# Geometría Lineal

## Tema 1

## Fundamentos de geometría plana

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

# Índice

# 1 Introducción

El término geometría deriva de las palabras griegas *geos* (tierra) y *metron* (medida). Los antiguos griegos trataron de sistematizar sus conocimientos geométricos estableciendo relaciones entre ellos. El trabajo de hombres como Tales (600 a.C.), Pitágoras (540 a.C.), Platón (390 a.C.) y Aristóteles (350 a.C.) para sistematizar los hechos y principios geométricos culminó en los *Elementos* de Euclides, escrito hacia el 300 a.C. Una de las grandes aportaciones de Euclides fue la afirmación de que para formalizar una teoría es necesario contar con objetos y principios básicos. En el caso de la geometría euclideana, los objetos son las nociones intuitivas que tenemos de puntos, rectas, planos, ángulos, etc. Los principios básicos, que se asumen como ciertos desde el inicio, están recogidos en lo que se conoce como los cinco postulados de Euclides.

Durante casi dos mil años los Elementos de Euclides fueron la principal fuente de conocimiento sobre geometría en el mundo occidental. Esta situación cambió cuando Descartes publicó su *Discurso del método*, al que añadió un apéndice titulado precisamente *Geometría*, en el cual propuso un nuevo sistema para estudiar esa disciplina, y que consistía en utilizar un sistema de referencia y parejas de números para cada punto del plano, lo que permite representar cualquier figura geométrica como un conjunto de pares de números reales.

Lo novedoso del enfoque de la geometría analítica fue que permitió resolver problemas geométricos mediante la exclusiva manipulación de expresiones algebraicas. Mientras que la geometría euclidiana usaba la regla y el compás para resolver problemas, la geometría cartesiana permitía representar y operar objetos geométricos mediante ecuaciones de dos variables, $x$ e $y$.

# 2 Objetos geométricos básicos

Un **punto** es el objeto que solo tiene posición. Debido a ello, no tiene longitud, anchura ni grosor.

Una **línea** es el objeto que tiene longitud (que de hecho es infinita) pero no tiene anchura ni grosor. De manera general una línea puede ser recta o curva, pero a menos que se indique lo contrario entenderemos el término línea como sinónimo de línea recta.

Un **segmento** rectilíneo es la parte de una recta comprendida entre dos de sus puntos, incluyendo los dos puntos, llamados extremos.

Una **superficie** es el objeto que tiene longitud y anchura, pero no grosor. Una superficie es plana, lo que se conoce habitualmente como un **plano**, si toda línea recta que conecta dos puntos de la superficie está contenida enteramente en la superficie.

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a la misma distancia del centro. Un **radio** es un segmento que une el centro de una circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia. Un **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia; es la cuerda más larga y tiene el doble de longitud que un radio. Un **arco** es una parte continua de una circunferencia. Un **semicírculo** es un arco que mide la mitad de la circunferencia.

Un **polígono** es una figura geométrica plana compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano. Un **cuadrilátero** es un polígono con cuatro aristas y cuatro vértices. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos.

# 3 Ángulos

## 3.1 Clasificación

Representaremos los **ángulos** mediante una sola letra griega (por ejemplo $\alpha$) o mediante tres letras mayúsculas de tal forma que el vértice queda representado mediante la segunda letra (por ejemplo, $\angle BAC$).

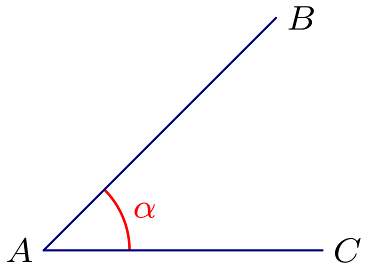



Figura 1: Notación para los ángulos

Los ángulos pueden ser **agudos** (menos de 90º), **rectos** (exactamente 90º), **obtusos** (más de 90º) o **llanos** (exactamente 180º).

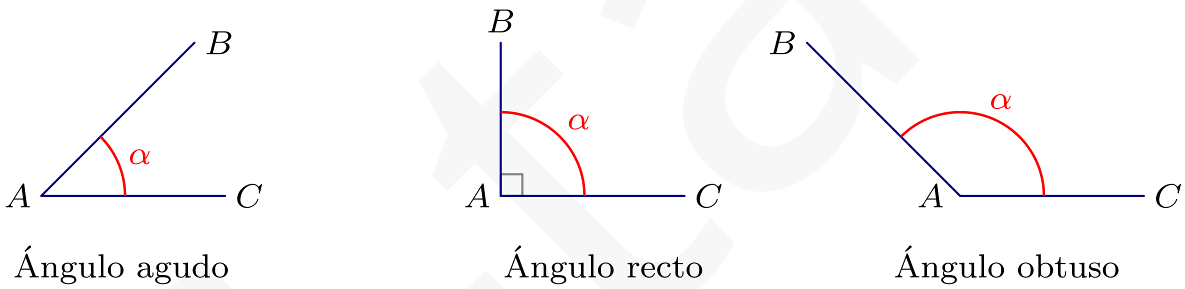



Figura 2: Tipos de ángulos

Se dice que dos ángulos son **congruentes** si miden lo mismo. Dos ángulos son **adyacentes** si tienen en común el vértice y uno de los lados. Dos ángulos son **suplementarios** si suman $180^\circ$. En cambio, se dice que dos ángulos son **complementarios** si suman $90^\circ$. Finalmente, dos ángulos son **opuestos** cuando en un ángulo los lados son semirrectas opuestas a los del otro ángulo. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.

