Hoja de problemas nº 6

El espacio vectorial euclídeo

Tema 6

1.- Consideramos en R^3 el siguiente producto escalar

(x,y,z) o (x´,y´,z´)=xx´+2yy´+2zz´´+xz´+zx´+yz´+zy´

a) Calcular la matriz de este producto escalar en la base canónica
b) Calcular el módulo del vector (1,1,1) y el ángulo que forman los vectores (1,0,1) y (0,1,0)
c) Calcular el subespacio ortogonal de S=L<(1,0,0), (0,1,0)>

2.- Consideramos $R_2[x]$ *espacio vectorial de los polinomios* de coeficientes reales y grado ≤ 2 *y* B_c *su base canónica*

Dados los subespacio S={p(x)∈ $R_2[x]$/1 es raíz de p(x)} y

T={p(x))∈ $R_2[x]$/p(x) no tiene término independiente}.

a) Calcular una base de $S \cap T$ *y otra de* $S + T$
b) Hallar en la base B_c unas ecuaciones implícitas del subespacio suplementario de $S \cap T$

3.- En R^4 con el producto escalar usual, obtener el subespacio ortogonal suplementario de W={(x,y,z,t)/ x+y-z+t=o; 2x+y-z+3t=0}

Dado un espacio vectorial euclídeo (V, <,>) y u,v vectores de V. Demostrar:

4.- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \Leftrightarrow\ < u,v >=0$ Teorema de Pitágoras
$5.- \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{2}(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$ Ley del paralelogramo
6.- $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| \Leftrightarrow u + v\ y\ u - v$ *son ortogonales*.

Deducir que un paralelogramo es un rombo si y sólo si sus diagonales son perpendiculares.

7.- Si (R^3, <,>) es un espacio euclídeo con

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Determinar una base de $F^{\perp}$ siendo F el subespacio de R^3 de ecuación implícita $x_1+x_2+2x_3=0$

8.- En $(R^4, <,>)$ donde $<>$ es el producto escalar usual

a) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a

(1,2,1,0) (0,-1,1,0) y (1,1,-2,1)

b) Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para
V=L$<$(1,2,-1,0), (0,1,1,0) y (1,0,-2,1)$>$

9.- Calcular la proyección ortogonal del vector (1,2,1) sobre el subespacio S= {(0,1,2); (1,2,3)} (con el producto escalar habitual)

10.- $(P_1(x), <,>)$ es un espacio euclídeo con el siguiente producto escalar

$$<p(x), q(x)> = \int_0^1 p(x).\, q(x)dx$$

a) Obtener la matriz del producto escalar referida a la base canónica
b) ¿Qué ángulo forman los polinomios x+3 y 2x+4?
c) Calcular la proyección ortogonal de x+3 sobre x+2
d) Determinar una base ortonormal a partir de la base canónica

11.- Obtener la proyección del vector (1,1,1) sobre el subespacio

S= {(1,0,0); (0,1,0); (2,1,0)}

12.- Dados los puntos (1,1), (2,4), (3,7), (4,9), ajustar dichos puntos utilizando el método de mínimos cuadrados

a) utilizando una función polinómica de grado dos

b) utilizando un polinomio de grado 3

13.- En una exposición de automóviles, un vendedor decidió realizar una serie de observaciones relacionando el precio de los vehículos con sus pesos a_i. Se han obtenido los datos de la tabla adjunta

a_i pesos en Tm	b_i precio en 10^4euros
0,8	1
1	2
1,2	3

1,3	5

Dados los datos de la tabla, hallar por el método de mínimos cuadrados el mejor ajuste lineal

14.- En un cultivo de laboratorio se estudia la evolución de una población de un microorganismo. Se mide el número de individuos cada hora y se obtienen los datos:

Tiempo (h)	1	2	3	4
Miles de microorganismos	4	8	11	14

Determinar cuál será la población aproximada al cabo de 7 horas

15.- Determinar una matriz ortogonal P que diagonalice ortogonalmente al endomorfismo que en la base canónica tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16.- E es un espacio vectorial euclídeo de dimensión3; G=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matriz del producto escalar o en una base B=$\{e_1,\ e_1+e_2, e_1+e_2+\ e_3\}$.

Sea otra base B´=$\{e_1, e_2, e_3\}$ *otra base de E*.

