Análisis Matemático I

Tema 5

Series y transformadas de Fourier de señales continuas

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

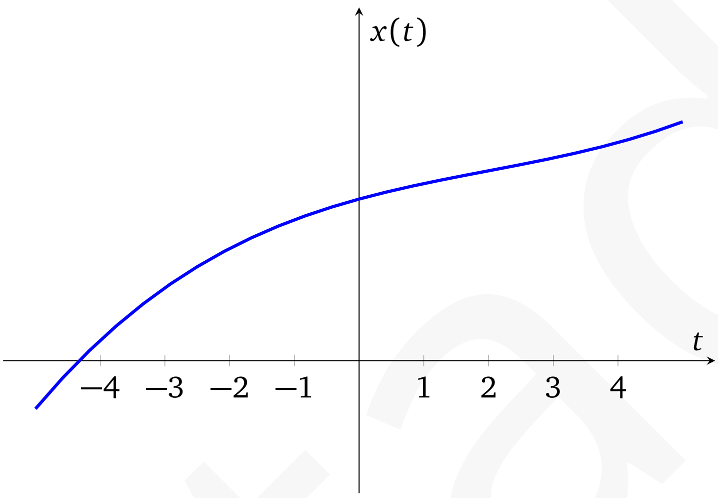
Índice

1 Señales

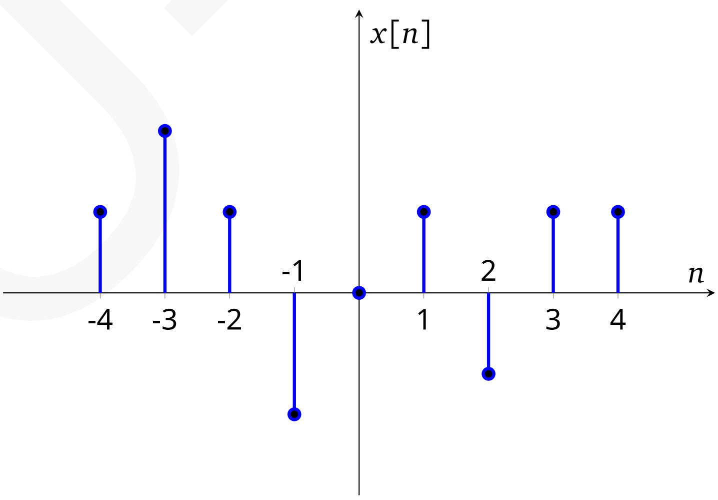
1.1 Señales continuas y discretas

Definiremos **señal** como una función que contiene cierta información. Atendiendo a la naturaleza de la variable independiente sobre la que se define la señal, estas se pueden dividir en continuas (o analógicas) y discretas (o secuencias).

En el caso de las **señales continuas**, la variable independiente es el tiempo, por lo que $t \in \mathbb{R}$.



En comparación, en las **señales discretas** la variable independiente es $n \in \mathbb{Z}$. En la práctica, es posible considerar las señales discretas como el resultado de obtener el valor de la señal continua cada T unidades de tiempo, es decir, $x[n] = x(n \cdot T)$.



1.2 Clasificación de señales

En función de determinadas características, es posible catalogar tanto las señales continuas como las discretas de la siguiente manera, aunque en lo que resta de capítulo nos centraremos en las señales continuas:

- Señal real pura: $x^*(t) = x(t)$.
- Señal imaginaria pura: $x^*(t) = -x(t)$.
- Señal par: $x(-t) = x(t)$.
- Señal impar: $x(-t) = -x(t)$.
- Señal hermítica: $x^*(-t) = x(t)$.
- Señal antihermítica: $x^*(-t) = -x(t)$.

