Análisis Matemático II

Tema 3

Derivabilidad y diferenciabilidad en funciones de varias variables

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Derivadas parciales de primer orden

1.1 Definición para funciones de dos variables

Las **derivadas parciales** de una función de dos variables proporcionan información sobre cómo afecta al valor de la función un cambio en una de las dos variables.

En concreto, dada una función real de variable vectorial $f(x,y)$, sus derivadas parciales con respecto a las variables x e y son las funciones $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$, definidas de la siguiente manera:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

En las definiciones anteriores se emplea la siguiente regla práctica: para calcular $f_x(x,y)$, es necesario derivar respecto de la variable x considerando que y es una constante, mientras que para calcular $f_y(x,y)$ es necesario derivar respecto de la variable y considerando que x es una constante.

Ejercicio 1

Calcular la derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^2 + y^3$ en el punto $(2,1)$.

La notación para representar el concepto de derivada parcial de una función de dos variables $z = f(x,y)$ es muy variada, pudiéndose encontrar las siguientes variantes según los libros de consulta:

$$f_x(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad f_y(x,y) = f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

En cuanto a la notación para representar el concepto de derivada en un punto $(x,y) = (a,b)$, las formas más comunes son las siguientes:

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)} \qquad f_y(a,b) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

1.2 Interpretación geométrica

Las derivadas parciales de una función $f(x,y)$ también tienen una interpretación geométrica: si $y = b$, entonces $f(x,b)$ representa la curva intersección de la superficie $f(x,y)$ con el plano $y = b$, por lo que $f_x(a,b)$ representa la pendiente de esa curva en el punto del espacio tridimensional $(a,b,f(a,b))$.

Análogamente, $f(a,y)$ representa la curva intersección de la superficie $f(x,y)$ con el plano $x = a$, por lo que $f_y(a,b)$ representa la pendiente de esa curva en el punto del espacio tridimensional $(a,b,f(a,b))$.

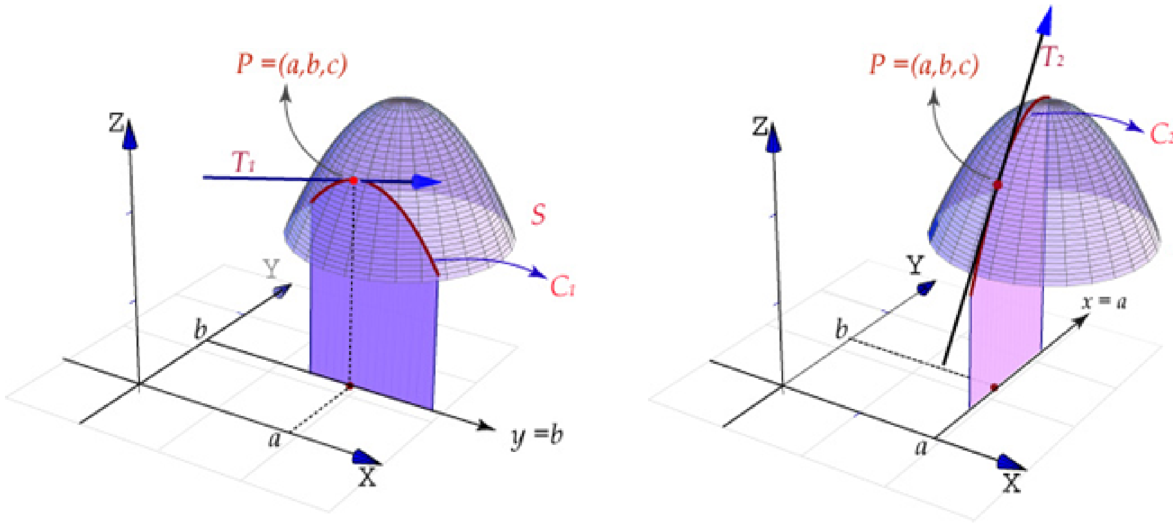

Figura 1: Interpretación geométrica del concepto de derivada parcial en funciones de dos variables.

Por lo tanto, los valores $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ y $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$ denotan las pendientes de las rectas tangentes en las direcciones X e Y a la superficie dada por la función $z = f(x, y)$ en el punto (a, b, c), donde $c = f(a, b)$.

