CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

ESPACIOS VECTORIALES

TEMA 1
Álgebra Lineal

Mar Angulo Martínez
Curso 2024-2025

Espacios Vectoriales

1.1.Espacio vectorial.
1.2.Subespacios vectoriales.
1.3.Independencia lineal. Sistema generador.
1.4.Base. Dimensión de un espacio vectorial
1.5.Suma e intersección de subespacios. Suma directa.
1.6.Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base.
1.7.Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente.

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

❑ Espacio vectorial sobre un cuerpo K

- ❑ Un **espacio vectorial** es un conjunto E no vacío de elementos, que denominamos **vectores**, que verifica:

- ❑ 1) (E,+) es un grupo conmutativo:
  - a) $\forall x, y \in E,\ x + y \in E$ (+ es operación interna)
  - b) $\forall x, y, z \in E,\ (x + y) + z = x + (y + z)\ (propiedad\ asociativa)$
  - c) $\forall x \in E,\ x + 0 = x\ (elemento\ neutro)$
  - d) $\forall x \in E, \exists -x \in E\ tal\ que\ x + (-x) = 0\ (elemento\ opuesto)$
  - e) $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x\ (propiedad\ conmutativa)$
- ❑ 1) (E, .k) verifica las siguientes propiedades: $\forall x, y \in E$ y $\forall \gamma, \mu \in K$
  - a) $(\gamma + \mu)x = \gamma x + \mu$x (distributiva respecto a la suma de escalares)
  - b) $\gamma(x + y) = \gamma x + \gamma y\ (distributiva\ respecto\ a\ la\ suma\ de\ vectores)$
  - c) $\gamma\ (\mu x) = (\gamma\mu)x$ $\quad d)\ 1. x = x$

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

❑ Propiedades de un espacio vectorial

1) $\forall x \in E, \quad 0.x = 0$
2) $\forall \gamma \in K, \quad \gamma.0 = 0$
5) $\gamma u = \mu u \,, u \neq 0 \longrightarrow \gamma = \mu$

3) Si γx=0 $\longrightarrow$ γ=0 ó x=0
4) $\forall x \in E$ y $\forall \gamma \in K$, $(-\gamma)$x=- γx= γ(-x)
6) $\gamma u = \gamma v \,,\ \gamma \neq 0 \longrightarrow u = v$

❖ Ejemplos

- ❖ R^n es un espacio vectorial (En particular, R^2 y R^3 son espacios vectoriales
- ❖ El conjunto P_n (x) de polinomios con coeficientes reales y grado n es un espacio vectorial
- ❖ El conjunto M_{mxn}(R) de las matrices mxn con coeficientes reales es un espacio vectorial
- ❖ El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es un espacio vectorial

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

❑ Subespacio vectorial

- ❑ Un subespacio vectorial de (E,+, .K) es un subconjunto no vacío de E que tiene estructura de espacio vectorial

❑ Teorema

❑ S es subespacio vectorial de E	1) S$\neq \emptyset$ 2) $\forall x, y \in S, \quad x + y \in S$ 3) $\forall \alpha \in R \; y \; \forall x \in S, \quad \alpha x \in S$

O de forma equivalente:

❑ S es subespacio vectorial de E	1) S$\neq \emptyset$ 2)$\forall \alpha, \beta \in R y \; \forall x, y \in S, \quad \alpha x + \beta y \in S$

❖ **Ejemplo 2** El conjunto de soluciones de la ecuación 2x-y+z= 0 es un subespacio vectorial de R^3

Espacio vectorial. Subespacios vectoriales

❖ Ejemplos

- ❖ El conjunto S={(x,y,z,t)/ x+2y-z+3t=0} es un subespacio vectorial de R^4
- ❖ El conjunto T= ={(x,y,z)/ x-3y+z=0; 2x-z=0} es subespacio vectorial de R^3
- ❖ El conjunto M= ={(x,y,z)/ x.y=0} no es subespacio vectorial de R^3
- ❖ El conjunto S={(x,y,z,t)/ x+2y-z+3t=1} no es un subespacio vectorial de R^4
- ❖ El conjunto P_3(x) (polinomios en una variable de grado ≤ 3) $es\ subespacio$
- ❖ El conjunto M_{2x2}(R) (matrices $cuadradas\ de\ orden\ 2$) $es\ subespacio$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Combinación lineal de vectores

