Análisis Matemático II

Tema 5

Teorema de la función implícita y de la función inversa

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Funciones implícitas

Al trabajar con funciones de varias variables, hay ocasiones en las que es posible aislar una de las variables, dando lugar a expresiones como por ejemplo $z = f(x,y)$, y casos en los que sin embargo no es posible (o sencillo) realizar esa tarea y debemos conformarnos con expresiones del tipo $F(x,y,z) = 0$.

Ejercicio 1

Aísla una de las variables en las expresiones dadas por las funciones $F_1(x,y,z) = xyz - 1$ y $F_2(x,y,z) = x\cos(y)\sqrt{z} + \mathrm{Ln}(x)y^2\,\mathrm{sen}(z) - \tan(x)\mathrm{Ln}(y)z$.

Incluso cuando no sea fácil o posible obtener una relación explícita entre una variable y el resto de variables, puede que sea necesario utilizar el valor de la derivada de la función implícita en un cierto punto. Por ejemplo, aunque dada la relación inicial $F(x,y) = 0$ no podamos determinar la función $y = f(x)$ que relaciona las dos variables, nos puede interesar obtener la derivada $f'(x)$ en un cierto punto. Un ejemplo de aplicación sería conocer la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de su gráfica cuando la expresión de la curva es del tipo $F(x,y) = 0$ (aunque para obtener la pendiente también se podrían utilizar otros métodos).

En el caso más general, el objetivo consistiría en obtener la derivada respecto de la variable x_i de una función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde la relación entre la variable y y el resto de variables vendría dada por la expresión $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$. El teorema de la **función implícita** proporciona las condiciones para poder obtener dicha derivada.

Teorema de la función implícita

Dada la relación $F(\overline{x}, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $F(\overline{a}, b) = 0$.

2) $F(\overline{x}, y)$ es diferenciable (y por ello continua) en un entorno de $(\overline{a}, b) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$.

3) $F_y(\overline{x}, y)$ existe y no se anula en $(\overline{a}, b)$.

En estas condiciones, $F(\overline{x}, y)$ define implícitamente a y como función $y = f(\overline{x})$ en un entorno del punto $(\overline{a}, b)$, de modo que las derivadas parciales de primer orden de $f(\overline{x})$ se pueden calcular de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}(\overline{x}, y)}{F_y(\overline{x}, y)}$$

Ejercicio 2

Dada la expresión $x^2y^2 + 6x^2y + 5y^3 + 3x^2 - 12 = 0$, determina si se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de la función implícita en el punto $(2,0)$ y, si es el caso, calcular $f'(x)$, donde $y = f(x)$.

2 Función inversa

Dada una función $\overline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde $\text{Im}(\overline{f}) = B \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $\overline{f}$ es **globalmente invertible** si existe una función $\overline{g} : B \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{f} \circ \overline{g} = id_A$ y $\overline{g} \circ \overline{f} = id_B$, con lo que $\forall \overline{x} \in A\ (\overline{g} \circ \overline{f})(\overline{x}) = \overline{x}$ y $\forall \overline{y} \in B\ (\overline{f} \circ \overline{g})(\overline{y}) = \overline{y}$.

Ejercicio 3

Si a es un número real positivo distinto de 1 y A es el conjunto de los números reales positivos, determina la función inversa global de $f(x) = a^x$.

Toda función vectorial que sea un automorfismo tiene inversa, y si A es la matriz asociada al automorfismo $\overline{f}$, entonces A^{-1} es la matriz asociada al automorfismo inverso.

Ejercicio 4

Determina la función inversa global de la función vectorial de variable vectorial definida como $\overline{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

Por otra parte, la existencia de la función inversa también se puede estudiar desde un punto de vista local, no global. En este sentido, el teorema de la **función inversa** proporciona las condiciones suficientes para que una función $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tenga inversa $\overline{f}^{-1}$ en un entorno de un punto de $\mathbb{R}^n$ y la forma de calcular las derivadas parciales de $\overline{f}^{-1}$ sin llegar a conocer su expresión explícita.

