TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	25/06/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 1

Si $x + iy = \dfrac{3}{2+\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta)}$, obtén la expresión más simplificada posible de x^2+y^2.

Solución:

$$x+iy = \frac{3}{(2+\cos(\theta))+i\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{3\left((2+\cos(\theta))-i\operatorname{sen}(\theta)\right)}{\left((2+\cos(\theta))+i\operatorname{sen}(\theta)\right)\left((2+\cos(\theta))-i\operatorname{sen}(\theta)\right)} =$$

$$= \frac{3\,(2+\cos(\theta))+i\,(-3\operatorname{sen}(\theta))}{(2+\cos(\theta))^2+\operatorname{sen}^2(\theta)} = \frac{3\,(2+\cos(\theta))+i\,(-3\operatorname{sen}(\theta))}{4+4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)} =$$

$$= \frac{3\,(2+\cos(\theta))+i\,(-3\operatorname{sen}(\theta))}{5+4\cos(\theta)}$$

Luego $\quad x = \dfrac{3\,(2+\cos(\theta))}{5+4\cos(\theta)},\quad y = \dfrac{-3\operatorname{sen}(\theta)}{5+4\cos(\theta)}$

$$x^2+y^2 = \left(\frac{3\,(2+\cos(\theta))}{5+4\cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{-3\operatorname{sen}(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\right)^2 =$$

$$= \frac{9\,(4+4\cos(\theta)+\cos^2(\theta))+9\operatorname{sen}^2(\theta)}{(5+4\cos(\theta))^2} =$$

$$= \frac{9\,\cancel{\left(5+4\cos(\theta)\right)}}{(5+4\cos(\theta))^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{9}{5+4\cos(\theta)}}$$

Alternativamente, el problema se puede resolver de la siguiente manera:

$$x+iy = \frac{3}{(2+\cos(\theta))+i\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{3}{2+e^{i\theta}}$$

$$x^2+y^2 = (x+iy)\,(x-iy) = \frac{3}{(2+e^{i\theta})}\frac{3}{(2+e^{-i\theta})} = \frac{9}{4+2\,(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1} =$$

$$= \frac{9}{5+2\big(\cos(\theta)+\cancel{i\operatorname{sen}(\theta)}+\cos(\theta)-\cancel{i\operatorname{sen}(\theta)}\big)} = \frac{9}{5+4\cos(\theta)}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	25/06/2024
CURSO	2º	**HORA**	15:00
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 2

Determina si las siguientes integrales son convergentes o divergentes, calculando su valor en caso de que sean convergentes y su valor principal de Cauchy en caso de que sean divergentes (y sea apropiado su cálculo).

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3}dx \qquad I_2 = \int_0^4 \frac{x+3}{x-2}dx$$

Solución:

a) Se trata de una integral impropia de primera especie.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{t} \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \infty \rightarrow t = \infty \end{array} \right\} = \int_1^{\infty} \frac{t^{\cancel{3}^{2}}}{t^2+3}\frac{dt}{\cancel{t}} = \int_1^{\infty} \frac{t^2}{t^2+3}dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(1 - \frac{3}{t^2+3}\right) dt = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(1 - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\left(1+\dfrac{t^2}{3}\right)}\right) dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(1 - \frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) dt = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(1 - \frac{\sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[x - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(k - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) - 1 + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\infty - \sqrt{3}\arctan(\infty) - 1 + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \infty$$

Luego I_1 es divergente. En este caso, no tiene sentido calcular el valor principal de Cauchy, puesto que no se trata de una integral del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

b) Se trata de una integral impropia de segunda especie.

$$\int_0^4 \frac{x+3}{x-2}dx = \int_0^4 \left(\frac{x-2+5}{x-2}\right) dx = \int_0^4 \left(1+\frac{5}{x-2}\right) dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \left(1+\frac{5}{x-2}\right) dx + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{2+\epsilon}^4 \left(1+\frac{5}{x-2}\right) dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big[x + 5\mathrm{Ln}|x-2|\Big]_0^{2-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big[x + 5\mathrm{Ln}|x-2|\Big]_{2+\epsilon}^4 =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \big((2-\epsilon+5\mathrm{Ln}|\cancel{2}-\epsilon-\cancel{2}|) - (0+5\mathrm{Ln}(2))\big) +$$

$$+ \lim_{\epsilon \to 0^+} \big((4+5\mathrm{Ln}(2)) - (2+\epsilon+5\mathrm{Ln}|\cancel{2}+\epsilon-\cancel{2}|)\big) = \infty - \infty$$

