CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

ESPACIOS VECTORIALES

Problemas

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Curso 2024-2025

Subespacios vectoriales

- S es subespacio vectorial de E $\Longleftrightarrow$ 1) S$\neq \emptyset$
  2)$\forall \alpha, \beta \in R \ y \ \forall x, y \in S, \quad \alpha x + \beta y \in S$

- **Problema 1** **S=**{(x,y,z)$\in R^3 \ /2x - y + 3z = 0$}

1) $(0{,}0{,}0) \in S \Longrightarrow$ S $\neq \emptyset$
2) $Tomamos \ \ u = (x, y, z) \in S \ \ \rightarrow 2x - y + 3z = 0$
$v = (x', y', z') \in S \ \ \rightarrow 2x' - y' + 3z' = 0$
$¿\, \alpha u + \beta v \in S$?
$\alpha u + \beta v$=$\alpha \ (x, y, z)$+ $\beta \ (x', y', z')$= $(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in S$ si y sólo si
2$(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') + 3(\alpha z + \beta z')$ =0
=$\alpha(2x - y + 3z)$+ $\beta \ (2x' - y' + 3z')$ =0 $\ \forall \ \alpha \ y \ \beta \in R$

S es subespacio vectorial

Subespacios vectoriales

- **Problema 2** S= {(x,y)∈ R^2 $/x.y=0\}$

1) $(0,0) \in S \longrightarrow S \neq \emptyset$
2) $Tomamos\ \ u=(x,y) \in S \ \ \rightarrow xy=0$

$v=(x',y') \in S \ \ \rightarrow x'y'=0$

¿ $\alpha u+\beta v \in S$?

$\alpha u+\beta v = \alpha\ (x,y) + \beta\ (x',y') = (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') \in S$ si y sólo si

$(\alpha x+\beta x').(\alpha y+\beta y')=0$

$=\alpha^2\ xy+\beta^2\ x'y' + \alpha\beta xy' + \alpha\beta x'y = \alpha\beta xy' + \alpha\beta x'y$

No tiene por qué ser 0 $\forall\ \alpha\ y\ \beta \in R$

$\Downarrow$

S NO es subespacio vectorial

Subespacios vectoriales

- **Problema 3** $\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(R)\ \ t.q. \det A = 0\}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A \longrightarrow$ A $\neq \emptyset$

2) $Tomamos\ \ u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ *a.d-b.c=0*

$v = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in S$ *a´.d´−b´.c´=0*

¿ $\boldsymbol{\alpha u + \beta v \in S}$?

$\alpha u + \beta v = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix} \in S$

$\det(\alpha u + \beta v) = (\alpha a + \beta a')\ (\alpha d + \beta d')$- $(\alpha b + \beta b')\ (\alpha c + \beta c')$ no tiene por qué ser cero

S no es subespacio vectorial

Subespacios vectoriales

- **Problema 7**

Dados los subespacios S y T

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 - x_2 = 0\} \quad T = L < (1,1,2,1), (2,3,-1,1) >$

$Obtener\ bases\ de\ \ S\ ,\ T,\ S \cap T$ y $S + T$

- $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 - x_2 = 0\}$=$(x_1, x_1, x_3, x_4)/x_1, x_3, x_4 \in S\}$ $\dim S = 3$ $Base: \{(1,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$
- $T = L < (1,1,2,1), (2,3,-1,1) >$=$\{\alpha(1,1,2,1) + \beta(2,3,-1,1)/\ \alpha, \beta \in R\}$=$\{(\alpha+2\beta, \alpha+3\beta, 2\alpha-\beta, \alpha+\beta)\ /\ \alpha, \beta \in R\}$

Como los dos vectores son linealmente independientes forman una base de T y dim T=2

- Obtenemos ahora S∩ T=$\{(\alpha+2\beta, \alpha+3\beta, 2\alpha-\beta, \alpha+\beta)/\alpha + 2\beta = \alpha+3\beta\}$=$\{(\alpha, \alpha, 2\alpha, \alpha)\ /\ \alpha \in R\}$

  Dim S∩ T=1 y una base de S∩ T: (1,1,2,1)

- Aplicando la formula dim (S∩ $T) + \dim (S + T) = \dim S + \dim T$ $\longrightarrow$ dim (S+T)=3+2-1=4

  y una base de S+T es la base canónica de R^4

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- **Problema 8**

¿Son $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ linealmente independientes?

