Análisis Matemático II

Tema 2

Límites y continuidad en funciones de varias variables

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Límite de funciones reales de dos variables

1.1 Concepto de límite de funciones reales de dos variables

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial, y sean $\overline{a} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L es el **límite** de $f(x, y)$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$, y se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

cuando para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si

$$0 < \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

entonces $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

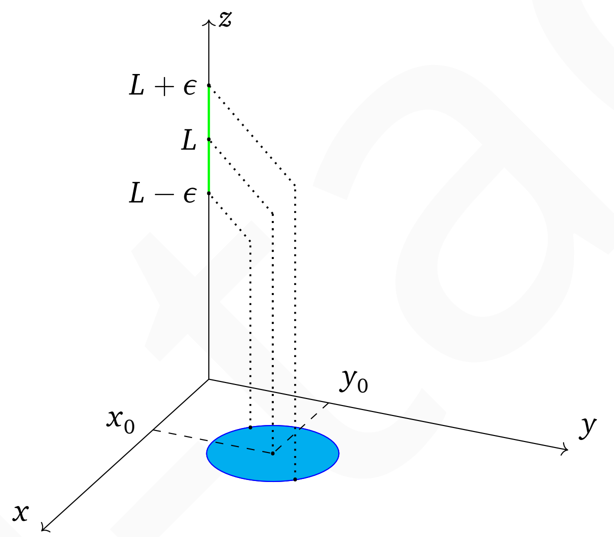

Figura 1: Representación gráfica de un vector geométrico.

1.2 Cálculo del límite según un subconjunto

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial, y sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $\overline{a} = (x_0, y_0) \in D$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que L es el límite de $f(x, y)$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$ según el subconjunto D, y se escribe

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = L$$

cuando para todo $(x, y) \in D$ y $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si

$$0 < \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

entonces $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

En el límite según un subconjunto, únicamente interesa el comportamiento de la función en los puntos de ese subconjunto.

Si los subconjuntos son rectas que pasan por el punto $\overline{a} = (x_0, y_0)$, es decir, de la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - y_0 = m(x - x_0)\}$$

entonces los límites se denominan **límites direccionales**.

Ejercicio 1

Calcula el límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ según la recta $y = 2x$.

Ejercicio 2

Calcula los límites direccionales de la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Existen otras posibilidades de límites según subconjuntos, por ejemplo según parábolas

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - y_0 = m(x - x_0)^2\}$$

Ejercicio 3

Calcula el límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ según la curva $y = x^2$.

Teorema

Si existe el límite de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$, y dicho límite vale L, entonces existe el límite según cualquier subconjunto $D \in \mathbb{R}^2$ en $\overline{a}$, y dicho límite vale L.

Una consecuencia de este teorema es que, si según dos subconjuntos D_1 y D_2 los límites son dos valores L_1 y L_2, siendo $L_1 \neq L_2$, entonces no existe el límite de la función $f(x, y)$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$.

1.3 Cálculo de los límites reiterados, iterados o sucesivos

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial, y sea $\overline{a} = (x_0, y_0)$. Los **límites reiterados**, **iterados** o **sucesivos** de $f(x, y)$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$ se definen, si existen, de la forma

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) \quad \text{y} \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

En los límites reiterados el objetivo es calcular el límite considerando una de las variables constante, realizando a continuación el límite en esa variable.

Ejercicio 4

Calcula los límites reiterados de $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Teorema

Si existe el límite de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$, y dicho límite vale L, entonces si existen los dos límites reiterados, su valor es L.

Sin embargo, es posible que no exista uno o los dos límites reiterados, pero que sin embargo sí que exista el límite de la función $f(x, y)$ en $\overline{a} = (x_0, y_0)$. Igualmente, es posible que existan los dos límites reiterados, y que sean iguales, pero que sin embargo no exista el límite de la función.

Ejercicio 5

Calcula los límites reiterados de $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y compara los resultados con el límite direccional.

