CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# Cónicas y Cuádricas

## PROBLEMAS TEMA 7

## Ideas para resolución

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

- **Problema 1**

Obtener la ecuación reducida y clasificar la cónica

$8x^2$ +4xy+5$y^2$ + $12y$+4=0

- Su ecuación matricial es $(x \quad y)\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \quad 12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica P($\lambda$) = |A− $\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{8}-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(5-\lambda)-4=0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=9, $\lambda_2$=4 cada uno con multiplicidad 1

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

**Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(9) = ker (A-9I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A-9I)v=0}= {v∈ $R^2$/(A-9I)v=0}
- (A−9I)v=0 $\begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x+2y=0$
- S(9) ={(2y,y,)/ y ∈R} dimS(2)=1 **Tomamos un primer vector $v_1$ =(2, 1)**

- S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A-4I)v=v}= {v∈ $R^2$/(A-4I)v=0}
- (A−4I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x+y=0$
- S(4) ={(x,-2x)/ x ∈R} **Tomamos un segundo vector $v_2$ =(1, -2)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores**

B={$v_1$=(2,1); $v_2$=(1,-2)}

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={$e_1$=($\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}$)}

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

**P=** $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 9 & \\ & 4 \end{pmatrix}$

**Ahora la expresión matricial de la cónica es**

$(X')^t DX'$+BPX´ $+ a_0 = 0 \Rightarrow$ (x´ y´) $\begin{pmatrix} 9 & \\ & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (0 \quad 12) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 4=0$

- ✓ **y la expresión analítica es** $9x'^2 + 4y'^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x' - \frac{24}{\sqrt{5}}y' + 4=0$

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- Paso 2: Traslación
  - $9x'^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x' = 9(x'^2 + \frac{4/3}{\sqrt{5}}x') = 9[\left(x' + \frac{2/3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4/9}{5}] = 9(x'')^2 - \frac{4}{5}$

$$\boxed{x'' = x' + \frac{2/3}{\sqrt{5}}}$$

  - $4y'^2 - \frac{24}{\sqrt{5}}y' = 4(y'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}y') = 4[\left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{5}] = 4(y'')^2 - \frac{36}{5}$

$$\boxed{y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{5}}}$$

$9(x'')^2 - \frac{4}{5} + 4(y'')^2 - \frac{36}{5} + 4 = 0 \Longrightarrow 9(x'')^2 + 4(y'')^2 - 4 = 0$ *Ecuación reducida de la cónica*

3) Clasificación de la cónica

$9(x'')^2 + 4(y'')^2 - 4 = 0 \quad Ecuación\ reducida\ de\ la\ cónica$

- 1ª forma: la ecuación reducida queda del tipo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - c = 0$$

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ se trata de una cónica de tipo elíptico
  - $\lambda_1 c > 0$ se trata de una elipse real

- 2ª forma:

$$\begin{pmatrix} -c^2 = -4 & & \\ & \alpha^2 = 9 & \\ & & \beta^2 = 4 \end{pmatrix}$$ Elipse real

- 3ª forma: por invariantes
- $I_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} < 0$
- $I_2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} > 0$
- $I_1 = 8 + 5 > 0$
- $I_1 I_3 < 0 \longrightarrow$ Elipse real

- **Problema 2**

Obtener la ecuación reducida y clasificar la cónica

xy-x-y-1=0

- Su ecuación matricial es $(x \quad y)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-1 \quad -1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2\text{-}1/4=0$$

- Autovalores: $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{-1}{2}$ cada uno con multiplicidad 1

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

**Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(1/2) = ker (A-$\frac{1}{2}$I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A- $\frac{1}{2}$ I)v=0}= {v∈ $R^2$/(A- $\frac{1}{2}$ I)v=0}
- (A−$\frac{1}{2}$I)v=0 $\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x+y=0$
- S($\frac{1}{2}$) ={(y,y,)/ y ∈R} **Tomamos un primer vector $v_1$ =(1, 1)**

- S($\frac{-1}{2}$) = ker (A+ $\frac{1}{2}$ I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A+ $\frac{1}{2}$ I)v=v}= {v∈ $R^2$/(A+ $\frac{1}{2}$ I)v=0}
- (A−4I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & 1/2 \\ 1/2 & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+y=0$
- S($\frac{-1}{2}$) ={(x,-x)/ x ∈R} **Tomamos un segundo vector $v_2$ =(1, -1)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores**

B={$v_1$=(1,1); $v_2$=(1,-1)}

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={$e_1$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$)}

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

**P=** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$

**Ahora la expresión matricial de la cónica es**

$(X')^t DX'+BPX' + a_0 = 0 \Rightarrow (x' \quad y')\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-1 \quad -1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1=0$

