U-TAD
CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Cónicas y Cuádricas

Tema 7

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

Tema 7. Cónicas y cuádricas

❑ Elipse

Consideramos el espacio afín métrico R^2

- ❑ Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante e igual a 2a
- ❑ La ecuación de cualquier punto que pertenece a la elipse es por tanto

$$d(P, F_1)+ d(P, F_1)=2a$$

- ❑ Considerando SPG que los focos están sobre el eje de abscisas y equidistantes del origen de coordenadas (son los puntos (c,0) y (-c,0) la ecuación expresada en coordenadas será $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$=2a

Reordenando y elevando al cuadrado $\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=(x-c)^2+y^2$

$\Longrightarrow$ $4a^2+x^2+c^2+2cx+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=x^2+c^2-2cx+y^2$ $\Longrightarrow$ $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Simplificando y volviendo a reordenar $a^2(a^2-c^2)= x^2(a^2-c^2)+y^2a^2$ y haciendo $a^2-c^2=b^2$ obtenemos $a^2b^2= x^2b^2+y^2a^2$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ ***Ecuación reducida de la elipse***

Hipérbola

Consideramos el espacio afín métrico R^2

- Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante e igual a 2a
- La ecuación de cualquier punto que pertenece a la hipérbola es por tanto

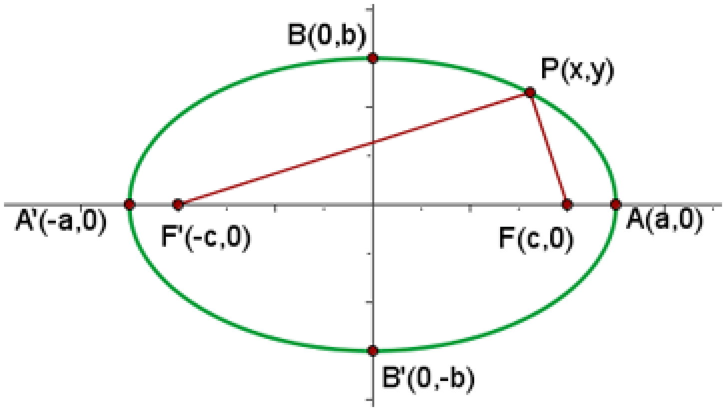
$$|d(P, F_1) - d(P, F_1)| = 2a$$

- Considerando SPG que los focos están sobre el eje de abscisas y equidistantes del origen de coordenadas (son los puntos (c,0) y (-c,0) la ecuación expresada en coordenadas será $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$

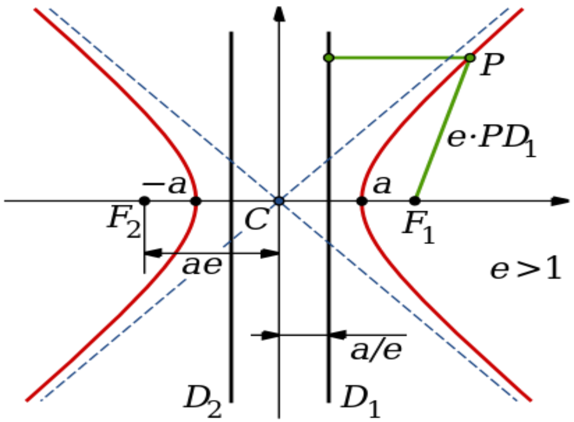
Reordenando y elevando al cuadrado $\left(\pm 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = (x-c)^2+y^2$

$\longrightarrow 4a^2+x^2+c^2+2cx+y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = x^2+c^2-2cx+y^2 \longrightarrow a^2+cx = \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

Simplificando y volviendo a reordenar $a^2(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2)+y^2a^2$ y haciendo $c^2-a^2=b^2$ obtenemos $a^2b^2 = x^2b^2+y^2a^2$ $\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ***Ecuación reducida de la hipérbola***



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$=1 ***Ecuación reducida de la elipse***



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$=1 ***Ecuación reducida de la hipérbola***

