Geometría Lineal

Tema 2

Geometría analítica del plano y del espacio

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Introducción

En el siglo XVII el filósofo y matemático francés René Descartes introdujo la noción de coordenadas, con lo que todo punto tiene una representación con respecto a unas rectas dadas que se cortan. Los trabajos de los matemáticos durante los dos siglos siguientes mostraron que las propiedades geométricas de las figuras pueden demostrarse más fácilmente útilizando este sistema de representación. Esta forma de estudiar la geometría se denomina geometría analítica.

La geometría analítica es la parte de las matemáticas dedicada al estudio de problemas que, partiendo de conceptos y propiedades de tipo geométrico, llega a resultados analíticos mediante desarrollos algebraicos. En este sentido, podemos entender la geometría analítica como la parte de las matemáticas que relaciona y fusiona el álgebra con la geometría en el plano y el espacio para crear una nueva rama que estudia las figuras geométricas referidas a un sistema de coordenadas mediante métodos algebraicos.

2 Ecuaciones en el plano

2.1 Ecuaciones de una recta

La ecuación general de una recta en el plano euclídeo, a veces también llamada **ecuación implícita**, es:

$$ax + by + c = 0$$

Despejando la variable y en la expresión anterior, se llega a la conocida fórmula de la recta que expresa su pendiente, denominada a veces **ecuación explícita**:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + k$$

La ecuación general de la recta permite, además, obtener el vector perpendicular a la recta, que es $\overline{n}_r = (a, b)$.

La **ecuación vectorial** de una recta en el plano afín es:

$$P = P_r + \lambda * \overline{v} = (x_r, y_r) + \lambda * (v_x, v_y) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El conjunto de **ecuaciones paramétricas** de la recta que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$r : \begin{cases} x = x_r + \lambda v_x \\ y = y_r + \lambda v_y \end{cases}$$

Por último, las **ecuaciones continuas** de la recta son las siguientes:

$$\frac{x - x_r}{v_x} = \frac{y - y_r}{v_y}$$

2.2 Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas se puede calcular mediante la fórmula del ángulo entre sus vectores directores. De forma alternativa, conociendo las pendientes m_r y m_s de dos rectas, el ángulo que forman se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\|} \qquad \tan(\theta) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

2.3 Distancia entre un punto y una recta

La distancia mínima de un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a una recta dada por la expresión $P = P_r + \lambda * \overline{v}$ es el módulo de la proyección del vector $\overline{P_0 P_r}$ sobre el vector $\overline{n}_r$ perpendicular a la recta. En el caso de utilizar la ecuación $ax + by + c = 0$ como expresión de la recta el resultado es equivalente:

$$d(P_0, r) = \| \operatorname{proj}_{\overline{n}} \overline{P_0 P_r} \| = \frac{|\overline{P_0 P_r} \cdot \overline{n}|}{\|\overline{n}\|} \qquad d(P_0, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{proj}_{\overline{b}} \overline{a} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|^2} \right) \overline{b} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|} \right) \frac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|} \right) \overline{u}_b \implies \|\text{proj}_{\overline{b}} \overline{a}\| = \frac{\left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right|}{\|\overline{b}\|}$$

3 Ecuaciones en el espacio

3.1 Ecuaciones de las rectas y los planos

La **ecuación vectorial** de una recta en el espacio euclídeo es:

$$P = P_r + \lambda * \overline{v} = (x_r, y_r, z_r) + \lambda * (v_x, v_y, v_z) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

El conjunto de **ecuaciones paramétricas** de la recta que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$r : \begin{cases} x = x_r + \lambda v_x \\ y = y_r + \lambda v_y \\ z = z_r + \lambda v_z \end{cases}$$

Por su parte, las **ecuaciones continuas** de la recta son las siguientes:

$$\frac{x - x_r}{v_x} = \frac{y - y_r}{v_y} = \frac{z - z_r}{v_z}$$

Una cuarta forma de representar una recta en el espacio consiste en utilizar las ecuaciones de dos planos que, al cortarse, generan la recta.