- ✓ **y la expresión analítica es** $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \sqrt{2}x' - 1=0$

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- Paso 2: Traslación
  - $\frac{1}{2}x'^2 - \sqrt{2}x' = \frac{1}{2}(x'^2 - 2\sqrt{2}x') = \frac{1}{2}[(x' - \sqrt{2})^2 - 2] = \frac{1}{2}(x'')^2 - 1$

$x'' = x' - \sqrt{2}$

$y'' = y'$

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \sqrt{2}x' - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x'')^2 - 1 - \frac{1}{2}y''^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}(x'')^2 - \frac{1}{2}y''^2 - 2 = 0}$$

Ecuación reducida de la cónica

3) Clasificación de la cónica

$$\frac{1}{2}(x'')^2 - \frac{1}{2}y''^2 - 2 = 0 \quad \textit{Ecuación reducida de la cónica}$$

- 1ª forma: la ecuación reducida queda del tipo

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2$-c=0

- $\lambda_1\ \lambda_2$<0 se trata de una cónica de tipo hiperbólico
  - c≠0 la cónica es una hipérbola

- 2ª forma:

$$\begin{pmatrix} c^2 = 2 & & \\ & \alpha^2 = 1/2 & \\ & & -\beta^2 = -1/2 \end{pmatrix}$$ Hipérbola

- 3ª forma: por invariantes

- $I_3$= $\begin{vmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} > 0$
- $I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} < 0$
- Es una hipérbola

- **Problema 3**

Obtener la ecuación reducida y clasificar la cónica

$3x^2$ +2xy+$3y^2 - 8x - 8y$+6=0

- Su ecuación matricial es $(x \quad y)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-8 \quad -8)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 6=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica P($\lambda$) $=$ |A$-\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3}-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=4, $\lambda_2$=2 cada uno con multiplicidad 1

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

**Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A- 4I)v=0}= {v∈ $R^2$/(A- 4I)v=0}

- (A−4I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x+y=0$
- S(4) ={(y,y,)/ y ∈R} **Tomamos un primer vector $v_1$ =(1, 1)**

- S(2) = ker (A-2 I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A-2 I)v=v}= {v∈ $R^2$/(A-2I)v=0}

- (A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+ y=0$
- S(2) ={(x,-x)/ x ∈R} **Tomamos un segundo vector $v_2$ =(1, -1)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores**

B={$v_1$=(1,1); $v_2$=(1,-1)}

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={$e_1$=($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$)}

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

**P=** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 4 & \\ & 2 \end{pmatrix}$

**Ahora la expresión matricial de la cónica es**

$(X')^t DX' + BPX' + a_0 = 0 \Rightarrow (x' \quad y')\begin{pmatrix} 4 & \\ & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-8 \quad -8)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 6 = 0$

- ✓ **y la expresión analítica es** $4x'^2 + 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 6 = 0$

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- Paso 2: Traslación
  - $4x'^2 - 8\sqrt{2}x' = 4(x'^2 - 2\sqrt{2}x') = 4[(x' - \sqrt{2})^2 - 2] = 4(x'')^2 - 8$

$\boxed{x'' = x' - \sqrt{2}}$ $\boxed{y'' = y'}$

$4x'^2 + 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 6 = 0 \Rightarrow 4(x'')^2 - 8 + 2y''^2 + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{4(x'')^2 + 2y''^2 - 2 = 0}$

Ecuación reducida de la cónica

3) Clasificación de la cónica

$$4(x'')^2 + 2y''^2 - 2 = 0 \quad \mathit{Ecuación\ reducida\ de\ la\ cónica}$$

- 1ª forma: la ecuación reducida queda del tipo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 \text{-c=0}$$

> - $\lambda_1\ \lambda_2$>0 se trata de una cónica de tipo elíptico
>   - $como\ \lambda_1\ c$>0 se trata de una elipse real

- 2ª forma:

$$\begin{pmatrix} c^2 = 2 & & \\ & \alpha^2 = 4 & \\ & & \beta^2 = 4 \end{pmatrix}$$ Elipse real

- 3ª forma: por invariantes

- $I_3 = \begin{vmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0$
- $I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} > 0$
- $I_1\ I_3$<0 Es una elipse real

- **Problema 4**

Obtener la ecuación reducida y clasificar la cónica

$x^2$ +6$x + 5y$+14=0

- Su ecuación matricial es (x  y) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (6 \quad 5)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 14$=0

- Paso 1: **Diagonalización ortogonal de A Como el término en xy es 0 no es necesario efectuar la rotación, únicamente la traslación; lo hacemos solamente para comprobar que quedará igual**

