Análisis Matemático I

Tema 3

Integrales impropias, eulerianas y paramétricas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Teorema Fundamental del Cálculo

1.1 Primer Teorema Fundamental del Cálculo

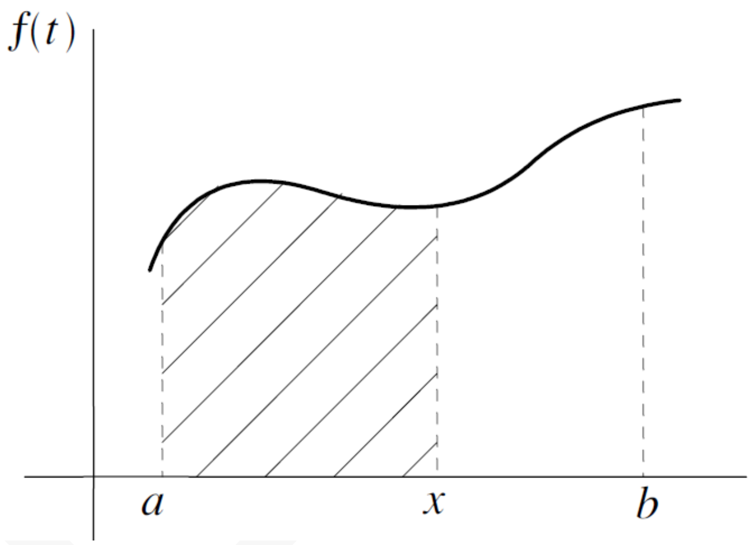
Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, donde $a,b \in \mathbb{R}$, y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

entonces $F(x)$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Si $f(x)$ es una función positiva en $[a,b]$, la interpretación gráfica de este teorema es que $F(x)$ es el valor del área rayada en la siguiente imagen.



A partir de esa definición, si utilizamos la regla de la cadena con las mismas condiciones y añadimos que $a(x)$ y $b(x)$ sean funciones derivables, podemos obtener la siguiente relación que es aún más general:

$$\boxed{F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = f\big(b(x)\big)\cdot b'(x) - f\big(a(x)\big)\cdot a'(x)}$$

1.2 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (regla de Barrow)

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ y $F(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, donde $F(x)$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la práctica, existen funciones $f(x)$ que no cumplen la condición de continuidad y que sin embargo sí son integrables. Es el caso de las funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$.

Ejemplo 1

La función $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2) \\ 2 & x \in [2,3] \end{cases}$ es integrable en el intervalo $[1,3]$.

De igual forma, hay funciones $f(x)$ que, aunque estén acotadas en un intervalo $[a,b]$, no son integrables debido al número infinito de discontinuidades que poseen.

Ejemplo 2

La función $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [1,2],\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [1,2],\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ no es integrable en ningún intervalo de $\mathbb{R}$.

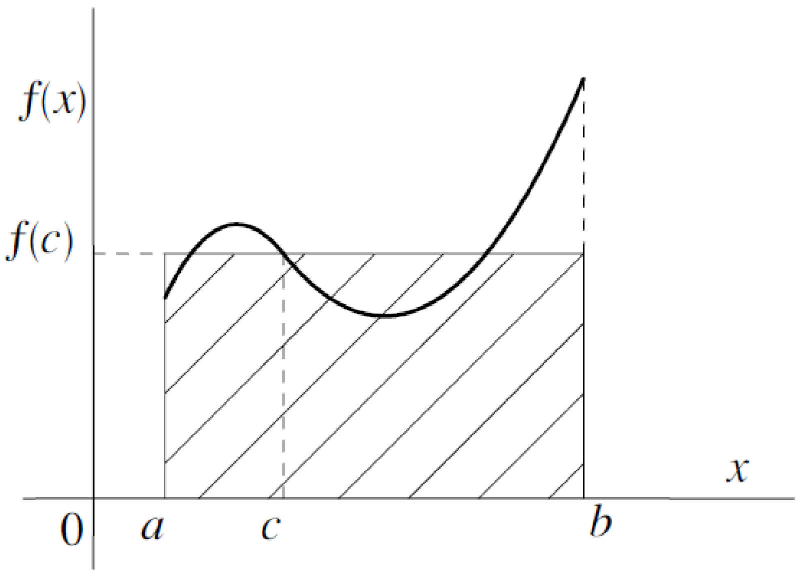
1.3 Teorema del valor medio del cálculo integral