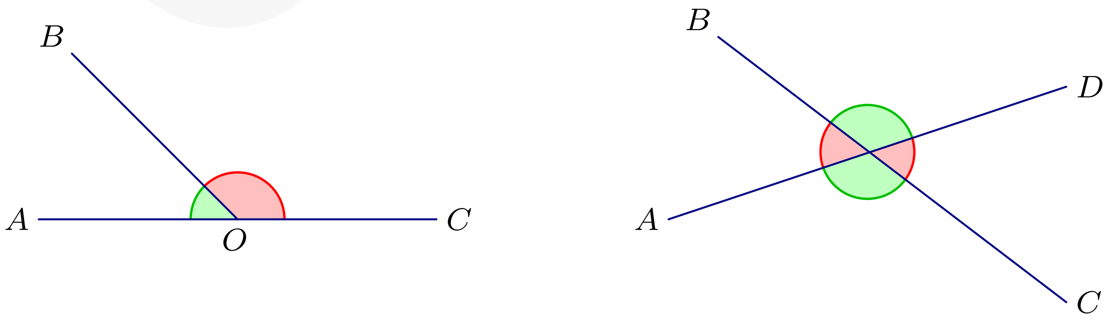



Figura 3: Ángulos suplementarios y opuestos

En el caso de dos rectas paralelas cortadas por una tercera recta, los ángulos congruentes se muestran en la siguiente figura:

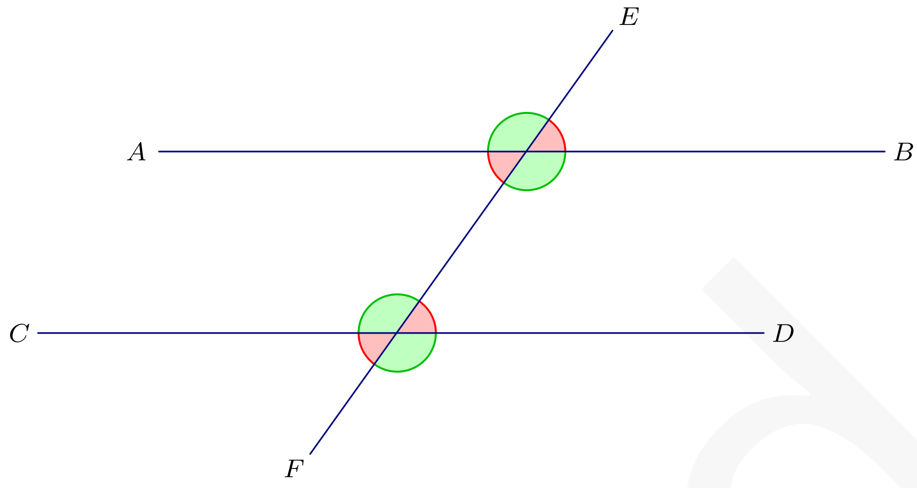



Figura 4: Ángulos en el caso de rectas que se cortan.

**Ejercicio 1**

Demuestra la igualdad de los ángulos opuestos para el caso de dos y tres rectas.

## 3.2 Teorema del ángulo central

Asociado a una circunferencia, el **teorema del ángulo central** indica lo siguiente: el ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito subtendido por esos dos puntos.

Por otra parte, una cuerda subtiende ángulos iguales cuando los vértices están en cualquier punto de uno de los dos arcos que determina la cuerda.

Una consecuencia del teorema del ángulo central es que, al formar un triángulo inscrito en una circunferencia, si la hipotenusa es un diámetro entonces el ángulo que forman los catetos es siempre 90°.

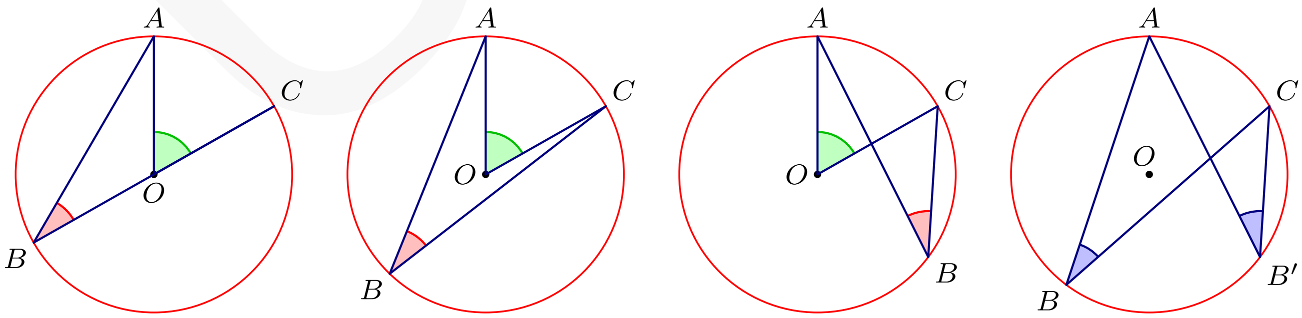



Figura 5: Teorema del ángulo central

**Ejercicio 2**

Demuestra las igualdades asociadas al teorema del ángulo central.

# 4 Polígonos

Tal como se ha comentado anteriormente, un **polígono** es una figura plana cerrada limitada por segmentos rectos, los cuales forman sus lados. Al punto de unión de dos segementos se le denomina vértice. Para identificar un polígono se pueden enumerar los vértices en orden.

Se denomina **polígono regular** a un polígono cuyos lados y ángulos interiores son todos iguales. A continuación se indican los elementos notables de un polígono regular:

- Lado ($l$): es cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- Vértice ($V$): punto común de cualquiera de los lados consecutivos.
- Origen ($O$) o centro ($C$): el punto interior equidistante de todos los vértices.
- Radio ($r$): el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.
- Apotema ($a$): segmento perpendicular a un lado, desde el centro del polígono.
- Diagonal ($d$): segmento que une dos vértices no contiguos.
- Perímetro ($P$): es la suma de la longitud de todos sus lados.

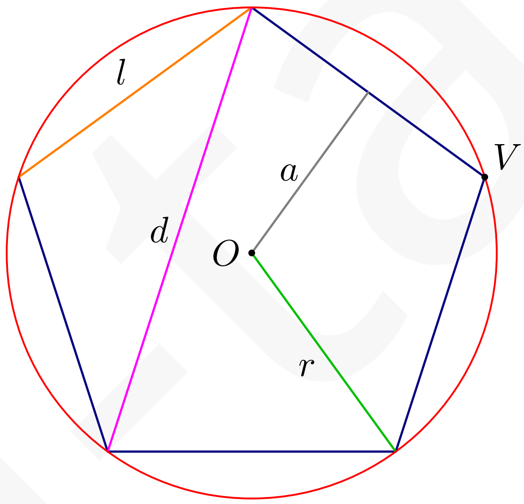



Figura 6: Elementos notables de un polígono.

Los polígonos regulares de tres o más lados son, en orden según el número de lados, triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, undecágonos, dodecágonos, etc.

