TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	27/06/2023
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 1

Durante un examen de Análisis Matemático I, Alicia utiliza su calculadora para calcular el límite $\lim_{x\to 0}\left((x-1)^{1/3}-1\right)^3$ y obtiene como resultado -8, mientras que Bernardo utiliza otro modelo de calculadora y obtiene como resultado 1. Utilizando números complejos, explica de forma razonada por qué ambas respuestas pueden ser consideradas correctas. ¿Podría ocurrir que una tercera calculadora proporcionara un resultado distinto a 1 y -8?

Solución:

Al sustituir en el límite, tenemos que $\lim_{x\to 0}\left((x-1)^{1/3}-1\right)^3 = \left((-1)^{1/3}-1\right)^3$. Existe más de una respuesta porque $(-1)^{1/3}$ tiene tres valores en el campo de los números complejos.

$$(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = \sqrt[3]{1}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)} = \begin{cases} 1\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1\cdot e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)} = e^{i\pi} = -1 \\ 1\cdot e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Si $(-1)^{1/3} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, ocurre lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left((x-1)^{1/3}-1\right)^3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-1\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$$

Si $(-1)^{1/3} = -1$, ocurre lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left((x-1)^{1/3}-1\right)^3 = \left(-1-1\right)^3 = \left(-2\right)^3 = -8$$

Finalmente, si $(-1)^{1/3} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, ocurre lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left((x-1)^{1/3}-1\right)^3 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-1\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{-i2\pi} = 1$$

Por lo tanto, los únicos valores posibles que podría devolver la calculadora son 1 y -8.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	27/06/2023
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 2

Completa los siguientes apartados sobre integración paramétrica:

a) Calcula la integral $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{x^2+t^2}$ cuando $x > 0$.

b) A partir del resultado anterior, determina $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^2}$ e $I_3 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}$.

Solución:

a) $$\int_0^\infty \frac{dt}{x^2+t^2} = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+(t/x)^2} = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{(1/x)dt}{1+(t/x)^2} = \frac{1}{x}\left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2x}$$

b) Por el resultado del apartado anterior, sabemos que $\displaystyle\int_0^\infty \left(x^2+t^2\right)^{-1} dt = \frac{\pi}{2}x^{-1}$

Derivando la integral paramétrica respecto de x obtenemos lo siguiente:

$$\int_0^\infty -2x\left(x^2+t^2\right)^{-2} dt = -\frac{\pi}{2}x^{-2} \implies \int_0^\infty \left(x^2+t^2\right)^{-2} dt = \frac{\pi}{4}x^{-3}$$

Derivando una vez más respecto de x, llegamos al siguiente resultado:

$$\int_0^\infty -2(2x)\left(x^2+t^2\right)^{-3} dt = \frac{-3\pi}{4}x^{-4} \implies \int_0^\infty \left(x^2+t^2\right)^{-3} dt = \frac{3\pi}{16}x^{-5}$$

Luego las integrales solicitadas son:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{4x^3} \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{(x^2+t^2)^3} = \frac{3\pi}{16x^5}}$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	27/06/2023
CURSO	2º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO	SOLUCIÓN DEL EXAMEN		

PROBLEMA 3

Dada la sucesión de funciones $\{f_n\}$, completa los siguientes apartados:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{1+n^2x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Determina la función límite puntual en todo $\mathbb{R}$.

b) Identifica un intervalo en el que la sucesión funcional sea uniformemente convergente, y otro intervalo en el que la convergencia no sea uniforme.

Solución:

a) Calculamos la función límite puntual cuando $x \neq 0$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 0$$

Por otra parte, cuando $x = 0$ obtenemos $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Por lo tanto, la función límite puntual es $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Para estudiar la convergencia uniforme vamos a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\left\{\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| : x \in [a,b]\right\}\right)$$

Para identificar el valor supremo estudiaremos dónde se encuentran los máximos de $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \Longrightarrow \quad f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^2x(nx)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Igualamos a cero la derivada para obtener los candidatos a máximos y mínimos:

$$f_n'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad n(1-n^2x^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{n}$$

Comprobamos si se trata de un máximo teniendo en cuenta que $f_n''(x) = \dfrac{2x(n^5x^2 - 3n^3)}{(1+n^2x^2)^3}$.

$$\boxed{x = \frac{1}{n}} : \; f_n''\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{4n^2} < 0 \implies \text{máximo en } x = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{n}} : \; f_n''\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n^2} > 0 \implies \text{mínimo en } x = -\frac{1}{n}$$

Puesto que $f_n(x)$ alcanza un máximo en $x = 1/n$, que claramente es un punto del intervalo $[0, 1]$, vamos a estudiar por ejemplo la convergencia en ese intervalo.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup \left\{ \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| : x \in [0,1] \right\} \right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Luego la convergencia <u>no</u> es uniforme en $[0, 1]$.