- ✓ Un vector x ∈ E *es una combinación lineal de un conjunto S de vectores* $\{v_1, v_2,\dots v_n\}$ *si existen números* reales $\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n$ tales que

$$x = \alpha_1\ v_1+\alpha_2 v_2+\dots \alpha_n v_n$$

- ❖ **Ejemplo 1** En el espacio vectorial R^3: (1,-1,3) =1 (1,0,0)+(-1) (0,1,0)+3 (0,0,1)
  Por tanto, el vector (1,-1,3) es una combinación lineal de esos 3 vectores

- ❖ **Ejemplo 2** el polinomio $x^2 - x + 3$ es combinación lineal de {1+ x^2, x+2x^2}
  porque 3 $-x + x^2$= 3(1+ x^2)- (x+2x^2)
- ✓ 3 y -1 son los coeficientes de dicha combinación lineal
- ✓ En el caso de los polinomios, podríamos escribir: (3,-1,1)=3(1,0,1)-(0,1,2)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Subespacio engendrado por S

- ✓ El subespacio L(S) engendrado por los vectores de S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S.
- ✓ Es decir, si S={v_1, v_2,… v_n} tales que
  L(S) = {$\alpha_1\ v_1+\alpha_2 v_2+\ldots\ \alpha_n v_n$} con α_1, α_2,… α_n ∈ K
- ✓ L(S) es el menor de todos los subespacios que contienen a S

❖ **Ejemplo 3** el subespacio S= { (α, β, 2α+β, −α+3β) } de R^4

- Admite una expresión implícita dada por las relaciones que existen entre las coordenadas de un vector genérico de S: {(x,y,z,t)∈ R^4/ z=2x+y, t=-x+3y}

- Admite una expresión en forma de subespacio engendrado por :
  S= { (α, β, 2α+β, −α+3β) }= α(1,0,2,-1)+ β(0,1,1,3)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Sistema generador

- ✓ Si L(S) es el subespacio engendrado por los vectores de S, entonces todo vector de L(S) puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S.

  Entonces se dice que **S es un sistema generador de L(S)**
- ✓ S={v_1, v_2,… v_n} es un sistema generador de un espacio vectorial V si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de S, es decir,

  si $\forall v \in V$, existen α_1, α_2,… α_n ∈ K tal que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$

❖ **Ejemplo 4**

- En R^4, los vectores S={u=(1,2,0,0), v=(0,3,-1,0) y w=(0,0,5,4)} son un sistema generador de L(S)= {(α, 2α+3β, -β+5γ, 4γ} (Observa que son vectores que dependen de 3 parámetros)
- Sin embargo S no es sist. generador de R^4. (un S.G. de R^4 ha de tener como mínimo 4 vectores)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Independencia lineal de vectores

- Los vectores $\boldsymbol{v_1, v_2, \ldots\ v_n}$ $\in$ $\boldsymbol{E}$ ***son linealmente independientes*** *si*

