Solución Problemas Números Complejos

Juan Rodríguez

September 7, 2025

Apuntes

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$
- $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd + adi + bci)$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$
- $x = e^{Ln(x)} \leftrightarrow x = Ln(e^x)$

1 Ejercicio 1

Calcular parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:
a) $z_1 = \frac{3-2i}{1+4i}$ b) $z_2 = \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}$ c) $z_3 = cos(i)$ d) $z_4 = sen(2+i)$

1.1 Solución

$$z_1 = \frac{3-2i}{1+4i} = \frac{3-2i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{3-8-12i-2i}{17} = \boxed{-\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i}$$

$$z_2 = \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} = \frac{1+2i}{-1+i} = \frac{1+2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1+2-1i-2i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

$$z_3 = cos(i) = \frac{e^{-1}+e}{2} = \frac{\frac{1}{e}+e}{2} = \boxed{\frac{1}{2e} + \frac{e}{2}}$$

$$z_4 = sen(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i} = -\frac{i}{2}(\frac{1}{e}\cdot(cos(2)+isen(2)) - e\cdot(cos(-2)+isen(-2)))$$

$$= -\frac{i}{2}(\frac{1}{e}\cdot(cos(2)+isen(2)) - e\cdot(cos(2)-isen(2))) = \frac{1}{2e}(sen(2)-icos(2)) - \frac{e}{2}(-sen(2)-icos(2))$$

$$= \boxed{(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2})sen(2) + i(-\frac{1}{2e}+\frac{e}{2})cos(2)}$$

2 Ejercicio 2

Calcular el modulo y argumento de:
a) $z_1 = 3^i$ b) $z_2 = i^i$ c) $z_3 = i^{3+i}$ d) $z_4 = (1+i)^{2+i}$

2.1 Solución

$$z_1 = 3^i = e^{Ln(3^i)} = e^{iLn(3)} = \boxed{r = 1, \sigma = Ln(3)}$$

$$z_2 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = \boxed{r = e^{-\frac{\pi}{2}}, \sigma = 0}$$

$$z_3 = i^{3+i} = i^3 \cdot i^i = (-i) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = \boxed{r = e^{-\frac{\pi}{2}}, \sigma = \frac{\pi}{2}}$$

$$z_4 = (1+i)^{2+i} = (1+i)^2 \cdot (1+i)^i = (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^2 \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^i = (2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) \cdot ((\sqrt{2})^i \cdot e^{-\frac{\pi}{4}})$$

$$= 2e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{iLn(\sqrt{2})} = 2e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + Ln(\sqrt{2}))} = \boxed{r = 2e^{-\frac{\pi}{4}}, \sigma = \frac{\pi}{2} + Ln(\sqrt{2})}$$

3 Ejercicio 3

Calcular las raíces cuartas de la unidad

3.1 Solución

$$z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} e^{i(\frac{2k\pi}{4})} || k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \rightarrow e^0 = \boxed{1}$$

$$k = 1 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}$$

$$k = 2 \rightarrow e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

$$k = 3 \rightarrow e^{i3\frac{\pi}{2}} = \boxed{-i}$$

4 Ejercicio 4

Calcular las raíces cúbicas de -8

4.1 Solución

$$z^3 = -8 \rightarrow \sqrt[3]{8} e^{i(\frac{\pi + 2k\pi}{3})} || k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \rightarrow 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$$

$$k = 1 \rightarrow 2e^{i\pi} = \boxed{-2}$$

$$k = 2 \rightarrow 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3})) = \boxed{1 - i\sqrt{3}}$$

5 Ejercicio 5

Determina la forma binómica de $e^{\sqrt{i}}$

5.1 Solución

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})}||k = 0,1$$

$$k = 0 \to e^{i\frac{\pi}{4}} = cos(\frac{\pi}{4}) + sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \to e^{i\frac{5\pi}{4}} = cos(\frac{5\pi}{4}) + sen(5\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Opción 1

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(cos(\frac{\sqrt{2}}{2})+isen(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \boxed{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) + ie^{\frac{\sqrt{2}}{2}}sen(\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

Opción 2

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}(cos(-\frac{\sqrt{2}}{2})+isen(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \boxed{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) - ie^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}sen(\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

6 Ejercicio 6

Expresa en forma binómica el número $(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^6$

6.1 Solución

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^6 = (e^{i\frac{5\pi}{6}})^6 = e^{i5\pi} = e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

7 Ejercicio 7

Calcula $\sqrt{-16-30i}$

7.1 Solución

$\sqrt{-16-30i} = (x+iy) \to (\sqrt{-16-30i})^2 = (x+iy)^2 \to -16-30i = x^2+2ixy-y^2 \to$

$$x^2 - y^2 = -16$$

$$2xy = -30 \to x = -\frac{15}{y}$$

$$(-\frac{15}{y})^2 - y^2 = -16 \to \frac{225}{y^2} - y^2 = -16 \to y^4 + 16y^2 - 225 = 0$$

