Análisis Matemático II

Tema 1

Conceptos fundamentales de funciones de varias variables

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Espacios vectoriales euclídeos, normados y métricos

1.1 Espacio vectorial

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo K es un trío $(V,+,*)$ formado por un conjunto V, una operación interna sobre V y otra externa sobre V de la forma

$$\begin{array}{rccc} + : & V\times V & \longrightarrow & V \\ & (\overline{u},\overline{v}) & \longrightarrow & \overline{u}+\overline{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} * : & K\times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda,\overline{u}) & \longrightarrow & \lambda*\overline{u} \end{array}$$

que verifican las siguientes propiedades:

0) La operación $+$ es ley de composición interna y la operación $*$ es ley de composición externa.

1) $\forall\,\overline{u},\overline{v},\overline{w}\in V \quad (\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})\in V$ (Propiedad asociativa)

2) $\forall\,\overline{u},\overline{v}\in V \quad \overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}\in V$ (Propiedad conmutativa)

3) $\exists\,\overline{0}\in V \quad | \quad \overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$ (Elemento neutro de la operación $+$)

4) $\forall\,\overline{u}\in V \quad \exists\,(-\overline{u})\in V \quad | \quad \overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$ (Elemento opuesto o simétrico)

5) $\forall\,\overline{u},\overline{v}\in V,\ \forall\,\lambda\in K \quad \lambda*(\overline{u}+\overline{v})=\lambda*\overline{u}+\lambda*\overline{v}$ (Distributiva respecto a la suma de vectores)

6) $\forall\,\overline{u}\in V,\ \forall\,\lambda,\mu\in K \quad (\lambda+\mu)*\overline{u}=\lambda*\overline{u}+\mu*\overline{u}$ (Distributiva respecto a la suma de escalares)

7) $\forall\,\overline{u}\in V,\ \forall\,\lambda,\mu\in K \quad \lambda*(\mu*\overline{u})=(\lambda\mu)*\overline{u}$ (Propiedad asociativa mixta)

8) $\exists\,1\in K \quad | \quad \forall\,\overline{u}\in V \quad 1*\overline{u}=\overline{u}$ (Elemento neutro de la operación $*$)

Las propiedades 1-4 se pueden resumir diciendo que $(V,+)$ es un grupo conmutativo. Los otros cuatro requisitos regulan el modo de actuar de los escalares del cuerpo K sobre el grupo $(V,+)$.

Los elementos de K se suelen representar mediante minúsculas griegas y reciben el nombre de **escalares**. Normalmente $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$. Si $K=\mathbb{R}$, se trata de un espacio vectorial real. Si por el contrario $K=\mathbb{C}$, nos encontramos ante un espacio vectorial complejo.

A los elementos de V, representados normalmente mediante minúsculas ordinarias con subrayado alto, se les denomina **vectores**.

A la operación interna $+$ se la llama **suma de vectores** y a la operación $*$ se la denomina **producto externo** o **producto por un escalar**.

Cuando hablemos del espacio vectorial V nos referiremos a un trío $(V,+,*)$, cuyas operaciones supondremos conocidas. A veces se utiliza la expresión “sea V un K-e.v.” para abreviar.

1.2 Espacio vectorial euclídeo

Sea $(V,+,*)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define **producto escalar** como la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{x},\overline{y}) & \longrightarrow & \overline{x}\cdot\overline{y} \end{array}$$

que cumple las siguientes características:

1) $\forall\, \overline{x} \in V,\ \overline{x}\cdot\overline{x} \geqslant 0.$

2) Dado $\overline{x} \in V$, $\overline{x}\cdot\overline{x} = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{0}$.

3) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \overline{x}\cdot\overline{y} = \overline{y}\cdot\overline{x} \in \mathbb{R}$

4) $\forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V,\ \overline{x}\cdot(\overline{y}+\overline{z}) = \overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{x}\cdot\overline{z}$

5) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(\overline{x}\cdot\overline{y}) = (\lambda * \overline{x})\cdot\overline{y}$

Se llama **espacio vectorial euclídeo** a todo espacio vectorial $(V,+,*)$ dotado de un producto escalar. En ocasiones, al producto se le representa también como $<\overline{x},\overline{y}>$.

1.3 Espacio vectorial normado

Sea $(V,+,*)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define **norma** de un vector como la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \overline{x} & \longrightarrow & \|\overline{x}\| \end{array}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, \overline{x} \in V,\ \|\overline{x}\| \geqslant 0.$

2) Dado $\overline{x} \in V$, $\|\overline{x}\| = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{0}$.

3) $\forall\, \overline{x} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda * \overline{x}\| = |\lambda|\,\|\overline{x}\|.$

4) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \|\overline{x}+\overline{y}\| \leqslant \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (desigualdad triangular o de Minkowski).

5) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ |\overline{x}\cdot\overline{y}| \leqslant \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Se llama **espacio vectorial normado** a todo espacio vectorial $(V,+,*)$ dotado de una norma. Todo espacio vectorial euclídeo es también un espacio vectorial normado con la norma inducida por el producto escalar, que es $\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}}$, y que coincide con la longitud de ese vector. En el espacio vectorial $(\mathbb{R},+,*)$, la norma coincide con el valor absoluto.

1.4 Espacio vectorial métrico

Sea $(V,+,*)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define **distancia** entre dos vectores como la aplicación

$$\begin{array}{rccc} d: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{x},\overline{y}) & \longrightarrow & d(\overline{x},\overline{y}) \end{array}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ d(\overline{x},\overline{y}) \geqslant 0.$

2) Dados $\overline{x}, \overline{y} \in V$, $d(\overline{x},\overline{y}) = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{y}$.

3) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$

4) $\forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V,\ d(\overline{x},\overline{y}) \leqslant d(\overline{x},\overline{z}) + d(\overline{z},\overline{y})$

Se llama **espacio vectorial métrico** a todo espacio vectorial $(V,+,*)$ donde está definida una función distancia. Todo espacio vectorial normado es también un espacio vectorial métrico con la distancia inducida por la norma, que es $d(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{x}-\overline{y}\|$.

2 El conjunto $\mathbb{R}^n$

2.1 Características generales

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n veces), es decir, sus elementos son n-tuplas de la forma $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, en el conjunto $\mathbb{R}^n$ se definen las operaciones suma $+$ (de dos elementos de $\mathbb{R}^n$), producto $*$ (de un elemento de por un escalar), producto escalar $\cdot$ (de dos elementos de $\mathbb{R}^n$), norma $\| \ \|$ (de un elemento de $\mathbb{R}^n$) y distancia (entre dos elementos de $\mathbb{R}^n$) de la siguiente manera:

- Suma: $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- Producto por un escalar: $\lambda * \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$
- Producto escalar: $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$
- Norma de un vector: $\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
- Distancia euclídea: $d(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, donde

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

2.2 Conceptos topológicos de $\mathbb{R}^n$

Dados un vector $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ y un número real positivo r, se denomina **bola abierta** y **bola cerrada** de centro $\overline{a}$ y radio r a los siguientes conjuntos:

$$B(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\overline{a}, \overline{x}) < r\} \qquad \overline{B}(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\overline{a}, \overline{x}) \leqslant r\}$$

Con la distancia euclídea, las bolas son intervalos en $\mathbb{R}$, círculos en $\mathbb{R}^2$ y esferas en $\mathbb{R}^3$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que el elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ es **interior** al conjunto A cuando existe una bola abierta de centro el vector $\overline{a}$ contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores a A se llama interior de A y se representa como $\operatorname{int}(A)$.

En base a la anterior definición, podemos afirmar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** cuando todos sus puntos son interiores, es decir, cuando $A = \operatorname{int}(A)$. Por definición, la unión (finita o infinita) o intersección (finita) de conjuntos abiertos es otro conjunto abierto.

Por su parte, el elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ es **exterior** al conjunto A cuando existe una bola abierta de centro el vector $\overline{a}$ contenida en el complementario de A. El conjunto de todos los puntos exteriores a A se llama exterior de A y se representa como $\operatorname{ext}(A)$.

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complementario $\mathbb{R}^n - A$ es abierto. Por definición, la unión (finita) o intersección (finita o infinita) de conjuntos cerrados es otro conjunto cerrado.

El elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola abierta de centro $\overline{a}$ contiene puntos de A y puntos de su complementario $\mathbb{R}^n - A$. El conjunto de todos los puntos frontera de A se llama **frontera** de A y se representa como $\operatorname{fr}(A)$.

Con estas definiciones, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se puede afirmar que $\mathbb{R}^n = \mathrm{ext}(A) \cup \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}(A)$. Además, se puede afirmar que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y solo si contiene a su frontera, y es abierto si y solo si no comparte ningún elemento con su frontera.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está **acotado** si existe un elemento $\overline{a}$ y un valor r tal que $A \subset B(\overline{a}, r)$, donde por simplicidad puede suponerse que la bola está centrada en el origen. De forma equivalente, puede afirmarse que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si y solo si el valor $\delta = \sup\{d(\overline{x}, \overline{y}) \mid \overline{x}, \overline{y} \in A\}$ es finito. En caso de existir, al número δ se le llama **diámetro** del conjunto acotado A.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado. Cualquier subconjunto cerrado de un conjunto compacto es a su vez compacto.

Un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es **adherente** a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola abierta de centro $\overline{x}$ contiene elementos de A. El conjunto de todos los puntos adherentes a un conjunto A se denomina **adherencia**, **cierre** o **clausura** de A, y se designa por $\mathrm{adh}(A)$. Por definición, $\mathrm{adh}(A) = A \cup \mathrm{fr}(A)$.

Un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un **punto de acumulación** de $A \subset \mathbb{R}^n$ cuando toda bola abierta de centro $\overline{x}$ contiene puntos de A distintos de $\overline{x}$. El conjunto de puntos de acumulación de A se representa como $\mathrm{ac}(A)$.

Por último, se dice que $\{\overline{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (V, d) si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j \geqslant n_0$, entonces $d(\overline{x}_i, \overline{x}_j) \leqslant \epsilon$. Se dice que el espacio métrico (V, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Se dice que un espacio vectorial normado $(V, \| \ \|)$ es completo si como espacio métrico es completo para la distancia inducida por su norma. A los espacios normados completos se les llama también espacios de Banach. El espacio $\mathbb{R}^n$, con cualquiera de sus normas, es completo. Como curiosidad, aunque $(\mathbb{R}, | \ |)$ es completo, $(\mathbb{Q}, | \ |)$ no lo es, puesto que por ejemplo la sucesión de números racionales $(1 + 1/n)^n$ es de Cauchy pero no converge en $\mathbb{Q}$.

3 Concepto de vector geométrico en el plano afín

3.1 Definiciones

En $\mathbb{R}^2$, un vector también se puede interpretar como un **vector geométrico**, que es un segmento de recta orientado que va desde un punto A hasta un punto B. Los segmentos tienen magnitud (la longitud del segmento), dirección (la de la recta sobre la que se sitúa) y sentido (desde A hasta B, indicado gráficamente por la flecha). Además de la notación $\overrightarrow{AB}$, se puede emplear la notación $\vec{v}$ (o, de manera simplificada, $\overline{AB}$ y $\overline{v}$, que es la que utilizaremos mayoritariamente en este tema).

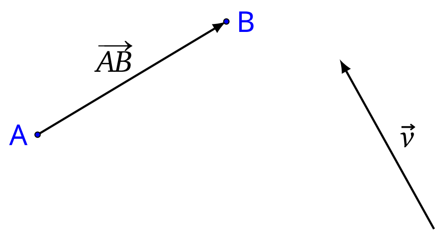

Figura 1: Ejemplos de vectores geométricos.

