Aplicaciones lineales

PROBLEMAS

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com
Curso 2024-2025

- **Problema 1** $f: R^3 \rightarrow R^4 : f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2, 0, -x_3)$

  ¿f es lineal ?

  $\forall\, \alpha, \beta \in R$ y $\forall\, u, v \in R^3$

  ¿ $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$?

$Tomamos\ \ u = (x, y, z)$ y $v = (x', y', z')$ en R^3 y $\alpha, \beta \in R$

$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') =$

$(\alpha z + \beta z', \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', 0, -\alpha z - \beta z') =$

$(\alpha z, \alpha x + \alpha y, 0, -\alpha z) + (\beta z', \beta x + \beta y', 0, -\beta z') = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

- **Problema 4** Dado el endomorfismo de R^3 definido por las ecuaciones
  - $(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_3\ )$
  - Obtener: a) Kerf b) Imf

- Ker f = $\{(x_1, x_2, x_3) \,/ f(x_1, x_2, x_3) = o_{R^3}\}$ $\longrightarrow$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0;\ x_1 + x_2 - x_3 = 0;\ x_3 = 0$

$$x_2 = -x_1$$

Entonces Ker f = $\{(x_1, -x_1, 0) \ /\ x_1 \in R\}$
dim ker f =1 $\longrightarrow$ dim Imf =2
¿Cómo obtenemos un S.G. de Im f? imágenes de los vectores de la base canónica
Bastará con encontrar 2 vectores imagen que sean linealmente independientes
f(1,0,0)=(1,1,0); f(0,0,1)=(1,-1,1) $\Longrightarrow$ Imf=L<(1,1,0);(1,-1,1)={$(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \beta)\ \alpha, \beta \in R$
$\}$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

- c) f(V) siendo V=$\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
- V= $\{(x_1, x_2, -x_1 - x_2)/\ x_1, x_2 \in R\}$ dim V = 2
- f(V)={(0, $2x_1 + 2x_2, -x_1 - x_2)\ /x_1, x_2 \in R\}$ ¿Qué dimensión tiene f(V)? Dim f(V)=1

<u>Otra forma</u>:

- f(V) es el subespacio generado por las imágenes de los vectores de una base de V
- Base de V: (1,0,-1); (0,1,-1) $\longrightarrow$ f(1,0,-1)=(0,2,-1) y f(0,1,-1)=(0,2,-1)

El vector (0,2,-1) constituye un sistema generador y una base de f(V), por tanto

f(V)=L<(0,2,-1)>={$(0,2\alpha$,-α)}

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 8**

- Dadas B={u_1, u_2} y B´={v_1, v_2, v_3} bases de U y V respectivamente, si g es una aplicación lineal tal que:
- g$(3u_1 - 2u_2) = 3v_1 + 6v_2 - 3v_3$ g$(4u_1 - 3u_2) = v_1 + 5v_2 - v_3$
- Obtener $M_{B,B'}(g). \; Clasificar \; el \; homomorfismo$

$¿\,Qué \; representa \; la \; matriz \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$?

llamamos $w_1 = 3u_1 - 2u_2; \; w_2 = 4u_1 - 3u_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$= $M_{B_w B'}(g)$

Y necesitamos calcular la $M_{B,B'}(g)$: (g $(u_1)|g(u_2)$)

1º) Calculamos las coordenadas de $u_1 \; y \; u_2$ en función de los "w_i"

u_1 =$\alpha(3u_1 - 2u_2) + \beta\,(4u_1 - 3u_2)$ $\longrightarrow$ α=3 ; β=-2

u_2 =$\gamma(3u_1 - 2u_2) + \delta\,(4u_1 - 3u_2)$ $\longrightarrow$ γ=4 ;δ=-3

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

2º) Calculamos las imágenes de $los\ vectores\ u_1\ y\ u_2$

- g(u_1)= g($3w_1 - 2w_2$)=3g(w_1)-2g(w_2)=3($3v_1 + 6v_2 - 3v_3$)-2($v_1 + 5v_2 - v_3$)=
  $= 7v_1 + 8v_2 - 7v_3$

- g(u_2)= g($4w_1 - 3w_2$)=4g(w_1)-3g(w_2)=4($3v_1 + 6v_2 - 3v_3$)-3($v_1 + 5v_2 - v_3$)=
  $= 9v_1 + 9v_2 - 9v_3$

Matricialmente $M_{B,B'}(g)$= $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 9 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}$ = (g $(u_1)|g(u_2)$)

Las columnas de M son:
Imágenes de los vectores de B, expresadas en la base B´;
Coordenadas de las imágenes de los vectores de B, en la base B´

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

Otra forma:

tenemos la matriz de cambio de base M_{BB_W}= $\boldsymbol{M_{B_W}}(u_1 | u_2)$=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$M_{BB'}(g) = \ M_{B_W B'}(g)\ M_{BB_W}$=$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 9 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}$

Vamos ahora a clasificar el homomorfismo:

- Ker g ={(x,y)/ $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 9 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$} $\Rightarrow$ 7x+9y=0; 8x+9y=0 $\Rightarrow$ x=0; y=0

g es inyectiva

- dim (Im g)=rangM=2 (el espacio de llegada tiene dim 3). No es suprayectiva

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 9**

> $Sea\ f: R^3 \rightarrow\ R^2$ definida por la expresión
>
> f(x_1, x_2, x_3)= (x_1+$3x_2$ + $5x_3$, $2x_1$ + $2x_2$ +$7x_3$).
>
> Calcular la matriz asociada al homomorfismo f en las bases A´ y B´ de $R^3\ y\ R^2$ respectivamente
>
> A´= {(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)} B´= {(1,1), (4,3)}

- f(1,0,0)=(1,2) f(0,1,0)=(3,2) f(0,0,1)=(5,7)
- $M_{B_cB_c}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

1ª forma: directamente por coordenadas

- 1º Calculamos las imágenes de los vectores de la base A´:

  f(1,1,1)=(9,11)
  f(1,1,0)=(4,4)
  f(0,1,1)=(8,9)

Tenemos las imágenes de los vectores de A´ expresadas en la base canónica del espacio de llegada: necesitamos calcular las coordenadas de esos vectores imagen en la base B´.

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- 2º) Hallamos las coordenadas de esos vectores imagen en la base B´: son los coeficientes de la combinación lineal en función de los vectores de B´

$$(9,11) = \alpha(1,1) + \beta(4,3) \longrightarrow \alpha = 17;\ \beta = -2$$
$$(4,4) = \alpha(1,1) + \beta(4,3) \longrightarrow \alpha = 4;\ \beta = 0$$
$$(8,9) = \alpha(1,1) + \beta(4,3) \longrightarrow \alpha = 12;\ \beta = -1$$

- Entonces $M_{A'B'}(f) = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 12 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Observa que cada columna contiene las coordenadas de la imagen de un vector de la base A´ del espacio de partida, en la base B´ del espacio de llegada**

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

2ª forma: utilizando matrices de cambio de base

$$\boxed{M_{A'B'}(f) = M_{B_cB'}M_{B_cB_c}(f)\,M_{A'B_c}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 12 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observa:

¿por qué la matriz inversa? ¿Qué significan las columnas de esa matriz?