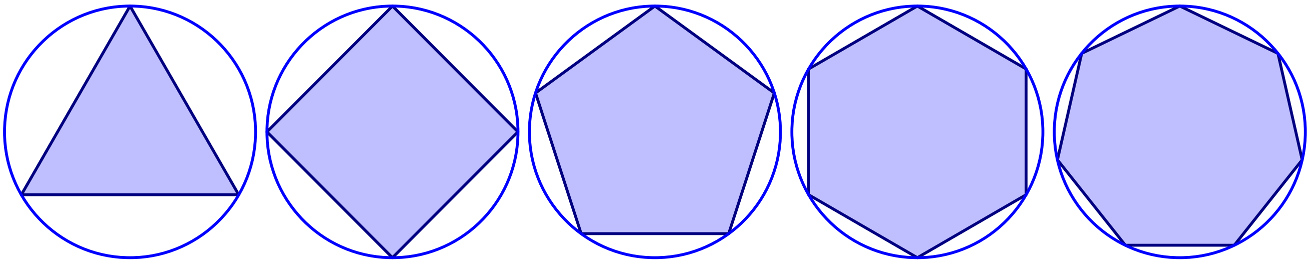


Figura 7: Principales polígonos regulares.

Los ángulos asociados a un polígono regular de $n$ lados son los ángulos centrales $\alpha_i$, los ángulos interiores $\beta_i$ y los ángulos exteriores $\gamma_i$, de forma que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 360$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 180(n-2)$ y $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 360$.

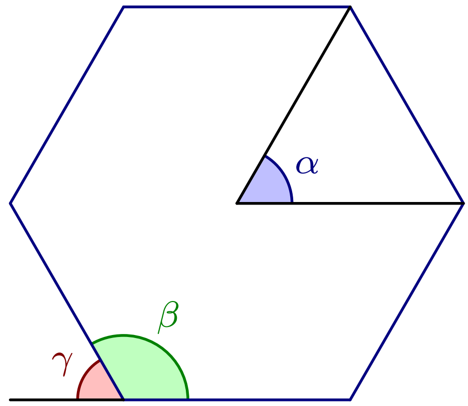



Figura 8: Ángulos de un polígono regular.

Se denomina **polígono simple** a un polígono cuyos lados no se cortan con otros lados, de forma que el polígono divide al plano en dos regiones, la interior al polígono y la exterior.

En función de su convexidad, un polígono simple puede ser **convexo** si tiene todos sus ángulos interiores menores de $180°$, o **cóncavo** si tiene algún ángulo interior que mide más de $180°$. Debido a ello, un **trapezoide** es un cuadrilátero convexo sin lados paralelos.

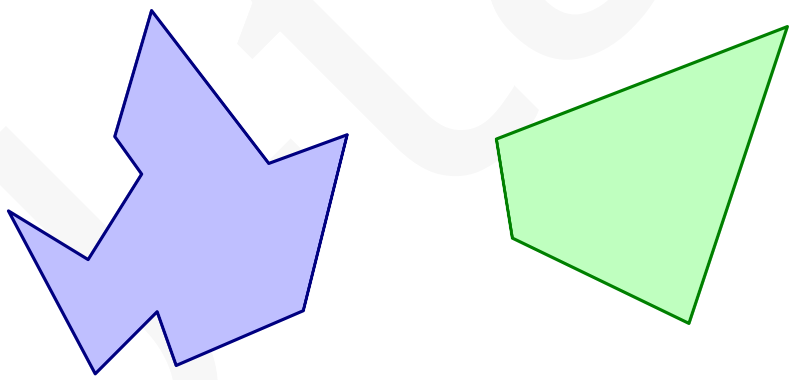


Figura 9: Ejemplo de polígono simple no regular y de trapezoide.

El área de un polígono regular, conociendo el perímetro $P$ y la apotema $a$ es $A = \frac{Pa}{2}$.

Si disponemos de las coordenadas de los vértices de un polígono simple, podemos calcular su área mediante lo que es conocido como la fórmula del área de Gauss o de la lazada (*shoelace*).

$$A = \frac{1}{2}\left( \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 3**

Demuestra la fórmula del área de Gauss.

# 5 Triángulos

## 5.1 Clasificación

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. En referencia a la siguiente figura, podemos identificar el triángulo mediante la expresión $\triangle ABC$.

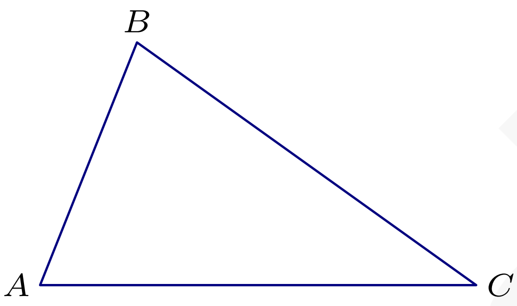
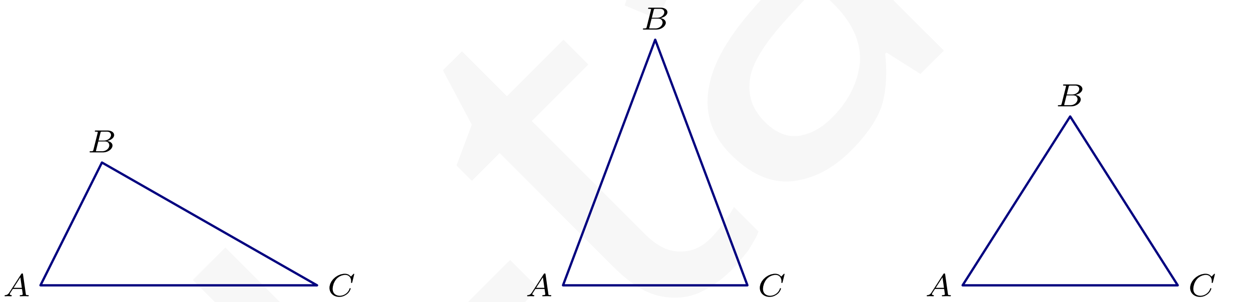



Figura 10: Triángulo

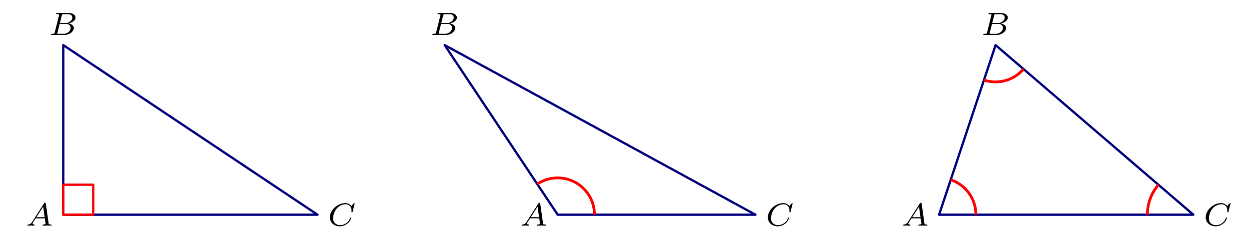
En función de las posibles igualdades en la longitud de los lados, podemos clasificar los triángulos en **equiláteros** (tres lados iguales), **isósceles** (dos lados iguales) o **escalenos** (ningún lado igual).




