CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

El espacio afín

Problemas resueltos

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Sistemas de referencia. Coordenadas. Cambio de sistema de referencia

- **Problema 1**

> Dados R={O,B}={O,u_1, u_2} y R´={O´,B´}={O´,v_1, v_2} dos sistemas de referencia en el plano afín, encontrar las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo (2,3) las coordenadas de OO´ y (1,-1); (5,4) las coordenadas de v_1, v_2 respecto de u_1, u_2

- (x_1, x_2) *coordenadas de P en el sistema de referencia R* *OP=* $x_1u_1 + x_2u_2$
- (y_1, y_2) *coordenadas de P en el sistema de referencia R´* *O´P=* $y_1v_1 + y_2v_2$
- Coordenadas de OO´: (2,3): OO´$=2u_1+3\,u_2$ *coordenadas del punto O´ en el sistema de referencia R*
- $v_1=u_1- u_2$ $v_2=5u_1+4\,u_2$
- *Como OP=OO´+O´P:* $x_1u_1 + x_2u_2 = 2u_1+3\,u_2 + y_1v_1 + y_2v_2$
  $= 2u_1+3\,u_2 + y_1(u_1- u_2)+ y_2(5u_1+4\,u_2)$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $x_1=2+ y_1+ 5y_2$ $x_2=3- y_1+ 4y_2$

- **Problema 2**

Demostrar que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

es un espacio afín de R^n

- Partimos de un sistema AX=C
- Sea P_1 un punto solución del sistema: A P_1 =C.
- Si P es otra solución del sistema también AP=C. $\longrightarrow$ A(P- P_1)=0 $\longrightarrow$ $A\overrightarrow{P_1P} = 0$
- Entonces $\overrightarrow{P_1P}$ es solución del sistema homogéneo
- Conclusión: cualquier solución del sistema AX=C se puede escribir de la forma

$$P_1 + \overrightarrow{P_1P} = P_1 + v$$

P_1 *es solución particular del sistema inicial y v es una solución del sist. homogéneo*

- **Problema 3**

En el espacio afín real R^4 se consideran los subespacios afines
F_1={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1$=a $+ 3\lambda + 2\mu$; x_2=$1 - \lambda - \mu$; x_3=4 $+ \lambda$; $x_4 = 6 + 5\lambda + 2\mu$; λ, μ R}
F_2={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1$=2 $+ \alpha + 2\beta$; x_2=1; x_3=1 $+ \alpha + \beta$; $x_4 = 3\alpha$; $\alpha, \beta \in$ R}
a) Calcular a para que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$
b) Para dicho valor de a, obtener $F_1 \cap F_2$ y $F_1 + F_2$

a) Calculamos un punto P∈ $\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{F_2}$

$$\begin{aligned} a + 3\lambda + 2\mu &= 2 + \alpha + 2\beta \\ 1 - \lambda - \mu &= 1 \\ 4 + \lambda &= 1 + \alpha + \beta \\ 6 + 5\lambda + 2\mu &= 3\alpha \end{aligned} \Longrightarrow a=6$$

b) Calculamos un punto en la intersección: (x_1, x_2, x_3, x_4)=(6,1,4,6)
El subespacio vectorial de dirección:
Como $F_1 = P_1 + V_1$ $\quad V_1 = <(3,-1,1,5); (2,-1,0,2)>$
$F_2 = P_1 + V_2$ $\quad V_2 = <(1,0,1,3); (2,0,1,0)>$

- El rango de este conjunto de vectores es 3 $\Longrightarrow$ dim($V_1 + V_2$)=3 $\Longrightarrow$ dim$(V_1 \cap V_2) = 1$
- (1,0,1,3) es c.l de los otros por tanto $V_1 \cap V_2$=L<(1,0,1,3)>
- ***Entonces*** $\boldsymbol{F_1 \cap F_2 = P_1 + (V_1 \cap V_2)}$**=(6,1,4,6)+ L<(1,0,1,3)>**
- **y** $\boldsymbol{F_1 + F_2 = P_1}$**+L<(2,-1,0,2);(2,0,1,0);(3,-1,1,5)>**

- **Problema 4**

> En el espacio afín real se consideran respecto de un sistema de referencia cartesiano R= {O,B}={O,e_1, e_2, e_3} los puntos A=(3,1,-2); B=(2,2,0);
> C=(1,0,-1) y D=(4,3,-2).
> Las coordenadas de un punto P en el nuevo sistema de referencia
> {A; $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$} $son\ (x', y', z').\ Obtener\ las\ coordenadas\ de\ P\ en\ \ R$

