Hoja de problemas nº 2

Aplicaciones Lineales

Tema 2

Estudiar si son aplicaciones lineales

1.- $f: R^3 \quad \rightarrow \quad R^4$: f(x_1, x_2, x_3)= $(x_3, x_1 + x_2, 0, -x_3)$

2.- $f: R^3 \quad \rightarrow \quad R^2$: f(x, y, z)= $(x + a, y)$

3.- f: $R^3 \quad \rightarrow \quad M_2$(x): f$(x, y, z)$=$\begin{pmatrix} ax & by \\ cz & x+y+z \end{pmatrix}$ a,b,c $\in R$

4.- Dado el endomorfismo de R^3 definido por las ecuaciones

(y_1, y_2, y_3)= $(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_{3,}\ x_3\ )$

Obtener: a) Kerf b) Imf

c) f(V) siendo V=$\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

5.- Dada f: $R^3 \rightarrow R^2$ definido por las ecuaciones

(y_1, y_2, y_3)= $(x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3\ )$

Obtener: a) Kerf b) Imf

c) Comprobar las dimensiones de cada uno

6.- Determinar el ker f e Imf del endomorfismo : $R^3 \rightarrow \quad R^3$ definido por f(x_1, x_2, x_3)= $(\ x_3,\ x_1 + x_2, -x_3)$

Calcular $f^{-1}(0{,}0{,}0)$ $\quad f^{-1}(1{,}2{,}3)$ $\quad f^{-1}(1{,}0,-1)$

7.- Dada la aplicación lineal f: $P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ tal que:

$f(1 + x^2) = 3 + 2x^2 \qquad f(x) = 1 + x + 2x^2 \qquad f(3 + x) = -1$

¿Qué polinomio es la imagen del polinomio $1 - x + 5x^2$?

8.- Dadas B=$\{u_1, u_2\}$ y B´=$\{v_1, v_2, v_3\}$ bases de U y V respectivamente, si g es una aplicación lineal tal que:

g$(3u_1 - 2u_2) = 3v_1 + 6v_2 - 3v_3$ g$(4u_1 - 3u_2) = v_1 + 5v_2 - v_3$

Obtener $M_{B,B'}(g)$. $Clasificar\ el\ homomorfismo$

9.- $Sea\ f: R^3 \rightarrow\ \ R^2$ definida por la expresión

f(x_1, x_2, x_3)= ($x_1 + 3x_2 + 5x_3$, $2x_1 + 2x_2$+$7x_3$).

Calcular la matriz asociada al homomorfismo f en las bases A´y B´de $R^3\ y\ R^2$ respectivamente

A´= {(1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)}   B´= {(1,1), (4,3)}

10.- $Sean$ A´= $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ $una\ base\ de\ U\ y\ \ B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}\ \ base\ de\ V$

f es un homomorfismo de U en V definido por:

$f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\,\vec{u}_3) = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2\ ;\ \ f(\vec{u}_2 +\ \vec{u}_3) = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2\ ;$

$f(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 4\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$ Calcular $M_{A'B'}(f)$

11.- Si C es la base canónica de $\boldsymbol{R}^3$ y C´= {(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,2)}

Si f es un endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de f en la base C´.

C´= {u_1 =(1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,-1,2)}

12.- **(Examen final álgebra U-tad 2021)**

Dada f: $R^3 \rightarrow R^3$ aplicación lineal , S $= \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 /\ \mathrm{x+y+z} = 0\}$ es un subespacio de R^3 que verifica $f(v) = v\ \ \forall v \in S$ y ker f={w∈ $R^3/w^t.v = 0\ \ \ \forall v \in S$}

a) Determinar $M_{BB_C}(f)$, la matriz asociada a f considerando la base B={(1,0,-1), (0,1,-1) (1,1,1)} en el espacio de partida y la base B_c en el espacio de llegada.
b) Dar la expresión analítica de f(x,y,z) en las bases canónicas
c) Calcular $f^{-1}(W)\ siendo$ W $= \{(\mathrm{x,y,z}) \in R^3 /\ \mathrm{y = z} = 0\}$
d) Razonar cuáles son las dimensiones de ker f y de Im f y clasificar la aplicación lineal.

