TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	29/06/2022	
CURSO	2º	**HORA**	15:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO				

NORMAS DEL EXAMEN

- El objetivo del examen es evaluar vuestros conocimentos, por lo tanto debéis explicar convenientemente vuestras soluciones, no seáis escuetos ni dejéis nada a la interpretación.
- No se permiten calculadoras científicas programables ni ordenadores/tablets. En este sentido, no se permiten calculadoras que tengan alguno de los modos vector (VCT), matrix (MAT), equation (EQN) o similares. Las calculadoras que no cumplan este requisito serán retiradas al principio del examen.
- Las hojas con las normas y el enunciado deben ser entregadas junto con la solución del examen.
- Es obligatorio escribir el nombre del alumno en la cabecera de todas las hojas a entregar (incluyendo las hojas con las normas y el enunciado).
- Las hojas "en sucio" no son evaluables y por lo tanto no deben entregarse.
- La mala presentación (tachones, letra ilegible, faltas ortográficas, etc.) puntúa negativamente.
- No se calificarán aquellos problemas cuya solución no esté completamente desarrollada y explicada de acuerdo a la materia vista en clase y a lo solicitado en el enunciado.
- Los teléfonos móviles deben estar en silencio o apagados y guardados en mochilas o abrigos. La posesión de un teléfono móvil durante el examen es motivo de expulsión del examen. La misma indicación aplica a los relojes tipo smart watch.
- Se recomienda leer detenidamente cada enunciado antes de contestarlo.
- Es obligatorio proporcionar un resultado numérico siempre que sea posible, siendo preferible una fracción a un valor decimal aproximado. Igualmente, es recomendable simplificar al máximo las expresiones que aparezcan en el problema (polinomios, etc.).
- Solo recibirán la puntuación máxima aquellos problemas cuya solución sea correcta. En el resto de los casos, se valorará el desarrollo hasta un máximo del 50 % de la puntuación de ese problema.
- No se permiten libros ni apuntes.
- No se podrá abandonar el examen hasta pasada la primera media hora.
- Solo se contestarán preguntas relacionadas con los enunciados, no sobre el método de resolución o cuestiones de presentación.
- Ante cualquier duda durante el examen, se recomienda aplicar el sentido común y proporcionar la respuesta más completa posible.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	29/06/2022
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

EXTREMOS RELATIVOS Y PUNTOS DE SILLA

- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *definida positiva*, lo que quiere decir que todos sus autovalores son positivos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que todos los menores principales son mayores que cero (es decir, si $|H_i| > 0\ \forall i = 1, \ldots, m$), entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un mínimo relativo.
- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *definida negativa*, lo que significa que todos sus autovalores son negativos y de forma equivalente (en matrices simétricas) que los menores principales de índice par son positivos y los de índice impar son negativos (es decir, si $|H_{2q}| > 0$ y $|H_{2q+1}| < 0$ para los valores q apropiados, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un máximo relativo.
- Si la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *indefinida*, lo que significa que todos sus autovalores son distintos de cero pero de distinto signo, lo que en matrices simétricas ocurre <u>por ejemplo</u> cuando todos los menores principales son distintos de cero (es decir, si $|H_i| \neq 0\ \forall i = 1, \ldots, m)$ pero no es uno de los casos anteriores, entonces $\overline{x} = \overline{a}$ es un punto de inflexión, también llamado punto de *silla* o de *ensilladura*.
- Si no se trata de uno de los casos anteriores, lo que ocurre <u>por ejemplo</u> cuando la matriz $H_f(x_0, y_0)$ es *singular*, lo que a su vez significa que alguno de sus autovalores es nulo y que su determinante $|H_f(x_0, y_0)| = 0$, entonces es necesario realizar un estudio adicional, ya que este método no proporciona suficiente información.

EXTREMOS CONDICIONADOS

Caso particular: funciones reales de dos variables con una condición

En este caso particular, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un candidato (x_0, y_0):

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| < 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un mínimo relativo condicionado.
- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0)| > 0$, entonces $(x, y) = (x_0, y_0)$ es un máximo relativo condicionado.

Caso particular: funciones reales de tres variables con una condición

En este caso particular, sería necesario comprobar las siguientes condiciones para un punto (x_0, y_0, z_0) dado:

- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| < 0$ y $|\widetilde{H}_4(x_0, y_0, z_0)| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un mínimo relativo condicionado.
- Si $|\widetilde{H}_3((x_0, y_0, z_0))| > 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| < 0$, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo condicionado.
- Si $|\widetilde{H}_3(x_0, y_0, z_0)| \neq 0$ y $|\widetilde{H}_4((x_0, y_0, z_0))| \neq 0$, pero no es uno de los casos anteriores, entonces $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto de silla.
- En cualquier otro caso, es necesario realizar un estudio adicional.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	29/06/2022	
CURSO	2º	HORA	15:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1 (3.0 PUNTOS)

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida a continuación, completa los apartados:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcula los límites direccionales (es decir, empleando todas las posibles rectas que pasan por el punto) en $(0,0)$.

b) Calcula el límite de la función en el punto $(0,0)$ utilizando coordenadas polares.

c) ¿Es posible ofrecer alguna conclusión sobre la continuidad de $f(x,y)$ en vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores? Razona la respuesta.

d) Utilizando la fórmula del cociente incremental, calcula las derivadas parciales de la función en $(0,0)$ en caso de existir, o justifica el motivo por el que no existen si ese es el caso.

e) ¿Es diferenciable la función $f(x,y)$ en $(0,0)$?

PROBLEMA 2 (2.5 PUNTOS)

De una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se conocen los siguientes datos:

$$f(0,0,0) = 2 \qquad \nabla f(0,0,0) = (1,2,-1) \qquad H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A partir de estos datos, completa los siguientes apartados:

a) Proporciona una expresión aproximada para $f(x,y,z)$ que pueda utilizarse en las proximidades del punto $(0,0,0)$.

b) Determina un valor aproximado para $f(0.1, 0.2, -0.1)$.

PROBLEMA 3 (2.5 PUNTOS)

Identifica los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = 6 - 4\,x - 3\,y - z\,(x^2 + y^2 - 1)$ y determina de qué tipo son.

PROBLEMA 4 (2.0 PUNTOS)

Dadas las circunferencias $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 2\}$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 = 2\}$, represéntalas gráficamente e indica en qué punto sus gráficas son tangentes. A continuación, demuestra que efectivamente son tangentes en ese punto utilizando en el proceso el teorema de la función implícita, justificando adecuadamente su utilización.