- $\overrightarrow{AB} = (-1,1,2)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AC} = (-2,-1,1)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AD} = (1,2,0)$
- Las coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ en el nuevo sistema de referencia son x´, y´, z´

(coeficientes de los vectores $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) : $\overrightarrow{AP}$ =x´ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$+ y´ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$+z´ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Como $\overrightarrow{OP}$= $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$+ $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{B'B}}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

- **Problema 5**

Dadas las ecuaciones de un cambio de sistema de referencia

$$x_1 = 1 + y_2; \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3; \quad x_3 = 2 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3$$

$donde\ (x_1, x_2, x_3)$, (y_1, y_2, y_3) son, respectivamente, las coordenadas de un punto P en los sistemas de referencia R y R´.

a) Obtener razonadamente la expresión matricial del cambio de sistema de referencia
b) Obtener la ecuación del plano x+y+z=3 en el sistema de referencia R´.
c) Detallar las ecuaciones paramétricas e implícita de dicha variedad afín indicando sus elementos (punto y espacio de dirección) en R y en R´.

$Ecuaciones\ del\ cambio\ de\ sistema\ de\ referencia\ x_1 = 1 + y_2; \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3; \quad x_3 = 2 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3$

- Matricialmente

- (x_1, x_2, x_3) *coordenadas de P en el sistema de referencia R* *OP=* $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3\, e_3$ *B: Base canónica*
- (y_1, y_2, y_3) *coordenadas de P en el sistema de referencia R´* *AP=* $y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3\, u_3$
- (b_1, b_2, b_3) *coordenadas del punto A en el sistema de referencia R* *OA=* $e_1 + 2e_3$
- *Matricialmente* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$
- *OP=* $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3\, e_3 = e_1 + 2e_3 + y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3\, u_3$
- $\boldsymbol{M_{B'B} = (|coordenadas\ de\ vectores\ de\ B'\ en\ base\ B)}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Obtener la ecuación del plano x+y+z=3 en el sistema de referencia R´.

- $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad Aplicando\ las\ ecuaciones\ de\ cambio\ de\ S.R.$

$$1 + y_2 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3 + 2 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3 = 3 \Rightarrow 3 + y_2 + y_1 - \frac{1}{3}y_3 = 3 \Rightarrow 3y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$$

c) Detallar las ecuaciones paramétricas e implícita de dicha variedad afín indicando sus elementos (punto y espacio de dirección) en R y en R´.

- En R: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
- $x_3 = 3 - x_1 - x_2$
- Punto (0,0,3)
- Espacio de dirección L<(1,0,-1), (0,1,-1)>

- En R´: $3y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$
- $y_3 = 3y_1 + 3y_2$
- Punto (0,0,0)
- Espacio de dirección L<(1,0,3), (0,1,3)>

- **Problema 6**

En el espacio afín real R^4 se consideran los subespacios afines
F_1={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1 + x_2 = 4 \, ; x_3 + x_4 = a$}
F_2={$(3+\alpha, 2-2\alpha, 2\alpha, -1+\alpha) \quad \alpha \in$ R}
Encontrar el valor de a para que la variedad afín generada por F_1 y F_2 tenga dimensión mínima y calcular dicha variedad.

- F_1={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1 + x_2 = 4 \, ; x_3 + x_4 = a$} = {$(x_1, 4 - x_1, x_3, a - x_3)$}
- Como $F_1 = P_1 + V_1$ con $P_1 =$ (0,4,0,a) y $V_1 = < (1,-1,0,0); (0,0,1,-1) >$
  $F_2 = P_2 + V_2$ con $P_2 =$ (3,2,0,-1) y $V_2 = < (1,-2,2,1) >$
- El subespacio vectorial (de dirección)generado por los tres vectores es el de dimensión mínima de $F_1 + F_2$
- L$< (1,-1,0,0); (0,0,1,-1); (1,-2,2,1) > = V_1 + V_2 = V_3$
- La variedad afín generada por F_1 y F_2 tendrá dimensión mínima cuando

$\overrightarrow{P_1P_2}$ =(3,-2,0,-1-a) pertenezca a V_3 $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1-a \end{vmatrix}$ =0 $\Longleftrightarrow$ a=2