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica P($\lambda$ ) $=$ |A− $\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1- \lambda)$$

- Autovalores: $\lambda_1$=0, $\lambda_2$=1 cada uno con multiplicidad 1

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

**Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(1) = ker (A- I)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/(A- I)v=v}= {v∈ $R^2$/(A-I)v=0}
- (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y = 0$
- S() ={(x,0)/ x ∈R} **Tomamos un vector $\boldsymbol{v_1}$ =(1, 0)**

- S(0) = ker (A)= {v=(x, y) ∈ $R^2$/Av=0}= (A−4I)v=0
- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\binom{x}{y}$= $\binom{0}{0}$ $x = 0$
- S(0) ={(0,y,)/ y ∈R} **Tomamos un primer vector $\boldsymbol{v_2}$ =(0, 1)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores que ya es ortonormal**

B={$v_1$=(1,0) $v_2$=(0,1)} es la base canónica

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

**P=** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **D=** $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

**Comprobamos que la expresión matricial de la cónica es la misma que teníamos inicialmente:**

$$(X')^t D X' + BPX' + a_0 = 0 \Rightarrow (x' \quad y') \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (6 \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 14 = 0$$

- ✓ **y la expresión analítica es** $x^2 + 6x + 5y + 14 = 0$

## Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- Paso 2: Traslación
  - $x^2 + 6x = (x' + 3)^2 - 9] =$

$$\boxed{x'' = x' + 3}$$

- Aquí no tenemos término cuadrático en y; ¿Qué hacemos en este caso? Vamos a agrupar el término en "y" con el término independiente
  - $5y' + 14 = 5(y'+1)+9 = 5y''+9$

$$\boxed{y'' = y' + 1}$$

- Entonces $x^2 + 6x + 5y + 14 = 0 = (x'')^2 - 9 + 5y'' + 9 = (x'')^2 + 5y'' = 0 \quad (x'')^2 = -5y''$
- *Se trata de una parábola*

3) Clasificación de la cónica

$$(x'')^2 + 5y'' = 0 \; Ecuación\ reducida\ de\ la\ cónica$$

- 1ª forma: Si $\lambda_1 \lambda_2$=0 se trata de una cónica de tipo parabólico
  - $b_1 \neq 0$ es una parábola

- 3ª forma: por invariantes

- 2ª forma:

$$\begin{pmatrix} c^2 = 0 & & 5/2 \\ & \alpha^2 = 1 & \\ 5/2 & & \beta^2 = 0 \end{pmatrix}$$ Elipse real

- $I_3 = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 5/2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$
- $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
- Se trata de una parábola

- **Problema 5**

Clasificar la siguiente cónica según los diferentes valores de m

$$mx^2+2xy+my^2+2y+m=0$$

- **Analizamos los invariantes métricos de la cónica**

$$(1\quad x\quad y)\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0 \qquad X^t\tilde{A}X=0$$

$$(x\quad y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+(2a_1\quad 2a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+a_0=0 \qquad X^tAX+BX+a_0=0$$

- $I_3=\det(\tilde{A}) \qquad I_2=\det(A) \qquad I_1=tr(A)=a_{11}+a_{22}$

$I_3=\det(\tilde{A})=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^3-2m=0=m(m^2-2)$ Estudiamos el signo de $I_3$ según los valores de m

| Valores de m | $(-\infty,-\sqrt{2})$ | $(-\sqrt{2},0)$ | $(0,\sqrt{2})$ | $(\sqrt{2},\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $m(m^2-2)$ | - | + | - | + |

- Caso 1) Si m$\neq \pm\sqrt{\mathbf{2}}\ y\ m \neq 0$ $\quad I_3$ ≠0 es una cónica no degenerada
  - Si m∈ (-∞,−=$m^2 - 1 \begin{cases} = 0\ si\ m = 1\ ó\ m = -1\ Parábola \\ < 0\ \ si\ m\ \in (-1,1) \quad Hipérbola \\ > 0\ si\ m\ \in (-\infty,-1)\ ó\ m\ \in (1,+\infty) \end{cases}$
    - $si\ m\ \in (-\infty,-) \quad I_1 I_3 > 0\ elipse\ imaginaria$
    - $si\ m\ \in \left(-\sqrt{\mathbf{2}},-1\right) \quad I_1 I_3 < 0\ elipse\ real$
    - $si\ m\ \in \left(1,\sqrt{\mathbf{2}}\right) \quad I_1 I_3 < 0\ elipse\ real$
    - $si\ m\ \in \left(-\sqrt{\mathbf{2}},\infty\right) \quad I_1 I_3 > 0\ elipse\ imaginaria$

