

Solución Problemas Números Complejos

Juan Rodríguez

November 24, 2024

Apuntes

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd + adi + bci)$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{c^2+d^2}$
- $x = e^{Ln(x)} \leftrightarrow x = Ln(e^x)$

1 Ejercicio 1

Calcular parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = \frac{3-2i}{1+4i}$ b) $z_2 = \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}$ c) $z_3 = \cos(i)$ d) $z_4 = \text{sen}(2+i)$

1.1 Solución

$$z_1 = \frac{3-2i}{1+4i} = \frac{3-2i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{3-8-12i-2i}{17} = \boxed{-\frac{5}{17} - \frac{14}{17}i}$$

$$z_2 = \frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} = \frac{1+2i}{-1+i} = \frac{1+2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1+2-1i-2i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

$$z_3 = \cos(i) = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{\frac{1}{e} + e}{2} = \boxed{\frac{1}{2e} + \frac{e}{2}}$$

$$z_4 = \text{sen}(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{e} \cdot (\cos(2) + i\text{sen}(2)) - e \cdot (\cos(-2) + i\text{sen}(-2)) \right)$$

$$= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{e} \cdot (\cos(2) + i\text{sen}(2)) - e \cdot (\cos(2) - i\text{sen}(2)) \right) = \frac{1}{2e} (\text{sen}(2) - i\cos(2)) - \frac{e}{2} (-\text{sen}(2) - i\cos(2))$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \right) \text{sen}(2) + i \left(-\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \right) \cos(2)}$$

2 Ejercicio 2

Calcular el modulo y argumento de:

a) $z_1 = 3^i$ b) $z_2 = i^i$ c) $z_3 = i^{3+i}$ d) $z_4 = (1+i)^{2+i}$

2.1 Solución

$$z_1 = 3^i = e^{Ln(3^i)} = e^{iLn(3)} = \boxed{r = 1, \sigma = Ln(3)}$$

$$z_2 = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = \boxed{r = e^{-\frac{\pi}{2}}, \sigma = 0}$$

$$z_3 = i^{3+i} = i^3 \cdot i^i = (-i) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = \boxed{r = e^{-\frac{\pi}{2}}, \sigma = \frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (1+i)^{2+i} = (1+i)^2 \cdot (1+i)^i = (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^2 \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^i = (2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) \cdot ((\sqrt{2})^i \cdot e^{-\frac{\pi}{4}}) \\ &= 2e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{iLn(\sqrt{2})} = 2e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + Ln(\sqrt{2}))} = \boxed{r = 2e^{-\frac{\pi}{4}}, \sigma = \frac{\pi}{2} + Ln(\sqrt{2})} \end{aligned}$$

3 Ejercicio 3

Calcular las raíces cuartas de la unidad

3.1 Solución

$$z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} e^{i(\frac{2k\pi}{4})} || k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \rightarrow e^0 = \boxed{1}$$

$$k = 1 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{i}$$

$$k = 2 \rightarrow e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

$$k = 3 \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{2}} = \boxed{-i}$$

4 Ejercicio 4

Calcular las raíces cúbicas de -8

4.1 Solución

$$z^3 = -8 \rightarrow \sqrt[3]{8} e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{3})} || k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \rightarrow 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = \boxed{1 + i\sqrt{3}}$$

$$k = 1 \rightarrow 2e^{i\pi} = \boxed{-2}$$

$$k = 2 \rightarrow 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})) = \boxed{1 - i\sqrt{3}}$$

5 Ejercicio 5

Determina la forma binómica de $e^{\sqrt{i}}$

5.1 Solución

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})} \quad || k = 0, 1$$

$$k = 0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Opción 1

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \boxed{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + ie^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Opción 2

$$e^{\sqrt{i}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} \left(\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \boxed{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - ie^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

6 Ejercicio 6

Expresa en forma binómica el número $(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^6$

6.1 Solución

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^6 = e^{i5\pi} = e^{i\pi} = \boxed{-1}$$