- *Tomamos una combinación lineal de ellas igualada a* 0:

$\alpha\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}=0$ $\quad \alpha a+\beta+\gamma=0;\ \alpha+a\beta+a\gamma=0;\ a\gamma=0$

- $Caso\ 1\text{:}\ \ Si\ a=0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no son l.i.

- $Caso\ 2\text{:}\ \ Si\ a\neq 0 \Longrightarrow \gamma=0 \qquad \alpha a+\beta=0;\ \alpha+a\beta=0 \qquad (1-a^2)\,\alpha=0$

$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ son linealmente independientes si $a\neq \pm 1$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- **Problema 9**

$$¿Son\ x^2 + 3x + 1, \quad 2 - x \ \ y \ \ 1 + ax + x^2 \ \ vectores\ l.i.?$$

1) Tomamos una combinación lineal de ellos igualada a 0
Por la propia definición, son linealmente independientes cuando todos los coeficientes de esa combinación lineal son nulos

- Como $P_2(x) \approx R^3$: α (1,3,1)+β(2,-1,0)+$\gamma(1, a, 1) = 0$ ⟶

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha - \beta + a\gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Se deduce que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por tanto los polinomios son l.i.

2ª forma *Comprobamos si el rango de ese conjunto de vectores es 3*

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad por\ tanto\ los\ polinomios\ dados\ son\ vectores\ l.i.$$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- **Problema 10**

Se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar la dimensión y una base del subespacio U = {X ∈ M_{2x2}(R) / XA = 0}

- Como U = {X ∈ M_{2x2}(R) / XA = 0}={X ∈ M_{2x2}(R) / $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ }=
{ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ / x+y=0; z+t=0}={ $\begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix}$ / x,z ∈ R}
- Dim U = 2; base de U={$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ }

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- **Problema 11**

Obtener en R^4: a) una base que contenga al vector (1,2,1,1)
b) una base que contenga a los vectores (1,1,0,0), (0,0,2,2) y (0,3,3,0)

a) Tenemos que añadir 3 vectores de R^4 que sean linealmente independientes entre ellos y también con el vector dado

Idea : tomar 3 vectores de la base canónica: (1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0)

Importante: comprobar siempre que efectivamente forman una base

b) Primero: comprobar cuántos de los vectores dados son linealmente independientes, es decir cuál es el rango del conjunto de vectores dado

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow$$ Tengo que añadir un solo vector; p. ej. (0,0,0,1)

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

- **Problema 12**

Dadas B= $\{e_1, e_2, e_3\}$ $y\ B' = \{2e_1 + 3e_2, e_1 + e_3, -e_2 + e_3\}$
$a)$ *Si las coordenadas de un vector u respecto a B son* $(1,2,3)$,
¿ cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B´?)
b) *Si las coordenadas de un vector u respecto a B´ son* $(-2,1,0)$,
¿ cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B?

$$M_{BB'} = M_{B'}\ (|vectores\ de B|) = \boldsymbol{M_{B'}}\ (v_1|v_2|v_3)$$

- 1ª forma: coordenadas de los vectores de B *en la base* B'

$(1,0,0)=\alpha(2,3,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,-1,1) \longrightarrow \alpha = -1;\ \beta = 3;\ \gamma = -3$
$(0,1,0)=\alpha(2,3,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,-1,1) \longrightarrow \alpha = 1;\ \beta = -2;\ \gamma = 2$
$(0,0,1)=\alpha(2,3,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,-1,1) \longrightarrow \alpha = 1;\ \beta = -2;\ \gamma = 3$

- Multiplicamos $\boldsymbol{M_{BB'}} \cdot v_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$ Otra forma de calcular $\boldsymbol{M_{BB'}}=\boldsymbol{M_{B'B}}^{-1}$
- 2ª forma: directamente por coordenadas

$(1,2,3)=\alpha(2,3,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,-1,1) \longrightarrow \alpha = 4;\ \beta = -7;\ \gamma = 10$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

$b)$ *Si las coordenadas de un vector u respecto a $B´$ son $(-2,1,0)$,*
¿ cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B?