Toda señal continua se puede representar como la suma de sus partes real e imaginaria, par e impar o hermítica y antihermítica, donde $x^*(t)$ representa la conjugación compleja de la señal $x(t)$:

$$x(t) = x_{real}(t) + x_{imag}(t) \quad \begin{cases} x_{real}(t) = \dfrac{x(t) + x^*(t)}{2} \\ x_{imag}(t) = \dfrac{x(t) - x^*(t)}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = x_{par}(t) + x_{impar}(t) \quad \begin{cases} x_{par}(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_{impar}(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = x_{herm}(t) + x_{antiherm}(t) \quad \begin{cases} x_{herm}(t) = \dfrac{x(t) + x^*(-t)}{2} \\ x_{antiherm}(t) = \dfrac{x(t) - x^*(-t)}{2} \end{cases}$$

Una señal continua se dice que es periódica de período T si $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $x(t)$ es periódica con período T, entonces también es periódica con período mT, donde $m \in \mathbb{N}$. Al valor más pequeño de T que satisface la ecuación anterior se le denomina **período fundamental**, y se le suele representar como T_0.

En tal caso, nos referiremos a ω_0 y f_0 como la **frecuencia fundamental** (en radianes por segundo y Hz, respectivamente), aunque también se le denomina primer armónico o armónico fundamental. A ω también se la conoce como frecuencia angular.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ (rad/s)} \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Al trabajar con señales sinusoidales es útil emplear la fórmula de Euler: $e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

1.3 Parámetros de interés de una señal

El **valor medio** de una señal continua se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Si la señal $x(t)$ es periódica, entonces la expresión se simplifica puesto que es posible limitar el cálculo a un período:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt$$

La **energía** asociada a una señal se calcula de la siguiente manera:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Por su parte, la **potencia media** de una señal se mide así:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Si la señal es periódica, la expresión simplificada para calcular la potencia media es la siguiente:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

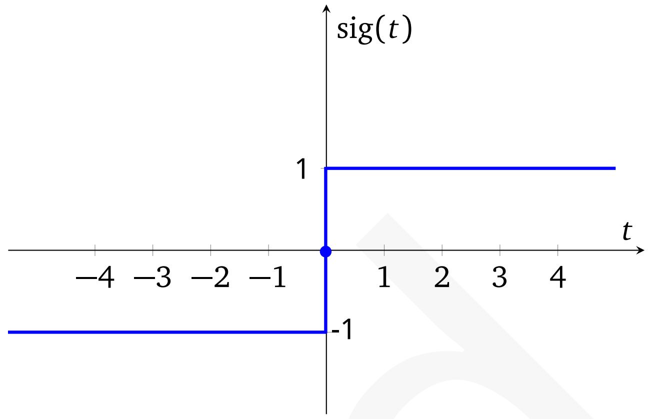
En función de los valores de energía y potencia media de una señal, se puede establecer la siguiente clasificación para señales no nulas:

- Señales definidas en energía (o de energía finita): $0 < E < \infty$ y $P = 0$.
- Señales definidas en potencia (o de potencia media finita): $E = \infty$ y $0 < P < \infty$.
- Señales donde $E = \infty$ y $P = \infty$.

1.4 Señales habituales

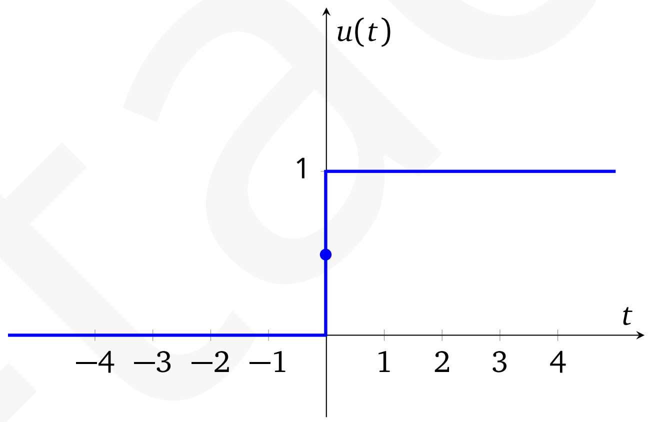
La señal **signo** tiene la siguiente definición:

$$\mathrm{sig}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



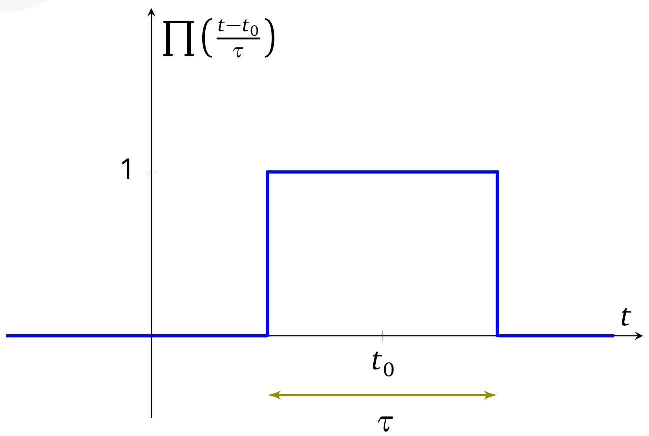
La señal **escalón unitario** (también llamada función de Heaviside) es la siguiente:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



La señal rectangular, también llamada **pulso rectangular**, tiene esta expresión:

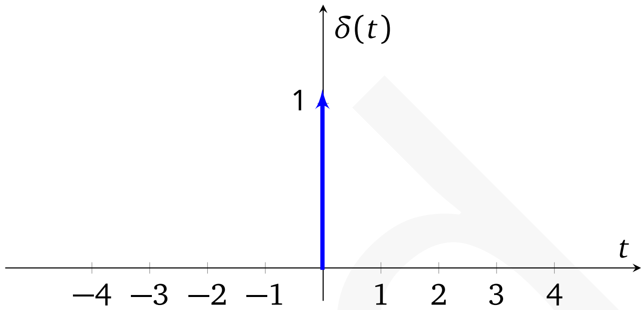
$$x(t) = \prod\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0 - \tau/2, t_0 + \tau/2] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad = \quad u\left(t - \left(t_0 - \frac{T}{2}\right)\right) - u\left(t - \left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\right)$$



Por último, una señal muy importante es la **delta de Dirac**, $\delta(t)$, también llamada **impulso unitario**. Desde el punto de vista matemático, esta señal no es una función, sino una distribución que no puede evaluarse para los distintos valores de la variable t.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

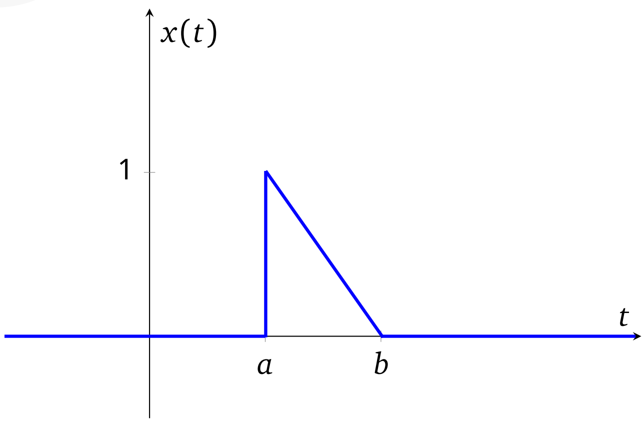


El impulso unitario tiene las siguientes propiedades:

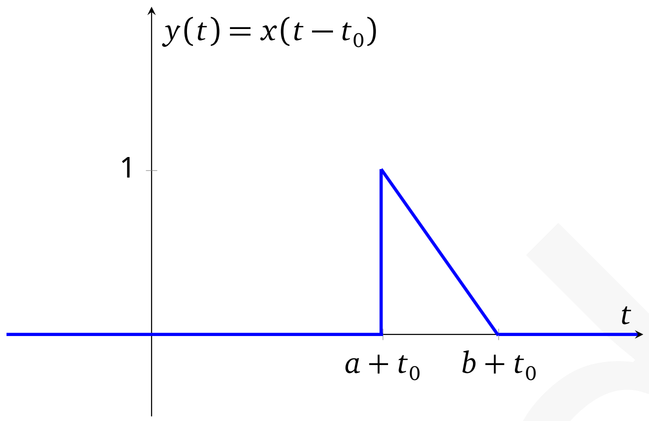
- Simetría: $\delta(-t) = \delta(t)$
- Integración: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$
- Muestreo: $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ y $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
- Selectividad: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) = x(0)$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)$
- Convolución: $x(t) * \delta(t) = x(t)$ y $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$
- Compresión/expansión: $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

1.5 Transformaciones

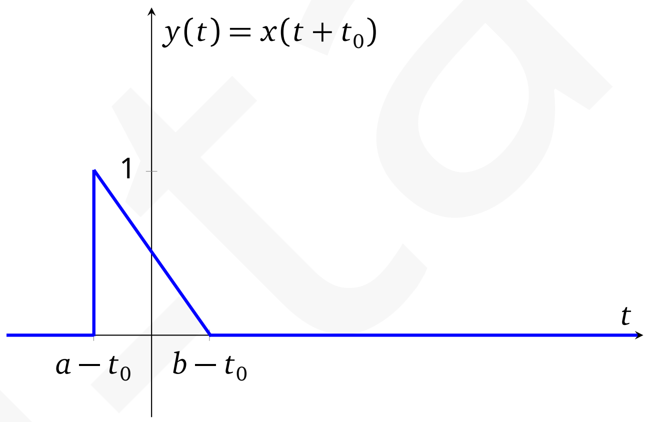
Dada una señal $x(t)$ cualquiera (las siguientes figuras muestran un ejemplo), es posible aplicar sobre ella las siguientes transformaciones:



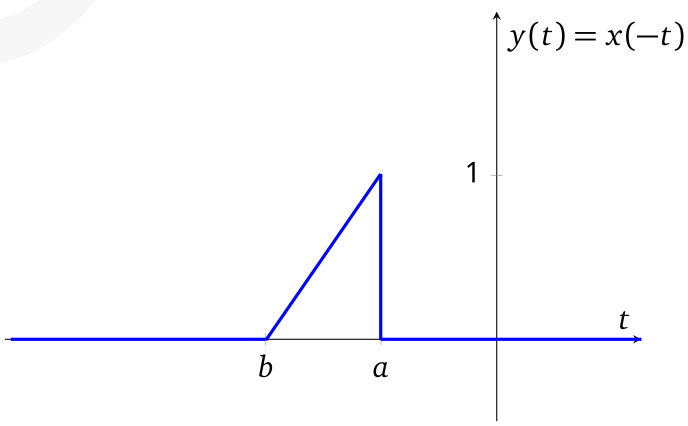
- Desplazamiento hacia la derecha t_0 unidades ($t_0 > 0$): $x(t-t_0)$.



- Desplazamiento hacia la izquierda t_0 unidades ($t_0 > 0$): $x(t+t_0)$.



- Inversión en el tiempo: $x(-t)$.



2 Desarrollo en serie de Fourier

2.1 Antecedentes

Jean-Baptiste Joseph Fourier fue un matemático francés (1768-1830) que descubrió las series que llevan su nombre mientras estudiaba problemas de vibraciones y transferencia de calor. Analizando la ecuación de difusión de calor en derivadas parciales, Fourier se dio cuenta de que la solución general a la ecuación estaba formada por una suma de senos y cosenos. Como dicha solución era una señal periódica, Fourier se planteó si cualquier señal periódica se podía escribir como una suma infinita de senos y cosenos.