Triángulo escaleno | Triángulo isósceles | Triángulo equilátero

Figura 11: Tipos de triángulos según los lados

En cambio, si clasificamos los triángulos en función del tipo de ángulos que tienen, podemos hablar de triángulos **rectángulos** (un ángulo recto), **obtusos** (un ángulo obtuso) o **agudos** (los tres ángulos son agudos).




Triángulo rectángulo | Triángulo obtuso | Triángulo agudo

Figura 12: Tipos de triángulos según los ángulos

Un resultado muy conocido es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.

**Ejercicio 4**

Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Por último, se dice que dos triángulos son **congruentes** si tienen el mismo tamaño y la misma forma, con lo que todos los lados y ángulos son congruentes. En cambio, dos triángulos son **similares** si tienen la misma forma pero distinto tamaño.

## 5.2 Rectas de interés asociadas a un triángulo

La **mediana** de un triángulo es la recta que une dicho vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo $\triangle ABC$ tiene tres medianas (una por cada vértice), denotadas como $m_A$, $m_B$ y $m_C$.

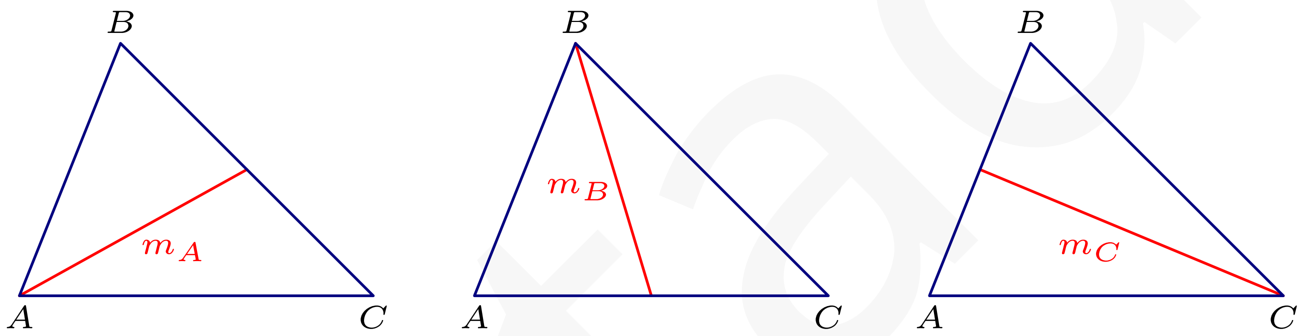



Figura 13: Medianas de un triángulo.

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado **baricentro** o **centroide**.

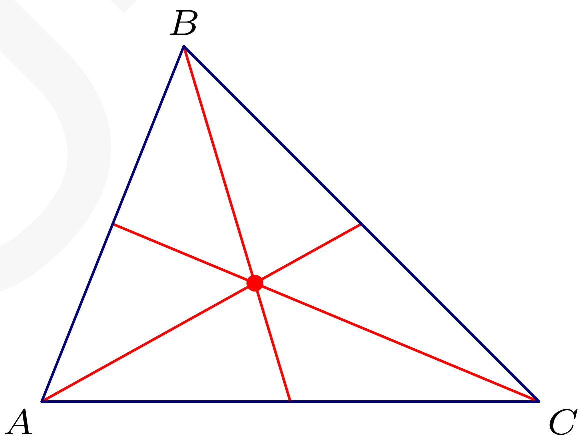



Figura 14: Baricentro (o centroide) de un triángulo.

La **bisectriz** de un triángulo se define como la recta que, pasando por dicho vértice, divide al ángulo correspondiente en dos partes iguales. Todo triángulo $\triangle ABC$ tiene tres bisectrices (una por cada ángulo), denotadas como $b_A$, $b_B$ y $b_C$.

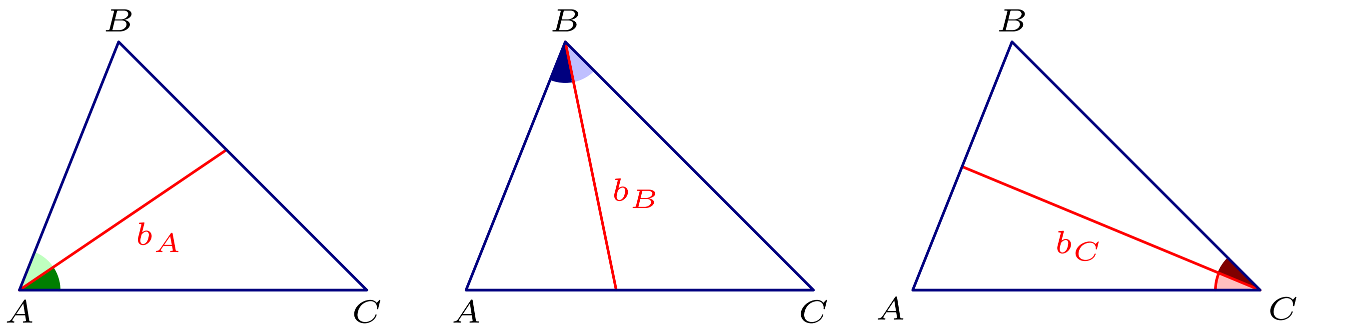



Figura 15: Bisectrices de un triángulo.

Las tres bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se cortan en un único punto, que equidista de los lados. Este punto se llama **incentro** del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Esta circunferencia es tangente a cada uno de los lados del triángulo.

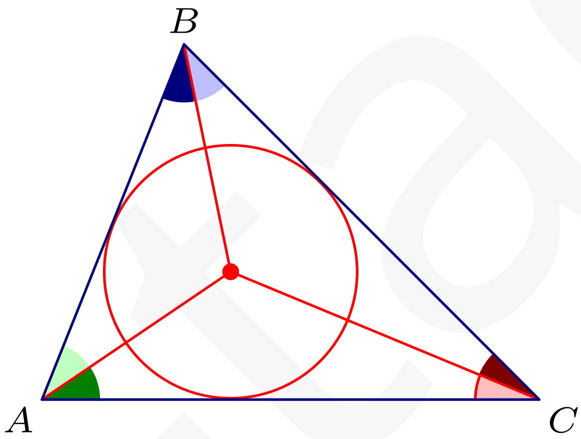



Figura 16: Incentro del triángulo.

