CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

# El espacio vectorial euclídeo

## TEMA 6

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

# El espacio vectorial euclídeo

## Producto escalar

- Se llama **producto escalar** en un espacio vectorial real V a una forma bilineal f: VxV $\longrightarrow$ R que es simétrica y definida positiva. Se denota <u,v >

- f: VxV $\longrightarrow$ R es un producto escalar si y sólo si $\forall u, v, w \in V \; y \; \forall \alpha \in R \; se$ verifican:
  - <u,v>=<v,u>
  - <u+v,w>=<u,w>+<v,w>
  - <au,v>=a<u,v>
  - <u,u>$\geq 0 \; y < u,u > = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

## Producto escalar

- **Ejemplos**

- **Producto escalar de dos vectores en $R^n$**

$Definimos\ el\ producto\ escalar\ de\ dos\ vectores\ (en\ función\ de\ sus\ coordenadas)$
$\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ como: $\vec{u}.\vec{v} = <\vec{u}, \vec{v}> = x_{1.}y_1 + x_{2.}y_2 + x_n.y_n$

f(x,y)= $X^tAY = (x_1, \ldots \ldots x_n) I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ es una forma bilineal simétrica y definida positiva porque $I_n$ lo es

- **Producto escalar en $P_n(x)$** (polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que n)

$< p(x), q(x) >= \int_a^b p(x).q(x)\,dx$

## Producto escalar

❖ **Producto escalar en $M_n(R)$** (matrices cuadradas reales de orden n)

$< A, B >= tr(AB^t)$

Efectivamente $< B, A >= tr(BA^t) = tr((B^t)^t A^t) = tr((AB^t)^t) = tr(AB^t) =$ <A,B>

y $< A, A >= tr(AA^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0 \;\; y \;\; < A, A >= 0 \Longleftrightarrow$ A=0

❑ **Espacio vectorial euclídeo** es un espacio vectorial real V en el que se ha definido una forma bilineal simétrica

f: VxV $\longrightarrow$ R cuya forma cuadrática asociada es definida positiva. Se denota (V, <,>)

## Producto escalar

### ❑ Matriz asociada a un producto escalar (matriz de Gram)

Si <> es un producto escalar definido en un $espacio\ vectorial\ V$, $dimV = n\ y\ B = \{v_1, \dots \dots v_n\}$ es una base de V; dados un par de vectores cualesquiera x, y ∈ $V\ de\ coordenadas$ x= $(x_1, \dots \dots x_n)$ y= $(y_1, \dots \dots y_n)$ en la base B, entonces

$$<x,y> = <\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, v_j> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j <v_i, v_j>$$

$\boldsymbol{G_B} = (<v_i, v_j>)$ es la **matriz de Gram o matriz métrica en la base B**

$$<x,y> = (x_1, \dots \dots x_n)\, G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t G_B Y$$

Producto escalar

# *Y si cambiamos de base…*

<x,y>= $(x_1, x_2\ , x_3\ )\ G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$=$X^t G_B$Y   Expresión de <> en la base B

- ❑ Como X=PX´  Y=PY´, en la base B´ tendremos

<x,y>= (PX´)$^t G_B$ (PY´)=$X^{´t} P^t G_B$ PY´= $X^{´t}$MY´

$G´_B$ =$P^t G_B$ P

Es la expresión del producto escalar <> en la base B´

- ❑ $G´_B$ =$P^t G_B$ P es la matriz de la forma bilineal en la base B´.

## Producto escalar

❖ **Ejemplo 1 Producto escalar y matriz asociada**

- En $P_2(x)$ *consideramos la aplicación* $f: VxV \longrightarrow R$ tal que

  f (p(x),q(x))= $p(a).q(a) + p(b).q(b) + p(c).q(c) \quad a, b, c \in R$

- Es una forma bilineal simétrica
- **Matriz de su forma cuadrática asociada en la $B_c$**
- f(1,1)=3 f(1,x)=a+b+c f(1,$x^2$) $= a^2+ b^2+ c^2$
- f(x,x)= $a^2+ b^2+ c^2$ f(x, $x^2$)=$a^3+ b^3+ c^3$ f($x^2$, $x^2$) =$a^4+ b^4+ c^4$

$$\begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

## Producto escalar

- **Si b=1 y c=0 ¿para qué valores de a f define un producto escalar?**

$$\begin{pmatrix} 3 & a+1 & a^2+1 \\ a+1 & a^2+1 & a^3+1 \\ a^2+1 & a^3+1 & a^4+1 \end{pmatrix}$$

> ➢ Define un producto escalar para aquellos valores de a que la hacen definida positiva
>
> - $\Delta_1=3>0$ $\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & a+1 \\ a+1 & a^2+1 \end{vmatrix} = 2a^2-2a+2>0$
>
>   $\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & a+1 & a^2+1 \\ a+1 & a^2+1 & a^3+1 \\ a^2+1 & a^3+1 & a^4+1 \end{vmatrix} = a^2(1-a)^2>0 \ \forall a$ Si $a\neq0$ y $a\neq1$:
>
> - f define un producto escalar si Si $a\neq0$ y $a\neq1$

## Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales

- Dado un espacio vectorial euclídeo (V, <,>) llamamos
- **Norma** (módulo o longitud)**de un vector** $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ es el número real no negativo

