CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

El espacio afín

Tema 4

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 4.- El espacio afín

4.1.Espacio afín y espacio afín métrico.
4.2.Sistemas de referencia. Coordenadas.
4.3.Cambio de sistema de referencia.
4.4.Variedades afines: ecuaciones paramétricas y cartesianas.
4.5.Variedad afín generada por un conjunto de puntos.
4.6.Intersección y suma de variedades afines.
4.7.Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín.

Espacio afín y espacio afín métrico

- Un conjunto A$\neq$ Ø se llama **Espacio afín sobre V** si hay definida una aplicación en V espacio vectorial: A x A $\longrightarrow$ V que a cada par de elementos de A: (A,B) les hace corresponder un único vector $\overrightarrow{AB}$ que verifica:
  - 1) Para cada A$\in$ $A\ y\ para\ cada\ v \in V,$ existe un único elemento B tal que $\overrightarrow{AB}$=v
  - 2) Para cada A,B,C $\in$ $A, se\ verifica\ que \overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BC}$= $\overrightarrow{AC}$

- Los elementos del conjunto A se denominan puntos. Si $\overrightarrow{AB}$=v decimos que v es el vector que tiene origen en A y extremo en B
- La dimensión del espacio afín A es la dimensión del espacio vectorial V. Si V es de dimensión finita, A es un **espacio afín de dimensión finita**
- El espacio vectorial V se denomina **espacio de dirección de A.**

Espacio afín y espacio afín métrico

- Un conjunto A$\neq\emptyset$ se llama **Espacio afín sobre V** si hay definida una aplicación en V espacio vectorial: A x V $\longrightarrow$ A que a cada par de elementos (P,v) $\longrightarrow$ Q=P+v
  - 1) Para cada par de puntos $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in A$ *existe un único* $v \in V$, tal que $P+v=Q$
  - 2) Para todo P $\in A, y\ u, v \in V$: $(P+u)+v=P+(u+v)$

❖ Ejemplo 1 Un espacio afín sencillo

En R^2 dados dos puntos P=(a_1, a_2) y Q =(b_1, b_2) definimos v=$\overrightarrow{PQ}$=$(b_1-a_1, b_2-a_2) \in R^2$

verifica que 1) $P+v=Q$

Y por como hemos definido la aplicación es fácil comprobar que si tomamos R =(c_1, c_2)

y w=$\overrightarrow{QR}$=$(c_1-b_1, c_2-b_2) \in R^2$: se verifica que $(P+u)+v=P+(u+v)$

Espacio afín y espacio afín métrico

Propiedades de un espacio afín

- P+v=P $\Longleftrightarrow$ v=0
- $\forall P, Q \in A, \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$
- $\forall P, Q, R \in A, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relación de Chasles)
- $\forall P, Q, P', Q' \in A, si\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, entonces $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

1) P+v=P $\Longleftrightarrow$ v=$\overrightarrow{PP}$ $(P+u)+v = P+(u+v)$

$$\left(P + \overrightarrow{PP}\right) + \overrightarrow{PP} = P + \left(\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = 0$$

||

P

2) Basta sumar $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$=0 Son, por tanto, opuestos

4) $si\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ sumando a ambos miembros $\overrightarrow{QP'}$: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

++

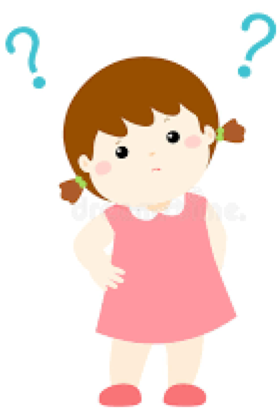
Espacio afín y espacio afín métrico

- Un conjunto V es un **espacio vectorial euclídeo** si es un espacio vectorial real de dimensión n en el que se ha definido una forma bilineal simétrica $f: V \times V \longrightarrow R$ cuya forma cuadrática asociada es definida positiva
- La forma bilineal f se denomina **producto escalar** f(x,y) =<x,y>=x.y y la matriz asociada a un producto escalar se llama **matriz de Gram**

- Cuando V es un espacio vectorial euclídeo, decimos que A es un **espacio afín métrico o espacio afín euclídeo**

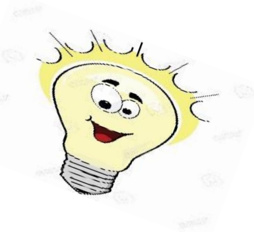
Espacio afín y espacio afín métrico

¿Cuál es entonces la diferencia entre espacio afín y espacio afín métrico?