Teorema del valor medio del cálculo integral

Dada una función $f(x)$ que sea continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Si $f(x)$ es una función positiva en $[a,b]$, la interpretación gráfica de este teorema es que existe un rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$ con la misma área que la región limitada por $f(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$.



2 Integrales impropias

2.1 Integrales impropias de primera especie

Las **integrales impropias de primera especie** son aquellas integrales en las que los intervalos de integración no están acotados (mientras que la función a integrar sí está acotada en el intervalo correspondiente), apareciendo los siguientes casos:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Para calcularlas se recurre al uso de límites de la siguiente manera:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\big(F(k)-F(a)\big)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^b f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\big(F(b)-F(k)\big)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^c f(x)dx + \lim_{k\to+\infty}\int_c^k f(x)dx$$

En el último caso, para que la integral sea convergente es necesario que ambos límites existan y sean finitos. En caso contrario, de forma alternativa se puede calcular el valor principal de Cauchy:

$$V.P.\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k} f(x)dx\right)$$

Respecto al primer caso, de manera más formal la existencia de la integral se podría expresar de la siguiente manera: si para todo $k\in\mathbb{R}$ la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,k]$ y el límite $\lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx$ existe y es finito, entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. De manera equivalente se expresaría el segundo caso.

Respecto al tercer caso, es importante tener en cuenta que si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente entonces el valor de $\lim_{k\to+\infty}\int_k^k f(x)dx$ existe y ambos coinciden, pero sin embargo la afirmación contraria no es necesariamente cierta.

Una condición necesaria (pero no suficiente) para la convergencia de la integral es que $f(x)\to 0$ cuando $x\to\infty$. Es decir, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, entonces se cumple que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Ejercicio 1

Calcula las siguientes integrales: $a) \int_1^{\infty} x\text{Ln}(x)dx \quad b) \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx \quad c) \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx.$

2.2 Criterios de comparación para integrales impropias de primera especie

Si $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a,k]$ para todo $k \in \mathbb{R}$, con $k > a$, $g(x)$ es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,\infty)$ y la integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente y además $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Por otra parte, si $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a,k]$ para todo $k \in \mathbb{R}$, $g(x)$ es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente, entonces la integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ también es divergente.

Ejercicio 2

Sabiendo que $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente, determina el carácter de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^3}dx$.

Ejercicio 3

Si $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente, determina el carácter de $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, con $f(x) = -1$.

El **criterio de comparación en el límite** establece que, si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas funciones positivas en el intervalo $[a,+\infty)$ y $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, se cumple lo siguiente:

- Si $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces las dos integrales $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ o bien convergen o bien divergen.
- Si $L = 0$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ también es convergente.
- Si $L = \infty$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ también es divergente.

Ejercicio 4

Suponiendo que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge, determina el carácter de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$.

2.3 Integrales impropias de segunda especie

Las **integrales impropias de segunda especie** son aquellas integrales en las que las funciones a integrar no están acotadas, por lo que en algún punto del intervalo acotado $[a, b]$ su valor tiende a $-\infty$ o $+\infty$. Dependiendo de si la asíntota se encuentra en $x = a$, en $x = b$ o en un punto $x = c$ del intervalo (a, b), será necesario realizar los siguientes cálculos para resolver las integrales:

$$I_1 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \qquad I_2 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$$

$$I_3 = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)dx$$

En el último caso, para que la integral sea convergente es necesario que ambos límites existan y sean finitos. En caso contrario, se puede calcular el valor principal de Cauchy:

$$V.P.\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx\right)$$

2.4 Criterios de comparación para integrales impropias de segunda especie

Si la asíntota se encuentra en $x = a$, $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a+\epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$ y $g(x)$ es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, b]$ y la integral $\int_a^b g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es convergente y además $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Por otra parte, si $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a+\epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$, $g(x)$ es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y la integral $\int_a^b f(x)dx$ es divergente, entonces la integral $\int_a^b g(x)dx$ también es divergente.

