Endomorfismos. Diagonalización

Problemas resueltos

Mar Angulo Martínez

mar.angulo@u-tad.com

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 5**

$f: V \longrightarrow$ V donde V es un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K. Demostrar que si B es una base de V formada por autovectores de f, entonces la matriz $M_B(f)$ *es diagonal*

- B=$\{v_1, v_2,\dots v_n\}$ *base de V formada por autovectores de f*
- Existen $\lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_n$ ∈R que verifican f(v_1)= $\lambda_1 v_1$; f(v_2)= $\lambda_2 v_2$... f(v_n)= $\lambda_n v_n$
- Construimos la matriz asociada a esta aplicación lineal

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

f(v_1) f(v_n)

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 6**

- Matriz 2x2: M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}= ad-a\lambda-d\lambda+\lambda^2-bc= \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$$

- Matriz 3x3: M=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene polinomio característico:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$-\lambda^3+(a+e+i)\lambda^2-[(ei-hf)+(ai-cg)+(ae-db)]\lambda+aei+dhc+bfg-gec-hfa-dbi$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 7**

Demostrar que si A es una matriz de orden n con polinomio característico

p(λ) $= (a - \lambda)^n$

a$\in K$; $\quad$ *entonces, A es diagonalizable si y sólo si es una* matriz escalar, es decir si A =aI_n.

- p(λ) $= (a - \lambda)^n$ $\quad$ a$\in K$ $\quad$ la multiplicidad algebraica de λ_1=a es por tanto n

- A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ S(a) =ker (A-aI) tiene dimensión n
  $\Longleftrightarrow$ rang (A-aI)=0 $\Longleftrightarrow$ A-aI$\equiv 0$ $\Longleftrightarrow$ $A = aI$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 8**
  - Una matriz cuadrada A y su matriz traspuesta A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores

1) λ es autovalor de A $\Longleftrightarrow$ el sistema (A-λI)X=0 tiene solución no trivial

$\Longleftrightarrow$ rang (A-λI)<n (no es completo) $\Longleftrightarrow$ |A-λI|=0

Pero |A-λI|= |(A−λI)^t|= |A^t-λI|=0 y entonces λ *es autovalor de* A^t

- Una matriz cuadrada A y su matriz traspuesta A^t NO tienen los mismos autovectores

Ejemplo: A=$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ A^t =$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

- Su ecuación característica $|A-\lambda I|$ =$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$=0
- Autovalor:λ=0 con multiplicidad 2

- **S(0):** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y = 0$ **S(0):** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ **x=0**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 9**

A=$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{-7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{13} & \mathbf{-3-\lambda} \end{vmatrix} = (\mathbf{-1}-\lambda)(4-\lambda)(\mathbf{-3}-\lambda)+(4-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=4 con multiplicidad 1 λ_2=-2 con multiplicidad 2
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(4) = ker (A-4I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in R^3$/Av=4.v}= {v$\in R^3$/(A-4I)v=0}
- (A−4I)v=0 $\Longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-5x-7y+z=0; -x+13y-7z=0;$
- S(1) ={(x,-x,-2x)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,-1,-2)**

- S(-2) = ker (A+2I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in R^3$/Av=-2.v}= {v$\in R^3$/(A+2I)v=0}
- (A−3I)v=0 $\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 13 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-7\,y+z=0; 6y=0;$ -z+13y-z=0
- S(1) ={(x,0,-x)/ x ∈R} dimS(-2)=1 **< 2 (multiplicidad de $\lambda=-2$)**
- **No es posible encontrar una base de autovectores de A por tanto la matriz NO es diagonalizable**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

B=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5-\lambda} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-6} & \mathbf{4-\lambda} \end{vmatrix} = (-\mathbf{1}-\lambda)(4-\lambda)(-\mathbf{3}-\lambda)+(4-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=4 con multiplicidad 1 y λ_2=-2 con multiplicidad 2
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(4) = ker (A-4I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=4.v}= {v∈ R^3/(A-4I)v=0}
- (A−4I)v=0 ⟶ $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y + z = 0;\ x - 3y + z = 0;\ x\text{-}y=0$
- S(4) ={(x,x,2x)/ x ∈R} dimS(4)=1 **Base de S(4): (1, 1,2)**

- S(-2) = ker (A+2I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=-2.v}= {v∈ R^3/(A+2I)v=0}
- (A+2I)v=0 ⟶ $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - y + z = 0$ ⟶ $y = x + z$
- S(1) ={(x,x+z,z)/ x ∈R} dimS(-2)=2 **Base de S(-2):{(1,1,0);(0,1,1)}**
- **B es diagonalizable**
- **La matriz de paso P se obtiene poniendo los autovectores en columnas**

P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y D=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Comprobar D= P^{-1}AP ⟺ PD=AP

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 10**

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1-\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} =(2-\lambda)(-1-\lambda)\lambda^2=0$$

- Autovalores: λ_1=0 con multiplicidad 2; λ_2=2 y λ_3=-1 con multiplicidad 1
- Calculamos ahora los subespacios propios

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(0) = ker (A-0I)= {v=(x, y, z, t) $\in R^4$/Av=0}= {v$\in R^4$/Av=0}
- (A−0I)v= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x - z = 0;\ 2x - y - 3z = 0;\ t=0$
- S(0) ={(z,-z,z,0)/ x ∈R} dimS(0)=1$\neq$ 2 **(multiplicidad de λ=0)**
- **A no es diagonalizable**

- **Problema 11**

A=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3}-\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2\text{-}2\lambda+3)=(3-\lambda)[\ (1+i\sqrt{2})-\lambda]\ [\ (1-i\sqrt{2})-\lambda]=0$$

- Autovalores: λ_1=3 λ_2= 1+i$\sqrt{2}$ y λ_3= 1-i$\sqrt{2}$ con multiplicidad 1
- No es diagonalizable en R; es diagonalizable en C.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 12** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

➢ 1º) Planteamos la ecuación característica

➢ P(λ) = |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 = 0$$

➢ Autovalores: λ_1=0 con multiplicidad 4;

➢ Calculamos ahora los subespacios propios

➢ S(0) = {v=$(x, y, z, t) \in R^4$/Av=0}= {v$\in R^4$/Av=0}

$$(A-0I)v = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

➢ S(0)= {v=$(x, 0,0,0)$ $/x \in R$} dimS(0)=1<4

➢ NO es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 13**

- M_{B_C}(f)= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$

Sea f: $el\ endomorfismo\ en\ R^3 \quad tal\ que:$

f(x,y,z)=(3x, -y+az, 3x+bz)

¿para qué valores de "a" y "b" es f diagonalizable?