$(1,0) = \alpha(1,1) + \beta\ 4,3)$ $\longrightarrow$ α=-3 ; β=1

$(0,1) = \alpha(1,1) + \beta\ 4,3)$ $\longrightarrow$ α=4 ; β=-1

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 10**

$Sean$ A´= $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ $una\ base\ de\ U\ y\ \ B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\ \ base\ de\ V$

f es un homomorfismo de U en V definido por:

$f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3) = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2\ ;\ \ f(\vec{u}_2 + \ \vec{u}_3) = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2\ ;\ f(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$

Calcular $M_{A'B'}(f)$

Sólo tenemos que hacer cambio de base en el espacio de partida, no en el de llegada

Si llamamos $w_1 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3$; $w_2 = \vec{u}_2 + \ \vec{u}_3$; w_3= $\vec{u}_1 + \vec{u}_3$

y llamamos A={w_1 ,w_2, w_3}

La matriz $M_{AB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$=(f($w_1$), f($w_2$), f($w_3$))

Y necesito calcular $M_{A'B'}(f)$ =(f(u_1), f(u_2), f(u_3))

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

Una forma posible es hacerlo directamente obteniendo las coordenadas

- $u_1 = \alpha(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3) + \beta(\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + \gamma\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\,;\ \beta = -\frac{3}{2}\ \gamma = \frac{1}{2}$
- $f(\,u_1) = \frac{1}{2}\,f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3) - \frac{3}{2}f((\vec{u}_2 + \vec{u}_3) + \frac{1}{2}\,f\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_3\,) = 4v_1 + v_2$
- $\binom{4}{1}$ será la 1ª columna de la matriz que vamos a calcular

Otra forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\boxed{M_{A'B'}(f) = M_{AB'}(f)\, M_{A'A}}$$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "M_{A'B'}(f)"] \arrow[d, "M_{A'A}"'] & B' \\
A \arrow[r, "M_{AB'}(f)"'] & B' \arrow[u, "I_2 = M_{B'B'}"']
\end{tikzcd}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

Tenemos $M_{AA'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{A'A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{A'B'}(f) = M_{AB'}(f)\, M_{A'A} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 11**

Si C es la base canónica de $\boldsymbol{R}^3$ y C´= $\{u_1$ =(1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,-1,2)}

Si f es un endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es $M_C(f) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de f en la base C´.

- Se trata de hacer un cambio de base tanto en el espacio de partida como en el de llegada

1ª forma: directamente por coordenadas

- 1º Calculamos las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida C´:

f(1,1,0)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Esta es la f(1,1,0) en la base canónica

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- 2º) Queremos hallar las coordenadas de esta imagen en la base C´: son los coeficientes de la combinación lineal
- (1,1,0)= $\alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1))+\gamma(0,-1,2))$) $\longrightarrow$ α=1 ; β=0 ; γ= 0

  Es la 1ª columna de la matriz $M_{C'}(f)$
- De la misma forma haríamos con f(1,0,1) y con f(0,-1,2)

2ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\boxed{M_{C'}(f) = \underbrace{M_{CC'}}_{\text{Matriz de cambio de base en espacio de llegada}} M_C(f)\, \underbrace{M_{C'C}}_{\text{Matriz de cambio de base en espacio de partida}}}$$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{M_{C}'(\text{f})} & C' \\ {\scriptstyle M_{C'C}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle M_{CC'}} \\ C & \xrightarrow[M_{C}(\text{f})]{} & \text{rang} \end{array}$$

Recuerda

- $M_{C'C}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de C´ en la base C : $M_{\boldsymbol{C}}\,(|vectores\ de\ C'|)$=P
- $M_{CC'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de C en la base C´ : $M_{\boldsymbol{C'}}\,(|vectores\ de\ C|)$=$P^{-1}$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- $Entonces\ M_{C'C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

- $y\ por\ tanto\ \ M_{CC'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

- $M_{C'}(f)=M_{CC'}M_C(f)\,M_{C'C}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \boxed{0} & 0\\ 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & \boxed{0} & 2\end{pmatrix}$

❖ ¿Qué significado tienen cada una de las columnas de esta matriz $M_{C'}(f)$?

$\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}$

- Son las coordenadas de la imagen del segundo vector de la base C´ expresadas en la base C´

- **Problema 12**

(Examen final álgebra junio 2021)

Dada f: $R^3 \rightarrow R^3$ aplicación lineal , S $= \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 / \mathrm{x+y+z}=0\}$ es un subespacio de R^3 que verifica $f(v)=v \ \ \forall v \in S$ y ker f={w$\in R^3 / w^t . v=0 \ \ \forall v \in S\}$

a) Determinar $M_{BB_C}(f)$, la matriz asociada a f considerando la base B={(1,0,-1), (0,1,-1) (1,1,1)} en el espacio de partida y la base B_c en el espacio de llegada.

a) Dar la expresión analítica de f(x,y,z) en las bases canónicas

b) Calcular $f^{-1}(W)$ *siendo* W $= \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 / \mathrm{y=z}=0\}$

c) Razonar cuáles son las dimensiones de ker f y de Im f y clasificar la aplicación lineal.

- S $= \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 / \mathrm{x+y+z}=0\} = = \{(\mathrm{x,y,-x-y}) / \mathrm{x,y} \in R\}$
- Dim S=2 y una base de S: {(1,0,-1): (0,1,-1)} $\Longrightarrow$ **f(1,0,-1)=(1,0,-1) y f(0,1,-1)=(0,1,-1)**
- ker f={w$\in R^3 / w^t . v=0 \ \ \forall v \in S\}$ =$\{(\mathrm{x,y,z}) / (x,y,z).(1,0,-1)=0; (\mathrm{x,y,z}).(0,1,-1)=0\}$
- =$\{(\mathrm{x,y,z}) / x-z=0; y-z=0\}$=$\{(\mathrm{x,x,x}) / x \in R\}$ $\Longrightarrow$ **f(1,1,1)=(0,0,0)**
- M_{BB_c}(f)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Dar la expresión analítica de f(x,y,z) en las bases canónicas

- Para obtener la expresión de f(x,y,z) en la base canónica hemos de obtener las imágenes de los vectores de la base canónica

- ***1ª forma: Por coordenadas***

- $(1,0,0)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\,(1,1,1)$ $\quad \alpha=\frac{2}{3};\ \beta=\frac{-1}{3};\ \gamma=\frac{1}{3}$

$f(1,0,0)=\frac{2}{3}f(1,0,-1)+\frac{-1}{3}f(0,1,-1)+\frac{1}{3}f(1,1,1)=\frac{2}{3}(1,0,-1)+\frac{-1}{3}(0,1,-1)=(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}) \longrightarrow$ 1ª columna

- $(0,1,0)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\,(1,1,1)$ $\quad \alpha=\frac{-1}{3};\ \beta=\frac{2}{3};\ \gamma=\frac{1}{3}$

$f(0,1,0)=\frac{-1}{3}f(1,0,-1)+\frac{2}{3}f(0,1,-1)+\frac{1}{3}f(1,1,1)=\frac{-1}{3}(1,0,-1)+\frac{2}{3}(0,1,-1)=(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}) \longrightarrow$ 2ª columna

- $(0,0,1)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)+\gamma\,(1,1,1)$ $\quad \alpha=\frac{-1}{3};\ \beta=\frac{-1}{3};\ \gamma=\frac{1}{3}$