❑ Parábola

- ❑ Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto F denominado foco y de una recta r que se llama directriz
- ❑ La ecuación de cualquier punto que pertenece a la parábola es por tanto

$$d(P, F_1) = d(P, r)$$

- ❑ Considerando SPG que el foco es el punto F=(p/2, 0) y la directriz es la recta vertical de ecuación x=-p/2 tenemos

$$x+p/2=d(X,r)=d(X,F)= \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$$

Y si elevamos al cuadrado y simplificamos obtenemos

$$y^2 = 2px \quad \textit{Ecuación reducida de la parábola}$$

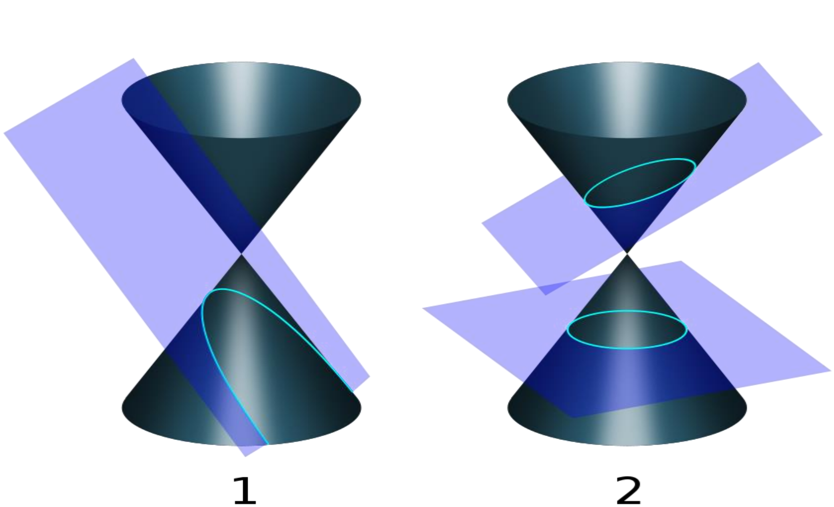
❑ Secciones cónicas

- ❑ Elipse, hípérbola y parábola son las secciones que se obtienen al cortar mediante un plano el cono de ecuación $x^2+y^2-z^2=0$

- ❑ Cortando con el plano $\pi \equiv z = 1$ *se obtiene* $x^2+y^2=1$ que es una circunferencia (una forma particular de elipse)

- ❑ Cortando con el plano $\pi \equiv y = 1$ *se obtiene* $x^2-y^2=-1$ que es una hipérbola

- ❑ Cortando con el plano $\pi \equiv x - z = 1$ *se obtiene* $y^2=-2x+1$ que es una parábola



Cónicas degeneradas

- Cortando con el plano $\pi \equiv z = 0$ *se obtiene* $x^2+y^2=0$ sólo un punto verifica la ecuación
- Cortando con el plano $\pi \equiv y = 0$ *se obtiene* $x^2-z^2=0 \Longleftrightarrow (x-z)(x+z)=0$ son 2 rectas que se cortan
- Cortando con el plano $\pi \equiv x - z = 0$ *se obtiene* $y^2=0$ que es una recta doble (dos rectas coincidentes)

Ecuación general de una cónica

- Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una ecuación de segundo grado en dos variables:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

- Su expresión matricial

$$(1 \quad x \quad y)\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow X^t\tilde{A}X = 0$$

- O bien $(x \quad y)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2a_1 \quad 2a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0 = 0 \Longleftrightarrow X^tAX + BX + a_0 = 0$

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

Ejemplo 1 Ecuación general de una cónica

$9x^2$ -4xy+6y^2-10x-29$y - 5$=0

- Su expresión matricial

$$(1 \quad x \quad y)\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -5 & -29/2 \\ -5 & 9 & -2 \\ -29/2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0 \longrightarrow \boldsymbol{X^t\tilde{A}X=0}$$

- $(x \quad y)\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-10 \quad -29)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5=0 \longrightarrow \boldsymbol{X^tAX + BX + a_0 = 0}$

❑ Ecuación reducida de una cónica

- ❑ $X^t AX + BX + a_0 = 0$ es la ecuación reducida de la cónica si:
  - ➢ La matriz A es diagonal
  - ➢ Si 0 no es autovalor de A, entonces B=0
  - ➢ Si 0 es autovalor de A, entonces entre los elementos a_i hay como máximo uno no nulo.