La **mediatriz** de un lado de un triángulo se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio. Todo triángulo $\triangle ABC$, tiene tres mediatrices que denotaremos como $M_a$ (mediatriz del lado $a = \overline{BC}$), $M_b$ (mediatriz del lado $b = \overline{AC}$) y $M_c$ (mediatriz del lado $c = \overline{AB}$).

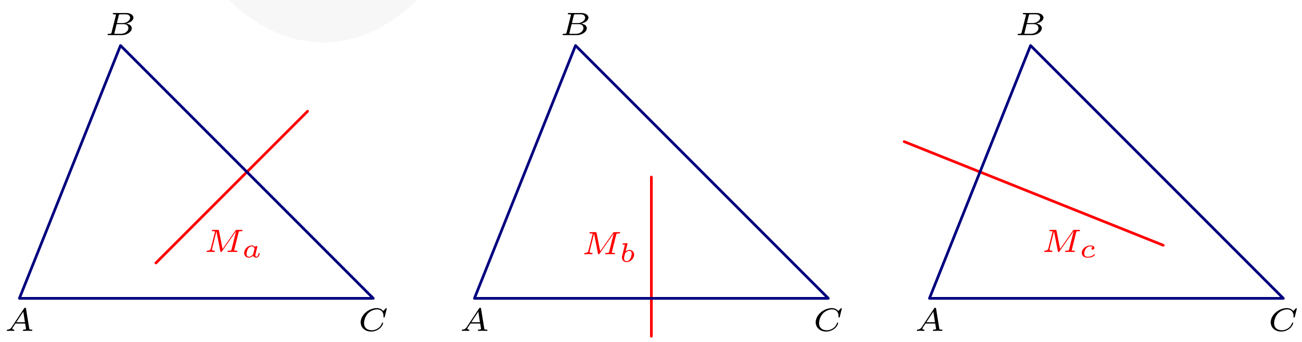



Figura 17: Mediatrices de un triángulo.

Al punto de encuentro de las mediatrices se le llama **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, ya que es equidistante a los tres vértices del mismo.

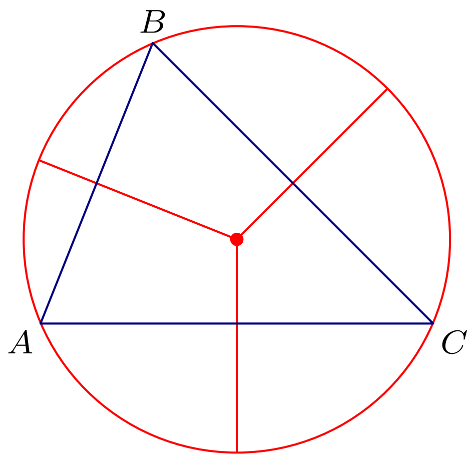



Figura 18: Circuncentro de un triángulo.

La **altura** de un triángulo, respecto de uno de sus lados, se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto. Todo triángulo $\triangle ABC$ tiene tres alturas que denotaremos como $h_a$ (la altura respecto del lado $a = \overline{BC}$), $h_b$ (a altura respecto del lado $b = \overline{AC}$) y $h_c$ (la altura respecto del lado $c = \overline{AB}$.

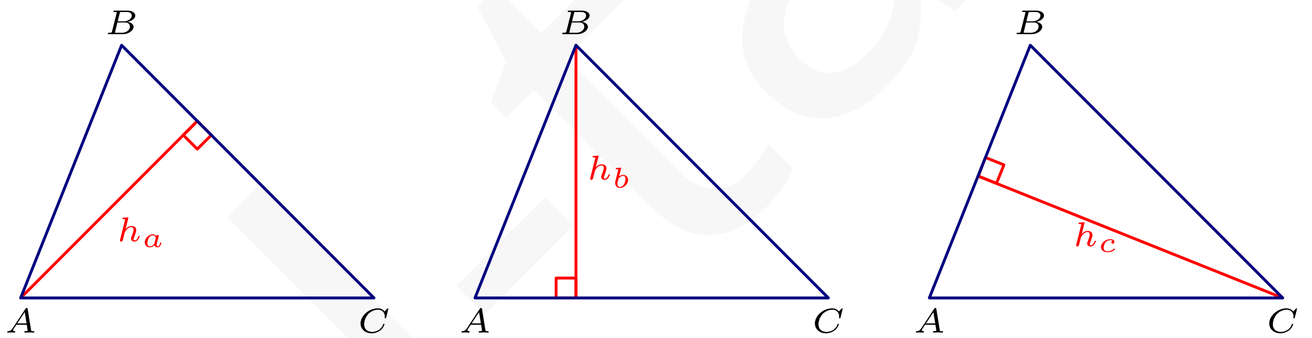



Figura 19: Alturas de un triángulo.

El punto de intersección de las alturas se llama **ortocentro**.

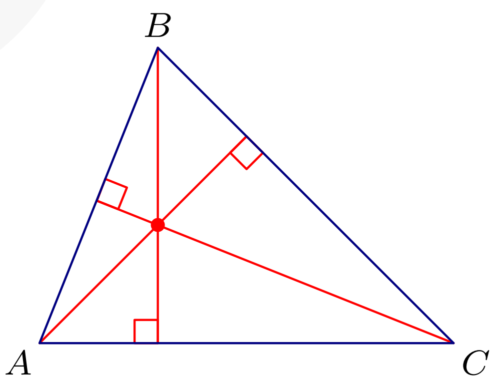



Figura 20: Ortocentro de un triángulo.

### 5.3 Teorema de Pitágoras

El famoso teorema de Pitágoras establece que, para un triángulo rectángulo de lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, la relación entre la hipotenusa (lado largo, $a$) y los catetos (lados cortos, $b$ y $c$ ) es $a^2 = b^2 + c^2$.