Vamos a calcular los autovalores y autovectores de f

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1-\lambda} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b-\lambda} \end{vmatrix} = (\mathbf{-1}-\lambda)(3-\lambda)(b-\lambda)=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 y λ_2=3 y λ_3=b
- Caso 1: si b$\neq -1, 3$ f tiene 3 valores propios distintos ⟹ f es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Caso 2: Si b=-1 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 2 y λ_2=3 con multiplicidad 1
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

> S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=-1.v}= {v∈ R^3/(A+I)v=0}
>
> (A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 0; az = 0;$

- *Si a=0 :* S(-1) ={(0,y,z)/ x ∈R} dimS(-1)=2 **Base de S(-1): {(0, 0,1);(0,1,0)}**

Si b=-1 y a=0 f sí es diagonalizable porque las dim S (λ_i)**=** a_i

- *Si a≠0 :* S(-1) ={(0,y,0)/ x ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): {(0,1,0)}**

En este caso, f no es diagonalizable porque dim S(-1)< multip. λ_1=-1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Caso 3: Si b=3 Autovalores: λ_1=-1 con multiplicidad 1 y λ_2=3 con multiplicidad 2
- Calculamos la dimensión de los subespacios propios asociados

➢ S(3) = ker (A-3I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ ∈ R^3/Av=3.v}= {v∈ R^3/(A-3I)v=0}

(A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 0; \quad -4y + az = 0;$

- dim S(3) =1 porque rang (A-3I)=2; entonces dim S(3)<2

Entonces, f no es diagonalizable porque dim S(3)< multip. λ_2=3

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 14**

En R^4 consideramos un endomorfismo f tal que:

Ker $(f - Id)^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Ker $(f - Id)^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 - x_2 + x_3 = 0;\ x_4 = 0\}$

Ker $(f - Id) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 + x_3 = 0; x_4 = 0;\ x_2 = 0\}$

Ker $(f) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$

a) Determinar una base B´ de vectores tal que $M_{B'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f que cumpla las condiciones anteriores. Indicar cuál es la forma canónica de Jordan y qué condiciones verificará el endomorfismo.

b) Calcular la matriz A asociada al endomorfismo f en la base canónica de R^4 y la expresión analítica de f.

c) Determinar los autovalores de $(A - 2I)^{-2}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- λ=1 es autovalor y el esquema que podemos deducir es el siguiente:
- Ker $(f-Id)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/\ x_1+x_3=0; x_4=0;\ x_2=0\}$={($x_1$,0, $-x_1$,0)/$x_1 \in R$}

- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)** $\boldsymbol{E^1}$ ***(λ=0)***

1 **2** **3**

v_3 v_2 v_1 v_4

¿Cómo elegimos los vectores de la base?

- $v_1\in ker(f-Id)^3-ker(f-Id)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0,1)**

  $v_2\in ker(f-Id)^2$- $\ker(f-Id)$ v_2=(1,1,0,0)

  $v_3\in \ker(f-Id)$ v_3=(1,0,-1,0)
- Por último, v_4 es un autovector que está en Ker (f): $es\ un\ autovector\ asociado\ al\ autovalor\ 0$
- $\boldsymbol{v_4}$ =(0,0,0,1)
- $Y\ el\ endomorfismo\ f\ es\ tal\ que\ verifica\ que\ \ v_2=(f-Id)v_1\ y\ v_3=(f-Id)v_2=(f-Id)^2 v_1$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- La forma canónica de Jordan es por tanto:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Tiene un bloque 3x3 correspondiente al autovalor 1 y un bloque 1x1 correspondiente al autovalor 0

a) Determinar los autovalores de $(A-2I)^{-2}$

- Los autovalores de A son 1 con multiplicidad algebraica 3 y 0 con multiplicidad algebraica 1
- Los autovalores de A-2I son -1 con multiplicidad algebraica 3 y -2 con multiplicidad algebraica 1
- Los autovalores de $(A-2I)^{-2}$ son 1 con multiplicidad algebraica 3 y 1/4 con multiplicidad algebraica 1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Calcular la matriz A asociada al endomorfismo f en la base canónica de R^4 y la expresión analítica de f.

- La matriz J es la matriz del endomorfismo en la base B ={(1,0,0,1); (1,1,0,0);(1,0,-1,0); ((0,0,0,1)
- Queremos obtener la matriz asociada al endomorfismo en la base canónica: matriz A
- Ambas matrices son semejantes: verifican que $P^{-1}AP = J$ siendo P la matriz que contiene en sus columnas los vectores de la base B

$$M_{B_c}(\text{f})=\text{A}=M_{B_cB}M_B(\text{f})M_{BB_c}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "M_B(\text{f})=\text{J}"] & B \arrow[d, "M_{B_cB}"] \\
B_c \arrow[u, "M_{BB_c}"] \arrow[r, "M_{B_c}(\text{f})=\text{A}"'] & B_c
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Problema 15**

- Estudiar para qué valores de t es la matriz A diagonalizable en R

$$A=\begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{t+3}-\lambda & t^2-10 \\ 1 & \boldsymbol{t+1}-\lambda \end{vmatrix}=(t+3-\lambda)(t+1-\lambda)-(t^2-10)=0=\lambda^2-2(t+2)\lambda+4t+13$$

- $\lambda=\frac{2(t+2)\pm\sqrt{4(t+2)^2-4(4t+13)}}{2}=t+2\pm\sqrt{t^2-9}$

- Si $t\in(-3,3)$: $\lambda\in C$: valores propios complejos ⟶ A no es diagonalizable en R
- Si $t\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$: 2 *valores propios reales y distintos* ⟶ A diagonalizable en R
- Si t=3 ó t=-3: λ=t+2: A tiene un autovalor doble.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Analizamos la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ=t+2 en cada caso:
  - **Si t=3** λ=5 con a_i(multiplicidad algebraica)=2
  - ¿Cuál es su multiplicidad geométrica? dim S(5)
  - g_i =dim S(5)=dim ker(A-5I)=2-rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$=2-1=1
  - Las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden $\Rightarrow$ A no es diagonalizable

  - **Si t=-3** λ=-1 con a_i(multiplicidad algebraica)=2
  - ¿Cuál es su multiplicidad geométrica? dim S(-1)
  - g_i =dim S(-1)=dim ker(A+I)=2-rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$=2-1=1
  - Las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden $\Rightarrow$ A no es diagonalizable

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 16**

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Demostrar que A es diagonalizable y determinar una matriz P de paso que permita la diagonalización

- 1º) Planteamos la ecuación característica
- $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}-\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1}-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \mathbf{1}-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \mathbf{1}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(-\lambda-2)=0$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- Autovalores: λ_1=2 con multiplicidad 3 y λ_2=-2 con multiplicidad 1
- Calculamos ahora los subespacios propios y una base de autovectores asociada a cada autovalor:
  - S(2) = ker (A-2I)= {v=$(x, y, z, t) \in R^4$/Av=2.v}= {v$\in R^3$/(A-2I)v=0}
  - (A−2I)v= $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x-y-z-t=0;$
  - S(2)= {v=$(y+z+t, y, z, t)$ $con\ \ y, z, t \in R$} dimS(2)=3; **Base de S(2)={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(1,0,0,1)}**
  - S(-2) = {v=$(x, y, z, t) \in R^4$/Av=-2v}= ker (A+2I)
  - (A+2I)v= $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $3x+y+z+t=0;\ x+3y-z-t=0;\ x-y+3z-t=0$;x-y-z+3t=0
  - S(-2)= { $(-z, z, z, z)$ $con\ \ y, z, t \in R$} dimS(-2)=1; **Base de S(-2)=(-1,1,1,1)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Recuerda