- ❑ La obtención de la ecuación reducida de una cónica a partir de su ecuación general consiste en un cambio de sistema de referencia (rectangular) a través de un movimiento rígido (que conserva distancias y ángulos)

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

❑ Paso 1 Diagonalización ortogonal de la matriz A

- ✓ Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen una matriz ortogonal P y una D diagonal tal que D=$P^{-1}AP = P^tAP$
- ✓ *La expresión* $X = PX'$ *representa una rotación en la que el origen queda fijo*
- ✓ $X = PX'$ *es por tanto un cambio de sistema de referencia donde el origen no varía*
- ✓ *Mediante el cambio X=PX´ obtenemos*

$$X^tAX + BX + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(PX')^tA(PX') + BPX' + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(X')^tP^t\mathrm{APX'}+\mathrm{BPX'} + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(X')^tD\mathrm{X'}+\mathrm{BPX'} + a_0 = 0$$

- Si P es ortogonal
  $P^t = P^{-1}$

  ⇓

  A y D son semejantes

  ⇓

  Tienen los mismos autovalores

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

❖ Ejemplo 2 Ecuación reducida de una cónica

x^2 -7y^2-6xy+10x+2y + 9=0

- Su ecuación matricial es (x y) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (10 \quad 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9=0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & -3 \\ -3 & -\mathbf{7}-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(-7-\lambda)-9=0$$

- Autovalores: λ_1=2, λ_2=-8 cada uno con multiplicidad 1
- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y) ∈ R^2/(A-2I)v=0}= {v∈ R^2/(A-2I)v=0}
- (A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+3y=0$
- S(2) ={(-3y,y,)/ y ∈R} dimS(2)=1 **Tomamos un primer vector v_1 =(-3, 1)**

- S(-8) = ker (A+8I)= {v=(x, y, z) ∈ R^2/(A+8I)v=v}= {v∈ R^2/(A+8I)v=0}
- (A+8I)v=0 $\begin{pmatrix} \mathbf{9} & -3 \\ -3 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-3x+\ y=0$
- S(-8) ={(x,3x)/ x ∈R} **Tomamos un segundo vector v_1 =(1, 3)**

✓ **Tenemos ya por tanto una base ortogonal de vectores**

B={v_1=(-3,1); v_2=(1,3)}

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

B´={e_1=(-$\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$); e_2=($\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$);)}

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- ✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & \\ & -8 \end{pmatrix}$$

- ✓ **Ahora la expresión matricial de la cónica es:**

$$(X')^t D X' + BPX' + a_0 = 0 \Longrightarrow (x' \quad y')\begin{pmatrix} 2 & \\ & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (10 \quad 2)\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9=0$$

- ✓ **y la expresión analítica es** $2x'^2 - 8y'^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}x' + \frac{16}{\sqrt{10}}y' + 9=0$

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

❑ Paso 2 Eliminar los términos en x e y

- ✓ Eliminamos los términos en x e y (si los valores propios son no nulos) o al menos uno de ellos (si algún valor propio es 0)
- ✓ $Se\ trata\ de\ hacer\ una\ traslación: cambio\ de\ sistema\ de\ referencia\ en\ el\ que$ sólo cambia el origen
- ✓ El método que utilizamos es "completar cuadrados"

$$x'^2+2b_1x=(x'+b_1)^2-b_1^2 \qquad y'^2+2b_2y'=(y'+b_2)^2-b_2^2$$

- ✓ Se trata por tanto de hacer el cambio $x''=x'+b_1$ $\quad y''=y'+b_2$

❖ *Volviendo al ejemplo 2…*

Si partimos de $2x'^2-8y'^2-\frac{28}{\sqrt{10}}x'+\frac{16}{\sqrt{10}}y'+9=0$

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

- $2x'^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}x' = 2(x'^2 - \frac{14}{\sqrt{10}}x') = 2[\left(x' - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{49}{10}] = 2(x'')^2 - \frac{98}{10}$

$$x'' = x' - \frac{7}{\sqrt{10}}$$

- $-8y'^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}y' = -8(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}y') = -8[\left(y' - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{10}] = -8(y'')^2 + \frac{8}{10}$

$$y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{10}}$$

✓ $2(x'')^2 - \frac{98}{10} - 8(y'')^2 + \frac{8}{10} + 9 = 0 \Rightarrow 2x''^2 - 8y''^2 = 0$ *Ecuación reducida de la cónica*