2.2 Definición

El **desarrollo en serie de Fourier** se define solo para señales periódicas $x(t)$ de período T_0, y existen distintas variantes en su formulación, siendo la siguiente una de las posibles formas de describir la serie:

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)}$$

Los coeficientes a_k y b_k se calculan de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)dt$$

Por otra parte, la señal periódica $x(t)$ también puede descomponerse como una suma infinita de exponenciales complejas:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}}$$

Los coeficientes c_k, que pueden ser complejos, se obtienen mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

Respecto a los coeficientes a_k y b_k, si la señal $x(t)$ es par entonces los coeficientes $b_k = 0$. En comparación, si la señal $x(t)$ es impar, entonces los coeficientes $a_k = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) \text{ PAR} \\ \\ b_k = 0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} x(t) \text{ IMPAR} \\ \\ a_k = 0 \end{array}}$$

Por otra parte, los coeficientes a_k, b_k y c_k están relacionados de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{c} c_0 = a_0 \\ \\ c_k = \dfrac{a_k - j b_k}{2} \quad (k > 0) \\ \\ c_{-k} = \dfrac{a_k + j b_k}{2} \quad (k > 0) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} a_k = c_k + c_{-k} \quad (k > 0) \\ \\ b_k = j(c_k - c_{-k}) \quad (k > 0) \end{array}}$$

Al calcular las integrales asociadas a los coeficientes, puede ocurrir que aparezcan integrales con diferentes combinaciones de productos de senos y cosenos. En esas situaciones, las siguientes propiedades serán de utilidad:

- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)dt = \frac{T_0}{2}$
- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \cos(k\omega_0 t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{T_0}{2}$
- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\cos(k\omega_0 t)dt = 0$
- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \cos(k\omega_0 t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = 0 \qquad (k \neq m)$
- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)dt = 0 \qquad (k \neq m)$
- $\displaystyle\int_{\langle T_0 \rangle} \cos(k\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt = 0 \qquad (k \neq m)$

A continuación se exponen algunas propiedades asociadas a las series de Fourier:

- Si la señal de partida $x(t)$ es una señal real, entonces ocurre que $c_k = (c_{-k})^*$, lo que implica que la parte real de c_k es una señal discreta par, la parte imaginaria de c_k es una señal discreta impar, la magnitud $|c_k|$ es una señal discreta par y la fase $\phi_k = \arctan(b_k/a_k)$ es una señal discreta impar.
- Si $x(t)$ es una señal real y par, entonces los coeficientes c_k forman una señal discreta par y con valores reales, $c_k = c_{-k} = (c_k)^*$.
- Si $x(t)$ es una función real e impar, entonces los coeficientes c_k forman una señal discreta impar y con valores imaginarios puros, $c_k = -c_{-k} = -(c_k)^*$.

- Linealidad: $y(t) \rightleftharpoons d_k$, $z(t) \rightleftharpoons e_k \implies x(t) = \alpha y(t) + \beta z(t) \rightleftharpoons c_k = \alpha d_k + \beta e_k$.
- Conjugación: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = (y(t))^* \rightleftharpoons c_k = (d_{-k})^*$.
- Inversión en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = y(-t) \rightleftharpoons c_k = d_{-k}$.
- Compresión en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = y(at) \rightleftharpoons c_k = d_k$.
- Desplazamiento en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = y(t \pm T) \rightleftharpoons c_k = e^{\pm jk\omega_0 T} d_k$.
- Desplazamiento en la frecuencia: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = y(t)e^{jm\omega_0 t} \rightleftharpoons c_k = d_{k-m}$.
- Convolución en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k$, $z(t) \rightleftharpoons e_k \implies x(t) = y(t) * z(t) \rightleftharpoons c_k = T_0 d_k e_k$.
- Multiplicación en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k$, $z(t) \rightleftharpoons e_k \implies x(t) = y(t)z(t) \rightleftharpoons c_k = d_k * e_k$.
- Derivación en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \rightleftharpoons c_k = jk\omega_0 d_k$.
- Integración en el tiempo: $y(t) \rightleftharpoons d_k \implies x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \rightleftharpoons c_k = \dfrac{d_k}{jk\omega_0}$.