1.4 Cálculo del límite utilizando coordenadas polares

A veces es más sencillo calcular los límites realizando un cambio a **coordenadas polares** con origen en el punto (x_0, y_0), utilizando para ello las relaciones

$$x = x_0 + r\cos(\theta) \qquad y = y_0 + r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

de manera que el cálculo del límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ pasa a ser $\lim\limits_{r\to 0} F(r, \theta)$.

Si por ejemplo la función $F(r, \theta)$ es tal que verifica $F(r, \theta) = g(r)h(r, \theta)$, donde $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$ y la función $h(r, \theta)$ está acotada, entonces se puede asegurar que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$.

Ejercicio 6

Calcula el límite de $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ en $(0, 0)$ utilizando coordenadas polares.

1.5 Cálculo de límites mediante infinitésimos

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que $f(\overline{x})$ es infinitésimo en $\overline{a} = (x_0, y_0)$ si $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = 0$.

Dadas dos funciones $f(\overline{x})$ y $g(\overline{x})$ que sean infinitésimos en $\overline{x} = \overline{a}$, se dice que $f(\overline{x})$ y $g(\overline{x})$ son **infinitésimos equivalentes** en $\overline{x} = \overline{a}$ si

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = 1$$

En ese caso se afirma que $f(\overline{x}) \sim g(\overline{x})$ si $\overline{x} \to \overline{a}$, y se puede sustituir un infinitésimo por otro equivalente al calcular el límite de un producto o un cociente.

Ejercicio 7

Calcula el límite de $f(x, y) = \dfrac{x^3\,\mathrm{sen}(y^2 - 4)}{(y + 2)\,\mathrm{sen}(x)}$ en $(x_0, y_0) = (0, -2)$ utilizando infinitésimos equivalentes.

2 Límite de funciones vectoriales

Dada la función vectorial $\overline{f} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y el vector $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$, el límite $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{L}$, donde el vector $\overline{L} = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, si y solo si $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f_i(\overline{x}) = l_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Aunque el análisis del límite de una función vectorial se puede realizar utilizando la definición de límite, en la práctica se realiza componente a componente, reduciendo el problema a analizar el límite de las funciones escalares f_i componentes, donde $f_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 8

Calcula el límite de $\overline{f}(x, y) = (x + y, x^2 + 1, y^3 - 3)$ en $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

3 Continuidad de funciones reales de variable vectorial

3.1 Continuidad en un valor

Una función real de variable vectorial $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es **continua** en el elemento $\overline{x} = \overline{a}$ cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

1) Existe $f(\overline{a})$.

2) Existe $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x})$.

3) $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.

En cuanto una de las anteriores condiciones no se cumple, se puede afirmar que la función $f(\overline{x})$ es discontinua en $\overline{x} = \overline{a}$.

Ejercicio 9

Determina si la función $f(x, y) = x^2 + y^3$ es continua en $(0, 0)$.

Ejercicio 10

Determina qué valor habría que asignar a $f(0, 0)$ para que la función $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ sea continua en $(x, y) = (0, 0)$.

3.2 Continuidad en un subconjunto

Una función real de variable vectorial $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continua en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ si es continua en cada elemento $\overline{x} \in A$.

3.3 Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g dos funciones reales de variable vectorial continuas en un elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$. Dichas funciones tienen las siguientes propiedades:

1) La suma $f(\overline{x}) \pm g(\overline{x})$ es una función continua en $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$.

2) El producto $f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})$ es una función continua en $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$.

3) El cociente $\dfrac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})}$ es una función continua en $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$, siempre que $g(\overline{a}) \neq 0$.

4 Continuidad de funciones vectoriales de variable vectorial

4.1 Continuidad en un valor

Una función vectorial de variable vectorial $\overline{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, tal que $\overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x}))$, es continua en el valor $\overline{x} = \overline{a}$ cuando se satisfacen estas condiciones:

1) Existe $\overline{f}(\overline{a})$.

2) Existe $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x})$.

3) $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{a})$.

En cuanto una de las anteriores condiciones no se cumple, se puede afirmar que la función $\overline{f}(\overline{x})$ es discontinua en $\overline{x} = \overline{a}$.

