APLICACIONES LINEALES

Tema 2

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Curso 2024-2025

Tema 2. Aplicaciones lineales

Aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares K, una **aplicación lineal (homomorfismo)de V en W** es una aplicación que verifica:

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$
2) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) \quad \forall \alpha \in R, \forall \vec{u} \in V$

O equivalentemente: $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Ejemplos

- $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal
- $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal
- $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, 3x_2 + 2x_3)$ sí es aplicación lineal
- $f: R^3 \longrightarrow R^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 . x_2, 0, x_2 + x_3)$ no es aplicación lineal

Propiedades

1) f(0)=0 2) f(- $\vec{u}$) = - f($\vec{u}$) $\forall x \in V$

3) La imagen de un subespacio vectorial S de V es un subespacio vectorial de W

f(V) se denomina Imf

4) Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ es un sistema generador de S, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),….f($\overrightarrow{u_n}$)} es un sistema generador de f(S)

4) Si T es un subespacio de W, f^{-1}(W) es un subespacio de V

5) Si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ son linealmente dependientes, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),….f($\overrightarrow{u_n}$)} también son l.d.

6) **Las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal, no la independencia lineal**, es decir, si $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots \overrightarrow{u_n}\}$ son linealmente independientes, entonces {f($\overrightarrow{u_1}$), f($\overrightarrow{u_2}$),….f($\overrightarrow{u_n}$)} no necesariamente son l.i.

$Ejemplo$: $f: R^4 \longrightarrow R^3$ f($x_1, x_2, x_{3,} x_4$)= $(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

(1,0,0,0) y (0,1,0,0) son linealmente independientes; sus imágenes son l. dependientes

Tipos de aplicaciones

- Una aplicación es **inyectiva** (monomorfismo) si no hay dos elementos distintos que tengan imágenes iguales.
- Una aplicación es **suprayectiva** (/sobreyectiva) (epimorfismo)si todos los elementos del conjunto final B son la imagen de algún elemento de A.
- Una aplicación es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y suprayectiva. (Isomorfismo)Estas aplicaciones establecen una relación de uno a uno entre los conjuntos A y B, pues a cada elemento de A le corresponde uno de B, y a cada elemento de B le corresponde uno (y no más) de A.
- Si f es **biyectiva** entonces existe su inversa, denotada $f^{-1}: W \to V$

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

❑ Núcleo de una aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre R, y f: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal

Se llama núcleo de f y se denota **N(f)=Ker f ={x∈V/ f(x)=0} =** $\boldsymbol{f^{-1}(0_W)}$

✓ Es por tanto el conjunto de vectores del espacio de partida que tienen como imagen al vector nulo del espacio de llegada

❑ Propiedades del núcleo

- ❑ Kerf es un subespacio vectorial de V
- ❑ f es una aplicación lineal inyectiva si y sólo si ker f = {0}
- ❑ Ker f = {0} si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de vectores de V es un sistema libre de vectores de W

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

❑ Imagen de una aplicación lineal

- Si V y W son espacios vectoriales sobre R, y f: V $\longrightarrow$ W es una aplicación lineal
- Se llama Imagen de f y se denota **Imf ={y∈W/** $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}\ \boldsymbol{t.q.}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$**}**

✓ Es por tanto el conjunto de vectores del espacio de llegada W que son imagen de algún vector de V

❑ Propiedades de Im f

❑ La **imagen de un sistema generador** del subespacio *S* es un sistema generador del subespacio *f(S)*

❑ La **imagen de un conjunto linealmente dependiente de vectores** es otro conjunto linealmente dependiente de vectores

❑ La **imagen de un conjunto linealmente independiente** es un conjunto linealmente independiente <u>sólo si la aplicación lineal es inyectiva</u>.

Rango de una aplicación lineal

El rango de una aplicación lineal es la dimensión de Im f: **rang f = dim (Imf)**
Cuando los espacios V y W son de dimensión finita, se verifica

dim Ker f + dim Imf = dim V

Propiedades

- Una aplicación $f: V \to W$ es inyectiva si y sólo si ker f= $\{0\}$
- Una aplicación $f: V \to W$ es suprayectiva si Imf=W
- Si *V* tiene dimensión finita, entonces *f* es inyectiva si y sólo si $\dim(V) = \dim(f(V))$.
- Si *B* es una base de *V*, $f: V \to W$ es inyectiva si y sólo si *f(B)* es una base de *f(V)*, es decir, si es un sistema de vectores linealmente independientes en *W*.

