Geometría Lineal

Tema 6

Geometría proyectiva

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Plano proyectivo

Dados el cuerpo $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$, se define el **espacio proyectivo** $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, también denotado como $\mathrm{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, como el conjunto $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)\}$ junto con la relación de equivalencia $\sim$ definida de manera que dos elementos del espacio proyectivo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ y $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$ son equivalentes si y solo si existe un valor $\lambda \neq 0$ tal que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n+1})$. La clase de equivalencia del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ se representa habitualmente como $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ o $[x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}]$.

El ejemplo de espacio proyectivo más sencillo es la recta proyectiva real, que se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}}$$

En la recta real proyectiva, un punto $P = (x_1 : x_2)$ se puede interpretar como la proporción entre los valores x_1 y x_2. Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de la recta real $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ y los puntos de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow (x : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

En el caso particular del **plano proyectivo** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, podemos expresar dicho conjunto de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)\}}$$

Al igual que antes, podemos establecer una correspondencia entre los puntos del plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ y los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \longleftrightarrow (x : y : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Desde un punto de vista vectorial, puede afirmarse que los elementos (también llamados **puntos**) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^{n+1}$, y por ello es indiferente qué vector director de la recta se elija, puesto que cualquiera de ellos define unívocamente la recta y, con ello, el punto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Si $\overline{v}$ es un vector no nulo del espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos representar el punto $P \in \mathbb{P}^n$ como $P =< \overline{v} >$, en el sentido que P contiene a todos los vectores proporcionales a $\overline{v}$. Un conjunto de puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ son **independientes** si, como vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$, esos vectores son linealmente independientes.

Dado un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^{n+1}$, se denomina **subespacio proyectivo** (o **variedad lineal proyectiva**) al subconjunto $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ asociado a un subespacio vectorial no nulo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dados dos puntos independientes $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, donde $P =< \overline{v} >$, $Q =< \overline{w} >$ y los vectores $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son linealmente independientes, la recta proyectiva que contiene a P y Q se define como

$$\{(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0\} = \{< \lambda\overline{v} + \mu\overline{w} > \ \mid (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}$$

Si los puntos P y Q pertenecientes a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tienen como coordenadas homogéneas $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ y $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$, entonces un punto X pertenece a la recta definida por P y Q si y solo si sus coordenadas $(x_1 : x_2 : x_3)$ satisfacen las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano proyectivo:

$$\begin{cases} \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ \alpha x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases} \qquad (\alpha, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$$

Tal como se ha indicado anteriormente, también se puede afirmar que el punto $X = (x_1 : x_2 : x_3)$ pertenece a una recta del plano proyectivo si y solo si $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, que es la ecuación cartesiana del plano que se obtiene al imponer la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

De forma similar, tres puntos proyectivos independientes (es decir, tres puntos tales que ninguno pertenece a la recta definida por los otros dos puntos) define un plano proyectivo.

Es importante resaltar que, en el espacio proyectivo, no existe el paralelismo de rectas, puesto que todo par de rectas distintas se corta en un punto (ya sea un punto específico o el conocido como punto del infinito). De manera similar, toda recta no contenida en un plano proyectivo corta al plano en un punto.

2 Sistemas de referencia

En los espacios vectoriales existe el concepto de base que permite asignar coordenadas a los vectores respecto de la base dada. En el espacio afín hemos estudiado sistemas de referencia afines que permiten asignar coordenadas a los puntos. Nuestro objetivo ahora es poder establecer un sistema de referencia para una variedad lineal proyectiva en general.

La primera dificultad consiste en que los puntos del espacio proyectivo están definidos por una clase de equivalencia de vectores, por lo que las coordenadas de un punto están siempre definidas salvo por el escalar que las multiplica. La segunda dificultad, relacionada directamente con la anterior, está en fijar una base de la variedad lineal proyectiva.

