Geometría Lineal

Tema 5

Cónicas y cuádricas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 2.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Cónicas

1.1 Definición de una cónica

Una **cónica** es la curva que resulta de la intersección de un cono y un plano.

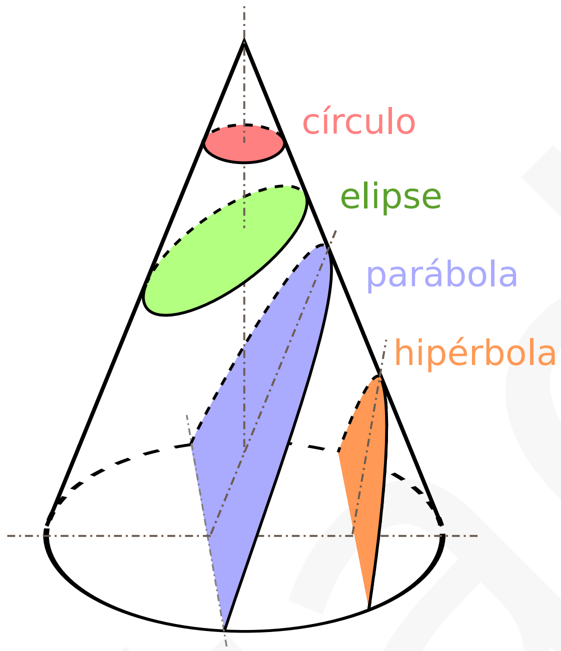


Figura 1: Secciones cónicas

Debido a ello, una cónica es una curva plana definida por la siguiente ecuación implícita de segundo grado:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c_1 = 0$$

Esta ecuación se puede expresar de forma matricial:

$$\tilde{X}^t A \tilde{X} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = O$$

o de forma equivalente

$$X^t A_0 X + 2LX + C_1 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C_1 = O$$

donde $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c_1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $C_1 = (c_1)$.

1.2 Tipos de cónicas

1.2.1 Elipse

Una **elipse** se define como el conjunto de los puntos (x, y) del plano tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. Esta suma constante de distancias se denota por $2a$, y la distancia entre los focos se denota por $2c$.

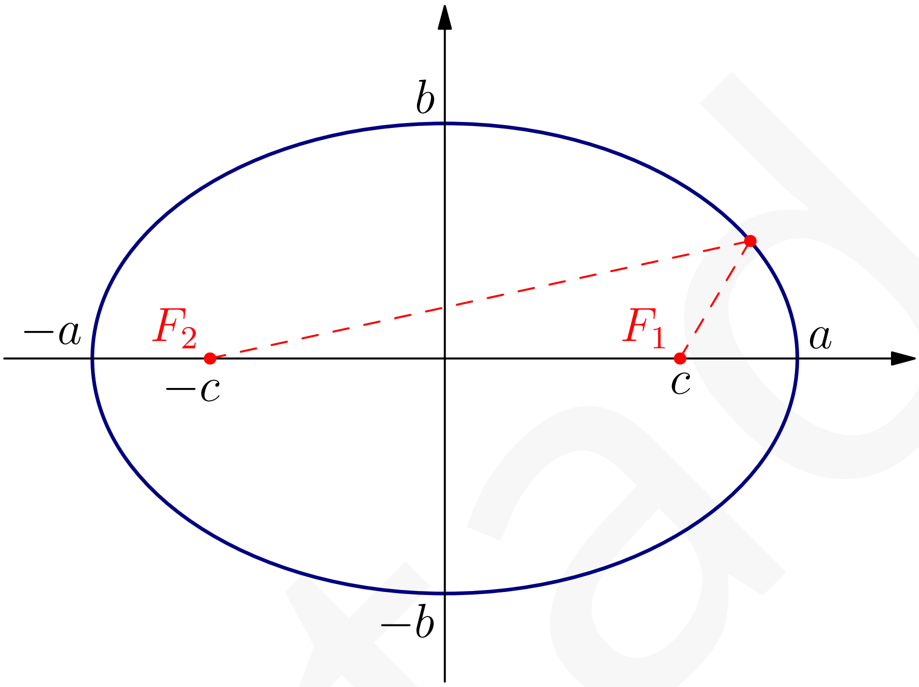


Figura 2: Elipse

La ecuación de una elipse centrada en el origen, eje mayor de longitud $2a$ coincidente con el eje X y eje menor de longitud $2b$ coincidente con el eje Y está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los elementos notables de una elipse incluyen su centro, semieje mayor de longitud a, semieje menor de longitud b, excentricidad e y focos. La excentricidad de una elipse se define como el cociente de la distancia entre los focos y la longitud del eje mayor, es decir, $e = \dfrac{c}{a}$.