- f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:
  1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
  2) $a_i = g_i \; i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

Por tanto nuestra matriz A es diagonalizable

La matriz de paso P

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{y} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Diagonalizar A^2 y A^{-1}

Se verifica D= P^{-1}AP $\Longleftrightarrow$ A=PD P^{-1}

- Entonces A^2= PD P^{-1} PD P^{-1}=PD^2 P^{-1}=P$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ P^{-1}

  - A= PD P^{-1} $\Longrightarrow$ A^{-1} =PD* P^{-1} con D^*= $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  - Porque si

    λ valor propio con multiplicidad m de A(regular), entonces $\frac{1}{\lambda}$ *es valor propio con multiplicidad m* de A^{-1}

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 17**

Dada la matriz M=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que M no es diagonalizable en R

b) Demostrar que es diagonalizable en C y hallar una matriz P de paso

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3}-\lambda & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & -\mathbf{3}-\lambda & \mathbf{2} \\ \mathbf{8} & -\mathbf{6} & \mathbf{5}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

- Autovalores: λ_1=1 λ_2= 2+i λ_3= 2-i todos ellos con multiplicidad 1
- No es diagonalizable en R porque no tiene 3 autovalores reales (sean o no repetidos)
- Tiene 3 valores propios simples en C $\Longrightarrow$ es diagonalizable en C.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

  (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x - y = 0; 3x - 2y + z = 0; 4x - 3y + 2z = 0$

  S(1) ={(x,2x,x)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (1,2,1)**

- S(2+i) = ker (A-(2+i)I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=(2+i).v}= {v∈ R^3/(A-(2+i)I)v=0}

  (A−(2+i)I)v=0 $\begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 6 & -5-i & 2 \\ 8 & -6 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  S(2+i) ={(x,(1-i)x,-2ix)/ x ∈R} dimS(2+i)=1 **Base de S(2+i): (i,i+1,2)**

- S(2-i) = ker (A-(2-i)I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=(2-i).v}= {v∈ R^3/(A-(2-i)Iv=0}

  (A−(2−i)I)v=0 $\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 0 \\ 6 & -5+i & 2 \\ 8 & -6 & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  S(2-i) ={(x,(1+i)x,2ix)/ x ∈R} dimS(2-i)=1 **Base de S(2-i): (i,i-1,-2)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

$$P=\begin{pmatrix}1 & i & i\\ 2 & i+1 & i-1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Base de S(1) Base de S(2+i) Base de S(2-i):

verifica $\begin{pmatrix}1 & i & i\\ 2 & i+1 & i-1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 6 & -3 & 2\\ 8 & -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i & i\\ 2 & i+1 & i-1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2+i & 0\\ 0 & 0 & 2-i\end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 18**

Si f es un endomorfismo de R^6 y A es su matriz asociada respecto a una base dada B. Si sabemos que rang A=1

a) ¿Qué puedes decir de los autovalores del endomorfismo?
b) Determinar si existe algún caso en que f es diagonalizable
c) Encontrar las posibles formas de Jordan del endomorfismo f razonando la elección de vectores.

- Si rang A=1 dim ker (A-0I)=6-1=5
- Es decir, dim S(0)=5 es la multiplicidad geométrica del autovalor 0
- Entonces la multiplicidad algebraica del autovalor 0 puede ser a=5 o a=6
- **Caso 1: Si a=6** 0 es el único autovalor y la matriz no es diagonalizable (multiplicidades distintas)
- **Caso 2: Si a=5** La matriz tiene autovalor 0 con multiplic. algebraica 5 y otro autovalor (distinto de cero): k. La matriz es diagonalizable

- Formas de Jordan

➢ **caso 1:** $E^1_5(\lambda=0) \subseteq E^2_6(\lambda=0)$ Un bloque 2x2 y 4 bloques 1x1

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

➢ **caso 2:** $E^1_5(\lambda=0)$ 6 bloques 1x1

$E^1(\lambda=k)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 19**

Razonar en cada caso si existe un endomorfismo f de R^6 que tenga un único autovalor λ real de multiplicidad algebraica 6 tal que para cualquier matriz A se verifique:

$a)\, rang\ (A-\ \lambda I)=4 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^2=2 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^3=1 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^4=0$

$b)\, rang\ (A-\ \lambda I)=3 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^2=2 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^3=1 \quad rang\ (A-\ \lambda I)^4=0$

En caso afirmativo, razonar cuál sería la forma de canónica de Jordan correspondiente y detallar cómo se realiza la construcción de la base de vectores correspondiente. Indicar además en su caso cuáles serían los autovectores y los subespacios invariantes.

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 20**

¿para qué valores de las constantes a,b,c,d,e,f la matriz

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}$ tiene como vectores propios (1,0,1), (-1,1,0) y (0,1,-1)?

- $Exigimos\ que\ esos\ vectores\ efectivamente\ sean\ vectores\ propios\ f(v)=\lambda v$
- $\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ 3 & c & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ λ_1=6 λ_2=-4 λ_3=0 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 21**

Una ciudad A es de tránsito, estimándose que de los habitantes que tiene al principio de cada año, al final del mismo han emigrado 2/3 a otra región B y 1/3 a una región C. Por otra parte, dentro de ese mismo año, 1/3 de la población B y 1/3 de la población de C se establecen en la ciudad A. Calcular las poblaciones en régimen estacionario (al final de n años, cuando n→ ∞) sabiendo que en un año determinado las poblaciones de A, B y C eran respectivamente de 60, 200 y 300.

- Consideramos $X_k = (x_{kA}, x_{kB}, x_{kC})$ x_{kA}, x_{kB}, x_{kC} son las poblaciones de las regiones A, B y C al inicio del año k
- ¿Cómo evoluciona cada una de estas poblaciones?

$$x_{k+1A}=x_{kA}-\frac{2}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kA}+\frac{1}{3}x_{kB}+\frac{1}{3}x_{kC}$$

$$x_{k+1B}=x_{kB}+\frac{2}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kB}$$

$$x_{k+1C}=x_{kC}+\frac{1}{3}\ x_{kA}-\frac{1}{3}\ x_{kC}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- En forma matricial:

$$X_{k+1} = AX_k \qquad \begin{pmatrix} x_{k+1A} \\ x_{k+1B} \\ x_{k+1C} \end{pmatrix} = 1/3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_{kA} \\ x_{kB} \\ x_{kC} \end{pmatrix}$$

- $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = A^3X_{n-3} = \ldots = A^nX_0$
- $A = \frac{1}{3}M \qquad A^n = (\frac{1}{3})^n M^n$

- 1º) Planteamos la ecuación característica para la matriz M: $P(\lambda) = |M - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} - \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

- Autovalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = -1$ todos ellos con multiplicidad 1
- Es diagonalizable en R porque tiene 3 autovalores reales distintos