1.3 Definición para funciones de tres variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, entonces existen tres derivadas parciales, en cada una de las cuales se considera al hacer los cálculos que las otras dos variables son constantes. De esta manera, se obtendrían las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

2 Derivada direccional de una función según un vector unitario

Sea una función real de dos variables. Se llama **derivada direccional** de $f(\overline{x})$ en la dirección del vector unitario $\overline{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, que por ser unitario cumple la condición $\|\overline{u}\| = 1$, al siguiente límite, si existe y es finito:

$$\boxed{D_{\overline{u}}[f(x, y)] = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x, y) + t\overline{u}\right) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}}$$

La forma de denotar el límite así definido en el elemento $\overline{x} = \overline{a}$ es $D_{\overline{u}}[f(\overline{a})] = f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = \dfrac{\partial f(\overline{a})}{\partial \overline{u}}$.

Desde un punto de vista geométrico, la derivada direccional representa la curva intersección de la superficie $f(x,y)$ con el plano vertical cuya dirección está marcada por el vector unitario $\overline{u}$, tal como se puede apreciar en la siguiente imagen.

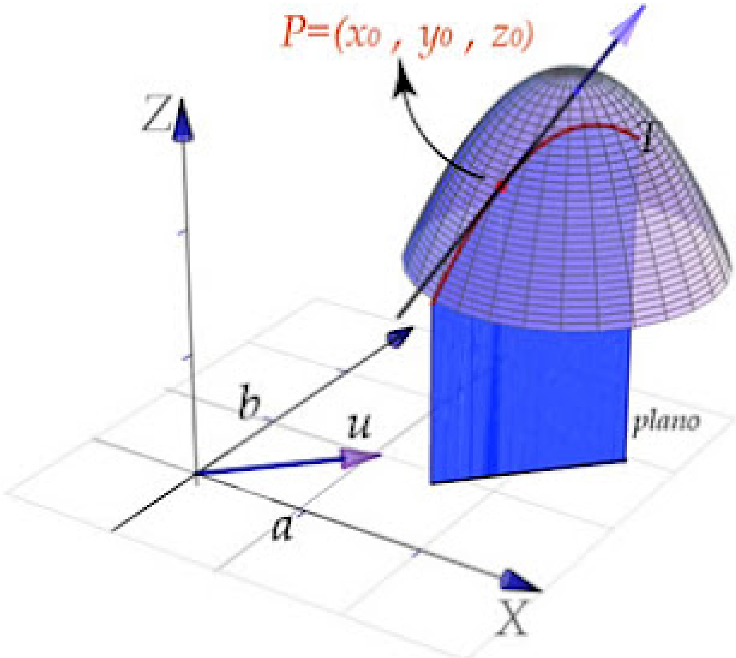

Figura 2: Interpretación geométrica de la derivada direccional.

Ejercicio 2

Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = xy$ en el punto $(2,3)$ en la dirección dada por el vector $(3,4)$.

Si $f(x,y)$ es una función diferenciable en x e y, entonces la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección del vector unitario $\overline{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\,\overline{i} + \operatorname{sen}\theta\,\overline{j}$ es

$$D_{\overline{u}}[f(x,y)] = f_x(x,y)\cos(\theta) + f_y(x,y)\operatorname{sen}(\theta)$$

Expresado de otro modo, la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en la dirección del vector unitario $\overline{u}$ es

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}(\theta)$$

Análogamente, si $w = f(x,y,z)$, siendo α, β y γ los ángulos que el vector unitario $\overline{u}$ forma con los tres ejes de coordenadas, entonces la derivada direccional se puede expresar como

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{u}} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(\beta) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(\gamma)$$

3 Derivadas parciales de segundo orden

En las funciones reales de variable vectorial es posible calcular las derivadas parciales de orden superior. Las opciones que surgen en funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son las siguientes:

1) Derivar dos veces con respecto a la variable x:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2) Derivar dos veces con respecto a la variable y:

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3) Derivar primero con respecto a x y luego respecto a y:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4) Derivar primero con respecto a y y luego respecto a x:

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

A las derivadas f_{xy} y f_{yx} se las suele llamar **derivadas parciales cruzadas**. En el caso general de funciones con n variables, el número de derivadas parciales de segundo orden es n^2.

Teorema de Schwarz

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si f_{xx}, f_{xy} y f_{yy} existen en un entorno del punto (a,b) y además f_{xy} es continua en el punto (a,b), entonces existe la derivada parcial f_{yx} en ese punto y se verifica que $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

4 Regla de la cadena

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real, es posible utilizar la regla de la cadena con funciones de varias variables. Supongamos que tenemos una función real de dos variables $z = f(x,y)$, donde a su vez x e y dependen de una variable t, con lo que $x = x(t)$ e $y = y(t)$. En esta situación se verificaría la siguiente igualdad:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejercicio 3

Calcular dz/dt si $z = f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$, $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ e $y(t) = \cos(t)$.