Dos vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales si tienen la misma longitud, dirección y sentido.

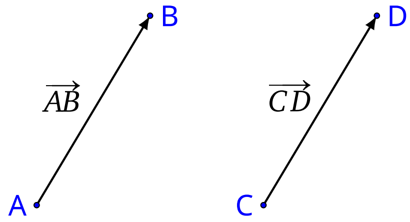

Figura 2: Igualdad de vectores.

Debido a ello, dado un vector cualquiera, siempre es posible encontrar otro vector igual al primero y cuyo punto de inicio es el origen de coordenadas. De esta manera, en el plano afín, con definir el punto (x, y) en el que finaliza el vector, este quedaría perfectamente definido. Esto implica que, en la práctica, la representación de un punto A y del vector $\overline{OA}$ es la misma: (x_A, y_A).

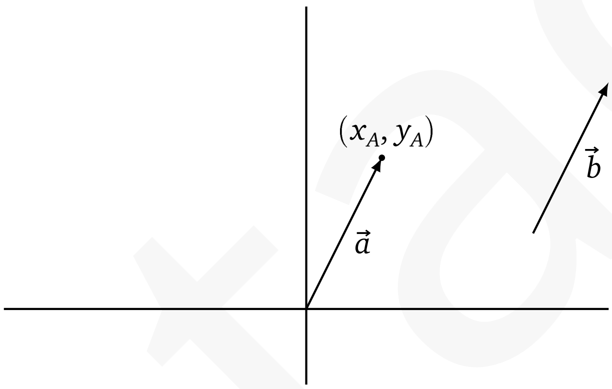

Figura 3: Equivalencia de vectores.

Por otra parte, podemos representar un vector cualquiera $\overline{a} = (x_A, y_A)$ en función de la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$, donde es habitual asignar los elementos $\overline{i}$ y $\overline{j}$ a los vectores de la base, de forma que $\overline{a} = x_A\overline{i} + y_A\overline{j}$.

3.2 Operaciones básicas

Los vectores pueden operarse de distintas maneras. En este contexto, la operación más sencilla es la suma de vectores, que transforma los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en un nuevo vector $\overline{c}$ que combina las direcciones de ambos vectores. En concreto, la suma de los vectores $\overline{a} = \overline{OA} = (x_A, y_A)$ y $\overline{b} = \overline{OB} = (x_B, y_B)$ es el vector $(x_A + x_B, y_A + y_B)$. Gráficamente, la operación se conoce como la regla del paralelogramo.

Las principales propiedades de la suma de vectores son:

1) Conmutativa: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

2) Asociativa: $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$.

3) Elemento neutro: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a}$.

4) Elemento opuesto: $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.

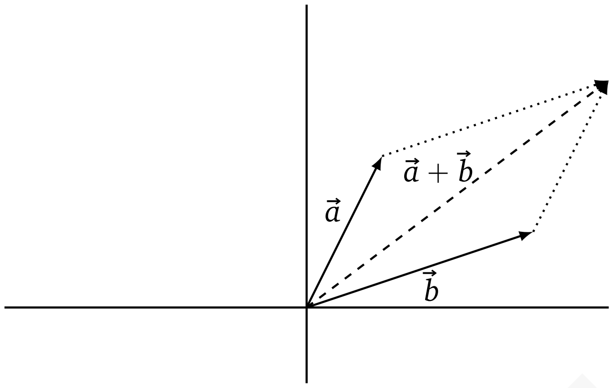

Figura 4: Suma de vectores.

La diferencia de vectores se define de manera natural a partir de la suma con el opuesto, de manera que dados dos vectores $\overline{a} = \overline{OA} = (x_A, y_A)$ y $\overline{b} = \overline{OB} = (x_B, y_B)$, el vector diferencia $\overline{a} - \overline{b}$ es el vector $(x_A - x_B, y_A - y_B)$.

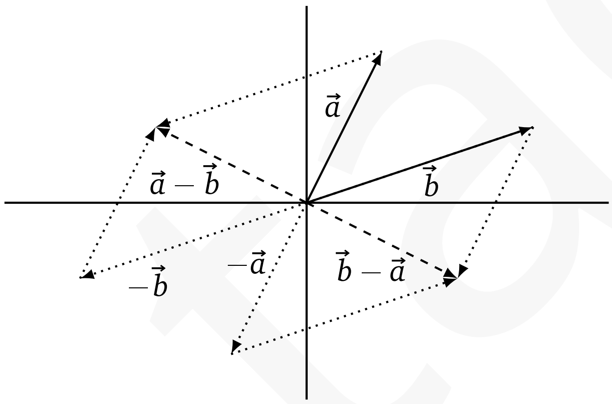

Figura 5: Diferencia de vectores.

La segunda operación básica con vectores es el producto de un escalar por un vector. Dado el vector $\overline{a} = \overline{OA} = (x_A, y_A)$ y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, el resultado de multiplicar el escalar por el vector es $\alpha * (x_A, y_A) = (\alpha x_A, \alpha y_A)$. Si $|\alpha| > 1$, gráficamente se percibirá un alargamiento del vector, mientras que si $|\alpha| < 1$ se observará un encogimiento.

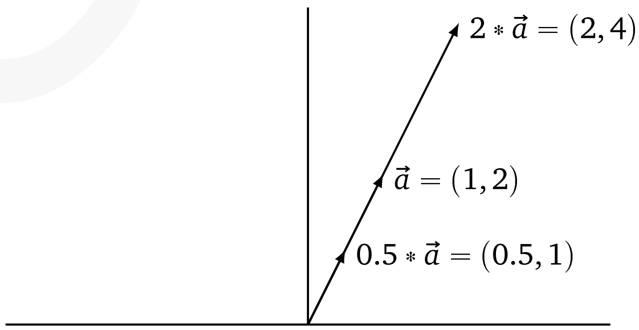

Figura 6: Producto de un vector y un escalar.

