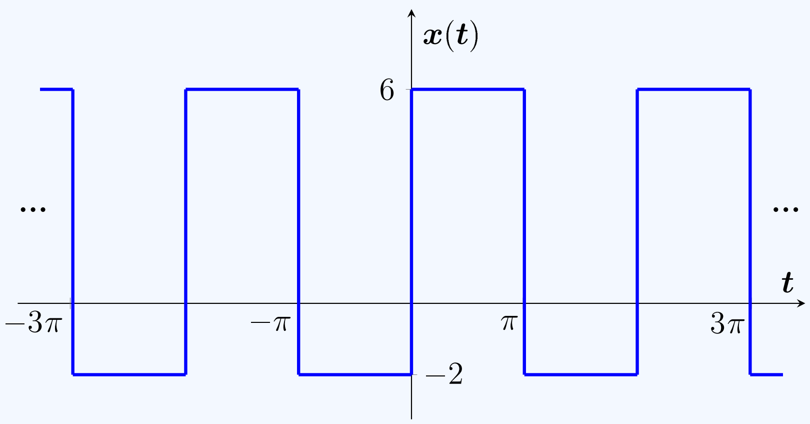
TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	17/01/2024	
CURSO	2º	**HORA**	16:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	2 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1

Determina los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica $x(t)$, donde su definición en un período es la siguiente:

$$x(t) = \begin{cases} -2 & -\pi < t < 0 \\ 6 & 0 \leqslant t < \pi \end{cases}$$

Solución:



Solución:

$$T_0 = 2\pi \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\,dt + \int_0^{\pi} 6\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\big[-2t\big]_{-\pi}^{0} + \big[6t\big]_0^{\pi}\right) = 2$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cos\left(kw_0t\right)\,dt = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\cos\left(kt\right)\,dt + \int_0^{\pi} 6\cos\left(kt\right)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-2\frac{\operatorname{sen}(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \left[+6\frac{\operatorname{sen}(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi k}\big(-2\operatorname{sen}(k\pi) + 6\operatorname{sen}(k\pi)\big) =$$

$$= \frac{1}{\pi k}4\operatorname{sen}(k\pi) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\operatorname{sen}\left(kw_0t\right)\,dt = \frac{2}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\operatorname{sen}\left(kt\right)\,dt + \int_0^{\pi} 6\operatorname{sen}\left(kt\right)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[2\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-6\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi k}\big(2 - 2\cos(k\pi) - 6\cos(k\pi) + 6\big) =$$

$$= \frac{8}{\pi k}\big(1 - \cos(k\pi)\big) = \begin{cases} 0 & k \text{ es par} \\ \dfrac{16}{\pi k} & k \text{ es impar} \end{cases}$$

Con todo ello podemos estamos establecer la siguiente relación:

$$x(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi(2k-1)} \operatorname{sen}\big((2k-1)t\big)$$

Alternativamente se podría realizar el cálculo para obtener los coeficientes c_k:

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)dt + \int_{0}^{\pi} 6dt\right) = \frac{1}{2\pi}\big(\big[-2t\big]_{-\pi}^{0} + \big[6t\big]_{0}^{\pi}\big) = 2$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)e^{-jkt}dt + \int_{0}^{\pi} 6e^{-jkt}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-2\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-\pi}^{0} + \left[6\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{2\pi jk}\big(-2 + 2e^{jk\pi} + 6e^{-jk\pi} - 6\big) =$$

$$= -\frac{\big(-8 + 2\cos(k\pi) + 2j\operatorname{sen}(k\pi) + 6\cos(k\pi) - 6j\operatorname{sen}(k\pi)\big)}{2\pi jk} =$$

$$= \frac{4\big(1 - \cos(k\pi)\big)}{\pi jk} = \begin{cases} 0 & k \text{ es par} \\ \dfrac{8}{\pi jk} & k \text{ es impar} \end{cases} = \begin{cases} 0 & k \text{ es par} \\ -\dfrac{8j}{\pi k} & k \text{ es impar} \end{cases}$$

Con todo ello el desarrollo de la serie de Fourier quedaría de la siguiente manera:

$$x(t) = 2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{8j}{\pi(2k+1)} e^{j(2k+1)t}$$

Nota: El problema también se podría haber resuelto teniendo que cuenta que, en un período, $x(t) = 2 + 4\,\mathrm{sig(t)}$.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	17/01/2024
CURSO	2º	HORA	16:00
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 2

Calcula la transformada DTFT de la señal $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$.