✓ Se trata de un par de rectas que se cortan.

Cónicas: ecuación general y ecuación reducida

❑ Proceso para obtener la ecuación reducida de una cónica

$Partiendo\ de\ una\ ecuación\ general\ X^t AX + BX + a_0 = 0$

1) Se efectúa una rotación X´=PX que nos permite obtener una matriz diagonal
2) Se efectúa una traslación X´´=C+IX´
3) La composición de los dos movimientos rígidos es X´´=C+P^tX

❑ Teorema

$Cualquier\ ecuación\ de\ una\ cónica\ X^t AX + BX + a_0 = 0\ se\ puede$ transformar en una ecuación reducida mediante un cambio de sistema de referencia del tipo

X´´=C+P^tX con det(P)=± 1

Clasificación de las cónicas

- Si la ecuación reducida queda del tipo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 - c = 0$$

- Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ se trata de una cónica de tipo elíptico
  - Si c=0 es un punto
  - Si $\lambda_1 c > 0$ se trata de una elipse real
  - Si $\lambda_1 c < 0$ se trata de una elipse imaginaria

- Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ se trata de una cónica de tipo hiperbólico
  - Si c≠0 la cónica es una hipérbola
  - Si $c = 0$ *se trata de dos rectas que se cortan*

Clasificación de las cónicas

- Si $\lambda_1 \lambda_2$=0 se trata de una cónica de tipo parabólico
- Suponemos SPG $que\ \lambda_1$=0 y que $\lambda_2 \neq 0\ de\ modo$ que la ecuación tras diagonalizar queda

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + a_0 = 0$$

  - Si $b_1 \neq 0$ es una parábola
  - Si b_1 =0 $llegamos\ a\ una\ ecuación\ reducida\ de\ la\ forma\ \lambda_2 y''^2$=c
    - Si c=0 se trata de dos rectas coincidentes
    - Si $\frac{c}{\lambda_2}$>0 se trata de dos rectas paralelas
    - Si $\frac{c}{\lambda_2}$<0 se trata de dos rectas imaginarias paralelas

Clasificación de las cónicas

Ecuación	$\tilde{A}$	Tipo de cónica
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=c^2$	$\begin{pmatrix} -c^2 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & \beta^2 \end{pmatrix}$	Elipse real
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=-c^2$	$\begin{pmatrix} c^2 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & \beta^2 \end{pmatrix}$	Elipse imaginaria
$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=\pm c^2$	$\begin{pmatrix} \pm c^2 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & -\beta^2 \end{pmatrix}$	Hipérbola
$y^2=2px$	$\begin{pmatrix} 0 & -p & \\ -p & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	Parábola

Clasificación de las cónicas

Ecuación	$\widetilde{A}$	Tipo de cónica
$\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2=0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & \beta^2 \end{pmatrix}$	Un punto
$\alpha^2 x^2-\beta^2 y^2=0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & -\beta^2 \end{pmatrix}$	Par de rectas que se cortan
$y^2=0$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	Recta doble
$y^2=c^2$	$\begin{pmatrix} -c^2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	Par de rectas paralelas
$y^2=-c^2$	$\begin{pmatrix} c^2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	Par de rectas imaginarias paralelas

Clasificación de las cónicas

❑ Invariantes métricos de las cónicas

$$(1 \quad x \quad y)\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=0 \qquad X^t\tilde{A}X=0$$

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (2a_1 \quad 2a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+a_0=0 \qquad X^tAX + BX + a_0 = 0$$