Ejemplo

Dada la recta que pasa por los puntos $P_1 = (1 : 1 : 0)$ y $P_2 = (1 : 2 : 0)$, si tomamos el punto $Q = (0 : -1 : 0)$, se podría argumentar que las coordenadas de Q respecto de la base $\{P_1, P_2\}$ son $(1, -1)$, puesto que $(0, -1, 0) = (1, 1, 0) - (1, 2, 0)$. Sin embargo, si de forma alternativa escribimos P_1 como $(2 : 2 : 0)$, P_2 como $(-1 : -2 : 0)$, y Q como $(0 : -2 : 0)$, entonces se podría argumentar que $(0, -2, 0) = (2, 2, 0) + 2(-1, -2, 0)$, lo que implicaría que las coordenadas de Q respecto de la base $\{P_1, P_2\}$ serían $(1, 2) \neq (1, -1)$.

Debido al anterior problema, en geometría proyectiva es necesario añadir un punto más a la base de la variedad lineal proyectiva para poder normalizar la elección de los vectores en los puntos de la base.

Sea $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una variedad lineal proyectiva no vacía de dimensión $r \geqslant 0$. Un **sistema de referencia proyectivo** en L es un conjunto (ordenado) $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_{r+1}; P_{r+2}\}$ de $r+2$ puntos de L tales que $r+1$ cualesquiera de ellos forman una base de L, con lo que son linealmente independientes. Al sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_1, \cdots, P_{n+1}; P_{n+2}\}$ formado por los puntos $P_1 = (1:0:0:\cdots:0)$, $P_2 = (0:1:0:\cdots:0)$, ..., $P_{n+1} = (0:0:0:\cdots:0:1)$, $P_{n+2} = (1:1:1:\cdots:1)$ se le denomina **sistema de referencia canónico** de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Sean $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_{r+1}; P_{r+2}\}$ un sistema de referencia de una variedad lineal proyectiva $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_r, \overline{v}_{r+1}\}$ una base de $\mathcal{R}^{n+1}$, de forma que los vectores $\overline{v}_i$ representan a los puntos P_i. Se dice que la **base** de vectores está **normalizada** si $\overline{v}_{r+2} = \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_{r+1}$. En este contexto, un punto $P = (x_1 : \ldots : x_r : x_{n+1})$ tendrá coordenadas $(\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1})_{\mathcal{R}}$ respecto de $\mathcal{R}$ y si solo si existe un valor λ no nulo tal que se cumple la siguiente relación, donde $\overline{v}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{(n+1)i})$ para $i = 1, \ldots, r+1$ son los vectores de la base normalizada B_n.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(r+1)1} & \cdots & a_{(r+1)(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{r+1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

Dados dos sistema de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de la variedad lineal $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y un punto P de coordenadas $(\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1})_{\mathcal{R}}$ respecto de $\mathcal{R}$ y coordenadas $\left(\omega'_1, \ldots, \omega'_r, \omega'_{r+1}\right)_{\mathcal{R}'}$ respecto de $\mathcal{R}'$, entonces se cumple la siguiente relación, donde $M_{B_n \to B'_n}$ es la matriz de cambio de la base B_n de $\mathcal{R}$ a la base B'_n de $\mathcal{R}'$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \vdots \\ \omega'_{r+1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = M_{B_n \to B'_n} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{r+1} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$$

3 Razón doble de cuatro puntos

Dados cuatro puntos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ pertenecientes a una misma recta proyectiva, la razón doble de dichos puntos en el orden dado, denotada por $[A, B, C, D]$, es el escalar d_0/d_1, donde (d_0, d_1) son las coordenadas del punto D en la referencia $\{A, B; C\}$ de la recta.

Alternativamente, si las coordenadas en una referencia cualquiera de la recta son (a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1) y (d_0, d_1), entonces la razón doble se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}}$$

La relación entre las homografías (definidas en el siguiente apartado) y la razón doble consiste en que las homografías se caracterizan por dejar invariante la razón doble.