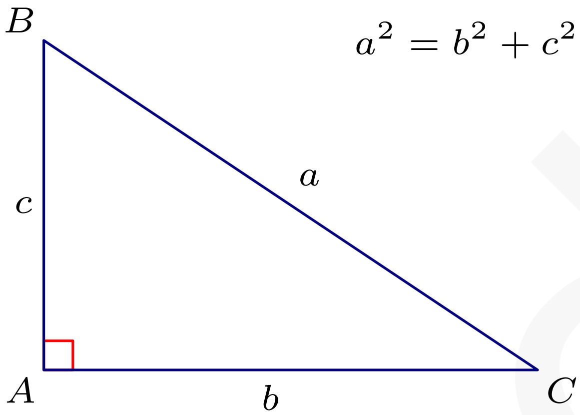



Figura 21: Teorema de Pitágoras.

**Ejercicio 5**

Demuestra el teorema de Pitágoras.

Por su parte, el teorema generalizado de Pitágoras indica que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble del producto de un lado por la la proyección del otro, es decir, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$.

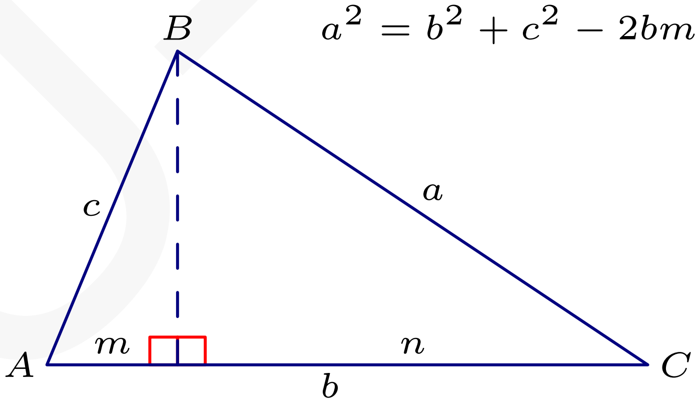



Figura 22: Teorema generalizado de Pitágoras.

**Ejercicio 6**

Demuestra el teorema generalizado de Pitágoras.

El teorema generalizado de Pitágoras da lugar a otra fórmula de gran utilidad para demostrar a su vez otras fórmulas: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, donde $\alpha$ es el ángulo que forman las aristas $b$ y $c$.

### 5.4 Área de un triángulo

El área de un triángulo es $S = \frac{1}{2}bh$, donde $b$ es la base del triángulo y $h$ la altura.

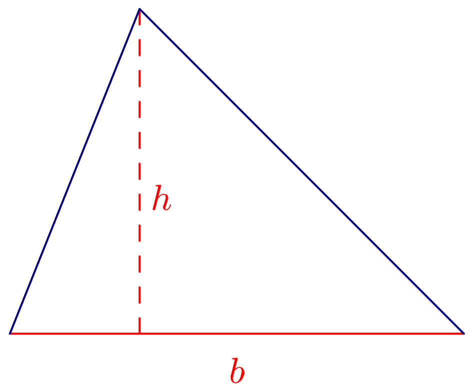



Figura 23: Área de un triángulo.

Si representamos como $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ la longitud de los lados de un triángulo $\triangle ABC$ y $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo, la fórmula de Herón permite calcular el área:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

**Ejercicio 7**

Demuestra la fórmula de Herón.

### 5.5 Teorema de Tales

El teorema de Tales indica que, cuando se tienen dos triángulos similares (de la misma forma y lados proporcionales), se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$

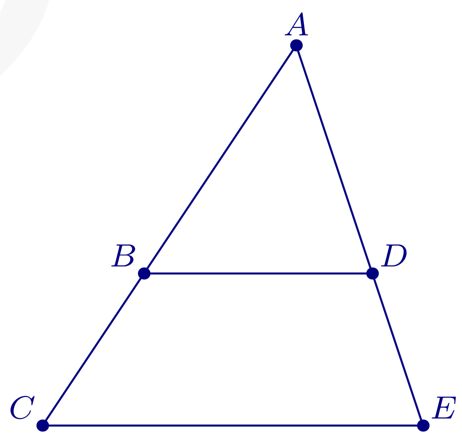



Figura 24: Teorema de Tales.

## 6 Resumen de notación

La notación que utilizaremos será la siguiente:

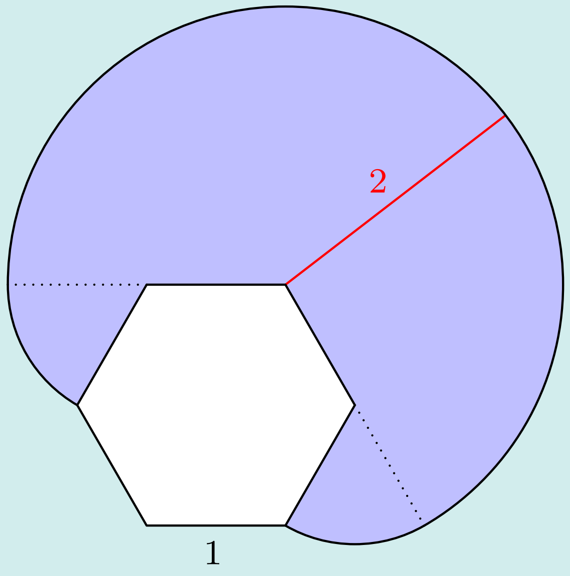
- $A = (x_A, y_A)$: punto $A$ de coordenadas $x_A$ e $y_A$.
- $\overline{AB}$: segmento que une los puntos $A$ y $B$.
- $AB$ o $|\overline{AB}|$: longitud del segmento que une los puntos $A$ y $B$.
- $r_{AB}$: recta que pasa por los puntos $A$ y $B$.
- $\angle A$: ángulo de vértice $A$.
- $\angle BAC$ o $\angle CAB$: ángulo que forman los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ incidentes en el punto $A$.
- $m_A$: mediana desde el punto $A$.
- $\triangle ABC$: triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$.
- $\square ABCD$: cuadrilátero de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.
- $\bigcirc O$: circunferencia de centro $O$.
- $\widehat{AB}$: arco de circunferencia que une los puntos $A$ y $B$.
- $r \| s$: rectas $r$ y $s$ paralelas.
- $r \perp s$: rectas $r$ y $s$ perpendiculares.

## 7 Problemas

1) Dado un triángulo cuyos lados miden 15, 20 y 25, ¿cuál es su área?