Solución:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|} e^{-j\Omega n} =$$

$$= \underbrace{\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)}_{X_1(\Omega)} + \underbrace{e^{-j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-j3\Omega} + \cdots}_{X_2(\Omega)}$$

Vamos a estudiar por separado $X_1(\Omega)$ y $X_2(\Omega)$, comenzando por $X_1(\Omega)$:

$$X_1(\Omega) = \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{jn\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{jn\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}} = \frac{1}{2-e^{j\Omega}}$$

Analizamos ahora $X_2(\Omega)$:

$$X_2(\Omega) = e^{-j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-j3\Omega} + \cdots =$$

$$= 2\frac{1}{2}\left(e^{-j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-j3\Omega} + \cdots\right) =$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2}\right) e^{-j\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-j2\Omega} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-j3\Omega} + \cdots\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jn\Omega} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^n = 2\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right) = \frac{2e^{-j\Omega}}{2-e^{-j\Omega}}$$

$$\Longrightarrow\ X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{1}{2-e^{j\Omega}} + \frac{2e^{-j\Omega}}{2-e^{-j\Omega}} = \frac{2-e^{-j\Omega}+2e^{-j\Omega}\left(2-e^{j\Omega}\right)}{\left(2-e^{j\Omega}\right)\left(2-e^{-j\Omega}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{2}-e^{-j\Omega}+4e^{-j\Omega}-\cancel{2}}{4-2e^{-j\Omega}-2e^{j\Omega}+1} = \frac{3e^{-j\Omega}}{5-2e^{-j\Omega}-2e^{j\Omega}}$$

Nota: De forma alternativa, el problema también se puede resolver mediante propiedades a partir de la DTFT de $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ (Problema 14 del Tema 6):

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \Longrightarrow Y(\Omega) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2}\right)} = \frac{3}{4+1-2\left(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}\right)}$$

$$x[n] = y[n-1] \Longrightarrow X(\Omega) = Y(\Omega)e^{-j\Omega} = \frac{3e^{-j\Omega}}{5-2e^{-j\Omega}-2e^{j\Omega}}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	17/01/2024
CURSO	2º	HORA	16:00
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 3

Dadas las secuencias de cuatro elementos $x[n] = [1, 2, 0, 3]$ e $y[n] = [1, 0, -1, 2]$, completa los siguientes apartados:

a) [1.25 puntos] Calcula la convolución $x[n] * y[n]$.

b) [1.25 puntos] Calcula la convolución circular $x[n] \textcircled{4} y[n]$.

c) [1.25 puntos] Calcula por separado la DFT de $x[n]$ e $y[n]$.

d) [0.5 puntos] Multiplica punto a punto las DFT de $x[n]$ e $y[n]$ para obtener la DFT de una determinada secuencia $z[n]$.

e) [1.25 puntos] Calcula la DFT inversa de la secuencia $Z[k]$ para obtener $z[n]$.

Solución:

a) Vamos a calcular la convolución $z[n] = x[n] * y[n]$:

$$\begin{aligned} z[n] &= \big(\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3]\big) * \big(\delta[n] - \delta[n-2] + 2\delta[n-3]\big) = \\ &= \delta[n] \qquad - \delta[n-2] + 2\,\delta[n-3] + \\ &\qquad + 2\delta[n-1] \qquad - 2\delta[n-3] + 4\delta[n-4] + \\ &\qquad\qquad + 3\delta[n-3] \qquad - 3\delta[n-5] + 6\delta[n-6] = \\ &= \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 4\delta[n-4] - 3\delta[n-5] + 6\delta[n-6] \end{aligned}$$

b) Puesto que $z[n] = [1, 2, -1, 3, 4, -3, 6]$, podemos calcular la convolución circular de longitud $N = 4$ de la siguiente manera:

$$x[n] \textcircled{4} y[n] = [1, 2, -1, 3] + [4, -3, 6, 0] = [5, -1, 5, 3]$$

c) La longitud de ambas secuencias es $N = 4$.