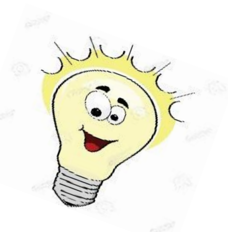


¡Distancias y ángulos!

Podemos definir la distancia entre 2 puntos: ¡es la longitud del vector!



Podemos definir el ángulo entre dos vectores



Espacio afín y espacio afín métrico

- **Distancia entre dos puntos P y Q** es la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$ que determinan

  d(P,Q)=|| $\overrightarrow{PQ}$ ||

- **Propiedades de la distancia**

  Si P, Q y R son puntos de un espacio afín métrico, se cumple que:
  - d(P,Q)=0 si y sólo si P=Q
  - d(P,Q)=d(Q,P)
  - d(P,R)≤ d(P,Q) + d(Q,R)

❖ **Ejemplo 2 Un espacio afín sencillo**

En

$el\ espacio\ afín\ métrico\ R^n, utilizando\ el\ producto\ escalar\ usual, la\ distancia\ entre$

P=$(a_1, a_2, \ldots a_n)$ y Q =$(b_1, b_2, \ldots b_n)$ es d(P,Q)=$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}$

Espacio afín y espacio afín métrico

❑Producto escalar de dos vectores

$Definimos\ el\ producto\ escalar\ de\ dos\ vectores\ (en\ función\ de\ sus\ coordenadas)$ $\vec{u} = (x_1, x_2,\dots x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2,\dots y_n)$ como: $\vec{u}.\vec{v} = x_{1.}\, y_1 + x_{2.}\, y_2 + x_n.\, y_n$

❑Producto escalar de dos vectores

$Definimos\ el\ producto\ escalar\ de\ dos\ vectores$ como: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|.\, cos\alpha$ siendo $\alpha\ el\ ángulo\ formado\ por\ los\ dos\ vectores$

❑ Ángulo entre dos vectores

$$cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{x_{1.}\, y_1 + x_{2.}\, y_2 + x_n.y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}\, .\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_n^2}}$$

Sistemas de referencia. Coordenadas

- En un espacio afín A de dimensión finita n sobre V llamamos **sistema de referencia cartesiano** a cada conjunto R={O,B} en el que O es un punto de A que es el **origen del sistema de referencia** y B es una **base** del espacio vectorial V.
- Entonces dado cualquier punto P $\in$ A, el vector $\overrightarrow{OP}$ *tiene unas* ***coordenadas*** *únicas respecto de la base B*

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, \dots x_n)_{\boldsymbol{B}}$$

- Las **coordenadas del punto P en el sistema de referencia** R={O,B}

son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ *respecto de la base B*

Sistemas de referencia. Coordenadas

- En un sistema de referencia R, dados dos puntos P=(a_1, a_2, …a_n) y Q =(b_1, b_2, …b_n) el vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO}$+ $\overrightarrow{OQ}$ = $\overrightarrow{OQ}$ - $\overrightarrow{OP}$ $= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots b_n - a_n)$ en la base B.
- Si A es un espacio afín métrico y la base B es ortonormal (de vectores ortogonales y unitarios) se dice que R es un sistema de referencia rectangular y

$$d(P,Q)=\left|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Conclusión

En un espacio afín euclídeo (métrico) tienen sentido los mismos conceptos que en un espacio vectorial euclídeo:

distancias *ángulos* *ortogonalidad*

❑ Cambio de sistema de referencia

Dados dos sistemas de referencia R={O,B}={O, $u_1, u_2, \ldots u_n$} y R´={O´,B´}={O´, $v_1, v_2, \ldots v_n$} en un espacio afín A de dimensión n, tratamos de encontrar las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un mismo punto P respecto de R: $(x_1, x_2, \ldots x_n)_{\boldsymbol{R}}$ y respecto de R´: $(y_1, y_2, \ldots y_n)_{\boldsymbol{R}'}$