$f(0,0,1)=\frac{-1}{3}f(1,0,-1)+\frac{-1}{3}f(0,1,-1)+\frac{1}{3}f(1,1,1)=\frac{-1}{3}(1,0,-1)+\frac{-1}{3}(0,1,-1)=(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}) \longrightarrow$ 3ª columna

$$M_{B_cB_c}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ***2ª forma: Matricialmente***

c) ¿ $M_{B_C}(f)$?

$$\begin{tikzcd} B_c \arrow[r, "M_{B_cB_c}(f)"] \arrow[d, "M_{B_cB}"'] & B_c \\ B \arrow[r, "M_{BB_c}(f)"'] & B_c \arrow[u, "I_3"'] \end{tikzcd}$$

$$M_{B_cB_c}(f) = I_3 M_{BB_c}(f)\, M_{B_cB}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Expresión analítica: $f(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ \frac{1}{3}(-x + 2y - z) \\ \frac{1}{3}(-x - y + 2z) \end{pmatrix}$

c) Calcular $f^{-1}(W)$ *siendo* $\mathrm{W} = \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 / \mathrm{y} = \mathrm{z} = 0\}$

- $\mathrm{W} = \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 / \mathrm{y} = \mathrm{z} = 0\} = \{(x, 0,0)/x \in R\}$ Base de W: (1,0,0)

$\boldsymbol{f^{-1}(W)}$ **será el subespacio generado por $\mathbf{f^{-1}(1,0,0)}$:**

- Calculamos $\mathrm{f}^{-1}(1{,}0{,}0)$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2x-y-z=3; -x+2y-z=0; -x-y+2z=0

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{2F2+F1 \\ 2F3+F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F3+F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Es un sistema incompatible porque rangA<rang(A|B) $\Longrightarrow$ $f^{-1}(W) = \emptyset$

a) Razonar cuáles son las dimensiones de ker f y de Im f y clasificar la aplicación lineal.

Acabamos de ver en apartado anterior que rang $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$=2 =dim Imf $\Longrightarrow$ dim kerf=1

- La aplicación lineal f no es por tanto ni inyectiva ni suprayectiva.

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- **Problema 13**

$$M_{B_c,B_c}(\mathrm{f})=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada a f en las bases B={(1,3,0), (1,0,2), (0,4,-2)} de $\boldsymbol{R}^3$ y B´={(2,1), (4,3)} de $\boldsymbol{R}^2$

- f: $R^3 \longrightarrow R^2$

1ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B' \\ B_c \arrow[r] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB'}"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{M_{BB'}(f) = M_{B_cB'}M_{B_cB_c}(\mathrm{f})M_{BB_c}}$$

- ➢ M_{BB_c} es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B en la base B_c : M_{B_c} ($|vectores\ de\ B|$)
- ➢ $M_{B_cB'}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B_c en la base B´ : $M_{\boldsymbol{B}}$ ($|vectores\ de\ B_c|$)

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-35}{2} & \frac{-39}{2} & -6 \\ \frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 4 \end{pmatrix}$

coordenadas de los vectores de B_c en la base B´

Matriz del homomorfismo $M_{B_cB_c}$(f)

coordenadas de los vectores de B en la base B_c

2ª forma: directamente por coordenadas

- Calculamos las imágenes de los vectores de la base B
- f(1,3,0) = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$
- f(1,0,2) = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ f(0,4,-2) = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Matriz asociada a una aplicación lineal. Cambio de base

- Hemos cambiado la base en el espacio de partida; tenemos que hacer ahora el cambio de base en el espacio de llegada ¿Cómo?
- Obteniendo las coordenadas de esos vectores imagen en la base B´: los coeficientes de la combinación lineal
- (3,11) $=\alpha(2,1)+\beta(4,3) \longrightarrow \alpha=\frac{-35}{2}\,;\ \beta=\frac{19}{2}$
- (-1,9) $=\alpha(2,1)+\beta(4,3) \longrightarrow \alpha=\frac{-39}{2}\,;\ \beta=\frac{19}{2}$
- (4,-4) $=\alpha(2,1)+\beta(4,3) \longrightarrow \alpha=-6;\ \beta=4$

$$M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix} \frac{-35}{2} & \frac{-39}{2} & -6 \\ \frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

- **Problema 14**

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ $base\ canónica\ del\ espacio\ de\ matrices$ de S_2 (matrices simétricas de orden 2) y $B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3

Si $f: S_2 \rightarrow R^3$ $y\ g: R^3 \rightarrow S_2$ son aplicaciones lineales de las que conocemos:

1) Unas ecuaciones implícitas del núcleo de f en la base B_1 son

x-y+2z=0

1) $(gof)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular la matriz del endomorfismo h=gof en la base B_1

b) Obtener una base de h(W)

siendo W={$\begin{pmatrix}x & y\\y & z\end{pmatrix}$ $/x$ −2y+3z=0; 3x-7y+7z=0;5x-11y+13z=0}

a) $Si\ B' = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ $es\ otra\ base$ de S_2, obtener la matriz del endomorfismo h en la base B´.

b) ¿Pueden ser las ecuaciones x+2y+3z=0; y-4z=0 unas ecuaciones implícitas en B_1 del subespacio Img? Razona la respuesta

$a)\ S_2 \xrightarrow{f} R^3 \xrightarrow{g} S_2$

1) Unas ecuaciones implícitas del núcleo de f en la base B_1 son x-y+2z=0

2) $(gof)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ *base canónica del espacio de matrices* de S_2 (matrices simétricas de orden 2)

- *¿Qué sabemos?*
- *Como* $S_2 \approx R^3$ *gof (1,1,1)=h(1,1,1)=(-1,0,2)*

- $Ker\ f=\{(x,y,z)/x-y+2z=0\}=\{(y-2z,y,z)/\ y,z\in R\}$
- $h(1,1,0)=g[f(1,1,0)]=g(0,0,0)=(0,0,0)$
- $h(-2,0,1)=g[f(-2,0,1)]=g(0,0,0)=(0,0,0)$
- $h(1,1,1)=(-1,0,2)$

- *¿Qué necesitamos? Las imágenes de los vectores de la base* B_1

- $(1,0,0)=\alpha(1,1,0)+\beta(-2,0,1)+\gamma(1,1,1)$ $\quad \alpha=\ \beta=\frac{-1}{2};\gamma=\frac{1}{2}$

$h(1,0,0)=\frac{1}{2}h(1,1,1)=\frac{1}{2}(-1,0,2)=(\frac{-1}{2},0,1)$ $\longrightarrow$ *1ª columna de la matriz asociada*

- $(0,1,0)=\alpha(1,1,0)+\beta(-2,0,1)+\gamma(1,1,1)$ $\alpha=\frac{3}{2};\beta=\frac{1}{2};\gamma=\frac{-1}{2}$

$h(1,0,0)=\frac{-1}{2}h(1,1,1)=\frac{-1}{2}(-1,0,2)=(\frac{1}{2},0,-1)$ *2ª columna de la matriz asociada*

- $(0,0,1)=\alpha(1,1,0)+\beta(-2,0,1)+\gamma(1,1,1) \longrightarrow \alpha=-1;\beta=0;\gamma=1$

$h(1,0,0)=h(1,1,1)=(-1,0,2) \longrightarrow$ *3ª columna de la matriz asociada*

- $M_{B_1B_2}(h)=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

b) Obtener una base de h(W)

siendo $W=\{\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$ /x −2y+3z=0; 3x-7y+7z=0;5x-11y+13z=0}={(-7z,-2z,z)/z∈ R} $\longrightarrow$ dim W = 1 Base: $(-7,-2,1)$