Clasificación

- Si V=W la aplicación lineal se denomina endomorfismo
- Si $f : V \longrightarrow W$ es inyectiva, se llama monomorfismo
- Si $f : V \longrightarrow W$ es suprayectiva, se llama epimorfismo
- Si $f: V \longrightarrow W$ es biyectiva, f es un isomorfismo
- Un endomorfismo biyectivo se denomina automorfismo

Teorema

Si $f:V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal. Son equivalentes:

- 1) f es inyectiva
- 2) f conserva la independencia lineal
- 3) La imagen por f de una base de V es una base de W
- 4) dim V = dim(Imf)
- 5) kerf = {0}

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Aplicaciones lineales. Clasificación

Isomorfismos

- Un isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva
- f: V $\longrightarrow$ W es un isomorfismo si y sólo si ker f = {0} e Im f = W
- Dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K de dimensión finita son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión
- La relación de isomorfía entre espacios vectoriales sobre K es una relación de equivalencia.
- Si f: V $\longrightarrow$ W es un isomorfismo, entonces f^{-1}: W $\longrightarrow$ V también es un isomorfismo

Ejemplos

- $R^4=\{ (a,b,c,d)\ t.q.\ a,b,c,d \in R\}$
- $P_3(x)=\{a+bx+cx^2+dx^3 / a,b,c,d \in R\}$
- $M_2=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a,b,c,d \in R\}$

son espacios vectoriales isomorfos

El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Dados U, V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K y
f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W y siendo $\alpha \in K$

- **Suma de aplicaciones lineales**

$$\begin{aligned} f+g:\ U &\longrightarrow V \\ u &\longrightarrow (f+g)(u)=f(u)+g(u) \end{aligned}$$

- **Producto del escalar α por una aplicación lineal**

$$\begin{aligned} \alpha f:\ U &\longrightarrow V \\ u &\longrightarrow (\alpha f)(u)= \alpha f(u) \end{aligned}$$

- **Composición de aplicaciones lineales**

$$\begin{aligned} h \circ f:\ U &\longrightarrow W \\ u &\longrightarrow (h \circ f)(u)=h[f(u)] \end{aligned}$$

El espacio vectorial de las aplicaciones lineales

Dadas las aplicaciones lineales

f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W y siendo $\alpha \in K$

❑ Teorema

- ❑ La suma f+g es una aplicación lineal
- ❑ El producto αf es una aplicación lineal
- ❑ La composición h∘f es una aplicación lineal

❑ Denotamos $\mathcal{L}$(U,V) al conjunto de aplicaciones lineales de U en V. Entonces;

❑ ($\mathcal{L}$(U,V),+)es un grupo conmutativo

❑ ($\mathcal{L}$(U,V), .K) verifica las siguientes propiedades: $\forall f, g \in \mathcal{L}$(U,V) y $\forall \gamma, \mu \in K$

a) $(\gamma + \mu)f = \gamma f + \mu$f (distributiva respecto a la suma de escalares)

b) $\gamma(f + g) = \gamma f + \gamma g$ $(distributiva\ respecto\ a\ la\ suma\ de\ vectores)$

c) $\gamma\ (\mu f) = (\gamma\mu)f$ $d)\ 1.f = f$

❑ Por tanto ($\mathcal{L}$ **(U,V),+,.K)** **tiene estructura de espacio vectorial y tiene dimensión mn**

Matriz de una aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales sobre R de dimensiones n y m, B=$\{e_1, e_2,\dots e_n\}$ es una base de V y B´=$\{u_1, u_2,\dots u_m\}$ es una base de W

Si $f(e_1)=a_{11}u_1+ a_{21}u_2+\dots a_{m1}u_m$

$f(e_2)=a_{12}u_1+ a_{22}u_2+\dots a_{m2}u_m$

………………………………………………

$f(e_n)=a_{1n}u_1+ a_{2n}u_2+\dots a_{mn}u_m$

$$f(x) = f(x_1e_1+x_2e_2+ x_n e_n) = x_1f(e_1)+ x_2f(e_2)+\dots x_nf(e_n)= x_1 (a_{11}u_1+ a_{21}u_2+\dots a_{m1}u_m)+ x_2 (a_{12}u_1+ a_{22}u_2+\dots a_{m2}u_m)+ x_n (a_{1n}u_1+ a_{2n}u_2+\dots a_{mn}u_m)$$