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(2) = ker (A-2I)= {v=(x, y, z) $\in R^3$/Av=2.v}= {v$\in R^3$/(A-2I)v=0}
- (A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2x+y+z=0;\ x=0$
- S(2) ={(0,-z,z)/ z ∈R} dimS(2)=1 **Base de S(2): (0, -1,1)**

- S(3) = ker (A-3I)= {v=(x, y, z) $\in R^3$/Av=3.v}= {v$\in R^3$/(A-3I)v=0}
- (A−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-3x+y+z=0;\ 2x-y=0;\ x-z=0$
- S(3) ={(x,2x,x)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): {(1,2,1)}**
- S(-1) = ker (A+I)= {v=(x, y, z) $\in R^3$/Av=-1.v}= {v$\in R^3$/(A+I)v=0}
- (A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x+y+z=0;\ 2x+3y=0;\ x+3z=0$
- S(-1) ={(-3z,2z,z)/ z ∈R} dimS(-1)=1 **Base de S(-1): {(-3,2,1)}**
- **M es diagonalizable**
- **La matriz de paso P tal que $P^{-1}MP=D$ se obtiene poniendo los autovectores en columnas**

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **La matriz de paso P tal que $\boldsymbol{P^{-1}MP = D}$ se obtiene poniendo los autovectores en columnas** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3^n} M^n X_0 = \frac{1}{3^n} P D^n P^{-1} X_0$
- $\lim_{n\to\infty} X_n = P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n) P^{-1} X_0$
- Y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 3^n & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- Entonces si el estado inicial es el vector $X_0 = (60,200,300)$
- $\lim_{n\to\infty} X_n = P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} D^n) P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 140 \\ 280 \\ 140 \end{pmatrix}$

- **Problema 22**

En R^3 consideramos un endomorfismo f cuya matriz asociada en una base B es A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de "a" y de "b" la matriz M es diagonalizable

b) $Para\ a = -1\ y\ b = -1$ determinar una base B´ de vectores tal que $M_{B'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan del endomorfismo f. Indicar cuál es la forma canónica de Jordan y explicar adecuadamente el proceso y el significado de cada uno de los elementos.

c) $Para\ a = -1\ y\ b = -1, utilizar\ el\ teorema\ de\ Cayley\ Hamilton$ para calcular A^9

(Dar expresión en función de A)

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 23**

¿Existe alguna base de $P_2(x)$ *formada por vectores propios*, cuya matriz asociada, en la base $\{1, x, x^2\}$ *sea* $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

En caso afirmativo, dar una base formada por vectores propios de f.

> ***¿QUÉ HARÍAS?***

- Rang A =1; traza A = 3 $\Longrightarrow$ $|A-\lambda I|=\lambda^2(3-\lambda)$
- *Observamos que* $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$ y $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$ (rangA=1)
- Si rang A=1 $\longrightarrow$ dim S(0)=dim ker(A-0I) = 3 – rang A =2 $\longrightarrow$ la multiplicidad algebraica del autovalor 0 es ≥ 2 $\Longrightarrow$ por tanto es 2

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(0) = ker (M)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Mv=0}=
- (M−0I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + 2y + 3z = 0$
- S(0) ={(-2y-3z,y,z)/ x ∈R} dimS(0)=2 **Base de S(0): {(-2, 1,0); (-3,0,1)}**

- S(3) = ker (M-3I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Mv=3.v}= {v∈ R^3/(M-3I)v=0}
- (M−3I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2x + 2y + 3z = 0; x - 4y + 3z = 0$;x+2y-6z=0
- S(3) ={(0,$\frac{3}{2}z$,z)/ x ∈R} dimS(3)=1 **Base de S(3): (0,3,2)**
- **Entonces una base de vectores propios es:**

  {-2+x, -3+x^2, $3x + 2x^2$}

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 24**

Considera un endomorfismo de $P_2(x)$, cuya matriz, en la base $\{1,x,x^2\}$ es

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Probar que este endomorfismo es diagonalizable

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 $con\ multiplicidad\ algebraica$ 2 y λ_2= 2multiplicidad 1

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(-1) = ker (A+I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=-1.v}= {v$\in R^3$/(A+I)v=0}

(A+I)v=0 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x + 3y + 9z = 0$ x=-3y-9z

S(1) ={(-3y-9z,y,z)/ x ∈R} dimS(-1)=2 **Base de S(-1): {(-3,1,0);(-9,0,1)}**

- S(2) = ker (A-2I)= {v=$(x, y, z) \in R^3$/Av=2v}= {v$\in R^3$/(A-2I)v=0}

(A−2I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & -2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-2x + 3y + 9z = 0;\ \frac{1}{3}x - 2y + 3z = 0;\ \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y - 2z = 0$

S(2) ={(9z,3z,z)/ x ∈R} dimS(2)=1 **Base de S(2): (9,3,1)**

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

f es diagonalizable si y sólo si se cumplen:

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$=n La suma de todas las multiplicidades algebraicas es n
2) $a_i = g_i \; i = 1 \ldots k$ Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada λ_i coinciden

- Dim S(-1)= a_1 y Dim S(2)= a_2 y la suma es 3 $\Longrightarrow$ f diagonalizable
- Hemos encontrado por tanto una base de vectores propios en la que la matriz asociada al endomorfismo es diagonal.
- ¿Quién es la base de autovectores? **Base : {(-3,1,0);(-9,0,1); (9,3,1)}**
- c) Determinar A^{-1} a partir del teorema de Cayley-Hamilton
- **El teorema asegura que p(A)=** $-A^3 + 3A + 2I = 0$ $\Longrightarrow$ $2I = A^3 - 3A \rightarrow I = \frac{1}{2}A(A^2 - 3I)$
- Entonces $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}^2 - 3I\right)$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

Como D= P^{-1}MP   M=PDP^{-1} $\boldsymbol{M^p}$=P$\boldsymbol{D^p P^{-1}}$

- La matriz de paso P se obtiene poniendo por columnas los autovectores obtenidos:
- P= $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz diagonal: D= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M^p} = \underbrace{PDP^{-1}\ PDP^{-1}\ PDP^{-1} \ldots PDP^{-1}}_{\text{n veces}} = \mathbf{P}\boldsymbol{D^p P^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 18 & -27 \\ -1 & -3 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 25**

Calcular A^{-1} utilizando el teorema de Cayley-Hamilton A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1º) El polinomio característico es P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2-\lambda & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (desarrollando\ por\ la\ 2^{a}\ columna) = (-\lambda-1)^2(2-\lambda)^2=0=$$

$$\lambda^4-2\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda+4=0$$

- Autovalores: λ_1=-1 $con\ multiplicidad\ algebraica\ 2\ y\ \lambda_2$= 2multiplicidad algebraica 2
- Por el teorema de Cayley-Hamilton: $A^4-2A^3-3A^2+4A+4I=0$ I=$\frac{1}{4}$A($-A^3+2A^2+3A-4I$)

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(-A^3+2A^2+3A-4I)$$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 26**

Dada la matriz M=$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcular su potencia n-sima

a) por diagonalización b) por Cayley-Hamilton

- 1º) El polinomio característico es P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 0$$