Si A, B, C son puntos distintos de la recta y $k \neq 0, 1$, entonces existe un único punto D tal que $[A, B, C, D] = k$. A continuación se muestran algunas propiedades de la razón doble:

1) $[A, B, C, D] = [B, A, D, C] = [C, D, A, B] = [D, C, B, A] = k$
2) $[B, A, C, D] = [A, B, D, C] = [D, C, A, B] = [C, D, B, A] = \dfrac{1}{k}$
3) $[A, C, B, D] = [D, B, C, A] = [C, A, D, B] = [B, D, A, C] = 1 - k$
4) $[C, B, A, D] = [A, D, C, B] = [D, A, B, C] = [B, C, D, A] = \dfrac{k}{k-1}$
5) $[A, D, B, C] = [C, B, D, A] = [B, C, A, D] = [D, A, C, B] = \dfrac{k-1}{k}$
6) $[D, B, A, C] = [B, D, C, A] = [C, A, B, D] = [A, C, D, B] = \dfrac{1}{1-k}$

4 Homografías o proyectividades

Dados dos espacios proyectivos $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, se denomina **aplicación proyectiva** a toda aplicación que transforma elementos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en elementos de $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \\ & (x_1 : x_2 \cdots : x_{n+1}) & \longrightarrow & (x'_1 : x'_2 \cdots : x'_{m+1}) \end{array}$$

Sean $L_1 \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $L_2 \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ variedades lineales proyectivas no vacías de la misma dimensión r. Una aplicación $f : L_1 \to L_2$ se llama **homografía**, **aplicación lineal proyectiva** o **proyectividad** entre L_1 y L_2 si entre ellos existe un isomorfismo de espacios vectoriales.

Sea $f : L \to L$ una homografía y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia de L. Sea A la matriz de las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{R}$ y sea P un punto de L de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{r+1})_{\mathcal{R}}$ respecto de $\mathcal{R}$. En esta situación, la homografía se puede representar mediante ecuaciones o de forma matricial. A continuación se muestra el caso de una homografía del plano proyectivo en sí mismo.

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x'_2 = dx_1 + ex_2 + fx_3 \\ x'_3 = gx_1 + hx_2 + ix_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz asociada a la homografía a partir de la transformación de un número finito de puntos proyectivos, el procedimiento consiste en determinar un sistema de referencia para los argumentos de entrada de la homografía y otro para las imágenes, normalizar las bases asociadas y usar las relaciones $f(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3)$ obtenidas para determinar las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz de la homografía se construirá entonces usando como columnas la transformación de dicha base canónica.

Una propiedad interesante de la matriz A asociada a la homografía es que es homogénea, en el sentido que cualquier matriz αA genera la misma homografía.

En las homografías del plano proyectivo en sí mismo es posible calcular el conjunto de **puntos proyectivos fijos** (rectas vectoriales invariantes) y de **rectas proyectivas invariantes** (planos vectoriales invariantes). Los puntos fijos se obtienen a partir de los autovectores asociados a cualquier autovalor. Por su parte, las rectas invariantes se obtienen de la combinación dos a dos de dichos autovectores y de las ecuaciones de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$ cuando $m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$.

5 Curvas elípticas

5.1 Definición

Una curva plana definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ puede expresarse en el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mediante la ecuación $f(x,y)=0$, donde el par (x,y) representa las **coordenadas afines** (también llamadas **coordenadas no homogéneas**) de un punto cualquiera de la curva.

Alternativamente, la misma curva puede definirse en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mediante la ecuación $F(X,Y,Z)=0$, donde el trío (X,Y,Z) representa las **coordenadas homogéneas** de un punto de la curva. El polinomio $F(X,Y,Z)$ así presentado es homogéneo, en el sentido de que todos sus monomios tienen el mismo grado.

Un punto de una curva es singular si y solo si las derivadas parciales de la expresión se anulan en dicho punto. Los puntos singulares de una curva cúbica plana se denominan **nodo** si el punto tiene dos tangentes distintas y **cúspide** si el punto tiene una tangente doble.