Si tanto x como y dependieran a su vez de dos variables u y v, con lo que $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$, las relaciones que se satisfarían serían las siguientes:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

5 Diferenciabilidad

La **diferenciabilidad**, especialmente en funciones de varias variables, es un concepto más amplio que la derivabilidad. Se dice que una función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto (x_0,y_0) si y solo si se cumple cualquiera de las dos fórmulas que aparecen a continuación

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

El concepto de diferenciabilidad está estrechamente relacionado con el hecho de que la función $L(x,y)$ en un punto (x_0,y_0) sea una buena aproximación (lineal) de $f(x,y)$, donde

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Cuando la función es diferenciable, se puede interpretar $L(x,y)$ como el plano tangente a la superficie definida por $z=f(x,y)$. De esta forma, podemos representar el límite anterior de la siguiente manera:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-L(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

Teorema

Si $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0), y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existen y son continuas en dicho punto, entonces la función es diferenciable en (x_0,y_0).

Este teorema se puede utilizar para demostrar que una función es diferenciable en lugar del límite presentado anteriormente. A continuación se incluyen otras propiedades importantes de la diferenciabilidad:

$f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) $\Longrightarrow$ f es continua en (x_0,y_0)

$f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) $\Longrightarrow$ $\exists\, D_{\overline{u}}[f(x_0,y_0)]$ para cualquier dirección $\overline{u}$

6 Gradiente, divergencia y rotacional

Dada una función $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, a la que nos podemos referir como un **campo escalar**, el **gradiente** de f es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f respecto a cada una de sus variables:

$$\operatorname{grad} f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$

En el caso de una función de dos variables donde $z = f(x, y)$ tal que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ existen, entonces el gradiente de $f(x, y)$ es el vector $\nabla f(x, y) = \big(f_x(x, y), f_y(x, y)\big) = f_x(x, y)\overline{\imath} + f_y(x, y)\overline{\jmath}$.

Ejercicio 4

Calcular el gradiente de $f(x, y) = 4x^2y + 3xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Es importante resaltar que, para cada valor concreto de (x, y), $\nabla f(x, y)$ es un vector del plano, no del espacio. A partir de la definición de gradiente podemos expresar la derivada direccional:

$$D_{\overline{u}}[f(x, y)] = \nabla f(x, y) \cdot \overline{u} = f_x(x, y)\cos(\theta) + f_y(x, y)\operatorname{sen}(\theta)$$

La dirección de máximo incremento de $f(x, y)$ está dada por $\nabla f(x, y)$, y la tasa o ritmo de incremento se calcula como $\|\nabla f(x, y)\|$. En otras palabras, la derivada direccional es máxima en la dirección de $\nabla f(x, y)$, y su valor es $\|\nabla f(x, y)\|$. Por otra parte, la dirección de mínimo incremento está dada por $-\nabla f(x, y)$, y su tasa es $-\|\nabla f(x, y)\|$.

En funciones de tres variables el gradiente se calcula de manera equivalente como

$$\nabla f(x, y, z) = \big(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\big) = f_x(x, y, z)\overline{\imath} + f_y(x, y, z)\overline{\jmath} + f_z(x, y, z)\overline{k}$$

Por otra parte, dada una función $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, el vector gradiente de $f(x, y)$ en un punto (a, b) tal que su gradiente en dicho punto sea distinto de cero, es un vector perpendicular a la curva de nivel de la superficie $z = f(x, y)$ que pasa por el punto (a, b). De forma equivalente, dada una función $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ el vector gradiente de $f(z, y, z)$ en un punto punto (a, b, c) es un vector perpendicular a la superficie de nivel que pasa por el punto (a, b, c).

Otro operador importante es la divergencia de un **campo vectorial**. Dada una función vectorial $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{f}(\overline{x}) = \big(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x})\big)$, se define la **divergencia** de esta forma:

$$\operatorname{div} \overline{f}(\overline{x}) = \nabla \cdot \overline{f}(\overline{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x})$$

Por último, el **rotacional** de un campo vectorial en el espacio se define de la siguiente manera:

$$\operatorname{rot} \overline{f}(\overline{x}) = \nabla \times \overline{f}(\overline{x})$$

7 Matriz jacobiana y matriz hessiana

Dada una función vectorial $\overline{f} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, se define la **matriz jacobiana** de la función $\overline{f}(\overline{x})$, supuesto que existan todas las derivadas parciales, como:

$$J_f(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

Si $m = n$, entonces es posible calcular el determinante asociado a la matriz jacobiana. A dicho determinante se le suele llamar simplemente **jacobiano**.