❑ I_3= det $(\tilde{A})$ $\quad$ I_2= det (A) $\quad$ $I_1 = tr(A) = a_{11}+a_{22}$

❑ Invariantes métricos de las cónicas

Los números I_1, I_2, I_3 no varían cuando la cónica es afectada por un movimiento rígido

Clasificación de las cónicas por invariantes

$I_3 \neq 0$ **(no degeneradas)**	$I_2 > 0$	**Elipse**	$I_1 I_3$**<0**	**Elipse real**
			$I_1 I_3 >0$	Elipse imaginaria
	$I_2<0$	Hipérbola		
	$I_2=0$	Parábola		
$I_3 = 0$ (degeneradas)	$I_2 > 0$	Un punto		
	$I_2 < 0$	Dos rectas secantes		
	$I_2 = 0$	Dos rectas paralelas		

Ejemplo 3 Clasificación de una cónica a través de sus invariantes

$$x^2 + y^2 - 2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 3 = 0$$

$$I_3 = \det\left(\tilde{A}\right) = \det\begin{pmatrix} -3 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2 < 0 \quad (I_3 \neq 0)$$

- $I_2 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (I_2 = 0)$ Se trata de una parábola
- $I_1 = tr(A) = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

Ecuación general de una cuádrica

- Una cuádrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio R^3 que verifican una ecuación de segundo grado en tres variables:

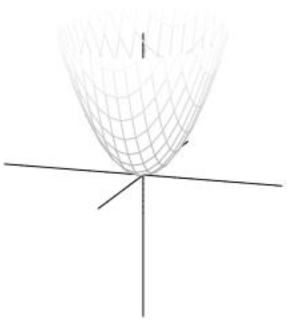
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

- Su expresión matricial

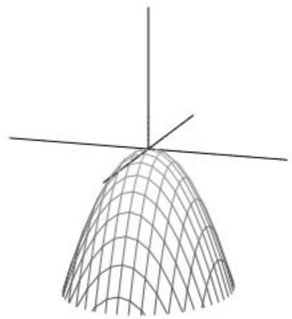
$$(1 \quad x \quad y \quad z)\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad X^t\tilde{A}X = 0$$

- O bien $(x \quad y \quad z)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{A}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2a_1 \quad 2a_2 \quad 2a_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0 \qquad X^tAX + BX + a_0 = 0$

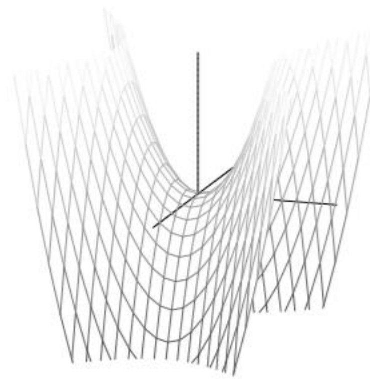
Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida



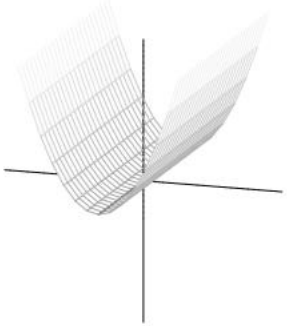
definida positiva



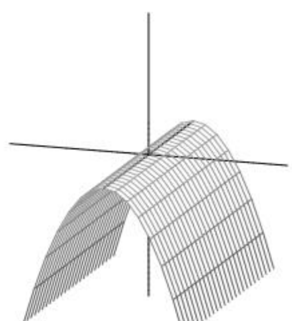
definida negativa



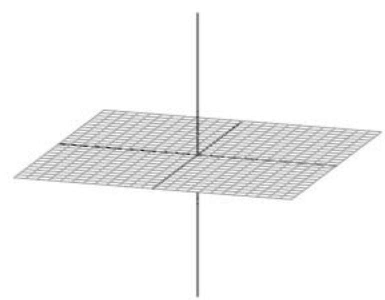
indefinida



semidefinida positiva



semidefinida negativa



nula

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

❑ Paso 1 Diagonalización ortogonal de la matriz A

✓ Toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen una matriz ortogonal P y una D diagonal tal que D=$P^{-1}AP = P^tAP$

$$X^tAX + BX + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(PX')^tA(PX') + BPX' + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(X')^tP^t\text{APX}'+\text{BPX}' + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(X')^tD\text{X}'+\text{BPX}' + a_0 = 0 \Rightarrow \text{donde D}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica de la cuádrica será $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + 2b_3z' + b_0 = 0$