Las principales propiedades del producto de un escalar por un vector son:

1) Asociativa: $(\alpha\beta) * \overline{a} = \alpha * (\beta * \overline{a})$.

2) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta) * \overline{a} = \alpha * \overline{a} + \beta * \overline{a}$.

3) Distributiva respecto a la suma de vectores: $\alpha * (\overline{a} + \overline{b}) = \alpha * \overline{a} + \alpha * \overline{b}$.

4) Elemento neutro: $1 * \overline{a} = \overline{a}$.

3.3 Producto escalar

Tal como se comentó anteriormente, se define producto escalar como aquella aplicación que multiplica dos vectores para producir un escalar. En ocasiones, al producto escalar $\overline{a} \cdot \overline{b}$ se le representa también como $< \overline{a}, \overline{b} >$. En el plano afín, el producto escalar se calcula de la siguiente manera:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (x_A, y_A) \cdot (x_B, y_B) = x_A x_B + y_A y_B$$

3.4 Norma de un vector

En el plano afín, la norma habitual de un vector coincide con su longitud, y se calcula a partir de la definición de producto escalar. Su fórmula es la siguiente:

$$\|\overline{a}\| = \|(x_A, y_A)\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

A partir del concepto de norma, es posible determinar el vector unitario en la dirección de un vector $\overline{a}$ mediante la siguiente expresión:

$$\overline{u}_a = \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|}$$

Utilizando el producto escalar y la norma de dos vectores, se puede determinar el ángulo que forman dos vectores mediante la siguiente fórmula:

$$\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|} = \overline{u}_a \cdot \overline{u}_b \implies \alpha = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \arccos\left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|}\right) = \arccos(\overline{u}_a \cdot \overline{u}_b)$$

Por último, es posible calcular la proyección de un vector $\overline{a}$ sobre otro $\overline{b}$ mediante la siguiente fórmula:

$$\text{proj}_b \overline{a} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|^2}\right) \overline{b} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|}\right) \frac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|} = \left(\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\|\overline{b}\|}\right) \overline{u}_b \implies \|\text{proj}_b \overline{a}\| = \frac{\left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right|}{\|\overline{b}\|}$$

4 Concepto de vector geométrico en el espacio afín

Los conceptos mencionados anteriormente pueden extenderse para su utilización en el espacio afín, donde los vectores geométricos tienen tres componentes, con lo que $\overline{a} = \overline{OA} = (x_A, y_A, z_A)$.

De forma similar a lo visto en el plano, podemos representar un vector cualquiera $\overline{a} = (x_A, y_A, z_A)$ en función de la base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, donde es habitual asignar los elementos $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$ a los vectores de la base, de forma que $\overline{a} = x_A \overline{i} + y_A \overline{j} + z_A \overline{k}$.

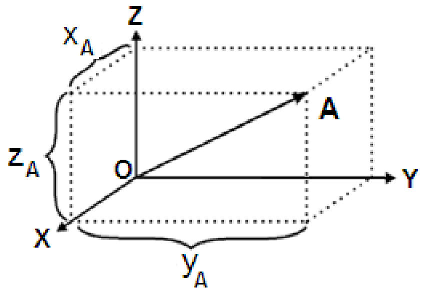

Figura 7: Vector en el espacio afín.

Debido a ello, en el espacio afín el producto escalar adopta la siguiente forma:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (x_A, y_A, z_A) \cdot (x_B, y_B, z_B) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

De manera equivalente, la norma habitual de un vector en el espacio afín se calcula de la siguiente manera:

$$\|\overline{a}\| = \|(x_A, y_A, z_A)\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

En el espacio afín es posible definir una nueva operacion denominada **producto vectorial**. El producto vectorial de dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ permite obtener un nuevo vector $\overline{c}$ que es perpendicular al plano definido por los dos vectores dados. Este producto tiene la propiedad $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$, y sus componentes se pueden calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{a} \times \overline{b} = (x_A, y_A, z_A) \times (x_B, y_B, z_B) = (y_A z_B - z_A y_B, z_A x_B - x_A z_B, x_A y_B - y_A x_B)$$

Otra forma de realizar el anterior cálculo es mediante el uso de determinantes:

$$\overline{a} \times \overline{b} = (x_A, y_A, z_A) \times (x_B, y_B, z_B) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

A partir del producto escalar y el producto vectorial es posible generar las siguientes igualdades:

- Triple producto escalar: $\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) = \overline{c} \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$
- Triple producto vectorial: $\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{c}$
- Cuádruple producto escalar: $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{c})(\overline{b} \cdot \overline{d}) - (\overline{a} \cdot \overline{d})(\overline{b} \cdot \overline{c})$
- Cuádruple producto vectorial: $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = \left((\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{d}\right)\overline{c} - \left((\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}\right)\overline{d}$

Mediante el producto vectorial, es posible calcular los siguientes elementos, donde $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ representan los vectores que definen las aristas de las figuras indicadas a continuación:

Área paralelogramo	Área triángulo	Volumen paralelepípedo
$A = \|\overline{a} \times \overline{b}\|$	$A = \frac{\|\overline{a} \times \overline{b}\|}{2}$	$V = \left\lvert\overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)\right\rvert$

5 Puntos

Debido a la definición de vector en el plano y el espacio afín, podemos utilizar la misma notación para referirnos tanto a vectores como a puntos. En el plano afín, un punto P puede estar asociado a dos sistemas de coordenadas, cartesiano y polar.