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>}$$

- Un vector es **unitario** si $\|\boldsymbol{v}\|$**=1**

- **Propiedades**
  - $\|\boldsymbol{v}\| \geq \mathbf{0}\ \forall v \in V\ y\ \|\boldsymbol{v}\| = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
  - $\|\boldsymbol{\alpha v}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\ \|\boldsymbol{v}\|$
  - $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + \mathbf{2} < \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} >$
  - $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \Longleftrightarrow < u,v >=0$ Teorema de Pitágoras
  - $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \mathbf{2}(\ \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$ Ley del paralelogramo
  - $|< u,v >| \leq \|\boldsymbol{u}\|.\ \|\boldsymbol{v}\|$ Desigualdad de Cauchy-Schwartz
  - $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ Desigualdad de Minkowski (triangular)

## Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales

- **Ejemplos**

- **Producto escalar de dos vectores en $R^n$**
- $< \vec{u}, \vec{u} >= x_{1.}\, x_1 + x_{2.}\, x_2 + \; x_n . x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$

- **Producto escalar en $P_n(x)$** (polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que n)

  $< p(x), p(x) >= \int_a^b [p(x)]^2 \, dx$

- **Producto escalar en $M_n(R)$** (matrices cuadradas reales de orden n)

  $< A, B >= tr(AB^t)$

  $< A, A >= tr(AA^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$

## Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales

- Dado un espacio vectorial euclídeo (V, <,>) se define
- **ángulo que forman dos vectores u,v**$\in$ $V$ al valor de $\alpha\ t.q.$

$$\cos\alpha=\frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|}$$

- Un vector es **unitario** si $\|v\|$**=1**

- Dado un espacio vectorial euclídeo (V, <,>)
- **u,v**$\in$ $V$ **son ortogonales si <u,v>=0.** Se denotan u$\perp v$
- Dos vectores son por tanto ortogonales si son conjugados respecto a la forma <,>
- Un conjunto de vectores es ortogonal si sus vectores lo son dos a dos.

## Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales

### ❖ Ejemplo 2 Cálculo del ángulo entre dos vectores

- En $P_2(x) consideramos\ el\ producto\ escalar < p(x), q(x) = \int_0^1 p(x).q(x)dx$ *ángulo que forman p(x) = 3x$^2$ + 1 y q(x)=2+x viene dado por* $\boldsymbol{\cos}\ \alpha = \frac{\boldsymbol{<u,v>}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$

- $< 3x^2+1, 2+x >= \int_0^1 (3x^2+1).(2+x)dx = \left[2x^3 + 3\frac{x^4}{4} + 2x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{21}{4}$
- $\|3x^2+1\| = \sqrt{< 3x^2+1, 3x^2+1 >} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
- $\|\boldsymbol{2+x}\| = \sqrt{< 2+x, 2+x >} = \sqrt{\frac{19}{3}}$
- $< 2+x, 2+x >= \int_0^1 (2+x).(2+x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x + 2x^2\right]_0^1 = \frac{19}{3}$
- $\boldsymbol{\cos}\ \alpha = \frac{\boldsymbol{<u,v>}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{19}{3}}}$

## Ortogonalidad y subespacios

- Dado un espacio vectorial euclídeo (V, <,>)
- Un **vector** u es **ortogonal a un subespacio** S de V si es ortogonal a todos los vectores del subespacio
- u es ortogonal al subespacio S $\Longleftrightarrow$ u$\perp$ $v$ $\forall \boldsymbol{v} \in$ $base\ de\ S$
- Dos **subespacios** S y T son **ortogonales (S⊥T)** si todos los vectores de una base de S son ortogonales a todos los vectores de una base de T, es decir, si <s,t>=0 para todo s$\in$ $S$ , $t \in T$
- Ortogonal de S: $S^{\perp}$={v$\in$ $V$ / v $\perp$s para todo s$\in$ $S$ }

## Propiedades de la relación de ortogonalidad

- Si S={$u_1, u_2, \dots u_k$ } es un sistema de vectores ortogonales dos a dos, $u_i \neq 0, i = 1,2, \dots k$ *entonces esos vectores son linealmente independientes*
- Si $S_1 \subset S_2$ subespacios de V, entonces existe un vector no nulo de $S_2$ que es ortogonal a $S_1$
- Si S es un subespacio vectorial de V de dimensión k<n, todo sistema libre formado por vectores de S tiene a lo sumo k vectores ortogonales dos a dos

## Propiedades del subespacio ortogonal

- Si S es un subconjunto de V, entonces $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V
- Si S=L< $u_1, u_2, \dots u_k$>, entonces $S^{\perp}$={ v∈ $V$ / v $\perp u_1$, v $\perp u_2, \dots$ v $\perp u_k$}
- $(S+T)^{\perp}$=$S^{\perp} \cap T^{\perp}$

## Ortogonalidad y subespacios

### ❖ Ejemplo 3 Subespacio ortogonal a uno dado

- En $R_2(x) considerando\ el\ producto\ escalar < p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x).q(x)dx$
  *Si* $U=L< x^2-2; x+1 >$ $\quad Vamos\ a\ obtener\ el\ ortogonal\ de\ U:\ U^{\perp}$. *Utilizar la base canónica de* $R_2(x)$

- $U^{\perp}$={ vectores de $R_2(x)$ que son ortogonales a todos los vectores de U}