De forma equivalente podría describirse el criterio de comparación cuando la asíntota se encuentra en $x = b$ o en un punto $x = c$ del intervalo (a, b).

2.5 Integrales impropias de primera y segunda especie

Las integrales impropias que son a la vez de primera y segunda especie se resuelven aplicando las dos técnicas anteriormente señaladas de forma combinada.

3 Integrales eulerianas

3.1 Función Beta

Se conoce como **integral de Euler de primera especie**, o **función Beta**, a la función de parámetros p y q definida de la siguiente manera:

$$\boxed{\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}$$

Algunas propiedades de esta función son:

1) $\beta(p,q) = \beta(q,p)$.
2) Para todo $q > 0$, $\beta(1,q) = \frac{1}{q}$.
3) Para todo $p > 0$ y $q > 1$, $\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$.
4) Para todo $p > 0$ y $q > 0$, $\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \big(\cos(t)\big)^{2p-1}\big(\operatorname{sen}(t)\big)^{2q-1}dt$.
5) Si $p > 0$ y $q > 0$, la integral $\beta(p,q)$ es convergente.

3.2 Función Gamma

Se conoce como **integral de Euler de segunda especie**, o **función Gamma**, a la función de parámetro p definida de la siguiente manera:

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx}$$

Las principales propiedades de esta función son:

1) $\Gamma(1) = 1$.
2) Para $p > 1$, $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.
3) Para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq 2$, $\Gamma(p) = (p-1)!$
4) $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
5) Si $p > 0$, la integral $\Gamma(p)$ es convergente.

4 Integrales paramétricas

4.1 Integrales paramétricas con límites de integración constantes

Dada una función $f(x,t)$ continua para todo $(x,t) \in [a,b] \times [c,d]$, se llama integral paramétrica de parámetro t, con límites de integración constantes a y b, a la siguiente integral:

$$\boxed{F(t) = \int_a^b f(x,t)dx}$$

Ejercicio 5

Calcula $\displaystyle\int_1^2 3(x+t)^2 dx$.

En esas condiciones, se cumple lo siguiente:

1) $F(t)$ es una función continua para todo $t \in [c,d]$.

2) Si $t_0 \in (c,d)$, entonces $\displaystyle\lim_{t \to t_0} F(t) = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b f(x,t_0)dx$.

3) Si además la derivada parcial $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ existe y es continua, entonces se verifica la siguiente igualdad para todo $t \in (c,d)$:

$$\boxed{F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx}$$

4.2 Integrales paramétricas con límites de integración no constantes

Dada una función $f(x,t)$ continua para todo $(x,t) \in [a,b] \times [c,d]$ y dos funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ tal que $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$, se llama integral paramétrica de parámetro t, con límites de integración dependientes del parámetro t, a la siguiente integral:

$$\boxed{F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx}$$

Ejercicio 6

Calcula $\displaystyle\int_1^{t^2} 3(x+t)^2 dx$.

Ejercicio 7

Calcula $\displaystyle\int_{2t}^{t^3} t(x+t)^2 dx$.

En esas condiciones, se cumple lo siguiente:

1) $F(t)$ es una función continua para todo $t \in [c,d]$.

2) Si $t_0 \in (c,d)$, entonces $\lim\limits_{t\to t_0} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t_0)}^{b(t_0)} f(x,t_0)dx$.

