TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	02/07/2024	
CURSO	2º	HORA	15:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1

Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ completa los siguientes apartados:

a) Estudia la continuidad en <u>todo</u> $\mathbb{R}^2$.

b) Calcula las derivadas parciales de $f(x,y)$ en todo punto de su dominio donde existan dichas derivadas, proporcionando la expresión más simplificada posible (en caso de conjuntos abiertos) o el valor (en caso de los puntos frontera) de la derivada.

c) Proporciona un resultado numérico para $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.

Solución:

a) En $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, el denominador solo se puede anular si tanto x^2y^2 como $(x-y)^2$ se anulan. El primer elemento se anula si $x=0$ o bien $y=0$, pero en esas situaciones el segundo elemento solo se anularía si además $y=0$ o bien $x=0$, por lo que el denominador no se puede anular en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Como la función $f(x)$ es el cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ y el denominador no se anula en dicho conjunto, se puede afirmar que la función es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Analizaremos ahora la continuidad en $x=0$:

1) $f(0,0)=0$

2) Calculamos el límite de la función cuando (x,y) tiende a $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\theta)r^2\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)r^2\operatorname{sen}^2(\theta)+(r\cos(\theta)-r\operatorname{sen}(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}r^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cancel{r^2}r^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)+\cancel{r^2}\,(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta)+(\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta))^2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)\neq 0 \\ \dfrac{0}{0} & \text{si} \quad \cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)=0 \end{cases}$$

El ángulo asociado a la igualdad $\operatorname{sen}(\theta) = \cos(\theta)$ es $\theta = \pi/4$, por lo que debemos buscar una trayectoria con ese ángulo, por ejemplo $y = x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^2x^2+(x-x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = 1$$

Puesto que hay trayectorias donde el límite es distinto, no existe el límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$, con lo que $f(x,y)$ no es continua en $x=0$, y por ello solo es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) Estudiamos la derivabilidad por separado en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y en el origen:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^2\left(x^2y^2+(x-y)^2\right) - x^2y^2\left(2xy^2+2(x-y)\right)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3y^4} + 2xy^2(x-y)^2 - \cancel{2x^3y^4} - 2x^2y^2(x-y)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2xy^2(x-y)\left((\cancel{x}-y)-\cancel{x}\right)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)} = \boxed{\frac{-2xy^3(x-y)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x^2y\left(x^2y^2+(x-y)^2\right) - x^2y^2\left(2x^2y-2(x-y)\right)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^4y^3} + 2x^2y(x-y)^2 - \cancel{2x^4y^3} + 2x^2y^2(x-y)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^2y(x-y)\left((x-\cancel{y})+\cancel{y}\right)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)} = \boxed{\frac{2x^3y(x-y)}{\left(x^2y^2+(x-y)^2\right)^2}}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2\cdot 0^2}{h^2\cdot 0^2+(h-0)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0^2\cdot k^2}{0^2\cdot k^2+(0-k)^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \boxed{0}$$

Luego existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en todo $\mathbb{R}^2$.

c) $f_x(2,1) = \dfrac{-2\cdot 2\cdot 1\cdot(2-1)}{\left(4\cdot 1+(2-1)^2\right)^2} = \boxed{-\dfrac{4}{25}}$ $\qquad f_y(2,1) = \dfrac{2\cdot 8\cdot 1\cdot(2-1)}{\left(4\cdot 1+(2-1)^2\right)^2} = \boxed{\dfrac{16}{25}}$

PROBLEMA 2

Determina el valor de las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ en el punto $(1, 2, -1)$ sea máxima en la dirección del vector $(0, 0, 1)$ y tenga como valor 64.

Solución:

La función $f(x, y, z)$ es claramente diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ por tratarse de una función polinómica.

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2 \implies \nabla f(x, y, z) = \left(ay^2 + 3cx^2z^2, 2axy + bz, by + 2cx^3z\right)$$

Por otra parte, el vector $\overline{v} = (0, 0, 1)$ ya es unitario, por lo que $\overline{u} = \overline{v}$.

- Para que la derivada direccional en el punto $(1, 2, -1)$ en la dirección de $\overline{u}$ sea máxima, el gradiente debe ser proporcional al vector $(0, 0, 1)$:

$$\nabla f(x, y, z) = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) = \alpha(0, 0, 1)$$

- Además, necesitamos que el valor de la derivada en esa dirección sea igual a 64:

$$D_{\overline{u}}\left[f(x, y, z)\right] = \nabla f(1, 2, -1) \cdot \overline{u} = (4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c) \cdot (0, 0, 1) = 2b - 2c = 64$$

Con esta información, podemos crear un sistema de ecuaciones y obtener los valores de los coeficientes:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 4a & & & + & 3c & = & 0 \\ 4a & - & b & & & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 32 \end{array}\right\} \implies \boxed{a = 6 \quad | \quad b = 24 \quad | \quad c = -8}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	02/07/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 3

Dada la ecuación $\text{Ln}(z) + x^2 - y^2 + z = 1$, completa los siguientes apartados:

a) Demuestra que la ecuación anterior define a $z = f(x, y)$ como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, 1, 1)$.

b) Calcula el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 1)$

c) Calcula $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en el punto $(3, 2, 1)$.