- Autovalores: λ_1=1 $con\ multiplicidad$ 1 y λ_2= 6 también simple
- Como los dos valores propios son reales y simples: M es diagonalizable
- Vamos a obtener una base de vectores propios

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- S(1) = ker (A-I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in R^3$/Av=v}=
- (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $3x+2y=0$
- S(1) ={(x,-3x/2)/ x ∈R} dimS(1)=1 **Base de S(1): (2,-3)**

- S(6) = ker (A-6I)= {v=$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in R^3$/Av=6.v}= {v∈ R^3/(A-6I)v=0}
- (A−6I)v=0 $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-2\,x+2\,y=0;$
- S(6) ={(x,x)/ x ∈R} dimS(6)=1 **Base de S(6): (1,1)**
- **Entonces una base de vectores propios es:**

{(2,-3); (1,1)} $\boldsymbol{A^n}$=P$\boldsymbol{D^n P^{-1}}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

b) Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton

- El polinomio característico es P(λ)=$(4-\lambda)(3-\lambda)$ -6=0=$\lambda^2-7\lambda$+6
- Dividimos λ^n entre el polinomio característico y obtenemos un cociente c(λ) y un resto r(λ) que tendrá grado ≤ 1 $\Longrightarrow$ r(λ)=a λ+b
- Es decir λ^n =($\lambda^2-7\lambda$+6). c(λ) + r(λ)
- Sustituyendo λ por A: $\boldsymbol{A^n}$**= a $\boldsymbol{A}$+bI** (porque A^2-7A+6I=0)

- Vamos a calcular ahora los valores de a y b: ¿cómo?
- Sustituyendo por los valores propios en la igualdad λ^n =($\lambda^2-7\lambda$+6). c(λ) + r(λ):

  1=a+b 6^n= 6a+b $\longrightarrow$ a= $\frac{1}{5}$(6^n -1) b= $\frac{1}{5}(6-6^n)$
- A^n= a A+bI= $\frac{1}{5}$(6^n -1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$+$\frac{1}{5}(6-6^n)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalores y autovectores. Matrices diagonalizables

- **Problema 27**

Dada la matriz real A=$\begin{pmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}$, calcular $\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} A^n$

- El polinomio característico es P(λ)=$\lambda^2 - 2\lambda$+1 porque trA=2; y det A =1
- Dividimos λ^n entre el polinomio característico y obtenemos un cociente c(λ) y un resto r(λ) que tendrá grado ≤ 1 r(λ)=a λ+b
- Es decir λ^n =($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c(λ) + r(λ)
- Sustituyendo λ por A: A^n= a A+bI (porque $A^2 - 2A$+I=0)

- Vamos a calcular ahora los valores de a y b
- Sustituyendo por los valores propios en la igualdad λ^n =($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c(λ) + r(λ):

  1=a+b
- Derivando la igualdad nλ^{n-1} =(2λ-2). c(λ) + ($\lambda^2 - 2\lambda$+1). c´(λ) +a (que es r´(λ))
- Y sustituyendo por el valor propio en esta nueva igualdad: n=a; b=1-n
- A^n= n A+(1-n)I= $n\begin{pmatrix} -14 & 25 \\ -9 & 16 \end{pmatrix}+(1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15n+1 & 25n \\ -9n & 15n+1 \end{pmatrix}$
- Por último: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}A^n=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} -15+1/n & 25 \\ -9 & 15+1/n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15 & 25 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 28**

Obtener la forma reducida de Jordan y la base en la que el endomorfismo queda representado por la misma: M= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |A-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =-(3-\lambda)^5=0$$

- Autovalor λ=3 $con\ multiplicidad$ 5

Forma canónica de Jordan

- Tratamos de encontrar una base de modo que la matriz asociada respecto de esta base sea una matriz de Jordan.

➢ E^1(λ=3)=S(3) =ker (A-3I)= {v∈ R^4/(A-3I)v=0}

- (A−3I)v=0 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - t + u = 0$; -x+t=0; x=0

- E^1(λ=3)= S(3) ={(0,y,z,0,0)/ x ∈R} $dimE^1$(3)=2 **Base de E^1(λ=3)= {(0,1,0,0,0); (0,0,1,0,0)}**

➢ E^2(λ=3)=ker $(A-3I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-3I)^2$ v=0}

$(A-3I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x - t + u = 0$

E^2(λ=3)={(x,y,z,x+u,u)/ x ∈R} $dimE^2$(1) =4

Base de E^2(λ=3)= {(1,0,0,1,0); (0,1,0,0,0);(0,0,1,-1,0);(0,0,0,0,1)}

Forma canónica de Jordan

- $E^3(\lambda=3)$=ker $(A-3I)^3$= {v∈ R^4/ $(A-3I)^3$ v=0}

$$(A-3I)^3\text{v=0 :}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E^3(\lambda=3)$={(x,y,z,t,u)/ x,y,z,t,u ∈R} $dimE^3(1)$ =5 **Base de E^3(λ=3)= Base canónica de R^5**

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- Esquema del problema
- λ=3 tiene multiplicidad algebraica 5

  dim S(3) $dimE^1(3)$=2 multiplicidad geométrica 2
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=3)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=3)** ⊆ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=3) =M(3)**

  2 **4** **5**

  v_3 v_2 v_1

  v_5 v_4
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-3I)^3$- $ker(A-3I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0,0,0)**

  $v_4 \in ker(A-3I)^2$- $\ker(A-3I)$
- ¿y el resto? Recuerda:
-
- $\boldsymbol{v_2 = (A-3I)v_1}$**=(1,-1,1,1,0)** $\boldsymbol{v_3 = (A-3I)v_2 = (A-3I)^2 v_1 = (0,0,}1,0,0)$

Forma canónica de Jordan

- ¿y v_4 y v_5 ? $Elegimos\ v_4 \in ker(A-3I)^2$- $\ker(A-3I)\ que\ sea\ l.i.con\ v_2$ y v_3
- **v_4=(0,0,0,1,1)**
- **$v_5=(A-3I)v_4$=(0,1,0,1,0)**

- **Hay tantos bloques como filas y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número de bloques será 2 (dimensión de S(3)= E^1(λ=3), es decir, igual a la multiplicidad geométrica del valor propio λ**
  - Bloque 1: 3x3: corresponde a los vectores v_1, v_2 y v_3 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores de la segunda fila

- $La\ base\ de\ Jordan\ se\ conforma\ escribiendo\ los\ vectores\ por\ filas$ $\boldsymbol{de\ derecha}$ **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a L$< v_1, v_2, v_3 >$ subespacio f-invariante y 3 cíclico (generado por v_1, (f- λI)(v_1), (f− λI)^2(v_1))

- Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores L$<v_4$ y $v_5 >$ subespacio f-invariante y 2 cíclico (generado por v_4, (f- λI)(v_4))

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas de derecha* **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- **Problema 29**

Obtener la forma reducida de Jordan y la base en la que el endomorfismo queda representado por la misma: M= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,(2+\lambda)^2=0$$

- Autovalores λ=2 $con\ multiplicidad\ 2$ y λ=-2 $con\ multiplicidad\ 2$

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=2)=S(2) =ker (A-2I)= {v∈ R^4/(A-2I)v=0}