Algunas de las propiedades más interesantes de la elipse son:

- La suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a los focos siempre es constante y igual a $2a$.
- La distancia desde el centro de la elipse a cualquier punto de la elipse siempre es menor o igual a a.
- La longitud del semieje menor es $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- La excentricidad de una elipse cumple la desigualdad $0 < e < 1$. Cuando la excentricidad es nula la elipse se convierte en una circunferencia.
- El área de una elipse está dada por $A = \pi a b$.

1.2.2 Parábola

Una **parábola** se define como el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo llamado **foco** y una línea recta llamada **directriz**. La parábola tiene un eje de simetría, que es la línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos ramas, y un vértice, que es el punto de la parábola que también pertenece al eje de simetría. El eje de simetría y la directriz son perpendiculares entre sí.

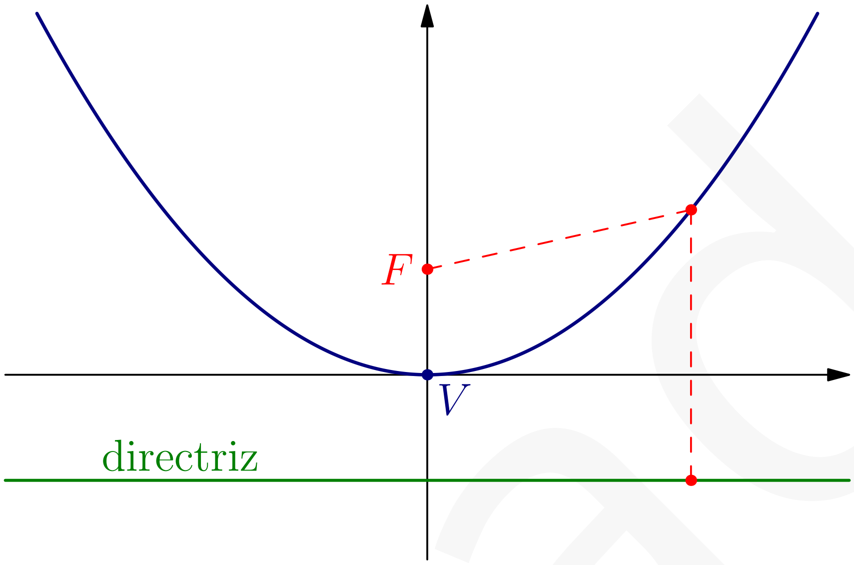


Figura 3: Elipse

Matemáticamente, la ecuación estándar de una parábola con su vértice en el origen, eje de simetría coincidente con el eje Y, foco $F = (0, p)$ y directriz de ecuación $y + p = 0$ es $4py = x^2$.

De forma equivalente, la ecuación estándar de una parábola con su vértice en el origen, eje de simetría coincidente con el eje X, foco $F = (p, 0)$ y directriz de ecuación $x + p = 0$ es $4px = y^2$.

El parámetro p representa la distancia desde el vértice al foco y a la directriz, de forma que la directriz se encuentra a p unidades del vértice en la dirección opuesta al foco. Si $p > 0$, la parábola $4py = x^2$ continúa hacia arriba, y si $p < 0$, parábola con la misma expresión continúa hacia abajo.

1.2.3 Hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos del plano tal que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

A continuacion se muestra la ecuación de una hiperbola centrada en el origen donde a es la longitud del semieje transversal, b es la longitud del semieje conjugado, y los focos se encuentran en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Las hipérbolas tienen dos asíntotas, que son líneas rectas a las que se acerca la gráfica de curva. Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola descrita anteriormente son $y = \pm\frac{b}{a}x$.

