Problema 1 (primer parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:53

Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{1+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, completa los siguientes apartados:

a) [0.75 puntos] Estudia la continuidad de $f(x,y)$ en el origen.

b) [0.75 puntos] Calcula las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el origen utilizando la fórmula del límite del cociente incremental.

c) [1.0 puntos] Estudia la continuidad tanto de $f_x(x,y)$ como de $f_y(x,y)$ en el origen.

d) [1.0 puntos] Estudia la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el origen.

a) Vamos a comprobar las tres condiciones:

1) $f(0,0)=0$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{1+y^2}\right) = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$= \left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{\pi}{1+y^2}\right)\right)\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right) =$

$= \cos(\pi)\cdot\lim\limits_{r\to0} \dfrac{r^{\cancel{3}}\cos^3(\theta)}{\cancel{r^2}} = -\lim r\cdot\cos^3(\theta) = 0 \ \forall\theta\in[0,2\pi]$

3) $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Luego $f(x,y)$ es continua a $(0,0)$.

b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\frac{h^3}{h^2+0^2}\cos\left(\frac{\pi}{1+0^2}\right)-0}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to0} \dfrac{\cancel{h^3}\cdot\cos(\pi)}{\cancel{h^3}} = \boxed{-1}$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to0} \dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to0} \dfrac{\frac{0^3}{0^2+k^2}\cos\left(\frac{\pi}{1+k^2}\right)}{k} =$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0\cdot \cos(\pi)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = \left.0\right]$$

c) $$f_x(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2x\cdot x^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{1+y^2}\right) =$$

$$= \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{1+y^2}\right) = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{\pi}{1+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^4}\cos^2(\theta)(\cos^2(\theta)+3\operatorname{sen}^2(\theta))}{\cancel{r^4}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0}(1+2\operatorname{sen}^2(\theta))\cdot\cos^2(\theta)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\right) = g(\theta) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_x(x,y)$ no es continua a $(0,0)$.

$$f_y(x,y) = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+y^2}\right) - \frac{x^3}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{-2y\pi}{(1+y^2)^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{-2\cancel{r^3}\cos^3\theta\,\cancel{r}\operatorname{sen}(\theta)}{\cancel{r^4}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\right) + \frac{r^{\cancel{3}}\cos^3(\theta)\cdot 2\cdot r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\pi}{\cancel{r^2}\cdot(1+r^2\operatorname{sen}^2(\theta))^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}\right) =$$

$$= 2\operatorname{sen}(\theta)\cos^3(\theta) + 0 = g(\theta) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_y(x,y)$ no es continua a $(0,0)$

d) La función es diferenciable si se cumple que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot h - f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+k^2}\right) - 0 + h - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{1+k^2}\right) + h^3 + hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^3}\cos^3(\theta)\left(\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2 sen^2(\theta)}\right) + 1\right) + \cancel{r}\cdot\cos(\theta)\cancel{r^2}\, sen^2(\theta)}{\cancel{(r^2)^{3/2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos^3(\theta)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{1+r^2 sen^2(\theta)}\right) - 1\right) + sen^2(\theta)\cdot\cos(\theta) = g(\theta) \Longrightarrow$$

Luego la función no es diferenciable.

Problema 2 (primer parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:53

Halla todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ en los que el plano tangente a la gráfica de la superficie $z = xye^{-x^2-y^2}$ es paralelo al plano $z = 0$.

La condición que debe cumplirse para que el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x, y, f(x,y))$ sea paralelo al plano $z=0$ es que el vector normal al plano tangente sea proporcional al vector $(0,0,1)$.

Por otra parte, sabemos que si $F(x,y,z) = xye^{-x^2-y^2} - z$, entonces $\nabla F(x,y,z)$ es un vector normal a la superficie.

$$\nabla F(x,y,z) = \left(F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\right) =$$

$$= \left(y \cdot e^{-x^2-y^2} - 2x^2 y e^{-x^2-y^2}, x e^{-x^2-y^2} - 2xy^2 e^{-x^2-y^2}, -1\right) =$$

$$= \left(y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}, x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, -1\right)$$

Necesitamos por lo tanto que se cumple lo siguiente:

$$y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \implies \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \implies \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, los puntos pedidos son:

$$\boxed{(0,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2e}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2e}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2e}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2e}\right)}$$

<u>Nota</u>: En este problema, puesto que el plano es "horizontal", los puntos de tangencia también se podrían hallar buscando los máximos y mínimos de $z = f(x,y)$.