(A−2I)v=0 : $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-4x+y-t=0;$ -4y+4t=0; -4x+5y-4t=0

E^1(λ=2)= S(2) ={(0,0,z,0)/ x ∈R} $dimE^1$(2)=1 **Base de E^1(λ=2)= {(0,0,1,0)}**

- *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica =2, es una caja 2x2

- E^2(λ=2)=ker $(A-2I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-2I)^2$ v=0}

$(A-2I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 & -16 \\ 16 & -24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x-y+t=0\ y-t=0;\ 2x-3y+3t=0$

E^2(λ=2)={(0,y,z,y)/ x ∈R} $dimE^2$(2) =2

Base de E^2(λ=2)= {(0,1,0,1); (0,0,1,0)}

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=-2)=S(-2) =ker (A+2I)= {v∈ R^4/(A+2I)v=0}

(A+2I)v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $y-t=0; -4x+5y+4z-4t=0$; t=0

E^1(λ=-2)= S(2) ={(x,0,x,0)/ x ∈R} $dimE^1$(-2)=1 **Base de E^1(λ=-2)= {(1,0,1,0)}**

- *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica =2, es también una caja 2x2
  - E^2(λ=-2)=ker $(A+2I)^2$= {v∈ R^4/ $(A+2I)^2$ v=0}

$(A+2I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ -16 & 16 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t=0;\ \ 2x-2y-2z+t=0$

E^2(λ=-2)={(y+z,y,z,0)/ x ∈R} $dimE^2$(2) =2

Base de E^2(λ=2)= {(1,1,0,0); (1,0,1,0)}

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- λ=2 tiene multiplicidad algebraica 2
  dim S(2) = $dim E^1$(2)=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=2)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=2) =M(2)**
  1 **2**
  v_2 v_1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=−2)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=−2) =M(-2)**
  1 **2**
  v_4 v_3
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-2I)^2$-ker$(A-2I)$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,1,0,1)**
- $\boldsymbol{v_2 = (A-2I)v_1}$**=(0,0,1,0)**

Forma canónica de Jordan

- $v_3 \in ker(A+2I)^2$-ker$(A+\ 2I)$ **v_3=(1,1,0,0)**
- $\boldsymbol{v_4 = (A+2I)v_3}$**=(1,0,1,0)**

- **Hay tantos bloques como filas y la dimensión de cada bloque es igual al número de vectores de la fila correspondiente**
- **El número de bloques será 1 por cada valor propio, igual a la multiplicidad geométrica de cada valor propio λ**
  - Bloque 1: 2x2: corresponde a los vectores v_1, v_2 de la primera fila (que generan un subespacio f-invariante)
  - Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores de la segunda fila
- $La\ base\ de\ Jordan\ se\ \ conforma\ escribiendo\ los\ vectores\ por\ filas\ de\ derecha$ **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante
  (generado por v_1, (f- λI)(v_1)
- Bloque 2: 2x2 corresponde a los vectores L<v_3 y v_4 $>$ subespacio f-invariante y 2 cíclico
  (generado por v_3, (f- λI)(v_3))

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- *La base de Jordan se conforma escribiendo los vectores por filas de derecha* **a izquierda y de arriba hacia abajo**

Forma canónica de Jordan

- **Problema 30**

Hallar la forma reducida de Jordan según los valores de $\alpha \in R$:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de M

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |M− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\alpha & 1+\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\ (1+\alpha-\lambda) = 0$$

- Autovalores 1,1 y $1+\alpha$

Caso 1: si $\alpha \neq 0$: λ=1 con multiplicidad 2 y λ= $1+\alpha$ simple
Caso 2: si $\alpha = 0$: λ=1 con multiplicidad 3

Forma canónica de Jordan

- E^1(λ=1)=S(1) =ker (M-I)= {v∈ R^3/(M-I)v=0}

(M−I)v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-y+z=0$; x=0; x $-\alpha$ y $+\alpha$ z=0

E^1(λ=1)= S(1) ={(0,y,y)/ y ∈R} $dimE^1$(1)=1 **Base de E^1(λ=1)= {(0,1,1)}**

- *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica 2, es una caja 2x2

- E^2(λ=1)=ker $(M-I)^2$= {v∈ R^3/ $(M-I)^2$ v=0}

$(M-I)^2$v=0 : $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1-\alpha^2 & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-\alpha y+\alpha z=0$ $-y+z=0$;

E^2(λ=1)={(x, y, y)/ x ∈R} $dimE^2(1)$ =2= multiplicidad algebraica

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0); (0,1,1)}

Forma canónica de Jordan

Para el valor propio 1+α:

- E^1(λ= 1+α)=S(1+α) =ker (M-(1+α)I)= {v∈ R^3/(M-(1+α) I)v=0}

M−(1+α)v=0 : $\begin{pmatrix} -\alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -\alpha x - y + z = 0;\ x - \alpha y = 0;$

- E^1(λ=1+ α)= S(1+ α) ={(αy,y,(1+α^2)y)/ x ∈R} $\quad dimE^1$(1+ α)=1

Base de E^1(λ= 1+α)=**{(**α**, 1,** 1+α^2**)}**

Forma canónica de Jordan

Cálculo de la base de Jordan

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 2
  dim S(1) $dimE^1$(1)=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1)** $=$**M(1)**
  1 **2**

  v_2 v_1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1+** α**)**
  1

  v_3
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-I)^2$-$\ker(A- I)$ $\boldsymbol{v_1}$**=(1,0,0)**
- $\boldsymbol{v_2=(M-I)v_1}$**=(0,1,1)**

Forma canónica de Jordan

- Caso 1. Si $\alpha \neq 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1+\alpha\end{array}\right)$$

- Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante
  (generado por v_1, (f- λI)(v_1)
- Bloque 2: 1x1 corresponde al L$\langle v_3 \rangle$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3 por columnas

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1+\alpha^2\end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $\alpha = 0$: λ=1 con multiplicidad 3

➢ E^1(λ=1)=S(1) =ker (M-I)= {v∈ R^3/(M-I)v=0}

$$(M-I)v=0: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -y+z=0; \; x=0; \; x=0$$

E^1(λ=1)= S(1) ={(0,y,y)/ y ∈R} $dimE^1$(1)=1 **Base de E^1(λ=1)= {(0,1,1)}**

➢ *Para este valor propio hay un sólo bloque de Jordan y como tiene multiplic.* algebraica =3, es una caja 3x3

➢ E^2(λ=1)=ker $(M-I)^2$= {v∈ R^3/ $(M-I)^2$ v=0}

$$(M-I)^2 v=0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -y+z=0$$

➢ E^2(λ=1)={(x, y, y)/ x ∈R} $dimE^2$(1) =2= multiplicidad algebraica

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0); (0,1,1)}

Forma canónica de Jordan

- E^3(λ=1)=S(1) =ker $(M-I)^3$ {v∈ R^3 /$(M-I)^3$ v=0}

$$(M-I)^3\text{v=0}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E^3(λ=1)= S(1) ={(x,y,z)/ y ∈R} $dimE^3$(1)=3 **Base de E^3(λ=1)= base canónica de** R^3

