Hoja de problemas nº 5

Formas bilineales y cuadráticas

Tema 5

Estudiar si las siguientes aplicaciones son formas bilineales

1.- f: $R^2 x R^2 \quad \rightarrow \quad R\ t.q.$ f $((x,y),(x´,y´)) = x.x´ + +4xy´ - 3yx´$

2.- f: $R^2 x R^2 \quad \rightarrow \quad R\ t.q.$

f $((x,y),(x´,y´)) = 2x.y´ + 5x - 3y$

3.- f: $R^3 x R^3 \quad \rightarrow \quad R\ t.q.$

f $((x_1, x_{2,} x_{3,}), (y_1, y_{2,} y_3)) = x_1 y_1 + 1$

4.- En el espacio vectorial de funciones R→ Rcontinuas en [a,b]

f(p,q)=$\int_a^b p(x)q(x)dx$

5.- Demostrar que toda forma bilineal puede descomponerse como suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica

6.- Se considera f: $R^3 x R^3 \quad \rightarrow \quad R$ definida por

f(x,y)= $x_1 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_2 - x_3 y_1 + x_3 y_2 + 2x_3 y_3 + x_2 y_3$ Calcular

a) Expresión matricial de f
b) Rango y núcleo de la forma bilineal
c) Si consideramos el cambio de base $x_1´ = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$x_2´ = -x_1 - x_3$
$x_3´ = -x_2 - x_3$

($x_1´, x_2´, x_3´$) son las coordenadas de un vector en una base B. Obtener la expresión de f en la base B.

7.- De una forma bilineal

f: P_1(x) x P_1(x) $\quad \rightarrow \quad$ R

se sabe que es simétrica y que f(x+1,x+1) =8 f(x+2,x+2)=11 f(x,x)=3

Calcular A respecto de la base {1,x}.

8.- Dada la forma bilineal f: P_2(x) x P_2(x) $\rightarrow$ R

(p,q) $\rightarrow$ p(0).q(0)

Obtener $M_B(f)$ *siendo* $B = \{2 + x - x^2, 1 + 2x, 3\}$

9.- Comprobar si las formas bilineales siguientes son simétricas o antisimétricas (o ninguna de las dos cosas)

a) f(x,y) = $2x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 4x_2y_2$

b) g(x,y) = $3x_1y_2 - 3x_2y_1$

c) h(x,y)= $x_1y_1 - 2x_1y_2 + 7x_2y_1 + 6x_2y_2$

10.- Descomponer la siguiente forma bilineal en suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica

f(x,y) = $2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 6x_2y_1 - x_2y_2$

11.- La matriz de una forma bilineal f: ExF $\rightarrow$ K

en las bases $B_E = \{u_1, u_2\}$ $B_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ *es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $B'_E = \{u_1 - u_2, u_1 + u_2\}$ $B'_F = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$

Hallar la matriz de f en estas bases

12.- La matriz de la forma bilineal f: $R^2 x R^2$ $\rightarrow$ R en la base B={(1,2); (3,-7)} es A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Obtener la matriz de f en la base canónica de R^2

13.- Si S_2 *es el espacio vectorial real de las matrices simétricas* $2x2$

Y B= {$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$} es una base del mismo.

F es una forma bilineal simétrica sobre S_2 cuya

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿cuál es el rango de f? Hallar una base del núcleo de f
b) Calcular el subespacio conjugado de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
c) Construye una base de vectores conjugados dos a dos de S_2
d) Clasificar la forma cuadrática asociada.

14.- $q(x_1, x_2\ x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$
Determinar una base de R^3 respecto de la que la matriz de la forma cuadrática anterior sea diagonal con 1,-1,0

Clasificar las formas cuadráticas (según los valores de a)

15.- $q(x_1, x_2\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

16.- q(x)= $X^tAX = (x_1, \ldots \ldots x_n)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

17.- Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre R y

B=$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Consideramos la forma cuadrática (definida sobre V):

$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$

a) Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
b) Obtener una base del núcleo de la forma polar asociada

Diagonalizar y clasificar las siguientes formas cuadráticas:

18.- $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$
19.- $q(x, y, z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$
20.- $q(x, y, z, t) = xy + yz + xt + yt + zt$
21.- $q(x, y, z) = 3y^2 + 2xz$
22.- $q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz$
23.- $q(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2xz - 4ayz$

24.- Dada la familia de formas cuadráticas

$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + (k+1)z^2 + 2xz + 2kyz$ calcular:

a) Matriz de dichas formas cuadráticas, para cada valor de k
b) Clasificar las formas cuadráticas según los valores de k
c) Para k=2 obtener el subespacio conjugado de S={(x,y,z)/x-y=0;y=0}
a) Diagonalizar q para k=3
b) Para k=4 diagonalizar encontrando una base de vectores conjugados

25.- **Examen final U-tad enero 2024**

Consideramos en R^3 la familia de formas cuadráticas

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4a\, x_1x_3 \quad a \in R$$

Obtener la matriz asociada en la base canónica

a) Determinar razonadamente si existen valores *reales de λ y μ* para los que B=$\{u_1 = e_1,\ u_2 = e_1 + \lambda e_2,\ u_3 = ae_1 + ae_2 + \mu e_3\}$, a$\neq 0$ sea una base de vectores conjugados
b) ¿para qué valores de a es q_a definida positiva y semidefinida positiva?
c) Calcular la dimensión de $[L< u_3 >]^c$ para a=1 y razonar si este resultado es acorde con el problema
d) Para a=2, diagonalizar por dos métodos diferentes la forma cuadrática e indicar cuáles son las matrices P y D y su significado e indicar también cuál es la signatura de la forma cuadrática.