$\xrightarrow{y^2 = t}$

$t^2 + 16t - 225 = 0 \rightarrow (t - 25)(t + 9) = 0 \rightarrow y = \pm 5, x = \mp 3$

$\boxed{z_1 = -3 + 5i, z_2 = 3 - 5i}$

8 Ejercicio 8

Determinar $m \in \mathbb{R}$ de modo que $(2e^{i\sqrt{2}})^m$ sea un número real negativo

8.1 Solución

$(2e^{i\sqrt{2}})^m = 2^m \cdot \underline{e^{im\sqrt{2}}}$

Nota: Nos fijamos en la parte imaginaria ya que 2^m siempre sera un valor positivo

$2^m(cos(m\sqrt{2}) + isen(m\sqrt{2}))$

Nota: Para que el número sea real negativo, el coseno debe ser negativo y el seno nulo. Por lo tanto, $\forall k \in \mathbb{Z} \rightarrow cos((2k + 1)\pi) = -1, sen((2k + 1)\pi) = 0$

$$m\sqrt{2} = (2k + 1)\pi \rightarrow \boxed{m = \frac{(2k + 1)\pi}{\sqrt{2}} || k \in \mathbb{Z}}$$

9 Ejercicio 9

Determinar los números complejos no nulos tal que su quinta potencia, z^5, sea igual a su conjugado, es decir, $\overline{z}$

9.1 Solución

$z = re^{i\sigma}, \overline{z} = z = re^{-i\sigma}$

$(re^{i\sigma})^5 = re^{-i\sigma} \rightarrow r^5 e^{i\sigma 5} = re^{-i\sigma}$

$r^5 = r \rightarrow r(r^4 - 1) = 0 \rightarrow r = 0X, r = -1X, r = 1\checkmark$

$e^{i\sigma 5} = e^{-i\sigma} \rightarrow 5\sigma = -\sigma + 2k\pi \rightarrow \sigma = \dfrac{k\pi}{3}$

$k = 0 \rightarrow z = 1, \boxed{1^5 = \overline{1}}$

$k = 1 \rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}}, \boxed{e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow (e^{i\frac{k\pi}{3}})^5 = e^{-i\frac{k\pi}{3}}}$

10 Ejercicio 10

Dado el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$. Calcula $P(i\sqrt{3})$ y $P(-i\sqrt{3})$. Resuelve a continuación la ecuación $P(z) = 0$

10.1 Solución

$P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 = 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = \boxed{0}$

$$\boxed{P(-i\sqrt{3}) = 0}$$

Nota: Si un número complejo es solución o raíz de un polinomio de coeficientes reales, su conjugado también lo es.

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z - (-i\sqrt{3})) \cdot Q(x) = (z^2 + 3) \cdot Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}{z^2 + 3} = ... = z^2 - 6z + 21 = ... = (z - (3 + 2\sqrt{3}i))(z - (3 - 2\sqrt{3}i))$$

$$P(z) = 0 \rightarrow \boxed{P(z) = (z - i\sqrt{3})(z - (-i\sqrt{3}))(z - (3 + 2\sqrt{3}i))(z - (3 - 2\sqrt{3}i))}$$

11 Ejercicio 11

Dado el número complejo $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, calcula z^2 en forma binómica. A continuación, expresa z^2 en forma exponencial y deduce la forma exponencial de z

11.1 Solución

$z^2 = (-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i(\sqrt{2 + \sqrt{2}})(\sqrt{2 - \sqrt{2}}) = \boxed{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4 \\ \sigma = arctg(\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$z^2 = 4e^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$z = \sqrt{4e^{\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2}} \text{ tal que } k = 0, 1$$

$$\begin{cases} k = 0 \quad 2e^{i\frac{7\pi}{8}} \text{ Correcto, segundo cuadrante} \\ k = 1 \quad 2e^{i\frac{15\pi}{8}} \text{ Incorrecto, cuarto cuadrante} \end{cases}$$

Nota: El número original estaba en el segundo cuadrante. Al elevar al cuadrado y depués deshacerlo, podemos introducir soluciones irreales.

Ejercicio 12

Obtén la forma exponencial del número complejo $(1 + i\sqrt{3})^{(1-i)}$.