$$M_{B´B} = M_B\,(|vectores\ de B´|) = \boldsymbol{M_B}\ (v´_1|v´_2|v´_3)$$

- 1ª forma: coordenadas de los vectores de $B´$ *en la base* B
- Multiplicamos $\boldsymbol{M_{B´B}}\ .\ v_{\boldsymbol{B´}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 2ª forma: aplicamos que las coordenadas en la base B´ son los coeficientes de la c.l.
  $(-2,1,0)_{B´} = -2(2,3,0) + 1(1,0,1) + 0(0,-1,1) = (-3,-6,1)$

Idea principal: M= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_B\ (e_1'|e_2'|e_3') = M_{B´B}$

- **M es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B´ respecto de B** (en la base B): es por tanto la matriz de cambio de base de B´ a B, es decir la matriz que **permite, conocidas las coordenadas de un vector en base B´, calcular las coordenadas de ese mismo vector en la base B.**

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- **Problema 13**

Sea el espacio $P_3(x)$ con bases B = (1, x, x^2, x^3), B´ = (1+x, x+x^2 , x^2 $-x^3$, 1+ $2x^3$) y B´´ = (1, 1 + x, 1 + x + x^2 , 1 + x + x^2 + x^3).

a) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B a B´.
b) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B a B´´.
c) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B´ a B´´.
d) Sea el polinomio p(x) = x^3 − 2x. Hallar sus coordenadas con respecto a B, B´ y B´´.

$$M_{BB'} = M_{B'}\,(|vectores\ de B|) = \boldsymbol{M_{B'}}\,(v_1|v_2|v_3|v_4)$$

- 1ª forma: coordenadas de los vectores de B $en\ la\ base\ B'$

(1,0,0,0)=$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,0,1,-1)+\delta(1,0,0,2)$ $\quad \alpha=\gamma=\frac{2}{3};\ \beta=\frac{-2}{3};\delta=\frac{1}{3}$

(0,1,0,0)=$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,0,1,-1)+\delta(1,0,0,2)$ $\quad \alpha=\frac{1}{3};\gamma=\frac{-2}{3};\ \beta=\frac{2}{3};\delta=\frac{-1}{3}$

(0,0,1,0)=$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,0,1,-1)+\delta(1,0,0,2)$ $\quad \alpha=\frac{-1}{3};\gamma=\frac{2}{3};\ \beta=\frac{1}{3};\delta\frac{1}{3}$

(0,0,0,1)= $\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,0,1,-1)+\delta(1,0,0,2)$ $\quad \alpha=\frac{-1}{3};\gamma=\frac{-1}{3};\ \beta=\frac{1}{3};\delta=\frac{1}{3}$

- Multiplicamos $\boldsymbol{M_{BB'}}\cdot v_{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 2ª forma: directamente por coordenadas

(0,-2,0,1)=$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,0,1,-1)+\delta(1,0,0,2)$ $\quad \alpha=-1;\gamma=1;\ \beta=-1;\delta=1$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

$$M_{BB''} = M_{B''}\,(|vectores\ de B|) = \boldsymbol{M_{B''}}\,(v_1|v_2|v_3|v_4)$$

- 1ª forma: coordenadas de los vectores de B *en la base* B''

  (1,0,0,0)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\quad \alpha = 1;\ \gamma = \ \beta = \delta = 0$

  (0,1,0,0)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\quad \alpha = -1; \gamma = 0;\ \beta = 1; \delta = 0$

  (0,0,1,0)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\quad \alpha = 0; \gamma = 1;\ \beta = -1; \delta = 0$

  (0,0,0,1)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\quad \alpha = 0; \gamma = -1;\ \beta = 0; \delta = 1$

- Multiplicamos $\boldsymbol{M_{BB''}} \,.\, v_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 2ª forma: directamente por coordenadas

  (0,-2,0,1)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\quad \alpha = 2; \gamma = -1;\ \beta = -2; \delta = 1$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

$$M_{B'B''} = M_{\boldsymbol{B''}} (|vectores\ de B'|) = \boldsymbol{M_{B''}}\ (v'_1|v'_2|v'_3|v'_4)$$

- 1ª forma: coordenadas de los vectores de $B'\ en\ la\ base\ B''$
  (1,1,0,0)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\alpha = 0;\ \gamma = 0;\ \beta = 1; \delta = 0$
  (0,1,1,0)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\alpha = -1; \gamma = 1;\ \beta = 0; \delta = 0$
  (0,0,1,-1)=$\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\alpha = 0; \gamma = 2;\ \beta = -1; \delta = -1$
  (1,0,0,2)= $\alpha(1,0,0,0) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,1,1,0) + \delta(1,1,1,1)$ $\alpha = 1; \gamma = -2;\ \beta = 0; \delta = 2$