Luego I_2 es <u>divergente</u>. En este caso sí tiene sentido calcular el valor principal de Cauchy.

$$\mathrm{V.\,P.}\left(\int_0^4 \frac{x+3}{x-2}dx\right) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_0^{2-\epsilon} \left(1+\frac{5}{x-2}\right) dx + \int_{2+\epsilon}^4 \left(1+\frac{5}{x-2}\right) dx\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} (\cancel{2} - \epsilon + \cancel{5\mathrm{Ln}(\epsilon)} - \cancel{5\mathrm{Ln}(2)} + 4 + \cancel{5\mathrm{Ln}(2)} - \cancel{2} - \epsilon - \cancel{5\mathrm{Ln}(\epsilon)}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (4 - 2\epsilon) = \boxed{4}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	25/06/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 3

Completa los siguientes apartados asociados a la sucesión de funciones cuyo término general es:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

a) Calcula su límite puntual.

b) Determina el intervalo más grande en el que la convergencia de la familia de funciones $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ es uniforme.

Solución:

a) Comenzaremos analizando la convergencia puntual:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $g(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - \left(x^2\right)^{1/2}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad g'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x\left(x^2\right)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$g'(x) = 0 \implies \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \implies$$

$$\implies \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + \frac{1}{n} \implies \nexists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } g'(x) = 0$$

Puesto que $\forall x \in (-\infty, 0)$ la función $g(x)$ es creciente y $\forall x \in (0, \infty)$ la función $g(x)$ es decreciente, y $g(x)$ es continua en $x = 0$, precisamente en el punto $x = 0$ tiene su único máximo.

$$x \in (-\infty, 0): \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}} > 0$$

$$x \in (0, \infty): \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}} < 0$$

Como $g(0) = \sqrt{0 + \frac{1}{n}} - \sqrt{0} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, resulta que $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, $\underline{f_n(x) \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ en todo } \mathbb{R}}$.

PROBLEMA 4

Determina el campo de convergencia de la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, incluyendo en el estudio los extremos del intervalo de convergencia en caso de que sea apropiado.

Solución:

Utilizaremos el criterio del cociente para calcular el radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(3x)^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\dfrac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x)^{2n+3}(2n+1)!}{(3x)^{2n+1}(2n+3)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(3x)^{2n+1}}(3x)^2\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{(3x)^{2n+1}}(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x)^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(3x)^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego le serie de funciones es <u>convergente en todo $\mathbb{R}$</u>.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	25/06/2024
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 5

Dada la señal $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, completa los siguientes apartados:

a) Calcula su energía.

b) Obtén las expresión más simplificada posible correspondiente a la parte real de su DTFT.

Solución:

a) $$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{4}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \boxed{\frac{16}{15}}$$

b) $$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}\big(\cos(\Omega) - j\,\text{sen}(\Omega)\big)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) + j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)}{\left(\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) + j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)\right)\left(\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)\right)} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)}{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{sen}(\Omega)}{1-\frac{1}{2}\cos(\Omega) + \frac{1}{16}\cos^2(\Omega) + \frac{1}{16}\,\text{sen}^2(\Omega)} =$$

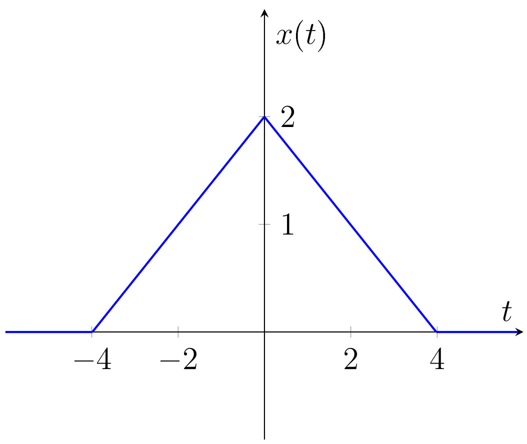
$$= \frac{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{se}(\Omega)}{1-\frac{1}{2}\cos(\Omega) + \frac{1}{16}} = \frac{\left(1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)\right) - j\frac{1}{4}\,\text{se}(\Omega)}{\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(\Omega)}$$