13.- Sea $f: \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$; M_{B_c,B_c}(f)=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz asociada a f en las bases B={(1,3,0), (1,0,2), (0,4,-2)} de $\boldsymbol{R}^3$ y B´={(2,1), (4,3)} de $\boldsymbol{R}^2$

14.- $(\boldsymbol{Examen\ final}$ á$\boldsymbol{lgebra\ lineal\ enero\ 2022})$

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ $base\ canónica\ del\ espacio\ de\ matrices$ de S_2

(matrices simétricas de orden 2) y $B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canónica de R^3

Si $f: S_2 \rightarrow R^3$ y $g: R^3 \rightarrow S_2$ son aplicaciones lineales de las que conocemos:

1) Unas ecuaciones implícitas del núcleo de f en la base B_1 son x-y+2z=0
2) $(gof)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular la matriz del endomorfismo h=gof en la base B_1
b) Obtener una base de h(W) siendo W={$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ $/x$ $-$2y+3z=0; 3x-7y+7z=0;5x-11y+13z=0}
c) $Si\ B´ = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ $es\ otra\ base$ de S_2, obtener la matriz del endomorfismo h en la base B´.
d) ¿Pueden ser las ecuaciones x+2y+3z=0; y-4z=0 unas ecuaciones implícitas en B_1 del subespacio Img? Razona la respuesta

15.- Dada la base de $\boldsymbol{R}^3$, B={$u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)$}

Obtener la base dual.

16.- Sean B={$v_1 = (1,2), v_2 = (3,1)$} $una\ base\ de$ $\boldsymbol{R}^2$ y B^*={v_1^*, v_2^*} $su\ base\ dual$. Y sea f la forma lineal f=$3v_1^* + 4v_2^*$

Determinar el valor de f(x_1, x_2) para un vector cualquiera de $\boldsymbol{R}^2$

17.- ***(Examen parcial álgebra lineal U-tad 2021)***

Consideramos el homomorfismo f_β definido entre los espacios vectoriales $P\_2\ [x] = \{\text{polinomios de grado menor o igual que } 2\}$ y

$M\_2x2 = \{matrices\ cuadradas\ de\ orden\ 2\}$

de modo que

$$f\_\beta(a + bx + cx\text{^}2) = \begin{pmatrix} \beta p(1) & p'(1) \\ p''(1) & p'''(1) \end{pmatrix}$$

Obtener la matriz de f_β *en las bases*

B_1={1,x, x^2}; $B_2=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

Calcular la dimensión de Im f_β y de ker f_β según los diferentes valores de β.

Obtener unas ecuaciones paramétricas de ker f_β *en la base* B_1 y unas ecuaciones implícitas de Im f_β *en la base* B_2 en el caso en que f_β no es inyectivo.

Para $\beta = 1$:

Encontrar una base de ${f_1}^{-1}(S_{2x2})$ siendo S_{2x2} *el espacio de matrices* simétricas 2x2

Considerando ahora las bases

B_1'={1, x-1,1+ x^2} y $B_2'=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\}$ en los espacios de partida y de llegada respectivamente

Obtener la matriz del homomorfismo $M_{B_1' B_2'}(f_1)$.

18.-**(Examen parcial álgebra lineal noviembre 2023)**

En $P_2(x)$, espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2, definimos la aplicación

f: $P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ tal que

1) Los polinomios con término independiente nulo se transforman en sí mismos.
2) Ker f = $\{a + bx + cx^2 \in P_2(x) / a = b = c\}$

Calcular:

a) La matriz asociada al homomorfismo f en la base canónica de $P_2(x)$
b) Si S=$\{\alpha - 2\beta + \gamma + (\alpha - 2\beta - \gamma)x + (\alpha - 2\beta)x^2\}$ es un subespacio de $P_2(x)$, *obtener una base de* $f(S)$

c) Clasificar el homomorfismo y razonar, analizando las dimensiones de los subespacios del apartado anterior, por qué tiene sentido el resultado obtenido.
d) Utilizando la matriz asociada a f en la base B=$\{1+x+x^2, 1+x, 1\}$, determinar las coordenadas de f$(1-3x+5x^2)$ en la base canónica.