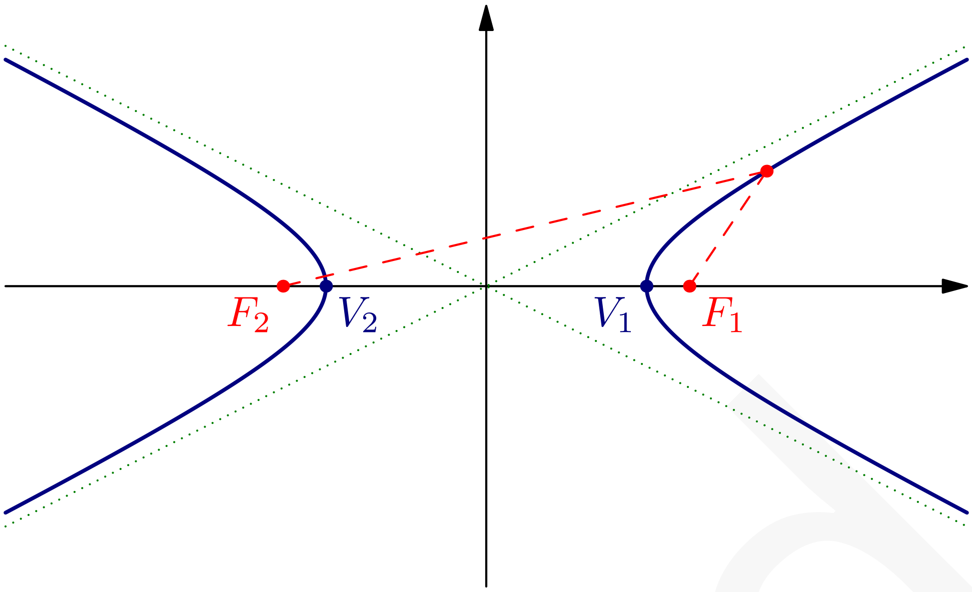


Figura 4: Hipérbola

La excentricidad de una hipérbola se define como la razón de la distancia entre los focos a la longitud del eje transversal. Se denota por e y tiene un valor mayor que 1 para las hipérbolas. La excentricidad determina la forma de la hipérbola, excentricidades elevadas generan curvas más alargadas. En la hipérbola de la figura la excentricidad es $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Las hipérbolas tienen ejes (transversal o principal y conjugado o secundario) y dos vértices, que son los puntos donde el eje transversal corta la hipérbola. Los vértices de la hipérbola descrita anteriormente se encuentran en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.

En resumen, una hipérbola es una sección cónica con dos focos y dos ramas que son asintóticas a dos líneas rectas. Su ecuación, asíntotas, excentricidad, vértices y asimetría son características matemáticas importantes que determinan su forma y propiedades.

1.3 Clasificación de cónicas mediante determinantes

La siguiente tabla permite clasificar el tipo de cónica en función del valor de $|A|$, $|A_0|$ y $\operatorname{tr}(A_0)$.

$|A| \neq 0 \begin{cases} |A_0| > 0: \text{ elipse} \begin{cases} |A| \cdot \operatorname{tr}(A_0) > 0: \text{ elipse imaginaria} \\ |A| \cdot \operatorname{tr}(A_0) < 0: \text{ elipse real} \end{cases} \\ |A_0| = 0: \text{ parábola} \\ |A_0| < 0: \text{ hipérbola} \end{cases}$
$|A| = 0 \begin{cases} |A_0| > 0: \text{ punto} \\ |A_0| = 0 \begin{cases} \operatorname{rg}(A) = 2: \text{ dos rectas paralelas} \\ \operatorname{rg}(A) = 1: \text{ una recta doble} \end{cases} \\ |A_0| < 0: \text{ dos rectas que se cortan} \end{cases}$

1.4 Elementos característicos de una cónica

1.4.1 Centro

El **centro** $C = (c_x, c_y)$ de una cónica es el punto que representa el centro de simetría, de forma que toda recta que pasa por C corta a la cónica en dos puntos simétricos. Las elipses e hipérbolas tienen centro, pero las parábolas no. Una cónica representada por la ecuación $X^t A_0 X + 2LX + C_1 = O$ tiene centro si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\boxed{A_0 C = -L^t \implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}}$$

1.4.2 Ejes

El **eje** de una cónica es la recta respecto de la cual la cónica es simétrica. Los ejes se obtienen a partir de los autovectores asociados a los autovalores de A_0 tomando como origen el centro. Si una cónica tiene centro, entonces dicho centro pertenece a todos los ejes. Las elipses e hiperbolas tienen dos ejes, mientras que las parábolas tienen uno.