$$X[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-\frac{2\pi}{4} 0n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] = 1 + 2 + 0 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned} X[1] &= \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2} 1n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[2]e^{-j\pi} + x[3]e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \\ &= 1 + 2(-j) + 0 + 3(j) = 1 + j \end{aligned}$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}2n} = x[0] + x[1]e^{-j\pi} + x[2]e^{-j2\pi} + x[3]e^{-j3\pi} =$$
$$= 1 + 2(-1) + 0 + 3(-1) = -4$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}3n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[2]e^{-j3\pi} + x[3]e^{-j\frac{9\pi}{2}} =$$
$$= 1 + 2(j) + 0 + 3(-j) = 1 - j$$

Por lo tanto, $x[n] = [1, 2, 0, 3] \xleftrightarrow{DFT} X[K] = [6, 1 + j, -4, 1 - j]$.

$$Y[0] = \sum_{n=0}^{3} y[n]e^{-\frac{2\pi}{4}0n} = \sum_{n=0}^{3} y[n] = 1 + 0 - 1 + 2 = 2$$

$$Y[1] = \sum_{n=0}^{3} y[n]e^{-j\frac{\pi}{2}1n} = y[0] + y[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + y[2]e^{-j\pi} + y[3]e^{-j\frac{3\pi}{2}} =$$
$$= 1 + 0 - (-1) + 2(j) = 2 + 2j$$

$$Y[2] = \sum_{n=0}^{3} y[n]e^{-j\frac{\pi}{2}2n} = y[0] + y[1]e^{-j\pi} + y[2]e^{-j2\pi} + y[3]e^{-j3\pi} =$$
$$= 1 + 0 - (1) + 2(-1) = -2$$

$$Y[3] = \sum_{n=0}^{3} y[n]e^{-j\frac{\pi}{2}3n} = y[0] + y[1]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + y[2]e^{-j3\pi} + y[3]e^{-j\frac{9\pi}{2}} =$$
$$= 1 + 0 - (-1) + 2(-j) = 2 - 2j$$

Por lo tanto, $y[n] = [1, 0, -1, 2] \xleftrightarrow{DFT} Y[K] = [2, 2 + 2j, -2, 2 - 2j]$.

d) El producto punto a punto de $X[K] = [6, 1 + j, -4, 1 - j]$ e $Y[K] = [2, 2 + 2j, -2, 2 - 2j]$ es $Z[K] = [6(2), (1 + j)(2 + 2j), -4(-2), (1 - j)(2 - 2j)] = [12, 4j, 8, -4j]$.

e) Procedemos a calcular la DFT inversa de $Z[k]$:

$$z[0] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} Z[k]e^{\frac{2\pi}{4}0k} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} Z[k] = \frac{1}{4}(12 + 4j + 8 - 4j) = 5$$

$$z[1] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} Z[k]e^{j\frac{\pi}{2}1k} = \frac{1}{4}\left(Z[0] + Z[1]e^{j\frac{\pi}{2}} + Z[2]e^{j\pi} + Z[3]e^{j\frac{3\pi}{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\big(12 + 4j(j) + 8(-1) - 4j(-j)\big) = -1$$

$$z[2] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} Z[k]e^{j\frac{\pi}{2}2k} = Z[0] + Z[1]e^{j\pi} + Z[2]e^{j2\pi} + Z[3]e^{j3\pi} =$$
$$= \frac{1}{4}\big(12 + 4j(-1) + 8(1) - 4j(-1)\big) = 5$$

$$z[3] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} Z[k]e^{j\frac{\pi}{2}3k} = Z[0] + Z[1]e^{j\frac{3\pi}{2}} + Z[2]e^{j3\pi} + Z[3]e^{j\frac{9\pi}{2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\big(12 + 4j(-j) + 8(-1) - 4j(j)\big) = 3$$

Por lo tanto, $Z[K] = [12, 4j, 8, -4j] \xleftrightarrow{IDFT} z[n] = [5, -1, 5, 3]$.