Si $n = 1$, la matriz jacobiana es una matriz fila con el siguiente aspecto:

$$J_f(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

En el caso particular de funciones reales de dos variables, la matriz jacobiana tiene el siguiente formato:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Siguiendo con el caso $n = 1$, a la matriz que contiene las segundas derivadas se le denomina **matriz hessiana**, y tiene el siguiente aspecto:

$$H_f(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_m} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_m x_1} & f_{x_m x_2} & \cdots & f_{x_m x_m} \end{pmatrix}$$

En el caso particular de funciones de dos variables, la matriz hessiana es una matriz cuadrada con el siguiente aspecto:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Calcular la matriz hessiana de $f(x,y) = 4x^2y + 3xy^2$ en el punto $(2,1)$.

Si se verifican las condiciones del teorema de Schwarz para la función $f(x,y)$, entonces la matriz hessiana $H_f(x,y)$ es una matriz simétrica. Por otra parte, al determinante de la matriz hessiana se le conoce como el **hessiano**:

$$|H_f(x,y)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

8 Diferencial y diferencial total

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se denomina **diferencial total** de f a la siguiente expresión:

$$\boxed{df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy}$$

Por su parte, en una función real de variable vectorial la **diferencial** coincide con su gradiente, mientras que en una función vectorial de variable vectorial la diferencial coincide con la matriz jacobiana.

$$\boxed{Df(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}) \qquad D\overline{f}(\overline{x}) = J_f(\overline{x})}$$

9 Problemas

1) Obtén las derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ de la función $f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$.

2) Obtén las derivadas parciales de primer orden de $f(x,y) = \cos(e^{xy^2}) + \operatorname{sen}\left(\operatorname{Ln}(xy)\right)$.

3) Halla las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x,y,z) = \dfrac{3xz}{x+y}$. ¿Existen para todo punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$?

4) Halla las pendientes en las direcciones X e Y de la superficie dada por la función real de variable vectorial $f(x,y) = 1 - (x-1)^2 - (2-y)^2$ en el punto $(1,2,1)$.

5) Halla la derivada direccional de la función $f(x,y) = 4 - x^2 - (1/4)y^2$ en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $\overline{u} = (\cos(\pi/3), \operatorname{sen}(\pi/3))$.

6) Determina la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en el punto $(1,-1,2)$ según la dirección del vector $\overline{v} = (6,2,3)$.

7) Calcula las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función real de variable vectorial $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$, determinando el valor de f_{xy} y f_{yx} en $(-1,2)$.

8) Calcula $\dfrac{dz}{dt}$ si $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x(t) = e^{2t}$ e $y(t) = e^{-t}$.

9) Calcula $\dfrac{dz}{dt}$ si $z = f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $x(t) = 3\,\text{sen}(2t)$ e $y(t) = 4\cos(2t)$.

10) Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ si $z = f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, $x = g(u,v) = 3u + 2v$ y por último $y = h(u,v) = 4u - v$.

11) Calcula las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ si $z = f(x,y) = \dfrac{2x-y}{x+3y}$, $x = g(u,v) = e^{2u}\cos(3v)$ e $y = h(u,v) = e^{2u}\,\text{sen}(3v)$.

12) Dada la función $f(x,y,z) = g\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big)$, donde $u(x,y,z) = x^2 + 2yz$, $v(x,y,z) = y^2 + 2xz$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con derivadas parciales continuas, determina la expresión de $(y^2 - xz)f_x + (x^2 - yz)f_y + (z^2 - xy)f_z$, simplificando dicha expresión al máximo.

13) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

15) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16) Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

17) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y) = e^{3x+2y}$ en el origen.

18) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en $(0,0)$. A continuación, calcula $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

19) Dada la siguiente función, determina la expresión de su aproximación lineal cerca de $(0,0)$ y razona si se trata de una buena aproximación.

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos(x)\,\mathrm{sen}(y)+\dfrac{x^2}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

20) Halla el gradiente de $f(x,y)=y\,\mathrm{Ln}(x)+xy^2$, particularizando su valor en el punto $(1,2)$.