En el caso de las elipses, el eje mayor es el que tiene como vector director un vector asociado al autovalor más pequeño. En el caso de la parábola, el eje se obtiene a partir del autovector asociado al autovalor nulo. En las hipérbolas, el eje que la corta tiene como vector director un autovector asociado al autovalor de signo positivo cuando $|A| > 0$ y de signo negativo si $|A| < 0$.

Para cada autovector $\overline{v} = (v_1, v_2)$ de un autovalor, el eje asociado se puede obtener de las siguientes maneras, donde en la fórmula de la derecha hay que incluir un autovector perpendicular al asociado al autovalor considerado:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t \qquad \begin{pmatrix} v_1^{\perp} & v_2^{\perp} & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = O}$$

1.4.3 Vértices

Los **vértices** son los puntos de corte de los ejes con la cónica. Las elipses tienen cuatro vértices, las parábolas uno y las hiperbolas dos.

1.4.4 Polar de un punto respecto a una cónica

Se denomina **polar** de un punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ respecto a una cónica a la variedad lineal dada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = O}$$

Si el punto P pertenece a la cónica pero no es un centro, la polar es la recta tangente a la cónica en dicho punto. En cambio, si el punto P no pertenece a la cónica pero es exterior a ella, entonces la polar es la recta que corta a la cónica en los puntos que generan las tangentes a la cónica considerando que el punto P también pertenece a dichas tangentes.

1.4.5 Asíntotas

La **dirección asíntótica** (también llamada **dirección isótropa**) de una cónica es la dirección en la que tiene una rama hacia el infinito. La dirección asintótica se calcula de la siguiente manera, donde (p, q) representa el vector director de la dirección y m la pendiente de la asíntota.

$$\boxed{\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = O \equiv \begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = O}$$

En una hipérbola, las **asíntotas** son las rectas que pasan por el centro y tienen por dirección precisamente la asintótica.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} t}$$

Si las asíntotas son perpendiculares entonces la **hipérbola** se dice que es **equilátera**. La condición de que las asíntotas sean perpendiculares en la práctica implica que la traza de la matriz A_0 es nula.

En relación a las asíntotas y las direcciones asintóticas, las cónicas cumplen lo siguiente:

- Una elipse no tiene ni direcciones asintóticas ni asíntotas.
- Una parábola tiene dirección asintótica, pero no tiene asíntotas.
- Una hipérbola tiene dos direcciones asintóticas y dos asíntotas.

1.4.6 Foco, directriz y excentricidad

El **foco** y la **directriz** de una cónica son, respectivamente, un punto y la recta polar asociada a dicho punto tal que se cumple la siguiente relación para todo punto P de la cónica, donde la excentricidad e es un valor constante para cada cónica:

$$\frac{\text{distancia}(\text{foco}, P)}{\text{distancia}(\text{directriz}, P)} = \text{excentricidad}$$

La excentricidad toma los siguientes valores para las distintas cónicas:

- Circunferencia: $e = 0$
- Elipse: $0 < e = \dfrac{c}{a} < 1$
- Parábola: $e = 1$
- Hipérbola: $e = \dfrac{c}{a} > 1$

La forma más cómoda de calcular los parámetros asociados a la excentricidad es mediante un cambio de referencia y paso a la cónica reducida. En cuanto a los focos, se pueden calcular a partir de las coordenadas del centro (o vértice en las parábolas), el vector unitario que marca la dirección del eje donde se encuentran los focos y el parámetro c (o p en las parábolas).

1.5 Forma reducida de una cónica

Puesto que la matriz A_0 es una matriz simétrica, sabemos que existe existe una base ortonormal B_N que, respecto del producto escalar usual, diagonaliza ortogonalmente la matriz A_0. Es decir:

$$A_0 = M_{B_N \to B_c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^t_{B_N \to B_c}$$

Por ello, haciendo el cambio de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_{B_N \to B_c} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, es posible obtener una forma equivalente de la cónica:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c_1 = 0 \implies \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C_1 = O$$

$$\implies \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 \end{pmatrix} M_{B_N \to B_c} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + C_1 = O$$

$$\implies \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$$

Después de completar cuadrados, el último paso consiste en identificar los desplazamientos que generan la ecuación reducida.