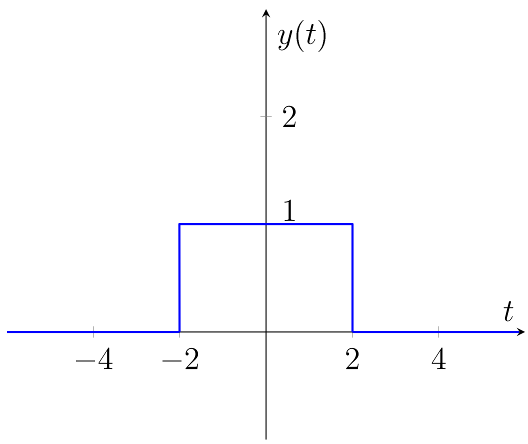
$$\Longrightarrow \boxed{\text{Re}(X(\Omega)) = \frac{1-\frac{1}{4}\cos(\Omega)}{\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos(\Omega)} = \frac{16-4\cos(\Omega)}{17-8\cos(\Omega)}}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	25/06/2024
CURSO	2º	**HORA**	15:00
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 6

Calcula la convolución de las siguientes señales:

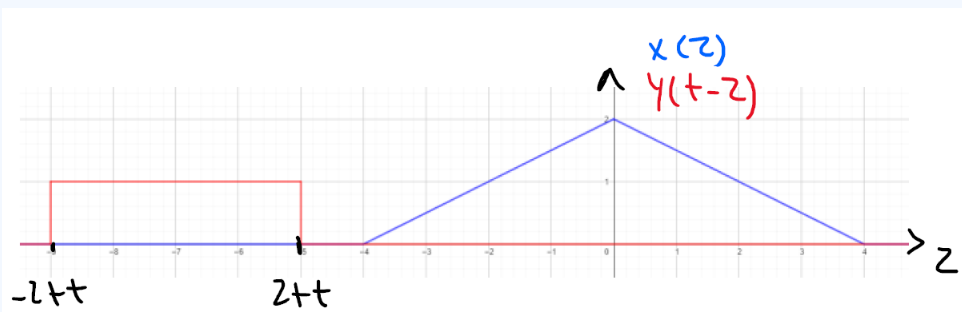




Solución:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -4 \\ 2 + t/2 & -4 < t < 0 \\ 2 - t/2 & 0 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 1 & -2 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

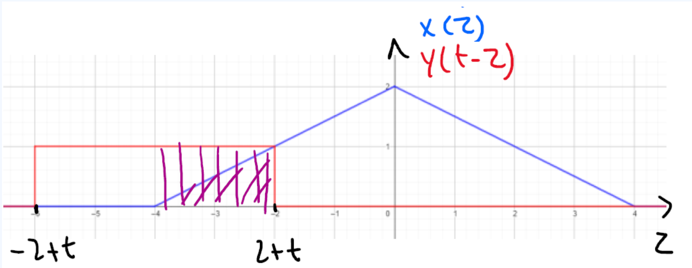
- Situación 1:



$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = 0$$

$$2 + t < -4 \implies t < -6$$

- Situación 2:

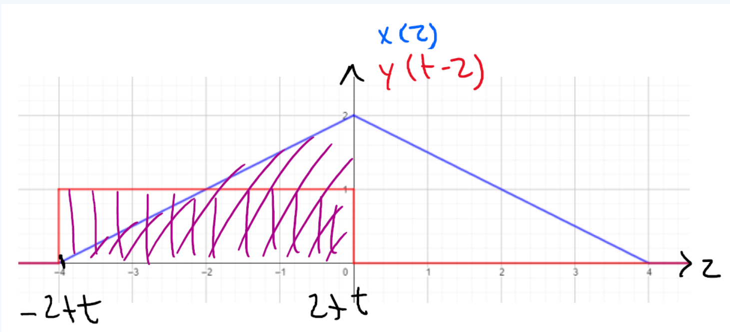


$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-4}^{2+t} \left(2 + \frac{\tau}{2}\right) d\tau = \left[2\tau + \frac{\tau^2}{4}\right]_{-4}^{2+t} =$$

$$= 2(2+t+4) + \frac{1}{4}\left(4 + 4t + t^2 - 16\right) = \frac{1}{4}t^2 + 3t + 9 = \frac{1}{4}(t+6)^2$$

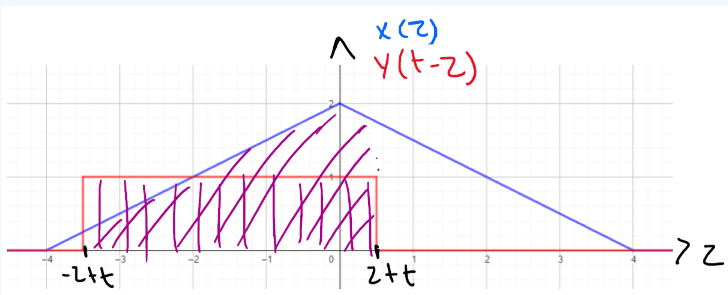
$$\left.\begin{array}{r} 2+t > -4 \rightarrow t > -6 \\ -2+t < -4 \rightarrow t < -2 \end{array}\right] \implies -6 < t < -2$$

- Situación 3:



Este caso solo sería válido para $t = -2$, y al ser un valor puntual se puede descartar.