19.- Sea B=$\{u_1=(1,1,0), u_2=(0,1,1), u_3=(1,0,1)\}$ una base de $\boldsymbol{R}^3$.

Encontrar la base dual de B

20.- Sea f un endomorfismo de R^4 definido por:

1) ker f = {(x,y,z,t)/ 2x+y-z-2t=0; z+2t=0}

2) f(0,0,0,1) = (2,0,0,0) y f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)

Resolver las siguientes cuestiones:

a) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de R^4
b) Hallar una base del subespacio f(V) siendo V≡ $\{(x,y,z,t)/\ x+y+z+t=0\}$
c) Calcular la matriz de f respecto de la base

B=$\{w_1=(1,1,0,0), w_2=(1,-1,0,0), w_3=(0,0,1,1), w_4=(0,0,1,-1)\}$

21.- Se consideran A, B y C tres espacios vectoriales, cuyas bases respectivas son $B_A=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ $B_B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ y $B_C=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3\}$ y dos homomorfismos:

f: A → B≡ $\begin{Bmatrix} f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_2) = \quad\quad \vec{u}_2 \\ f(\vec{e}_3) = \quad\quad 2\vec{u}_2 \end{Bmatrix}$

g: B → C≡ $\begin{Bmatrix} g(\vec{u}_1) = \vec{c}_1 - \vec{c}_2 + \overrightarrow{2c_3} \\ g(\vec{u}_2) = \quad \vec{c}_1 - \vec{c}_2 \\ \end{Bmatrix}$

Calcular:

a) Matriz del homomorfismo h=gof: A → C
b) Obtener $h^{-1}(1,1,1)$
c) Núcleo de h
d) h(V∩ W) siendo V=$\{(2\alpha+\beta, \alpha-\beta, \text{-}\ \alpha)\ \ con\ \alpha,\beta \in R\}$ y siendo W=$\{(x,y,z)\ con\ x-y+2z=0\}$

22.-**(Examen Parcial álgebra lineal noviembre2020)**

Consideramos los espacios vectoriales:

E=$\{ax + b/a, b \in R\}$; F={matrices simétricas de orden 2}; G=R^3

Definimos los homomorfismos f: E→ F tal que f(ax+b)= $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

y g: F→ G tal que g$\begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a, c, a + c)$

B={x,1}; B´={$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$}; B´´={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} son las bases canónicas de E, F y G. Calcular:

a) Matrices de los homomorfismos f, g y gof en las bases B, B´y B´´.
b) Calcular gof (V) siendo V={ax+a/ $a \in R$}
c) Obtener núcleo e imagen de la aplicación lineal g y razonar si es inyectiva y/o suprayectiva
d) Si en F consideramos la base B*= {$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$}, hallar las matrices de f, g y gof en las bases B, B* y B´´.

23.-**(Examen parcial álgebra lineal noviembre 2022)**

Si $S_2(R)$ es el espacio vectorial de las matrices 2x2 simétricas de coeficientes reales y $P_2(x)$ es el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2, y definimos la aplicación

f: $P_2(x) \rightarrow S_2(R)$ tal que f[p(x)] = $\begin{pmatrix} p´(0) & p´(1) \\ p´(1) & p´(-1) \end{pmatrix}$

Calcular:

e) Probar que f es una aplicación lineal y obtener la matriz del homomorfismo f respecto a las bases canónicas de $P_2(x)$ y $S_2(R)$;
f) Calcular las ecuaciones implícitas y dar una base del ker f en la base B

B=$\{x^2, (x-1)^2, (x+1)^2\}$

Si g: $S_2(R) \rightarrow P_1(x)$ *siendo* $P_1(x)$ es el espacio vectorial de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 1, tal que g($\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)=(a+d)+(a-d)x

Y definimos h=$g_o f$

g) Obtener *una base de* $h^{-1}(T)$ *siendo* $T = \{k + kx/\ k \neq 0\}$
h) Obtener la matriz del homomorfismo $M_{BB´}(f)$ si B´={(1,-2); (0,1)}
i) Obtener a partir de la matriz del apartado anterior h($3 - 2x + 6x^2$) y dar las coordenadas de esta imagen en la base canónica.