2 Cuádricas

2.1 Definición de una cuádrica

Una cuádrica es la superficie que tiene la siguiente ecuación:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c_1 = 0}$$

Esta ecuación se puede expresar de forma matricial:

$$\boxed{\tilde{X}^t A \tilde{X} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = O}$$

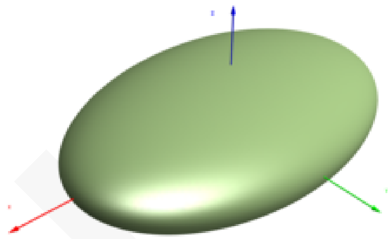
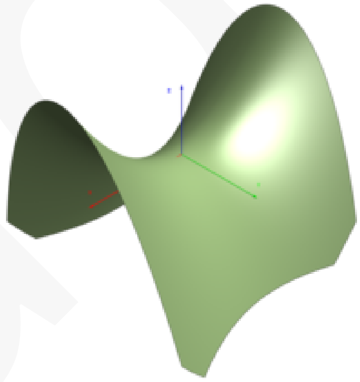
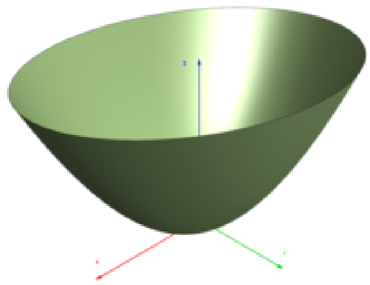
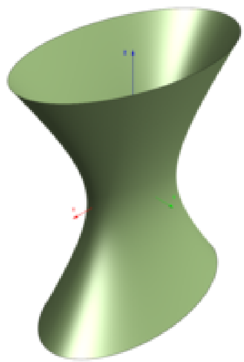
o de forma equivalente

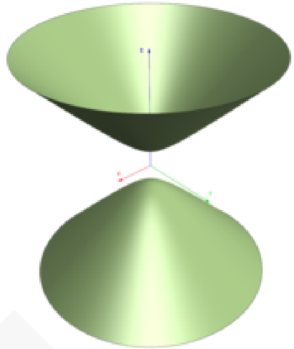
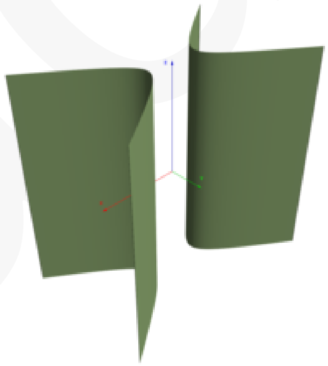
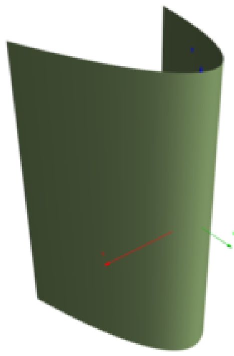
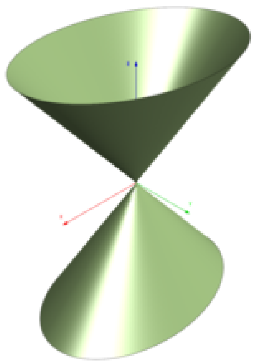
$$\boxed{X^t A_0 X + 2LX + C_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C_1 = O}$$

con $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, $C_1 = (c_1)$.

2.2 Tipos de cuádricas

A continuación se muestra un resumen de las cuádricas y las fórmulas que las definen.

Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	
Paraboloide hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$	
Paraboloide elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$	
Hiperboloide elíptico de una hoja	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	

Hiperboloide elíptico de dos hojas	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0$	
Cilindro elíptico	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	
Cilindro hiperbólico	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	
Cilindro parabólico	$x^2+2a\,y=0$	
Cono elíptico	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	

2.3 Clasificación de cuádricas mediante determinantes

La siguiente tabla permite clasificar el tipo de cuádrica en función del valor de $|A|$ y $|A_0|$, donde una matriz está definida en signo si es definida positiva (todos sus autovalores son positivos) o definida negativa (todos sus autovalores son negativos). Por otra parte, una matriz es semidefinida positiva cuando todos sus autovalores son positivos o cero, mientras que es semidefinida negativa si todos sus autovalores son negativos o cero.

