Problema 1

lunes, 1 de abril de 2024 12:28

a) [1.0 puntos] Desigualdad triangular (o de Minkowski). En esta demostración se puede asumir como conocida la desigualdad Cauchy-Schwarz.

b) [1.0 puntos] Volumen de un paralelepípedo.

a) Desigualdad triangular (o de Minkowski):

$$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \quad \forall \ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

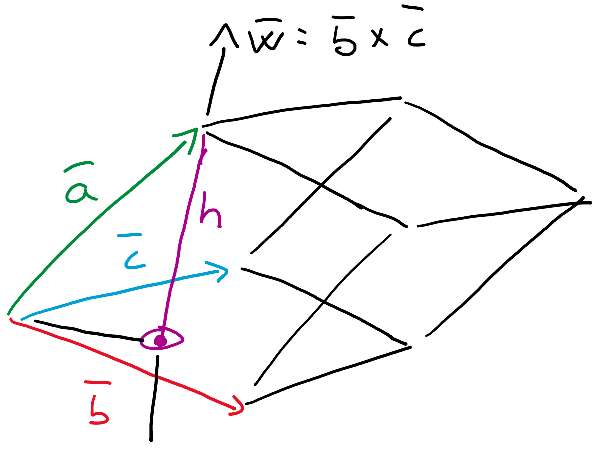
$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{x} + 2\bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{y}\cdot\bar{y} =$$

$$= \|\bar{x}\|^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| + \|\bar{y}\|^2$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| + \|\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$$

$$\Longrightarrow \cancel{\sqrt{}}\|\bar{x}+\bar{c}\|^{\cancel{2}} \leq \cancel{\sqrt{}}(\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^{\cancel{2}} \Longrightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

b) Volumen de un paralelepípedo:



Volumen = base · altura =

$= \|\bar{b}\times\bar{c}\|\cdot h$

La altura es la proyección del vector $\bar{a}$ sobre el vector $\bar{w}$

$$h = \|\mathrm{proj}_{\bar{w}}\,\bar{a}\| = \left\|\frac{\bar{a}\cdot\bar{w}}{\bar{w}}\right\| = \left\|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{\bar{b}\times\bar{c}}\right\| = \frac{\|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})\|}{\|\bar{b}\times\bar{c}|}$$

$$\text{Volumen} = \|\bar{b}\times\bar{c}\|\cdot h = \cancel{\|\bar{b}\times\bar{c}\|}\cdot\frac{\|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})\|}{\cancel{\|\bar{b}\times\bar{c}\|}} =$$

$$= \|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})\| = |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|$$

Problema 2

martes, 2 de abril de 2024 22:27

Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y,z) = \dfrac{x+2y-4z}{2x-y+3z}$, donde

$$x = x(u,v) = e^{2u}\cos(3v) \qquad y = y(u,v) = e^{2u}\operatorname{sen}(3v) \qquad z = z(u,v) = e^{2u}$$

calcula la expresión de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} =$$

$$= \boxed{\frac{(2x-y+3z)-2(x+2y-4z)}{(2x-y+3z)^2}} \cdot 2e^{2u}\cos(3v) +$$

$$+ \boxed{\frac{2(2x-y+3z)+(x+2y-4z)}{(2x-y+3z)^2}} \cdot 2e^{2u}\operatorname{sen}(3v)$$

$$+ \boxed{\frac{-4(2x-y+3z)-3(x+2y-4z)}{(2x-y+3z)^2}} \cdot 2e^{2u} =$$

$$= \boxed{\frac{-5y+11z}{(2x-y+3z)^2}} 2e^{2u}\cos(3v) + \boxed{\frac{5x+2z}{(2x-y+3z)^2}} 2e^{2u}\operatorname{sen}(3v)$$

$$+ \boxed{\frac{-11x-2y}{(2x-y+3z)^2}} \cdot 2e^{2u} =$$

$$= \frac{\left(-5e^{2u}\operatorname{sen}(3v)+11e^{2u}\right)2\cdot e^{2u}\cos(3v)}{(2x-y+3z)^2} +$$

$$+ \frac{\left(5e^{2u}\cos(3v)+2e^{2u}\right)2e^{2u}\operatorname{sen}(3v)}{(2x-y+3z)^2} +$$

$$\frac{\left(-11e^{2u}\cos(3v)-2e^{2u}\operatorname{sen}(3v)\right)}{(2x-y+3z)^2} \cdot 2e^{2u} =$$

$$= \frac{e^{4u}\left(-10\,\cancel{\operatorname{sen}(3v)\cos(3v)} + 22\,\cancel{\cos}(3v) + 10\,\cancel{\cos(3v)\operatorname{sen}}(3v) + 4\,\cancel{\operatorname{sen}}(3v)\right)}{(2x-y+3z)^2}$$

$$+ \frac{e^{4u}\left(-22\,\cancel{\cos}(3v) - 4\,\cancel{\operatorname{sen}}(3v)\right)}{(2x-y+3z)^2} = \boxed{0}$$

Problema 3

lunes, 1 de abril de 2024 12:28

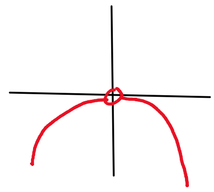
Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciablidad de la función $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Comenzaremos estudiando el dominio de la función.

$$\text{Dom}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y\neq 0\} \cup \{(0,0)\} =$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -x^2\} \cup \{(0,0)\}$$



Vamos a estudiar la continuidad:

1) $f(0,0) = 0$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cdot\cos^2(\theta)\cdot r^2\cdot\text{sen}^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r\cdot\text{sen}(\theta)} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)}{r\cos^2(\theta)+\text{sen}(\theta)} =$$

$$= \begin{cases} \text{sen}(\theta)\neq 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta)=0 & \dfrac{0}{0} \end{cases}$$

Buscamos una trayectoria de ángulo de aproximación $\theta = 0$.