- Situación 4:



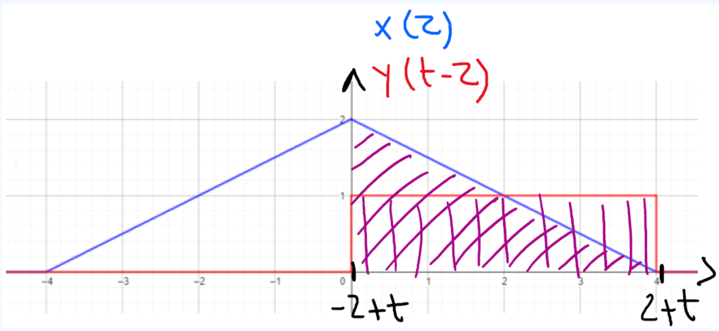
TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	25/06/2024	U-tad CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL
CURSO	2º	HORA	15:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-2+t}^{0} \left(2 + \frac{\tau}{2}\right) dz + \int_{0}^{2+t} \left(2 - \frac{\tau}{2}\right) d\tau =$$

$$= \left[2\tau + \frac{\tau^2}{4}\right]_{-2+t}^{0} + \left[2\tau - \frac{\tau^2}{4}\right]_{0}^{2+t} = -\frac{t^2}{2} + 6$$

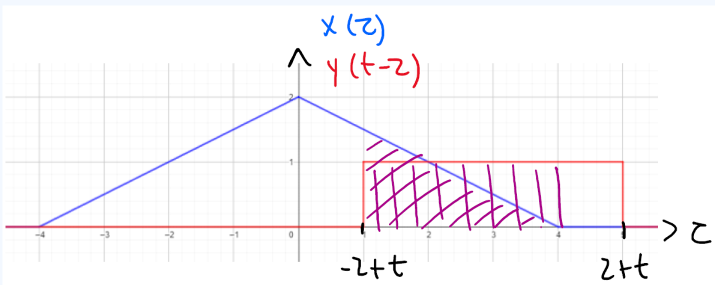
$$\left.\begin{array}{r} 2+t > 0 \to t > -2 \\ -2+t < 0 \to t < 2 \end{array}\right] \implies -2 < t < 2$$

- Situación 5:



Este caso solo sería válido para $t = 2$, y al ser un valor puntual se puede descartar.

- Situación 6:

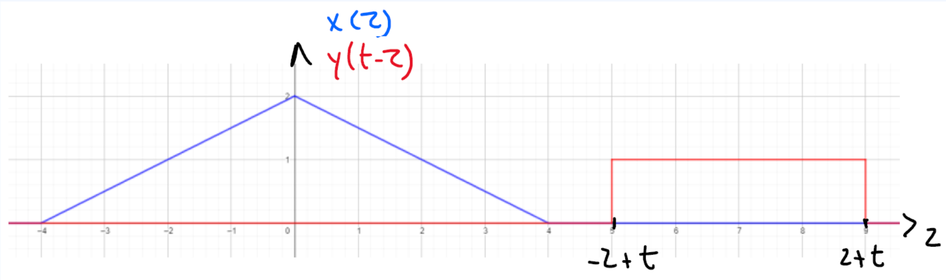


$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-2+t}^{4} \left(2 - \frac{\tau}{2}\right) d\tau = \left[2\tau - \frac{\tau^2}{4}\right]_{-2+t}^{4} =$$

$$= 2(4+2-t) - \frac{1}{4}\left(16 - \left(4 - 4t + t^2\right)\right) = \frac{t^2}{4} - 3t + 9 = \frac{1}{4}(t-6)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} 2+t > 4 \to t > 2 \\ -2+t < 4 \to t < 6 \end{array}\right] \implies 2 < t < 6$$

- Situación 7:



$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = 0$$

$$-2+t > 4 \implies t > 6$$

Por lo tanto $\boxed{z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < -6 \\ \dfrac{t^2}{4} + 3t + 9 & -6 < t < -2 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 6 & -2 < t < 2 \\ \dfrac{t^2}{4} - 3t + 9 & 2 < t < 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases}}$