- Multiplicamos $\boldsymbol{M_{B'B''}}\ .\ v_{\boldsymbol{B'}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $Por\ tanto\ (0,-2,0,1)_{\ B} = \ (-1,-1,1,1)_{\ B'} = \ (2,-2,-1,1)_{\ B''}$

Independencia lineal. Sistema generador. Base. Dimensión

- Podemos comprob$ar\ que\ M_{BB''} = M_{B'B''}\ M_{BB'}$
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $M_{BB''}$ $t$ransforma las coordenadas de v en la base B en las coordenadas de v en la base B´´
- $M_{B'B''}\ M_{BB'}$

1º) Transforma las coordenadas de v en la base B en las coordenadas *de v en la base B´*
2º) Transforma las coordenadas de v en la base B' en las coordenadas *de v en la base B´´*

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

- **Problema 14**

B_1={$1+x+x^2$, $x+2x^2$, $1+x$} y

B_2={$1+2x+3x^2$, $\alpha+(\alpha-1)x-2x^2$, $2+2x$}

a) Calcular el valor de α para que el polinomio p(x) de coordenadas (1,1,0) en la base B_2 tenga coordenadas (1,0,3) en la base B_1

- $P_2(x) \approx R^3$ *por tanto* B_1={(1,1,1); (0,1,2); (1,1,0)} y
  B_2={(1,2,3), $(\alpha,\alpha-1,-2)$, (2,2,0)}

$$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})_{B_2} = (\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{3})_{B_1}$$

$1.(1,2,3)+1.(\alpha,\alpha-1,-2)+0.(2,2,0) = 1(1,1,1)+0.(0,1,2)+3(1,1,0)$

$(1+\alpha, 1+\alpha, 1)=(4,4,1) \Longleftrightarrow \alpha = 3$

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

b) Para el valor de α *calculado en el apartado anterior'* determinar el conjunto W de polinomios de $P_2(x)$ que tienen las mismas coordenadas en B_1 y B_2. ¿Es W un subespacio vectorial de $P_2(x)$?

$W = \{(a,b,c)/a.(1,2,3)+b.(3,2,-2)+c.(2,2,0) = a(1,1,1)+b.(0,1,2)+c(1,1,0)\}$

$= \{(a,b,c) \ /a+3b+2c = a+c;\ 2a+2b+2c = a+b+c;\ 3a-2b = a+2b\} = \{(2b,b,-3b)/\ b \in R\}$

W es un subespacio de dimensión 1 de R^3; base: (2,1,-3)

Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base

c) En caso afirmativo, calcular unas ecuaciones implícitas en base B_1 de un subespacio suplementario de W en $P_2(x)$

Para completar una base de P_2(x), nos faltan 2 vectores l.i. que no estén en W (vectores de P_2(x)-W):
(1,0,0) (0,1,0)formarán una base del suplementario de W,
O bien tomamos dos vectores de $B_{1:}$ (0,2,2) y (1,1,0)
Entonces el suplementario de W: W_S $\{\alpha(0,2,2) + \beta(1,1,0)\} = \{(\beta, 2\alpha + \beta, 2\alpha)\} = \{(x,y,z)/y=x+z\}$
Obviamente dim W_S =2

- **Problema 15**

$En\ P_3(x)$, espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios

$$S_1 = \{p(x) \in P_3(x)/\ p(0) = 0\ y\ las\ tangentes\ a\ p(x) en\ los\ puntos\ de\ abscisas\ 1\ y -1\ son\ paralelas\ \}$$

$$S_2=\{p(x) \in P_3(x)/\ p(2) = 0\ \}$$

a) Calcular la dimensión y obtener una base de cada uno de esos dos subespacios

b) Calcular el subespacio $S_1 \cap S_2$, una base del mismo y razonar si $S_1 + S_2$ es o no una suma directa.

c) Si p(x) es un vector de $S_1 \cap S_2$, calcular cuáles son sus coordenadas en la base $B = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\ , x^3\}$

d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que las coordenadas en la base canónica del vector obtenido en c) son efectivamente las mismas.