Problema 3 (primer parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:54

Sea la función $\overline{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $\overline{F}(x,y,z) = \dfrac{\overline{r}}{r}$, donde con la notación habitual se tiene que $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Con esos datos, calcula $\nabla(\nabla\cdot\overline{F})$ y expresa el resultado en términos de $\overline{r}$ y r.

$$\overline{F}(x,y,z) = \frac{\overline{r}}{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla\cdot\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(\cancel{x^2}+y^2+z^2) - \cancel{x^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(x^2+\cancel{y^2}+z^2) - \cancel{y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(x^2+y^2+\cancel{z^2}) - \cancel{z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{r}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\overline{F}) = \nabla\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \nabla\left(2\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) =$$

$$= \left(-2x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, -2y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, -2z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \boxed{-\frac{2\overline{r}}{r^3}}$$

Problema 4 (primer parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:55

Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{1+x^2+y^2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{1-\sqrt{1+r^2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)}{\left(1-\sqrt{1+r^2}\right)\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)}{\cancel{1}-(\cancel{1}+r^2)} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\left(1+\sqrt{1+r^2}\right)}{-\cancel{r^2}} = \boxed{-2}$$

Problema 1 (segundo parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 12:34

Dada la elipse centrada en el origen cuya expresión es $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$ calcula utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange los extremos de los ejes mayor y menor. Es necesario comprobar que los candidatos son máximos o mínimos con la matriz hessiana orlada.

Nota: Puesto que la elipse está centrada en el origen, dichos extremos son los puntos de la elipse que están más y menos alejados del origen, respectivamente.

La función a maximizar y minimizar es $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, pero en su lugar utilizaremos $f(x,y) = x^2+y^2$.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2+y^2+\lambda(3x^2-2xy+3y^2-4)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 2x + \lambda(6x-2y) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2x}{6x-2y}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda(-2x+6y) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2y}{-2x+6y}$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = 3x^2-2xy+3y^2-4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{6x-2y} = \frac{-2y}{-2x+6y} \Rightarrow \cancel{-\frac{1}{3}} + \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \cancel{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm x$$

$\boxed{y=x}$ $3x^2-2xy+3y^2-4=0 \Rightarrow 6x^2-2x^2=4 \Rightarrow x=\pm 1$

$\boxed{y=-x}$ $3x^2-2xy+3y^2-4=0 \Rightarrow 6x^2+2x^2=4 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Luego los candidatos son $(1,1)$, $(-1,-1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lambda=-\frac{1}{2}$ $\quad\lambda=-\frac{1}{2}$ $\quad\lambda=-\frac{1}{4}$ $\quad\lambda=-\frac{1}{4}$

$$\tilde{H}_f(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6x-2y & 6y-2x \\ 6x-2y & 2+6\lambda & -2\lambda \\ 6y-2x & -2\lambda & 2+6\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(1,1)} \quad |\tilde{H}_3(1,1)| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

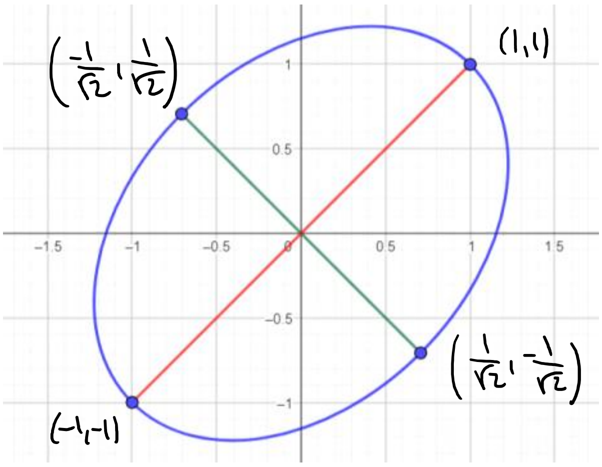
$$\boxed{(-1,-1)} \quad |\tilde{H}_3(-1,-1)| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

