}=\{u_1, w_1, u_2, w_2\}}$

B´´=$\{u_1, w_1, u_2, w_2\}$ son una base de V (vectores reales)

- En esta base $\boldsymbol{M_{B''}}\,(\widehat{\boldsymbol{f}})$= $\boldsymbol{M_{B''}}\,(\boldsymbol{f})$= $\boldsymbol{J_R}\,(\boldsymbol{f})$ es la matriz real de Jordan

$$\boldsymbol{J_R}\,(\boldsymbol{f})=\begin{pmatrix} c(i) & 0 \\ I_2 & C(i) \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Exponencial de una matriz

- **Problema 34**

Dadas A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $calcular\ e^{A}\ \ y\ e^{At}\,;\ e^{B}\ \ y\ e^{Bt}$

➢ A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ A=$\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $e^{J} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \\ & e^{J_2} \end{pmatrix}$

- $e^{J_1} = e^{-2}$ $\quad e^{J_2} = e^{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2} & 0 \\ e^{2} & e^{2} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $e^{A} = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2} & 0 \\ 0 & e^{2} & e^{2} \end{pmatrix}$

$e^{J_2 t} = e^{-2t}$ $\quad e^{J_2 t} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $$e^{B}= e^{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3} & 0 & 0 \\ e^{3} & e^{3} & 0 \\ \frac{e^{3}}{2} & e^{3} & e^{3} \end{pmatrix} =$$

- $$e^{Bt} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^{2}}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

Exponencial de una matriz

- **Problema 35**

Dada la matriz $nxn\ M = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ $calcular\ e^{M}$

- $e^{A} = e^{\lambda I_n} = I_n + \lambda I_n + \frac{1}{2!}(\lambda I_n)^2 + \ldots \frac{1}{k!}(\lambda I_n)^k + \cdots = I_n + \lambda I_n + \frac{\lambda^2}{2!}(I_n)^2 + \ldots \frac{\lambda^k}{k!}(I_n)^k + \cdots = e^{\lambda} I_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda} \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- **Problema 36**

Dada la matriz nxn $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $calcular\ e^A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^n = (0)$$

- $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots \frac{A^k}{k!} \dots = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \frac{1}{n-1!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- **Problema 37**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $calcular\ e^A$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^B = I + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2}{2!} + \cdots \frac{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^k}{k!} \ldots =$$

$$I + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}^2 + \ldots \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} \ldots & b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \ldots \\ -b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} \ldots & 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$$

$$e^A = e^{aI_2}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^a \begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$$

- **Problema 38**

Si A ∈ $M_3(R)$ es una matriz real 3x3 que tiene autovalores:
½ con multiplicidad algebraica 1
1 con multiplicidad algebraica 2
Calcular, utilizando el teorema de Cayley-Hamilton el valor de
$2A^4 - 7A^3 + 9A^2$-5A+I

- P(λ) = $(1-\lambda)^2(\frac{1}{2}-\lambda)$=0 ⟶ $-\lambda^3 + \frac{5}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$

Por el teorema de Cayley Hamilton sabemos que $-A^3 + \frac{5}{2}A^2 - 2A + \frac{1}{2}I = 0$

$$\Downarrow$$

$$2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0$$

-

$$\Downarrow$$

$$2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = 0$$

Problema 39

B es una matriz 3x3 que tiene autovalores: 0, 1, 2

Realiza, si es posible con la información disponible, los siguientes cálculos, razonando en cualquiera de los casos cada paso o implicación.

a) Rang B
b) Det $(B^t B)$
c) Los autovalores de $B^t B$
d) Los autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$

- a) B es diagonalizable puesto que tiene 3 autovalores distintos cada uno con multiplicidad algebraica 1 que coincidirá con su multiplicidad geométrica.
- Entonces existe P regular tal que $P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- A y D son matrices semejantes y tienen el mismo rango: rang B=rang D =2

- b) Como 0 es autovalor: P($0\ ) =$ |B− 0I|=|B|=0;
- Entonces det (B^tB)=|B^tB|=|B^t||B|=0

- c) No tenemos datos suficientes para calcularlos

- d) Autovalores de B: 0, 1, 2 $\longrightarrow$ Autovalores de B^2: 0, 1, 4
- Entonces 0-(-1), 1-(-1) y 4-(-1) = 1, 2, 5 son valores de B^2+I = B^2-(-I)
- Y 1, ½, 1/5 son autovalores de $(B^2$+I$)^{-1}$