En cuanto al plano, la **ecuación vectorial** de un plano que pasa por el punto P_π y contiene a dos vectores linealmente independientes $\overline{v}$ y $\overline{w}$ en el espacio afín es:

$$P = P_\pi + \lambda * \overline{v} + \mu * \overline{w} = (x_\pi, y_\pi, z_\pi) + \lambda * (v_x, v_y, v_z) + \mu * (w_x, w_y, w_z) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El conjunto de ecuaciones paramétricas de un plano que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$\pi : \begin{cases} x = x_\pi + \lambda v_x + \mu w_x \\ y = y_\pi + \lambda v_y + \mu w_y \\ z = z_\pi + \lambda v_z + \mu w_z \end{cases}$$

De manera alternativa, la **ecuación general** o **implícita** de un plano es $ax + by + cz + d = 0$. Para obtener esta expresión a partir de la ecuación vectorial, es necesario calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} x - x_\pi & y - y_\pi & z - z_\pi \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$$

Por último, mencionar que la expresión de un vector perpendicular al plano dado por la expresión $ax + by + cz + d$ es el vector $\overline{n} = (a, b, c)$.

3.2 Distancias

La distancia mínima de un punto P_0 a una recta dada por la expresión $P = P_r + \lambda * \overline{v}$ se corresponde con la siguiente expresión:

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overline{P_r P_0} \times \overline{v}\|}{\|\overline{v}\|}$$

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, es suficiente con calcular la distancia entre un punto cualquiera de una de las rectas y la otra recta empleando para ello la expresión anterior.

La distancia de un punto $P = (x, y, z)$ a un plano paralelo $ax + by + cz + d$ es la menor de la distancias desde un punto de la recta a los infinitos puntos del plano. Por lo tanto, esa distancia se corresponde con la longitud del segmento perpendicular desde dicho punto de la recta al plano, y se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Para calcular la distancia entre dos planos paralelos, basta con determinar la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano, para lo que se podría utilizar la fórmula anterior para el cálculo de la distancia de un punto a un plano.

De manera alternativa, si las expresiones que definen los dos planos son $\pi_1 : ax + by + cz + d_1$ y $\pi_2 : ax + by + cz + d_2$, entonces la distancia entre esos planos se puede obtener utilizando la siguiente fórmula:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4 Problemas

1) Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de la recta que pasa por el punto $A = (1, 2, 1)$ y cuyo vector director es $\overline{v} = (4, 5, -1)$.

2) Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (0, 1, 1)$. A continuación, determina el punto de corte de la recta con el plano $z = 0$.

3) Halla las ecuaciones paramétricas y general del plano que pasa por el punto $A = (1, 1, 1)$ y cuyos vectores directores son $\overline{v} = (1, -1, 1)$ y $\overline{w} = (2, 3, -1)$.

4) Halla las ecuaciones paramétricas y general del plano que pasa por los puntos $A = (-1, 2, 3)$ y $B = (3, 1, 4)$ y que contiene al vector $\overline{v} = (0, 0, 1)$.

5) Determina la ecuación de la recta que resulta de la intersección del plano que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 2)$ y $C = (3, 2, 1)$ con el plano $z = 3$.

6) Halla la ecuación general de un plano a partir de las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$$

7) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (2, 0, 1)$ y contiene a la recta cuya ecuación es $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

8) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (1, 3, 2)$ y es perpendicular a la recta dada por las ecuaciones $2x + 3y - z = 1$, $x - y + 3z = 2$.

9) Determina si los puntos $A = (0, 5, 3)$, $B = (0, 6, 4)$, $C = (2, 4, 2)$ y $D = (2, 3, 1)$ son coplanarios.

10) Comprueba que las rectas r y s se cortan y calcula a continuación el ángulo que forman.

$$r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{3} \qquad s : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 3x + 3y - 4z - 9 = 0 \end{cases}$$

11) Determina el ángulo que forman los planos $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ y $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.