Necesitamos imágenes de los vectores de una base:

$h(-7,-2,1)=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\ 0\\ -3\end{pmatrix} \longrightarrow$ Entonces h(W)=L<($\frac{3}{2}$,0,-3)>

c) $Si\ B' = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ $es\ otra\ base$ de S_2, obtener la matriz del endomorfismo h en la base B´

1ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "M_{B'B'}(f)"] \arrow[d, "M_{B'B_1}"'] & B' \\
B_1 \arrow[r, "M_{B_1B_2}(f)"] & B_2 \arrow[u, "M_{B_2B'}"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{M_{B'B'}(f) = M_{B_2B'} M_{B_1B_2}(\mathrm{h}) M_{B'B_1}}$$

- $M_{B'B'}(h) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 2 & 7 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} =$
  $= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -3 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ 5 & -3 & -2\end{pmatrix}$

d) ¿Pueden ser las ecuaciones x+2y+3z=0; y-4z=0 unas ecuaciones implícitas en B_1 del subespacio Img? Razona la respuesta

Si Im g={(x,y,z)/x+2y+3z=0; y-4z=0}={(-11z,4z,z)/z∈ R}

Entonces Im g tendría dimensión 1y entonces sería Im g=L<$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$> pero este vector no verifica las condiciones luego no pueden ser las ecuaciones de Img

El espacio dual. Formas lineales

- **Problema 15**

  Dada la base de $\boldsymbol{R}^3$, B={$u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)$}

  Obtener la base dual

- Tenemos que encontrar una B^*={u_1^*, u_2^*, u_3^*} tal que $u_i^*(u_j)$= δ_{ij} para $1 \leq i, j \leq 3$

- Vamos a calcular u_1^* (es una forma lineal):
  - u_1^*=ax_1+b x_2+c x_3 que verifica

    $u_1^*(u_1)$=a+b+c=1
    $u_1^*(u_2)$=a+b=0 ⟹ a=0; b=0; c=1 ⟹ u_1^*=x_3
    $u_1^*(u_3)$=a=0

  - u_2^*=ax_1+b x_2+c x_3 verifica

    $u_2^*(u_1)$=a+b+c=0
    $u_2^*(u_2)$=a+b=1 ⟹ a=0; b=1; c=-1 ⟹ u_2^*=$x_2 - x_3$
    $u_2^*(u_3)$=a=0

El espacio dual. Formas lineales

- u_3^*=ax_1+b x_2+c x_3 verifica

  $u_3^*(u_1)$=a+b+c=0

  $u_3^*(u_2)$=a+b=0 → a=1; b=-1; c=0 → $u_3^*=x_1 - x_2$

  $u_3^*(u_3)$=a=1
- Por tanto, la base dual de B es $B^*=\{u_1^*=x_3, u_2^*=x_2 - x_3, u_3^*=x_1 - x_2\}$

2ª forma de resolverlo

Si A es la matriz que resulta de escribir B = $\{v_1, v_2 ,\ldots v_n\}$ por columnas, entonces $la\ base\ dual\ de\ B, B^*= \{f_1, f_2 ,\ldots f_n\}$ viene dada por las filas de A^{-1}

Por tanto:

$$B^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Leyendo las filas de esta matriz comprobamos

$$B^*=\{u_1^*=x_3,\ u_2^*=x_2 - x_3,\ u_3^*=x_1 - x_2\}$$

El espacio dual. Formas lineales

- **Problema 16**

Sean B=$\{v_1 = (1,2), v_2 = (3,1)\}$ *una base de* $\boldsymbol{R}^2$ y B^*=$\{v_1^*, v_2^*\}$ *su base dual.* Y sea f la forma lineal f=$3v_1^* + 4v_2^*$

Determinar el valor de f(x_1, x_2) para un vector cualquiera de $\boldsymbol{R}^2$

- f: $R^2 \longrightarrow$ R
  $(v_1^*, v_2^*) \longrightarrow 3v_1^* + 4\,v_2^*$ 　　 ¿*Cuánto vale* f (x_1, x_2)?
- 1) Calculamos $M_B(f)$ 　 *Tiene dimensión* $1x2$
  - f$(v_1) = 3v_1^*\ (v_1) + 4\,v_2^*\ (v_1)$ =3.1+4.0=3
  - f$(v_2) = 3v_1^*\ (v_2) + 4\,v_2^*\ (v_2)$ =3.0+4.1=4 $\Longrightarrow$ $M_B(f)$= $(3 \quad 4)$
- 2) Calculamos las coordenadas del vector (x_1, x_2) en la base B
  (x_1, x_2)=$\alpha(1,2) + \beta(3,1) \longrightarrow \alpha = \frac{3x_2 - x_1}{5}$; β= $\frac{2x_1 - x_2}{5}$
  - $(x_1, x_2)_{B_c}$= $\left(\frac{3x_2 - x_1}{5}, \frac{2x_1 - x_2}{5}\right)_B \longrightarrow$ f (x_1, x_2)= $M_{B_c}(f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ = $M_B(f)\begin{pmatrix} \frac{3x_2 - x_1}{5} \\ \frac{2x_1 - x_2}{5} \end{pmatrix}$= $x_1 + x_2$

- **Problema 17**

Consideramos el homomorfismo f_β definido entre los espacios vectoriales $P_2[x] =$ {polinomios de grado menor o igual que 2} y

$M_{2x2} = \{matrices\ cuadradas\ de\ orden\ 2\}$

de modo que

$$f_\beta(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} \beta p(1) & p'(1) \\ p''(1) & p'''(1) \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz de f_β *en las bases*

B_1={1, x, x^2}; B_2={$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}

Calcular la dimensión de Im f_β y de ker f_β según los diferentes valores de β.
Obtener unas ecuaciones paramétricas de ker f_β *en la base* B_1 y unas ecuaciones implícitas de Im f_β *en la base* B_2 en el caso en que f_β no es inyectivo.
Para $\beta = 1$:
Encontrar una base de $f_1^{-1}(S_{2x2})$ siendo S_{2x2} *el espacio de matrices* simétricas 2x2
Considerando ahora las bases
B_1'={1, x-1,1+ x^2} *y* B_2'={$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$} en los espacios de partida y de llegada respectivamente
Obtener la matriz del homomorfismo $M_{B_1' B_2'}(f_1)$.

Consideramos el homomorfismo f_β definido entre los espacios vectoriales $P_2\,[x] =$ {polinomios de grado menor o igual que 2} y

$M_{2x2} = \{matrices\ cuadradas\ de\ orden\ 2\}$

de modo que

$$f_\beta(a+bx+cx\text{^}2) = \begin{pmatrix} \beta p(1) & p\acute{}(1) \\ p\acute{}\acute{}(1) & p\acute{}\acute{}\acute{}(1) \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz de f_β *en las bases*

B_1={1,x, x^2}; B_2=$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

- Si p(x)=a+bx+cx^2 p(1)=a+b+c

  p´(x)=b+2cx p´(1)=b+2c

  p´´(x)=2c p´´(1)=2c

  p´´´(x)=0 p´´´(1)=0

$$M_{B_1B_2}(\mathrm{f})=\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcular la dimensión de Im f_β y de ker f_β según los diferentes valores de β.

