Análisis Matemático I

Tema 6

Series y transformadas de Fourier de señales discretas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

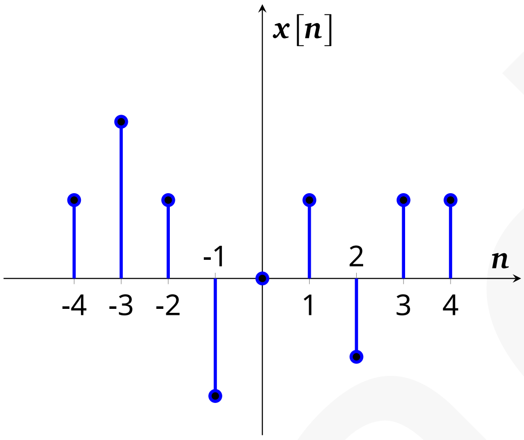
Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Señales discretas

En las **señales discretas**, la variable independiente es n, que toma valores enteros. En la práctica, es posible considerar las señales discretas como el resultado de obtener el valor de la señal continua cada T unidades de tiempo, $x[n] = x(n \cdot T)$, aunque normalmente no atenderemos al origen de las secuencias.



Los coeficientes de las secuencias son en general números complejos, aunque en algunos casos serán exclusivamente números reales.

Por otra parte, en una secuencia como por ejemplo $x[n] = \{1, 4, -3, 5\}$, a menos que se indique lo contrario debe entenderse que la secuencia comienza en $n = 0$, y por lo tanto $x[0] = 1$, $x[1] = 4$, $x[2] = -3$ y $x[3] = 5$.

1.1 Clasificación de señales

En función de determinadas características, es posible catalogar las señales discretas de la siguiente manera:

- Señal real pura: $x^*[n] = x[n]$.
- Señal imaginaria pura: $x^*[n] = -x[n]$.
- Señal par: $x[-n] = x[n]$.
- Señal impar: $x[-n] = -x[n]$.
- Señal hermítica: $x^*[-n] = x[n]$.
- Señal antihermítica: $x^*[-n] = -x[n]$.

Toda señal continua se puede representar como la suma de sus partes real e imaginaria, par e impar o hermítica y antihermítica, donde $x^*[n]$ representa la conjugación compleja de la señal $x[n]$. A continuación se muestran las posibles formas de descomponer una señal en dos subseñales complementarias en función de su naturaleza.

$$x[n] = x_{real}[n] + x_{imag}[n] \quad \begin{cases} x_{real}[n] = \dfrac{x[n] + x^*[n]}{2} \\ \\ x_{imag}[n] = \dfrac{x[n] - x^*[n]}{2} \end{cases}$$

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n] \quad \begin{cases} x_{par}[n] = \dfrac{x[n] + x[-n]}{2} \\ \\ x_{impar}[n] = \dfrac{x[n] - x[-n]}{2} \end{cases}$$

$$x[n] = x_{herm}[n] + x_{antiherm}[n] \quad \begin{cases} x_{herm}[n] = \dfrac{x[n] + x^*[-n]}{2} \\ \\ x_{antiherm}[n] = \dfrac{x[n] - x^*[-n]}{2} \end{cases}$$

Una **señal** discreta se dice que es **periódica** de período $N \in \mathbb{N}$ si $x[n] = x[n+N]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $x[n]$ es periódica con período N, entonces también es periódica con período mN, donde $m \in \mathbb{N}$. Al valor más pequeño de N que satisface la ecuación anterior se le denomina **período fundamental**, y se suele representar como N_0.

En tal caso, nos referiremos a Ω_0 y f_0 como la **frecuencia fundamental** (en radianes por segundo y Hz, respectivamente).

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \text{ (rad/s)} \qquad \Omega_0 = 2\pi f_0$$

Al trabajar con señales sinusoidales es útil emplear la relación $e^{\pm j\Omega n} = \cos(\Omega n) \pm j\,\mathrm{sen}(\Omega n)$, conocida como la fórmula de Euler:

$$\cos(\Omega n) = \frac{e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\Omega n) = \frac{e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}}{2j}$$

1.2 Parámetros de interés de una señal

El valor medio de una señal discreta se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{\overline{x[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]}$$

Si la señal $x[n]$ es periódica, entonces la expresión se simplifica puesto que es posible limitar el cálculo a un período:

$$\boxed{\overline{x[n]} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]}$$