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

❑ Paso 2 Eliminar los términos en xy, xz e yz

- ✓ Eliminamos todos esos términos (si los valores propios son no nulos) o al menos alguno de ellos (si algún valor propio es 0)
- ✓ El método que utilizamos es "completar cuadrados"

$x'^2+2b_1x=(x'+b_1)^2-b_1^2$ $\quad y'^2+2b_2y'=(y'+b_2)^2-b_2^2$ $\quad z'^2+2b_3z'=(z'+b_3)^2-b_3^2$

- ✓ Se trata por tanto de hacer el cambio $x''=x'+b_1$ $\quad y''=y'+b_2$ $\quad z''=z'+b_3$

❖ Ejemplo 4 Ecuación reducida de una cuádrica

$$2xy+2xz+2yz-6a_1x-6y-4a_3z+9=0$$

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

- Su ecuación matricial es $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-6 \quad -6 \quad -4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 9 = 0$
- Paso 1: Diagonalización ortogonal de A

Cálculo de los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

- Autovalores: $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad 1
- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

- **Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:**

- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A+I)v=0}= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+y+z=0;$

S(-1) ={(x,y,-x-y)/ x,y ∈R} dimS(-1)=2 ***Tenemos que elegir dos vectores de este subespacio que… ¡podrían no ser ortogonales!***

Elegimos un primer vector u_1=(1,-1,0) y un segundo vector que tiene que verificar: x+y+z=0 y además (x,y,z)(1,-1,0)=0 $\Longrightarrow$ u_2=(1,1,-2)

- *S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/(A-2I)v=0}=* $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -$2x+y+z=0; x+y-2z=0$ u_3=(1,1,1)

✓ **Tenemos ya por tanto una base de vectores** B={u_1=(1,-1,0); u_2=(1,1,-2); u_3=(1,1,1)} que es una base ortogonal

✓ **Construimos ahora una base ortonormal :**

$$B'=\{e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0);\ e_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}});\ e_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$$

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

✓ **La matriz P es la que obtenemos al escribir los vectores de B´en columnas y D es la matriz que en la diagonal contiene los autovalores del endomorfismo**

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & & \\ & \mathbf{-1} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

✓ **La nueva expresión de nuestra cuádrica es:**

$$(X')^t DX' + BPX' + a_0 = 0 \qquad (x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & & \\ & \mathbf{-1} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (-6 \quad -6 \quad -4)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 9 = 0$$

- $Expresión\ analítica\ de\ la\ cuádrica\ \ -x'^2 - y'^2 + 2z'^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}y' - \frac{16}{\sqrt{3}}z' + 9 = 0$

Cuádricas: ecuación general y ecuación reducida

- $-y'^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}y' = -\left(y'^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}y'\right) = -\left[\left(y' + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{4}{6}\right] = -(y'')^2 + \frac{2}{3}$

$$\boxed{x'' = x'} \qquad \boxed{y'' = y' + \frac{2}{\sqrt{6}}}$$

- $2z'^2 - \frac{16}{\sqrt{3}}z' = 2\left(z'^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}z'\right) = 2\left[\left(z' - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{16}{3}\right] = 2(z'')^2 - \frac{32}{3}$

$$\boxed{z'' = z' - \frac{4}{\sqrt{3}}}$$

✓ $-x''^2 - (y'')^2 + \frac{2}{3} + 2(z'')^2 - \frac{32}{3} + 9 = 0 \Rightarrow -x''^2 - (y'')^2 + 2(z'')^2 - 1 = 0$