Una consecuencia de la anterior fórmula, en el caso de señales períodicas, se cumple lo siguiente:

$$\boxed{\overline{x(t)} = \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)dt = c_0 \qquad P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

2.3 Convergencia de las series de Fourier

La serie de Fourier de una señal periódica existe siempre que la potencia media de esta sea finita. En esa situación, se puede asegurar que los coeficientes de la serie son finitos y tienden a cero cuando $k \to \infty$, y que el error de la aproximación por la serie truncada de Fourier tiende a cero a medida que se toman más coeficientes.

Sin embargo, esto no significa que la señal reconstruida sea igual punto a punto a la señal $x(t)$ original, sino tan solo que la potencia media del error de la reconstrucción es igual a cero.

Si queremos que la serie de Fourier sea igual que la función original $x(t)$ punto a punto (excepto en un número finito de puntos), es necesario el cumplimiento de unos requisitos adicionales conocidos como las condiciones de Dirichlet:

1) $x(t)$ debe ser absolutamente integrable en un período, lo que implica que debe cumplirse que

$$\int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|dt < \infty$$

2) El número de mínimos y máximos dentro de un período debe ser finito.

3) El número de discontinuidades dentro de un período debe ser finito.

Si se cumplen las condiciones de Dirichlet, si $x(t)$ es continua en todo el período, entonces $x(t)$ es igual a su desarrrollo en serie de Fourier en todos los puntos del período.

En cambio, si $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en el período, la igualdad se cumplirá en todos los puntos menos en las discontinuidades, donde la serie será igual a la mitad de la suma de los límites por la izquierda y la derecha.

3 Transformada de Fourier

3.1 Definición

La **transformada de Fourier** permite la representación de la información de una señal en el dominio de la frecuencia y se representa de la siguiente manera:

$$x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

Dada una función (no necesariamente periódica) definida en energía, las transformadas directas e inversas de Fourier se calculan de la siguiente forma:

$$\mathscr{F}[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = X^{-1}(\omega) = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}dt$$

A la primera expresión se la conoce como **ecuación de análisis**, mientras que la segunda es la **ecuación de síntesis**. Aunque la transformada de Fourier está definida para señales de energía finita, en la práctica su uso puede generalizarse a señales definidas en potencia. En concreto, las fórmulas anteriores sirven para funciones absolutamente integrables, de forma que para obtener la transformada de Fourier en el caso de funciones que no son absolutamente integrables es necesario recurrir a las propiedades de la transformada.

3.2 Propiedades de la transformada de Fourier

A continuación se muestran las propiedades de la transformada de Fourier utilizando para ello las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ con transformadas de Fourier asociadas $X(\omega)$, $Y(\omega)$ y $Z(\omega)$:

- Linealidad: $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \implies Z(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$.
- Desplazamiento: $y(t) = x(t \pm t_0) \implies Y(\omega) = X(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$.
- Inversión: $y(t) = x(-t) \implies Y(\omega) = X(-\omega)$.
- Escalado: $y(t) = x(\alpha t) \implies Y(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
- Conjugación: $y(t) = x^*(t) \implies Y(\omega) = X^*(-\omega)$
- Modulación: $y(t) = x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \implies Y(\omega) = X(\omega \mp \omega_0)$
- Multplicación: $z(t) = x(t)y(t) \implies Z(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
- Convolución: $z(t) = x(t) * y(t) \implies Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$

- Derivación: $y(t) = \dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \implies Y(\omega) = (j\omega)^n X(\omega)$

  Nota: Esta propiedad es válida para señales de valor medio nulo en intervalo infinito.