La energía asociada a una señal se calcula de la siguiente manera:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Por su parte, la potencia media de una señal se mide así:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Si la señal es periódica, la expresión simplificada para calcular la potencia media es la siguiente:

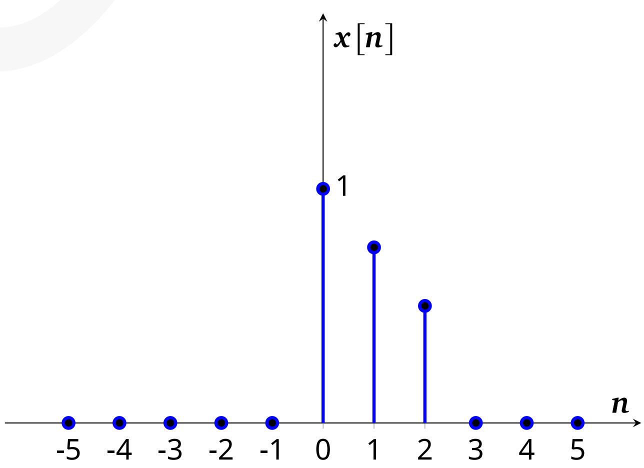
$$P = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2$$

En función de los valores de energía y potencia media de una señal, se puede establecer la siguiente clasificación para señales no nulas:

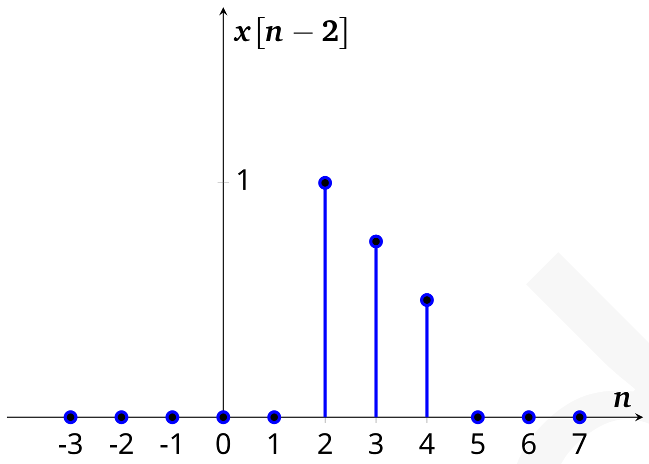
- Señales definidas en energía (o de energía finita): $0 < E < \infty$ y $P = 0$.
- Señales definidas en potencia (o de potencia media finita): $E = \infty$ y $0 < P < \infty$.
- Señales donde $E = \infty$ y $P = \infty$.

1.3 Transformaciones

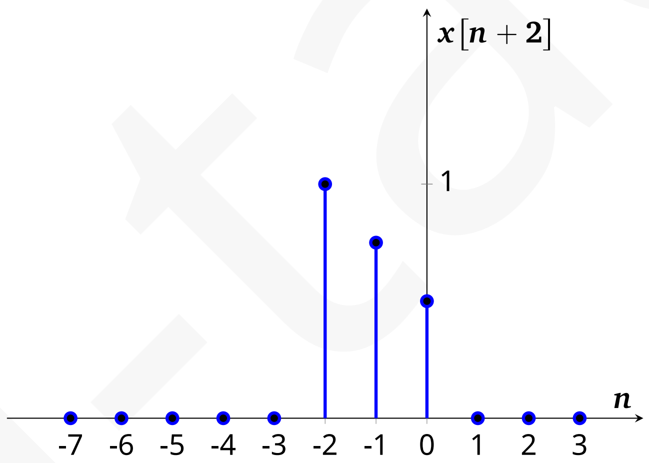
Dada una señal $x[n]$ cualquiera (las siguientes figuras muestran un ejemplo), es posible aplicar sobre ella las siguientes transformaciones:



