Problema 1

domingo, 17 de noviembre de 2024 21:09

Completa los siguientes apartados sobre números complejos:

a) [1.25 puntos] Demuestra la fórmula de Euler.

b) [1.25 puntos] Sabiendo que la suma de dos números complejos es $3+2i$, su cociente es imaginario puro y la parte real de uno de ellos es 2, determina todas las posibles parejas de números complejos que cumplen esas condiciones.

a) Opción 1:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\boxed{e^{ix} =} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) =$$

$$= \boxed{\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)}$$

Opción 2:

Construimos la función $f(x) = e^{-ix}(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x))$, válida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -i \cdot e^{-ix} \cdot (\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)) + e^{-ix}(-\mathrm{sen}(x) + i\cos(x)) =$$

$$= e^{-ix}(\cancel{-i\cdot\cos(x)} + \cancel{\mathrm{sen}(x)} - \cancel{\mathrm{sen}(x)} + \cancel{i\cos(x)}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego $f(x)$ es constante, $f(x) = K \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Evaluamos $f(x)$ en $x = 0$: $f(0) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1$

$$f(x) = 1 \Rightarrow e^{-ix}(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)) = 0 \Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)}$$

b) $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

① $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i = 3+2i \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a+c=3 \\ b+d=2 \end{array} \right.$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = Ki \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad ac + bd = 0$

③ Por ejemplo, $a = 2$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=3 \longrightarrow 2+c=3 \longrightarrow c=1 \\ b+d=2 \\ ac+bd=0 \longrightarrow 2\cdot 1+bd=0 \longrightarrow b\cdot d=-2 \end{array}\right| \Rightarrow b(2-b)=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2-2b-2=0 \Rightarrow b=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

Las opciones posibles son $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 2+(1+\sqrt{3})i \\ z_2 = 1+(1-\sqrt{3})i \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 2+(1-\sqrt{3})i \\ z_2 = 1+(1+\sqrt{3})i \end{array}}$

Problema 2

domingo, 17 de noviembre de 2024 23:10

Calcula la integral $\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{(1-x^2)^5}dx$ utilizando integrales eulerianas.

$$\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{(1-x^2)^5}\,dx = 2\int_0^1 x^4(1-x^2)^{5/2}\,dx = \left|\begin{array}{l} w=x^2 \to dw = 2x\,dx \\ x=0 \to w=0 \\ x=1 \to w=1 \end{array}\right| =$$

$$= \cancel{2}\int_0^1 w^2(1-w)^{5/2}\cdot\frac{dw}{\cancel{2}w^{1/2}} = \int_0^1 w^{3/2}(1-w)^{5/2}\,dw = \left|\begin{array}{l} p-1 = 3/2 \to p = 5/2 \\ q-1 = 5/2 \to q = 7/2 \end{array}\right| =$$

$$= \beta\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(7/2)}{\Gamma(5/2+7/2)} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{45\cdot\pi}{32\cdot 5!} = \frac{9\pi}{32\cdot 4!} = \frac{3\pi}{32\cdot 4\cdot 2\cdot 1} = \boxed{\frac{3\pi}{256}} \simeq 0'0368$$

Problema 3

domingo, 17 de noviembre de 2024 21:09

Dada la familia de funciones $f_n(x) = \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{x+n}$, definidas para $x \geqslant 0$, determina la función límite puntual y justifica adecuadamente cuál sería el intervalo más grande en el que habría convergencia uniforme.

a) Función límite puntual:

$\boxed{x=0}$ $\quad f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n} = 1$

$\boxed{x>0}$ $\quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{x+n} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\cdot e^x + x\cdot e^{-x}}{n}}{\frac{x+n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x + \frac{x\cdot e^{-x}}{n}}{\frac{x}{n}+1} = e^x$$

En conclusión, $f(x) = e^x \quad \forall x \in [0,\infty)$

b) $h(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{n\cdot e^x + x\cdot e^{-x}}{x+n} - e^x \right| = \left| \dfrac{\cancel{ne^x} + xe^{-x} - xe^x - \cancel{ne^x}}{x+n} \right| =$

$$= \left| \frac{x\,(e^{-x} - e^x)}{x+n} \right| = \frac{x\,(e^x - e^{-x})}{x+n}$$

$$h'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(x+n) - x\,(e^x - e^{-x})}{(x+n)^2} = \frac{(e^x - e^{-x})\,(\cancel{x}+n-\cancel{x})}{(x+n)^2} = \frac{n\cdot(e^x - e^{-x})}{(x+n)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(e^x - e^{-x})\cdot n}{(x+n)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Si $x>0$, $h'(x) > 0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)|$ es creciente $\forall x > 0$

Por ello, no hay convergencia uniforme en $[0,\infty)$, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0,\infty) \} \right) = \infty \neq 0$$

Solo puede haber convergencia en intervalos del tipo $[0, a], a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [0,a] \} \right) = \lim_{n\to\infty} h(a) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left. \frac{n(e^{x} - e^{-x})}{(x+n)^2} \right]_{x=a} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{a} - e^{-a})}{(a+n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{a} - e^{-a})}{n^2 + 2an + a^2} = 0$$

Luego sí hay convergencia uniforme en intervalos del tipo $[0, a]$, para $a>0$, $a \in \mathbb{R}$.

Problema 4

domingo, 17 de noviembre de 2024 22:44

Calcula el campo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n^3} (x-3)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)+1}{2^{n+1}\cdot(n+1)^3}\cdot(x-3)^{n+1}}{\frac{(n+1)}{2^n\cdot n^3}\cdot(x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)\cdot\cancel{(x-3)^n}(x-3)\ \cancel{2^n}\cdot n^3}{\cancel{2^n}\ 2\cdot(n+1)^3\cdot(n+1)\cdot\cancel{(x-3)^n}} \right| =$$

$$= |x-3|\cdot\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot n^3}{2\cdot(n+1)(n+1)^3} = |x-3|\cdot\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow |x-3| < 2 \Rightarrow R=2$$

$\boxed{x=1}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n\cdot n^3}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^3}$$

Es una serie alternada, utilizamos el criterio de Leibniz:

① $$\lim_{n\to\infty} (-1)^n\frac{(n+1)}{n^3} = 0$$

② $$|a_{n+1}| = \left|(-1)^{n+1}\frac{(n+2)}{(n+1)^3}\right| = \frac{n+2}{(n+1)^3} < \frac{n+1}{n^3} = \left|(-1)^n\frac{(n+1)}{n^3}\right| = |a_n|$$

Luego es convergente.

$\boxed{x=5}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\cancel{2^n}\cdot n^3}\cdot\cancel{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$$ convergente por el criterio de Pringsheim con $\alpha = 2$.

Luego el campo de convergencia es $\boxed{C = [1,5]}$