Matricialmente: Y=AX $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ Es decir A=$(f(e_1)|\dots|f(e_n))$

Aplicaciones lineales y matrices

Importante

- Y=AX $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

es la expresión analítica de la aplicación lineal f

- La matriz $M_{B,B'}$(f) se denomina **matriz asociada a f en las bases B y B´**
- Es una matriz de dimensión mxn
- La columna j de la matriz está formada por las coordenadas de f(e_j) respecto de B´.
- El rango de la matriz A es la dimensión de Imf
- Si f=Id, entonces la $M_{B,B'}$(Id) es la matriz que transforma las coordenadas de x respecto a la base B en las coordenadas de x respecto a B´: es la matriz del cambio de base de B a B´.

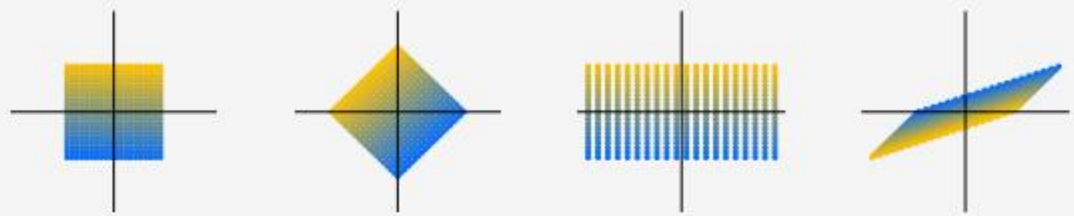
U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Aplicaciones lineales y matrices

Importante

a) Puntos correspondientes a los datos
b) Rotación de 45º
c) Estiramiento de la coordenada horizontal por 2
d) Combinación de reflection, giro y estiramiento

Example 2.22 (Linear Transformations of Vectors)



(a) Original data. (b) Rotation by 45°. (c) Stretch along the horizontal axis. (d) General linear mapping.

We consider three linear transformations of a set of vectors in $\mathbb{R}^2$ with the transformation matrices

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.97}$$

Draft (2022-01-11) of "Mathematics for Machine Learning". Feedback: https://mml-book.com.

Aplicaciones lineales y matrices

Importante

- f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ rang A = n
- f es suprayectiva $\Longleftrightarrow$ rang A = m
- f es un isomorfismo $\Longleftrightarrow$ A es cuadrada y regular

Proposición

Dadas las aplicaciones lineales

f: U $\longrightarrow$ V; g: U $\longrightarrow$ V y h: V $\longrightarrow$ W ;

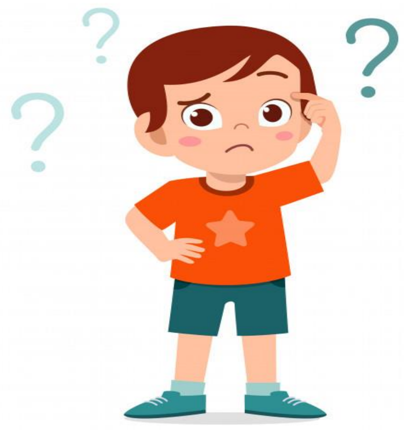
$B, B', y\ B''$ *son bases respectivas de los mismos* y $\alpha \in K$; *entonces*

- $M_{B,B'}$(f+g)= $M_{B,B'}$(f)+ $M_{B,B'}$(g)
- $M_{B,B'}(\alpha$f)= $\alpha M_{B,B'}$(f)
- $M_{B,B''}$(h∘f)= $M_{B',B''}$(h). $M_{B,B'}$(f)

Matriz de cambio de base

¿Qué relación existe entre las matrices de una misma aplicación lineal en distintas bases?