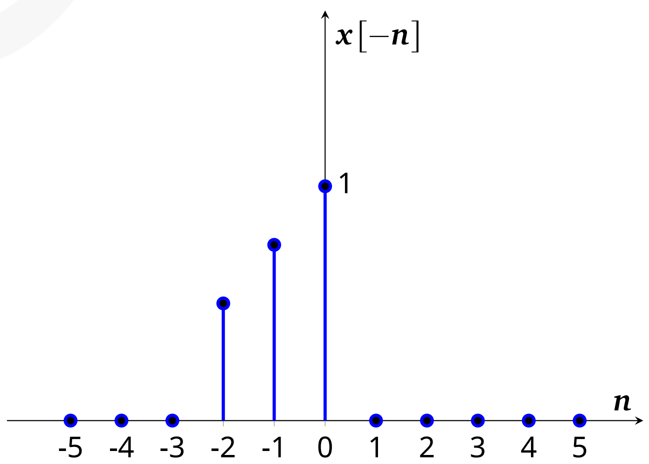
- Desplazamiento hacia la derecha n_0 unidades, donde $n_0 \in \mathbb{N}$: $x[n - n_0]$.



- Desplazamiento hacia la izquierda n_0 unidades, donde $n_0 \in \mathbb{N}$: $x[n + n_0]$.

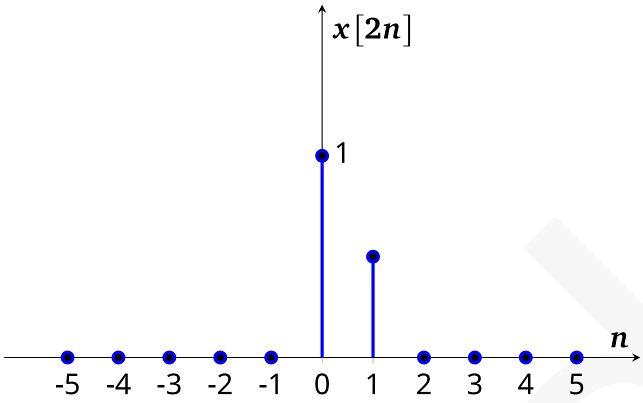


- Inversión en el tiempo: $x[-n]$.



- Compresión o diezmado: $x[kn]$ ($k \in \mathbb{N}$).

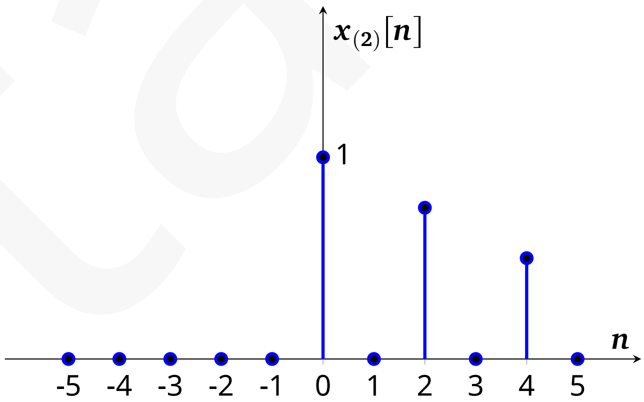
  En la práctica, consiste en utilizar un subconjunto de los elementos de la señal original.



- Expansión o inserción de ceros: $x_{(k)}[n]$ ($k \in \mathbb{N}$).

  En la práctica, consiste en utilizar todos los elementos de la señal original insertando ceros en las posiciones adecuadas según la siguiente fórmula:

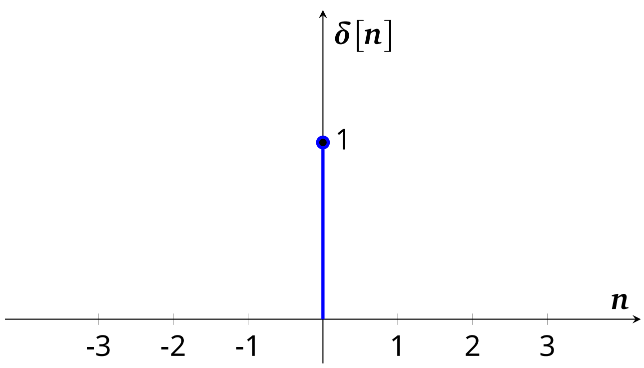
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{si } \; n/k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$



1.4 Señales habituales

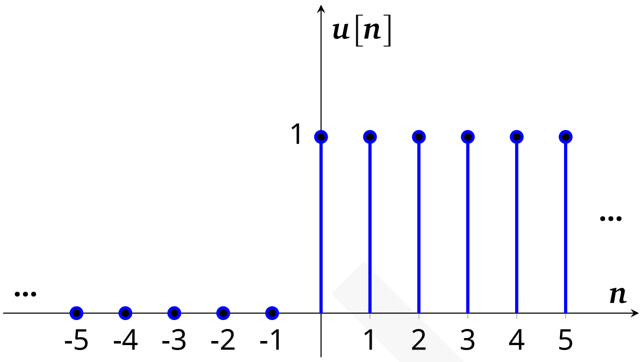
La señal **impulso unitario** $\delta[n]$, también llamada **delta de Kronecker**, se define de la siguiente manera:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