Solución

Buscamos la *forma exponencial principal* $z = r\,e^{i\alpha}$ usando el logaritmo complejo principal:

$$\ln z = \ln r + i\alpha, \qquad (1-i)\,\ln(1+i\sqrt{3}) = \ln r + i\alpha.$$

Primero, escribimos $1 + i\sqrt{3}$ en forma exponencial:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{\,i\pi/3}.$$

Luego

$$\ln(1+i\sqrt{3}) = \ln\!\big(2e^{\,i\pi/3}\big) = \ln 2 + \frac{i\pi}{3}.$$

Multiplicamos por $(1-i)$:

$$(1-i)\,\ln(1+i\sqrt{3}) = (1-i)\left(\ln 2 + \frac{i\pi}{3}\right) = (1-i)\,\ln 2 + (1-i)i\,\frac{\pi}{3}.$$

Como $(1-i)i = i - i^2 = i + 1$, queda

$$(1-i)\,\ln 2 + \frac{(1+i)\pi}{3} = \underbrace{\left(\ln 2 + \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{parte real}} + i\,\underbrace{\left(\frac{\pi}{3} - \ln 2\right)}_{\text{parte imaginaria}}.$$

Por identificación,

$$\ln r = \ln 2 + \frac{\pi}{3}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3} - \ln 2.$$

Así,

$$r = e^{\,\ln 2 + \pi/3} = 2\,e^{\pi/3}.$$

El resultado es:

$$\boxed{z = (1+i\sqrt{3})^{(1-i)} \;=\; r\,e^{i\alpha} \;=\; 2\,e^{\pi/3}\;e^{\,i\left(\frac{\pi}{3} - \ln 2\right)}}$$

Ejercicio 13

Calcula la parte real e imaginaria del número complejo

$$z = \cos\!\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right).$$

Solución

Usamos la fórmula del coseno de suma:

$$z = cos(\frac{\pi}{6})cos(2i) - sen(\frac{\pi}{6})sen(2i)$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2} - e^2}{2i}$$

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(e^2 + e^{-2}) + \frac{e^{-2} - e^2}{4}\,i}$$

Ejercicio 14

Obtén la forma binómica del número complejo

$$z = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^5.$$

Solución

Primero expresamos cada fracción en forma exponencial:

- Para $\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$:

  $$\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2\,e^{-i\pi/6}}{2\,e^{i\pi/6}} = e^{-i\pi/3}.$$

  Entonces

  $$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^4 = \left(e^{-i\pi/3}\right)^4 = e^{-4i\pi/3}.$$

- Para $\dfrac{1 + i}{1 - i}$:

  $$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}.$$

  Entonces

  $$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^5 = \left(e^{i\pi/2}\right)^5 = e^{5i\pi/2}.$$

Multiplicando ambos resultados:

$$z = e^{-4i\pi/3} \cdot e^{5i\pi/2} = e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

$$\boxed{z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

Ejercicio 15

Enunciado. Resuelve la ecuación

$$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0$$

en el cuerpo de los números complejos, dando las soluciones en forma binómica o exponencial.

Desarrollo paso a paso

1. **Búsqueda de una raíz sencilla.** Probamos con $z = -i$:

   $$(-i)^3 + (-1+i)(-i)^2 + (1-i)(-i) + i = i + (1-i) + (-i-1) + i = 0.$$

   Luego $z = -i$ es raíz.

2. **División sintética por $(z+i)$.** Con coeficientes 1, $(-1+i)$, $(1-i)$, i se obtiene:

   $$(z+i)\big(z^2 - z + 1\big) = z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i.$$

   Por tanto,

   $$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = (z+i)\,(z^2 - z + 1).$$

3. **Resolución del trinomio cuadrático.**

   $$z^2 - z + 1 = 0 \implies z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Soluciones

En forma binómica:

$$\boxed{z_1 = -i, \qquad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

En forma exponencial:

$$-i = e^{-i\pi/2}, \qquad \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}.$$

Ejercicio 16

Dado

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}},$$

completeta:

a) Forma binómica y exponencial

Escribimos numerador y denominador en forma polar:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}, \qquad 1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-\,i\pi/3}.$$

Entonces

$$z = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-\,i\pi/3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

b) Prueba de que $z^4 = z$

$$z^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z.$$

c) Otras tres raíces de cuarto grado de z

Buscamos w tal que $w^4 = z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Escribimos

$$w = e^{i\alpha}, \qquad 4\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Por tanto,

$$\boxed{w \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{7\pi}{6}},\ e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}.}$$

(La segunda coincide con $z^{1/4}$ en otra rama).

Ejercicio 17

Enunciado. Resuelve en $\mathbb{C}$:

$$z^3 + (5 + 3i)z^2 + (4 + 7i)z = 0,$$

y, obtenidas las soluciones, da la forma binómica del inverso multiplicativo de cada una.