- Basta obtener los vectores que son ortogonales a los vectores de una base de U
- $U^{\perp}=\{v=a+bx+cx^2 /\ a+bx+cx^2 \perp x^2-2;\ a+bx+cx^2 \perp x+1\}$
- $U^{\perp}=\{v=(a,b,c)/\ < a+bx+cx^2, x^2-2 >= 0;\ < a+bx+cx^2, 1+x >= 0\}$
- Aplicando el producto escalar $< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x).q(x)dx$
- $\int_0^1 (a+bx+cx^2).(x^2-2)dx = 0$ $\qquad$ $\int_0^1 (a+bx+cx^2).(1+x)dx = 0$

## Bases ortogonales y ortonormales

- Sea (V, <,>) un espacio vectorial euclídeo
- Una **base ortogonal** de V es una base formada por vectores que son ortogonales dos a dos.
- Una **base ortonormal** de vectores es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios, es decir, $\|\boldsymbol{u_i}\|=1 \quad i=1,2,\ldots n$
- La base canónica en $R^n$ es una base ortonormal para el producto escalar usual

¿Y siempre podré encontrar una base ortogonal?

SI!

porque…

- Si f es una forma bilineal simétrica en un V de dimensión finita n, *SIEMPRE* existe una base de vectores conjugados respecto a f.

- Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal

## Bases ortogonales y ortonormales

Y… ¿cómo podré obtener una base ortogonal?

Una base de vectores conjugados

Lagrange

Diagonalizando por matrices elementales

## Bases ortogonales y ortonormales

*Y de ortogonal… a ortonormal*

$B = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ ortogonal

$$\Downarrow$$

$B´ = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ ortonormal

- B ortogonal $\Longleftrightarrow$ la matriz del ‹ › en esa base es diagonal
- B ´ortonormal $\Longleftrightarrow$ la matriz del ‹ › en esa base es la identidad

## ❑ Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo y B= $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una base de V. Entonces los vectores definidos por

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$u_i = v_i - \frac{<v_i,u_1>}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{<v_i,e_2>}{\|e_2\|^2} u_2 - \dots - - \frac{<v_i,e_{i-1}>}{\|e_{i-1}\|^2} u_{i-1} \qquad i = 1,2, \dots n$$

forman una base ortogonal de V y además

$$L(u_1, u_2, \dots u_i) = L(v_1, v_2, \dots v_i) \quad \text{para todo } i=1,2,\dots n$$

Nota: Haciendo además $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ obtenemos una base ortonormal

# Método de Gram-Schmidt

## ❖ Ejemplo 4 Ortonormalización por el método de Gram-Schmidt

- Dado el producto escalar <x,y>= $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

  *ortonormalizamos la base B={$v_1$=(2,-1,0); $v_2$=(3,0,-4); $v_3$=(2,1,3)}*

- *Expresión del producto escalar* $< \mathrm{x},\mathrm{y} >= x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$
  - *1) Llamamos* $u_1 = v_1$ *=(2,-1,0) (tiene norma 1)*
    - $\|u_1\|^2 =< (2,-1,0)\,,(2,-1{,}0) >$ *=1 por tanto* $\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{u_1}}{\|\boldsymbol{u_1}\|}$***=(2,-1,0)***
  - *2)* $u_2 = v_2 - \frac{<v_2,u_1>}{\|u_1\|^2}u_1$ *=(3,0,-4)-0(2,-1,0)=(3,0,-4)* ⟶ $\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{u_2}}{\|\boldsymbol{u_2}\|} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ ***(3,0,-4)***

    $<v_2, u_1>$=<(3,0,-4), $(2,-1,0)> = (3{,}0,\ -4)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$=0

    $\|u_2\|^2$=<(3,0,-4),(3,0,-4)> =25

## Método de Gram-Schmidt

- *3)* $u_3 = v_3 - \frac{<v_3, u_1>}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{<v_3, u_2>}{\|u_2\|^2} u_2$*=(2,1,3)*$-\frac{-1}{1}$*(2,-1,0)-0(3,0,-4)=(4,0,3)*

  $\|e_2\|^2 = (3,0,-4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$*=25*

- $<v_3, u_1>$=<*(2,1,3),* $(2,-1,0) > = -1$

  $<v_3, u_2>$=<*(2,1,3),* $(3,0,-4) > = 0$

  $\|u_3\|^2$ =<*(4,0,3),(4,0,3)>* =*25* $\longrightarrow$ $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ **=** $\frac{1}{5}$ ***(4,0,3)***

**Entonces B´={** $e_1$**=(2,-1,0);** $e_2$ **=** $\frac{1}{5}$ ***(3,0,-4);*** $e_3$ **=** $\frac{1}{5}$ ***(4,0,3)}***

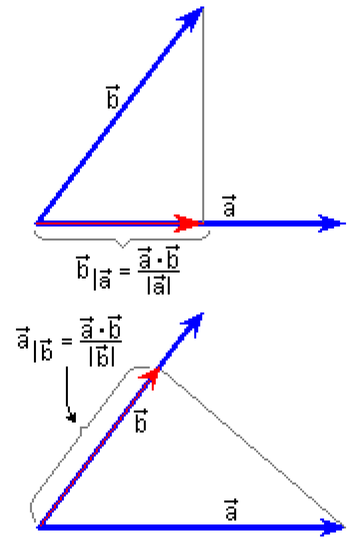
## Proyección de un vector $\overrightarrow{u}$ sobre otro vector $\overrightarrow{v}$

$$proy_{\vec{v}}\,(\vec{u}) = |\vec{u}|.\,cos\alpha$$

Es el módulo de la proyección del vector $\vec{u}$ *sobre la dirección del vector* $\overrightarrow{v}$