- dim Im $f_\beta = \text{rang}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ si $\beta \neq 0$ $\qquad \dim ker f_\beta = 0 \quad (f_\beta\ inyectivo)$
- dim Im $f_\beta = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ si $\beta = 0$ $\qquad \dim ker f_\beta = 1 \quad (f_\beta\ no\ inyectivo)$

c) Obtener unas ecuaciones paramétricas de ker f_β *en la base* B_1 y unas ecuaciones implícitas de Im f_β *en la base* B_2 en el caso en que f_β no es inyectivo.

si $\beta = 0$: $\ker f = \{(x, y, z) / f(x,y,z)=0$ $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y+2z=0; 2z=0 $\quad$ ker f={(x,0,0) /x∈ R}

$$\text{Im } f_0 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, y+2z, 2z, 0) / \ y, z \in R\}$$= ={(x,y,z,t) /x= $0; t = 0\}$

Para $\beta = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d) Encontrar una base de ${f_1}^{-1}(S_{2x2})$ siendo S_{2x2} *el espacio de matrices* simétricas 2x2

S_{2x2}={$(y_1, y_2, y_2, y_3)/y_1, y_2, y_3 \in R\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x_2 + 2x_3 = 2x_3 \longrightarrow x_2 = 0$$

${f_1}^{-1}(S_{2x2})$= ={$(x_1, 0, x_3)/x_1, x_3 \in R\}$

Base: {(1,0,0); (0,0,1)}

Para $\beta = 1$:

e) Considerando ahora las bases

$B_1{'}$={1, x-1,1+ x^2} y $B_2{'}$={$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$} en los espacios de partida y de llegada respectivamente

Obtener la matriz del homomorfismo $M_{B_1{'}B_2{'}}(f_1)$.

1ª forma: utilizando las matrices de cambio de base

$$\begin{tikzcd} B_1{'} \arrow[r] \arrow[d, "M_{B_1{'}B_1}"'] & B_2{'} \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[u, "M_{B_2B_2{'}}"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{M_{BB'}(f) = M_{B_2B_2{'}}M_{B_1B_2}(\mathrm{f})M_{B_1{'}B_1}}$$

- $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2ª forma: utilizando coordenadas

- 2º) Obtenemos las imágenes de los vectores de la base $B_1{}'$
- f(1,0,0)= $(1, 0,0,0)$ f(-1,1,0)= $(0, 1,0,0)$ f(1,0,1)= $(2, 2,2,0)$

- Y obtenemos las coordenadas de estos vectores imagen en la base $B_2{}'$

- (1,0,0,0)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,-1,0,0)$)+$\gamma(0,0,-1,0) + \delta(1,1,-1,2)$ α=1 ; β=0 =γ= δ
- (0,1,0,0)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,-1,0,0)$)+$\gamma(0,0,-1,0) + \delta(1,1,-1,2)$ α=0 ; β=-1; 0=γ= δ
- (2,2,2,0)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,-1,0,0)$)+$\gamma(0,0,-1,0) + \delta(1,1,-1,2)$ α=1 ; β=0 =γ= δ
- (1,0,0,0)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,-1,0,0)$)+$\gamma(0,0,-1,0) + \delta(1,1,-1,2)$ α=2 ; β=-2 =γ; δ=0

$$M_{B_1{}'B_2{}'}(f_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 18**

En $P_2(x)$, espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2, definimos la aplicación

f: $P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ tal que

Los polinomios con término independiente nulo se transforman en sí mismos.

1) Ker f = $\{a + bx + cx^2 \in P_2(x) / a = b = c\}$

Calcular:

a) La matriz asociada al homomorfismo f en la base canónica de $P_2(x)$

b) Si S=$\{\alpha - 2\beta + \gamma + (\alpha - 2\beta - \gamma)x + (\alpha - 2\beta)x^2\}$ es un subespacio de $P_2(x), obtener\ una\ base\ de\ f(S)$

c) Clasificar el homomorfismo y razonar, analizando las dimensiones de los subespacios del apartado anterior, por qué tiene sentido el resultado obtenido.

d) Utilizando la matriz asociada a f en la base B=$\{1 + x + x^2, 1 + x, 1\}$, determinar las coordenadas de f$(1 - 3x + 5x^2)$ en la base canónica.

Aplicaciones lineales. Problemas

f: $P_2(x) \rightarrow P_2(x)$

Los polinomios con término independiente nulo se transforman en sí mismos, es decir

Si en S=$\{a + bx + cx^2 \in P_2(x) / a = 0\}$ consideramos la base: $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Sabemos que f(0,1,0)=(0,1,0) y que f(0,0,1)=(0,0,1)

Además, Ker f = $\{a + bx + cx^2 \in P_2(x) / a = b = c\}$ por tanto f(1,1,1)=(0,0,0)

Ya tenemos las imágenes de los vectores de una base de P_2(x)$\approx R^3$

a) Obtener la matriz asociada al homomorfismo f en la base canónica de $P_2(x)$

Necesitamos las imágenes de los vectores de la base canónica;

Calculamos f(1,0,0):

$(1,0,0) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,1,1) \Longrightarrow \alpha$=-1 β =-1 γ=1

f$(1,0,0) = -f(0,1,0) - f(0,0,1) + f(1,1,1)$=$-(0,1,0) - (0,0,1)$=(0,-1,-1)

Aplicaciones lineales. Problemas

$$M_{B_cB_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si S={$\alpha - 2\beta + \gamma + (\alpha - 2\beta - \gamma)x + (\alpha - 2\beta)x^2$} es un subespacio de $P_2(x)$, $obtener\ una\ base\ de\ f(S)$

S={$\alpha - 2\beta + \gamma + (\alpha - 2\beta - \gamma)x + (\alpha - 2\beta)x^2$}={($\alpha - 2\beta + \gamma, \alpha - 2\beta - \gamma, \alpha - 2\beta$)}

S es un subespacio de dimensión 2 y una base del mismo es {(1,1,1), (1,-1,0)}

Obtenemos imágenes de los vectores de la base de S para generar f(S):

Tenemos f(1,1,1)=(0,0,0) y f(1,-1,0)=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Entonces f(S)=L<(0,-2,-1)={$(0, -2\alpha, -\alpha)$ / $\alpha \in R$}

Aplicaciones lineales. Problemas

c) Clasificar el homomorfismo y razonar, analizando las dimensiones de los subespacios del apartado anterior, por qué tiene sentido el resultado obtenido.

$Observamos\ que\ rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=2=dim(Imf) $\Longrightarrow$ dim(kerf)=1

El homomorfismo no es por tanto ni suprayectivo (Im f $\neq R^3$) ni inyectivo (ker f $\neq \{0\}$)

Hemos visto que f no conserva la independencia lineal puesto que dim S=2 y sin embargo, dim f(S)=1: esto es perfectamente coherente con el hecho de que el homomorfismo f no es inyectivo.

Aplicaciones lineales. Problemas

d) Utilizando la matriz asociada a f en la base B=$\{1+x+x^2, 1+x, 1\}$, determinar las coordenadas de f$(1-3x+5x^2)$ en la base canónica.