Se dice que una curva es **singular** o **no regular** cuando tiene al menos un punto singular, mientras que es regular o no singular cuando no contiene puntos singulares. La siguiente figura muestra dos ejemplos de curvas singulares.

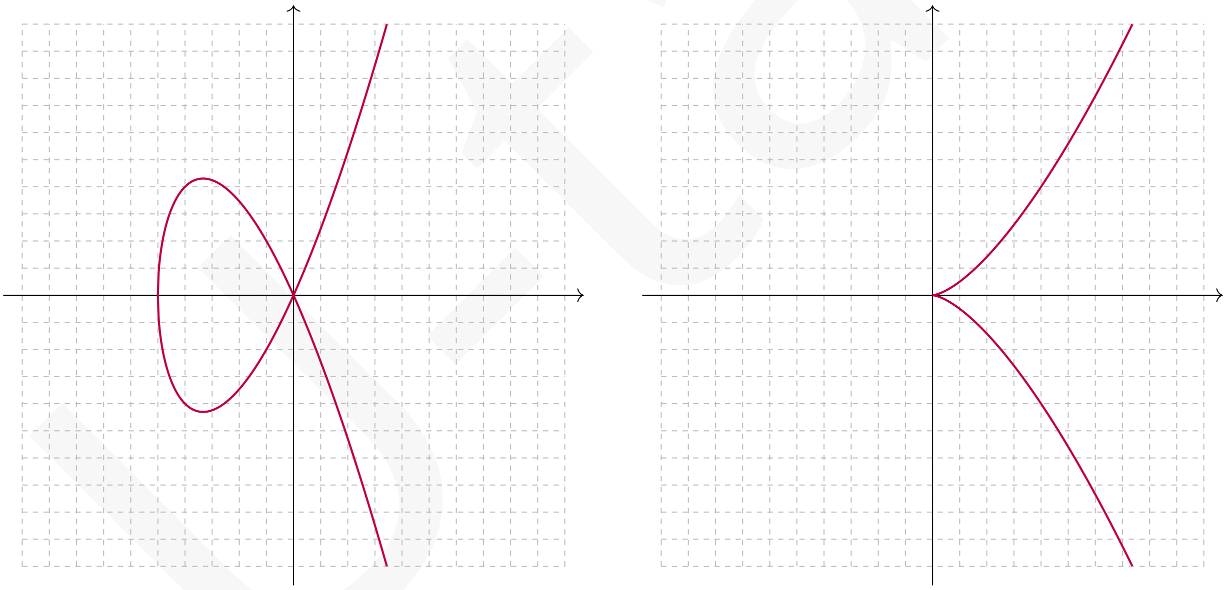

Figura 1: Ejemplos de curvas con un nodo (izquierda) y una cúspide (derecha) en el punto $(0,0)$.

Toda curva elíptica admite un tipo de ecuación canónica llamada forma de Weierstrass, cuya expresión en coordenadas no homogéneas es

$$\boxed{y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{F}$ y $\Delta \neq 0$, siendo Δ el discriminante de E que se calcula de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= -d_2^2 d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2 d_4 d_6 \\
d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\
d_4 &= 2a_4 + a_1 a_3 \\
d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\
d_8 &= a_1^2 a_6 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2
\end{aligned}\right\}$$

La ecuación de Weierstrass también se puede expresar en coordenadas homogéneas con un punto en el infinito, $\mathcal{O} = (0:1:0)$, donde la relación entre ambas ecuaciones es $f(x,y) = F(x,y,1)$, lo que es equivalente a la relación $F(X,Y,Z) = f(X/Z, Y/Z) \cdot Z^3$.

$$\boxed{Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3}$$

La siguiente figura muestra dos ejemplos de curvas elípticas definidas sobre el cuerpo de los números reales.

