Análisis Matemático II

Tema 4

Aplicaciones de la derivabilidad y diferenciablidad en funciones de varias variables

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Extremos relativos y puntos de silla **1**

1.1 Caso general 1

1.2 Caso particular: funciones reales de dos variables 1

2 Extremos condicionados **2**

2.1 Caso general 2

2.2 Caso particular: funciones reales de dos variables con una condición 2

2.3 Caso particular: funciones reales de tres variables con una condición 2

2.4 Caso particular: funciones reales de tres variables con dos condiciones 3

3 Polinomios de Taylor en funciones de varias variables **3**

4 Problemas **4**

1 Extremos relativos y puntos de silla

1.1 Caso general

Dada una matriz cuadrada A, se denomina **menor principal** $|A_k|$ a cada uno de los determinantes de las submatrices formadas desde el elemento $(1,1)$ hasta un determinado elemento (k,k). Por ejemplo, en la siguiente matriz de tamaño 3×3, los tres menores principales serían $|A_1|$, $|A_2|$ y $|A_3|$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A_1| = 1 \qquad |A_2| = -1 \qquad |A_3| = 0$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, se define **punto crítico** como aquel punto $\overline{x} = \overline{a}$ en el que se anulan todas sus derivadas parciales de primer orden o bien en el que alguna de sus derivadas parciales de primer orden no existe. La primera condición equivale a requerir que el vector gradiente (cuyos componentes en este caso particular coinciden con los de la matriz jacobiana) sea nulo en el punto considerado.

Una vez obtenidos los puntos candidatos a extremos, se evalúa cada punto $\overline{x} = \overline{a}$ utilizando para ello la matriz hessiana y su determinante de la siguiente manera (siempre y cuando la matriz sea simétrica), donde se utiliza el concepto de menor principal mencionado anteriormente:

- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es **definida positiva**, lo que quiere decir que todos sus autovalores son positivos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que todos los menores principales son mayores que cero (es decir, si $|H_i| > 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$), entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un **mínimo relativo**.
- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es **definida negativa**, lo que significa que todos sus autovalores son negativos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que los menores principales de índice par son positivos y los de índice impar son negativos (es decir, si $|H_{2q}| > 0$ y $|H_{2q+1}| < 0$ para los valores q apropiados, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un **máximo relativo**.
- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es **indefinida**, lo que significa que todos sus autovalores son distintos de cero pero de distinto signo, lo que en matrices simétricas ocurre por ejemplo cuando todos los menores principales son distintos de cero (es decir, si $|H_i| \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$) pero no es uno de los casos anteriores, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un **punto de inflexión**, también llamado **punto de silla** o de **ensilladura**.
- Si no se trata de uno de los casos anteriores, lo que ocurre por ejemplo cuando la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es **singular**, lo que a su vez significa que alguno de sus autovalores es nulo y que su determinante $|H_f(x_0, y_0)| = 0$, entonces es necesario realizar un estudio adicional, ya que este método no proporciona suficiente información.

1.2 Caso particular: funciones reales de dos variables

En el caso particular de funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$, las condiciones anteriores se pueden expresar de la siguiente manera para un punto (x_0, y_0) dado:

- Si $|H_f(x_0, y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, el punto $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un **mínimo relativo**.
- Si $|H_f(x_0, y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, el punto $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un **máximo relativo**.
- Si $|H_f(x_0, y_0)| < 0$, entonces el punto $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un **punto de inflexión**.
- En cualquier otro caso, por ejemplo cuando $|H_f(x_0, y_0)| = 0$, es necesario realizar un estudio adicional utilizando las definiciones de máximo, mínimo y punto de inflexión.

2 Extremos condicionados

2.1 Caso general

El método de los multiplicadores de Lagrange permite obtener máximos y mínimos de una función real de variable vectorial $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ cuando se desea restringir el conjunto de puntos con los que la función trabaja mediante una serie de condiciones del tipo $g(\overline{x}) = 0$.

Para determinar los candidatos a extremos relativos en esta situación, se construye la siguiente función:

$$\boxed{\mathcal{L}(\overline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(\overline{x})}$$

Los candidatos a extremos relativos se obtienen igualando a cero las derivadas de la función $\mathcal{L}(\overline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ respecto a cada una de sus variables. En caso de ser necesario, la identificación del tipo de punto (máximo relativo, mínimo relativo o silla) se realiza a continuación mediante lo que se conoce como la matriz Hessiana orlada $\widetilde{H}_f$.