Tendremos que utilizar las matrices de cambio de base



Si f∈ $\mathscr{L}$ (U,V), para todas las bases A, A´ de U y B, B´ de V se verifica:

$$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\, M_{AB}(f)\, M_{A'A}$$

Matriz de cambio de base

Procedimiento

- $M_{A'A}$ transforma las coordenadas de un vector u$\in U$ respecto a la base A´ en las coordenadas de u respecto a A: tiene en sus columnas los vectores de A´ en la base A
- $M_{AB}(f)$ es la matriz de la aplicación lineal: transforma u en f(u)
- $M_{BB'}$ transforma las coordenadas de un vector f(u) $\in V$ respecto a la base B en las coordenadas de f(u) respecto a B´: tiene en sus columnas los vectores de B en la base B´.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "M_{A'B'}(f)"] \arrow[d, "M_{A'A}"'] & B' \\ A \arrow[r, "M_{AB}(f)"] & B \arrow[u, "M_{BB'}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_U"'] & V \\ U \arrow[r, "f"] & V \arrow[u, "Id_V"'] \end{tikzcd}$$

$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\, M_{AB}(f)\, M_{A'A}$ Es la matriz asociada a la composición de aplicaciones f= Id_V o f o Id_U

Matriz de cambio de base

¿Y si la aplicación lineal es un endomorfismo?

- *La matriz asociada a un endomorfismo es una matriz cuadrada* $M_B(f)$

Si f∈ $\mathscr{L}$(V), para todas las bases B y B´ de V se verifica:

$$M_{B'}(f) = M_{BB'}\, M_B(f)\, M_{B'B}$$

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d, "M_{B'B}"'] & B' \\ B \arrow[r] & {} \arrow[u, "M_{BB'}"'] \end{tikzcd}$$

- *Como* $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$ son matrices inversas: si las llamamos P^{-1} y P, *tenemos*

$$M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f)\, P$$

- ***Las matrices asociadas a un endomorfismo en distintas bases son semejantes***

Matriz de cambio de base

Procedimiento

- $M_{B'B}$transforma las coordenadas de un vector u∈ U respecto a la base B´ en las coordenadas de u respecto a B: tiene en sus columnas los vectores de B´ en la base B
- $M_B(f)$ es la matriz de la aplicación lineal: transforma u en f(u)
- $M_{BB'}$transforma las coordenadas de un vector f(u) ∈ V respecto a la base B en las coordenadas de f(u) respecto a B´: tiene en sus columnas los vectores de B en la base B´.

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "M_{B'}(f)"] \arrow[d, "M_{B'B}"'] & B' \\
B \arrow[r, "M_B(f)"] & B \arrow[u, "M_{BB'}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_U"'] & V \\
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[u, "Id_V"']
\end{tikzcd}$$

$M_{A'B'}(f) = M_{BB'}\ M_{AB}(f)\ M_{B'B}$ Es la matriz asociada a la composición de aplicaciones f= Id_Vo f o Id_U

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

Repasando conceptos…

❑Matrices equivalentes

- Dos matrices A y B de orden mxn se dicen equivalentes si una se puede obtener a partir de la otra mediante operaciones elementales de filas y columnas.
- Dos matrices A y B de orden mxn son equivalentes si, respecto de bases adecuadas, están asociadas a una misma aplicación lineal de K^n en K^m , *es decir* si existen dos matrices regulares P (nxn) y Q (mxm) tales que B=$Q^{-1}AP$tales que A=MBN
- 2 matrices son equivalentes ⟺ rang A=rang B

Matrices equivalentes:

✓ representan al mismo homomorfismo en distintas bases

✓ tienen el mismo rango

Matrices equivalentes, congruentes y semejantes

❑Matrices congruentes

➢ Dos matrices A y B cuadradas de orden n son congruentes si existe una matriz P regular P_{nxn} *tal que* $A = P^t\text{BP}$ (P se denomina matriz de paso)

❑Consecuencias

- Si dos matrices A y B son congruentes, entonces A y B son equivalentes
  Basta considerar $\text{M} = P^t$ y N=P
- Si dos matrices A y B son congruentes, entonces rang A = rang B
- La congruencia de matrices es una relación de equivalencia en M_{nxn}
  - Propiedad reflexiva $A = I^t\text{AI}$ P=I
  - Propiedad simétrica $A = P^t\text{BP} \longrightarrow \text{B}=(P^{-1})^t AP^{-1}$
  - Propiedad transitiva $A = P^t\text{BP}$ y $B = Q^t\text{CQ} \longrightarrow \text{A}= P^tQ^t\text{CQP}= (QP)^t CQP$