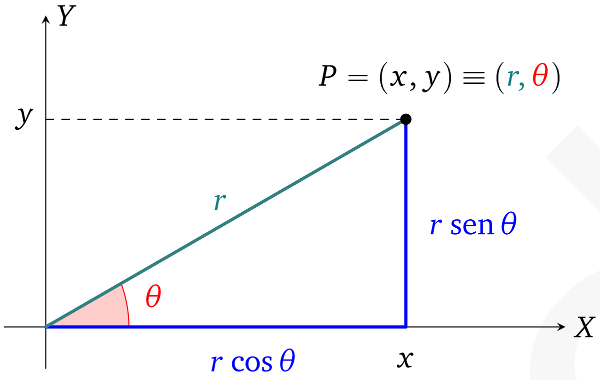

Figura 8: Coordenadas cartesianas y polares.

1) Coordenadas **cartesianas** o **rectangulares**: $P = (x, y) = x\bar{i} + y\bar{j} = x(1, 0) + y(0, 1)$.
2) Coordenadas **polares**: $P = (r, \theta)$, donde $r \geqslant 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ o, alternativamente, $\theta \in [-\pi, \pi)$. Además de r, a la distancia desde el origen hasta el punto también se le suele denominar ρ.

Las fórmulas de cambio entre coordenadas cartesianas y polares son:

Coordenadas polares a cartesianas	Coordenadas cartesianas a polares
$x = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$	$\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

En comparación, en el espacio afín el punto P puede estar asociado a tres sistemas de coordenadas:

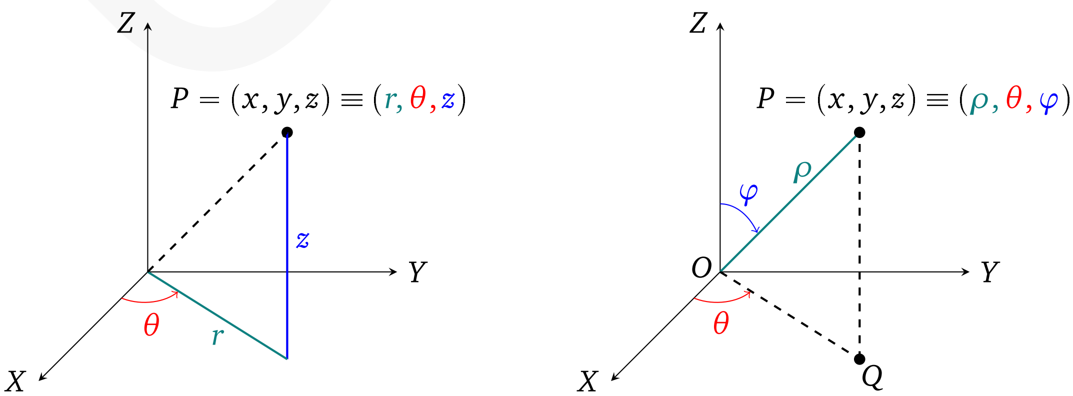

Figura 9: Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

1) Coordenadas **cartesianas**: $P = (x, y, z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

2) Coordenadas **cilíndricas**: $P = (r, \theta, z)$, donde (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección del punto P sobre el plano XY, con $r \geqslant 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, y z tiene la misma interpretación que en coordenadas cartesianas.

3) Coordenadas **esféricas**: $P = (\rho, \theta, \varphi)$, donde ρ es el módulo del vector $\overline{OP}$, θ es el ángulo que forman el vector $\overline{OQ}$ y el semieje X positivo, y φ es el ángulo formado por el vector $\overline{OP}$ y el semieje Z positivo. Los límites para los valores mencionados son los siguientes: $\rho \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi]$.

Las fórmulas de cambio entre coordenadas cartesianas y cilíndricas son:

Coordenadas cilíndricas a cartesianas	Coordenadas cartesianas a cilíndricas
$x = r\cos(\theta)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$	$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$

Las fórmulas de cambio entre coordenadas cartesianas y esféricas son:

Coordenadas esféricas a cartesianas	Coordenadas cartesianas a esféricas
$x = \rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)$	$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = \rho\cos(\varphi)$	$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$

Las fórmulas de cambio entre coordenadas cilíndricas y esféricas son:

Coordenadas esféricas a cilíndricas	Coordenadas cilíndricas a esféricas
$r = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$
$\theta = \theta$	$\theta = \theta$
$z = \rho\cos(\varphi)$	$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$

6 Ecuaciones en el plano afín

6.1 Ecuaciones de una recta

El **plano afín** es una pareja formada por un conjunto de elementos denominados puntos y el espacio $\mathbb{R}^2$, cuyos elementos son vectores. Vectores y puntos están ligados por una aplicación que asocia a cada par de puntos A y B el vector $\overline{v}$ que los une, es decir, el vector con origen y final en A y B.

La ecuación general de una recta en el plano afín, a veces también llamada **ecuación implícita**, es:

$$ax + by + c = 0$$

Despejando y en la expresión anterior, se llega a la conocida fórmula de la recta que expresa su pendiente, denominada a veces **ecuación explícita**.

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + k$$

La ecuación general de la recta permite, además, obtener el vector perpendicular a la recta, que es $\overline{n}_r = (a, b)$.