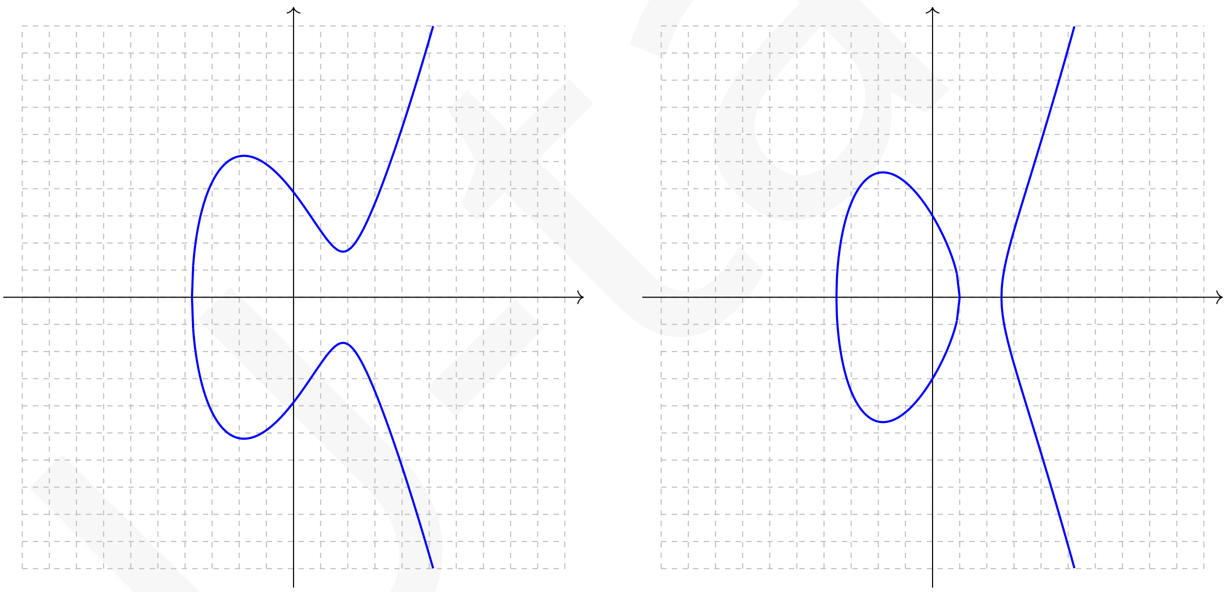

Figura 2: Ejemplos de curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{R}$.

5.2 Estructura de grupo

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ definida mediante la ecuación de Weierstrass, y sean los puntos de la curva $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$ y $R = (x_R, y_R)$, donde $\mathcal{O} = (0:1:0)$ representa el punto en el infinito en coordenadas homogéneas. En estas condiciones, se define la operación suma de puntos de la siguiente manera:

1) Para todo punto P de la curva, $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$.
2) Dado un punto P, entonces $-P = (x_P, -y_P - a_1x_P - a_3)$, de manera que $P + (-P) = \mathcal{O}$.

3) Dados dos puntos P y Q tales que $P \neq \pm Q$, entonces $R = P + Q$, con

$$\left.\begin{array}{rcl} x_R & = & \lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_P - x_Q \\ y_R & = & \lambda(x_P - x_R) - y_P - a_1 x_R - a_3 \\ \lambda & = & \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \end{array}\right\}$$

4) Dado un punto P, el punto $R = P + P = 2P$ tiene como coordenadas los valores

$$\left.\begin{array}{rcl} x_R & = & \lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_P - x_Q \\ y_R & = & \lambda(x_P - x_R) - y_P - a_1 x_R - a_3 \\ \lambda & = & \dfrac{3x_P^2 + 2a_2 x_P + a_4 - a_1 y_P}{2y_P + a_1 x_P + a_3} \end{array}\right\}$$

Las siguientes figuras muestran de forma gráfica algunos ejemplos de operaciones realizadas sobre la curva $y^2 = x^3 - 10x + 15$ definida sobre el cuerpo de los números reales.