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema
- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 3
  dim S(1) $dimE^1$(1)=1 multiplicidad geométrica 1
- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** ⊆ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1) ⊆** $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)**

  1 **2** **3**

  v_3 v_2 v_1

- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(M-I)^3$- $ker(M-I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,1,0)**
- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2 = (M-I)v_1}$= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v_3} = \boldsymbol{(M-I)v_2}$= = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $\alpha = 0$: La forma canónica de Jordan es:

J=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Bloque 1: 3x3: corresponde a L$< v_1, v_2, v_3 >$ subespacio f-invariante

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3 por columnas

P=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 31**

Obtener la forma canónica de Jordan y la matriz de paso a la misma, según los valores del parámetro k:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 2k & 1+k & 1-k & k \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de A

- 1º) Planteamos la ecuación característica P(λ) $=$ |A− λI|=0

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2k & 1+k-\lambda & -k & k \\ 2k & 1+k & 1-k-\lambda & k \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4=0 \text{ (Idea: restar F3-F2 } \rightarrow c2+c3)$$

- Autovalores λ=1 con multiplicidad 4

Forma canónica de Jordan

- Vamos a calcular ahora la dimensión del subespacio propio correspondiente:
- S(1) = ker (A-I)= {v=(x, y, z) ∈ R^3/Av=1.v}= {v∈ R^3/(A-I)v=0}

- (A−I)v=0 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $y = 0; k(2x + y - z + t) = 0;$
- Caso 1. Si k $\neq$ 0: S(1) ={(x,0,2x+t,t)/ x,t ∈R} dimS(1)=2 **Base de S(1): {(1,0,2,0);(0,0,1,1)}**
- Caso 2. Si k=0: S(1) ={(x,0,z,t)/ x,z, t ∈R} dimS(1)=3 **Base de S(1): {(1,0,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}**

Forma canónica de Jordan

- E^2(λ=1)=ker $(A-I)^2$= {v∈ R^4/ $(A-I)^2$ v=0}

$$(A-I)^2 v=0: \quad \begin{pmatrix} 2k & k & -k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ -2k & -k & k & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2x+y-z+t=0$$

E^2(λ=1)={(x, y, z,-2x-y+z)/ x,y,z ∈R} $dimE^2(1)$ =3

Base de E^2(λ=1)= {(1,0,0,-2); (0,1,0,-1);(0,0,1,1)}

- E^3(λ=1)=ker $(A-I)^3$= {v∈ R^4/ $(A-I)^3$ v=0}

$$(A-I)^3 v=0: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E^3(λ=1)=R^4 $dimE^3(1)$ =4

Base de E^3(λ=1)= base canónica de R^4

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema **Caso 1. k $\neq 0$:**

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 4

  dim S(1) $=$ $dim E^1(1)$=2 multiplicidad geométrica 2

- $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^2}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^3}$**(λ=1) =M(1)**

  2 **3** **4**

  v_3 v_2 v_1

  v_4

- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)

- $v_1 \in ker(A-I)^3$- $ker(A-I)^2$ $\boldsymbol{v_1}$**=(0,0,0,1)**

  $v_2 \in ker(A-I)^2$- $\ker(A-\ I)$

- ¿y el resto?

- $\boldsymbol{v_2 = (A-I)v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Elegimos\ v_4}$ **en** $\boldsymbol{E^1}$**(λ=1) (l. independ. con** $\boldsymbol{v_3}$**):**

  $\boldsymbol{v_4}$ **=(0,0,1,1)**

- $\mathbf{v_3} = \boldsymbol{(A-I)v_2} = = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k \\ 2k & 1+k & -k & k \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$

Forma canónica de Jordan

- Caso 1. Si $k \neq 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  - Bloque 1: 3x3: corresponde a L$< v_1, v_2, v_3>$ subespacio f-invariante (generado por v_1, (f- λI)(v_1), (f− λI)^2(v_1))
  - Bloque 2: 1x1 corresponde al L$\langle v_4 \rangle$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3, v_4por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- Esquema del problema **Caso 2. k $= 0$:**

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 4
  dim S(1) $=$ $dimE^1$(1)=2 multiplicidad geométrica 2
- **E^1(λ=1)** $\subseteq$ **E^2(λ=1) =M(1)**

  3 **4**

  v_2 v_1
  v_3
  v_4
- Colocamos bajo cada subespacio E^i(λ) un número de vectores igual a la diferencia entre dimE^i(λ) y dim E^{i-1}(λ)
- $v_1 \in ker(A-I)^2 - \ker(A-\ I)$ **v_1=(0,1,0,0)**

- ¿y el resto?
- $\boldsymbol{v_2 = (A-I)v_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **en E^1(λ=1) (l. independ. con v_3):**

$\boldsymbol{Elegimos}$ **v_3, v_4, $\in E^1$(λ=1) l.i. con v_2** **v_3, =(1,0,0,0) v_4 =(0,0,1,0)**

Forma canónica de Jordan

- Caso 2. Si $k = 0$: La forma canónica de Jordan es:

$$J=\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Bloque 1: 2x2: corresponde a L$< v_1, v_2 >$ subespacio f-invariante (generado por v_1, (f- λI)(v_1))
- Bloque 2: 1x1 corresponde al L$<v_3 >$
- Bloque 3: 1x1 corresponde al L$<v_4 >$

- Y la matriz de paso se obtiene escribiendo los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 por columnas

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 32**

> Si A es una matriz real 6x6 que tiene autovalores
>
> - 1 *con multiplicidad algebraica* 2 y multiplicidad geométrica 1
> - $2+i$ *con multiplicidad algebraica* 2 y multiplicidad geométrica 1
>
> Obtener su forma real de Jordan

- λ=1 tiene multiplicidad algebraica 2

  dim S(1) $= dimE^{1}(1)=1$ multiplicidad geométrica 1

- $\boldsymbol{E^{1}}$**(λ=1)** $\subseteq$ $\boldsymbol{E^{2}}$**(λ=1) =M(1)**

  1 **2** $\longrightarrow$ **Tiene un bloque** $(dimE^{1}(1)=1)$ **2x2**

- λ=2+i tiene multiplicidad algebraica 2

  dim S(1) $= dimE^{1}(1)=2$ multiplicidad geométrica 1

  $\longrightarrow$ un bloque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (Igual para 2-i)

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Forma canónica de Jordan

- **Problema 33**

Obtener la forma real de Jordan y calcular la base en la que el endomorfismo correspondiente a la matriz dada queda representado por la misma

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores de M

- 1º) Planteamos la ecuación característica $P(\lambda) = |M-\lambda I|=0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2=0$$

- Autovalores λ=i con multiplicidad 2 y λ=-i con multiplicidad 2

Forma canónica de Jordan

- $E^1(\lambda=i)=S(i)=\ker(A-iI)=\{v\in R^4 (A-iI)v=0\}$

(A−iI)v=0 : $\begin{pmatrix} 1-i & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1-i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1-i & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(1-i)x+y+z+t=0$; $2x+(1+i)y+t=0$; $(1+i)z+t=0$; $2z+(1-i)t=0$