La **ecuación vectorial** de una recta en el plano afín es:

$$P = P_r + \lambda * \overline{v} = (x_r, y_r) + \lambda * (v_x, v_y) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El conjunto de **ecuaciones paramétricas** de la recta que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_r + \lambda v_x \\ y = y_r + \lambda v_y \end{cases}$$

Por último, las **ecuaciones continuas** de la recta son las siguientes:

$$\frac{x - x_r}{v_x} = \frac{y - y_r}{v_y}$$

6.2 Distancia entre un punto y una recta

La distancia mínima de un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a una recta dada por la expresión $P = P_r + \lambda\overline{v}$ es el módulo de la proyección del vector $\overline{P_0P_r}$ sobre el vector $\overline{n}_r$ perpendicular a la recta. En el caso de utilizar la ecuación $ax + by + c = 0$ como expresión de la recta el resultado es equivalente:

$$d(P_0, r) = \|\text{proj}_n \overline{P_0P_r}\| = \frac{|\overline{P_0P_r} \cdot \overline{n}|}{\|\overline{n}\|} \qquad d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6.3 Ecuaciones de una curva

Las curvas pueden representarse en el plano afín de cuatro formas, donde las tres primeras son reprentaciones cartesianas:

- Forma **explícita**: $y = f(x)$
- Forma **implícita**: $F(x, y) = 0$
- Forma **paramétrica**: $x = x(t), y = y(t)$
- Forma **polar**: $r = r(\theta)$ o bien $\rho = \rho(\theta)$

7 Ecuaciones en el espacio afín

7.1 Ecuaciones de las rectas y los planos

El **espacio afín** es una pareja formada por un conjunto puntos y el espacio $\mathbb{R}^3$, de manera que vectores y puntos están ligados por una aplicación que asocia a cada par de puntos A y B el vector $\overline{v}$ que los une. La **ecuación vectorial** de una recta en el espacio afín es:

$$P = P_r + \lambda * \overline{v} = (x_r, y_r, z_r) + \lambda * (v_x, v_y, v_z) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El conjunto de **ecuaciones paramétricas** de la recta que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$r \equiv \begin{cases} x = x_r + \lambda v_x \\ y = y_r + \lambda v_y \\ z = z_r + \lambda v_z \end{cases}$$

Por su parte, las **ecuaciones continuas** de la recta son las siguientes:

$$\frac{x - x_r}{v_x} = \frac{y - y_r}{v_y} = \frac{z - z_r}{v_z}$$

Una cuarta forma de representar una recta en el espacio consiste en utilizar las dos ecuaciones de los planos que, al cortarse, generan la recta.

En cuanto al plano, la **ecuación vectorial** de un plano que pasa por el punto P_π y contiene a dos vectores linealmente independientes $\overline{v}$ y $\overline{w}$ en el espacio afín es:

$$P = P_\pi + \lambda * \overline{v} + \mu * \overline{w} = (x_\pi, y_\pi, z_\pi) + \lambda * (v_x, v_y, v_z) + \mu * (w_x, w_y, w_z) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El conjunto de ecuaciones paramétricas de un plano que están asociadas a su ecuación vectorial tienen el siguiente aspecto:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = x_\pi + \lambda v_x + \mu w_x \\ y = y_\pi + \lambda v_y + \mu w_y \\ z = z_\pi + \lambda v_z + \mu w_z \end{cases}$$

De manera alternativa, la **ecuación general** o **implícita** de un plano es $ax + by + cz + d = 0$. Para obtener esta expresión a partir de la ecuación vectorial, es necesario calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} x - x_\pi & v_x & w_x \\ y - y_\pi & v_y & w_y \\ z - z_\pi & v_x & w_x \end{vmatrix} = 0$$

Por último, cabe mencionar que la expresión de un vector perpendicular al plano dado por la expresión $ax + by + cz + d$ es el vector $\overline{n} = (a, b, c)$.

7.2 Distancias

La distancia mínima de un punto P_0 a una recta dada por la expresión $P = P_r + \lambda * \overline{v}$ se corresponde con la siguiente expresión:

$$d(P_0, r) = \frac{\|\overline{P_r P_0} \times \overline{v}\|}{\|\overline{v}\|}$$

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, es suficiente con calcular la distancia entre un punto cualquiera de una de las rectas y la otra recta empleando para ello la expresión anterior.

La distancia de un punto $P = (x, y, z)$ a un plano $ax + by + cz + d = 0$ es la menor de la distancias desde el punto a los infinitos puntos del plano. Por lo tanto, esa distancia se corresponde con la perpendicular trazada desde el punto al plano, y se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Para calcular la distancia entre dos planos paralelos, basta con determinar la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano, para lo que se podría utilizar la fórmula anterior para el cálculo de la distancia de un punto a un plano.

De manera alternativa, si las expresiones que definen los dos planos son $\pi_1 \equiv ax + by + cz + d_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv ax + by + cz + d_2 = 0$, entonces la distancia entre esos planos se puede obtener utilizando la siguiente fórmula:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

7.3 Ecuaciones de una curva

En el espacio afín, las curvas habitualmente se representan como la intersección de dos superficies o mediante su forma paramétrica:

- **Intersección** de dos superficies: $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$
- Forma **paramétrica**: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

8 Funciones $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Una función $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación que a cada vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ le hace corresponder un vector $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$. A dicha función se la denomina real (escalar) si $n = 1$, denotándose como $y = f(\overline{x})$, y vectorial si $n > 1$, siendo representada como $\overline{y} = f(\overline{x})$.

En función de la combinación de valores m y n se pueden dar los siguientes casos:

1) $m = n = 1$: función real de variable real, donde $y = f(x)$.

Ejemplo 1

El volumen de una esfera depende del radio, siendo su fórmula $V = f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

2) $m > 1, n = 1$: función real de variable vectorial, donde $y = f(\overline{x})$.

Para representar funciones reales de variable vectorial se necesitan $m + 1$ dimensiones, por lo que únicamente se suelen representar gráficamente las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, donde el conjunto de puntos (x, y, z) tal que $z = f(x, y)$ es una superficie de $\mathbb{R}^3$ a la que se denomina representación gráfica de la función f.

Ejemplo 2

El área de un triángulo depende de su base y altura, de manera que $A = f(b, h) = \dfrac{bh}{2}$.

3) $m = 1, n > 1$: función vectorial de variable real, donde $\overline{y} = \overline{f}(x)$.

Ejemplo 3

El movimiento de una partícula a lo largo del plano en función del tiempo es $\overline{y} = \overline{f}(t)$, donde $\overline{y} \in \mathbb{R}^2$.