- $S_1=\{a + bx + cx^2+dx^3/p(0) = 0\ \ y\ p´(1) = p´(-1)\ \}$
- p(x)=$a + bx + cx^2+dx^3 \longrightarrow p(0) = a = 0$
- p´(x) = $b + 2cx+3dx^2$ $\longrightarrow$ p´(1)=b+2c+3d=b-2c+3d=p´(-1) $\longrightarrow$ c=0
- Es decir $S_1=\{bx + dx^3\ / b, d \in R\}$ $\longrightarrow$ *dim* S_1 *=2 Base:* $\{x, x^3\}$ *o bien* $\{(0,1,0,0); (0,0,0,1)\}$

- $S_2=\{a + bx + cx^2+dx^3/p(2) = 0\ \} = \{a + bx + cx^2+dx^3/a + 2b + 4c + 8d = 0\} =$
  $= \{(-2b - 4c - 8d, b, c, d)/b, c, d \in R\}$ $\longrightarrow$ dim S_2 =3 Base:{(-2,1,0,0); (-4,0,1,0); (-8,0,0,1)}

b) Calcular el subespacio $S_1 \cap S_2$, una base del mismo y razonar si $S_1 + S_2$ es o no una suma directa.

- ¿Cómo es $S_1 \cap S_2$?
- $S_1 \cap S_2$={$a + bx + cx^2$+dx^3/$p(0) = 0$; $p'(1) = p'(-1)$; $p(2) = 0$ }
- Son entonces polinomios del tipo $bx + dx^3$ tales que p(2)=0 ⟹ 2b+8d=0 ⟹ b=-4d
- $S_1 \cap S_2 = \{-4dx + dx^3 \ / \ d \in R\}$ ⟹ $dim\, S_1 \cap S_2$=1 base:(0,-4,0,1)
- por tanto **S∩ $\boldsymbol{T} \neq \{\mathbf{0}\}$ y la suma no es directa**

c) Si p(x) es un vector de $S_1 \cap S_2$, calcular cuáles son sus coordenadas en la base

$B = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}$

Como $P_3(x) \approx R^4$ podemos considerar B={(1,1,0,0); (0,1,1,0); (0,0,1,1); (0,0,0,1)}

Y obtenemos los coeficientes de la combinación lineal

$$(0, -4,0,1) = \alpha(1,1,0,0) + \beta\,(0,1,1,0) + \gamma\,(0,0,1,1) + \delta\,(0,0,0,1)\}$$

α=0; β=-4; γ=4; δ=-3

- Es decir, $(0, -4,0,1)_{B_c}$=$(0, -4,4, -3)_{B_c}$

d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que las coordenadas en la base canónica del vector obtenido en c) son efectivamente las mismas.

- Matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B_c a B es M_{B_cB}=$(vectores\ de\ B_c)_{\mathrm{B}}$
- Es decir $M_{B_cB}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0\\-4\\4\\-3\end{pmatrix}$

O equivalentemente

- Matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B a $B_c$es M_{BB_c}=$(vectores\ de\ \mathrm{B})_{B_c}$
- Es decir $M_{BB_c}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\\-3\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$

- **Problema 16**

Si $P_2(x)$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y p(x) es un polinomio de grado exactamente 2

a) Demostrar que tanto B={p(x), p´(x), p´´(x)} como B´={p(x), p(x)+p´(x), p´(x)+p´´(x)} son bases de $P_2(x)$
b) Analizar si $S = \{x(x-a)/a \in R\}$ es un subespacio vectorial de $P_2(x)$
c) Si p(x) pertenece a S y tiene raíz -1, obtener las coordenadas de $q(x)=x^2+x+2$ en la base B´
d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que el vector obtenido en c) es precisamente q(x).