➢ ***Recuerda:***

- $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *coordenadas de P en el sistema de referencia R*
- $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ *coordenadas de P en el sistema de referencia R´*
- $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ *coordenadas del punto O´ en el sistema de referencia R*

Cambio de sistema de referencia

➢ *Cómo hacer un cambio de sistema de referencia*

- $(x_1, x_2, \dots x_n)$ *coordenadas de* P *en el sistema R:* $= x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + \dots x_n u_n$
- $(y_1, y_2, \dots y_n)$ *coordenadas de* P *en el sistema R´:* $= y_1\, v_1 + y_2\, v_2 + \dots y_n v_n$
- $(b_1, b_2, \dots b_n)$ *coordenadas de* $O´$ *en el sistema de referencia R:* $O´ = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \dots b_n u_n$
- *Como* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO´} + \overrightarrow{O´P}: =$

$$x_1\, u_1 + x_2\, u_2 + \dots x_n u_n = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \dots b_n u_n + y_1\, v_1 + y_2\, v_2 + \dots y_n v_n =$$

$$= b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \dots b_n u_n + y_1(a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n) + y_2(a_{12}u_1 + \cdots + a_{n2}u_n) + \dots\, y_n(a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n)$$

- *Así, las ecuaciones del cambio de sistema de referencia quedan:*

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= b_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n &= b_n + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

- La expresión matricial de estas ecuaciones será:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_{B´B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$(|\boldsymbol{coordenadas\ de\ vectores\ de\ B´\ en\ base\ B}|)$

Cambio de sistema de referencia

O bien

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{M_{R'R} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \vec{b} & A_{B'B} \end{array}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matriz de cambio de sistema de referencia de R´ a R

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$M_{RR'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{b} & A_{B'B} \end{pmatrix}^{-1}$$

Matriz de cambio de sistema de referencia de R a R´

Cambio de sistema de referencia

❖ **Ejemplo 3** *Cómo hacer un cambio de sistema de referencia*

en un espacio afín A_2 de dimensión 2 consideramos los sistemas de referencia R={O,u_1, u_2} y R´= ={O´,v_1, v_2} tal que OO´ = $3u_1 + 3u_2$ v_1= $2u_1 - u_2$ v_2= -$u_1 + 2u_2$

➢ *cambio de referencia de R´ a R*

➢ *Como* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} :=$

$x_1\, u_1 + x_2\, u_2 = 3u_1 + 3u_2 + y_1\, v_1 + y_2\, v_2 =$
$3\, u_1 + 3u_2 + y_1(2u_1 - u_2) + y_2\,(-u_1 + 2u_2)$

Así, las ecuaciones del cambio de sistema de referencia quedan:

$x_1 = 3 + 2y_1 - y_2$ $\quad x_2 = 3 - y_1 + 2y_2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

➢ *Matriz de cambio de sistema de referencia de R´ a R: permite calcular, a partir de las coordenadas de un punto en R´, las coordenadas en R*

Cambio de sistema de referencia

➢ *cambios de referencia de R´a R y de R a R´*

- ***Cambio de R´a R : Elementos de R ´en R***

  ➢ Si (2,3) son las coordenadas de P en el sistema R´, ¿cuáles son sus coordenadas en R?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$M_{R'R}$

- ***Cambio de R a R´: Elementos de R en R´***

  ➢ Si (3,5) son las coordenadas de P en el sistema R, ¿cuáles son sus coordenadas en R´?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$M_{RR'}$

El espacio afín. Rectas y planos

- **Variedad lineal (afín)** que pasa por P y tiene a F como subespacio de dirección
  B={P+ $\vec{v}$/ P∈ $A, \vec{v} \in F\}$ $donde\ F\ es\ un\ subespacio\ vectorial\ de\ E$

- El plano afín R^2 Sistema de referencia: {0=(0,0), e_1= (1,0), e_2=(0,1)}
- El espacio afín R^3 Sistema de referencia: {0=(0,0,0), e_1= (1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)}

- $Rectas\ en\ R^3$ son variedades de dimensión 1 engendradas por 2 puntos (un punto y 1 vector)

- $Planos\ en\ R^3$ son variedades de dimensión 2 engendradas por 3 puntos no alineados (un punto y 2 vectores linealmente independientes)

Variedades afines

❑ Teorema

B es una variedad afín (lineal) de A si y sólo si puede expresarse como B={P+v/P∈ A y v ∈S} =P+L<v_1, v_2, … v_k} siendo S un subespacio vectorial de V

B es la variedad lineal que pasa por P y tiene a S como subespacio de dirección.