12) Determina la distancia del punto $P = (1, 2, 3)$ a la recta $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$.

13) Dada la recta r dada por las siguientes ecuaciones, obtén su expresión como intersección de dos planos. A continuación, calcula la distancia del punto $P = (1, 3, -2)$ a la recta r.

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

14) Halla la distancia del punto $P = (3, 1, -2)$ al plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ de tres formas.

15) Halla la distancia del punto $P = (5, 5, 3)$ al plano $(x, y, z) = (0, 0, -4) + \lambda(2, 2, -1) + \mu(-3, 2, 0)$.

16) Calcula la distancia existente entre los planos $\pi_1 : 2x - y - 2z + 5$ y $\pi_2 : 4x - 2y - 4z + 15$.

17) Determina el punto simétrico al punto $P = (1, 0, 0)$ respecto del plano $x + 2y + 3z - 15 = 0$.

18) Dadas las rectas r y s indicadas a continuación, calcula la distancia mínima entre ellas.

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z \qquad s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

19) Dados los puntos $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (4, 1, 0)$ y $D = (0, 1, -2)$, si r es la recta que pasa por los puntos A y B y s es la recta que pasa por los puntos C y D, determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos más cercanos de r y s.

20) Determina la ecuación del plano simétrico del plano $x + 2y - 3z = 1$ respecto de la recta $x = y = z$.

21) Determina las ecuaciones de la recta que es simétrica a la recta dada por las ecuaciones $x + 3y - z = 3$, $2x - y + z = 2$ respecto de la recta $x = y = z$.

22) Sea el haz de rectas dado por la expresión $(2\lambda + 1)x + (-3\lambda + 2)y + (7\lambda - 1) = 0$. Demuestra que todas las rectas del haz pasan por un punto fijo y calcula sus coordenadas.

23) Dadas las rectas $r : mx + (2m - 1)y + 3 = 0$ y $s : (4m - 7)x - (m + 2)y - 8 = 0$, calcula el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que las rectas sean perpendiculares.

24) Dadas las rectas $r : 2x + 4y - 7 = 0$ y $s : x - y - 6 = 0$, determina la ecuación de la recta simétrica a r respecto de s.

25) Dadas las rectas definidas mediante la expresión $y^2 - 7xy + 4x^2 = 0$, determinar la expresión del conjunto de sus bisectrices.

26) Determina el circuncentro del triángulo con vértices $A = (1, 4)$, $B = (-2, 3)$ y $C = (5, 2)$.

27) Determina el ortocentro del triángulo con vértices $A = (0, 0)$, $B = (14, 0)$ y $C = (5, 12)$.

28) Determina el baricentro del triángulo con vértices $A = (3, 4)$, $B = (5, 12)$ y $C = (8, 15)$.

29) De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d : x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A = (2, -1)$. Determina el resto de vértices y su área.

30) De una pirámide $ABCD$ de base triangular conocemos los puntos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 1, 1)$. Además, sabemos que el vértice D (que equidista de los otros tres puntos) se encuentra en un plano paralelo a la base ABC, donde ese plano pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$. Con estos datos, calcula el volumen de la pirámide y determina las coordenadas del vértice D y del punto simétrico de D con respecto al plano que pasa por los puntos A, B y C.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Eugenio Hernández Rodríguez, María Jesús Vázquez Gallo y María Ángeles Zurro Moro. *Álgebra lineal y geometría*. Ed. Pearson Educación. ISBN 978-84-7829-129-8.
- Ubaldo Usunáriz Balanzategui e Ignacio Usunáriz Sala. *Problemas de Geometría Analítica y Diferencial*. Disponible en `https://oa.upm.es/14866/`.
- Alejandro García Miño. *Apuntes de Geometría*. Universidad Tecnológica de Chile. Disponible en `https://www.inacap.cl/web/material-apoyo-cedem/alumno/Ciencias-Basicas/APUNTES_DE_GEOMETRIA.pdf`.