- $Entonces\ \ F_1 + F_2 = P_1$+L <(1, −1,0,0); (0,0,1, −1); (1, −2,2,1)

$$(0,4,0,2)+\alpha(1,-1,0,0) + \beta(0,0,1,-1) + \gamma(1,-2,2,1)$$

Ecuaciones del espacio afín: $x_1=\alpha+\gamma$

$x_2=4-\alpha-2\gamma$

$x_3=\beta+2\gamma$

$x_4=2-\beta+\gamma$

- **Problema 7**

Si P_2(x) es el espacio afín de polinomios de grado menor o igual que 2 y
V={p(x)∈ P_2(x)/ p(1)=1, p(2)=2}

a) Demostrar que V es una variedad afín (subespacio afín) de P_2(x)
b) Obtener un sistema de referencia afín de V y calcular las coordenadas de $2x^2 - 5x + 4$ *en esa referencia*
a) Si consideramos R={0; 1; x; x^2}. Calcular respecto de R las ecuaciones del hiperplano de P_2(x) que pasa por el punto x y es perpendicular a V.

Nota: considerar el producto escalar cuya matriz en la base {1; x; x^2} es la identidad.

a) Demostrar que V es una variedad afín (subespacio afín) de P_2(x)

- ¿Cuándo es V una variedad afín? Cuando podemos escribirla V=P+S de forma que
- P es un "punto" de V y S es el espacio de dirección (espacio vectorial) asociado
- Un punto de V es un polinomio $cx^2 + bx + a$ tal que a+b+c=1 y 4c+2b+a=2
  P=(0,1,0)=x nos sirve como "punto" de V
- El espacio de dirección asociado es E={p(x)∈ $P_2(x) t.q. p(1) = 0; p(2) = 0\} = L <(x-1)$(x-2)>
- Entonces podemos escribir V=x+ $L <(x-1)$(x-2)>. Tiene por tanto estructura de variedad afín.

b) Obtener un sistema de referencia afín de V y calcular las coordenadas de $2x^2 - 5x + 4\ en\ esa\ referencia$

- Sistema de referencia afín de V: un punto: (0,1,0)=x y una base de E: (x-2)(x-1)
- Coordenadas de $2x^2 - 5x + 4$=$x + \alpha$(x-2)(x-1) $\Longrightarrow$ $\alpha = 2$

c) Si consideramos R={0; 1; x; x^2}. Calcular respecto de R las ecuaciones del hiperplano de P_2(x) que pasa por el punto x y es perpendicular a V.

- Buscamos un espacio afín V´: Como sabemos que pasa por el punto x, sólo necesitamos obtener el espacio vectorial de dirección asociado: S´.
- Si (x,y,z) son las coordenadas de un elemento de S´ respecto de la base canónica, como es ortogonal a V, lo es a su vector director (2,-3,1), por tanto

  (x,y,z).(2,-3,1)=2x-3y+z=0 $\Longrightarrow$ {(x,y,-2x+3y)/ x,y∈ R}
- Entonces S´=L<(1,0,-2);(0,1,3)>

- Y entonces el hiperplano es V´=x+L<(1-2 x^2), (x+3 x^2)>=x+a(1-2 x^2)+b (x+3 x^2)= a+(1+b)x+(-2a+3b) x^2
- El elemento anterior tiene coordenadas respecto de la R={0; 1; x; x^2}:

(x,y,z)= (a,1+b,-2a+3b) por lo que las ecuaciones implícitas de V´ respecto de dicha referencia son: 2x-3y+z=2a-3-3b-2a+3b=-3

- **Problema 8**

Dado A un espacio afín con un sistema de referencia R={0, B={e_1, e_2}} y A´ otro espacio afín con un sistema de referencia R´={0`, B´={e_1, e_2, e_3}}

Determinar la aplicación afín f: A $\rightarrow A´ \ tal \ que$:

f(1,2)=(1,2,3)

$\vec{f}(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$ y $\vec{f}(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$

a) Escribir matricialmente las ecuaciones de la aplicación afín f
b) Obtener las ecuaciones paramétricas de Im f e indicar cuál es su espacio de dirección

- f es la aplicación afín y $\widetilde{f}$ *es la aplicación lineal asociada*
- $\vec{f}$ es tal que M($\vec{f}$)=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ o bien

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3 \\ b+4-2 \\ c+2 \end{pmatrix}$ $a=-2; b=0; c=1$

- **Excresión matricial de la aplicación af**$ín$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

- Otra forma:

M($\vec{f}$)=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f(1,0)=(1,4,0) y f(0,1)=(1,-1,1)

Entonces f(1,2)=f[1(1,0)+2(0,1)]=1(1,4,0)+2(1,-1,1)=(3,2,2)

- Como **f(X) =f(O) +** $\boldsymbol{\vec{f}}$ $(\boldsymbol{\overrightarrow{OX}})$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{O}) =$ **f(X) -** $\boldsymbol{\vec{f}}$ $(\boldsymbol{\overrightarrow{OX}}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) - (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) =$ (-2,0,1)