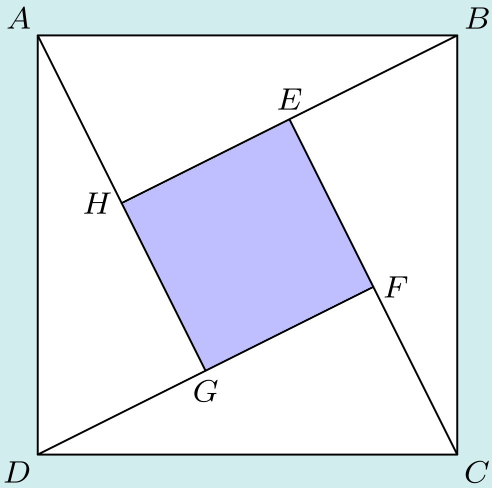
2) Dado un cuadrado de área 100, si creamos un octógono regular cortando triángulos rectángulos isósceles de las esquinas del cuadrado, cuál es el perímetro del octógono?

3) En la siguiente figura, ¿cuál es el área de la parte sombreada de color morado?

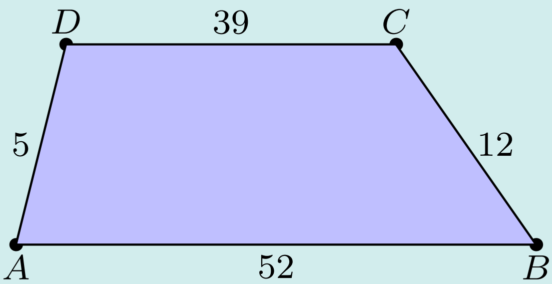



4) Los puntos $A, B, C, D$ se encuentran, en ese orden, sobre una recta, de forma que $AB = CD$ y $BC = 12$. El punto $E$ no se halla sobre esa recta, y $BE = CE = 10$. Si el perímetro de $\triangle AED$ es el doble del perímetro de $\triangle BEC$, determina $AB$.

5) En el cuadrado $ABCD$ se sabe que $AB = \sqrt{50}$ y que $BE = 1$. ¿Cuál es el área de $\square EFGH$?



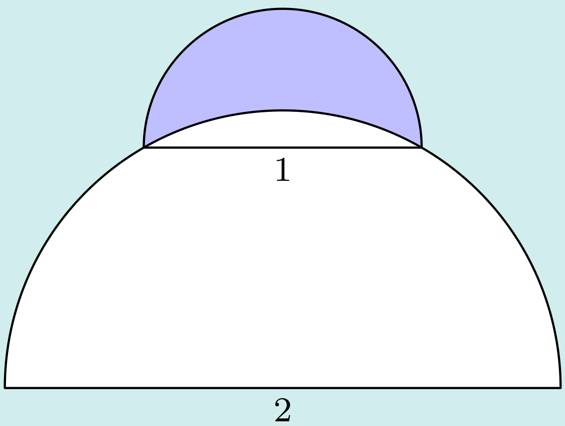

6) Dado el siguiente trapecio, calcula su área.




7) Dado el octógono regular $ABCDEFGH$, donde los vértices siguen el orden alfabético y la longitud de los lados es 2, determina el área del triángulo $\triangle ADG$.

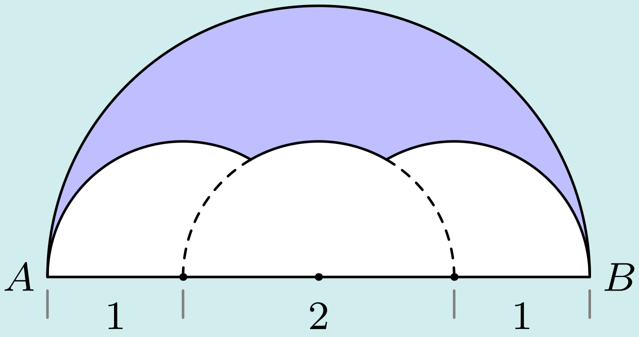
8) Dado el triángulo rectángulo $\triangle XOY$ donde $\angle XOY = 90°$, si $M$ y $N$ son los puntos medios de los segmentos $OX$ y $OY$, calcula $XY$ sabiendo que $XN = 19$ y $YM = 22$.

9) La siguiente figura está formada por dos semicírculos de diámetro 1 y 2, respectivamente. Calcula el área de la región sombreada de morado.



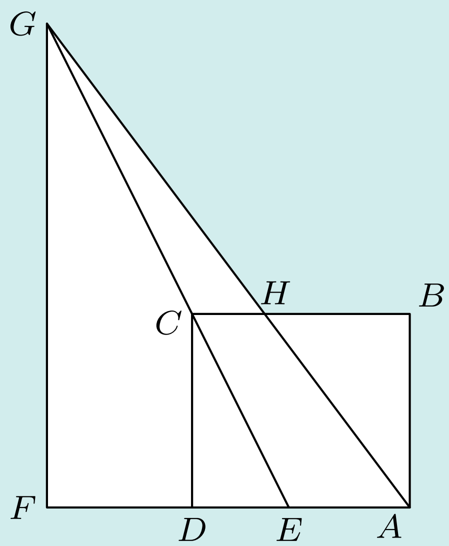

10) Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABE$ comparten el lado $AB$ y una porción de área. Si $\angle EAB$ y $\angle ABC$ son ángulos rectos, $AB = 4$, $BC = 6$, $AE = 8$, y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto $D$, ¿cuál es la diferencia entre las áreas de $\triangle ADE$ y $\triangle BDC$?

11) Tres semicírculos de radio 1 se construyen sobre el diámetro $\overline{AB}$ de otro semicírculo de radio 2. Los centros de los tres semicírculos pequeños dividen el segmento $\overline{AB}$ en cuatro segmentos de igual longitud. En estas condiciones, calcula el área de la región que se encuentra dentro del semicírculo grande pero fuera de los semicírculos pequeños.




12) Los puntos $A, B, C, D, E, F$ se encuentran, en ese orden, en el segmento $\overline{AF}$, de forma que la distancia entre cada pareja de puntos es igual a 1. Consideremos un punto $G$ que no se encuentra en la recta definida por el segmento $AF$, un punto $H$ que se halla en el segmento $\overline{GD}$ y un punto $J$ localizado en el segmento $\overline{GF}$, de forma que los segmentos $\overline{HC}$, $\overline{JE}$ y $\overline{AG}$ son paralelos. Con estos datos, determina el cociente $HC/JE$.