- *Calculamos la $M_B(f)$: hemos de obtener las imágenes de los vectores de la base B en base B*=$\{1+x+x^2, 1+x, 1\}$*: {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)}*

- ***1ª forma: Por coordenadas***

- f(1,1,1)=$(0,0,0)$ *en cualquier base* 1ª columna de la matriz
- f(1,1,0)=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Ahora obtenemos las coordenadas de este vector imagen en base B

$(0,0,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta f(1,1,0)$+$\gamma$f$(1,0,0)$ α=-1 β =1 γ=0 2ª columna de la matriz

- f(1,0,0)=$(0,-1,-1)$obtenemos las coordenadas de este vector imagen en base B
- $(0,-1,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta f(1,1,0)$+$\gamma$f$(1,0,0)$ α=-1 β =0 γ=1 3ª columna de la matriz

Aplicaciones lineales. Problemas

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2ª forma : $M_B(f) = M_{B_C B} M_{B_C}(f)\, M_{BB_C} = P^{-1} M_{B_C}(f) P$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_B(\mathrm{f})"] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B \\ B_c \arrow[r, "M_{B_c}(\mathrm{f})"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> ➢ M_{BB_c} es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B en la base B_c : M_{B_c} ($|vectores\ de\ B|$)=P
>
> ➢ M_{B_cB} es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B_c en la base B : $M_{\boldsymbol{B}}$ ($|vectores\ de\ B_c|$)=P^{-1}

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 19**

  Sea B={$u_1 = (1{,}1{,}0), u_2 = (0{,}1{,}1), u_3 = (1{,}0{,}1)$} una base de $\boldsymbol{R}^3$.

  Encontrar la base dual de B

- Tenemos que encontrar una B^*={u_1^*, u_2^*, u_3^*} tal que $u_i^*(u_j)$= δ_{ij} para $1 \leq i, j \leq 3$

- Vamos a calcular u_1^* (es una forma lineal):
  - u_1^*=ax_1+b x_2+c x_3 que verifica

    $u_1^*(u_1)$=a+b=1

    $u_1^*(u_2)$=b+c=0 $\quad$ a=$\frac{1}{2}$ = b; c= $\frac{-1}{2}$ $\quad$ u_1^*= $\frac{1}{2}$ x_1+ $\frac{1}{2}$ x_2-$\frac{1}{2}$ x_3

    $u_1^*(u_3)$=a+c=0

  - u_2^*=ax_1+b x_2+c x_3 verifica

    $u_2^*(u_1)$=a+b=0

    $u_2^*(u_2)$=b+c=1 $\quad$ a=$\frac{-1}{2}$; b=c= $\frac{1}{2}$ $\quad$ u_1^*= $\frac{-1}{2}$ x_1+ $\frac{1}{2}$ x_2+$\frac{1}{2}$ x_3

    $u_2^*(u_3)$=a+c=0

  - De igual forma, obtenemos $\quad$ u_3^*= $\frac{1}{2}$ x_1- $\frac{1}{2}$ x_2+$\frac{1}{2}$ x_3

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 20**

Sea f un endomorfismo de R^4 definido por:

1) ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}

2) f(0,0,0,1) = (2,0,0,0) y f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)

a) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de R^4
b) Hallar una base del subespacio f(V) siendo V$\equiv \{(x,y,z,t)/\ x+y+z+t\ =0\}$
c) Calcular la matriz de f respecto de la base B=$\{w_1=(1{,}1{,}0{,}0), w_2=(1,-1{,}0{,}0), w_3=(0{,}0{,}1{,}1), w_4=(0{,}0{,}1,-1)\}$

- f: $R^4 \longrightarrow R^4$
- ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}={x,-2x,-2t,t)/ x,t$\in R\}$

  Base del ker f={(1,-2,0,0);(0,0,-2,1)}

- Necesitamos las imágenes de los vectores de la base canónica
- Tenemos f(1,0,0,0) = (2,0,2,0) y f(0,0,0,1) = (2,0,0,0)

Aplicaciones lineales. Problemas

$(0,1,0,0)=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,-2,0,0)+\delta(0,0,-2,1)$ $\quad \alpha=\frac{1}{2};\ \beta=0;\ \gamma=\frac{-1}{2};\ \delta=0$

$f(0,1,0,0)=\frac{1}{2}(2,0,2,0)-\frac{1}{2}(0,0,0,0)=(1,0,1,0)$ $\longrightarrow$ 2ª columna de la matriz asociada

$(0,0,1,0)=\alpha(1,0,0,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,-2,0,0)+\delta(0,0,-2,1)$ $\quad \alpha=0;\ \beta=\frac{1}{2};\ \gamma=0;\ \delta=\frac{-1}{2}$

$f(0,1,0,0)=\frac{1}{2}(2,0,0,0)=(1,0,0,0)$ $\longrightarrow$ 3ª columna de la matriz asociada

$$M_{B_cB_c}(f)=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

$V \equiv \{(x, y, z, t) / \ x + y + z + t = 0\}$ $=\{(x,y,z,-x-y-z)\}/ \ x,y,z \in R\}$

- Calculamos las imágenes de los vectores de una base de V
- f(1,0,0,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f(0,1,0,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- f(0,0,1,-1)= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- f(V)=L<(0,0,2,0), (-1,0,-1,0), (-1,0,0,0)> ¿constituyen una base?
- Comprobamos que el rango de este conjunto de vectores es 2: es decir

  f(V)= L< (-1,0,-1,0), (-1,0,0,0)>

c) ¿$M_B(f)$?

- B={$w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (1,-1,0,0), w_3 = (0,0,1,1), w_4 = (0,0,1,-1)$}

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_B(f)"] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B \\ B_c \arrow[r, "M_{B_c}(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB}"'] \end{tikzcd}$$

$$M_B(f) = M_{B_CB} M_{B_C}(f)\, M_{BB_C} = P^{-1} M_{B_C}(f) P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

- **Problema 21**

  - f: A → B≡ $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = 2\vec{u}_2 \end{cases}$

  - g: B → C≡ $\begin{cases} g(\vec{u}_1) = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 + \overrightarrow{2c_3} \\ g(\vec{u}_2) = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 \end{cases}$

- **1ª forma: Construimos la aplicación lineal compuesta**
- h=g∘f: A → C

  g∘f ($\vec{e}_1$)=g($\vec{u}_1 - \vec{u}_2$)= $g(\vec{u}_1)$- $g(\vec{u}_2)$= $\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + \overrightarrow{2c_3}$- $\vec{c}_1 + \vec{c}_2$= $\overrightarrow{2c_3}$

  g∘f ($\vec{e}_2$)=g($\vec{u}_2$)= $g(\vec{u}_2)$= $\vec{c}_1 - \vec{c}_2$

  g∘f ($\vec{e}_3$)=g(2$\vec{u}_2$)= $2g(\vec{u}_2)$= $2\vec{c}_1 - \overrightarrow{2c_2}$

  $M_{B_A B_c}$(h)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- **2ª forma: La matriz asociada a la composición de aplicaciones es el producto de matrices**

- $M_{B_A B_C}$(h)= $M_{B_B B_C}$(g). $M_{B_A B_B}$ (f)=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  - Obtener $h^{-1}(1,1,1) = \{(x_1, x_2, x_3)$ / $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$}=

    $= \{(x_1, x_2, x_3)$ / $x_2 + 2x_3$=1; -$x_2 - 2x_3$=1; $2x_1$=1}=∅

  No existe ningún vector que verifique esas ecuaciones implícitas

  - ker h $= \{(x_1, x_2, x_3)$ / $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$}