Teorema de la función inversa

Dadas dos funciones $\overline{f}, \overline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se considera que $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x}) = (f_1(\overline{x})), f_2(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x}))$ y $\overline{x} = \overline{g}(\overline{y}) = (g_1(\overline{y})), g_2(\overline{y}), \ldots, g_n(\overline{y}))$, donde

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x_1 = g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\}$$

Si $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n$, es necesario comprobar que se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $\overline{f}(\overline{a}) = \overline{b}$.

2) $f(\overline{x})$ es diferenciable (y por ello continua) en un entorno del punto $\overline{x} = \overline{a}$.

3) El jacobiano no se anula en $\overline{x} = \overline{a}$, es decir, $\left|J_{\overline{f}}(\overline{a})\right| \neq 0$.

En ese caso, existe un entorno $A \subset \mathbb{R}^n$ del punto $\overline{a}$, un entorno $B \subset \mathbb{R}^n$ del punto $\overline{b}$ y una función $\overline{g}$ que actúa como función inversa de $\overline{f}$, de forma que se cumple lo siguiente:

1) La función $\overline{g}(\overline{y}) = \left(\overline{f}\right)^{-1}(\overline{y})$ es diferenciable, con lo que sus derivadas parciales $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$ son continuas $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ en $\overline{y} = \overline{b}$.

2) $J_{\overline{g}}(\overline{y}) = \left(J_{\overline{f}}(\overline{x})\right)^{-1}$ y $\left|J_{\overline{g}}(\overline{y})\right| = \dfrac{1}{\left|J_{\overline{f}}(\overline{x})\right|}$ para todo $\overline{x} \in A$ e $\overline{y} \in B$.

3 Problemas

1) Analiza si la ecuación $x^2 + y^2 - 2 = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno del punto $(1,1)$ y obtén el valor de $y'(1)$ e $y''(1)$.

2) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y^3 + x^3 = 6xy$ en el punto $(3,3)$.

3) Dada la ecuación $xy + x + \mathrm{Ln}(y) = 0$, determina si la ecuación define implícitamente a y en función de x en un entorno del punto $(0,1)$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada por la ecuación en el punto $(0,1)$.

4) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ en el punto $(1,1)$.

5) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay$, siendo el parámetro a un número real. ¿Para qué valores de a la ecuación $h(x,y) = 0$ define y como función implícita de x en un entorno de $(0,0)$? ¿Define la anterior ecuación a x como función implícita diferenciable de y en un entorno de $(0,0)$ para algún valor de a?

6) Dada la función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x,y) = 1 - \mathrm{Ln}\left(1 + \frac{1}{e^{xy}}\right) = 0$, calcula las dos primeras derivadas de $f(x)$ en un punto (a,b) cualquiera tal que $a \neq 0$ y $F(a,b) = 0$.

7) Dadas $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 2\}$ y $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 = 2\}$, representa gráficamente las dos circunferencias e indica en qué punto sus gráficas son tangentes. A continuación, demuestra que efectivamente son tangentes en ese punto utilizando en el proceso el teorema de la función implícita, justificando adecuadamente su utilización.

8) Dada la ecuación $F(x,y,z) = 2x + 3y - xe^{x+y-2z} - 8 = 0$, determina si dicha expresión define implícitamente a z como función de x e y en un entorno del punto $(-1,3,1)$ y, en caso afirmativo, calcula las derivadas parciales de esa función $z = f(x,y)$ en el punto $(-1,3)$.

9) Dada la ecuación $yze^{x+3} + 3xe^{z-y} = 0$, demuestra que la ecuación anterior define a $z = z(x,y)$ como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1,-1,3)$ y calcula las derivadas parciales $z_x(x,y)$ y $z_y(x,y)$ asociadas a la función implícita $z = z(x,y)$ en el punto $(1,-1)$.

