TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	02/07/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

NORMAS DEL EXAMEN

- El objetivo del examen es evaluar vuestros conocimentos, por lo tanto debéis explicar convenientemente vuestras soluciones, no seáis escuetos ni dejéis nada a la interpretación.
- No se permiten calculadoras que permitan visualizar gráficos de curvas y/o superficies. Las calculadoras que no cumplan este requisito serán retiradas al principio del examen.
- Las hojas con las normas y el enunciado deben ser entregadas junto con la solución del examen.
- Es obligatorio escribir el nombre del alumno en la cabecera de todas las hojas a entregar (incluyendo las hojas con las normas y el enunciado).
- Las hojas "en sucio" no son evaluables y por lo tanto no deben entregarse.
- La mala presentación (tachones, letra ilegible, faltas ortográficas, etc.) puntúa negativamente.
- No se calificarán aquellos problemas cuya solución no esté completamente desarrollada y explicada de acuerdo a la materia vista en clase y a lo solicitado en el enunciado.
- Los teléfonos móviles deben estar en silencio o apagados y guardados en mochilas o abrigos. La posesión de un teléfono móvil durante el examen es motivo de expulsión del examen. La misma indicación aplica a los relojes tipo smart watch.
- Se recomienda leer detenidamente cada enunciado antes de contestarlo.
- Es obligatorio proporcionar un resultado numérico siempre que sea posible, siendo preferible una fracción a un valor decimal aproximado. Igualmente, es recomendable simplificar al máximo las expresiones que aparezcan en el problema (polinomios, etc.).
- Solo recibirán la puntuación máxima aquellos problemas cuya solución sea correcta. En el resto de los casos, se valorará el desarrollo hasta un máximo del 50% de la puntuación de ese problema.
- A menos que se indique lo contrario explícitamente, en los problemas con varios apartados la puntuación de cada apartado es la misma.
- No se permiten libros ni apuntes.
- No se podrá abandonar el examen hasta pasada la primera media hora.
- Solo se contestarán preguntas relacionadas con los enunciados, no sobre el método de resolución o cuestiones de presentación.
- Ante cualquier duda durante el examen, se recomienda aplicar el sentido común y proporcionar la respuesta más completa posible.

EXTREMOS RELATIVOS Y PUNTOS SILLA

- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *definida positiva*, lo que quiere decir que todos sus autovalores son positivos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que todos los menores principales son mayores que cero (es decir, si $|H_i| > 0\ \forall i = 1, \ldots, m$), entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un mínimo relativo.

- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *definida negativa*, lo que significa que todos sus autovalores son negativos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que los menores principales de índice par son positivos y los de índice impar son negativos (es decir, si $|H_{2q}| > 0$ y $|H_{2q+1}| < 0$ para los valores q apropiados, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un máximo relativo.

- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *indefinida*, lo que significa que todos sus autovalores son distintos de cero pero de distinto signo, lo que en matrices simétricas ocurre por ejemplo cuando todos los menores principales son distintos de cero (es decir, si $|H_i| \neq 0\ \forall i = 1, \ldots, m$) pero no es uno de los casos anteriores, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un punto de inflexión, también llamado punto de *silla* o de *ensilladura*.

- Si no se trata de uno de los casos anteriores, lo que ocurre por ejemplo cuando la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *singular*, lo que a su vez significa que alguno de sus autovalores es nulo y que su determinante $|H_f(x_0, y_0)| = 0$, entonces es necesario realizar un estudio adicional, ya que este método no proporciona suficiente información.

EXTREMOS CONDICIONADOS

Caso particular: funciones reales de dos variables con una condición

En este caso particular, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un candidato (x_0, y_0):

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| < 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un mínimo relativo condicionado.
- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| > 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un máximo relativo condicionado.

Caso particular: funciones reales de tres variables con una condición

En este caso particular, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un punto (x_0, y_0, z_0) dado:

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| < 0$ y $|\widetilde{H}_4(x_0, y_0, z_0)| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un mínimo relativo condicionado.

- Si $|\widetilde{H}_3((x_0, y_0, z_0))| > 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo condicionado.

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| \neq 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| \neq 0$, pero no es uno de los casos anteriores, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de silla.

- En cualquier otro caso, es necesario realizar un estudio adicional.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	02/07/2024	
CURSO	2º	HORA	15:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1 (2.25 PUNTOS)

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ completa los siguientes apartados:

a) [0.75 puntos] Estudia la continuidad en <u>todo</u> $\mathbb{R}^2$.

b) [1.0 puntos] Calcula las derivadas parciales de $f(x,y)$ en todo punto de su dominio donde existan dichas derivadas, proporcionando la expresión más simplificada posible (en caso de conjuntos abiertos) o el valor (en caso de los puntos frontera) de la derivada.

c) [0.5 puntos] Proporciona un resultado numérico para $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.

PROBLEMA 2 (1.0 PUNTOS)

Determina el valor de las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ en el punto $(1,2,-1)$ sea máxima en la dirección del vector $(0,0,1)$ y tenga como valor 64.

PROBLEMA 3 (2.25 PUNTOS)

Dada la ecuación $\mathrm{Ln}(z) + x^2 - y^2 + z = 1$, completa los siguientes apartados:

a) [0.5 puntos] Demuestra que la ecuación anterior define a $z = f(x,y)$ como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1,1,1)$.

b) [0.75 puntos] Calcula el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,1,1)$

c) [1.0 puntos] Calcula $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en el punto $(3,2,1)$.

PROBLEMA 4 (2.25 PUNTOS)

Dada la función vectorial de variable vectorial $\overline{f}(x,y) = (x^3e^y + y - 2x, 2xy + 2x)$, completa los siguientes apartados:

a) [0.75 puntos] Demuestra que función admite inversa local diferenciable en un entorno del punto $(x,y) = (1,0)$.

b) [1.5 puntos] Proporciona un valor aproximado de $\overline{f}^{-1}(-1.2, 2.1)$. Para ello, determina los polinomios de Taylor $P_1(u,v)$ y $P_2(u,v)$ ambos de primer orden de las funciones $g_1(u,v)$ y $g_2(u,v)$ centrados en el elemento $(u,v) = (-1,2)$ y haz la aproximación $\overline{f}^{-1}(-1.2,-2.1) \approx (P_1(-1.2,2.1), P_2(-1.2,2.1))$. Se recuerda que $\overline{g}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = \overline{f}^{-1}(x,y)$.

PROBLEMA 5 (2.25 PUNTOS)

Identifica los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$ y clasifícalos, indicando si se trata de máximos, mínimos o puntos silla.