    $= \{(x_1, x_2, x_3)$ / $x_2 + 2x_3$=0; -$x_2 - 2x_3$=0; $2x_1$=0}={(0,-2x_3, x_3) / $x_3 \in R\}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- h (V$\cap W$) siendo V=$\{(2\alpha+\beta, \alpha-\beta, -\alpha)\ \ con\ \alpha, \beta \in R\}$
  y siendo W=$\{(x, y, z)\ con\ x-y+2z=0\}$

- V=$\{(2\alpha+\beta, \alpha-\beta, -\alpha)\ \ con\ \alpha, \beta \in R\}$

  dim V=2 Base de V: (2,1,-1); (1,-1,0)
- W=$\{(x, y, z)\ con\ x-y+2z=0\}$
- $V \cap W$=$\{(2\alpha+\beta, \alpha-\beta, -\alpha) / 2\alpha+\beta-(\alpha-\beta)-2\alpha=0\}$=$\{(5\beta, \beta, -2\beta)\ \ con\ \beta \in R\}$

Entonces dim $(V \cap W)=1$ $\quad Base\ de\ \ V \cap W: (5,1,-2)$

- h(5,1,-2)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$
- Entonces h($V \cap W$) es el subespacio generado por este vector (el conjunto de combinaciones lineales del mismo h($V \cap W$) =$\{(-3\alpha, 3\alpha, 10\alpha)\ \ con\ \ \alpha \in R\}$

  $=\{(x_1, x_2, x_3) / x_1+x_2=0;\ 3x_3+10x_1=0\}$

- **Problema 22**

Consideramos los espacios vectoriales:

E=$\{ax + b / a, b \in R\}$; F={matrices simétricas de orden 2}; G=R^3

Definimos los homomorfismos f: E→ F tal que f(ax+b)= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

g: F→ G tal que g$\begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a, c, a + c)$

B={x,1}; B´={$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}; B´´={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} son las bases canónicas de E, F y G.

a) Matrices de los homomorfismos f, g y gof en las bases B, B´y B´´.

E=$\{ax + b / a, b \in R\} \approx R^2 \quad \dim\ E = 2 \quad Base\ de\ E\ \{(1,0), (0,1)\}$

F=$\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} / a, b, c \in R\} \approx R^3; \dim F = 3 \quad Base\ de\ F$: B´={ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}

G=R^3 Base de G: B´´={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

Aplicaciones lineales. Problemas

- f: E→ F tal que f(ax+b)= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
- f(1,0)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=(1,0,1) y f(0,1)= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$=(0,1,0)
- Entonces $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- g: F→ G tal que g$\begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a, c, a + c)$
- g(1,0,0)= g $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$=(1,0,1) ; g(0,1,0)= g$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$=(0,0,0) y g(0,0,1)= g$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=(0,1,1)
- Entonces $M_{B'B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- Entonces h=g∘f : E $\rightarrow$ F $\rightarrow$ G

$$(a,b) \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow (a,a,2a)$$

- h(1,0) =g∘f(1,0)= $g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=g(1,0,1)=(1,1,2)
- h(0,1) =g∘f(0,1)= $g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$=g(0,1,0)=(0,0,0)

- Entonces $M_{BB''}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- 2ª forma:
- Matricialmente, la matriz asociada a la composición de funciones es el producto de matrices.
- $M_{BB''}(h)$= $M_{B'B''}(g)\ M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- b) Calcular gof (V) siendo V={ax+a/ $a \in R$}

V={$ax + a/a \in R$} $Basta\ calcular\ la\ imagen\ por\ h\ de\ una\ base\ de\ V$

h(1,1)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Entonces gof (V)=L<(1,1,2)>

Aplicaciones lineales. Problemas

- c) Obtener núcleo e imagen de la aplicación lineal g y razonar si es inyectiva y/o suprayectiva
- Ker g= $\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}/$ a,b,c $\in R \text{ t.q.} (\mathrm{a, c, a+c}) = (0,0,0)\}$ $\longrightarrow$ $\mathrm{a}=0;\quad \mathrm{c}=0$
- Ker g= $\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}/$ b $\in R\} = \{(0, \mathrm{b}, 0)/$ b $\in R\}$ $\longrightarrow$ dim ker g=1 No es inyectiva
- Como dim ker g + dim Im g=3 $\longrightarrow$ dim Img=2 Tampoco es suprayectiva

Aplicaciones lineales. Problemas

- d) Si en F consideramos la base B*= $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$, hallar las matrices de f, g y gof en las bases B, B* y B´´.
- En el homomorfismo f estamos cambiando la base en el espacio de llegada y en el homomorfismo g el cambio de base se produce en el espacio de partida.
- Aplicamos primero el cambio de base para f:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "M_{BB*}(f)"] \arrow[d, "I_2"'] & \mathrm{B}^* \\
B \arrow[r, "M_{BB'}(f)"'] & B' \arrow[u, "M_{B'B*}"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{BB*}(f) = M_{B'B*}M_{BB'}(f)$$

(|vectores de B´en la base B*|)= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}$

Aplicaciones lineales. Problemas

- O bien obtenemos $M_{B'B*}$ por coordenadas:
- $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$=$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ o equivalentemente lo escribimos
- $(1,0,0)$=$\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,0)+\gamma\,(1,0,-1) \longrightarrow \alpha+\gamma=1;\ \beta=0;\ \alpha-\gamma=0 \longrightarrow \alpha=\gamma=\frac{1}{2};\ \beta=0$
- $(0,1,0)$=$\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,0)+\gamma\,(1,0,-1) \longrightarrow \alpha+\gamma=0;\ \beta=1;\ \alpha-\gamma=0 \longrightarrow \alpha=\gamma=0;\ \beta=1$
- $(0,0,1)$=$\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,0)+\gamma\,(1,0,-1) \longrightarrow \alpha+\gamma=0;\ \beta=0;\ \alpha-\gamma=1 \longrightarrow \alpha=\frac{1}{2};\ \beta=0;\gamma=-\frac{1}{2}$

$$M_{B'B*}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0\\1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$y \quad M_{BB*}(f)=M_{B'B*}M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\0 & 1 & 0\\1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

- Aplicamos ahora el cambio de base para g:
- Aquí hay cambio de base en el espacio de partida, pero no en el espacio de llegada

$$M_{B*B''}(g) = M_{B'B''}(g)M_{B*B''}$$

$$\begin{tikzcd}
B* \arrow[r, "M_{B*B''}(g)"] \arrow[d, "M_{B*B''}"'] & B'' \\
B' \arrow[r, "M_{B'B''}(g)"'] & B'' \arrow[u, "I_3"']
\end{tikzcd}$$

(|vectores de B*en la base B´´|)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$M_{B*B''}(g) = M_{B'B''}(g)M_{B*B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones lineales. Problemas

- Podemos obtener ya como producto la matriz del homomorfismo h:

$$
\begin{tikzcd}
B^* \arrow[r, "M_{B*B''}(g)"] \arrow[d, "M_{B*B''}"'] & B'' \\
B' \arrow[r, "M_{B'B''}(g)"'] & B'' \arrow[u, "I_3"']
\end{tikzcd}
$$

$$M_{BB''}(h) = M_{B*B''}(g)M_{BB*}(f) =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 23

Si $S_2(R)$ es el espacio vectorial de las matrices 2x2 simétricas de coeficientes reales y $P_2(x)$ es el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2, y definimos la aplicación

f: $P_2(x) \rightarrow S_2(R)$ tal que f[p(x)] = $\begin{pmatrix} p'(0) & p'(1) \\ p'(1) & p'(-1) \end{pmatrix}$

Calcular:

a) Probar que f es una aplicación lineal y obtener la matriz del homomorfismo f respecto a las bases canónicas de $P_2(x)$ y $S_2(R)$;
b) Calcular las ecuaciones implícitas y dar una base del ker f en la base B

$$B=\{x^2, (x-1)^2, (x+1)^2\}$$

Si g: $S_2(R) \rightarrow P_1(x)$ *siendo* $P_1(x)$ es el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 1, tal que g($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)=(a+d)+(a-d)x

Y definimos h=$g_o f$

a) Obtener *una base de* $h^{-1}(T)$ *siendo* $T = \{k + kx / \, k \neq 0\}$
b) Obtener la matriz del homomorfismo $M_{BB'}(h)$ si B´={(1,-2); (0,1)}
c) Obtener a partir de la matriz del apartado anterior h$(3 - 2x + 6x^2)$ *y* dar las coordenadas de esta imagen en la base canónica.