3) Si además la derivada parcial $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ existe y es continua en $D = \{c \le t \le d,\ \alpha(t) \le x \le \beta(t)\}$ y las derivadas $\alpha'(t)$ y $\beta'(t)$ existen y son continuas en $[c,d]$, entonces $F(t)$ es derivable para todo $t \in (c,d)$, su derivada $F'(t)$ es continua y se verifica la siguiente igualdad para todo $t \in (c,d)$:

$$\boxed{F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx + f\big(\beta(t),t\big)\beta'(t) - f\big(\alpha(t),t\big)\alpha'(t)}$$

5 Problemas

1) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, determina las derivadas de las siguientes funciones:

a) $F_1(x) = \int_0^x t^2 dt$

b) $F_2(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$

c) $F_3(x) = \int_1^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt$

d) $F_4(x) = \int_2^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{1-t^2} dt$

2) Calcula la ecuación de la recta tangente en $x=1$ a la gráfica de $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4-4}dt$.

3) Determina los intervalos en los que la función $F(x) = \int_1^x \arctan(e^t)dt$ es inyectiva.

4) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{|\cos(t^3)|}{t^2+1}dt$.

5) Calcula, en caso de existir, la primera y segunda derivada de la función $F(x) = x\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}dt$.

6) Demuestra que la función $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} \operatorname{Ln}(t)dt$ es decreciente en $(0, 1/2)$.

7) Determina el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de la función $F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^2)\,dt$ y utiliza el resultado para calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x^3}$.

8) Dada la función $f(x) = x^2$, determina para qué valor $c \in [0,3]$ se verifica el teorema del valor medio integral.

9) Utiliza el teorema del valor medio del cálculo integral para determinar el valor (o valores) $c \in (a,b)$ que lo satisface(n) respecto a la función $f(x) = 1 - x + x^2$ en el intervalo $[-1,1]$.

10) Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$.

11) Calcula $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx$.

12) Dada la integral impropia $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, ¿para qué valores $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral es convergente? ¿Para qué valores la integral es divergente?

13) Determina la convergencia o divergencia de $\int_2^{+\infty} \dfrac{x+1}{x^2}\,dx$.

14) Determina la convergencia o divergencia de $\int_0^{+\infty} \cos(x)\,dx$.

15) Determina la convergencia o divergencia de $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

16) Calcula $\int_0^1 \dfrac{1}{x}\,dx$.

17) Calcula $\int_0^1 \operatorname{Ln}(x)\,dx$.

18) Calcula $\int_0^3 \dfrac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$ y compara el resultado con su valor principal.

19) Calcula $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^3}\,dx$ y compara el resultado con su valor principal.

20) Calcula $\int_{-2}^4 \dfrac{1}{x^2}\,dx$ de forma directa y mediante el cambio $x = 1/t$.

21) Calcula $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$.

22) Calcula $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^5}\,dx$.

23) Calcula $\displaystyle\int_0^\infty x^{4/3}e^{-x}\,dx$.

24) Calcula mediante un cambio de variable la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2}\,dx$.

25) Calcula $\Gamma(1/2)$ utilizando para ello la función beta correspondiente.

26) Calcula la integral paramétrica $\displaystyle\int_1^3 (3x-1)\cos(tx)\,dx$.

27) Calcula $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_1^3 (3x-1)\cos(tx)\,dx$.

28) Dada $I(t)=\displaystyle\int_{t^2}^{t} \operatorname{sen}(x^2+t^2)\,dx$, determina la expresión de $I'(t)$.

29) Utilizando derivación paramétrica, calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(t\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$.

30) Calcula por derivación paramétrica $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(x^2+t^2)^3}\,dx$, suponiendo que $t>0$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- M. Llorente Comí, C. Anido Hermida, J.F. Serra Cuñat y A. Valverde Colemiro. *Apuntes de Análisis Matemático*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Autónoma de Madrid.
- A. García et al. *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. CLAGSA.
- I. Marrero. *Integrales paramétricas propias*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- F. Revilla. *Integración paramétrica*. `http://fernandorevilla.es/`.