Razonar si son ciertas o falsas

1) $(2e_1+e_2)o(2e_1+e_2)=5$
2) *Los subespacios* $S_1=L\{e_1\}$ y $S_2=L\{\ e_1+e_2.,e_3\}$ son ortogonales
3) *La matriz del producto escalar en la base B´es*

$$G´=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1
5) Los únicos valores propios de una matriz ortogonal son 1 ó -1

17.- Demostrar:

a) El producto de dos matrices ortogonales y del mismo orden es una matriz ortogonal
b) La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal

18.- Calcular los valores de s y t para los que

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & t & s \\ 3 & s & 2 \\ s & -2 & t \end{pmatrix} \quad \textit{sea una matriz ortogonal}$$

19.- Demostrar que una matriz es ortogonal si y sólo si sus vectores columna forman un sistema ortonormal con el producto escalar usual.

20.- Diagonalizar la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obteniendo la matriz de paso P que permitan una expresión J=P^tAP

21.- Determinar si las matrices reales y simétricas siguientes

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ son congruentes

22.- En R^2 se considera un producto escalar cuya matriz en una base ortonormal B=$\{u_1, u_2\}$ es M=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; hallar una base ortonormal formada por vectores propios y la matriz diagonal correspondiente.

23.- Diagonalizar la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obteniendo la matriz de paso P que permitan una expresión J=P^tAP

24.- Dado V espacio vectorial euclídeo con un producto escalar <> en V cuya matriz de Gram es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtener la proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el plano de ecuación x+2z=0.

25.- Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que A es diagonalizable en R

b) Comprobar que los autovectores son ortogonales con el producto escalar usual

c) Encontrar una base ortonormal de vectores propios de R^3

d) Comprobar que la matriz P de cambio de base de la base canónica a la anterior es ortogonal

e) Clasificar la forma cuadrática definida por q(x)= x^tAx

26.- Sea f el endomorfismo de R^2 definido por

f(1,1)=(-1,1); f(1,2)=(-1,2); demostrar que verifica que si A es la matriz del endomorfismo en una base B cualquiera y G es la matriz del producto escalar en dicha base, entonces $G_B = A^t G_B$A

27.- Sea A una matriz simétrica 3x3 con traza 2a+b. Sabemos que el subespacio propio asociado al valor propio a contiene a

S={(x,y,z)/ x+y+z=0}. Calcular:

a) Calcular una forma canónica de Jordan J y una matriz de paso P ortogonal tal que $J = P^t A$P según los diferentes valores de a y b
b) Los valores de a y b para los que A puede ser la matriz de un producto escalar
c) Si a y b toman los valores (naturales) más pequeños que hacen que A sea la matriz de un producto escalar, calcular el ángulo que forman los vectores (1,-1,0) y (1,1,1) respecto del mismo

28.- Consideramos el espacio euclídeo R^3 y el vector u=(1,1,1)

a) Calcular la matriz de Householder asociada al vector u

b) Obtener los transformados de los vectores (3,3,3) (1,-1,0) y (1,2,3) por la matriz H.

29.- **(Examen ICAI 2009)** Sea E un espacio euclídeo en el que se ha definido un producto escalar <> y B ={e_1, e_2, e_3} *es una base de E*.

Sabiendo que

i) e_2 *y* e_3 *forman un ángulo de* $\frac{\pi}{3}$
ii) *los tres vectores* e_1, e_2, e_3 tienen por normas los números naturales pares más pequeños que hacen que <> sea un producto escalar
iii) $B' = \{e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3\}$ es una base ortogonal de E

Calcular

a) La matriz del producto escalar en la base B
b) Dado el subespacio S=L$< e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 >$ $calcular\ una\ base\ ortogonal\ de\ S^{\perp}$
c) Calcular la proyección ortogonal de $e_2 - e_3$ sobre $S^{\perp}$

30.- Dada la curva de R^2 C={(x,y)∈ R^2 $/10x^2 - 12xy + 5y^2 = 1\}$,

Encontrar una base en la que la matriz asociada sea diagonal

Examen 29 junio 2021

31.- En un espacio vectorial euclídeo E de dimensión 3 se define un producto escalar <,> cuya matriz en la base B=$\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ es G=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B´=$\{e_1, e_2, e_3\}$ es otra base de E.

a) $Calcular < 2e_1 + e_2, 2e_1 + e_2 >$
b) $Obtener\ la\ matriz\ del\ producto\ escalar <,> en\ la\ base\ B´$
c) Comprobar si los subespacios $V_1 = L < e_1 > y\ V_2 = L < e_1 + e_2, e_3 >$ $son\ ortogonales$