O de otra forma:

❑ Si P es un punto del espacio afín A y W es un subespacio vectorial de V, L={B∈ A /$\overrightarrow{AB}$ ∈ W} se llama **variedad afín** que pasa por el punto A y tiene espacio de dirección W

Idea intuitiva

- Una variedad afín es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
- Es un concepto análogo al de subespacio vectorial en el ámbito de la geometría afín (una variedad lineal es lo que intuitivamente denominaríamos «subespacio afín»).
- Geométricamente, es la generalización a cualquier dimensión de la idea de rectas y planos.

❖ **Ejemplo 4** *Una recta en el plano es una variedad afín*

- Recta que pasa por P=(0,0) y tiene vector director $\vec{d} = (1,0)$: subespacio vectorial L<(1,0)>
- Recta que pasa por P=(1,-1) (en general P≠(0,0)) y tiene $\vec{d} = (1,0)$: subespacio afín

A= P+S=(1,-1)+L<(1,0)>

y L<(1,0)> es el subespacio vectorial asociado al espacio afín A.

❖ **Ejemplo 5** *Ecuaciones de una variedad afín*

- En un espacio afín de dimensión 3 sobre R, respecto de un sistema de referencia R, consideramos la variedad afín L que pasa por el punto (1,2,-1) y tiene espacio de dirección

$$W \equiv \begin{Bmatrix} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{Bmatrix}$$

- W es un subespacio vectorial (conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo)
- Ecuaciones implícitas de $L \equiv \begin{Bmatrix} x + 2y + 3z = a \\ x + y - z = b \end{Bmatrix}$ Imponemos que P= (1,2,-1) verifica las

restricciones ⟹ a=2; b=4 ⟹ $L \equiv \begin{Bmatrix} x + 2y + 3z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{Bmatrix}$ ⟹ $L \equiv \begin{Bmatrix} x = 6 + 5\lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{Bmatrix}$

Variedades afines

❑ Dependencia e independencia afín

- ❑ Se llama rango de un conjunto de puntos $\{P_{0,}\ P_{1,}\ P_{2,}\ldots P_k\}$ $al\ rango\ del$ sistema de vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2},\ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\}$
- ❑ Los **puntos** $\boldsymbol{\{P_{0,}\ P_{1,}\ P_{2,}\ldots P_k\}}$ **son afínmente independientes** si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2},\ldots, \overrightarrow{P_0P_k}\}$ son linealmente independientes.

En caso contrario, los puntos se dicen afínmente dependientes

- ❑ Un conjunto de n+1 puntos afínmente independientes siempre es **base de un espacio afín de dimensión n**

Variedades afines. Variedad afín generada por un conjunto de puntos

Variedad afín generada por un conjunto de puntos

P=$\{P_{0,}\ P_{1,}\ P_{2,}...P_k\}$. Se denota L(P) $es\ la\ menor\ variedad\ afín\ que\ contiene\ al$ conjunto P.

L(P)= $P_0 + L(\overrightarrow{P_0P_1},\ \overrightarrow{P_0P_2},..., \overrightarrow{P_0P_k})$

- Es la intersección de todas las variedades afines que contienen al conjunto P
- Su subespacio asociado es el generado por los vectores $\overrightarrow{P_0P_1},\ \overrightarrow{P_0P_2},..., \overrightarrow{P_0P_k}$

Variedades afines

❖ **Ejemplo 6** *Independencia afín. Variedad afín generada por un conjunto de puntos*

- En un espacio afín de dimensión 4 sobre R, consideramos

  $P_1 = (1,2,1,2) \quad P_2 = (1,1,1,1) \qquad P_3 = (-1,2,0,0) \qquad P_4 = (0,2,1,0)$

- *¿Cuál es la variedad afín generada por estos puntos?*

Es la variedad que pasa por el punto P_1 y tiene espacio de dirección generado por los vectores