Solución:

a) $F(x, y, z) = \text{Ln}(z) + x^2 - y^2 + z - 1$

1) $F(1, 1, 1) = 0$
2) $F(x, y, z)$ es diferenciable $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z > 0$, por lo que es diferenciable en el punto $(1, 1, 1)$.

$F_x(x, y, z) = 2x$

$F_y(x, y, z) = -2y$

$F_z(x, y, z) = \dfrac{1}{z} + 1$

3) $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$

Luego se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de la función implícita, con lo que podemos expresar $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(1, 1)$.

b) El plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f_x(x,y) = z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{-2x}{\frac{1}{z}+1} = \frac{-2xz}{z+1} \Longrightarrow f_x(1,1) = -1$$

$$f_y(x,y) = z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{2y}{\frac{1}{z}+1} = \frac{2yz}{z+1} \Longrightarrow f_y(1,1) = 1$$

El plano pedido es:

$$z = 1 - (x-1) + (y-1) \Longrightarrow \boxed{x - y + z - 1 = 0}$$

c) Calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{(-2z - 2xz_x)(z+1) - (-2xzz_x)}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{-2z^2 - 2z - \cancel{2xzz_x} - 2xz_x + \cancel{2xzz_x}}{(z+1)^2} = \frac{-2(z^2 + z + xz_x)}{(z+1)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{-2xz_y(z+1) - z_y(-2xz)}{(z+1)^2} = \frac{\cancel{-2xzz_y} - 2xz_y + \cancel{2xzz_y}}{(z+1)^2} = \frac{-2xz_y}{(z+1)^2}$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{2yz_x(z+1) - z_x(2yz)}{(z+1)^2} = \frac{\cancel{2yzz_x} + 2yz_x - \cancel{2yzz_y}}{(z+1)^1} = \frac{2yz_x}{(z+1)^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{(2z + 2yz_y)(z+1) - z_y 2yz}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{2z^2 + 2z + \cancel{2yzz_y} + 2yz_y - \cancel{2yzz_y}}{(z+1)^2} = \frac{2(z^2 + z + yz_y)}{(z+1)^2}$$

$$z_x\big|_{(3,2,1)} = -3$$

$$z_y\big|_{(3,2,1)} = 2$$

$$z_{xx}\big|_{(3,2,1)} = \frac{-2(1+1-9)}{4} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

$$z_{xy}\big|_{(3,2,1)} = \frac{-2\cdot 3\cdot 2}{4} = \boxed{-3}$$

$$z_{yx}\big|_{(3,2,1)} = \frac{2\cdot 2\cdot(-3)}{4} = \boxed{-3}$$

$$z_{yy}\big|_{(3,2,1)} = \frac{2(1+1+4)}{4} = \boxed{3}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	02/07/2024	U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL
CURSO	2º	**HORA**	15:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 4

Dada la función vectorial de variable vectorial $\overline{f}(x,y)=(x^3e^y+y-2x, 2xy+2x)$, completa los siguientes apartados:

a) Demuestra que función admite inversa local diferenciable en un entorno de $(x,y)=(1,0)$.

b) Proporciona un valor aproximado de $\overline{f}^{-1}(-1.2, 2.1)$. Para ello, determina los polinomios de Taylor $P_1(u,v)$ y $P_2(u,v)$ ambos de primer orden de las funciones $g_1(u,v)$ y $g_2(u,v)$ centrados en el elemento $(u,v)=(-1,2)$ y realiza la aproximación $\overline{f}^{-1}(-1.2,-2.1)\approx(P_1(-1.2,2.1),P_2(-1.2,2.1))$. Se recuerda que $\overline{g}(u,v)=(g_1(u,v),g_2(u,v))=\overline{f}^{-1}(x,y)$.