- Integración: $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \implies Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$

- Dualidad: si $x(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, entonces se cumple que $X(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$.

Además de lo anterior, si $x(t)$ es una función par o impar, su transformada $X(\omega)$ es igulamente par o impar. Si $x(t)$ es hermítica, entonces $X(\omega)$ es una función real, mientras que si $x(t)$ es antihermítica, entonces $X(\omega)$ es una función imaginaria pura.

Por último, la transformada de Fourier permite calcular la energía de una señal utilizando lo que se conoce como la relación de Parseval:

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

3.3 Transformadas habituales

A continuación se muestran las parejas de señales y transformadas más habituales:

$x(t)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\big(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\big)$
$\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\big(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\big)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta\big(\omega-k\omega_0\big)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\big(t-kT_0\big)$	$\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T_0}\right)$

3.4 Convergencia de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal existe siempre que tenga energía finita. En esa situación, se puede asegurar que la transformada inversa de $X(\omega)$ tiende a $x(t)$ en el sentido de que la energía del error de la reconstrucción tiende a cero:

$$\tilde{x}(t) = X^{-1}(\omega) \implies \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt = 0$$

Si queremos que $\tilde{x}(t)$ converja puntualmente hacia $x(t)$ para todos los puntos t salvo aquellos donde exista una discontinuidad, es necesario que se cumplan las condiciones de Dirichlet:

1) $x(t)$ debe ser absolutamente integrable, lo que implica que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.
2) El número de mínimos y máximos en cualquier intervalo finito debe ser igualmente finito.
3) El número de discontinuidades en cualquier intervalo finito también debe ser finito.

4 Convolución

Se denomina **convolución continua** o **integral de convolución** de dos señales continuas $x(t)$ e $y(t)$ a la siguiente operación:

$$\boxed{z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau}$$

La convolución tiene las siguientes propiedades:

1) Elemento neutro: $x(t) * \delta(t) = x(t)$
2) Conmutativa: $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
3) Asociativa: $x(t) * \big(y(t) * z(t)\big) = \big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = x(t) * y(t) * z(t)$
4) Distributiva: $x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
5) Si $z(t) = x(t) * y(t)$, entonces $z(-t) = x(-t) * y(-t)$ y $x(t - t_0) * y(t + t_1) = z(t - t_0 + t_1)$

Para realizar la convolución gráfica de dos señales, es conveniente completar los siguientes pasos:

1) Transformar $x(t)$ en $x(\tau)$ e $y(t)$ en $y(\tau)$.
2) Obtener $y(-\tau)$ a partir de $y(\tau)$ mediante una inversión.
3) Realizar el desplazamiento $y(t - \tau)$, donde τ es la variable independiente y t es el desplazamiento.

5 Problemas

1) Determina si la siguientes señales son pares o impares:

   a) $x_1(t) = t\cos(t)$

   b) $x_2(t) = \cos(t)\,\mathrm{sen}^2(t)$

   c) $x_3(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$

2) Determina la parte par y la parte impar de la señal $x(t) = 2\cos(t) - \mathrm{sen}(t) + 3\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)$.

3) Obtén el período de las señales $x_1(t) = \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right)$ y $x_2(t) = \mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}t\right)$.

4) ¿Es periódica la señal $x(t) = \cos(3.5\pi t) + \mathrm{sen}(2\pi t) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6}t\right)$? Si la respuesta es afirmativa, determina su período fundamental.

5) ¿Son periódicas las señales $x_1(t) = \cos(3\pi t) + \mathrm{sen}(6t)$ y $x_2(t) = \cos(5t) + \mathrm{sen}\left(\frac{4}{3}t\right)$? Si la respuesta es afirmativa, determina su período fundamental.

6) Calcula las siguientes expresiones:

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(t)dt$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(t-3)dt$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2-2)\delta(t)dt$

   d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t)dt$

7) Calcula la energía y la potencia media de la señal $x(t) = 2$.