$\overrightarrow{P_1P_2}$=(0,-1,0,-1) $\overrightarrow{P_1P_3}$=(-2,0,-1,-2) $\overrightarrow{P_1P_4}$=(-1,0,0,-2)

- *¿son linealmente independientes?*

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Son l.i. $\longleftrightarrow$ *Ptos afínmente independientes*

Variedades afines

- Ecuaciones paramétricas de la variedad afín que generan los puntos P_1, P_2, P_3, P_4
- (x_1, x_2, x_3, x_4)= (1,2,1,2)+$\alpha(1,0,0,2)$+$\beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,-2)$ (Ecuación vectorial)

x_1=1 + α
x_2=2 + β (Ecuaciones paramétricas)
x_3=1 + γ
x_4=2 +2 α +β-2 γ

❖ **Ejemplo 7** *Variedad afín generada por un conjunto de puntos*

- Una recta es una variedad afín de dimensión 1 de R^3: viene definida por dos puntos: P_1, P_2
  ó de forma equivalente, por un punto y un vector de dirección
- Un plano es una variedad afín de dimensión 2 de R^3: viene definida por tres puntos: P_1, P_2, P_3
  ó de forma equivalente, por un punto y dos vectores de dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$y $\overrightarrow{P_1P_3}$

Variedades afines

Resumen

¿Qué datos son necesarios para definir una variedad afín de dimensión k?

k+1 puntos de la variedad que sean afínmente independientes

a (a≤k)vectores l.i del subespacio y k+1-a ptos afínmente independientes

Un punto de la variedad y k vectores linealmente independientes del subespacio vectorial asociado

Intersección y suma de variedades afines

Intersección y suma de variedades afines

- Si $B_1 \; y \; B_2 \; son \; dos \; variedades \; afines \; con \; subespacios \; de \; dirección$ S_1y $S_2, respectivamente, \; se \; define \; B_1 \cap B_2$=P+($S_1 \cap S_2$) con P∈ $B_1 \cap B_2$
- Si $B_1 \; y \; B_2 \; son \; dos \; variedades \; afines, la \; variedad \; suma \; B_1 + B_2 \; como \; la$ variedad afín generada por $B_1 \cup B_2$
- Si las variedades $B_1 = P_1 + S_1$ y $B_2 = P_2 + S_2$ tienen intersección no vacía y P∈ $B_1 \cup B_2$, entonces $B_1 + B_2$=P+($S_1 + S_2$)
- Si las variedades B_1 y B_2 tienen intersección no vacía se verifica:

$$\mathbf{dim}\, \boldsymbol{B_1} + \mathbf{dim}\, \boldsymbol{B_2} = \mathbf{dim}(\boldsymbol{B_1} \cap \boldsymbol{B_2}) + \mathbf{dim}(\boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_2})$$

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

Aplicación afín

- Si consideramos A y A´ espacios afines cuyos espacios vectoriales asociados son V y V´, respectivamente, f: A $\longrightarrow$ A´ es una **aplicación afín** si existe un punto O∈ A tal que la correspondencia $\vec{f}: V \longrightarrow V'$ dada por $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$ es una aplicación lineal.

Ejemplo 8 *Expresión de una aplicación afín*

- f: $R^3 \longrightarrow R^3$ se define como f(x,y,z)=(x+y+1, x-z, x+y+z-1)
- Tomamos O=(0,0,0) $\longrightarrow$ f(O)=(1,0,-1)
- Entonces $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$ =(x+y+1, x-z, x+y+z-1)-(1,0,-1)= (x+y, x-z, x+y+z) es una aplicación lineal. Su matriz asociada $M_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

---

❖ **Ejemplo 9** *La identidad como aplicación afín*

- Id: $A \longrightarrow A$ se define como Id(X)=X para cada X∈ A $verifica\ para\ cualquier\ O \in A$ que $\vec{I}: V \longrightarrow V$ es $\vec{I}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{Id(O)Id(X)} = \overrightarrow{OX}$
- Es la aplicación identidad en V y por tanto es una aplicación lineal.