Y por tanto

$$\boxed{proy_{\vec{v}}\,(\vec{u}) = \frac{\vec{u}.\,\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$



Proyecciones en espacios euclídeos

## ❑ Proyección de un vector sobre otro

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo y u$\in V \quad v \neq 0$,

Todo vector v$\in V$ *se puede expresar de forma única como*

$$v=\frac{<u,v>}{\|u\|^2}u+w$$

- El vector w es ortogonal a u
- El vector $\frac{<u,v>}{\|u\|^2}$u es la proyección ortogonal de v sobre u

## ❑ Proyección de un vector sobre un subespacio

Todo vector u$\in V$ *se puede descomponer de forma única como*

u=$s$+w donde s$\in S$ $y\ w = u - s$ ⊥s (Es decir w$\in S^{\perp}$)

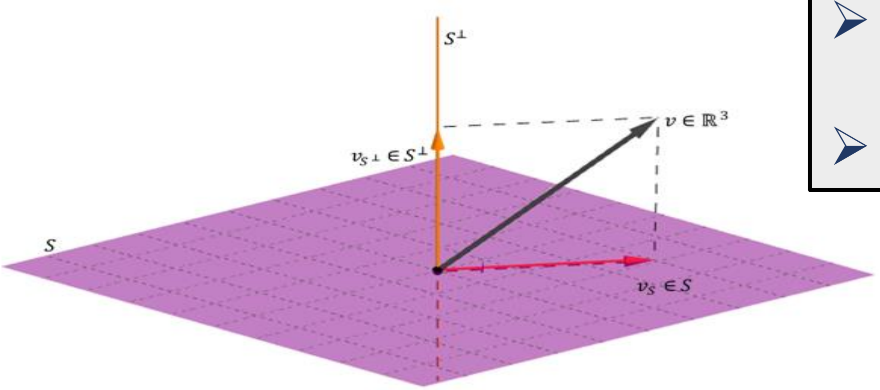
El vector s es la proyección ortogonal de u sobre S

## ❑ Proyección ortogonal

Si S es un subespacio vectorial de (V,<>) podemos definir una aplicación

$$proy_S : V \longrightarrow V$$
$$v \longrightarrow s$$

- Si v∈ $S$ $entonces\ v = v + 0$ y $proy_S$(v)=v
- Si v∈ $S^{\perp}$ entonces v=0+v y $proy_S$(v)=0
- Ker($proy_S$)=$S^{\perp}$ y Im($proy_S$)=ker($proy_S$-Id)




- El vector s es la proyección ortogonal de u sobre S
- El vector v- $proy_S$(v) es un vector de $S^{\perp}$

Proyecciones en espacios euclídeos

## Ejemplo 5 proyección ortogonal de un vector sobre un plano

- Dado v= $(2,1,1)$ , $su\ proyección\ sobre\ el\ plano\ S = x - y = 0$
  - $proy_S$(2,1,1) *es un vector del plano por tanto es de la forma* $(\alpha, \alpha, \beta)$
  - $(2,1,1)$–$proy_S$(2,1,1) *ha de ser un vector de* $S^{\perp}$

# *¿Y cómo son los vectores de* $S^{\perp}$?

Vectores ortogonales a todos los vectores de S $\Longleftrightarrow$ vectores ortogonales a los vectores de una base de S
Base de S {(1,1,0); (0,0,1)}

- $S^{\perp} = \{(x,y,z)/(x,y,z) \perp$(1,1,0) y $)/(x,y,z) \perp$(0,0,1)}≡ $\{(x,y,z)t.q.x + y = 0; z = 0\}$
- v- $proy_S$(v) =(2,1,1)-$(\alpha, \alpha, \beta)$=(2- $\alpha$, 1- $\alpha$, 1- $\beta$) es un vector de $S^{\perp}$ $\Longrightarrow$ 2- $\alpha$ + 1- $\alpha$=0; 1- $\beta$ =0 $\Longrightarrow$ $\alpha = 3/2$ ;$\beta$=1
- *Entonces* $proy_S$(2,1,1) =($\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ *y* $(2,1,1)$–$proy_S$(2,1,1)= =($\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$

# Matriz de la proyección ortogonal

- Si V=$R^n$ $y\ S\ es\ un\ subespacio\ de\ V\ de\ dimensión\ k$ $\boldsymbol{y\ consideramos\ el\ producto}$ **escalar usual**
- Queremos encontrar una matriz P tal que **P$\vec{v}$=s=$proy_S$(v)**
- Si B= $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ es una base de S y A (nxk) es la matriz cuyas columnas son $v_1, v_2, \dots v_k,$
- **El producto A$\vec{x}$ ($\vec{x}$ vector cualquiera de $R^k$) $\boldsymbol{es\ un\ vector\ que\ está\ en\ S}$**
  (porque es combinación lineal de las columnas de A que son una base de S)
- $Entonces, si\ \vec{v} \in R^n\ y$ A $\overrightarrow{x_0}$ es su proyección en S, tenemos