Solución:

a) $\overline{f}(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))=(x^3e^y+y-2x,2xy+2x)$

1) $\overline{f}(1,0)=(-1,2) \implies \overline{a}=(1,0), \quad \overline{b}=(-1,2)$

2) $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$, ya que se trata de la suma y producto de funciones polinómicas y exponenciales.

$$f_1(x,y)=x^3e^y+y-2x \implies \begin{cases} f_{1x}(x,y)=3x^2e^y-2 \\ f_{1y}(x,y)=x^3e^y+1 \end{cases}$$

$$f_2(x,y)=2xy+2x \implies \begin{cases} f_{2x}(x,y)=2y+2 \\ f_{2y}(x,y)=2x \end{cases}$$

3) Necesitamos calcular el jacobiano de $\overline{f}(x,y)$.

$$\left|J_{\overline{f}}(x,y)\right|=\begin{vmatrix} f_{1x}(x,y) & f_{1y}(x,y) \\ f_{2x}(x,y) & f_{2y}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (3x^2e^y-2) & (x^3e^y+1) \\ (2y+2) & 2x\end{vmatrix}=$$

$$=2x\left(3x^2e^y-2\right)-(2y+2)\left(x^3e^y+1\right)=6x^3e^y-4x-2x^3ye^y-2y-2x^3e^y-2=$$

$$=4x^3e^y-2x^3ye^y-4x-2y-2=2x^3e^y(2-y)-4x-2y-2 \implies$$

$$\implies \left|J_{\overline{f}}(1,0)\right|=4-4-2=-2\neq 0$$

Luego existe inversa local $\overline{g}=\overline{f}^{-1}(u,v)$ en un entorno de $\overline{b}=(-1,2)\in B$ que lo relaciona con $\overline{a}=(1,0)\in A$.

b) Vamos a calcular la matriz jacobiana de $g(u,v)$ asociada a $(x,y)=(1,0)$:

$$J_{\overline{f}}(1,0)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow J_{\overline{g}}(-1,2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

Luego $g_{1u}(-1,2)=-1$, $g_{1v}(-1,2)=1$, $g_{2u}(-1,2)=1$, $g_{2v}(-1,2)=-\dfrac{1}{2}$. Además, sabemos que $g(-1,2)=(g_1(-1,2),g_2(-1,2))=\overline{f}^{-1}(-1,2)=(1,0)$.

$$P_1(u,v)=g_1(-1,2)+(g_{1u}(-1,2)(u+1)+g_{1v}(-1,2)(v-2))=1-(u+1)+(v-2)$$

$$P_2(u,v)=g_2(-1,2)+(g_{2u}(-1,2)(u+1)+g_{2v}(-1,2)(v-2))=0+1(u+1)-\frac{1}{2}(v-2)$$

$$\overline{f}^{-1}(-1.2,2.1)\approx\left(P_1(-1.2,2.1),P_2(-1.2,2.1)\right)\approx$$

$$\approx(1-(-0.2)+0.1,-0.2-0.05)=\boxed{(1.3,-0.25)}$$

Nota: Como comprobación $\overline{f}\,(1.3,-0.25)\approx(-1.14,1.95)$, que a su vez es una aproximación de $(-1.2,2)$.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	02/07/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 5

Identifica los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$ y clasifícalos, indicando si se trata de máximos, mínimos o puntos silla.

Solución:

Vamos a comenzar calculando las derivadas parciales de $f(x, y) = \left(x^2 - y^2\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$.

$$f_x(x, y) = 2xe^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}xe^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \left(x^2 - y^2\right) = x\left(2 - x^2 + y^2\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

$$f_y(x, y) = -2ye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}ye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \left(x^2 - y^2\right) = -y\left(2 + x^2 - y^2\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

$$f_x(x, y) = 0 \implies x\left(2 - x^2 + y^2\right) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = 0 \implies y\left(2 + x^2 - y^2\right) = 0 \implies \begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{x = 0 \quad | \quad y = 0}$ El candidato es $(0, 0)$

$\boxed{x = 0 \quad | \quad -x^2 + y^2 = 2}$ Los candidatos son $(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$

$\boxed{x^2 - y^2 = 2 \quad | \quad y = 0}$ Los candidatos son $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

$\boxed{x^2 - y^2 = 2 \quad | \quad -x^2 + y^2 = 2}$ Sin solución

A continuación necesitamos calcular $H_f(x, y)$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(2 - 5x^2 + y^2 + x^4 - x^2y^2\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} & \left(x^3y - xy^3\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \\ \\ \left(x^3y - xy^3\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} & \left(-2 - x^2 + 5y^2 - y^4 + x^2y^2\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \end{pmatrix}$$

$\boxed{(0,0)}$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H_f(0,0)| = -4 < 0 \Longrightarrow \boxed{(0,0) \text{ es punto silla}}$$

$\boxed{(\pm\sqrt{2},0)}$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & -4/e \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \left|H_f(\pm\sqrt{2},0)\right| = \dfrac{16}{e^2} > 0 \\ f_x(\pm\sqrt{2},0) = -\dfrac{4}{e} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{(\pm\sqrt{2},0) \text{ máximos relativos}}$$

$\boxed{(0,\pm\sqrt{2})}$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4/e & 0 \\ 0 & 4/e \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \left|H_f(\pm\sqrt{2},0)\right| = \dfrac{16}{e^2} > 0 \\ f_x(\pm\sqrt{2},0) = \dfrac{4}{e} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{(0,\pm\sqrt{2}) \text{ mínimos relativos}}$$