❑Matrices semejantes

➢ Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si están asociadas a un mismo endomorfismo, es decir si existe una matriz P regular P_{nxn}

$tal\ que\ \ B = P^{-1}\text{BP}$ (P se denomina matriz de paso)

Matrices semejantes:

✓ **representan al mismo endomorfismo en distintas bases**

✓ **tienen el mismo rango**

- La semejanza de matrices es una relación de equivalencia en M_{nxn}
  - Propiedad reflexiva $A = I^{-1}\text{AI}$ P=I
  - Propiedad simétrica $A = P^{-1}\text{BP}$ $\Longrightarrow$ B=$(P^{-1})^{-1}AP^{-1}$
  - Propiedad transitiva $A = P^{-1}\text{BP}$ y $B = Q^{-1}\text{CQ}$ $\Longrightarrow$ A= $P^{-1}Q^{-1}\text{CQP}=$ $(QP)^{-1}CQP$

Primer teorema de isomorfía

- Si f∈ $\mathcal{L}$(U,V) , entonces U/kerf e Imf son isomorfos
- La aplicación $\tilde{f}$: U/kerf $\longrightarrow$ Imf

  u + ker f $\longrightarrow$ f(u) es un isomorfismo

$¿\,cómo\ es\ la\ relación\ entre\ f\ y\ \tilde{f}$?

π: U $\longrightarrow$ U/ ker f

u $\longrightarrow$ u+kerf

Es un epimorfismo

i: Imf $\longrightarrow$ V

v $\longrightarrow$ v

es un monomorfismo (inclusión)

Descomposición canónica de una aplicación lineal

Teorema general de homomorfismos

El teorema fundamental de homomorfismos relaciona la estructura de dos objetos entre los que hay definido un homomorfismo, y, a partir de ahí, definir una relación entre ker f e Im f

Si f: U $\rightarrow$ V es un homomorfismo y N es un subgrupo normal contenido en el núcleo de f, entonces existe un único homomorfismo $\tilde{f}$ $tal\ que$ $\tilde{f}$ o $\pi = f$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \\ U/N \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

π se denomina proyección canónica y es un epimorfismo

Descomposición canónica de una aplicación lineal

- Comprobamos que para todo u $\in U$

$$(i \circ \tilde{f} \circ \pi)(u) = (i \circ \tilde{f})(u+\ker f) = i[f(u)] = f(u)$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \\
U/\mathrm{Ker} f \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \mathrm{Im} f \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

- $i \circ \tilde{f} \circ \pi$ es la descomposición canónica de f
- Toda aplicación lineal puede expresarse como la composición de un epimorfismo con un isomorfismo y un monomorfismo

Descomposición canónica de una aplicación lineal

Ejemplo *Descomposición canónica de una aplicación lineal*

Dada $f: R^4 \longrightarrow R^3$ cuya matriz respecto de las bases canónicas es:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtener la descomposición canónica de f

1) Calculamos el ker f:{$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ /f (x_1, x_2, x_3, x_4)=0}

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 = 0;\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0;\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0;$$

$\Rightarrow$ Base de ker f:{(1,3,1,0);(1,2,0,-1)}

Completamos hasta obtener una base de R^4: (0,0,1,0) y (0,0,0,1)

Descomposición canónica de una aplicación lineal

- Obtenemos el espacio cociente: R^4/kerf
- Una base de R^4/ker f es por tanto:C={C[0,0,1,0]; C[0,0,0,1]}={(0,0,1,0)+kerf, (0,0,0,1)+kerf}

2) Obtenemos una base de Imf
Como rang A=2 : Base de Im f={(2,1,-1); (1,1,1)}

- ¿Qué hacen las diferentes aplicaciones…?
- $\pi(x)$ =c[x]
- $\tilde{f}$(c[x])=f[x]
- i(x)=x

(i o $\tilde{f}$ o π) $(u) = (i\ o\tilde{f})$ (u+kerf) = i[f(u)] = f(u)

Descomposición canónica de una aplicación lineal

- ¿Cómo funciona $\pi(x)$? Vamos a calcular la matriz N asociada en las bases canónicas