21) La temperatura en grados en la superficie de una placa metálica es $f(x,y)=20-4x^2-y^2$, donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir del punto $(2,-3)$ aumenta más rápidamente la temperatura?

22) Dada la función $f(x,y)=xy\,\mathrm{Ln}(x-1)+y^2$, determina sus direcciones de máximo incremento, mínimo incremento e incremento nulo en el punto $(2,1)$.

23) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+y^3$ en el punto $(3,1,10)$.

24) Halla la ecuación del plano tangente a la superficie $(x-1)^2+(y-2)^2+2z^2=1$ en el punto $(3/2,2,\sqrt{6}/4)$.

25) Halla las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $3x^2e^{2(y+1)}+4\,\mathrm{sen}(x+2z)+z^2=13$ en el punto $(2,-1,-1)$.

26) Halla las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^3y^3+xyz\cos(z)-xz+y+x=0$ en el punto $(1,-1,0)$.

27) Dada la función vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(x^2y^3-z^4)\overline{i}+4x^5y^2z\overline{j}-y^4z^6\overline{k}$, calcula $\mathrm{rot}\,\overline{F}$ y $\mathrm{div}\,\overline{F}$.

28) Si $f(x,y,z)$ es un campo escalar y $\overline{F}(x,y,z)$ es un campo vectorial, ambos con derivadas segundas continuas, demuestra que $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,f)=\overline{0}$ y $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\overline{F})=0$.

29) Determina la matriz jacobiana de las funciones de tres variables $\overline{f}(x,y,z)=(xy,y+z^2)$ y $\overline{g}(x,y,z)=(x^2\cos(y),e^{x+z^2})$.

30) Determina la matriz jacobiana de la función $\overline{f}(x,y)=(x^3y^2-5x^2y^2,y^6-3xy^3+7)$ en el punto $(2,-1)$.

31) Determina la matriz jacobiana de la función $\overline{f}(x,y,z)=\left(z\tan(x^2-y^2),xy\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z}{2}\right)\right)$ en el punto $(2,-2,2)$.

32) Calcula el jacobiano asociado a la función $\overline{f}(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$.

33) Determina la matriz hessiana de las funciones de dos variables $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$ y $g(x,y,z) = x^2 - xy^2 + z^2$.

34) Determina la matriz hessiana de la función $f(x,y) = y^4 + x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 5y + 8$ en el punto $(1,0)$.

35) Determina la matriz hessiana de la función $f(x,y) = e^{y\,\mathrm{Ln}(x)}$ en el punto $(1,1)$.

36) Calcula el hessiano de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ en el punto $(2,1)$.

37) Dadas las funciones $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ expresadas a continuación, completa los apartados:

$$\overline{f}(x,y) = (xy, \sqrt{x^2+y^2}) \qquad g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{v} & v \neq 0 \\ 0 & v = 0 \end{cases}$$

a) Calcula la matriz jacobiana de $\overline{f}(x,y)$ en el punto $(1,1)$.

b) Calcula la matriz jacobiana de $g(u,v)$ en el punto $(1,\sqrt{2})$.

c) Obtén la expresión de la función $h = g \circ \overline{f}$, calcula su matriz jacobiana en el punto $(1,1)$ y comprueba que el resultado es idéntico al producto de las matrices jacobianas de los apartados anteriores.

38) Dada la función $\overline{f}(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) = \big(xy, \sqrt{x^2+y^2}\big)$, completa los siguientes apartados:

a) Determina la diferencial total de f_1 y f_2.

b) Calcula la diferencial de f_1 y f_2 en el punto $(1,1)$.

c) Calcula la diferencial de $\overline{f}$ en el punto $(1,1)$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. CLAGSA.
- Isaías Uña, Jesús San Martín y Venancio Tomeo. *Problemas resueltos de Cálculo en varias variables*. Ed. Paraninfo.
- Saturnino Salas, Einar Hille y Garret Edgen. *Cálculo de varias variables. Volumen II*. 4ª edición. Editorial Reverté.
- Carmen Anido y Martha Saboyá. *Bases matemáticas para el análisis económico*. Grupo Editorial Universitario.
- Fernando Bombal, Luis Rodríguez y Gabriel Vera. *Problemas de análisis matemático. Tomo 2*. Editorial AC.
- Fernando Revilla. *Problemas de análisis real y complejo*. `http://fernandorevilla.es`.
- LibreTexts. Calculus. `https://math.libretexts.org`.