- $P_2(x)=\{a+bx+cx^2/a,b,c \in R\} \overset{\text{isomorfos}}{\approx} R^3=\{(a,b,c)/a\,,b,c \in R\}$
- P(x) $=a+bx+cx^2\ (con\ c \neq 0)$ $\quad (a,b,c)$
- $P´(x) = b+2cx$ $\quad (b,2c,0)$
- $P´´(x) = 2c$ $\quad (2c,0,0)$
- $B = \{(a,b,c);\ (b,2c,0);\ (2c,0,0)\}$ $\quad B´ = \{(a,b,c); (a+b, b+2c, c);\ (b+2c, 2c, 0)\}$

a) Demostrar que tanto B={p(x), p´(x), p´´(x)} como B´={p(x), p(x)+p´(x), p´(x)+p´´(x)} son bases de $P_2(x)$

- Base B: Demostramos que son linealmente independientes rang $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 2c & 0 \\ 2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$=3 porque $c \neq 0$
- Y 3 vectores linealmente independientes siempre son sistema generador de un espacio vectorial de dimensión 3 ($R^3 \approx P_2$(x))

- Base B´: Demostramos que son linealmente independientes
- rang $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+2c & c \\ b+2c & 2c & 0 \end{pmatrix}$= rang $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 2c & 0 \\ b+2c & 2c & 0 \end{pmatrix}$ =rang $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 2c & 0 \\ 2c & 0 & 0 \end{pmatrix}$=3 porque $c \neq 0 \Longrightarrow$ son l.i.
- Y 3 vectores linealmente independientes siempre son sistema generador de un espacio vectorial de dimensión 3 ($R^3 \approx P_2$(x))

- Nota: es equivalente demostrar que rang A =3 o que |A|$\neq 0$

b) Analizar si $S = \{x(x-a)/a \in R\}$ es un subespacio vectorial de $P_2(x)$

$S = \{-\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2 / a \in R\} \approx \{(0, -\mathrm{a}, 1) / \mathrm{a} \in R\}$

- Tenemos que comprobar si $\forall\alpha, \beta \in R$ y $\forall u = (0, -a, 1) \in S\ y\ \forall v = (0, -a', 1) \in S\ se\ verifica\ que \quad \alpha u + \beta v \in S$

- $\alpha u + \beta v$=(0, $-\alpha a - \beta a', \alpha + \beta)$ pero $\alpha + \beta$ *no es uno para todos los valores de* α, β *por tanto* S *no es subespacio vectorial.*

c) Si p(x) pertenece a S y tiene raíz -1, obtener las coordenadas de $q(x)$=$x^2 + x + 2$ en la base B´
d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que el vector obtenido en c) es precisamente q(x)

- $P(x) = -\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2\ tal\ que\ p(-1) = 0 \longrightarrow p(-1) = a + 1 = 0 \longrightarrow a = -1 \longrightarrow p(x) = x + \mathrm{x}^2 \rightarrow (0,1,1)$
  $p'(x)=1+2x \rightarrow (1,2,0)$ y $p''(x)=2 \rightarrow (2,0,0)$
- Con este polinomio la base B´={(0,1,1); (1,3,1);(3,2,0)}
- Las coordenadas de q(x)= 2 +x+x^2 son los coeficientes de la combinación lineal
  $(2,1,1)_{B_c} = \alpha(0,1,1) + \beta(1,3,1) + \gamma(3,2,0) \longrightarrow \alpha = 2; \beta = -1;\ \gamma = 1 \qquad (2,1,1)_{B_c} = (2,-1,1)_{B'}$

- La matriz que nos permite volver a pasar este vector obtenido a la base canónica es $M_{B'B_c} = (|vectores\ de\ B'|)_{B_c}$
- Y si aplicamos la matriz de cambio de base al vector $q_{B_c} = M_{B'B_c} \cdot q_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Suma e intersección de subespacios. Suma directa

- **Problema 17**

Consideramos V$\equiv L < (1,2,3,4)\,,(-1,0,1,-1) >$
W$\equiv$\{(x,y,z,t)) / $2x+5y-z-t=0\}$

a) W={(x,y,z,2x+5y-z) / x,y,z$\in R\}$ $\dim W = 3; B = \{(1,0,0,2); (0,1,0,5); (0,0,1,-1)\}$
b) V={$(\alpha-\beta, 2\alpha, 3\alpha+\beta, 4\alpha-\beta)$ $/\alpha,\beta \in R\}$ dim V = 2

Vectores de V∩ W: $verifican$ $2(\alpha-\beta)$+5(2α)-($3\alpha+\beta$)-($4\alpha-\beta$)=0 $\longrightarrow$ $\alpha = \frac{4\beta}{5}$

Entonces V∩ W={($\frac{-\beta}{5}, \frac{8\beta}{5}, \frac{17\beta}{5}, \frac{11\beta}{5}$) $/\beta \in R\}$ dim V∩ W=1 Base: (-1,8,17,11)

V∩ W={(x,y,z,t)/ $y+8x=0; z+17x=0; t+11x=0\}$

c) No es suma directa porque V∩ $W \neq \{0\}$
d) (-1,1,1,2) = $\alpha\,(1,2,3,4)+\beta(-1,0,1,-1)$ $\longrightarrow$ sist. incompatible

Significa que el vector (-1,1,1,2) no es combinación lineal de la base de V: por tanto no pertenece a V: no tiene sentido por tanto hablar de esas coordenadas.