Por otra parte, como $f_n'(x) = \dfrac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ es una función continua y los únicos puntos en los que se anula son $x = 1/n$ y $x = -1/n$, comprobando que $f_n'(x) < 0$ para todo $x > 1/n$ podemos justificar que $f_n(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{1}{n}, \infty\right)$.

Si tomamos un intervalo $[a, \infty)$ con $a > 1$, al ser $f_n(x)$ una función decreciente en ese intervalo, el máximo de $|f_n(x) - f(x)|$ se dará en $x = a$, con lo que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup \left\{ \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| : x \in [a,\infty) \right\} \right) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{1+a^2n^2} = 0$$

Por ello, podemos afirmar que la convergencia <u>sí</u> es uniforme en $[a, \infty)$ para $a > 1$.

<u>Nota</u>: De forma alternativa, se podría demostrar que la convergencia es uniforme en cualquier intervalo $[a, \infty)$ con $a > 1$ teniendo en cuenta lo siguiente:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| < \left| \frac{nx}{n^2x^2} \right| = \left| \frac{1}{nx} \right| < \frac{1}{n} = \alpha_n$$

Y como $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales positivos que converge a 0, entonces queda demostrado que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cualquier intervalo $[a, \infty)$ cuando se cumple que $a > 1$.

PROBLEMA 4

Dadas las siguientes secuencias reales, identifica una secuencia cuya transformada DFT sea real y otra secuencia cuya transformada DFT sea imaginaria pura y proporciona el cálculo completo de ambas transformadas.

a) $x[n] = [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$.

b) $x[n] = [1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -1]$.

c) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1]$.

d) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$.

Solución:

a) $x[n] = [1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-\frac{2\pi}{8}0n} = \sum_{n=0}^{7} x[n] = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 5$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}1n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[6]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[7]e^{-\frac{7\pi}{4}} =$$

$$= 1 + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(-j) + 1(j) + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}2n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[2]e^{-j\pi}$$

$$+ x[6]e^{-j3\pi} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 1 + 1(-j) + 1(-1) + 1(-1) + 1(j) = -1$$

$$X[3] = \sum_{n=-1}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}3n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{3\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[6]e^{-j\frac{9\pi}{2}} +$$

$$x[7]e^{-j\frac{j21\pi}{4}} = 1 + 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(j) + 1(-j) + 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$X[4] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}4n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\pi n} = x[0] + x[1]e^{-j\pi} + x[2]e^{-j2\pi}$$

$$+ x[6]e^{-j6\pi} + x[7]e^{-j7\pi} = 1 + 1(-1) + 1(1) + 1(1) + 1(-1) = 1$$

Puesto que $x[n]$ es una secuencia real se cumple que $X[k] = X^*[-k] = X^*[N-k]$, por lo que podemos obtener directamente el resto de elementos:

$$X[5] = X^*[-5] = X^*[8-5] = X^*[3] = 1-\sqrt{2}$$

$$X[6] = X^*[-6] = X^*[8-6] = X^*[2] = -1$$

$$X[7] = X^*[-7] = X^*[8-7] = X^*[1] = 1+\sqrt{2}$$

$$x[n] = [1,1,1,0,0,0,1,1] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[K] = [5, 1+\sqrt{2}, -1, 1-\sqrt{2}, 1, 1-\sqrt{2}, -1, 1+\sqrt{2}]$$

Luego claramente la transformada $X[k]$ es una secuencia real.