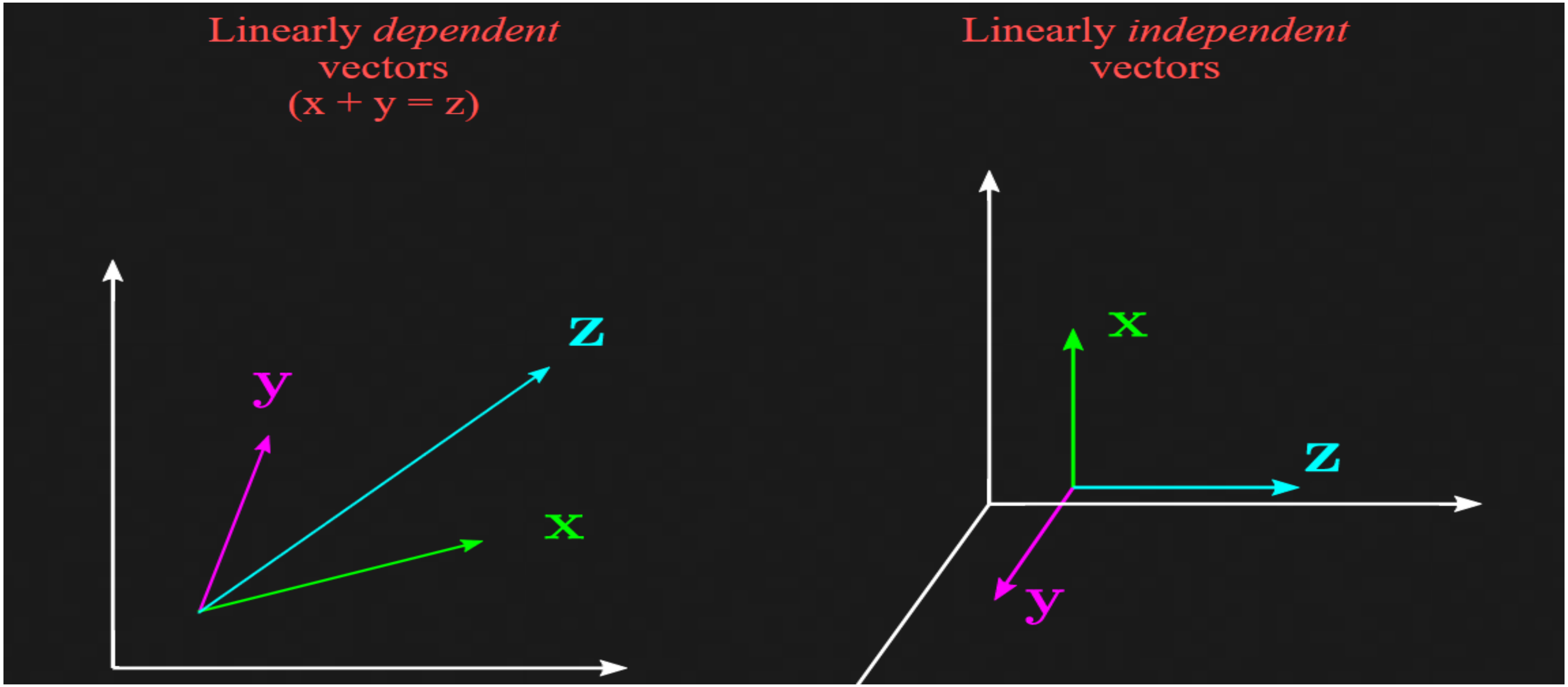
$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ \alpha_n v_n = 0 \longrightarrow \alpha_1 = 0;\ \ \alpha_2 = 0, \ldots\ \ \alpha_n = 0$$

- Es decir, cualquier combinación lineal de dichos vectores igual a 0, implica que todos los coeficientes necesariamente tienen que ser nulos
- Si, por el contrario, algún coeficiente es no nulo, los **vectores** son **linealmente dependientes** (existe algún vector que es linealmente dependiente del resto, es decir se puede expresar como combinación lineal del resto)

Sistema libre de vectores es un conjunto de vectores linealmente independientes

- Un conjunto de vectores linealmente dependientes se denomina **sistema ligado de vectores**

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión



Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Propiedades de los sistemas libres y ligados de vectores

- Un vector v$\neq 0$ *conforma un sistema libre de vectores*: S={v} es libre
- Si un sistema S de vectores es libre, cualquier subconjunto S´$\subset S$ también es un sistema libre de vectores
- Si un sistema S de vectores es ligado, cualquier conjunto que lo contenga, S´´$\supset$S también es un sistema ligado de vectores
- Si un sistema de vectores contiene al vector 0, es un sistema ligado
- Un sistema $\{v_1, v_2,\dots v_n\}$ es ligado $\Longleftrightarrow$ $\exists$ algún v_i que es combinación lineal de los vectores restantes
- Un sistema $\{v_1, v_2,\dots v_n\}$ es libre si ninguno de los vectores del mismo puede expresarse como combinación lineal de los vectores restantes

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❖ Ejemplo 5

Analizar si son ó no linealmente independientes los vectores: (1,0,0), (1,1,0) y (1,1,-3)

- **1ª forma: Aplicamos la definición**

$$Si\ partimos\ de\ una\ combinación\ lineal\ de\ esos\ vectores\ igualada\ a\ 0$$

$$\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma\ (1,1,-3)=0$$

$$los\ vectores\ serán\ linealmente\ independientes \Longleftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \beta+\gamma &= 0 \\ -3\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$Por\ tant, todos\ los\ coeficientes\ son\ nulos \longrightarrow vectores\ l.independientes$$

- **2ª forma: Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son esos vectores**

$$\text{rangA = rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3 \text{ (completo)}$$

- **3ª forma: Estudiamos el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son esos vectores**

Recuerda: vectores linealmente independientes $\Longleftrightarrow$ rangA completo $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Teorema fundamental de la independencia lineal

Si S={v_1, v_2,… v_n} es un sistema generador de un espacio vectorial V formado por un número finito n de vectores y

T ={w_1, w,… w_p} es un sistema de vectores linealmente independientes, formado por p vectores de V,

entonces, **p≤ n**

Si un espacio vectorial está generado por un número finito de vectores se dice que es un **espacio vectorial de dimensión finita**

❖ Ejemplo 6

Extender un conjunto de vectores linealmente independientes para que también sean S.G.