π(1,0,0,0)= $(1,0,0,0) + kerf = \alpha[(0,0,1,0) + kerf] + \beta[(0,0,0,1) + kerf]$

El vector $(1,0,-\alpha,-\beta)$ ha de pertenecer a kerf $\Leftrightarrow$ rang$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0-\alpha & & -\beta \end{pmatrix}$=2 $\Leftrightarrow$ $\alpha = 2; \beta = 3$

Entonces π(1,0,0,0)$= 2[(0,0,1,0) + kerf] + 3[(0,0,0,1) + kerf]$

Y $\binom{2}{3}$ es la primera columna de la matriz N

- Repetimos el proceso para los otros 3 vectores de la base canónica de R^4

π(0,1,0,0)= $(0,1,0,0) + kerf = \alpha[(0,0,1,0) + kerf] + \beta[(0,0,0,1) + kerf]$

El vector $(0,1,-\alpha,-\beta)$ ha de pertenecer a kerf $\Leftrightarrow$ rang$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\alpha & & -\beta \end{pmatrix}$=2 $\Leftrightarrow$ $\alpha = -1; \beta = -1$

Entonces π(0,1,0,0)$= -[(0,0,1,0) + kerf] - [(0,0,0,1) + kerf]$

Y $\binom{-1}{-1}$ es la segunda columna de la matriz N

Descomposición canónica de una aplicación lineal

π(0,0,1,0)= $(0,0,1,0) + kerf \; = \alpha[(0,0,1,0) + kerf] + \beta[(0,0,0,1) + kerf]$

Trivialmente π(0,0,1,0)$= 1[(0,0,1,0) + kerf] + 0[(0,0,0,1) + kerf]$
Y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la tercera columna de la matriz N

π(0,0,0,1)= $(0,0,0,1) + kerf \; = \alpha[(0,0,1,0) + kerf] + \beta[(0,0,0,1) + kerf]$

Trivialmente π(0,0,0,1)$= 0[(0,0,1,0) + kerf] + 1[(0,0,0,1) + kerf]$
Y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es la cuarta columna de la matriz N

- La matriz asociada al epimorfismo π es N=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para saber más sobre los teoremas de isomorfía:

http://abstract.ups.edu/aata-es/section-group-isomorphism-theorems.html

Ejemplos: https://es.wikipedia.org/wiki/Descomposici%C3%B3n_de_una_aplicaci%C3%B3n_lineal

Descomposición canónica de una aplicación lineal

- ¿Cómo funciona $\tilde{f}$? $\tilde{f}$(c[x])=f[x]
- Vamos a calcular la matriz $\tilde{A}$ asociada a $\tilde{f}$ en las bases canónicas
- Calculamos para ello las imágenes de los vectores de una base de R^4/kerf

$$\tilde{f}\,[(0,0,1,0)+kerf]=f(0,0,1,0)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

Para hallar las coordenadas del vector (1,2,4) en la base de Imf:

(1,2,4)=$\alpha(2,1,-1)+\beta(1,1,1)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha=-1;\;\; \beta=3$ $\Rightarrow$ 1ª columna de la matriz $\tilde{A}$

$$\tilde{f}\,[(0,0,0,1)+kerf]=f(0,0,0,1)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Para hallar las coordenadas del vector (1,2,4) en la base de Imf:

(0,-1,-3)=$\alpha(2,1,-1)+\beta(1,1,1)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha=1;\;\; \beta=-2$ $\Rightarrow$ 2ª columna de la matriz $\tilde{A}$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

Descomposición canónica de una aplicación lineal

- ¿Cómo funciona la aplicación i?
- Tenemos las imágenes obtenidas en la base canónica de R^3
- i(2,1,-1)=(2,1,-1); i(1,1,1)=(1,1,1)

La matriz I es por tanto I=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- ¿Cuál es la matriz asociada a la composición de aplicaciones?

