Hoja de problemas nº 1

Espacios Vectoriales

Tema 1

Razonar si los siguientes sistemas de vectores constituyen, o no, un subespacio vectorial. En caso afirmativo, encontrar su expresión como subespacio engendrado por un sistema de vectores.

1.- {(x,y,z)∈ R^3 $/2x - y + 3z = 0\}$

2.- {(x,y)∈ R^2 $/x.y = 0\}$

3.- $\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(R)\ \ t.q. \det A = 0\}$

4.- Determinar el valor de x para que el vector (1,x,5) ∈ R^3 pertenezca al subespacio <(1,2,3), (1,1,1)>

5.- Determinar si los conjuntos de polinomios A={p(x)∈ $P_2(x)$ $/p(0) = 0,\ p´(0) = 0\}$ y B={p(x)∈ $P_2(x)$ $/p(0) = 0,\ p´(0) = 1\}$ son subespacios de $P_2(x)$.

6.- Obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio M=$\{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 0;\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$

7.- Dados los subespacios S y T

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 - x_2 = 0\}$ $\quad T = L < (1,1,2,1), (2,3,-1,1) >$

Obtener bases de S , T, $S \cap T$ y $S + T$

Analizar para qué valores de “a” los siguientes vectores son linealmente independientes:

8.- $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$

9.- $x^2 + 3x + 1,\ \ 2 - x\ \ y\ 1 + ax + x^2$

10.- Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar la dimensión y una base del subespacio $U = \{X \in M_{2x2}(R) \ / \ XA = 0\}$.

11.- En el espacio vectorial R^4, calcular

a) una base que contenga al vector (1,2,1,1)

b) una base que contenga a los vectores (1,1,0,0), (0,0,2,2) y (0,3,3,0)

12.- Dadas B= $\{e_1,\ e_2, e_3\}$ $y\ B' = \{2e_1 + 3e_2, e_1 + e_3, -e_2 + e_3\}$

$a)$ *Si las coordenadas de un vector u respecto a B son* (1,2,3),
¿ cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B´?)

b) *Si las coordenadas de un vector u respecto a B´ son* (−2,1,0),
¿ cuáles son las coordenadas del vector u respecto a B?

13.- Sea el espacio $P_3(x)$ con bases $B = (1, x, x^2, x^3)$, $B' = (1+x, x+x^2, x^2 - x^3, 1+2x^3)$ y $B'' = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$.

a) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B a B´.
b) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B a B´´.
c) Hallar la matriz de cambio de base para pasar de B´ a B´´.
d) Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 2x$. Hallar sus coordenadas con respecto a B, B´ y B´´.

14.- En el espacio vectorial $P_2(x)$ se consideran las bases

$B_1=\{1+x+x^2, x+2x^2, 1+x\}$ y

$B_2=\{1+2x+3x^2, \alpha+(\alpha-1)x-2x^2, 2+2x\}$

Se pide:

a) Calcular el valor de α para que el polinomio p(x) de coordenadas (1,1,0) en la base B_2 tenga coordenadas (1,0,3) en la base B_1

b) Para el valor de α *calculado en el apartado anterior*, determinar el conjunto W de polinomios de $P_2(x)$ que tienen las mismas coordenadas en B_1 y B_2. ¿Es W un subespacio vectorial de $P_2(x)$?

c) En caso afirmativo, calcular unas ecuaciones implícitas en base B_1 de un subespacio suplementario de W en $P_2(x)$

15.- $(\boldsymbol{Examen\ Final}$ á$\boldsymbol{lgebra\ 2022})$

$En\ P_3(x)$, espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios

$$S_1 = \{p(x) \in P_3(x)/\ p(0) = 0\ y\ las\ tangentes\ a\ p(x) en\ los\ puntos\ de\ abscisas\ 1\ y\ -1\ son\ paralelas\ \}$$

S_2=$\{p(x) \in P_3(x)/\ p(2) = 0\ \}$

a) Calcular la dimensión y obtener una base de cada uno de esos dos subespacios
b) Calcular el subespacio $S_1 \cap S_2$, una base del mismo y razonar si $S_1 + S_2$ es o no una suma directa.
c) Si p(x) es un vector de $S_1 \cap S_2$, calcular cuáles son sus coordenadas en la base $B = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\ , x^3\}$
d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que las coordenadas en la base canónica del vector obtenido en c) son efectivamente las mismas.

16.- ***(Examen Parcial Álgebra 2022)***

Si $P_2(x)$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y p(x) es un polinomio de grado exactamente 2

a) Demostrar que tanto B={p(x), p´(x), p´´(x)} como B´={p(x), p(x)+p´(x), p´(x)+p´´(x)} son bases de $P_2(x)$
b) Analizar si S =$\{x(x-a)/a \in R\}$ es un subespacio vectorial de $P_2(x)$
c) Si p(x) pertenece a S y tiene raíz -1, obtener las coordenadas de $q(x)$=$x^2 + x + 2$ en la base B´
d) Demostrar, utilizando la matriz de cambio de base apropiada, que el vector obtenido en c) es precisamente q(x).

17.- Consideramos los subespacios V y W de R^4:

V≡ $generado\ por\ (1,2,3,4)\ y\ (-1,0,1,-1)$

W≡$\{(x, y, z, t))\ /\ 2x + 5y - z - t = 0\}$

a) Obtener una base de W
b) Obtener las ecuaciones paramétricas, implícita y una base de V$\cap W$
c) Razonar si la suma V+W es una suma directa
d) Coordenadas del vector (-1,1,1,2) respecto de la base de V formada por los vectores de V dados en el enunciado

18.- **(Examen noviembre 2009 ICAI)** En el espacio vectorial $P_3(x)$ (polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales), consideramos

V={ p(x)∈ $P_3(x)$/p´(x) $\in L < 1+x^2, x^3 >$}

W={ p(x)∈ $P_3(x)$/p´(x)= $p´´(x)$}

a) Calcular una base y las ecuaciones implícitas de V y W en la base canónica de $P_3(x)$
b) Calcular las ecuaciones paramétricas y una base de $V \cap W$
c) ¿Pertenece el polinomio p(x)=1 a V? ¿y pertenece a $V \cap W$?

En caso afirmativo, calcular sus coordenadas en las bases de V y de

$V \cap W$ obtenidas anteriormente.

19.- $P_n(x)$ *es* el espacio vectorial *de* polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales; se pide:

a) Demostrar que el polinomio x^n y sus n primeras derivadas conforman una base de $P_n(x)$

b) Estudiar si los vectores

$1+3x+5x^2, -1+2x^2$ y $3+3x+x^2$ son linealmente independientes

c) Si V=L<$1+x^2, 1-x^2$ >

¿Pertenecen los polinomios p(x) = $1+5x^2$ y r(x) = 1+x a V?

d)Si W=L<$1+3x+5x^2, -1+2x^2$ y $3+3x+x^2$ >

Calcular $V \cap W$ y $V+W$

20.- Sean los espacios vectoriales E =F=R^2

Calcular una base del espacio vectorial producto ExF asociada a la base canónica de R^2

21.- E es un espacio vectorial de dimensión 3 y B= $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E.

Sea V el subespacio de E engendrado por $\{u_1, u_2\}$ *siendo*

$$u_1 = e_1 - e_2 \quad y \quad u_2 = e_1 + e_2$$

Calcular una base del espacio vectorial cociente.

22.- Obtener una base del espacio vectorial cociente R^4 *módulo V siendo V el subespacio generado por* los vectores (1,0,1,1), (1,2,1,1) y (2,2,2,2)