- (1,0,2), (1,0,–1) son linealmente independientes (no son proporcionales)
- No son sistema generador de R^3 $porque\ no\ todo\ vector\ de$ R^3 se puede expresar como combinación lineal de ellos: p. ej.: (0,1,0) = α (1,0,2)+ β(1,0,-1)----→sistema incompatible
- Basta añadir un 3º vector que sea linealmente independiente con ellos; p. ej: (0,1,0)

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❖ Ejemplo 7

- Los vectores (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) forman un sistema generador del plano OXY de R^3 porque si planteamos (x,y,z) = $\alpha(2,0,0)+\beta(0,3,0)+\gamma\,(4,1,0)$ obtenemos un sist. compatible
- Los vectores (2,0,0), (0,3,0), (4,1,0) **no** son linealmente independientes (se puede comprobar que |A|=0)
- Basta eliminar el último para obtener un sistema linealmente independiente

Los restantes vectores (2,0,0), (0,3,0) siguen generando el mismo subespacio S y son independientes. Son por tanto base de dicho plano.

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Base de un espacio vectorial

Si V es un espacio de dimensión finita, B={e_1, e_2,… e_n} es una **base de V** si verifica una cualquiera de las dos condiciones equivalentes:

1) los vectores de B son linealmente independientes y sistema generador
2) Todo vector de V se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de B

❑ Bases canónicas

- ❖ En el espacio vectorial R^n: (1,0,….0) ,(0,1,….0),….(0,0,….1,0) y (0,0,….0,1) constituyen la base canónica
- ❖ En el espacio vectorial M_{2x2} las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ constituyen la base canónica del espacio de matrices cuadradas 2x2
- ❖ B={1, x, x^2, x^3, … x^n} es la base canónica del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n.

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Proposición

Todo espacio vectorial distinto de {0} de dimensión finita tiene al menos una base

❑ Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos

❑ Teorema (de ampliación de la base)

Sea S es un subespacio vectorial de E. Si B_S es una base de S, entonces existen vectores $v_1, \dots v_r \in E - B_S$ de forma que B_S U $\{v_1, \dots v_r\}$ $es\ una\ base\ para\ E$

- ❑ **El subespacio generado por los vectores $v_1, \dots v_r$ se denomina subespacio suplementario de S**

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

❑ Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases son finitas y tienen el mismo número de elementos.

❑ Dimensión de un espacio vectorial

Es el número de elementos de una base de un espacio vectorial de tipo finito

Recuerda

- ***dimV es el máximo número de vectores de V que son linealmente independientes***
- ***dimV es el mínimo número de vectores de V que forman un sistema generador***
- ***Si dimV =n, todo conjunto de n vectores linealmente independientes de V forman una base***

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

Notas sobre la dimensión de un espacio vectorial

- La dimensión de un subespacio en el espacio R^n coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.
- Significado geométrico

  R^3 es un espacio de dimensión 3, un plano tiene dimensión 2, un espacio de dimensión 1 es una recta y el punto tiene dimensión 0
- Si S y T son subespacios y S está contenido en T, dim S ≤ dim T. dim S = dim T, entonces ambos espacios han de coincidir.

Rango de un sistema de vectores

- El rango de un sistema de vectores S es la dimensión del subespacio engendrado por S
  Es decir, es el máximo número de vectores linealmente independientes de S
- Por tanto, en un espacio vectorial de dimensión n, un sistema de vectores es sistema generador $\longleftrightarrow$ su rango es n.

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❑ Coordenadas de un vector en una base

❑ Si E es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots \boldsymbol{e_n}\}$ *es una base de V*, entonces si x=$\alpha_1\ v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ \alpha_n v_n$, los coeficientes de la combinación lineal se denominan **coordenadas del vector x en la base B**

- *Un vector tiene tantas coordenadas como la dimensión del espacio*
- *Las coordenadas de un vector en una base son únicas*

❖ **Ejemplo 8**

Coordenadas del polinomio p(x) = 15x^2-3x+6 en la base B={5x^2, x+1,-3}

Escribimos el vector (6,-3,15) = α(0,0,5)+$\beta(1,1,0) + \gamma(-3,0,0)$

Entonces: $\beta - 3\gamma = 6 \quad \beta = -3 \quad 5\alpha = 15 \qquad\qquad \alpha = 3; \quad \beta = -3; \quad \gamma = 3$