- Caso 2) Si m$= \pm\sqrt{\mathbf{2}}$ ó $m = 0$ $\quad I_3$ =0 se trata de una cónica degenerada)
- Tenemos que analizar el signo de $I_2$= det $(A)$= $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$
  - $si\ m = 0 \qquad I_2 < 0\ son\ dos\ rectas\ que\ se\ cortan$
  - $si\ m = -\sqrt{\mathbf{2}} \quad I_2 > 0\ es\ un\ punto$
  - $si\ m = \sqrt{\mathbf{2}} \quad I_2 > 0\ es\ un\ punto$

- **Problema 6**

Obtener la ecuación reducida y clasificar las siguientes cuádricas:

$$3x^2+3y^2-2z^2+2xy+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+8z-8=0$$

- Su ecuación matricial es $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \quad 8)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-8=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3}-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2}-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(4-\lambda)(\lambda-2)=0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=-2 , $\lambda_2$=2 y $\lambda_3$=4 todos ellos con multiplicidad 1

**Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(-2) = ker (A+2I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A+2I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $5x + y = 0$; x+5y=0

S(-2) ={(0,0,z)/ z ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(0,0,1)

- S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A-2I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + y = 0;\ z = 0;$

S(2) ={(x,-x,0)/ x,y ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1,-1,0)

- S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A-4I)v=0}= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y = 0;\ z = 0;$

S(4) ={(x,x,0)/ x,y ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1, 1,0)

- ✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={$u_1$=(0,0,1); $u_2$=(1,-1,0); $u_3$=(1,1,0)} que es una base ortogonal
- ✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={$e_1$=(0,0,1); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$, 0); $e_3$=($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, 0)}

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & & \\ & \mathbf{2} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

- ✓ **La nueva expresión de nuestra cuádrica es:**

$$(X')^t DX'+BPX' + a_0 = 0 \qquad (x' \ \ y' \ \ z')\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & & \\ & \mathbf{2} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (2\sqrt{2} \ \ -2\sqrt{2} \ \ 8)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 8=0$$

- *Expresión analítica de la cuádrica* $-2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 + 8x' + 4y' - 8 = 0$

- $-2x'^2 + 8x' = -2(x'^2 - 4x') = -2[(x' - 2)^2 - 4] = -2(x'')^2 + 8$

$$\boxed{x'' = x' - 2}$$

- $2y'^2 + 4y' = 2(y'^2 + 2y') = 2[(y' + 1)^2 - 1] = 2(y'')^2 - 2$

$$\boxed{y'' = y' + 1} \qquad \boxed{z'' = z'}$$

✓ $-2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 + 8x' + 4y' - 8 = 0 \Rightarrow -2(x'')^2 + 8 + 2(y'')^2 - 2 + 4z''^2 - 8 = 0$

✓ $-2(x'')^2 + 2(y'')^2 + 4z''^2 - 2 = 0$ *Ecuación reducida de la cónica.*

➢ 3 autovalores no nulos y $c < 0$

- ➢ Como $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ (2 autovalores + y uno −): es un hiperboloide de una hoja

- Otra forma de clasificar la cuádrica ✓ $-2(x'')^2 + 2(y'')^2 + 4z''^2 - 2 = 0.$

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2-c^2=0$ | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | **Hiperboloide de una hoja** |

- 3ª forma de clasificar la cuádrica: analizando invariantes métricos

$$I_4 = \det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} -8 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 24 > 0$$

- ❑ $I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -16 < 0$
- ❑ $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$
- ❑ $I_1 = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3+3-2=4>0$
- ❑ $I_3 I_1 < 0$ con $I_4 > 0$ Es por tanto un hiperboloide de una hoja

- **Problema 7**

Obtener la ecuación reducida y clasificar las siguientes cuádricas:

$x^2 + y^2 + z^2$-4xz-4y+2=0

- Su ecuación matricial es $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (0 \quad -4 \quad 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$+2=0
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica P($\lambda$) = |A− $\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda)^3-4(1-\lambda)=0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=1 , $\lambda_2$=3 y $\lambda_3$=-1 todos ellos con multiplicidad 1

## ➢ Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

➢ S(1) = ker (A-I)= {v=$(x, y, z)$ ∈ $R^3$/(A-I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $z = 0;$ x=0

S(1) ={(0,y,0)/ y ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(0,1,0)

➢ S(3) = ker (A-3I)= {v=$(x, y, z)$ ∈ $R^3$/(A-3I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + z = 0; y = 0;$

S(3) ={(x,0,-x)/ x ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1,0,-1)

