TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/12/2023
CURSO	2º	HORA	17:00
GRUPO	A	DURACIÓN	1H 45M
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 1

Resuelve en el cuerpo de los números complejos la ecuación $z^5 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 = 0$, proporcionando todas las soluciones en forma binómica.

Solución:

Comenzaremos comprobando los candidatos a solución que son divisores del término independiente de la ecuación (1 y -1). Es inmediato comprobar que $z = 1$ es una de las soluciones de la ecuación, por lo que transformamos la expresión inicial de la siguiente manera:

$$z^5 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 = (z-1)\left(z^4 - z^2 + 1\right)$$

A continuación resolveremos la ecuación $z^4 - z^2 + 1 = 0$, para lo que haremos el cambio $w = z^2$ de forma que resolvamos una ecuación de segundo grado:

$$w^2 - w + 1 = 0 \implies w = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Deshaciendo el cambio de variable deducimos que las cuatro soluciones restantes son los valores z tal que $w = z^2$ para las dos números complejos w determinados.

$$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \implies z = \sqrt{w} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{1}e^{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{6}} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \quad (k=0) \\ e^{\frac{7\pi}{6}} & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \quad (k=1) \end{cases}$$

$$w = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \implies z = \sqrt{w} = \sqrt{e^{i\frac{5\pi}{3}}} = \sqrt{1}e^{\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{2}} = \begin{cases} e^{\frac{5\pi}{6}} & = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \quad (k=0) \\ e^{\frac{11\pi}{6}} & = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \quad (k=1) \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación en forma binómica son:

$$\boxed{z = 1,\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/12/2023
CURSO	2º	HORA	17:00
GRUPO	A	DURACIÓN	1H 45M
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 2

Determina si las siguientes integrales son convergentes o divergente, calculando su valor en caso de que sean convergentes.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx \qquad I_2 = \int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx$$

Solución:

1) Se trata de una integral impropia de primera especie. Para resolverla vamos a utilizar un cambio de variable:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx = \lim_{K\to\infty}\int_0^{K} \frac{e^x}{(e^x)^2+3}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = e^x \implies dt = e^x\,dx \\ x = 0 \implies t = 1 \\ x = K \implies t = e^K \end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{K\to\infty}\int_1^{e^K} \frac{\cancel{t}}{t^2+3}\frac{dt}{\cancel{t}} = \lim_{K\to\infty}\int_1^{e^K} \frac{1}{t^2+3}\,dt = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{3}\int_1^{e^K} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt =$$

$$= \lim_{K\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{e^K} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{K\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{e^K}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\infty) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Por lo tanto, la integral I_1 es convergente.

2) Se trata de una integral impropia de segunda especie con dos puntos problemáticos ($x = 0$ y $x = 1$), por lo que debemos calcular tres integrales de forma independiente:

$$I_2 = \int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx =$$

$$= \underbrace{\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{0+\epsilon}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx}}_{I_{2a}} + \underbrace{\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{0.5}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx}}_{I_{2b}} + \underbrace{\boxed{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx}}_{I_{2c}}$$

La integral I_{2a} es convergente, pero no así las otras dos integrales. Vamos a comprobar, por ejemplo, que I_{2b} es divergente.

$$I_{2b} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{0.5}^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \implies dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ x = 0.5 \implies t = \sqrt{0.5} \\ x = 1-\epsilon \implies t = \sqrt{1-\epsilon} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{0.5}}^{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{1}{\cancel{t}(t^2-1)} 2\cancel{t} dt = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{0.5}}^{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{1}{t^2-1} dt = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{0.5}}^{\sqrt{1-\epsilon}} \left(-\frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} \right) dt =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \big[-\mathrm{Ln}|t+1| + \mathrm{Ln}|t-1| \big]_{\sqrt{0.5}}^{\sqrt{1-\epsilon}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\mathrm{Ln} \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\sqrt{0.5}}^{\sqrt{1-\epsilon}} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\mathrm{Ln} \left| \frac{\sqrt{1-\epsilon}-1}{\sqrt{1-\epsilon}+1} \right| - \mathrm{Ln} \left| \frac{\sqrt{0.5}-1}{\sqrt{0.5}+1} \right| \right) = \mathrm{Ln}(0) - \mathrm{Ln} \left(\frac{1-\sqrt{0.5}}{1+\sqrt{0.5}} \right) = -\infty$$

Puesto que la integral I_{2b} no converge, e $I_2 = I_{2a} + I_{2b} + I_{2c}$, podemos afirmar que I_2 es una integral <u>divergente</u>.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/12/2023
CURSO	2º	HORA	17:00
GRUPO	A	DURACIÓN	1H 45M
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 3

Desarrolla en serie la función $f(x) = \text{Ln}(a + bx)$, donde $a, b > 0$, y calcula su radio de convergencia.