- **Problema 18**

V={ p(x)∈ $P_3(x)$/p´(x) ∈ $L<1+x^2,x^3>$}   W={ p(x)∈ $P_3(x)$/p´(x)= $p´´(x)$}
a) Calcular una base y las ecuaciones implícitas de V y W en la base canónica de $P_3(x)$
b) Calcular las ecuaciones paramétricas y una base de $V \cap W$
¿Pertenece el polinomio p(x)=1 a V? ¿y pertenece a $V \cap W$?
En caso afirmativo, calcular sus coordenadas en las bases de V y de $V \cap W$ obtenidas anteriormente.

a) Si p(x)∈ $P_3(x)$: p´(x) es un polinomio de $P_2(x)$ por tanto p´(x)∈ $L<1+x^2>$

p´(x) = $\alpha(1+x^2)$ $\longrightarrow$ p(x)= $\alpha x+\frac{\alpha x^3}{3}$+k

Por tanto V={k+$\alpha x+\frac{\alpha x^3}{3}$ /α ∈R} = {(x_1, x_2, x_3, x_4)/ x_3=0; x_2=3 x_4 }={(x_1, 3x_4, 0, x_4)/ x_1, x_4 ∈R}

- dim V=2 y una base de V: {(1,0,0,0); (0,3,0,1)}

a) W={ p(x)∈ $P_3(x)$/p´(x)= $p´´(x)$}= {$a+bx+cx^2$+dx^3 ∈ $P_3(x)$/ $b+2cx+3dx^2$=$2c+6dx$}=
= {$a+bx+cx^2$+dx^3/$b=c=d=0$}={(a,0,0,0)/ a∈ R}

- Dim W=1 y base de W: (1,0,0,0)

b) Observamos que W *está contenido en* V así que $V \cap W = W$ *y una base de* $V \cap W$ es (1,0,0,0)
P(x)=1 está en $V \cap W$ y por tanto en V

d) calcular sus coordenadas en las bases de V y de $V \cap W$ obtenidas anteriormente.
(1,0,0,0)=α(1,0,0,0)+β (0,3,0,1)} $\longrightarrow$ coordenadas: (1,0)   y en la base de $V \cap W$ *coordenada*: 1

- **Problema 19**

$P_n(x)$ es el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales; se pide:

a) Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas conforman una base de $P_n(x)$

b) Estudiar si los vectores $1+3x+5x^2, -1+2x^2$ y $3+3x+x^2$ son linealmente independientes

c) Si $V=L<1+x^2, 1-x^2>$

¿Pertenecen los polinomios p(x) = $1+5x^2$ y r(x) = 1+x a V?

d)Si $W=L<1+3x+5x^2, -1+2x^2$ y $3+3x+x^2>$

Calcular $V\cap W$ y $V+W$

a) p(x)=$x^n=(0,0,0\ldots.1)$ $\quad p´(x)=nx^{n-1}$=(0,0,0…n,0) $\quad$ p´´(x)=$n(n-1)x^{n-2}=(0,0,0\ldots.n(n-1),0,0)$
p^{n-2}(x)=$n(n-1)\ldots.3x^2=(0,0,n.(n-1)\ldots 3,0,\ldots,0)$ $\quad p^{n-1}$(x)=$n(n-1)\ldots 2.x=(0,n.(n-1)\ldots 2,0,\ldots,0)$
p^n(x)=$n!=(n!,0,\ldots,0)$ que efectivamente conforman una base de $R^{n+1}\approx P_n(x)$

b) Estudiar si los vectores $1+3x+5x^2, -1+2x^2$ y $3+3x+x^2$ son linealmente independientes