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Imf={$(-2+x_1+x_2,\ 4x_1-x_2,\ 1+x_2)$}=

=(-2,0,1)+$\underbrace{\text{L<(1,4,0),(1,-1,1)>}}$ espacio de dirección

- **Problema 9**

Dada la circunferencia C$\equiv (x_1-1)^2+(x_2-1)^2=9$ en el plano, obtener sus ecuaciones en el sistema de referencia R´={A, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$} donde A=(3,3); $\overrightarrow{u_1}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\overrightarrow{u_2}=(\frac{2}{\sqrt{2}},-\frac{2}{\sqrt{2}})$
¿Qué tipo de curva es C en el sistema de referencia R´?

- (x_1, x_2) *coordenadas de P en el sistema de referencia R* *OP=* $x_1e_1+x_2e_2$ *B: Base canónica*
- (y_1, y_2) *coordenadas de P en el sistema de referencia R´* *AP=* $y_1u_1+y_2u_2$
- (b_1, b_2) *coordenadas del punto A en el sistema de referencia R* *A=* $3e_1+3e_2$
- $\overrightarrow{u_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}e_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e_2$; $\overrightarrow{u_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}e_1-\frac{2}{\sqrt{2}}e_2$
- Como OP=OA+AP: $x_1e_1+x_2e_2=3e_1+3e_2+y_1u_1+y_2u_2$

$$=3e_1+3e_2+y_1(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e_2)+y_2(\frac{2}{\sqrt{2}}e_1-\frac{2}{\sqrt{2}}e_2)$$

- $\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{2}}\\3&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$ $x_1=3+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{\sqrt{2}}y_2$; $x_2=3+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{2}{\sqrt{2}}y_2$ *Ecuaciones del cambio de sistema de referencia*

- $M_{B´B}=(|\boldsymbol{coordenadas\ de\ vectores\ de\ B´\ en\ base\ B})$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

- C≡ $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=9$ $\longrightarrow$ $\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{2}{\sqrt{2}}y_2-1\right)^2+\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\,y_1\;-\frac{2}{\sqrt{2}}\,y_2-1\right)^2=9$

$\longrightarrow$ $8+\,y_1^2+4y_2^2+4\sqrt{2}y_1=9$ $\longrightarrow$ $\left(y_1+2\sqrt{2}\right)^2+(2y_2)^2=9$

¿Otra forma de encontrar las coordenadas de un punto en R´ a partir de las coordenadas en R?

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+3cost-3 \\ 1+3sent-3 \end{pmatrix}$$

Un punto P de la circunferencia en paramétricas es P≡ $(1+3cost, 1+3sent)$

- **Problema 10**

En el espacio afín real se considera el plano π *que tiene por ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ respecto de un sistema de referencia cartesiano R= {O,B}={O,e_1, e_2, e_3}.
R={P; u_1, u_2,u_3} es un nuevo sistema de referencia tal que P=(1,1,0);
$u_1 = - e_1 + e_3$; $u_2 = - e_2 + e_3$; $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$
Calcular la ecuación del plano π respecto a R´.

- ***Cambio de R a R´: Elementos de R en R´***

- *Las coordenadas* (x_1, x_2, x_3) se transforman en (x_1', x_2', x_3')

Como $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

- *Como* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} :=$

$x_1\, e + x_2\, e_2 + x_3 e_3 = b_1\, e_1 + b_2\, e_2 + b_3 e_3 + y_1(- e_1 + e_3) + y_2(- e_2 + e_3) + y_3(e_1 + e_2 + e_3) =$

$x_1 = 1 - x_1' + x_3'$
$x_2 = 1 - x_2' + x_3'$ $\pi \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,0) + t(-1,1,0) + s(-1,0,1)$
$x_3 = x_1' + x_2' + x_3'$

$\pi \equiv x_1 + x_2 + x_3$ =2 es la ecuación implícita del plano.
Es decir, un punto cualquiera del plano en R tiene coordenadas:
(x_1, x_2 , x_3)=(0,0,2)+t(1,0,-1)+s(0,1,-1) =(t,s,2-t-s)

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ x_3{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ s-1 \\ 2-t-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, en el sistema de referencia R´: $\pi \equiv x'_3$ =0

- **Problema 11**

Dado R^3 $con\ la\ estructura\ afín\ usual,$
$si\ A_1 = (1{,}0{,}0) + L(e_1 + e_2 + e_3)$ y $A_2 = (0{,}0{,}0) + L\ (2e_1 + e_2 + 2e_3)$
Calcular la dimensión de $A_1 + A_2$.
¿Qué relación tiene esta dimensión con dim $A_1\ y\ dim\ A_2$?
a) Si A_3={(x,y,z)/2x-y-z=0} calcular la dimensión de $A_1 + A_3$
¿Qué relación tiene esta dimensión con dim $A_1\ y\ dim\ A_3$?