7 Ejercicio 7

Calcula $\sqrt{-16 - 30i}$

7.1 Solución

$$\sqrt{-16 - 30i} = (x + iy) \rightarrow (\sqrt{-16 - 30i})^2 = (x + iy)^2 \rightarrow -16 - 30i = x^2 + 2ixy - y^2 \rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = -16$$

$$2xy = -30 \rightarrow x = -\frac{15}{y}$$

$$\left(-\frac{15}{y}\right)^2 - y^2 = -16 \rightarrow \frac{225}{y^2} - y^2 = -16 \rightarrow y^4 + 16y^2 - 225 = 0$$

$$\xrightarrow{y^2 = t}$$

$$t^2 + 16t - 225 = 0 \rightarrow (t - 25)(t + 9) = 0 \rightarrow y = \pm 5, x = \mp 3$$

$$\boxed{z_1 = -3 + 5i, z_2 = 3 - 5i}$$

8 Ejercicio 8

Determinar $m \in \mathbb{R}$ de modo que $(2e^{i\sqrt{2}})^m$ sea un número real negativo

8.1 Solución

$$(2e^{i\sqrt{2}})^m = 2^m \cdot e^{im\sqrt{2}}$$

Nota: Nos fijamos en la parte imaginaria ya que 2^m siempre sera un valor positivo

$$2^m(\cos(m\sqrt{2}) + i\sin(m\sqrt{2}))$$

Nota: Para que el número sea real negativo, el coseno debe ser negativo y el seno nulo. Por lo tanto, $\forall k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos((2k+1)\pi) = -1, \sin((2k+1)\pi) = 0$

$$m\sqrt{2} = (2k+1)\pi \rightarrow \boxed{m = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{2}} || k \in \mathbb{Z}}$$

9 Ejercicio 9

Determinar los números complejos no nulos tal que su quinta potencia, z^5 , sea igual a su conjugado, es decir, \bar{z}

9.1 Solución

$$z = re^{i\sigma}, \bar{z} = z = re^{-i\sigma}$$

$$(re^{i\sigma})^5 = re^{-i\sigma} \rightarrow r^5 e^{i5\sigma} = re^{-i\sigma}$$

$$r^5 = r \rightarrow r(r^4 - 1) = 0 \rightarrow r = 0, r = -1, r = 1, r = i, r = -i$$

$$e^{i5\sigma} = e^{-i\sigma} \rightarrow 5\sigma = -\sigma + 2k\pi \rightarrow \sigma = \frac{k\pi}{3}$$

$$k = 0 \rightarrow z = 1, \boxed{1^5 = 1}$$

$$k = 1 \rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}}, \boxed{e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \rightarrow (e^{i\frac{k\pi}{3}})^5 = e^{-i\frac{k\pi}{3}}}$$

10 Ejercicio 10

Dado el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$. Calcula $P(i\sqrt{3})$ y $P(-i\sqrt{3})$. Resuelve a continuación la ecuación $P(z) = 0$

10.1 Solución

$$P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63 = 9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = \boxed{0}$$

$$\boxed{P(-i\sqrt{3}) = 0}$$

Nota: Si un número complejo es solución o raíz de un polinomio de coeficientes reales, su conjugado también lo es.

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z - (-i\sqrt{3})) \cdot Q(x) = (z^2 + 3) \cdot Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63}{z^2 + 3} = \dots = z^2 - 6z + 21 = \dots = (z - (3 + 2\sqrt{3}i))(z - (3 - 2\sqrt{3}i))$$

$$P(z) = 0 \rightarrow \boxed{P(z) = (z - i\sqrt{3})(z - (-i\sqrt{3}))(z - (3 + 2\sqrt{3}i))(z - (3 - 2\sqrt{3}i))}$$

11 Ejercicio 11

Dado el número complejo $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, calcula z^2 en forma binómica. A continuación, expresa z^2 en forma exponencial y deduce la forma exponencial de z

11.1 Solución

$$z^2 = (-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i(\sqrt{2 + \sqrt{2}})(\sqrt{2 - \sqrt{2}}) = \boxed{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4 \\ \sigma = \arctg\left(\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$z^2 = 4e^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$z = \sqrt{4e^{\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{7\pi + 2k\pi}{2}} \text{ tal que } k = 0, 1$$

$$\begin{cases} k = 0 & 2e^{i\frac{7\pi}{8}} \text{ Correcto, segundo cuadrante} \\ k = 1 & 2e^{i\frac{15\pi}{8}} \text{ Incorrecto, cuarto cuadrante} \end{cases}$$

Nota: El número original estaba en el segundo cuadrante. Al elevar al cuadrado y después deshacerlo, podemos introducir soluciones irreales.