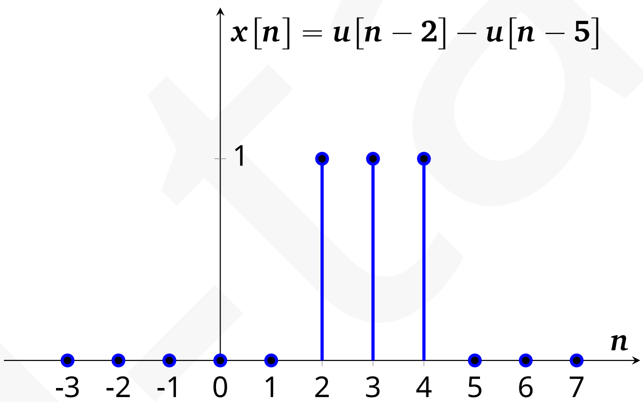


La función **escalón unitario**, $u[n]$, se define de la siguiente manera:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



A partir de la función escalón unitario es posible crear **señales rectangulares** restando dos escalones desplazados de esta forma: $x[n] = u[n - n_1] - u[n - n_2]$.



2 Serie de Fourier de una señal discreta

2.1 Definición

Recordemos que una señal discreta $x[n]$ es periódica si $x[n] = x[n + N_0]$, donde $N_0 \in \mathbb{N}$ es el período fundamental (es decir, el valor más pequeño para el que se satisface la relación anterior).

Si denominamos $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ a la frecuencia fundamental (en radianes por segundo), la expresión del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica y discreta es la siguiente:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\Omega_0 n}}$$

Para obtener los coeficientes c_k es necesario utilizar la siguiente expresión:

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

Para el caso particular $k=0$, obtenemos la fórmula simplificada $c_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x[n]$.

Es importante destacar que los coeficientes en serie de Fourier c_k son también periódicos de período N_0, por lo que $c_k = c_{k+N_0}$. Además, si $x[n]$ es una señal discreta periódica de coeficientes reales, entonces se cumple que $c_{-k} = c_k^*$.

En las señales periódicas, el valor medio de la señal y la potencia media se pueden calcular de la siguiente manera, donde a la segunda ecuación se la conoce como la identidad de Parseval para señales discretas:

$$\overline{x[n]} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = c_0 \qquad P = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} \left|x[n]\right|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

2.2 Propiedades

A continuación se exponen algunas propiedades asociadas a las series de Fourier:

- Linealidad: $y[n] \rightleftharpoons d_k$, $z[n] \rightleftharpoons e_k \implies x[n] = \alpha y[n] + \beta z[n] \rightleftharpoons c_k = \alpha d_k + \beta e_k$.
- Conjugación: $y[n] \rightleftharpoons d_k \implies x[n] = y^*[n] \rightleftharpoons c_k = d_{-k}^*$.
- Inversión en el tiempo: $y[n] \rightleftharpoons d_k \implies x[n] = y[-n] \rightleftharpoons c_k = d_{-k}$.
- Desplazamiento en el tiempo: $y[n] \rightleftharpoons d_k \implies x[n] = y[n \pm N] \rightleftharpoons c_k = e^{\pm jk\Omega_0 N} d_k$.
- Desplazamiento en la frecuencia: $y[n] \rightleftharpoons d_k \implies x[n] = y[n]e^{\pm jm\Omega_0 n} \rightleftharpoons c_k = d_{k\mp m}$.
- Convolución: $y[n] \rightleftharpoons d_k$, $z[n] \rightleftharpoons e_k \implies x[n] = y[n] * z[n] \rightleftharpoons c_k = N_0 d_k e_k$.
- Multiplicación: $y[n] \rightleftharpoons d_k$, $z[n] \rightleftharpoons e_k \implies x[n] = y[n]z[n] \rightleftharpoons c_k = d_k * e_k = \sum_{i=0}^{N_0-1} a_i b_{k-i}$.
- Derivación: $y[n] \rightleftharpoons d_k \implies x[n] = \frac{dy[n]}{dn} \rightleftharpoons c_k = jk\Omega_0 d_k$.
- Integración: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = \sum_{i=0}^{N_0-1} y[n] \rightleftharpoons c_k = \frac{d_k}{jk\Omega_0}$.