- $f: P_2(x) \longrightarrow S_2$

  a+bx+cx^2 $\longrightarrow \begin{pmatrix} b & b+2c \\ b+2c & b-2c \end{pmatrix}$ o como tanto $P_2(x) \approx S_2 \approx R^3$

  (a,b,c) $\longrightarrow$ (b, b+2c, b-2c)

p(x)=a+bx+ cx^2
p´(x)=b+2cx p´(0)=b p´(1)=b+2c p´(-1)=b-2c

- **Probar que f es una aplicación lineal y obtener la matriz del homomorfismo f respecto a las bases canónicas de $P_2(x)$ y $S_2(R)$;**
- f$(\alpha p+\beta q) = f\ (\alpha a+\beta a´, \alpha b+\beta b´,\ \alpha c+\beta c´)$= $\begin{pmatrix} \alpha b+\beta b´ & \alpha b+\beta b´+2\alpha c+2\beta c´ \\ \alpha b+\beta b´+2\alpha c+2\beta c´ & \alpha b+\beta b´-2\alpha c-2\beta c´ \end{pmatrix}$

  $=\alpha \begin{pmatrix} b & b+2c \\ b+2c & b-2c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b´ & b´+2c´ \\ b´+2c´ & b´-2c´ \end{pmatrix}$ *f es lineal*
- *Base canónica de* $P_2(x)$*: {1, x,* x^2*}* *Base canónica de* $S_2 \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$
- *f(1,0,0) =(1,0,0)=* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- *F(0,1,0)=(1,1,1)=* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{B_C, B´_C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- *F(0,0,1)=(0,2,-2)=* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- **b) Calcular las ecuaciones implícitas y dar una base del ker f en la base B={$x^2, (x-1)^2, (x+1)^2$}**

- **1ª forma**
- Ker f = {$(x_1, x_2, x_3) \ / f(x_1, x_2, x_3) = o_{R^3}$} $x_2 = 0; \quad x_2 + 2x_3 = 0; \quad x_2 - 2x_3 = 0$
- Ker f = {$(x_1, 0,0) \ / x_1 \in R$} =L<(1,0,0)>   Este es el núcleo en las bases canónicas
- Queremos obtener las coordenadas de los vectores del núcleo en la base B: son los coeficientes de la correspondiente combinación lineal

  (1,0,0)=α(0,0,1)+β(1,-2,1)+γ(1,2,1) α=-1; β=1/2; γ=1/2

  Es decir $(1,0,0)_{B_c} = (-1,1/2,1/2)_B$ Es decir ker f en base B es L<$(-1,1/2,1/2)$ >

  En implícitas Ker f = {$(x, y, z)/ y = z; x = -2z$}

2ª forma

- Obtenemos la matriz de la aplicación lineal en base B y calculamos después el núcleo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M_{BB}(f)"] \arrow[d, "M_{BB_c}"'] & B \\
B_c \arrow[r, "A_{B_C,B'_C}(f)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB}"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{M_{BB}(f) = M_{B_cB} A_{B_C,B'_C}(f) M_{BB_c}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Y ahora calculamos el ker f en la base B:
- Ker f={(x,y,z)/ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$} =Ker f={(x,y,z)/ $y = z; x = -2z$} ={(-2z,z,z)/$z \in R$}
- Base del ker f en la base B: (-2,1,1)

Si g: $\boldsymbol{S_2(R) \rightarrow P_1(x)}$ *siendo* $\boldsymbol{P_1(x)}$ es el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 1, tal que g($\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$)=(a+d)+(a-d)x

Y definimos h=$\boldsymbol{g_o f}$

c) Obtener $\boldsymbol{una\ base\ de\ h^{-1}(T)\ siendo\ T = \{k + kx/\ k \neq 0\}}$

- $f: P_2(x) \quad \rightarrow \quad S_2 \quad \rightarrow \quad P_1(x)$

$$a+bx+cx^2 \rightarrow \begin{pmatrix} b & b+2c \\ b+2c & b-2c \end{pmatrix} \rightarrow (2b-2c)+2cx$$

- Aplicando isomorfismos (a,b,c) → (b,b+2c,b-2c) → (2b-2c,2c)
- Luego h(a,b,c)=(2b-2c,2c) y M_{B_c}(h)=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $Calculamos\ ahora\ h^{-1}(T)\ siendo\ T = \{k + kx/k \neq 0\}$=L<(1,1)>
- $h^{-1}(T)$={(a,b,c)/2b-2c=2c} ={a+2cx+cx^2/a,c∈ R}
- Base:{(1,0,0); (0,2,1)} o bien {1; 2x+x^2}

b) Obtener la matriz del homomorfismo $M_{BB'}(h)$ si B´={(1,-2); (0,1)}

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{BB'}(h)"] \arrow[d, "M_{BB_c}"] & B' \\ B_c \arrow[r, "M_{B_C,B'_C}(h)"'] & B_c \arrow[u, "M_{B_cB'}"'] \end{tikzcd}$$

$$M_{BB'}(h) = M_{B_cB'}M_{B_C,B'_C}(h)M_{BB_c}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -2 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Obtener a partir de la matriz del apartado anterior h$(3-2x+6x^2)$ y dar las coordenadas de esta imagen en la base canónica.

- La matriz del apartado anterior es $M_{BB'}(h)$ luego permite calcular imágenes de vectores expresados en base B
- Para calcular la imagen del vector $(3,-2,6)_{B_C}$ primero tenemos que obtener las coordenadas de dicho vector en base B
- Si expresamos $(3,-2,6)$=$\alpha(0,0,1)+\beta(1,-2,1)+\gamma(1,2,1)$ $\quad$ $obtenemos\ \alpha=3;\ \beta=2;\ \gamma=1$
- Entonces h$(3,2,1)_B$= $M_{BB'}(h)$ $(3,2,1)_B$= $\begin{pmatrix}-2 & -6 & 2\\ -2 & -10 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}-16\\-20\end{pmatrix}$ Coordenadas de la imagen en la base B´
- Si las queremos obtener en base canónica, multiplicamos por $M_{B'B_C}$: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-16\\-20\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}-16\\12\end{pmatrix}$
- Resulta fácil comprobar sustituyendo en la aplicación lineal que

$$\mathbf{h}(3-2x+6x^2)\text{=g}\begin{pmatrix}-2 & 10\\ 10 & -14\end{pmatrix}\text{=-16+12x}$$