$\Rightarrow$ $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son máximos relativos condicionados

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \left|\tilde{H}_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-8}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -64 < 0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left|\tilde{H}_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-8}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \\ \frac{-8}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -64 < 0$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ son $\Rightarrow$ mínimos relativos condicionados



Problema 2 (segundo parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:55

Dada la expresión $x^2y + y^2z + xz^2 = 2$, completa los siguientes apartados:

a) [0.5 puntos] Estudia la aplicabilidad del teorema de la función implícita a la función $z = f(x, y)$ definida mediante la expresión. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^3$ se puede aplicar el teorema?

b) [3.0 puntos] Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado $P_2(x, y)$ de $z = f(x, y)$ desarrollado a partir del punto $(2, 0, 1)$.

a) $F(x,y,z) = x^2y + y^2z + xz^2 - 2$

1) El teorema se puede aplicar como mucho a los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^2y + y^2z + xz^2 - 2 = 0$.

2) $F(x,y,z)$ es una función polinómica, por lo que es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$

$F_x(x,y,z) = 2xy + z^2$

$F_y(x,y,z) = x^2 + 2yz$

$F_z(x,y,z) = y^2 + 2xz$

3) Necesitamos $F_z(x,y,z) \neq 0 \Rightarrow y^2 + 2xz \neq 0$

Luego el Teorema se puede aplicar a los puntos del conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y + y^2z + xz^2 = 2,\ y^2 + 2xz \neq 0\}$

b) $$z_x\Big|_{(x,y,z)} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{-(2xy+z^2)}{y^2+2xz} = \frac{-2xy - z^2}{y^2+2xz} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{xx}\Big|_{(x,y,z)} = \dfrac{(-2y - 2zz_x)(y^2+2xz) + (2z + 2xz_x)(2xy+z^2)}{(y^2+2xz)^2} \\[2ex] z_{xy}\Big|_{(x,y,z)} = \dfrac{(-2x - 2zz_y)(y^2+2xz) + (2y + 2xz_y)(2xy+z^2)}{(y^2+2xz)^2} \end{cases}$$

$$z_y\Big]_{(x,y,z)} = \frac{-F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{(x^2+2yz)}{y^2+2xz} = \frac{-x^2-2yz}{y^2+2xz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} z_{yx}\Big]_{(x,y,z)} = \dfrac{(-2x-2yz_x)(y^2+2xz) + (2z+2xz_x)(x^2+2yz)}{(y^2+2xz)^2} \\ \\ z_{yy}\Big]_{(x,y,z)} = \dfrac{(-2z-2yz_y)(y^2+2xz)+(2y+2xz_y)(x^2+2yz)}{(y^2+2xz)^2} \end{array} \right.$$

$$z_x\Big]_{(10,0,1)} = -\frac{1}{4} \qquad\qquad z_y\Big]_{(10,0,1)} = -1$$

$$z_{xx}\Big]_{(10,0,1)} = \frac{-2\cdot 1\cdot(-1/4) + (2\cdot 1 + 2\cdot 2(-1/4))\cdot 1}{(2\cdot 2\cdot 1)^2} = \frac{3}{16}$$

$$z_{xy}\Big]_{(10,0,1)} = \frac{(-2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-1))(2\cdot 2\cdot 1) + (2\cdot 2\cdot(-1))\cdot 1^2}{(2\cdot 2\cdot 1)^2} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$z_{yx}\Big]_{(10,0,1)} = \frac{(-2\cdot 2)(2\cdot 2\cdot 1) + (2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-1/4))\cdot 2^2}{(2\cdot 2\cdot 1)^2} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$z_{yy}\Big]_{(10,0,1)} = \frac{(-2\cdot 1)(2\cdot 2\cdot 1) + (2\cdot 2\cdot(-1))\cdot 2^2}{(2\cdot 2\cdot 1)^2} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