(i o $\tilde{f}$ o π) $(u) = (i\ o\tilde{f})$ (u+kerf) = i[f(u)] = f(u)

(u)=A(u)

I. $\tilde{A}$ .N=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$=A

El espacio dual. Formas lineales

- **Forma lineal** de un espacio vectorial sobre K es una aplicación lineal de V en K
- El **espacio dual de V**:

V^* *es el conjunto de las formas lineales de V, es decir,*

$$V^* = \mathfrak{L}(V,K)$$

- **Una forma lineal f∈ V^* transforma vectores en escalares.**
- Como cualquier aplicación lineal, queda completamente determinada calculando las imágenes de los vectores de una base B={v_1, v_2 ,… v_n } de V
- La matriz asociada a f respecto de la base B de V y la base canónica de K ({1}) es una matriz fila $M_B(f) = (f(v_1), f(v_2),\dots f(v_n)) \in M_{1xn}(K)$

Ejemplo: $f: R^2 \longrightarrow R$ f(x_1, x_2)= $2x_1 + 3x_2$

La matriz de f respecto a las bases canónicas $M(f) = \big(f(1,0), f(0,1)\big) = (2 \;\; 3) \in M_{1x2}(R)$

El espacio dual V^* está formado por todas las aplicaciones $f: R^2 \longrightarrow R$ f(x_1, x_2)= ax_1 + bx_2 a,b ∈R

Cada forma lineal queda caracterizada por el par (a,b). Base dual: {$\varphi_1(x_1, x_2)= x_1$; $\varphi_2(x_1, x_2)= x_2$}

El espacio dual. Bases duales

- Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, y B={v_1, v_2 ,… v_n} es una base de V, entonces el espacio dual V^* también tiene dimensión n y una de sus bases es B^* ={φ_1, φ_2 ,… φ_n} siendo φ_i: V $\longrightarrow$ K

  $\bar{x} \longrightarrow x_i$ (coord. i-ésima de $\bar{x}$ en B)

- $\boldsymbol{B^*}$ **es la base dual de B.** Para cada base B de un espacio vectorial V, existe una base de V^* *que es dual de B*

B^* ={φ_1, φ_2 ,… φ_n} se define por la delta de Kronecker

$$\varphi_i(v_j)=\boldsymbol{\delta_{ij}\ \ i,j=1,2,\dots,n\ \ con\ \delta_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si\ i=j} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si\ i\neq j} \end{cases}$$

- Las coordenadas de una forma lineal φ de V^* en la base dual B^* son $\varphi(v_1)$, $\varphi\ (v_2)$ … $\varphi(v_n)$
- **1ª propiedad de las bases duales**: Si B^*es la base dual de B, entonces para cada forma lineal f los elementos de su matriz asociada en la base B coinciden con sus coordenadas en la base B^*.

El espacio dual. Bases duales

❖ Ejemplo:

Sea B=$\{u_1 = (1,-1,1), u_2 = (-1,2,-1), u_3 = (-1,1,0)\}$ una base de $\boldsymbol{R}^3$.

Vamos a calcular la base dual de B

- Tenemos que calcular 3 formas lineales: f_1, f_2, f_3: bastará con obtener sus matrices asociadas en la base canónica
- ¿Cómo calculamos f_1 ? $M_{B_C}(f_1)=(a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13}) \leftrightarrow f_1(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

Sabemos que **f_1(1,-1,1) =1** **f_1(-1,2,-1) =0** **f_1(-1, 1,0) =0**

Es decir: $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=1 \quad (a_{11}\ a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=0 \quad (a_{11}\ a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=0$

O equivalentemente $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 2 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

- *Para calcular f_2 y f_3, obtendremos dos sistemas de ecuaciones lineales similares, con incógnitas $(a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$ y $(a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$ respectivamente* $\Longrightarrow$ *el problema se reduce a calcular la inversa de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores dados.*

El espacio dual. Bases duales

❑ Proposición

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y B = $\{v_1, v_2 ,\dots v_n\}$ es una base de V cuyos vectores, escritos por columnas, forman la matriz A, entonces la base dual de B, B^*= $\{f_1, f_2 ,\dots f_n\}$ viene dada por las filas de A^{-1} y viceversa

❖ Ejemplo:

Si $f_1, f_2 , f_3 : R^3 \to R \; son\ 3\ formas\ lineales\ tales\ que$

$f_1(x,y,z) = x + y + z \qquad f_2(x,y,z) = x + y \qquad f_3(x,y,z) = x$

¿forman una base del espacio dual de R^3?