8) Calcula la energía de la señal $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

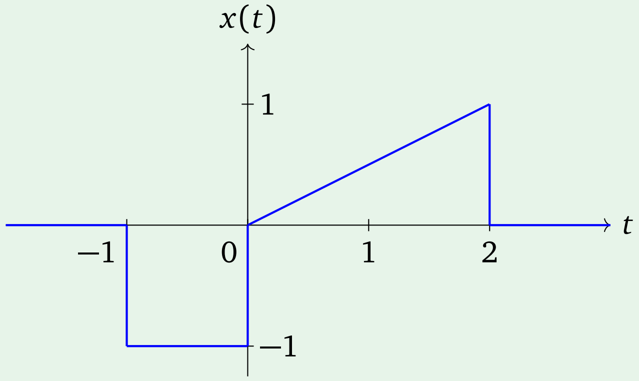
9) Calcula la energía y la potencia media de la señal $x(t) = e^{-|t|}$.

10) Calcula la potencia media de la señal $x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi\right) + \frac{A}{2}\cos\left(6\pi f_0 t\right)$.

11) Dibuja las gráficas de las señales $x_1(t) = u(t+3)$, $x_2(t) = u(t-2)$ y $x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

12) Dibuja la gráfica de la señal $x(t) = 3u(t) + tu(t) - (t-1)u(t-1) - 5u(t-2)$.

13) Dada la siguiente señal $x(t)$, obtén las gráficas de $x(t-2)$, $x(t+1)$, $x(2t)$, $x(0.1t)$, $x(-t)$, $x(-t-2)$ y $x(-t+3)$.



14) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi t) - \mathrm{sen}(3\pi t)$.

15) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$.

16) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de $x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$.

17) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de la señal $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(t+4n)$, donde $z(t) = e^{-t}$ en $t \in [0,4]$.

18) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de la señal $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(t+6n)$, donde $z(t) = \mathrm{sig}(t)$ limitada al intervalo $[-3,3]$.

19) Obtén el desarrollo en serie de Fourier de la señal $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(t+2n)$, donde $z(t) = t^2$ en $t \in [-1,1]$.

20) Obtén la transformada de Fourier de las siguientes señales utilizando la definición o alguna propiedad:

a) $x_1(t) = \delta(t)$

b) $x_2(t) = 1$

c) $x_3(t) = e^{j\omega_0 t}$

d) $x_4(t) = \cos(\omega_0 t)$

e) $x_5(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

f) $x_6(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$

21) Calcula la transformada de Fourier de la señal $x(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

22) Determina la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & t \in \left[-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}\right] \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

23) Obtén la transformada de la señal $x(t) = be^{-at}u(t)$, donde a y b son números reales positivos.

24) Determina la transformada de la señal $x(t) = e^{-|t|}$.

25) Obtén la convolución de las señales $x(t) = u(t) - u(t-T)$ e $y(t) = be^{-at}u(t)$, donde a y b son números reales positivos.

26) Obtén la convolución de las señales $x(t) = -u(t+1) + 2u(t) - u(t-1)$ e $y(t) = u(t+2) - u(t-2)$.

27) Obtén la convolución de la señal $x(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2)$ con ella misma, donde $T > 0$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- A. Oppenheim, A. Willsky y S. Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Pearson Education Limited.
- C. Phillips, J. Parr y E. Riskin. *Signals, Systems and Transforms*. Ed. Pearson.
- R. Ceschi y J-L. Gautier. *Fourier Analysis*. Ed. Wiley.
- S. Aja Fernández et al. *Problemas resueltos de señales y sistemas*. Universidad de Valladolid.
- C. Langton y V. Levin. *The intuitive guide to Fourier analysis and spectral estimation*. Mountcastle academic.
- D. McMahon. *Signals and systems demystified*. Ed. McGraw-Hill.