2.3 Convergencia

En las señales discretas, el desarrollo en serie de Fourier puede verse como una simple igualdad entre vectores, por lo que la convergencia es punto a punto para todo n, sin necesidad de consideraciones adicionales.

3 Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)

La transformada de Fourier de tiempo discreto (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) es una transformada que se puede aplicar a cualquier señal discreta $x[n]$ arbitraria (no necesariamente periódica), y que en cambio genera una señal $X(\Omega)$ periódica de período 2π. Su expresión es la siguiente:

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}}$$

La demostración de que la señal $X(\Omega)$ es periódica de período 2π es la siguiente:

$$X(\Omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = X(\Omega)$$

La transformada inversa de Fourier de tiempo discreto tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega}$$

Las ecuaciones para las transformadas directa e inversa son válidas en sentido estricto para señales absolutamente sumables, es decir, cuando $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$.

3.1 Propiedades

A continuación se muestran las propiedades de la transformada de Fourier utilizando para ello las funciones $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ con transformadas de Fourier asociadas $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ y $Z(\Omega)$:

- Linealidad: $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n] \implies Z(\Omega) = \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$.
- Desplazamiento: $y[n] = x[n \pm n_0] \implies Y(\Omega) = X(\Omega)e^{\pm j\Omega n_0}$.
- Inversión: $y[n] = x[-n] \implies Y(\Omega) = X(-\Omega)$.
- Conjugación: $y[n] = x^*[n] \implies Y(\Omega) = X^*(-\Omega)$
- Modulación: $y[n] = x[n]e^{\pm j\Omega_0 n} \implies Y(\Omega) = X(\Omega \mp \Omega_0)$
- Multiplicación: $z[n] = x[n]\cdot y[n] \implies Z(\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) \circledast Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)Y(\Omega-\theta)d\theta$
- Convolución: $z[n] = x[n] * y[n] \implies Z(\Omega) = X(\Omega)Y(\Omega)$
- Derivación en Ω: $y[n] = nx[n] \implies Y(\Omega) = j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
- Compresión: $y[n] = x[Mn] \implies Y(\Omega) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\Omega}{M} - \frac{2\pi}{M}k\right)$
- Expansión: $y[n] = x_{(L)}[n] = x[n/L] \implies Y(\Omega) = X(\Omega L)$

3.2 Transformadas habituales

A continuación se muestran algunas de las señales y transformadas habituales, donde es necesario tener en cuenta que $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ y $\delta_p(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$:

$x[n]$	$X(\Omega)$
1	$2\pi\delta_p(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta_p(\Omega-\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi\left(\delta_p(\Omega-\Omega_0)+\delta_p(\Omega+\Omega_0)\right)$
$\mathrm{sen}(\Omega_0 n)$	$\dfrac{\pi}{j}\left(\delta_p(\Omega-\Omega_0)-\delta_p(\Omega+\Omega_0)\right)$
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta_p(\Omega)$
$\sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\Omega - k\dfrac{2\pi}{N_0}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN_0]$	$\dfrac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k\dfrac{2\pi}{N_0}\right)$

4 Convolución

Dadas dos señales discretas $x[n]$ e $y[n]$, su **convolución discreta lineal** es:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

La convolución discreta lineal tiene estas propiedades cuando una de las señales es $\delta[n]$:

$$x[n]*\delta[n] = \delta[n]*x[n] = x[n], \quad x[n]*\delta[n-n_0] = x[n-n_0], \quad x[n-n_0]*\delta[n+n_1] = x[n-n_0+n_1]$$

Si $x[n]$ e $y[n]$ son dos secuencias donde la parte no nula es finita, y la longitud de $x[n]$ es p y la de $y[n] = q$, entonces la longitud de $x[n] * y[n]$ es $p + q - 1$.