$\vec{\boldsymbol{v}}$ =**A $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$+w** siendo **w ortogonal a S** y A $\overrightarrow{x_0}$ un vector de S

- Entonces **A$\vec{x}$** .w=0 y como w = $\vec{\boldsymbol{v}}$ =**A $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$+w :** **A$\vec{x}$** . ($\vec{\boldsymbol{v}}$ −**A $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$**)=0
- Que al trabajar con el producto escalar usual equivale a :

$(\mathbf{A}\vec{\boldsymbol{x}})^t.(\vec{\boldsymbol{v}} - \mathbf{A}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}})=0 \longrightarrow \vec{\boldsymbol{x}}^t A^t.(\vec{\boldsymbol{v}} - \mathbf{A}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}})=0 \longrightarrow A^t.(\vec{\boldsymbol{v}} - \mathbf{A}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}})=0 \longrightarrow A^t\vec{\boldsymbol{v}} = A^t\mathbf{A}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$

$(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \longrightarrow A(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t\vec{\boldsymbol{v}} = \mathrm{A}\,\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \longrightarrow \mathrm{P}= A(A^t\mathrm{A})^{-1}A^t$

## Proyecciones en espacios euclídeos

$$\boxed{P= A(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t}$$

**Matriz proyección**

Es una matriz que multiplicada por cualquier vector de v le asocia su proyección sobre S

***¿Y con otro producto escalar?***

*bastaría considerar una base ortonormal de forma que la matriz del producto escalar en dicha base fuese ya la identidad*

## ❑Notas importantes sobre las matrices proyección

- La matriz proyección es única (es independiente de la base de S elegida)
- La matriz proyección es idempotente y simétrica
- La condición necesaria y suficiente para que una matriz nxn sea matriz proyección es que sea idempotente y simétrica

¿De quién será matriz proyección? Del subespacio generado por sus columnas

- **Si A es una matriz nxk de columnas ortonormales, $A^t$A es la matriz identidad y entonces P =A $A^t$**
- Si P es la matriz proyección de un espacio vectorial de dimensión n sobre un subespacio S de dimensión k, los autovalores de P son $\lambda$=1 con multiplicidad k y $\lambda$=0 con multiplicidad n-k.
- Vectores propios asociados a $\lambda$=1: base de S;
- Vectores propios asociados a $\lambda$=0: base de $S^{\perp}$ ;
- La matriz P es diagonalizable

## Proyecciones en espacios euclídeos

### ¿Cómo será la matriz proyección del ejemplo 5?

**Recuerda**

- Si v∈ $S$ $entonces\ v = v + 0$ y $proy_S$(v)=v
- Si v∈ $S^{\perp}$ entonces v=0+v y $proy_S$(v)=0

- Base de $R^3$: {(1,1,0); (0,0,1); (1,-1,0}
- f: $R^3 \longrightarrow$ S

  v $\longrightarrow$ $proy_S(v)$ es tal que f(1,1,0)=(1,1,0); f(0,0,1)=(0,0,1); f(1,-1,0)=(0,0,0)

$$M_B(proy_S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{B_c}(proy_S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "M_{B'}(proy_S)"] \arrow[d] & B' \\ B \arrow[r, "M_B(proy_S)"] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$Y\ si\ cambiamos\ a\ otra\ base\ B´:\ M_{A'B'}(proy_S) = M_{BB'}\, M_B(proy_S)\, M_{B'B}$$

## Proyecciones en espacios euclídeos

- Si calculamos A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz cuyas columnas son los vectores de la base de S
- Y obtenemos P= $A(A^t\mathbf{A})^{-1}A^t$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- De forma que $proy_S(2,1,1)$ = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Proyecciones en espacios euclídeos

## ❑ Proposición

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo, S es un subespacio vectorial de V y B= $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ es una base ortogonal de S. Para un vector cualquiera $v \in V, tenemos$

$$proy_S(v)=\frac{<v,v_1>}{\|v_1\|^2}\, v_1+\dots+\frac{<v,v_k>}{\|v_k\|^2}\, v_k$$

…Y volvemos al ejemplo 5

- Y si hacemos $proy_S(2,1,1)=\frac{<(2,1,1),(1,1,0)>}{\|(1,1,0)\|^2}\,(1,1,0)+\frac{<(2,1,1),(0,0,1)>}{\|(0,0,1)\|^2}\,(0,0,1) =$

$$=\frac{3}{2}(1,1,0)+(0,0,1) = =\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$$

## ❑ Proposición

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo, S es un subespacio vectorial de V.