- Como = $A_1 = P_1 + V_1$ con $P_1 =$ (1,0,0) y $V_1 = <(1{,}1{,}1);>$
  $A_2 = P_2 + V_2$ con $P_2 =$ (0,0,0) y $V_2 = <(2{,}1{,}2)>$
- Si $A_1 = P_1 + S_1$ y $A_2 = P_2 + S_2$ tienen intersección no vacía y $P_2 \in A_1 \cup A_2$, entonces $A_1 + A_2 = P_2 + (S_1 + S_2)$
- Base de $A_1 + A_2$: $\overrightarrow{P_2P_1}, v_1, v_2$
- La variedad afín $A_1 + A_2$ tendrá dimensión 2 cuando

$\overrightarrow{P_1P_2}$ pertenezca a $A_1 + A_2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

- Como det $\neq 0$ $\dim(A_1 + A_2) = 3 = dim\ A_1 + \dim A_2 + 1$
- A_3={(x,y,z)/2x-y-z=0}={(x,y,2x-y)} $= P_3 + V_3\ con\ P_3$=(1,1,1) y $V_3 = <(1{,}0{,}2);(0{,}1{,}-1)>$
- $\dim(A_1 + A_3) = 3 = dim\ A_1 + \dim A_3$

- **Problema 12**

¿Son aplicaciones afines las siguientes aplicaciones f: X de?
a) f(x, y) = (x + 1, y − 1)
b) f(x, y) = (2x, 2y)
c) f(x, y) = (2x − 1, 3y + 2)
d) f(x, y) = (3x + 1, 0)
e) f(x, y) = (x^2 + 1, y)

a)

- f: $R^2 \longrightarrow R^2$ se define como f(x,y)=(x+1, y-1)
- Tomamos O=(0,0) $\longrightarrow$ f(O)=(1,-1)
- Entonces $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$)=(x+1, y-1) -(1,-1)= (x, y) es una aplicación lineal.
- Expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

❖ *C)*

- f: $R^2 \longrightarrow R^2$ se define como f(x, y) = (2x − 1, 3y + 2)
- Tomamos O=(0,0) $\Longrightarrow$ f(O)=(-1,2)
- Entonces $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$)=(2x-1, 3y+2) -(-1,2)= (2x, 3y) es una aplicación lineal.
- Expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

❖ *e)*

- f: $R^2 \longrightarrow R^2$ se define como f(x, y) = (x^2 +1, y) NO es una aplicación afín

- **Problema 13**

Encontrar la expresión analítica del giro de centro (1,1) y ángulo π/2

- f es el giro y $\tilde{f}$ *es la aplicación lineal asociada*
- $\tilde{f}$ es una rotación $\quad M(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Como $\mathbf{f(X)} = \mathbf{f(O)} + \vec{\boldsymbol{f}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{OX}})$ o bien

- Basta encontrar la imagen de un punto cualquiera, en particular, la imagen del C=(1,1) es (1,1) porque es un punto fijo en la rotación

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial del giro $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ **x´=2-y; y´=x**

- **Problema 14**

Expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de ecuación x + y = 1

- $\tilde{f}$ es la simetría ortogonal asociada respecto a la recta x + y = 1 con $\vec{d} = (1, -1)$

$$M(\tilde{f}) = \frac{1}{|(1,-1)|^2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

- La expresión analítica de la aplicación afín f es $f(X) = f(O) + \vec{f}\ (\overrightarrow{OX})$
- Los puntos de la recta son puntos fijos en la proyección; tomamos un P=(1,0)∈ r

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Expresión matricial de la $\mathbf{proyecci\acute{o}n}$ $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

- **Problema 15** Simetría ortogonal respecto a la recta x + y = 1

- $\tilde{f}$ es la simetría ortogonal asociada respecto a la recta x + y = 1
- M($\tilde{f}$)=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- La expresión analítica de la aplicación afín f es $\mathbf{f(X) = f(O) + \vec{\boldsymbol{f}}\ (\overrightarrow{\boldsymbol{OX}})}$

- Los puntos de la recta son puntos fijos en la proyección; tomamos un P=(1,0)∈ r

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial de la simetría $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ **x´=1-y; y´=1-x**