Hoja de problemas nº 4

El espacio afín

Tema 4

1.- Dados R={O,B}={O,u_1, u_2} yR´={O´,B´}={O´,v_1, v_2}
dos sistemas de referencia en el plano afín, encontrar las fórmulas del cambio de sistema de referencia siendo (2,3) las coordenadas de OO´y (1,-1); (5,4) las coordenadas de v_1, v_2 respecto de u_1, u_2

2.- Demostrar que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\}$$

es un espacio afín de R^n

3.- En el espacio afín real R^4 se consideran los subespacios afines
F_1={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1$=a + $3\lambda + 2\mu$; x_2=$1 - \lambda - \mu$; x_3=4 + λ; $x_4 = 6 + 5\lambda + 2\mu$; $\lambda, \mu \in$ R}
F_2={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1$=2 + $\alpha + 2\beta$; x_2=1; x_3=1 + $\alpha + \beta$; $x_4 = 3\alpha$; $\alpha, \beta \in$ R}

a) Calcular a para que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$
b) Para dicho valor de a, obtener $F_1 \cap F_2$ y $F_1 + F_2$

4.- En el espacio afín real se consideran respecto de un sistema de referencia cartesiano R= {O,B}={O,e_1, e_2, e_3} los puntos A=(3,1,-2); B=(2,2,0);
C=(1,0,-1) y D=(4,3,-2).
Las coordenadas de un punto P en el nuevo sistema de referencia
{A; $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$} $son\ (x', y', z'). Obtener\ las\ coordenadas\ de\ P\ en\ \ R$

5.- **(Examen U-tad Parcial 2022)**
Dadas las ecuaciones de un cambio de sistema de referencia

$$x_1 = 1 + y_2; \quad x_2 = \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_3; \quad x_3 = 2 + \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}y_3$$

$donde$ (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) son, respectivamente, las coordenadas de un punto P en los sistemas de referencia R y R´.

Obtener razonadamente la expresión matricial del cambio de sistema de referencia
Obtener la ecuación del plano x+y+z=3 en el sistema de referencia R´.
Detallar las ecuaciones paramétricas e implícita de dicha variedad afín indicando sus elementos (punto y espacio de dirección) en R y en R´.

6.- En el espacio afín real R^4 se consideran los subespacios afines
F_1={$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / x_1 + x_2 = 4 \,;\, x_3 + x_4 = a$}
F_2={$(3+\alpha, 2-2\alpha, 2\alpha, -1+\alpha) \quad \alpha \in R$}
Encontrar el valor de a para que la variedad afín generada por F_1y F_2 tenga dimensión mínima y calcular dicha variedad.

7.- Si P_2(x) es el espacio afín de polinomios de grado menor o igual que 2 y V={p(x)∈ P_2(x)/ p(1)=1, p(2)=2}

a) Demostrar que V es una variedad afín (subespacio afín) de P_2(x)
b) Obtener un sistema de referencia afín de V y calcular las coordenadas de $2x^2 - 5x + 4$ *en esa referencia*
c) Si consideramos R={0; 1; x; x^2}. Calcular respecto de R las ecuaciones del hiperplano de P_2(x) que pasa por el punto x y es perpendicular a V.

Nota: considerar el producto escalar cuya matriz en la base {1; x; x^2} es la identidad.

8.- **(Examen U-tad Parcial 2021)**

Dado A un espacio afín con un sistema de referencia R={0, B={e_1, e_2}} y A´ otro espacio afín con un sistema de referencia R´={0`, B´={e_1, e_2, e_3}}

Determinar la aplicación afín f: A $\rightarrow A´$ *tal que*:

f(1,2)=(1,2,3)

$\vec{f}(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$ y $\vec{f}(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$

a) Escribir matricialmente las ecuaciones de la aplicación afín f
b) Obtener las ecuaciones paramétricas de Im f e indicar cuál es su espacio de dirección

9.- Dada la circunferencia C≡ $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$=9 en el plano, obtener sus ecuaciones en el sistema de referencia R´={A,$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$} donde A=(3,3); $\overrightarrow{u_1}$=$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $\overrightarrow{u_2}$=$(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$
¿Qué tipo de curva es C en el sistema de referencia R´?

10.- En el espacio afín real se considera el plano π *que tiene por ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ respecto de un sistema de referencia cartesiano R= {O,B}={O, e_1, e_2, e_3}.
R={P; u_1, u_2,u_3} es un nuevo sistema de referencia tal que P=(1,1,0);
u_1=- $e_1 + e_3$; u_2=- $e_2 + e_3$; u_3=e_1+ $e_2 + e_3$
Calcular la ecuación del plano π respecto a R´.

11.- Dado R^3 *con la estructura afín usual, si*
$A_1 = (1,0,0) + L < e_1 + e_2 + e_3 >$ y $A_2 = (0,0,0) + L < 2e_1 + e_2 + 2e_3 >$
Calcular la dimensión de $A_1 + A_2$.
¿Qué relación tiene esta dimensión con dim A_1 *y dim* A_2?

a) Si A_3={(x,y,z)/2x-y-z=0} calcular la dimensión de $A_1 + A_3$
¿Qué relación tiene esta dimensión con dim A_1 *y dim* A_3?

12.- ¿Son aplicaciones afines las siguientes aplicaciones f: X → X?
a) f(x, y) = (x + 1, y − 1)
b) f(x, y) = (2x, 2y)
c) f(x, y) = (2x − 1, 3y + 2)
d) f(x, y) = (3x + 1, 0)
e) f(x, y) = (x 2 + 1, y)

Encontrar la expresión analítica de las siguientes aplicaciones afines de R^2 :
13.- Giro de centro (1, 1) y ángulo π/2
14.- Proyección ortogonal sobre la recta de ecuación x + y = 1
15.- Simetría ortogonal respecto a la recta x + y = 1

16.-**Examen Parcial noviembre 2023**
En el espacio afín R^3 se considera F={((x_1, x_2, x_3) / $x_1 + x_2 - x_3 = 1$} respecto de un sistema de referencia cartesiano R= {O,B}={O, e_1, e_2, e_3}.

a) Analizar razonadamente que F es una variedad afín de R^3 e indicar sus elementos

Si R´={P; u_1, u_2,u_3} es un nuevo sistema de referencia tal que P=(-2,1,3);
u_1= $e_1 - e_3$; u_2=$e_2 - e_3$; u_3=e_1+ $e_2 + e_3$

b) Determinar la ecuación del plano π respecto a R´.