Probamos con $y = -x^2 + x^a$ para eliminar x^2 del denominador.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(-x^2+x^a)^2}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x^a} =$$

$\boxed{y=-x^2+x^a}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^4-2x^{2+a}+x^{2a})}{x^a} \begin{cases} a=1,2,3,4,5 & 0 \\ a=6 & 1 \\ a=7,8,\ldots & \infty \end{cases}$$

Luego $f(x,y)$ <u>no</u> es continua en $(0,0)$

b) Estudiaremos ahora la diferenciabilidad:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0^2}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0^2 \cdot k^2}{0^2+k} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

Luego $f(x,y)$ es derivable en $(0,0)$ respecto de x e y.

c) $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ ya que no es continua en ese punto.

Problema 4

lunes, 1 de abril de 2024 12:28

El perfil de una montaña se puede modelar mediante la función $f(x, y) = 5000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$, donde si (x, y) es un punto del plano que define la base de la montaña, entonces $z = f(x, y)$ proporciona la correspondiente altura. A partir de esta premisa, si una persona se encuentra en el punto $(x, y) = (10, 10)$, completa los siguientes apartados:

a) [0.75 puntos] ¿En qué dirección, dada como un vector unitario, debe caminar para bajar más rápidamente por la montaña? ¿Cuál sería la pendiente en ese caso?

b) [0.5 puntos] ¿En qué dirección, dada como un vector unitario, la pendiente sería nula?

c) [1.5 puntos] Si en lugar de escoger cualquier dirección se elige aquella con una pendiente del 40%, ¿qué dirección (o direcciones), dada(s) como un vector unitario, debería elegir?

a) La direcciún en la que bajaría más rápido es la dirección de máximo decremento, $-\nabla f(x,y)$.

$f(x,y) = 5000 - 0'01 \cdot x^2 - 0'02\, y^2$

$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y),\ f_y(x,y)) = (-0'02 \cdot x,\ -0'04\, y)$

$-\nabla f(10,10) = -(-0'2, -0'4) = (0'2, 0'4)$

Es dirección es equivalente a $\bar{v} = (1,2)$ y a $\boxed{\bar{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

La pendiente será $\|-\nabla f(10,10)\| = \|(0'2, 0'4)\| =$

$= \sqrt{4 \cdot 10^{-2} + 16 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{20 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-1}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

b) Sabemos que la pendiente es nula en la dirección perpendicular al gradiente. En este caso, $\bar{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

o bien $\bar{v} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

c) Una pendiente del 40% significa que $D_{\bar{u}}[f(10,10)] = 0'4$

$$D_{\bar{u}}\left[f(10,10)\right] = \lim_{t\to 0} \frac{f(10+t\cos(\theta),\ 10+t\,\text{sen}(\theta)) - f(10,10)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(5000 - 0'01\cdot(10+t\cos(\theta))^2 - 0'02\,(10+t\,\text{sen}(\theta))^2\right) - (5000 - 0'01\cdot 10^2 - 0'02\cdot 10^2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-0'01\cdot(2\cdot 10\cdot t\cos(\theta) + t^2\cdot\cos^2(\theta)) - 0'02\cdot(2\cdot 10\cdot t\cdot\text{sen}(\theta) + t^2\,\text{sen}^2(\theta))}{t} =$$

$$= -0'2\cdot\cos(\theta) - 0'4\cdot\text{sen}(\theta)$$

$$D_{\bar{u}}\left[f(10,10)\right] = 0'4 \implies -0'2\cdot\cos(\theta) - 0'4\,\text{sen}(\theta) = 0'4 \implies$$

$$\implies \cos(\theta) + 2\,\text{sen}(\theta) = -2 \implies \cos(\theta) = -2\,\text{sen}(\theta) - 2$$

Por otra parte, $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \implies$

$$\implies \text{sen}^2(\theta) + 4\,\text{sen}^2(\theta) + 8\,\text{sen}(\theta) + 4 = 1 \implies$$

$$\implies 5\,\text{sen}^2(\theta) + 8\,\text{sen}(\theta) + 3 = 0 \implies$$

$$\implies \text{sen}(\theta) = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{10} = \frac{-8\pm 2}{10} \begin{cases} -1 \\ -3/5 \end{cases}$$

· Opción 1:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\theta) = -1 \\ \cos(\theta) = -2 - 2\,\text{sen}(\theta) = 0 \end{array}\right] \implies \theta = -\frac{\pi}{2} \implies \boxed{\bar{u} = (0,-1)}$$

Opción 2:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\theta) = -3/5 \\ \cos(\theta) = -2 + 6/5 = -4/5 \end{array}\right] \implies \theta \simeq 216'87^\circ \implies \boxed{\bar{u} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$$