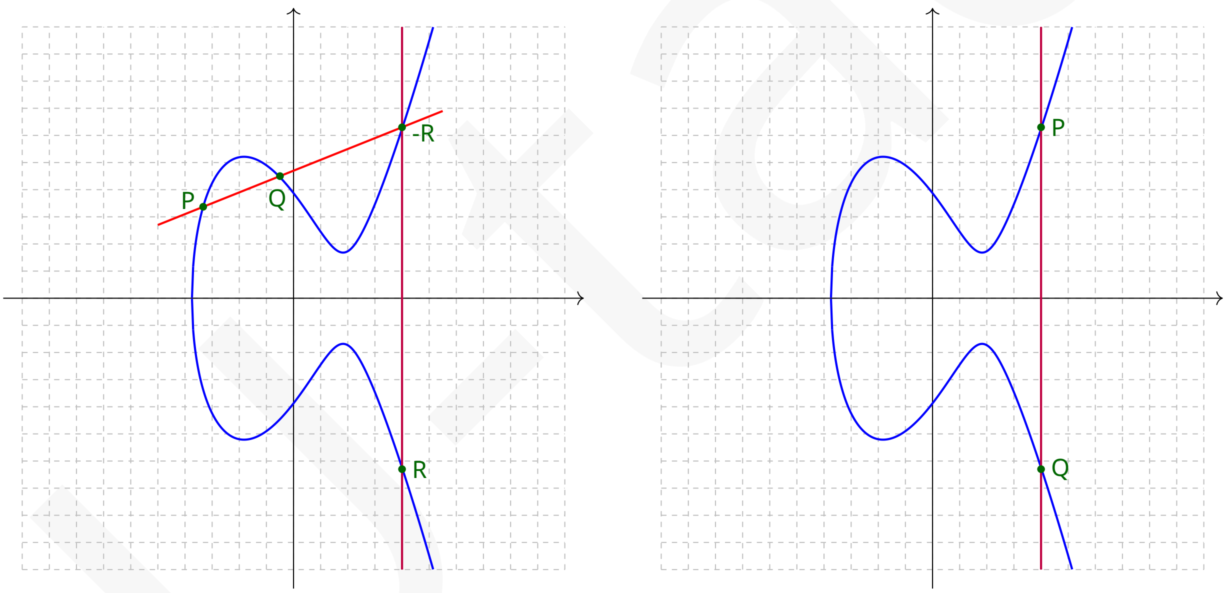

Figura 3: Ejemplo de suma de puntos $P + Q$ con $Q \neq -P$ (izquierda) y $Q = -P$ (derecha).

6 Problemas

1) Determina la ecuación implícita de la recta del plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que pasa por los puntos $(1:2:8)$ y $(-7:0:3)$.

2) Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r que pasa por los puntos $(1:-1:2)$ y $(2:1:1)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3) Halla el punto de intersección de la recta r del problema anterior con la recta s de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

4) Determina las posiciones relativas de las siguientes ternas de rectas del plano proyectivo:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

5) En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ se consideran tres puntos con coordenadas $(-1:0:0:1)$, $(0:1:1:1)$ y $(1:2:a:b)$ respecto a un sistema de referencia proyectivo $\mathcal{R}$. Calcula el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que los tres puntos estén sobre la misma recta proyectiva.

6) Dados los puntos del plano proyectivo $P_1 = (1:1:0)$, $P_2 = (1:2:0)$ y $P_3 = (0:1:0)$, determinar las coordenadas del punto $Q = (1:0:0)$ en la referencia $\{P_1, P_2; P_3\}$.

7) Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; P_4\}$, con $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$ y $P_4 = (1:1:1)$ al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{Q_1, Q_2, Q_3; Q_4\}$, con $Q_1 = (3:1:-3)$, $Q_2 = (-1:0:5)$, $Q_3 = (1:8:-1)$ y $Q_4 = (3:9:1)$.

8) Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3; P_4\}$, con $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$ y $P_4 = (1:1:1)$ al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P_4, P_2, P_3; P_1\}$.

9) Halla las coordenadas del punto $(2:1:2)$ en los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ definidos como $\mathcal{R} = \{(1:1:0), (1:2:0), (0:1:1); (0:0:1)\}$ y $\mathcal{R}' = \{(1:0:0), (1:0:1), (0:1:1); (2:1:2)\}$. A continuación, determina las ecuaciones de los cambios de coordenadas entre ambos sistemas de referencia.

10) Calcula la razón doble $[A, B, C, D]$ de los puntos $A = (1:-1)$, $B = (3:-1)$, $C = (1:0)$ y $D = (2:-1)$ de la recta proyectiva real.

11) En el plano proyectivo se consideran los puntos $A = (1:0:0)$, $B = (1:1:1)$, $C = (0:1:1)$ y $D = (-2:1:1)$.

a) Comprueba que están alineados.

b) Calcula la razón doble $[A, B, C, D]$.

c) Halla el punto A' tal que $[A', B, C, D] = -1$.

12) Calcula la razón doble $[A, B, C, D]$ de los puntos $A = (1:1:-1:1)$, $B = (0:1:1:-1)$, $C = (2:1:-3:3)$ y $D = (4:3:-5:5)$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

13) Sea $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ una proyectividad en la que, fijada una referencia, se tiene que $f(1:0) = (2:-3)$, $f(0:1) = (1:1)$, $f(1:1) = (0:5)$. Calcula la imagen de $(7:21)$.

14) Sea $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una proyectividad en la que, una vez fijada una referencia, se tiene que $f(1:0:0) = (0:0:1)$, $f(0:1:0) = (0:1:1)$, $f(1:1:1) = (1:0:1)$ y $f(2:0:1) = (-1:2:3)$. Calcula la ecuación matricial de la proyectividad.

15) Determina los puntos fijos de la homografía del plano proyectivo de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_2 - x_3 \\ x_3' = -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

16) Determina las ecuaciones de la homografía que transforma los puntos del plano proyectivo $A = (0:0:1)$, $B = (0:1:0)$, $C = (1:0:0)$ y $D = (1:1:1)$ en los puntos B, C, D, A, respectivamente. Halla los puntos fijos de la misma.

17) Sea f la homografía del plano proyectivo definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_3 \\ x_2' = \beta x_1 - x_3 \\ x_3' = x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

a) Determina β para que el punto $(1:0:1)$ sea fijo y halla el resto de puntos fijos.

b) Determina las rectas invariantes de f.

18) Determina los puntos fijos y las rectas invariantes de la homografía que tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_2 - x_3 \\ x_3' = -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

19) En el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, calcula los puntos fijos y las rectas invariantes cuando se considera una homografía cuya matriz respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

20) Determina los puntos fijos y las rectas invariantes de la homografía que tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1' = -11x_1 - 8x_2 - 16x_3 \\ x_2' = 16x_1 + 11x_2 + 20x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Apuntes del curso anterior del profesor Álvaro Nolla.
- Antonio F. Costa y Javier Lafuente. *Curso de Geometría Afín y Geometría Euclidiana*. Ed. Sanz y Torres. ISBN 978-84-929-4861-1.
- Máximo Anzola, José Caruncho, G. Pérez-Canales. *Problemas de Álgebra. Tomo 7. Geometría proyectiva. Cónicas. Cuádricas*. Ed. Primer Ciclo.
- Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. *Notas de la asignatura Ampliación de Geometría*. Departamento de Álgebra.
- Gerard Romo Garrido. *Geometría proyectiva. Libro de ejercicios y problemas*. Ed. TooMates.
- Víctor Gayoso, Luis Hernández y Agustín Martín. *Criptografía con curvas elípticas*. Ed. CSIC. ISBN 978-84-001-0432-0.