Solución:

a) Comenzaremos calculando el desarrollo como serie de potencias de $f(x)$:

$$f(x) = \text{Ln}(a+bx) \longrightarrow f(0) = \text{Ln}(a)$$

$$f'(x) = \frac{b}{a+bx} = b(a+bx)^{-1} \longrightarrow f'(0) = \frac{b}{a} = a^{-1}b$$

$$f''(x) = -b^2(a+bx)^{-2} \longrightarrow f''(0) = -a^{-2}b^2$$

$$f'''(x) = 2b^3(a+bx)^{-3} \longrightarrow f'''(0) = 2a^{-3}b^3$$

$$f^{iv)}(x) = -6b^4(a+bx)^{-4} \longrightarrow f^{iv)}(0) = -6a^{-4}b^4$$

$$\vdots$$

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,b^n(a+bx)^{-n} \longrightarrow f^{n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,a^{-n}b^n$$

Con esta información, ya podemos obtener la expresión de la serie de potencias:

$$f(x) = \text{Ln}(a+bx) = \text{Ln}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\,a^{-n}b^n}{n!}x^n = \boxed{\text{Ln}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}b^n x^n}{n\,a^n}}$$

b) Vamos a calcular el radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+2}b^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1}b^n x^n}{n\,a^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,\cancel{a^n}\,b\,\cancel{b^n}\,\cancel{x^n}\,x}{(n+1)\,a\,\cancel{a^n}\,\cancel{b^n}\,\cancel{x^n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nbx}{(n+1)a}\right| = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)|x|\frac{b}{a} = |x|\frac{b}{a} < 1 \implies |x| < \frac{a}{b}$$

Luego claramente el radio de convergencia es $\boxed{R = \frac{a}{b}}$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	04/12/2023	
CURSO	2º	**HORA**	17:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	1H 45M	
ALUMNO	**SOLUCIÓN DEL EXAMEN**			

PROBLEMA 4

Dada la sucesión de funciones cuyo término general es $f_n(x) = x^{n+1} - x^n$ definida en $[0, \infty)$, determina su límite puntual así como el intervalo más grande en el que la sucesión converge uniformemente.

Solución:

a) Comenzaremos analizando la convergencia puntual mediante el cálculo de la función $f(x)$:

$$\boxed{x = 0} \quad f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0^{n+1} - 0^n = 0$$

$$\boxed{0 < x < 1} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} - x^n = 0 - 0 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1^{n+1} - 1^n = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{x > 1} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n+1} - x^n = \{\infty - \infty\} = \lim_{n\to\infty} x^n(x-1) = \infty(x-1) = \infty$$

Luego $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

b) Vamos a estudiar la convergencia uniforme utilizando el cuarto criterio:

$$g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left|x^{n+1} - x^n\right| \overset{x\in[0,1]}{=} x^n - x^{n+1}$$

$$g'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}\big(n - (n+1)x\big)$$

$$g'(x) = 0 \implies x^{n-1}\big(n - (n+1)x\big) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{n}{n+1} \end{cases}$$

$$g''(x) = n(n-1)x^{n-2} - (n+1)nx^{n-1}$$

$$g''\left(\frac{n}{n+1}\right) = n(n-1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} - (n+1)n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\left(n(n-1) - (\cancel{n+1})n\frac{n}{\cancel{n+1}}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}(-n) < 0$$

Queda claro que $g(x) = |f_n(x) - f(x)|$ tiene un máximo en $x = \dfrac{n}{n+1}$. Calculemos ahora el valor de la imagen en ese punto:

$$g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Con estos elementos ya podemos calcular el límite requerido:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left|f_n(x)-f(x)\right| : x\in[0,1]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{e}\cdot 0=0$$

Por lo tanto, podemos asegurar que la <u>convergencia</u> de la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ es <u>uniforme</u> en el intervalo $[0,1]$.