4) $m > 1, n > 1$: función vectorial de variable vectorial, donde $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

En las funciones vectoriales, además de la notación $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ también se suele utilizar la expresión incluso más general

$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \overline{f}(\overline{x}) = \big(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)\big)$$

A veces se escribe $\overline{f} = (f_1, f_2, f_3) = f_1\overline{i} + f_2\overline{j} + f_3\overline{k}$ cuando la función vectorial toma valores en $\mathbb{R}^3$ y las coordenadas utilizadas son las cartesianas.

Para estudiar las propiedades de una función vectorial (límites, continuidad, diferenciabilidad, etc.) pueden seguirse dos caminos: globalmente, analizando la función $\overline{f}$, o a través de sus funciones componentes $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Ejemplo 4

La función que a cada punto de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (x, y, z) le asigna el punto opuesto $(-x, -y, -z)$ es una función vectorial de variable vectorial, donde $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

Ejemplo 5

La función $\overline{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\overline{f}(x,y,z)=(x^2-y^2+z,x-z^3)$ tiene como funciones componentes $f_1(x,y,z)=x^2-y^2+z$, $f_2(x,y,z)=x-z^3$.

Ejemplo 6

La función $\overline{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\overline{f}(x,y,z)=(\sqrt{x}+z,\mathrm{Ln}(y)-4x,y-x^3+z)$ tiene como funciones componentes $f_1(x,y,z)=\sqrt{x}+z$, $f_2(x,y,z)=\mathrm{Ln}(y)-4x$, $f_3(x,y,z)=y-x^3+z$.

9 Dominio e imagen de una función

El **dominio** de una función $\overline{f}:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ será, salvo que se indique expresamente lo contrario, el subconjunto de elementos de para el que es posible obtener como resultado del cálculo un elemento de $\mathbb{R}^n$. Es decir, $\mathrm{Dom}\left(\overline{f}\right)=\{\overline{x}\in\mathbb{R}^m$ tal que $\exists\overline{y}=\overline{f}(\overline{x})\in\mathbb{R}^n\}$.

Ejercicio 1

Calcula el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{x+y}$.

En el caso particular de las funciones vectoriales (es decir, cuando $n>1$), el dominio se puede calcular como la intersección de los dominios de las funciones componentes.

Ejercicio 2

Calcula el dominio de la función vectorial de variable vectorial definida de la siguiente manera $\overline{f}(x,y)=\big(f_1(x,y),f_2(x,y),f_3(x,y)\big)=\big(x,\mathrm{Ln}(y),\operatorname{arc\,sen}(y)\big)$.

Por su parte, el rango, recorrido o imagen de una función $\overline{f}:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, denominada $\mathrm{Im}\left(\overline{f}\right)$, se define como el conjunto

$$\mathrm{Im}\left(\overline{f}\right)=\{\overline{y}\in\mathbb{R}^n \mid \exists\overline{x}\in\mathbb{R}^m \text{ con } \overline{y}=\overline{f}(\overline{x})\}$$

Ejercicio 3

Calcula la imagen de la función $f(x,y)=x^2+y^2$.

10 Composición de funciones

Sean $\overline{f}:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\overline{g}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $\mathrm{Im}\left(\overline{f}\right)\subset\mathrm{Dom}\left(\overline{g}\right)$, entonces se define la función compuesta $\overline{g}\circ\overline{f}:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ como $(\overline{g}\circ\overline{f})(\overline{x})=\overline{g}(\overline{f}(\overline{x}))$.

Ejercicio 4

Si $\overline{f}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $\overline{f}(x,y)=(x+y,x-y,x^2)$ y $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por la función $g(x,y,z)=2x+y^2+z^2$, calcula $(g\circ\overline{f})(x,y)$.

11 Curvas de nivel

En el caso particular de funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada una constante k, se denomina **curva de nivel** k al conjunto C_k definido como

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\}$$

Si un número k no pertenece al recorrido de una función, entonces la curva de nivel C_k es el conjunto vacío. Es lo que ocurre por ejemplo con la función $f(x, y) = e^{x+y}$ y la curva de nivel C_0.

Por otra parte, la intersección de dos curvas de nivel diferentes es el conjunto vacío, puesto que un mismo elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no puede tener dos imágenes k_1 y k_2 distintas.

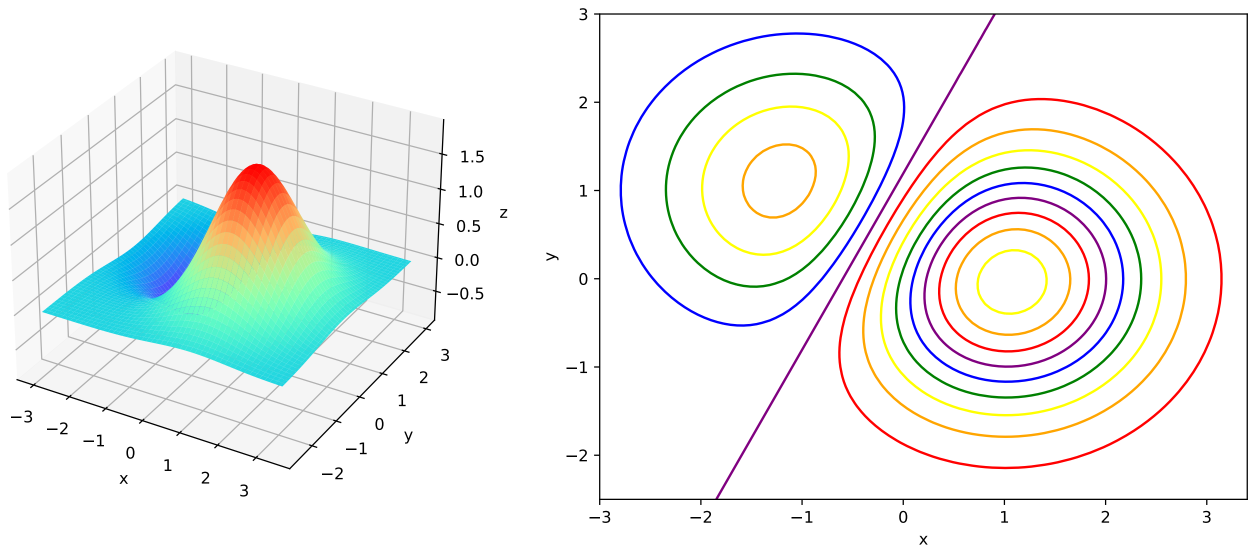

Figura 10: Ejemplo de curvas de nivel.