b) $x[n] = [1,1,0,0,0,0,-1,-1]$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-\frac{2\pi}{8}0n} = \sum_{n=0}^{7} x[n] = 1+1+0+0+0+0-1-1 = 0$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}1n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi}{4}} + x[6]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{4}} =$$

$$= 1 + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1(j) - 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - (1+\sqrt{2})j$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[6]e^{-j3\pi} +$$

$$x[7]e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 1 + 1(-j) - 1(-1) - 1(j) = 2-2j$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}3n} = x[0] + x[1]e^{-j\frac{3\pi}{4}} + x[6]e^{-j\frac{9\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{21\pi}{4}} =$$

$$= 1 + 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1(-j) - 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + (1-\sqrt{2})j$$

$$X[4] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}4n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\pi n} = x[0] + x[1]e^{-j\pi} + x[6]e^{-j6\pi}$$

$$+ x[7]e^{-j7\pi} = 1 + 1(-1) + 11 + 1(-1) = 0$$

$$X[5] = X^*[-5] = X^*[8-5] = X^*[3] = 1-(1-\sqrt{2})j$$

$$X[6] = X^*[-6] = X^*[8-6] = X^*[2] = 2+2j$$

$$X[7] = X^*[-7] = X^*[8-7] = X^*[1] = 1+(1+\sqrt{2})j$$

$$X[k] = [0, 1-(1+\sqrt{2})j, 2-2j, 1+(1-\sqrt{2})j, 0, 1-(1-\sqrt{2})j, 2+2j, 1+(1+\sqrt{2})j]$$

La secuencia trasnformada no es ni real ni imaginaria pura.

c) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1]$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}0n} = \sum_{n=0}^{7} x[n] = 0+1+1+0+0+0-1-1 = 0$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}1n} = x[1]e^{-j\frac{\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[6]e^{-\frac{3\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{4}} =$$

$$= 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(-j) - 1(j) - 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-2-\sqrt{2})j$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{4}2n} = \sum_{n\neq 0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} = x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[2]e^{-j\pi}$$

$$+ x[6]e^{-j3\pi} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 1(-j) + 1(-1) - 1(-1) - 1(j) = -2j$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-\frac{2\pi}{8}3n} = x[1]e^{-j\frac{3\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[6]e^{-j\frac{9\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{21\pi}{4}} =$$

$$= 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(j) - 1(-j) - 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2-\sqrt{2})j$$

$$X[4] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}4n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\pi} = x[1]e^{-j\pi} + x[2]e^{-j2\pi} + x[6]e^{-j6\pi}$$

$$+ x[7]e^{-j7\pi} = 1(-1) + 1(1) - 1(1) - 1(-1) = 0$$

$$X[5] = X^*[8-5] = X^*[3] = -(2-\sqrt{2})j = (-2+\sqrt{2})j$$

$$X[6] = X^*[8-6] = X^*[2] = 2j$$

$$X[7] = X^*[8-7] = X^*[1] = -(-2-\sqrt{2})j = (2+\sqrt{2})j$$

$$x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, -1, -1] \xleftrightarrow{DFT}$$

$$X[k] = [0, (-2-\sqrt{2})j, -2j, (2-\sqrt{2})j, 0, (-2+\sqrt{2})j, 2j, (2+\sqrt{2})j]$$

La secuencia DFT es imaginaria pura.

d) $x[n] = [0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}0n} = \sum_{n=0}^{7} x[n] = 0+1+1+0+0+0+1+1 = 4$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}1n} = x[1]e^{-j\frac{\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[6]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{4}} =$$

$$= 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(-j) + 1(j) + 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$X[2] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} = x[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + x[2]e^{-j\pi}$$

$$+ x[6]e^{-j3\pi} + x[7]e^{-j\frac{7\pi}{2}} = 1(-j) + 1(-1) + 1(-1) + 1(j) = -2$$

$$X[3] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}3n} = x[1]e^{-j\frac{3\pi}{4}} + x[2]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + x[6]e^{-\frac{j9\pi}{2}} + x[7]e^{-j\frac{21\pi}{4}} =$$

$$= 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1(j) + 1(-j) + 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$X[4] = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}4n} = \sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-j\pi n} = x[1]e^{-j\pi} + x[2]e^{-j2\pi}$$