$dimE^1(i)=1$ $E^1(i)=\{\frac{(-1-i)}{2}y,y,0,0)/x\in R\}$ $Base: (\frac{-1-i}{2},1,10,0)$

- $E^2(\lambda=i)=\ker(A-iI)^2=\{v\in R^4/ (A-iI)^2 v=0\}$

$(A-iI)^2$v=0 :2$\begin{pmatrix} -1-i & -i & 1-i & -i \\ 2i & -1+i & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & -1+i & i \\ 0 & 0 & -2i & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$dimE^2(i)=2$ $E^2(i)=\{x,(i-1)x,z,-(1+i)z)/x\in R\}$ $Base: \{(1,-1+i,0,0); (0,0,1,-1-i)$

Forma canónica de Jordan

- La forma canónica compleja de Jordan del endomorfismo $\hat{f}$ es

$$J(\hat{f}) = M_{B'}(\widehat{f}) = \left(\begin{array}{cc|cc} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_2(i) & 0 \\ 0 & B_2(-i) \end{pmatrix}$$

- ¿y cuál es la base de autovectores complejos?

$E^1(\lambda=i)$	$\subseteq$	$E^2(\lambda=i)=M(i)$
1		**2**
v_2		v_1

$E^1(\lambda=-i)$	$\subseteq$	$E^2(\lambda=-i)=M(-i)$
1		**2**
$\overline{v_2}$		$\overline{v_1}$

- $Elegimos\ \ v_1 \in ker(f - iI)^2 - ker(f - iI)$ $\quad Elegimos\ \ v_1 ; (0,0,1,-1-i)$
- Y $\boldsymbol{v_2}$ un vector de $\boldsymbol{E^1}$**(λ=i):** $\boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{iI})\boldsymbol{v_1}$=(-i,1+i,0,0)

B´={v_1, v_2 = (A-iI) v_1, $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$}

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1-i & 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

¿y cuál es la forma real de Jordan?

- consideramos v_1=$u_1 + w_1$i =$(0,0,1,-1-i)$=(0,0,1,-1)+(0,0,0,-1)i
- y v_2=$u_2 + w_2$i = (-i,1+i,0,0) =(0,1,0,0)+(-1,1,0,0)i

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base de vectores correspondiente ahora es: $\boxed{B''=\{u_1, w_1, u_2, w_2\}}$

B´´=$\{u_1, w_1, u_2, w_2\}$ son una base de V (vectores reales)

- En esta base $\boldsymbol{M_{B''}}\ (\widehat{\boldsymbol{f}})$= $\boldsymbol{M_{B''}}\ (\boldsymbol{f})$= $\boldsymbol{J_R}\ (\boldsymbol{f})$ es la matriz real de Jordan

$$\boldsymbol{J_R}\ (\boldsymbol{f})=\begin{pmatrix} c(i) & 0 \\ I_2 & C(i) \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Exponencial de una matriz

- **Problema 34**

Dadas A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $calcular\ e^A\ \ y\ e^{At}$; $e^B\ \ y\ e^{Bt}$

➢ A=$\left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ A=$\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ ➡ $e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & \\ & e^{J_2} \end{pmatrix}$

- $e^{J_1} = e^{-2}$ $\qquad e^{J_2} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$ ➡ $e^A = \left(\begin{array}{c|cc} e^{-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \end{array}\right)$

$e^{J_2 t} = e^{-2t}$ $\qquad e^{J_2 t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$ ➡ $e^{At} = \left(\begin{array}{c|cc} e^{-2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \end{array}\right)$

Exponencial de una matriz

- B=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $$e^{B}= e^{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3} & 0 & 0 \\ e^{3} & e^{3} & 0 \\ \frac{e^{3}}{2} & e^{3} & e^{3} \end{pmatrix} =$$

- $$e^{Bt} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{t^{2}}{2!} & \frac{t}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$

Exponencial de una matriz

- **Problema 43**

Dada la matriz nxn $M = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ $calcular\ e^M$

- $e^A = e^{\lambda I_n} = I_n + \lambda I_n + \frac{1}{2!}(\lambda I_n)^2 + \ldots \frac{1}{k!}(\lambda I_n)^k + \cdots = I_n + \lambda I_n + \frac{\lambda^2}{2!}(I_n)^2 + \ldots \frac{\lambda^k}{k!}(I_n)^k + \cdots = e^{\lambda} I_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda} \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- **Problema 36**

Dada la matriz nxn $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $calcular\ e^A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^n = (0)$$

- $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots \frac{A^k}{k!} \dots = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \frac{1}{n-1!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exponencial de una matriz

- **Problema 37**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $calcular\ e^{A}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^{B} = I + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2}}{2!} + \cdots \frac{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{k}}{k!} \ldots =$$

$$I + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}^{2} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}^{2} + \ldots \begin{pmatrix} 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} \ldots & b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} \ldots \\ -b + \frac{b^3}{3!} - \frac{b^5}{5!} \ldots & 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$$

$$e^{A} = e^{aI_2}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = e^{a}\begin{pmatrix} cosb & senb \\ -senb & cosb \end{pmatrix}$$

- **Problema 38**

Si A ∈ $M_3(R)$ es una matriz real 3x3 que tiene autovalores:

½ con multiplicidad algebraica 1

1 con multiplicidad algebraica 2

Calcular, utilizando el teorema de Cayley-Hamilton el valor de $2A^4 - 7A^3 + 9A^2$-5A+I

➢ P(λ) = $(1-\lambda)^2(\frac{1}{2}-\lambda)$=0 $\longrightarrow$ $-\lambda^3 + \frac{5}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$

Por el teorema de Cayley Hamilton sabemos que $-A^3 + \frac{5}{2}A^2 - 2A + \frac{1}{2}I = 0$

$$\Downarrow$$

$$2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\quad 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = 0$$

- **Problema 39**

B es una matriz 3x3 que tiene autovalores: 0, 1, 2

Realiza, si es posible con la información disponible, los siguientes cálculos, razonando en cualquiera de los casos cada paso o implicación.

a) Rang B
b) Det $(B^t B)$
c) Los autovalores de $B^t B$
d) Los autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$

- a) B es diagonalizable puesto que tiene 3 autovalores distintos cada uno con multiplicidad algebraica 1 que coincidirá con su multiplicidad geométrica.
- Entonces existe P regular tal que $P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- A y D son matrices semejantes y tienen el mismo rango: rang B=rang D =2

- b) Como 0 es autovalor: P(0) $=$ |B− 0I|=|B|=0;
- Entonces det (B^tB)=|B^tB|=|B^t||B|=0

- c) No tenemos datos suficientes para calcularlos

- d) Autovalores de B: 0, 1, 2 $\longrightarrow$ Autovalores de B^2: 0, 1, 4
- Entonces 0-(-1), 1-(-1) y 4-(-1) = 1, 2, 5 son valores de B^2+I = B^2-(-I)
- Y 1, ½, 1/5 son autovalores de $(B^2$+I$)^{-1}$