- *Estudiamos rang$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$=2 no es completo luego esos tres vectores son linealmente dependientes.*

c) Si V=L$<1+x^2, 1-x^2>$

¿Pertenecen los polinomios p(x) $=1+5x^2$ *y r(x) = 1+x a V?*

- *Un polinomio pertenecerá a V si puede escribirse como combinación lineal de los vectores que son base de V. Comprobamos:*
- *(1,0,5)=*$\alpha(1,0,1)+\beta(1,0,-1) \Longrightarrow \alpha=3;\ \beta=-2$ *El sistema es compatible luego el vector está en V*

  y sus coordenadas en esa base de V son (3,-2)
- *(1,1,0)=*$\alpha(1,0,1)+\beta(1,0,-1)$ *No tiene solución luego el vector no está en V*

d)Si W=L$<1+3x+5x^2, -1+2x^2$ *y* $3+3x+x^2>$ *Calcular* $V\cap W$ *y* $V+W$

$V = L<1+x^2, 1-x^2> = \{(\alpha+\beta, 0, \alpha-\beta) / \alpha,\beta \in R\}$ *dim V=2;*
$W = L<1+3x+5x^2, -1+2x^2> = \{(\gamma-\delta, 3\gamma, 5\gamma+2\delta)\} / \gamma,\delta \in R\}$ *dim W=2;*
$V\cap W$ *=conjunto de vectores que se ajustan a esos "2 patrones"*
$\{(\alpha+\beta, 0, \alpha-\beta) = (\gamma-\delta, 3\gamma, 5\gamma+2\delta)\}$ $\gamma=0;\ \delta=2\alpha;\ \beta=-3\alpha$ $V\cap W = \{(-2\alpha, 0, 4\alpha) / \alpha \in R\}$
dim $V\cap W=1$ *Base (-2,0,4)*
De la fórmula de Grassmann deducimos que dim (V_1+V_2*)=3*
Basta considerar 3 vectores de las bases de V y W que sean linealmente independientes
$(1,0,1), (1,0,-1)\ (1,3,5)$ *(Comprobar que el rango es 3)*

Espacio vectorial cociente

- **Problema 20**

Sean los espacios vectoriales E =F=R^2
Calcular una base del espacio vectorial producto ExF asociada a la base canónica de R^2

Dim V = ExF=4 Base de ExF: {v_1=(e_1,0); v_2=(e_2,0); v_3=(0, e_1); v_4=(0, e_2)}

- En forma de coordenadas: {(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); 0,0,0,1)}
- Es la base canónica de $R^2 x R^2$=R^4

Espacio vectorial cociente

- **Problema 21**

B= $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E.
Sea V el subespacio de E engendrado por $\{u_1, u_2\}$ $siendo$

$$u_1 = e_1 - e_2 \quad y \quad u_2 = e_1 + e_2$$

Calcular una base del espacio vectorial cociente

B= $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E dim E = 3

$V = L < u_1 = e_1 - e_2 , u_2 = e_1 + e_2 >$ $\longrightarrow$ dim V=2

Espacio vectorial cociente $\frac{E}{V}$ dim $\frac{E}{V}$ =3-2=1

Necesitamos encontrar un único vector no nulo de $\frac{E}{V}$

¿Cómo son los vectores de $\frac{E}{V}$? Son clases de equivalencia

C$[x_0] \neq c[0]$ $\longleftrightarrow$ $x_0 \notin V$ $(porque$ x_0R 0 $\longleftrightarrow$ x_0-0$\in V)$

Entonces, basta elegir un vector que no esté en V (que no sea c.l. de $u_1 y\ u_2$): p. ej. e_3

Espacio vectorial cociente

- **Problema 22**

Obtener una base del espacio vectorial cociente R^4 *módulo V siendo V el subespacio generado por* los vectores (1,0,1,1), (1,2,1,1) y (2,2,2,2)

Dim V = rang $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$=2

Entonces dim $\frac{R^4}{V} = 4 - 2 = 2$

Necesitamos 2 vectores l.i. de $\frac{R^4}{V}$: son dos clases de equivalencia de 2 vectores del suplementario de V (de vectores que no están en V)

V=L< (1,0,1,1), (1,2,1,1) >={($\alpha + \beta$,2β,$\alpha + \beta$, $\alpha + \beta$)} $= \{(x, y, z, t) \ / \ x = z = t\}$

(1,0,0,0) y (0,0,0,1) no pertenecen a V y son l.i.: las clases [(1,0,0,0)] y [(0,0,0,1)] son una base del espacio cociente.