Desarrollo paso a paso

Sacamos factor común z:

$$z\Big(z^2 + (5+3i)z + (4+7i)\Big) = 0.$$

Luego una solución es $z_1 = 0$ y las otras satisfacen el cuadrático

$$z^2 + (5+3i)z + (4+7i) = 0.$$

Discriminante:

$$\Delta = (5+3i)^2 - 4(4+7i) = (25+30i-9) - (16+28i) = 2i.$$

Raíz cuadrada del discriminante:

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = 1+i, \qquad -\sqrt{2i} = -(1+i) = -1-i.$$

Por la fórmula cuadrática,

$$z = \frac{-(5+3i) \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{-5-3i \pm (1+i)}{2}.$$

Así,

$$z_2 = \frac{-5-3i+(1+i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i, \qquad z_3 = \frac{-5-3i-(1+i)}{2} = \frac{-6-4i}{2} = -3-2i.$$

Soluciones

$$\boxed{z_1 = 0, \qquad z_2 = -2-i, \qquad z_3 = -3-2i}.$$

Inversos multiplicativos

Para $z \neq 0$:

$$(-2-i)^{-1} = \frac{1}{-2-i} \cdot \frac{-2+i}{-2+i} = \frac{-2+i}{(-2)^2+1^2} = \frac{-2+i}{5},$$

$$(-3-2i)^{-1} = \frac{1}{-3-2i} \cdot \frac{-3+2i}{-3+2i} = \frac{-3+2i}{(-3)^2+2^2} = \frac{-3+2i}{13}.$$

Para $z_1 = 0$ el inverso multiplicativo *no existe.*

$$\boxed{(-2-i)^{-1} = \frac{-2+i}{5}, \qquad (-3-2i)^{-1} = \frac{-3+2i}{13}, \qquad 0^{-1} \text{ no existe}}.$$

Ejercicio 18

Enunciado. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Cramer

Determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-i & 4+2i \\ 4+2i & -2-3i \end{vmatrix} = (3-i)(-2-3i) - (4+2i)^2 = -21-23i.$$

Cálculo de x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2+6i & 4+2i \\ 5+4i & -2-3i \end{vmatrix} = (2+6i)(-2-3i) - (4+2i)(5+4i) = 2-44i.$$

Entonces

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2-44i}{-21-23i} = \frac{(2-44i)(-21+23i)}{(-21)^2+23^2} = \frac{970+970i}{970} = 1+i.$$

Cálculo de y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3-i & 2+6i \\ 4+2i & 5+4i \end{vmatrix} = (3-i)(5+4i) - (2+6i)(4+2i) = 23-21i.$$

Luego

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{23-21i}{-21-23i} = \frac{(23-21i)(-21+23i)}{(-21)^2+23^2} = \frac{970\,i}{970} = i.$$

Solución

$$\boxed{x = 1+i, \qquad y = i}.$$

Ejercicio 19

Enunciado. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$\sin(z) = 5.$$

Desarrollo paso a paso

Sea $z = \alpha + \ell\, i$. Usamos

$$\sin(\alpha + \ell i) = \sin\alpha\ \cosh\ell\ +\ i\,\cos\alpha\ \sinh\ell,$$

o, de forma equivalente con exponenciales,

$$\cosh\ell = \frac{e^{-\ell}+e^{\ell}}{2}, \qquad \sinh\ell = \frac{e^{-\ell}-e^{\ell}}{2}.$$

Entonces

$$\sin z = \sin\alpha\ \frac{e^{-\ell}+e^{\ell}}{2}\ +\ \cos\alpha\ \frac{e^{-\ell}-e^{\ell}}{2}\, i.$$

Imponiendo $\sin z = 5$:

$$\begin{cases} \sin\alpha \, \dfrac{e^{-\ell}+e^{\ell}}{2} = 5, \\ \cos\alpha \, \dfrac{e^{-\ell}-e^{\ell}}{2} = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación, o bien $\cos\alpha = 0$ o bien $e^{-\ell} - e^{\ell} = 0$.

- $\underline{e^{-\ell} - e^{\ell} = 0} \Rightarrow e^{\ell} = e^{-\ell} \Rightarrow \ell = 0$. Entonces la primera ecuación da $\sin\alpha = 5$, imposible en $\mathbb{R}$. Se descarta.
- $\underline{\cos\alpha = 0} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
  - Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $\sin\alpha = 1$ y

    $$\frac{e^{-\ell}+e^{\ell}}{2} = 5 \iff e^{\ell} + e^{-\ell} = 10.$$

    Con $t = e^{\ell} > 0$:

    $$t^2 - 10t + 1 = 0 \implies t = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

    Así,

    $$\ell = \ln\bigl(5 \pm 2\sqrt{6}\bigr).$$

  - Si $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $\sin\alpha = -1$ y exigiría

    $$-\frac{e^{-\ell}+e^{\ell}}{2} = 5 \iff e^{\ell} + e^{-\ell} = -10,$$

    que es imposible (suma de positivos). Se descarta.

Solución

Por tanto, las soluciones son

$$\boxed{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; + \; i\,\ln\bigl(5 \pm 2\sqrt{6}\bigr), \quad k \in \mathbb{Z}}.$$