➢ Basta probar que son linealmente independientes porque dim $(R^3)^* = 3$

¿Cómo? Sabemos que la matriz asociada a cada forma en la base canónica nos proporciona las coordenadas de esa forma en la base dual de la base canónica

$f_1 \leftrightarrow (1\ \ 1\ \ 1)$ $f_2 \leftrightarrow (1\ \ 1\ \ 0)$ $f_3 \leftrightarrow (1\ \ 0\ \ 0)$ luego bastará comprobar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Para encontrar la base B de la que es dual la que nos dan, bastará calcular la matriz inversa. Las columnas de esa matriz son los vectores que forman la base B de V. Comprobar B={(0,0,1);(0,1,-1);(1,-1,0)}

El espacio dual. Bases duales

- La matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Efectivamente B={(0,0,1);(0,1,-1);(1,-1,0)}

El espacio dual. Subespacios vectoriales ortogonales

❑ **2ª Propiedad de las bases duales**

Si B^*= $\{f_1, f_2 ,\dots f_n\}$ es la base dual de B, entonces dado un vector x de ,
si $\mathrm{x} = (x_1, x_2 ,\dots x_n)$ en la base B, entonces se verifica que x_i= f_i(x) $\forall i = 1,2, \dots n$

❑ **Anulador de un subespacio S** es el conjunto

- an(S) = $\{f \in V^* / f(v)$=0 $\forall v \in S\}$ es el conjunto de formas lineales que anulan a todos los vectores del subespacio

  - ❑ an(S) es un subespacio vectorial de V^*
  - ❑ an(S) = an (L(S)): es decir basta con encontrar el anulador de un sistema generador del subespacio
  - ❑ También se llama subespacio vectorial ortogonal a S

Weisstein, Eric W. «Dual Space» (Math World)

El espacio dual. Subespacios vectoriales ortogonales

Ejemplo

En $\boldsymbol{R}^4$ $consideramos$ U=L<$(1,-1,0,1),(1,1,-1,0),u_3=(2,0,-1,1)\}$

¿Cómo calcularías el subespacio anulador de U: an(U)?

- Primero comprobar si los vectores del sistema generador de U son linealmente independientes y vemos que U= L<u_1, u_2> (u_3 es c.l. de los otros dos vectores)
- Para que una forma lineal f con matriz asociada en la base canónica ($a_1\ a_2\ a_3\ a_4$) esté en an(U) es necesario y suficiente que anule a u_1 y a u_2. Es decir:

$$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \qquad (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$$

- Así obtenemos las ecuaciones: a_1 - a_2 +a_4=0 a_1 + a_2 - $a_3=0$ que son las ecuaciones cartesianas de an(U) en la base $(B_c)^*$
- Una base puede ser {(1 1 2 0), (-1 1 0 2)}: es decir las formas lineales:
  f(x,y,z,t) = x+y+2z y g(x,y,z,t)=-x+y+2t

Aplicación lineal traspuesta

- Si V y V´ son espacios vectoriales sobre un cuerpo K, f: V $\longrightarrow$ V´ es una aplicación lineal cuya matriz asociada es $A = M_{BB'}(f)$.
- Se puede definir una aplicación lineal entre los duales mediante f
- Consideramos $\varphi \epsilon (V')^{*}$ $y\ tenemos$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^t"'] & V' \arrow[d, "\varphi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

- Entonces $\varphi$of: V $\longrightarrow$ K es un elemento de V^{*}
- Esta aplicación lineal $f^{t}: (V')^{*} \longrightarrow V^{*}$

  $\varphi \longrightarrow \varphi$of es la **aplicación traspuesta de f**
- f^{t} es una aplicación lineal
- La matriz asociada a f^{t} en las bases duales de las canónicas es la matriz A^{t} siendo A la matriz asociada a f en las bases canónicas.

El espacio dual. Subespacios vectoriales ortogonales

Ejemplo

Dados $P_2(x)$ y g *una aplicación lineal cuya matriz asociada* $M_{B_C}(g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Obtener la matriz asociada al operador traspuesto g^t

Teorema

Si M es la matriz de una aplicación lineal h:V→W en unas bases B_V y B_W, entonces la aplicación lineal traspuesta en las bases $h^t: W^* \to V^*$ es M^t. Entonces $\mathrm{M}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$