12 Problemas

1) Dados los vectores $(-1, 1, 0, -2, 0)$ y $(3, -1, 2, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^5$, calcula su producto escalar, sus normas, su distancia, y verifica que se cumplen las desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz.

2) Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

3) Demuestra la desigualdad de Minkowski.

4) Demuestra que la aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(\overline{x}, \overline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, siendo $\overline{x} = (x_1, x_2)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2)$ es una distancia. A continuación, determina la bola abierta de centro $(0, 0)$ y radio 1 usando dicha distancia.

5) Halla en $\mathbb{R}^2$ la bola abierta de centro $(0, 1)$ y radio 2. ¿Pertenecen los puntos $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(0, 3)$ a dicha bola?

6) Dados $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 2 \leqslant y \leqslant 3\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 < x^2 \leqslant 9\}$, determina el interior, exterior y frontera de cada conjunto, indicando si son abiertos, cerrados o ni abiertos ni cerrados.

7) Determina el interior y la frontera de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

b) $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$

8) Determina los conjuntos $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$, $\mathrm{fr}(A)$, $\mathrm{adh}(A)$ y $\mathrm{ac}(A)$ del conjunto $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^2$.

9) Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dados por $A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Determina $A = \cap A_n$ y $B = \cup A_n$. ¿Son esos conjuntos abiertos? ¿Son cerrados?

10) Analiza si los siguientes conjuntos son acotados. En caso afirmativo, calcula su diámetro.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

d) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

11) Analiza si los siguientes conjuntos son compactos. En caso negativo, determina el conjunto compacto mínimo que los contengan.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leqslant 1\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$

12) Halla el vector que tiene como punto de inicio el $A = (2, -1)$ y la misma dirección, magnitud y sentido que el vector $\overline{v} = (7, 6)$.

13) Halla el punto de inicio de un vector con la misma dirección pero sentido contrario que el vector $\overline{v} = (-2, 4)$, con la mitad de su magnitud y cuyo punto final sea $Q = (2, 0)$.

14) Calcula el módulo del vector $\overline{AB}$, donde $A = (2, 1)$ y $B = (-3, 2)$.

15) Calcula los dos vectores unitarios que tienen la misma dirección y sentido que los vectores $\overline{a} = (4, -3)$ y $\overline{b} = (1, -4, 2)$.

16) Calcula el producto vectorial de los vectores $\overline{a} = (1, 2, 3)$ y $\overline{b} = (3, 2, 1)$.

17) Calcula el producto vectorial de los vectores $\overline{a} = (2, 0, 1)$ y $\overline{b} = (1, -1, 3)$ en el orden indicado y en el contrario.

18) Demuestra las siguientes propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$:

a) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$

b) $\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$

c) $\overline{x} \cdot (\lambda * \overline{y}) = \overline{y} \cdot (\lambda * \overline{x}) = \lambda(\overline{x} \cdot \overline{y})$

19) Usando propiedades de los determinantes, demuestra las siguientes propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$:

a) $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$

b) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) + (\overline{a} \times \overline{c})$

c) $\overline{a} \times (\lambda * \overline{b}) = (\lambda * \overline{a}) \times \overline{b} = \lambda * (\overline{a} \times \overline{b})$

20) Demuestra mediante un contraejemplo que el producto vectorial no tiene en general la propiedad asociativa.

21) Determina las ecuaciones cartesianas y paramétricas de la curva cuya expresión dada en coordenadas polares es $r = -6\cos(\theta)$.

22) Dada la curva $r = 1 - 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, halla los valores para los que la curva pasa por el origen de coordenadas y después represéntala.

23) Representa gráficamente las curvas $r = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$ y $r^2 = \cos(2\theta)$.

24) Determina los puntos de intersección de las curvas $r = \cos(\theta)$ y $r = \cos(2\theta)$.

25) Halla el dominio y la imagen de $f(x,y) = \dfrac{x+y}{|x+y|}$.

26) Calcula el dominio y la imagen de $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{3+\sqrt{2-x^2}}$ y de $g(x,y,z) = \dfrac{3z}{y^2-x^2}$.

27) Estudia el dominio de la función $f(x,y) = xy\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

28) Determina el dominio de la función $\overline{f}(x,y) = \left(x^2+y^2, \mathrm{sen}(xy), \mathrm{Ln}(x+y)\right)$.

29) Representa gráficamente las curvas de nivel de las $f(x,y)$ y $g(x,y)$, donde $f(x,y) = x^2+y^2$ y $g(x,y) = x+y$.

30) Representa gráficamente las curvas de nivel de la función $f(x,y) = xy$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. CLAGSA.
- Isaías Uña, Jesús San Martín y Venancio Tomeo. *Problemas resueltos de Cálculo en varias variables*. Ed. Paraninfo.
- Saturnino Salas, Einar Hille y Garret Edgen. *Cálculo de varias variables. Volumen II*. 4ª edición. Editorial Reverté.
- Carmen Anido y Martha Saboyá. *Bases matemáticas para el análisis económico*. Grupo Editorial Universitario.