En comparación, dadas dos señales discretas $x[n]$ e $y[n]$, su **convolución discreta circular** es:

$$z[n] = x[n] \textcircled{N} y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k)_{mod\ N}]$$

Si $x[n]$ e $y[n]$ son dos secuencias donde la parte no nula es finita, y la longitud de $x[n]$ es p y la de $y[n] = q$, entonces la longitud de $x[n] \textcircled{N} y[n]$ es N si dicho valor está fijado, y $N = \max(p, q)$ en caso contrario. En este último caso, es necesario "estirar" la secuencia más pequeña rellenando con ceros hasta que su longitud sea igual a la de la secuencia más grande.

5 Transformada discreta de Fourier (DFT)

5.1 Definición

La transformada de Fourier discreta (Discrete Fourier Transform, DFT) es una transformación que se aplica a señales discretas finitas, es decir, en las que x[n] es (potencialmente) distinta de cero desde $n = 0$ hasta $n = N - 1$ y cero para el resto de valores de n. Las transformadas directa e inversa tienen las siguientes expresiones:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

De forma simplificada, se puede afirmar que la DFT transforma una secuencia de N números complejos en otros N números complejos. Si la secuencia inicial $x[n]$ está formada exclusivamente por números reales, entonces se cumple que $X^*[k] = X[N - k]$.

La convolución circular y la DFT están relacionadas de la siguiente manera: la tranformada de la convolución circular de dos señales es la multiplicación elemento a elemento de los valores de las DFT de dichas señales.

$$z[n] = x[n] \textcircled{N} y[n] \xleftrightarrow[N]{DFT} Z[k] = X[k] Y[k]$$

Debido a ello, además del procedimiento directo para calcular la convolución circular de dos señales, una forma alternativa de calcular dicha convolución consiste en obtener primero sus transformadas DFT respectivas y a continuación calcular el producto punto a punto de esas transformadas, terminando los cálculos con la tranformación DFT inversa de $Z[k]$ a $z[n]$.

5.2 Propiedades

A continuación se muestran algunas propiedades de la DFT.

$$x[n] \text{ secuencia real } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] = X^*[-k] = X^*[N-k] \\ \text{Re}\big(X[k]\big) \text{ simétrica} \\ \text{Im}\big(X[k]\big) \text{ secuencia antisimétrica} \end{cases}$$

$$x[n] \text{ secuencia imaginaria pura } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] = -X^*[-k] = -X^*[N-k] \\ \text{Re}\big(X[k]\big) \text{ antisimétrica} \\ \text{Im}\big(X[k]\big) \text{ secuencia simétrica} \end{cases}$$

$$x[n] \text{ secuencia real y simétrica } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] \text{ secuencia real} \\ X[k] \text{ secuencia simétrica} \end{cases}$$

$$x[n] \text{ secuencia real y antisimétrica } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] \text{ secuencia imaginaria pura} \\ X[k] \text{ secuencia antisimétrica} \end{cases}$$

$$x[n] \text{ secuencia imaginaria pura y simétrica } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] \text{ secuencia imaginaria pura} \\ X[k] \text{ secuencia simétrica} \end{cases}$$

$$x[n] \text{ secuencia imaginaria pura y antisimétrica } \Longrightarrow \begin{cases} X[k] \text{ secuencia real} \\ X[k] \text{ secuencia antisimétrica} \end{cases}$$

5.3 DFT, FFT y NTT

Además del procesamiento de señales, la DFT se aplica por ejemplo para realizar de forma más eficiente el producto de polinomios, gracias a una optimización de la DFT conocida como Fast Fourier Transform (FFT).

En esas situaciones, aunque pueda parecer contrario a la intuición, es más rápido obtener las transformaciones DFT de los coeficientes de los polinomios a operar, multiplicar elemento a elemento los valores transformados, y deshacer la transformación como último paso. Si consideramos por ejemplo que el número 1234 puede interpretarse como el polinomio $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ cuando utilizamos $x = 10$, la multiplicación de números enteros puede también realizarse mediante este método.

Otra aplicación de la DFT consiste en el cálculo del producto de polinomios cuyos coeficientes pertenecen a $\mathbb{F}_q = \{0, , \ldots, q-1\}$, realizando a continuación la reducción mediante los polinomios $x^n - 1$ o $x^n + 1$. En esos casos, cuando $q \equiv 1 \pmod{2n}$, se suele utilizar lo que se conoce como la Number Theoretic Transform o NTT.