$$|A| > 0 \begin{cases} |A_0| \neq 0 \begin{cases} A_0 \text{ definida en signo: elipsoide imaginario} \\ A_0 \text{ no definida en signo: hiperboloide de una hoja (hiperbólico)} \end{cases} \\ |A_0| = 0 \begin{cases} \text{paraboloide hiperbólico} \end{cases} \end{cases}$$

$$|A| < 0 \begin{cases} |A_0| \neq 0 \begin{cases} A_0 \text{ definida en signo: elipsoide real} \\ A_0 \text{ no definida en signo: hiperboloide de dos hojas (elíptico)} \end{cases} \\ |A_0| = 0 \begin{cases} \text{paraboloide elíptico} \end{cases} \end{cases}$$

$$|A| = 0 \begin{cases} |A_0| \neq 0 \begin{cases} A_0 \text{ definida en signo: punto (cono imaginario)} \\ A_0 \text{ no definida en signo: cono real} \end{cases} \\ |A_0| = 0 \begin{cases} \operatorname{rg}(A) = 3, \operatorname{rg}(A_0) = 2 \begin{cases} A_0 \text{ semid.: cilindro elíptico} \begin{cases} A \text{ no semid.: real} \\ A \text{ semid.: imaginario} \end{cases} \\ A_0 \text{ no semid.: cilindro hiperbólico} \end{cases} \\ \operatorname{rg}(A) = 3, \operatorname{rg}(A_0) = 1 : \text{cilindro parabólico} \\ \operatorname{rg}(A) = 2, \operatorname{rg}(A_0) = 2 : \text{dos planos que se cortan} \begin{cases} A_0 \text{ no semid.: reales} \\ A_0 \text{ semid.: imaginarios} \end{cases} \\ \operatorname{rg}(A) = 2, \operatorname{rg}(A_0) = 1 : \text{dos planos paralelos} \begin{cases} A \text{ no semid.: reales} \\ A \text{ semid.: imaginarios} \end{cases} \\ \operatorname{rg}(A) = 1, \operatorname{rg}(A_0) = 1 : \text{plano doble} \end{cases} \end{cases}$$

2.4 Elementos característicos de una cuádrica

2.4.1 Centro

El **centro** $C = (c_x, c_y, c_z)$ de una cuádrica es el punto que representa el centro de simetría. Una cuádrica representada por la ecuación $X^t A_0 X + 2LX + C_1 = O$ tiene centro si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución:

$$\boxed{A_0 C = -L^t \implies \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix}}$$

2.4.2 Ejes

El **eje** de una cuádrica es la recta respecto de la cual la cuádrica es simétrica. Los ejes se obtienen a partir de los autovectores asociados a los autovalores de A_0 tomando como origen el centro. Si una cuádrica tiene centro, entonces dicho centro pertenece a todos los ejes.

Para cada autovector $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el eje se puede obtener de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t \implies \begin{cases} x = c_x + v_1 t \\ y = c_y + v_2 t \\ z = c_z + v_3 t \end{cases}}$$

2.4.3 Polar de un punto respecto a una cuádrica

Se denomina **polar** de un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ respecto a una cuádrica a la variedad lineal dada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = O}$$

Si el punto P pertenece a la cuádrica pero no es un centro, la polar coincide con el plano tangente a la cuádrica en dicho punto. Dicho plano corta a la cuádrica en un conjunto de rectas.

2.5 Cono tangente y contorno aparente

Puesto que la matriz A es simétrica, podemos afirmar que representa una forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$. Si denotamos como φ a la forma cuadrática asociada a la matriz A, podemos establecer una nueva definición para las cuádricas:

$$\text{Cuádrica} \equiv \{(x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(P, P) = 0\}$$

Se denomina **cono tangente** desde el punto P a una cuádrica al conjunto de rectas que pasan por P y son tangentes a la cuádrica. La siguiente fórmula permite obtener el cono tangente, donde φ es la forma bilineal simétrica que define la cuádrica:

$$\big(\varphi(P, P)\varphi(X, X)\big) - \big(\varphi(X, P)\big)^2 = 0$$

Se denomina **contorno aparente** desde P a los puntos de tangencia del cono con la cuádrica. Dichos puntos verifican la siguiente ecuación:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(X, X) &= 0 \\ \varphi(X, P) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3 Problemas

1) Determina las ecuaciones matriciales asociadas a la cónica $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - y - 5 = 0$.

2) Determina la ecuacion de la cónica que pasa por los puntos $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(3/2, 1/4)$ y $(3/2, -3/4)$.

3) Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1 = (1,-2)$ y $F_2 = (1,4)$, y que pasa por el punto $(5,1)$.

4) Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(3,2)$ y foco en $(5,2)$.

5) Determine las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz en una parábola cuya ecuación es $(x+6)^2 = -24(y-2)$.