❑ **Proposición**

❑ Si f es una aplicación afín, entonces para todo P, Q∈ A : $\vec{f}\ (\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$

¿Por qué? $Porque\ \overrightarrow{PQ}$= $\overrightarrow{PO}$+ $\overrightarrow{OQ}$= $\overrightarrow{OQ}$- $\overrightarrow{OP}$ $y\ \vec{f} es\ aplicación\ lineal$ por tanto $\vec{f}\ (\overrightarrow{PQ})$ =$\vec{f}\ (\overrightarrow{OQ})$-$\vec{f}\ (\overrightarrow{OP})$ = $\overrightarrow{f(O)f(Q)} - \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

---

Proposición

- La composición de dos aplicaciones afines es una aplicación afín
- Una aplicación afín es inyectiva (suprayectiva) si y sólo si lo es la aplicación lineal asociada

---

- Consideramos f:A $\longrightarrow$ A´ y g: A´ $\longrightarrow$ A´´ aplicaciones afines
- $\overrightarrow{gof}\ (\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{(gof)(P)(gof)(Q)}$= $\overrightarrow{g[f(P)]g[f)(Q)]}$= $\vec{g}\ \overrightarrow{f(P)]f(Q)}$= $(\vec{g} \text{ o } \vec{f})(\overrightarrow{PQ})$

definición de la aplicación lineal asociada a (gof)

definición de la aplicación lineal $\vec{g}$

definición de la aplicación lineal $\vec{f}$

definición de la composición de aplicaciones

- f es inyectiva significa que f(P)=f(Q) $\Longrightarrow$ P=Q
- Entonces $\vec{f}\ (\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \vec{0}\ y\ como \vec{f}\ (\overrightarrow{PQ})$= $\vec{f}\ (\vec{0})\ \ tenemos \vec{f}\ (\vec{0})$= $\vec{0} \longrightarrow$ f inyectiva
- Si f(O)$\in A´, entonces\ cualquier\ punto\ de\ A´es\ de\ la\ forma\ X´ = f(O) + v´con\ v´\ \in A´$, y si $\vec{f}$ es suprayectiva: v´= $\vec{f}$ (v) = $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$ $\Longrightarrow$ f(X)= f(O)+v´=X´ $\Longrightarrow$ f suprayectiva

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

- **Expresión analítica de una aplicación afín**
- Si consideramos A y A´ espacios afines de dimensión finita (n y m) y los sistemas de referencia R={O,B} y R´={O´,B´} , una aplicación afín f: A $\longrightarrow$ A´ queda completamente determinada si conocemos f(O) y la aplicación lineal asociada $\vec{f}$ puesto que $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$. Entonces

$$\mathbf{f(X) = f(O) + \vec{f}\ (\overrightarrow{OX})}$$

Expresión matricial de una aplicación afín

- Si $(c_1, c_2, \ldots c_m)$= $[f(O)]_{R'}$ *:coordenadas de f(O) en el sistema de referencia R´*
- $(x_1, x_2, \ldots x_n)$= X_R *:coordenadas de X en el sistema de referencia R*
- $(y_1, y_2, \ldots y_m)$= $f(X)_{R'}$ *:coordenadas de f(X) en el sistema de referencia R´*
- $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $=A_{BB'}(\vec{f}\,)$: *es la matriz asociada a* $\vec{f}$ en las bases B y B´.
  - **¿Cuál será la expresión matricial de f(X) =f(O) + $\vec{f}$ $(\overrightarrow{OX})$?**

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

¿Cuál es la expresión matricial?

$$\boxed{Y=C+AX}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{BB'}(\vec{f}) = (A)}$$

O también…

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline c_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{BB'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & A \end{array}\right)}$$

Aplicaciones afines. Expresión matricial de una aplicación afín

❖ **Ejemplo 10** *Expresión matricial de una aplicación afín*

- f: $R^3 \longrightarrow R^3$ se define como f(x,y,z)=(x+y+1, x-z, x+y+z-1)
- Tomamos O=(0,0,0) $\Longrightarrow$ f(O)=(1,0,-1)
- Entonces $\vec{f}\ (\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{f(O)f(X)}$ =(x+y+1, x-z, x+y+z-1)-(1,0,-1)= (x+y, x-z, x+y+z) es una aplicación lineal. Su matriz asociada $M_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$