En este último caso, una vez obtenida la transformación NTT de los dos polinomios de $\mathbb{F}_q/\langle x^n - 1\rangle$ o $\mathbb{F}_q/\langle x^n + 1\rangle$, se multiplicarían las transformadas elemento a elemento para, a continuación, deshacer la transformación NTT y conseguir un polinomio como resultado.

6 Problemas

1) Determina la parte par y la parte impar de la señal escalón unitario $u[n]$.

2) Obtén, en los casos en que sea posible, el período de las siguientes señales:

a) $x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right)$

b) $x_2[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{31}n\right)$

c) $x_3[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{5}n\right)$

d) $x_4[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

3) Dada la señal $x[n] = \begin{cases} (1/2)^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, determina la energía y potencia media de $x[n]$.

4) Dada la señal $x[n]$ de la figura, calcula las siguientes señales:

a) $y_1[n] = x[n-2]$

b) $y_2[n] = x[4-n]$

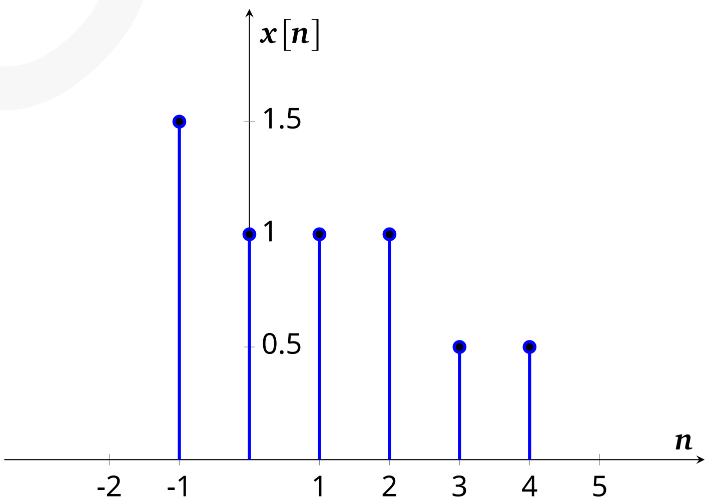
c) $y_2[n] = x[-n-1]$

d) $y_3[n] = x[2n]$

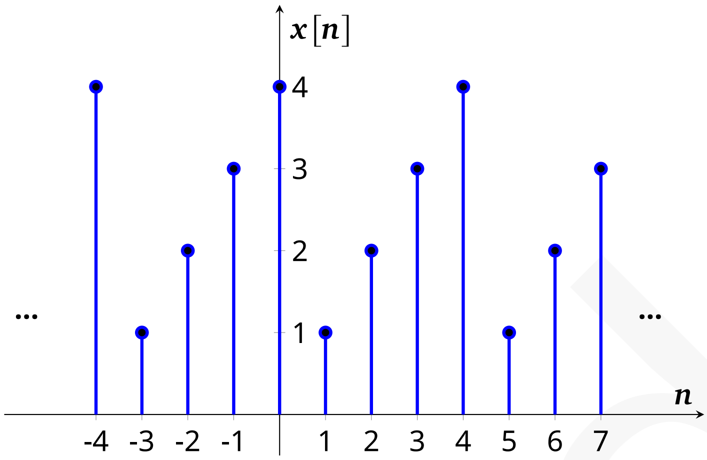
e) $y_4[n] = x[n] \cdot u[2-n]$

f) $y_5[n] = x[n-1] \cdot \delta[n-3]$

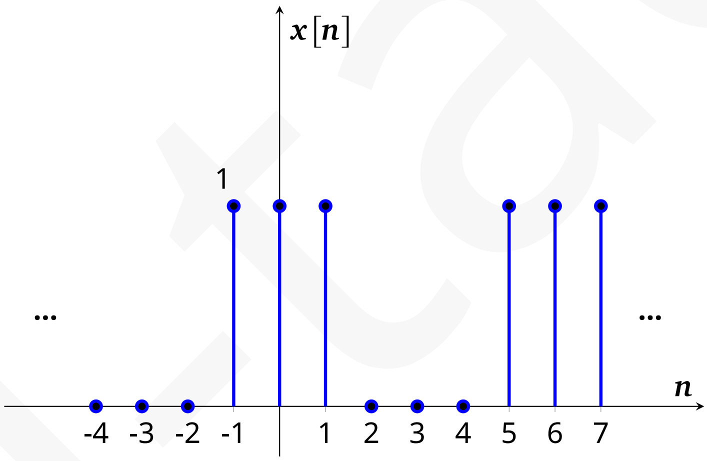
g) $y_6[n] = x[n-1] * \delta[n-3]$



5) Obtén los coeficientes de la serie de Fourier de la señal discreta periódica $x[n]$ siguiente:



6) Desarrolla en serie de Fourier la señal discreta periódica $x[n]$ siguiente:



7) Obtén el valor medio y la potencia media de las señales periódicas de los dos problemas anteriores.