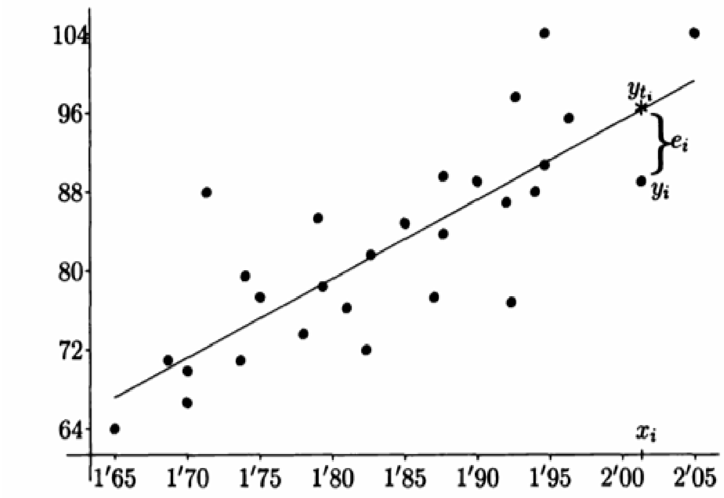
Para todo vector $v \in V, se\ cumple$ $\quad distancia(v,S)=\|v-proy_S(v)\|$

Ajuste por mínimos cuadrados

# Método de mínimos cuadrados: ajuste lineal

- $y_i$= valor observado
- $y_{t_i}$ = valor teórico (valor calculado según la recta de regresión) $y_{t_i}$ = a + b$x_i$
- $e_i$= $y_i$- $y_{t_i}$ error de ajuste en la observación i (residuo)

Si consideramos tabla resumida (con m = k y nij =1)




- El ajuste por el método de mínimos cuadrados es el que minimiza la suma de los cuadrados de los errores $\sum_{i=1} e_i^2$

- Se trata por tanto de encontrar una función lineal f(x) = a +bx (recta de ajuste) que ajuste lo mejor posible a esa colección de puntos

## Ajuste por mínimos cuadrados

- Queremos por tanto encontrar los valores de "a" y "b" de forma que :

a + b$a_1$=$b_1$

a + b$a_2$=$b_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

...

a + b$a_n$=$b_n$

(una recta que pase por los n puntos) A . X = Y

- Queremos despejar X: multiplicando por $A^t$: ($A^t$A)X = $A^t$ Y $\Rightarrow$ **X=($A^t$A)$^{-1}$ $A^t$ Y**

- $A^t$A es cuadrada, pero… ¿admite inversa?

$A^t$A es regular cuando las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ cuando los puntos no están situados sobre una recta vertical.

## Ajuste por mínimos cuadrados

### ❖ Ejemplo 6 Ajuste por el método de mínimos cuadrados en el plano

- Ajuste lineal para los puntos (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5)

$$Y = AX \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si hacemos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} = \mathbf{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t A)^{-1} A^t Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow y = a + bx = 1 + x$$

Ajuste por mínimos cuadrados

## Método de mínimos cuadrados: ajuste polinómico

- Dados m puntos en el plano $(c_i, b_i)$
  $i = 1,2, \ldots m$: *queremos encontrar el polinomio que mejor los aproxima*
- Se trata de calcular los coeficientes $a_0$, $a_1$,… $a_n$ que hacen que el polinomio

y= $a_0 + a_1$x,… +$a_n x^n$ aproxime a esos puntos de la mejor forma posible, es decir, minimizando la suma de los cuadrados de las distancias entre los valores observados y los valores teóricos (obtenidos sustituyendo en el polinomio)

  - La función polinómica pasa por cada uno de los puntos $(c_i, b_i)$

$b_1$= $a_0 + a_1\, c_1$,… +$a_n {c_1}^n$

$b_2$= $a_0 + a_1\, c_2$,… +$a_n {c_2}^n$

… …. ….

$b_m$= $a_0 + a_1\, c_m$,… +$a_n {c_m}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^n \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \ldots & c_2^n \\ & & \ldots & \ldots & \\ 1 & c_m & c_m^2 & \ldots & c_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A . X = Y

## Ajuste por mínimos cuadrados

### ❖ Ejemplo 7 Ajuste de mínimos cuadrados por un polinomio cuadrático

- ❑ Ajuste cuadrático para los puntos (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5)

Y = AX
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y=\frac{82}{70}+\frac{123}{70}x-\frac{30}{70}x^2$$

Si hacemos:

$$A^t A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}$$

$$X=(A^t A)^{-1} A^t Y=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 30 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 82/70 \\ 123/70 \\ -30/70 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

# Método de mínimos cuadrados: ajuste de datos en $\boldsymbol{R^n}$

- Si tenemos k puntos de $\boldsymbol{R^n}$: $(a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}, b_1)$
$(a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}, b_2)$
$(a_{k1}, a_{k2}, \dots a_{kn}, b_k)$

Y queremos ajustarlos mediante una función del tipo y=$s_o + s_1 x_1 + s_2 x_2 \dots s_n\, x_n$

$$b_1 = s_o + s_1 a_{11} + s_2 a_{12} \dots s_n\, a_{1n}$$

$$b_2 = s_o + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} \dots s_n\, a_{2n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ 1 & a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & \dots & \dots \\ 1 & a_{k1} & a_{k2} \dots a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$b_k = s_o + s_1 a_{k1} + s_2 a_{k2} \dots s_n\, a_{kn}$$

Ajuste por mínimos cuadrados

## ❖ Ejemplo 8 Ajuste de mínimos cuadrados en $R^3$

❑ Ajustar los puntos (2,-1,0), (1,3,5), (3,-2,1) mediante un plano

- Plano $\pi \equiv z = a + bx + cy$

0= $a + 2b$- $c$

5=$a + b$+3$c$

1=a+3b-2c

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

X=$(A^t$A$)^{-1}$ $A^t$ Y=$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ➡ Plano $\pi \equiv$ z=$-4 + 3x + 2y$