2.2 Caso particular: funciones reales de dos variables con una condición

Para el caso particular de funciones reales de dos variables $f(x, y)$ con una condición $g(x, y) = 0$, donde $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, la matriz Hessiana orlada tiene el siguiente aspecto:

$$\widetilde{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} \end{pmatrix}$$

En este caso particular, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un candidato (x_0, y_0):

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| < 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un **mínimo relativo condicionado**.
- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| > 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un **máximo relativo condicionado**.

2.3 Caso particular: funciones reales de tres variables con una condición

Para el caso particular de funciones reales de tres variables $f(x, y, z)$ con la condición $g(x, y, z) = 0$, donde $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$, la matriz Hessiana orlada tiene el siguiente aspecto:

$$\widetilde{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{xz} \\ g_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{yz} \\ g_z & \mathcal{L}_{zx} & \mathcal{L}_{zy} & \mathcal{L}_{zz} \end{pmatrix}$$

En este caso, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un punto (x_0, y_0, z_0) dado:

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| < 0$ y $|\widetilde{H}_4(x_0, y_0, z_0)| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un **mínimo relativo condicionado**.
- Si $|\widetilde{H}_3((x_0, y_0, z_0))| > 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un **máximo relativo condicionado**.
- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| \neq 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| \neq 0$, pero no es uno de los casos anteriores, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un **punto de silla**.
- En cualquier otro caso, es necesario realizar un estudio adicional.

2.4 Caso particular: funciones reales de tres variables con dos condiciones

En el caso particular de funciones reales de tres variables $f(x, y, z)$ con dos condiciones, la función de Lagrange es $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g(x, y, z) + \lambda_2 h(x, y, z)$, de forma que la matriz Hessiana orlada tiene el siguiente aspecto:

$$\widetilde{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_x & g_y & g_z \\ 0 & 0 & h_x & h_y & h_z \\ g_x & h_x & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{xz} \\ g_y & h_y & \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{yz} \\ g_z & h_z & \mathcal{L}_{zx} & \mathcal{L}_{zy} & \mathcal{L}_{zz} \end{pmatrix}$$

En este caso, para determinar la naturaleza de un punto (x_0, y_0, z_0) es necesario comprobar las siguientes condiciones:

- Si $|\widetilde{H}_5(x_0, y_0, z_0)| > 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un **mínimo relativo condicionado**.
- Si $|\widetilde{H}_5((x_0, y_0, z_0))| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ se trata de un **máximo relativo condicionado**.
- En cualquier otro caso, es necesario realizar un estudio adicional.

3 Polinomios de Taylor en funciones de varias variables

Recordemos la fórmula del polinomio de Taylor desarrollado alrededor del punto $x = c$ para funciones reales de variable real:

$$P(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)(x - c)^2}{2!} + \cdots + + \frac{f^{n)}(c)(x - c)^n}{n!}$$

En funciones reales de variable vectorial el concepto es equivalente, solo que ahora entrarán en juego las derivadas parciales. Así, el **polinomio de Taylor de primer orden** de una función $f(x, y)$ de dos variables desarrollado alrededor del punto $\overline{c} = (c_1, c_2)$ tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{P(x, y) = f(c_1, c_2) + \big(f_x(c_1, c_2)(x - c_1) + f_y(c_1, c_2)(y - c_2)\big)}$$

En el caso de tratarse de una función real de n variables, la expresión del polinomio de Taylor de primer orden desarrollado alrededor del punto $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ sería la siguiente:

$$P(\overline{x}) = f(\overline{c}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{c})}{\partial x_i}(x_i - c_i) = f(\overline{c}) + \nabla f(\overline{c})(\overline{x} - \overline{c})$$

Si estamos interesados en el **polinomio de Taylor de segundo orden** asociado a una función real de dos variables, la fórmula que debemos emplear es la siguiente:

$$P(x,y) = f(c_1,c_2) + \big(f_x(c_1,c_2)(x-c_1) + f_y(c_1,c_2)(y-c_2)\big) + \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(c_1,c_2)(x-c_1)^2 +$$
$$+ f_{xy}(c_1,c_2)(x-c_1)(y-c_2) + f_{yx}(c_1,c_2)(y-c_2)(x-c_1) + f_{yy}(c_1,c_2)(y-c_2)^2\Big)$$

Para el caso más general de una función real de n variables, la expresión del polinomio de Taylor de segundo orden generado a partir del punto $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ sería la mostrada a continuación:

$$P(\overline{x}) = f(\overline{c}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overline{c})}{\partial x_i}(x_i - c_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{c})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - c_i)(x_j - c_j) =$$
$$= f(\overline{c}) + \nabla f(\overline{c})(\overline{x} - \overline{c}) + \frac{1}{2!}(\overline{x} - \overline{c}) H_f(\overline{c})(\overline{x} - \overline{c})^t$$

Nótese como, al igual que en las funciones reales de variable real la aproximación conseguida mediante un polinomio de primer grado coincide con la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = c$, en funciones de dos variables la aproximación conseguida mediante un polinomio de Taylor de primer orden coincide con el plano tangente en el punto de trabajo $\overline{x} = \overline{c}$.