✓ *Ecuación reducida de la cónica.* Se trata de un hiperboloide de dos hojas

Clasificación de las cuádricas

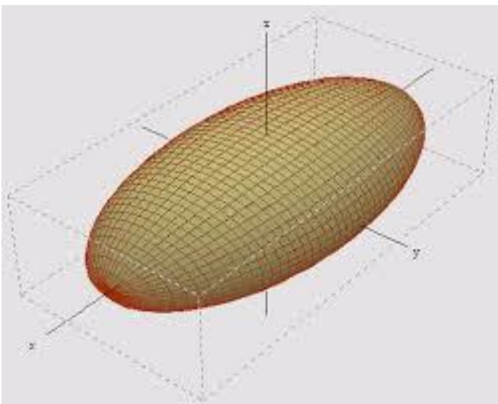
- Si la ecuación reducida queda del tipo (los 3 autovalores son $\neq 0$)

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + c = 0$$

- Si $c < 0$
  - Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ es un elipsoide real
  - Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ es un hiperboloide de una hoja
  - Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ es un hiperboloide de dos hojas
  - Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ se trata de un elipsoide imaginario

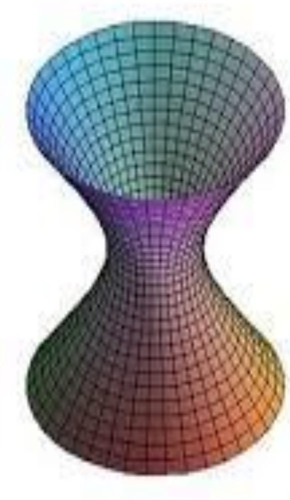
- Si $c = 0$
  - Si $los\ 3\ autovalores\ tienen\ el\ mismo\ signo, se\ trata\ de\ un\ punto\ (cono\ imaginario)$
  - Si hay 2 autovalores positivos o dos negativos, se trata de un cono

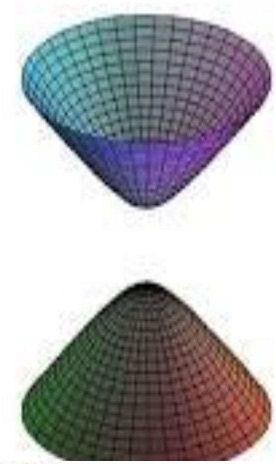
Clasificación de las cuádricas

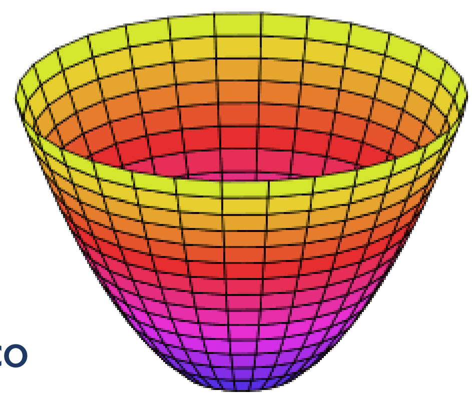


Elipsoide

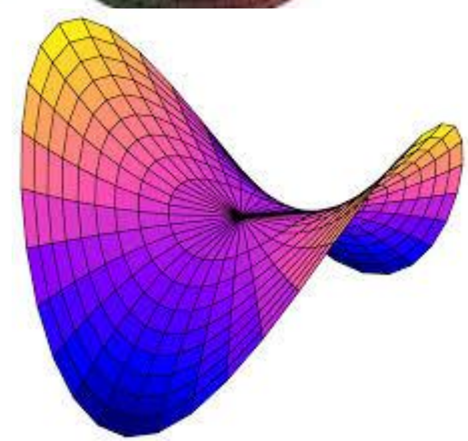
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (hiperboloide de una hoja) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (hiperboloide de dos hojas)







Paraboloide elíptico



Paraboloide hiperbólico

Clasificación de las cuádricas

- Si uno de los autovalores es 0 (SPG $\lambda_1 = 0$)

$$\lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1 x' + b = 0$$

- Si $b_1 \neq 0$
  - Si $\lambda_2\lambda_3 > 0$ es un paraboloide elíptico
  - $\lambda_2\lambda_3 < 0$ es un paraboloide hiperbólico