# ❑Endomorfismo simétrico

❑ Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo, f es un **endomorfismo simétrico** si

$$\forall u, v \in V \;\; < u, f(v) > = < f(u), v >$$

## ❑ Proposición

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo,
f :V $\longrightarrow$ V es un endomorfismo simétrico si y sólo si su matriz respecto a cualquier base ortonormal es simétrica

- Si A=$M_B(f)$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ son las matrices columna con las coordenadas de x e y en B
- La matriz del producto escalar en una base ortonormal es $I_n$: $< x, y > = X^t I_n$Y= $X^t$Y
- f es simétrico $\Longleftrightarrow$ <$x, f(y) > = < f(x), y >$ $\Longleftrightarrow$ $X^t A$Y= $(AX)^t$Y $\Longleftrightarrow$ $X^t A$Y= $X^t\ A^t$Y $\Leftrightarrow$ A=$A^t$

## Diagonalización por semejanza ortogonal

# ❑ Proposición

Si $(V,<>)$ es un espacio vectorial euclídeo y f es un endomorfismo simétrico

1) Todos los autovalores de f son reales
2) Los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales

- Si f es un endomorfismo simétrico y $\lambda$=a+bi es raíz del polinomio característico
- Si consideramos $\tilde{f}$, la extensión compleja de f y u + iv es un vector propio asociado a $\lambda$
- Entonces $\tilde{f}$ (u+iv)= $\lambda$(u+iv)=(a+bi)(u+iv) $\Longleftrightarrow$ f(u)+if(v)=au-bv+i(av+bu)
- Entonces f(u) =au-bv y f(v) = av+bu
- Como f es simétrico: $\forall u, v \in V \ < u, f(v) > = < f(u), v >$

$$\Downarrow$$

$$<u, av+bu>=<au-bv,v>$$

$$\Downarrow$$

$$a<u,v> - b<v,v>=a<u,v>+b<u,u> \Longrightarrow b \ [<u,u>+<v,v>]=0 \Longrightarrow b=0$$

## Diagonalización por semejanza ortogonal

- 2) Si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son dos autovalores distintos y $u_1$ y $u_2$ *son vectores propios*
- Como f es simétrico: $< u_1, f(u_2) > =< f(u_1), u_2 >$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_2 < u_1, u_2 > = \lambda_1 < u_1, u_2 >$$

- Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ : $< u_1, u_2 >=0$ *vectores propios ortogonales*

# ❑ Teorema espectral

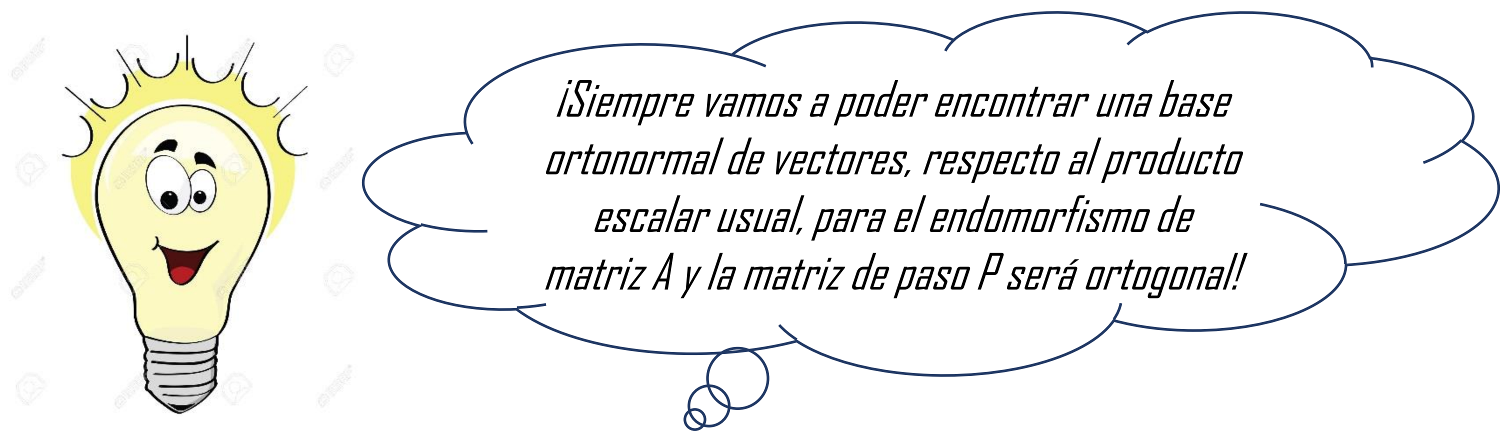
✓ Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f es un endomorfismo simétrico en V≠ Ø, entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f

✓ Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que D=$P^{-1}AP = P^tAP$

## Diagonalización por semejanza ortogonal

# Recuerda:

- ✓ El determinante de una matriz ortogonal es $\pm\mathbf{1}$
- ✓ La inversa y la traspuesta de una matriz ortogonal son también ortogonales
- ✓ El producto de matrices ortogonales es ortogonal
- ✓ Los autovalores de una matriz simétrica son reales
- ✓ Los autovectores de una matriz simétrica asociados a valores propios distintos son ortogonales
- ✓ Toda matriz simétrica es diagonalizable



Diagonalización por semejanza ortogonal

❖ **Ejemplo 9** Diagonalización por semejanza ortogonal

- $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ **es un endomorfismo cuya matriz en una base B es** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f**