En resumen, una función vectorial de variable vectorial $\overline{f}$ es continua en $\overline{x} = \overline{a}$ si y solo si todas sus funciones componentes f_i son continuas en $\overline{a}$.

4.2 Continuidad en un subconjunto

Una función vectorial de variable vectorial $\overline{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ si es continua en cada elemento $\overline{x} \in A$.

5 Problemas

1) Demuestra que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ utilizando la definición $\epsilon - \delta$.

2) Calcula el límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x y^3}{x^2 + y^6}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mediante límites direccionales y también según el subconjunto $x = y^3$.

3) Calcula el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+1)x + (2y-1)y}{x - y}$ según las rectas $y = mx$ y según las curvas del tipo $y = x - \alpha x^2$, sacando las conclusiones apropiadas.

4) Calcula el límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x y - x + y}{x + y}$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mediante límites reiterados.

5) Calcula el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + x y + 2y^2}$ mediante el cambio a coordenadas polares.

6) Calcula el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\mathrm{Ln}(x^2+y^2)$ mediante el cambio a coordenadas polares.

7) Calcula el límite de $f(x,y) = \dfrac{(1-\cos(xy))\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+y^2}$ en $(x_0,y_0) = (0,0)$ utilizando infinitésimos equivalentes.

8) Calcula el límite de $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{\mathrm{sen}(x)\mathrm{Ln}(1+y)}$ en $(x_0,y_0) = (0,0)$ utilizando infinitésimos equivalentes.

9) Calcula el límite de la función $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ en el punto $(0,0)$ utilizando límites reiterados y direccionales, e igualmente mediante cambio a coordenadas polares.

10) Calcula el límite de la función $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$ en el punto $(0,0)$ utilizando coordenadas polares.

11) Dada la siguiente función $f(x,y)$, calcula sus límites reiterados en el punto $(0,0)$. ¿Qué conclusión se puede obtener sobre la existencia del límite en el punto $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{(2x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12) Calcula los límites reiterados de la función $f(x,y)$ y proporciona alguna conclusión sobre la existencia del límite en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} y\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) & x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o bien } y = 0 \end{cases}$$

13) Calcula, utilizando un método que permita afirmar la validez absoluta de la solución, el límite de la función $f(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{sen}(y)}{y\,\mathrm{sen}(x)}$ en el punto $(0,0)$.

14) Calcula, utilizando un método que permita afirmar la validez absoluta de la solución, el límite de la función $f(x,y) = \dfrac{3x-12}{x^2-16y^2}$ en el punto $(4,1)$.

15) Calcula el límite de la función $f(x,y) = \sqrt{x}\,\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{x^2-y^2}+\left|\dfrac{y}{x}\right|\right)$ en el origen.

16) Calcula el límite de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ en el punto $(0,0)$.

17) Calcula el límite de la función vectorial $\overline{f}(x,y) = \left(1-x\,\mathrm{sen}(y), 3x^2e^{-y^2}\right)$ en el origen.

18) Calcula el límite de la función $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ en el punto $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$.

19) Calcula el límite de la función $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ en el punto $(0,0,0)$.

20) Determina si la función $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

21) Estudia la continuidad en el punto $(0,0)$ de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) + y\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

22) Estudia en todo $\mathbb{R}^2$ la continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2+3x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

23) Determina si la función $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{4x^2+y^2-1} & \text{si } 4x^2+y^2 \neq 1 \text{ y } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si si } 4x^2+y^2 = 1 \text{ o } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

24) Comprueba si la función vectorial $\overline{h}(x,y,z) = \left(3e^{x+y+z}, \operatorname{sen}(x^2+y^2), 1+x+y+z\right)$ es continua en todo elemento de $\mathbb{R}^3$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. CLAGSA.
- Isaías Uña, Jesús San Martín y Venancio Tomeo. *Problemas resueltos de Cálculo en varias variables*. Ed. Paraninfo.
- Saturnino Salas, Einar Hille y Garret Edgen. *Cálculo de varias variables. Volumen II*. 4ª edición. Editorial Reverté.
- Carmen Anido y Martha Saboyá. *Bases matemáticas para el análisis económico*. Grupo Editorial Universitario.