- Si $b_1 = 0$ $\quad \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + c = 0$
  - Si $c<0$ es un cilindro elíptico real
  - Si $c>0$ es un cilindro elíptico imaginario

Clasificación de las cuádricas

- Si dos de los autovalores son 0 (SPG $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$)

$$\lambda_3 z'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0$$

- Si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$ se trata de un cilindro parabólico

- Si $b_1 = 0 = b_2$ *son dos planos paralelos*
  - Si $\lambda_3\, b<0$ dos planos reales que se cortan
  - Si $\lambda_3\, b>0$ dos planos imaginarios que se cortan
  - Si b= 0 planos coincidentes

Clasificación de las cuádricas

Ecuación	$\widetilde{A}$	Tipo de cónica
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-c^2=0$	$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$	Elipsoide real
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+c^2=0$	$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$	Elipsoide imaginario
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2-c^2=0$	$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix}$	Hiperboloide de una hoja
$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2-\gamma^2z^2+c^2=0$	$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix}$	Hiperboloide de dos hojas

Clasificación de las cuádricas

Ecuación	$\widetilde{A}$	Tipo de cónica
α^2x^2+β^2y^2-γ^2z^2=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix}$	Cono real
α^2x^2+β^2y^2+γ^2z^2=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$	Cono imaginario
α^2x^2+β^2y^2-$2cz$=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Paraboloide elíptico
α^2x^2-β^2y^2-$2cz$=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ -c & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix}$	Paraboloide hiperbólico

Clasificación de las cuádricas

Ecuación	$\tilde{A}$	Tipo de cónica
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-c^2=0$	$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Cilindro elíptico real
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+c^2=0$	$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Cilindro elíptico imaginario
$\alpha^2x^2-\beta^2y^2-c^2=0$	$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Cilindro hiperbólico
$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Par de planos que se cortan
$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Par de planos imaginarios que se cortan

Clasificación de las cuádricas

Ecuación	$\widetilde{A}$	Tipo de cónica
y^2=2px	$\begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Cilindro parabólico
x^2-c^2=0	$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Par de planos paralelos
x^2+c^2=0	$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Par de planos imaginarios paralelos
x^2=0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	Plano doble

Clasificación de las cuádricas

Invariantes métricos de las cuádricas

$$(1 \quad x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \qquad X^t\tilde{A}X=0$$

- O bien $(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2a_1 \quad 2a_2 \quad 2a_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+a_0=0$

$$X^tAX + BX + a_0 = 0$$

- I_4= det $(\tilde{A})$ $\qquad$ I_3= det (A)
- $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $I_1 = tr(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}$

Clasificación de las cuádricas por invariantes

<table>
<tr><td rowspan="6">$I_4 \neq 0$</td><td rowspan="4">$I_3 \neq 0$</td><td rowspan="2">$I_3 I_1$>0 e I_2>0</td><td>I_4>0</td><td>Elipsoide imaginario</td></tr>
<tr><td>I_4<0</td><td>Elipsoide real</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$I_3 I_1$ ≥0 e I_2<0
Ó
$I_3 I_1$<0</td><td>I_4>0</td><td>Hiperboloide de una hoja</td></tr>
<tr><td>I_4<0</td><td>Hiperboloide de dos hojas</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$I_3 = 0$</td><td>I_4>0</td><td>Paraboloide hiperbólico</td></tr>
<tr><td>I_4<0</td><td>Paraboloide elíptico</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$I_4 = 0$</td><td colspan="2" rowspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>$I_3 I_1$>0 e I_2>0</td><td>Cono imaginario</td></tr>
<tr><td>Otro caso</td><td>Cono real</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td colspan="2">Cilindro o un par de planos</td></tr>
</table>

Clasificación de las cuádricas

❖ Ejemplo 5 Clasificación de una cuádrica a través de sus invariantes

2xy-$6x+10y+z-31=0$

$$I_4 = \det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} -31 & -3 & 5 & 1/2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} > 0$$

- ❑ $I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \; (I_3 = 0)$

- ❑ *Es por tanto un paraboloide hiperbólico.*