6) Determine los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

7) Determine los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $\dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$.

8) Clasifica las siguientes cónicas:
   a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 1 = 0$
   b) $2xy + 2x - 2y + 1 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

9) Clasifica la conica $x^2 - 2\alpha xy + 2\alpha y^2 - 2x + 4\alpha y = 0$ en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

10) Determina la recta tangente a la cónica $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ en el punto $(-1,2)$ y las tangentes a la cónica desde el punto $(5,5)$.

11) Determina la recta polar a la cónica $8x^2 + 2y^2 - 4y + 2 = 0$ en el punto $(0,1)$.

12) Determina las rectas tangentes a la cónica $x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y = 0$ desde $P = (-1,-3)$.

13) Determina las asíntotas de la hipérbola $6xy - 2x - 1 = 0$.

14) Determina el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la cónica $3x^2 - 5y^2 - 2xy - 4x + 2 + \alpha(x^2 - 2y^2 - xy) = 0$ sea una hipérbola equilátera y calcula las asíntotas resultantes.

15) Halla las normales a la hipérbola $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ en cualquiera de sus puntos.

16) Haz un estudio de la cónica $11x^2 + 14y^2 - 4xy + 40x + 20y + 45 = 0$ que incluya su clasificación, la ecuación reducida, su centro, los ejes, la excentricidad, los vértices y focos.

17) Haz un estudio de la cónica $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 8y = 0$ que incluya su clasificación, la ecuación reducida, su centro, los ejes, la excentricidad, los vértices y focos.

18) Haz un estudio de la cónica $x^2 - 8xy + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$ que incluya su clasificación, la ecuación reducida, su centro, los ejes, la excentricidad, los vértices y focos.

19) Dada la cónica $4x^2 + \alpha y^2 + 2x - 2 = 0$, determina su forma reducida canónica en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

20) Dada la familia de cónicas representada por la ecuación $x^2 + m^2 y^2 + 2xy + 2x + 2my + 2m = 0$, donde $m \in \mathbb{R}$, clasifica las cónicas en función de m. A continuación, obtén la ecuación reducida y el foco (o focos) para el caso $m = -1$.

21) Dada la cónica de ecuación $3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0$, indica su tipo, obtén la ecuación reducida y el foco (o focos). Por último, determina el punto cuya recta polar es $x = 1$.

22) Clasifica las siguientes cuádricas:

a) $4x^2 + z^2 + 4xz - 4y + 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 6xz + 2x - 2y + 2 = 0$.

c) $xy + yz + xz - 1 = 0$.

23) Clasifica la cuádrica $9y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ y obtén su ecuación reducida.

24) Clasifica la cuádrica $x^2 + y^2 - 5z^2 + 4xy - 8xz + 8yz + 18x - 18y + 36z - 54 = 0$ y obtén su ecuación reducida.

25) Clasifica la cuádrica $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz + 6x - 18y - 60z + 104 = 0$ y obtén su ecuación reducida.

26) Dado el hiperboloide elíptico $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$ obtén su centro y sus ejes.

27) Dado el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4x + 4y + 5 = 0$ determina vértice y ejes.

28) Identifica para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ tiene centro la cuádrica definida por la ecuación $x^2 + 2\alpha xy + 2xz + z^2 - 2x + 4y - z + 1 = 0$. Para dichos valores, determina el centro.

29) Determina el plano tangente al hiperboloide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ en el punto $(2, 0, 0)$. A continuación, calcula la intersección del hiperboloide con el plano obtenido.

30) Dada la cuádrica $x^2 + y^2 + 2xy - 2z = 0$ y el punto $P = (0, 1, -1)$, determina el cono tangente a Q desde P y el contorno aparente desde P.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- María Isabel García Planas. *Álgebra lineal y geometría para la ingeniería*. Disponible en `https://upcommons.upc.edu/handle/2117/11985`.
- María Luisa Casado Fuente, Ángeles Castejón Solanas, José Fábrega Golpe, María del Carmen Morillo y Luis Sebastián Lorente. *Apuntes de Geometría Lineal*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Universidad Politécnica de Madrid.
- José María Salazar. *Apuntes de cónicas y cuádricas*. Departamento de Física y Matemáticas. Universidad de Alcalá de Henares. Disponible en `https://josemsalazar.web.uah.es/material_docente_arquitectura/alg/Conicas_y_cuadricas/Conicas_y_cuadricas.htm`.