Las coordenadas del vector (6,-3,15) en la base B serían (3,-3,3)

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

Cambio de base

Si V es un espacio vectorial de dimensión n;

$\mathrm{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2},\ldots\boldsymbol{e_n}\}$ *es una base de V*, en la que las coordenadas de un vector $x \in V$ *son* $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2},\ldots\boldsymbol{x_n})$

$\mathrm{B}' = \{\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2},\ldots\boldsymbol{e'_n}\}$ *es otra base de V*, en la que las coordenadas del mismo vector $x \in V$ *son* $(\boldsymbol{x'_1}, \boldsymbol{x'_2},\ldots\boldsymbol{x'_n})$

Si conocemos la expresión de los vectores de B´ en función de los vectores de B:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i \qquad \text{j=1…n}$$

Entonces las coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2},\ldots\boldsymbol{x_n})$ se podrán expresar en función de las $(\boldsymbol{x'_1}, \boldsymbol{x'_2},\ldots\boldsymbol{x'_n})$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x'_j \qquad \text{i=1…n}$$

Matricialmente: X=QX´

Q: Matriz del cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{2n} \\ & & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x'_n} \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

- **En resumen:** En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'. $M_{BB'}=(vectores\ de\ B)_{B'}$

Aplicación

- Q es la matriz del cambio de base (o de cambio de coordenadas): permite calcular las coordenadas en la base B conocidas las coordenadas en la base B'
- Q^{-1} es la matriz del cambio de coordenadas inverso: permite calcular las coordenadas en la base B' conocidas las coordenadas en la base B

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

Propiedades de las matrices de cambio de base

- Una matriz de cambio de base es cuadrada (si dimV=n, será nxn)
- Una matriz de cambio de base es siempre regular ($|Q| \neq 0$) y la matriz de cambio de B a B´es inversa

En particular:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "P"] & B_{canónica} \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd}$$

P: vectores de B en columnas

Q= P^{-1}

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❖ **Ejemplo 9**

B= {(2,3), (1,-1)} y B´={(1,0), (0,1)}

✓ **matriz de paso de B a B´**

Escribimos los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B´

(2,3) = 2(1,0)+3(0,1) (1,-1)=1(1,0)+(-1)(0,1)

Entonces P=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

✓ **matriz de cambio de base de B' a B**

expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B

(1,0) = $\alpha(2,3) + \beta$(1,-1) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ Entonces Q=$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

(0,1)=$\gamma(2,3) + \delta(1,-1)$ $(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$

✓ **coordenadas en base B del vector v=(1,2)** (en la base canónica B') Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B: $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

❖ Ejemplo 10

V es un espacio vectorial de dimensión 3 y B´= $\{v_1', v_2', v_3'\}$ es una base de V.

Sea B =$\{v_1 = 3v_1' - v_2' + v_3',\ v_2 = -5v_1' + 4v_2' + v_3',\ v_3 = 2v_1' + 2v_2' - 4v_3'\}$ otra base de V

¿Cuáles son las coordenadas del vector $(2,-1,1)_B$ en la base B´?

matriz de paso de B a B´: $M_{B\,B'} = M_{B'}(v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \longrightarrow (2,-1,1)_B = (13,-4,-3)_{B'}$$

matriz de paso de B´ a B: $M_{B'\,B} = M_B(v'_1|v'_2|v'_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

➢ **En general, si tenemos 3 bases A,B,C de un espacio vectorial V. entonces**

$$\boldsymbol{M_{AB} = M_{CB} M_{AC}}$$

Sea u$\in V$,

¿Qué hace $\boldsymbol{M_{AB}}$?

Transforma las coordenadas de u en la base A en las coordenadas de u en la base B

¿Qué hace $\boldsymbol{M_{CB} M_{AC}}$?

1º) Transforma las coordenadas de u en la base A en las coordenadas de u en la base C

2º) Transforma las coordenadas de u en la base C en las coordenadas de u en la base B

❖ **Ejemplo 11**

Dadas las bases $B_1 = \{(2,-1,0),(-1,-1,1),(2,2,-1)\}$

$$y\ B_2 = \{(1,0,0),(-2,1,0),(1,-2,1)\}$$

a) Calcular la matriz de cambio de base de $B_1\ a\ B_2$

b) Si x=$(-1,4,3)_{B_2}$ hallar las coordenadas de x en B_1

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

- Vamos a utilizar como base auxiliar la base canónica de R^3:

  B_C={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}

Entonces $\boldsymbol{M_{B_1B_2}} = \boldsymbol{M_{B_cB_2}}\boldsymbol{M_{B_1B_c}} = \boldsymbol{M_{B_2B_c}}^{-1}\ \boldsymbol{M_{B_1B_c}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Otra forma: calcular directamente las coordenadas de los vectores de B_1 en la base B_2

$$(2,-1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(-2,1,0) + \gamma(1,\text{-}2,1) \Longrightarrow (2,-1,0)_{B_C} = (0,-1,0)_{B_2}$$

$$(-1,-1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(-2,1,0) + \gamma(1,\text{-}2,1) \Longrightarrow (-1,-1,1)_{B_C} = (0,1,1)_{B_2}$$

$$(2,2,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(-2,1,0) + \gamma(1,\text{-}2,1) \Longrightarrow (2,2,-1)_{B_C} = (3,0,-1)_{B_2}$$

Comprobamos que efectivamente son las columnas de la matriz $\boldsymbol{M_{B_1B_2}}$

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

Intersección de subespacios

- Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2, la intersección de subespacios se define como $\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}=\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} / \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S_1} \text{ y } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S_2}\}$
- La intersección de subespacios vectoriales de E es siempre otro subespacio vectorial

Suma de subespacios

- Dados dos subespacios vectoriales S_1 y S_2, la suma de subespacios se define como
$$\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}=\{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \ / \boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{S_1} \text{ y } \boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{S_2}\}$$
- La suma de subespacios es siempre otro subespacio; es de hecho el menor subespacio de V que contiene a S_1 y a S_2

Fórmula de Grassmann

- Si $S_1 \ y \ S_2$ son subespacios de E, dim $(\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2})$+ dim $(\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2})$ = dim $\boldsymbol{S_1}$+ dim $\boldsymbol{S_2}$

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

❑ Suma directa

- ❑ *Suma directa de subespacios* $S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots . S_n$ si

  $u_1+u_2+\ldots u_n=0 \quad (u_i \in S_1 \quad i=1,2\ldots n) \longrightarrow u_i=0 \quad \forall i$

- ❑ **La suma de dos subespacios S y T es directa si S$\cap \boldsymbol{T} = \{\mathbf{0}\}$**
- ✓ Entonces, uniendo dos bases respectivas de S y T obtendremos una base de la suma
- ✓ En caso de suma directa cualquier vector de S+T se puede expresar de forma única como suma de un vector de S y otro de T
- ✓ **Si además S $\oplus$ T =E, S y T se denominan subespacios suplementarios**
- ✓ dim S $\oplus$ T = dimS + dimT

❖ **Ejemplo 12**

En R^3, S =<(34,89,-11)>, T=<(45,0,0), (-1,2,0)> son suplementarios porque los 3 vectores forman una base de R^3: por tanto R^3=S+T y la intersección es nula (observa que la 3ª componente de los vectores de T es nula, no así en los de S)

Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente

❑ Espacio vectorial producto

- Si E y F son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K,
  el *conjunto ExF, con las operaciones suma y producto por escalar*

  $(u_1, u_2)+(v_1, v_2)=(u_1+u_2, v_1+v_2)\ \forall\, u_1, v_1 \in E,\ \ u_2, +v_2 \in F$

  $\gamma(u,v)=(\gamma u, \gamma v)\quad \forall\, \gamma \in K, \forall\, u \in E, \forall\, v \in F$

  es un espacio vectorial que se denomina ***espacio vectorial producto***

- Si $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots \boldsymbol{e}_n\}$ *es una base de E* y $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2,\ldots \boldsymbol{f}_m\}$ *es una base de E* entonces,
  - ***La dimensión de ExF es n+m***
  - ***$\{(e_1,0), (e_2,0), \ldots(e_n,0), (0,f_1), (0,f_2),\ldots (0,f_m)\}$ base de ExF***

Espacio vectorial producto. Espacio vectorial cociente

Espacio vectorial cociente

- Si E y F son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K,
  la relación xRy $\longleftrightarrow$ x-y$\in V$ *es una relación de equivalencia*

- *El conjunto cociente (conjunto de las clases de equivalencia) :* $\boldsymbol{\frac{E}{V}=\{C(x)/x\in E\}}$

  con las operaciones C(x)+C(y) =C(x+y)
  γC(x) = C(γx)

  Se denomina espacio vectorial cociente de E módulo V

  Si dim E =n , dimV=m $\boldsymbol{\dim\frac{E}{V}=n-m}$