4 Problemas

1) Calcula los puntos críticos y los extremos relativos de la función $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2y$.

2) Sea la función $f(x,y) = \dfrac{8}{y} + \dfrac{y}{x} + x$ definida en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Estudia y clasifica los puntos críticos de $f(x,y)$.

3) Determina los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2(x^2 - 2) + y^2(y^2 - 2) + 4xy$.

4) Determina los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 + \dfrac{1}{x^4 y^4}$.

5) Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

6) Halla los extremos de la función $f(x,y) = 3x + y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1000$.

7) Maximiza la función $f(x,y) = xy$ sujeta a la restricción $2x + 2y = a$.

8) Determina la distancia mínima desde el punto $(1,-2)$ hasta la recta dada por la ecuación $x+5y-10=0$.

9) Determina la distancia mínima desde la recta $x+y=4$ hasta la elipse $x^2+4y^2=4$.

10) Halla los extremos de la función $f(x,y,z)=x-y+z$ sujetos a la restricción $x^2+y^2+z^2=2$.

11) Calcula la mayor y menor distancia desde el punto $(2,1,-2)$ hasta la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

12) Analiza, de entre todos los paralelepípedos de superficie S, el que tiene mayor volumen.

13) Determina el máximo absoluto que tiene la función $f(x,y)=3xy$ considerando el conjunto de puntos $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 3\}$.

14) Determina los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z)=-x+y-3z$ en el conjunto de puntos $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2\leqslant 7\}$.

15) Determina si la función $f(x,y)=8x^3-24xy+y^3$ tiene un máximo y un mínimo absolutos en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$, considerando tanto la frontera como el interior del triángulo.

16) Dada la función $f(x,y)=e^{x^2-2x+y^2}$ y el recinto $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+2y^2\leqslant 1\}$, calcula los extremos absolutos de $f(x)$ en R.

17) Determina los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z)=z$ de forma que se cumplan las condiciones $x+y+z=12$, $z=x^2+y^2$.

18) Calcula el valor máximo de la función $f(x,y,z)=xyz$ a lo largo de los puntos que pertenecen a la intersección de los planos $x+y+z=40$, $z=x+y$.

19) Obtén los polinomios de Maclaurin de primer y segundo grado para $f(x,y)=e^{2x+y}$.

20) Calcula el polinomio de Maclaurin de segundo orden de $f(x,y)=x\cos(y)+y\,\mathrm{sen}(x)$.

21) Obtén el polinomio de Maclaurin de segundo grado de la función $f(x,y)=\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1+x}{1+y}\right)$.

22) Expresa la función $f(x,y)=x^3+y^3-x^2y+xy-1$ en potencias de $(x+1)$ e $y-2$.

23) Obtén el polinomio de Taylor de segundo grado para la función $f(x,y)=x^y$ y utilízalo para calcular el valor aproximado de $(1.2)^{0.1}$.

24) Utiliza el polinomio de Taylor de segundo orden adecuado para obtener el valor aproximado del número $\sqrt{(1.02)^2+(1.97)^3}$.

25) Obtén el polinomio de Maclaurin de segundo orden de la función $f(x,y,z)=e^{a(x+y+z)}$.

26) Calcula el polinomio de Taylor de tercer orden de $f(x,y)=\mathrm{Ln}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ en el punto $(1,1)$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. CLAGSA.
- Isaías Uña, Jesús San Martín y Venancio Tomeo. *Problemas resueltos de Cálculo en varias variables*. Ed. Paraninfo.
- Saturnino Salas, Einar Hille y Garret Edgen. *Cálculo de varias variables. Volumen II*. 4ª edición. Editorial Reverté.
- Carmen Anido y Martha Saboyá. *Bases matemáticas para el análisis económico*. Grupo Editorial Universitario.
- Fernando Bombal, Luis Rodríguez y Gabriel Vera. *Problemas de análisis matemático. Tomo 2*. Editorial AC.
- Fernando Revilla. *Problemas de análisis real y complejo*. `http://fernandorevilla.es`.
- LibreTexts. Calculus. `https://math.libretexts.org`.