$$+ x[6]e^{-j6\pi} + x[7]e^{-j7\pi} = 1(-1) + 1(1) + 1(1) + 1(-1) = 0$$

$$X[5] = X^*[8-5] = X^*[3] = -\sqrt{2}$$

$$X[6] = X^*[8-6] = X^*[2] = -2$$

$$X[7] = X^*[8-7] = X^*[1] = \sqrt{2}$$

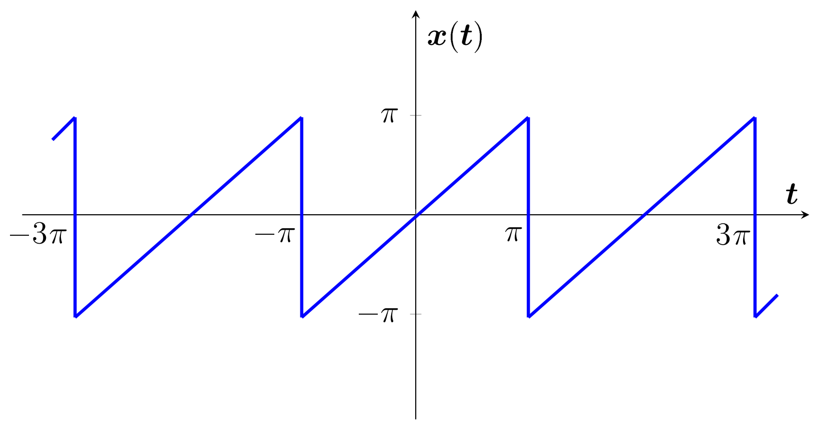
$$x[n] = [0,1,1,0,0,0,1,1] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k] = [4, \sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2, \sqrt{2}]$$

Como se puede apreciar, la secuencia transformada es real.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	27/06/2023	
CURSO	2º	**HORA**	15:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO	**SOLUCIÓN DEL EXAMEN**			

PROBLEMA 5

Obtén la expresión general del desarrollo en serie de Fourier de la señal periódica $x(t)$ mostrada en la imagen (es decir, la expresión general de los coeficientes c_k o de los coeficientes a_k y b_k). A continuación, proporciona los primeros 5 senos/cosenos del desarrollo.



Solución:

$$T_0 = 2\pi \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cos\left(kw_0 t\right)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} u = t & \rightarrow & du = dt \\ dv = \cos(kt)\,dt & \rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen}(kt)}{k} \end{array}\right\} = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\operatorname{sen}(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(kt)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\operatorname{sen}(kt)}{k} + \frac{1}{k^2}\cos(kt)\right]_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{\pi\operatorname{sen}(k\pi)}{\pi k} + \frac{\cos(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{(-\pi)\operatorname{sen}(-k\pi)}{\pi k} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2\pi} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{\pi k^2} = 0$$

Al mismo resultado se podría llegar argumentando que se trata de la integral de una función impar en un intervalo de integración simétrico respecto al origen.

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\,\operatorname{sen}(kw_0t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\operatorname{sen}(kt)dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{lll} u = t & \rightarrow & du = dt \\ dv = \operatorname{sen}(kt)dt & \rightarrow & v = \dfrac{-\cos(kt)}{k} \end{array}\right\} = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(kt)}{k} + \frac{\operatorname{sen}(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{-\pi\cos(k\pi)}{\pi k} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{\pi\cos(-k\pi)}{\pi k} - \frac{\operatorname{sen}(-k\pi)}{\pi k^2} =$$

$$= \frac{-\cos(k\pi)}{k} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{\pi k^2} = -\frac{2\cos(k\pi)}{k} + \frac{2\operatorname{sen}(\pi k)}{\pi k^2} =$$

$$= -\frac{2\cos(k\pi)}{k} = \left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{2}{k}, & \text{si } \cos(k\pi) = 1 & \Longrightarrow k \text{ es par} \\ \dfrac{2}{k}, & \text{si } \cos(k\pi) = -1 & \Longrightarrow k \text{ es impar} \end{array}\right\} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

El desarrollo en serie de Fourier a partir de los coeficientes a_k y b_k quedaría tal como se muestra a continuación:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n\cos(kw_0t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(kw_0t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(kt) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2\cos(k\pi)}{k}\operatorname{sen}(kt) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\operatorname{sen}(kt)}{k}$$

Los primeros 5 senos y cosenos del desarrollo son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \approx \frac{2}{1}\operatorname{sen}(t) - \frac{2}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{2}{4}\operatorname{sen}(4t) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}(5t) = \\ \quad = 2\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(2t) + \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4t) + \frac{2}{5}\operatorname{sen}(5t) \end{array}}$$