➢ S(-1) = ker (A+I)= {v=$(x, y, z)$ ∈ $R^3$/(A+I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - z = 0; y = 0;$

S(-1) ={(x,0,x)/ x ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1,0,1)

✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={$u_1$=(0,1,0); $u_2$=(1,0,-1); $u_3$=(1,0,1)} que es una base ortogonal

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={$e_1$=(0,1,0); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$); $e_3$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)}

- **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{3} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

- **La nueva expresión de nuestra cuádrica es:**

$$(X')^t DX'+BPX' + a_0 = 0 \qquad (x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{3} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (0 \quad -4 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2=0$$

- *Expresión analítica de la cuádrica* $x'^2 + 3y'^2 - z'^2 - 4x' + 2=0$

- $x'^2 - 4x = [(x'-2)^2 - 4] = (x'')^2 - 4$

$\boxed{x'' = x' - 2}$

$\boxed{y'' = y'}$ $\boxed{z'' = z'}$

- ✓ $x'^2 + 3y'^2 - z'^2 - 4x' + 2 = 0 \Rightarrow (x'')^2 - 4 + 3y''^2 - z''^2 + 2 = 0$
- ✓ $\Rightarrow (x'')^2 + 3y''^2 - z''^2 - 2 = 0$ *Ecuación reducida de la cónica.*

- 3 autovalores no nulos y $c < 0$
  - Como $\lambda_1 > 0$ , $\lambda_2 > 0$ , $\lambda_3 < 0$ (2 autovalores + y uno −): es un hiperboloide de una hoja

- Otra forma de clasificar la cuádrica ✓ $-2(x'')^2+2(y'')^2+4z''^2-2=0.$

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2-c^2=0$ | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | **Hiperboloide de una hoja** |

- 3ª forma de clasificar la cuádrica: analizando invariantes métricos

$$I_4 = \det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 42 > 0$$

- ❑ $I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$
- ❑ $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$
- ❑ $I_1 = tr(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+1+1=3>0$
- ❑ $I_3I_1<0$ con $I_4>0$ Es por tanto un hiperboloide de una hoja

- **Problema 8**

Obtener la ecuación reducida y clasificar las siguientes cuádricas:

$$y^2+4xz+1=0$$

- Su ecuación matricial es $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+1=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(1-\lambda)(\lambda-2)=0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=-2 , $\lambda_2$=2 y $\lambda_3$=1 todos ellos con multiplicidad 1

➢ **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

➢ S(-2) = ker (A+2I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A+2I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + z = 0$; 3y=0

S(-2) ={(x,0,-x)/ z ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1,0,-1)

➢ S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A-2I)v=0}= $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - z = 0;\ -y = 0;$

S(2) ={(x,0,x)/ x,y ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(1,0,1)

➢ S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ $R^3$/(A-I)v=0}= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x + 2z = 0; 2x - z = 0;$

S(1) ={(0,y,0)/ x,y ∈R} Elegimos un primer vector $u_1$=(0, 1,0)

✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={$u_1$=(1,0,-1); $u_2$=(1,0,1); $u_3$=(0,1,0)} que es una base ortogonal

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={ $e_1$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$); $e_2$=($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$) ;$e_3$=(0,1,0)}

- **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- **La nueva expresión de nuestra cuádrica es:**

$$(X')^t DX'+BPX' + a_0 = 0 \qquad (x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 1=0$$

- $Expresión\ analítica\ de\ la\ cuádrica\ \ -2x'^2 + 2y'^2 + z'^2 + 1 = 0$

- Otra forma de clasificar la cuádrica ✓ $-2(x'')^2 + 2(y'')^2 + 1z''^2 + 1 = 0.$

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2-c^2=0$ | $\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ | **Hiperboloide de dos hojas** |

- 3ª forma de clasificar la cuádrica: analizando invariantes métricos

$$I_4 = \det\left(\tilde{A}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

- ❑ $I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$

- ❑ $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ =-4<0
- ❑ $I_1 = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$=-2+2+1=1>0
- ❑ $I_3 I_1$<0 con $I_4$>0 Es por tanto un hiperboloide de una hoja

- **Problema 8**

Obtener la ecuación reducida y clasificar las siguientes cuádricas:

$3x^2+3y^2-2z^2+2xy+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+8z-8=0$

- Su ecuación matricial es $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+(2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \quad 8)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-8=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

**Cálculo de los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda)=|A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3}-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2}-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(4-\lambda)(\lambda-2)=0$$

- Autovalores: $\lambda_1=-2$ , $\lambda_2=2$ y $\lambda_3=4$ todos ellos con multiplicidad 1