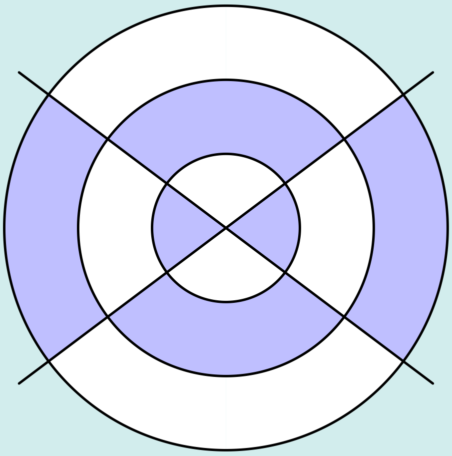
13) En el rectángulo $ABCD$, se conocen las longitudes $AB = 8$ y $BC = 9$. Además, se sabe que el punto $H$ se encuentra en el segmento $BC$, el punto $E$ en el segmento $AD$, el punto $F$ en la recta definida por el segmento $AD$, las recta de los segmentos $EC$ y $AH$ se cortan en el punto $G$ y $GF \perp AF$. Si $BH = 6$ y $DE = 4$, determina la longitud $GF$.




14) En el rectángulo $ABCD$, se sabe que $AB = 5$ y $BC = 3$. Los puntos $F$ y $G$ se encuentran sobre el segmento $\overline{CD}$ de forma que $DF = 1$ y $GC = 2$. Si las líneas que contienen a los segmentos $AF$ y $BG$ se cortan en un punto $E$ exterior al rectángulo, determina el área de $\triangle AEB$.

15) Dado el cuadrado $\square ABCD$, se sabe que el punto $E$ se encuentra en el segmento $\overline{AD}$ y el punto $F$ en el segmento $\overline{CD}$, de forma que $\triangle BEF$ es un triángulo equilátero. ¿Cuál es el cociente del área de $\triangle DEF$ entre el área de $\triangle ABE$?

16) Tal como se muestra en la figura, dos rectas pasan por el centro de tres círculos concéntricos de radios 1, 2 y 3. Si el área de la región sombreada es $8/13$ del área de la región sin sombrear, ¿cuál es el valor del ángulo agudo que forman las dos rectas?



17) Las circunferencias $A, B, C$ son tangentes de forma externa entre ellas y a la vez tangentes de forma interna a una circunferencia $D$. Se sabe que las circunferencias $B$ y $C$ son congruentes, que la circunferencia $A$ pasa por el centro de la circunferencia $D$ y que el radio de la circunferencia $A$ es 1. ¿Cuál es el radio de la circunferencia $B$?

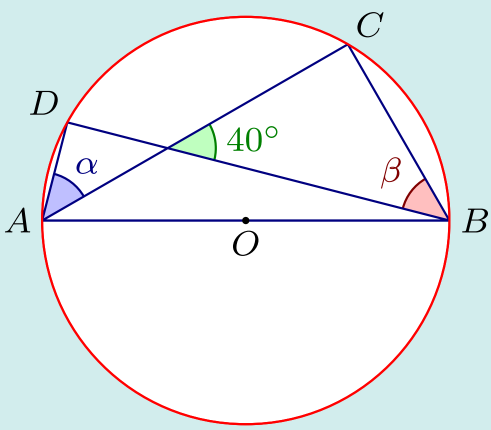
18) En el triángulo rectángulo $\triangle ACE$ se sabe que $AC = 12$, $CE = 16$ y $EA = 20$. Los puntos $B$, $D$ y $F$ se encuentran sobre los segmentos $AC$, $CE$ y $EA$, respectivamente, de forma que $AB = 3$, $CD = 4$ y $EF = 5$. ¿Cuál es el cociente del área de $\triangle DBF$ entre el área de $\triangle ACE$?

19) Una circunferencia de radio 1 es tangente interna de dos circunferencias de radio 2 en los puntos $A$ y $B$, de forma que el segmento $AB$ es un diámetro de la circunferencia pequeña. ¿Cuál es el área de la región externa a la circunferencia pequeña pero interna a la vez a las dos circunferencias grandes?

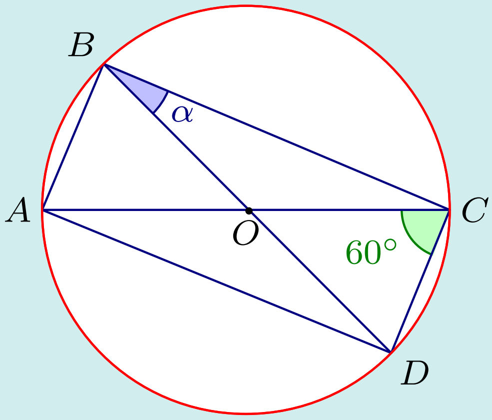
20) Demuestra que los seis triángulos formados por las tres medianas de un triángulo tienen el mismo área.

21) Demuestra que en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia la suma de los ángulos que se encuentran en vértices opuestos es igual a $180°$.

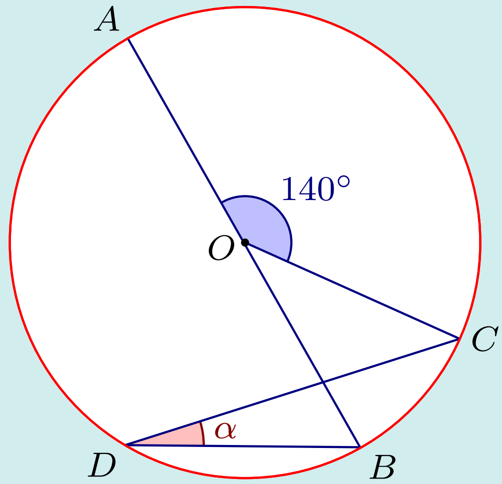
22) Calcula la suma de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ en la siguiente figura.



23) Calcula el valor del ángulo $\alpha$ en la siguiente figura.




24) Calcula el valor del ángulo $\alpha$ en la siguiente figura.



# Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:


- Barnett Rich. *Geometría*. Ed. McGraw-Hill. ISBN 968-422-244-0.
- M. Isabel García Planas. *Álgebra lineal y geometría para la ingeniería*. ISBN 978-84614-8386-0. Disponible en `https://upcommons.upc.edu/handle/2117/11985`.
- Ubaldo Usunáriz Balanzategui e Ignacio Usunáriz Sala. *Problemas de Geometría*. Disponible en `https://oa.upm.es/14866/`.
- Moisés Villena Muñoz. *Geometría plana*. ISBN 978-9978-310-03-8.
- *Brilliant*. Página web `https://brilliant.org/`.