$$P_2(x,y) = z(2,0) + \left(z_x(2,0)(x-2) + z_y(2,0)(y-0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(z_{xx}(2,0)(x-2)^2 + z_{xy}(2,0)(x-2)\cdot y + z_{yx}(2,0)(x-2)y + z_{yy}(2,0)y^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(x-2) - y + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)y - \frac{3}{2}y^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(x-2) - y + \frac{3}{32}(x-2)^2 - \frac{3}{4}(x-2)y - \frac{3}{4}y^2 \; /$$

Problema 3 (segundo parcial)

viernes, 24 de mayo de 2024 10:57

Dada la función $\overline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $\overline{f}(x,y,z) = (x+y+e^z, x+z+e^{2y}, y+z+e^{3x})$, completa los siguientes apartados:

a) [0.5 puntos] Estudia la aplicabilidad del teorema de la función inversa a la función $f(x,y,z)$ en el punto $(x,y,z) = (0,0,0)$ y su imagen $(u,v,w) = (1,1,1)$.

b) [2.75 puntos] Si consideramos que $g(u,v,w) = (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w))$ es la función inversa de $f(x,y,z)$, obtén el gradiente de las funciones $g_1(u,v,w)$, $g_2(u,v,w)$ y $g_3(u,v,w)$ en el punto $(u,v,w) = (1,1,1)$.

a) $\overline{f}(x,y,z) = (x+y+e^z, x+z+e^{2y}, y+z+e^{3x})$

1) $f(0,0,0) = (1,1,1) \Rightarrow \overline{a} = (0,0,0), \ \overline{b} = (1,1,1)$

2) $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ y $f_3(x,y,z)$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}^3$, ya que se trata de la suma de funciones polinómicas y exponenciales.

$$f_1(x,y,z) = x+y+e^z \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_{1x}(x,y,z) = 1 \\ f_{1y}(x,y,z) = 1 \\ f_{1z}(x,y,z) = e^z \end{array} \right.$$

$$f_2(x,y,z) = x+z+e^{2y} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_{2x}(x,y,z) = 1 \\ f_{2y}(x,y,z) = 2e^{2y} \\ f_{2z}(x,y,z) = 1 \end{array} \right.$$

$$f_3(x,y,z) = y+z+e^{3x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f_{3x}(x,y,z) = 3e^{3x} \\ f_{3y}(x,y,z) = 1 \\ f_{3z}(x,y,z) = 1 \end{array} \right.$$

3)

$$|J_{\overline{f}}(x,y,z)| = \begin{vmatrix} f_{1x}(x,y,z) & f_{1y}(x,y,z) & f_{1z}(x,y,z) \\ f_{2x}(x,y,z) & f_{2y}(x,y,z) & f_{2z}(x,y,z) \\ f_{3x}(x,y,z) & f_{3y}(x,y,z) & f_{3z}(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 1 & 2e^{2y} & 1 \\ 3e^{3x} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |J_{\bar f}(0,0,0)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+1+3) - (6+1+1) = -2 \neq 0$$

luego existe inversa local $\bar g = \bar f^{-1}(u,v,w)$ en un entorno de $\bar b = (1,1,1) \in B$ que lo relaciona con $\bar a = (0,0,0) \in A$

$$J_{\bar g}(1,1,1) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_1}{\partial v}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_1}{\partial w}\right]_{(1,1,1)} \\ \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_2}{\partial v}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_2}{\partial w}\right]_{(1,1,1)} \\ \left.\frac{\partial g_3}{\partial u}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_3}{\partial v}\right]_{(1,1,1)} & \left.\frac{\partial g_3}{\partial w}\right]_{(1,1,1)} \end{pmatrix}$$

$$J_{\bar g}(1,1,1) = \left(J_{\bar f}(0,0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla \bar g_1(1,1,1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ \nabla \bar g_2(1,1,1) = (-1, 1, 0),\ \nabla \bar g_3(1,1,1) = (5/2, -1, -1/2)}$$