- 1º) Planteamos la ecuación característica P($\lambda$ ) $=$ |A− $\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\lambda \end{vmatrix} = -(\mathbf{1}+\lambda)(\mathbf{1}-\lambda)^2 = 0$$

- Autovalores: $\lambda_1$=1 con multiplicidad algebraica 2 $\lambda_2$=-1 con $a_2 = 1$
- Calculamos ahora los subespacios propios (invariantes) y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

## Diagonalización por semejanza ortogonal

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=1.v}= {v∈ $R^3$/(A-I)v=0}

(A−I)v=0 $\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-x + z = 0$

S(1) ={(x,y,z)/ x ∈R} dimS(1)=2 **Base de S(1): (1,0,1) (0,1,0)**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=-1.v}= {v∈ $R^3$/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + z = 0; y = 0$

S(-1) ={(x,0,-x)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): (1,0,-1)**

**Ya tenemos una base ortogonal de vectores; basta normalizarlos**

**B´={($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$); (0,1,0); ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0, $\frac{-1}{\sqrt{2}}$)}**

**Entonces P=** $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \mathbf{0} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ verifica $P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$

## ❑ Regla de Descartes

- ✓ Dado un polinomio de grado n P(x) = $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ $a_i \in R$, $a_n \neq 0$ que tiene n raíces reales, no necesariamente distintas. Entonces el número de raíces positivas de p(x) con su multiplicidad es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes consecutivos de la sucesión obtenida
- ✓ La regla de los signos de Descartes es un teorema que determina el número de raíces positivas y negativas de un polinomio (si bien no proporciona el número exacto de ellas ni las identifica)

✓ **Método:**

1) Ordenamos los coeficientes de mayor a menor grado

El número de raíces positivas del polinomio es o igual o inferior en un número par al número de cambios de signo.

Por ejemplo, si hay 3 cambios de signo. entonces el número posible de raíces positivas del polinomio es 3 o 1.

Si calculamos p(-x) el número posible de raíces negativas del polinomio original es igual, o inferior con una diferencia par, al número de cambios de signo de P(-x)

Diagonalización por semejanza ortogonal

## ¿Y cuál es su aplicación?

- Si A es una matriz simétrica real de orden n
- Signatura de A: es el número de elementos positivos y negativos de cualquier matriz diagonal congruente con A. Es el par (p,n)
- A admite (teorema espectral) una matriz P ortogonal y una D diagonal tales que $P^t$AP=D con $P^t$=$P^{-1}$
  - A y D son semejantes
  - Las columnas de P son autovectores de A y D contiene en la diagonal los autovalores

- A y D congruentes
  - p es el número de autovalores positivos de A
  - n es el número de autovalores negativos de A

## Diagonalización por semejanza ortogonal

**Ejemplo 10** Determinación del signo de los autovalores sin calcularlos previamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Planteamos la ecuación característica P($\lambda$) $=$ |A$-\lambda$I|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1-\lambda} \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{9}{4}$$

- Si aplicamos la regla de Descartes a los coeficientes del polinomio característico:

  tenemos $(-1, +3, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4})$

- Hay 2 cambios de signo $\longrightarrow$ 2 raíces positivas $\longrightarrow$ signatura (p,n)=(2,1)
- P($-\lambda$) $= -(-\lambda)^3 + 3(-\lambda)^2 - \frac{3}{4}(-\lambda) - \frac{9}{4} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}$ 1 cambios de signo

  1 raíz negativa

## Diagonalización por semejanza ortogonal

# Resumen…

- Diagonalización por congruencia:
  Existe una matriz P regular tal que $P^t$AP=D
  (P no tiene por qué ser ortogonal)

- Si P es ortogonal $P^t = P^{-1}$
  A y D son semejantes
  $\Downarrow$
  Tienen los mismos autovalores

- Si P no es ortogonal
  A y D congruentes
  $\Downarrow$
  Pueden tener autovalores distintos

Transformaciones ortogonales en espacios euclídeos de dimensión finita

# ❑ Transformación ortogonal

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo, una aplicación f:V $\longrightarrow$ V es una transformación ortogonal si es lineal y conserva el producto escalar

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x, y \in V$$

- ❑ Las transformaciones ortogonales se denominan **isometrías**
- ❑ Son endomorfismos que conservan las normas de los vectores
- ❑ Las transformaciones ortogonales son aplicaciones lineales que transforman una base ortonormal en otra base ortonormal

## Matriz de Householder

Si (V,<>) es un espacio vectorial euclídeo y u= $(u_1, u_2,\dots u_n)$ $vector\ no\ nulo\ de\ R^n$

Se define H(u)= I-$\frac{2}{U^tU}UU^t$ siendo U=$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$

- Es una matriz simétrica y ortogonal
- |H(u)|=-1
- H(u) representa una simetría respecto al subespacio ortogonal de U
- H(ku) =H(u) $\forall k \neq 0$

## ❑ Factorización QR

Toda matriz que tiene columnas linealmente independientes se puede descomponer en un producto A= QR donde

- Q tiene columnas ortonormales
- R es una matriz triangular superior

***¿ y cómo se obtienen Q y R?***

- Aplicamos el método de Gram Schmidt a las columnas de la matriz A
- Utilizamos matrices de Householder para efectuar la factorización