8) Determina los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de las siguientes señales:

a) $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

b) $x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

c) $x_3[n] = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

9) Una señal discreta periódica $x[n]$ de período $N_0 = 4$ tiene los siguientes coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para señales discretas: $[3, 2-j, 4+3j, -9]$. Con esta información, determina los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal $y[n] = x[n] \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}n}$.

10) Calcula la convolución $z[n] = x[n] * y[n]$ dadas las siguientes señales:

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3] \qquad y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$$

11) Calcula la convolución lineal y circular de $x[n]$ y $y[n]$:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] \qquad y[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

12) Calcula la convolución circular $x[n] \text{ (10) } y[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} 3n & 0 \leqslant n \leqslant 6 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad y[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}n & 0 \leqslant n \leqslant 5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

13) Determina la DTFT de la señal $x[n] = a^n u[n]$, con $|a| < 1$.

14) Determina la DTFT de la señal $x[n] = a^{|n|}$, con $|a| < 1$.

15) Determina la DTFT de las señales $x[n] = a^n u[n] \operatorname{sen}(\Omega_0 n)$ e $y[n] = a^n u[n] * \operatorname{sen}(\Omega_0 n)$, donde $|a| < 1$.

16) Determina la DTFT de la siguiente señal:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leqslant N \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

17) Calcula la DTFT inversa de $X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leqslant W < \pi \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ y representar gráficamente tanto $X(\Omega)$ como $x[n]$.

18) Calcula la DFT de la secuencia $x[n] = [2, 0, -1, 3]$.

19) Calcula la DFT inversa de la secuencia $X[k] = [0, -3-3j, -2, -3+3j]$.

20) Se dice que una secuencia $x[n]$ con N componentes es simétrica si $x[n] = x[-n] = x[N-n]$, mientras que es antisimétrica si $x[n] = -x[N-n]$. Proporciona un ejemplo de serie simétrica y otro de serie antisimétrica tanto para $N = 5$ como para $N = 6$.

21) Dada la transformación $X[k]$ asociada a una secuencia real $x[n]$ con $N = 14$ donde $X[0] = 12$, $X[1] = -1+3j$, $X[2] = 3+4j$, $X[3] = -1+5j$, $X[4] = -2+2j$, $X[5] = 6+3j$, $X[6] = -2-3j$ y $X[7] = 10$, calcula el resto de coeficientes.

22) Dada una secuencia de números reales $x[n]$ de longitud $N = 9$, se sabe que su transformada DFT es $X[k] = [3.1, a, 2.5+4.6j, b, -1.7+5.2j, c, 9.3+6.3j, d, 5.5-8j]$. Determina el valor de las constantes a, b, c y d.

23) Realiza de nuevo la convolución circular del problema 11 calculando previamente la DFT de cada secuencia.

24) Dadas las siguientes secuencias reales, ¿cuáles tendrán una transformada DFT cuyos elementos sean imaginarios puros? Justifícalo de forma teórica o mediante el cálculo de la transformada.

a) $x[n] = [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$

b) $x[n] = [1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -1]$

c) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1]$

d) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$

25) Utiliza la DFT para calcular el producto de los polinomios $(1 + x)$ y $(1 + x + x^2)$.

26) Calcula el producto de los números 321 y 12 utilizando la DFT.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- A. Oppenheim, A. Willsky y S. Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Pearson Education Limited.
- C. Phillips, J. Parr y E. Riskin. *Signals, Systems and Transforms*. Ed. Pearson.
- R. Ceschi y J-L. Gautier. *Fourier Analysis*. Ed. Wiley.
- S. Aja Fernández et al. *Problemas resueltos de señales y sistemas*. Universidad de Valladolid.
- C. Langton y V. Levin. *The intuitive guide to Fourier analysis and spectral estimation*. Mountcastle Academic.
- D. McMahon. *Signals and systems demystified*. Ed. McGraw-Hill.