10) Demuestra que la ecuación $1 + x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ define implícitamente una función $z = f(x,y)$ en un entorno de cualquier punto que satisfaga la ecuación y a continuación calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y dz.

11) Calcula $\frac{\partial z}{\partial x}$, donde $z = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^3 + y = 0$.

12) Demuestra que la ecuación $z^3 + xz + y = 0$ define implícitamente una función $z = f(x,y)$ diferenciable en un entorno de $(1,-2)$ y halla en ese punto el gradiente y la matriz hessiana.

13) Dada la ecuación $z^2 + z - xy = 1$, demuestra que la ecuación anterior define a $z = f(x,y)$ como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1,1,1)$ y calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de $z(x,y)$ desarrollado a partir del punto $(1,1)$.

14) Obtén el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $\cos\left(z\frac{\pi}{2}\right) = xy - x - y + z^2$ en el punto $(1, 1, 1)$.

15) Dada la función vectorial $\overline{f}(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$, demuestra que $\overline{f}$ es localmente invertible en cualquier punto, halla la matriz jacobiana de $\overline{f}^{-1}$ y por último determina $\overline{f}^{-1}$ de forma explícita.

16) ¿Existe inversa local en algún punto para $\overline{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big) = \left(\frac{x}{y}, \frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}\right)$?

17) Sea la función vectorial $\overline{f} = \big(e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y)\big)$.

a) Demuestra que para todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la función $\overline{f}$ tiene inversa definida en un entorno del punto $\overline{f}(x, y)$.

b) Demuestra que $\overline{f}$ no es inyectiva. ¿Contradice esto el teorema de la función inversa?

18) Determina los valores de α para que $\overline{f}(x, y) = (x + \alpha y, e^x + \alpha e^y)$ sea localmente invertible.

19) Sea $\overline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $\overline{f}(x, y, z) = (e^x, \operatorname{sen}(x + y), e^z)$.

a) Demuestra que $\overline{f}$ es localmente invertible en $(0, 0, 0)$.

b) Prueba que existen puntos de $\mathbb{R}^3$ donde no se cumplen las hipótesis del teorema de la función inversa.

20) Dada la función vectorial de variable vectorial $\overline{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, identifica en qué puntos puede aplicarse el teorema de la función inversa y determina la expresión del jacobiano de la función inversa $\overline{g}(u, v) = (x, y)$ para esos puntos. ¿Es la función inyectiva desde un punto de vista global?

21) Dada la función $\overline{f}(x, y) = (x \cos(y), \operatorname{sen}(x - y))$, demuestra que la función $\overline{f}(x, y)$ tiene inversa local $\overline{g}(u, v)$ en un entorno del punto $(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y calcula la matriz jacobiana de $\overline{g}(u, v)$ en el punto $(u, v) = (0, 0)$. ¿Qué valor tiene el jacobiano de $\overline{g}(u, v)$ en ese punto?

22) Dada la función $\overline{f}(x, y, z) = \big(x + xyz, 2y + xy, z + 2x + 3z^2\big)$, demuestra que admite una inversa local $\overline{g}$ en un entorno del punto $(0, 1, 0) \in \operatorname{Dom}(\overline{f})$ y calcula la matriz jacobiana asociada a la función $\overline{g}$ en el punto $(0, 2, 0) \in \operatorname{Dom}(\overline{g})$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alfonsa García, Antonio López, Gerardo Rodríguez, Sixto Romero y Agustín de la Villa. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. CLAGSA.
- Isaías Uña, Jesús San Martín y Venancio Tomeo. *Problemas resueltos de Cálculo en varias variables*. Ed. Paraninfo.
- Saturnino Salas, Einar Hille y Garret Edgen. *Cálculo de varias variables. Volumen II*. 4ª edición. Editorial Reverté.
- Carmen Anido y Martha Saboyá. *Bases matemáticas para el análisis económico*. Grupo Editorial Universitario.
- Fernando Bombal, Luis Rodríguez y Gabriel Vera. *Problemas de análisis matemático. Tomo 2*. Editorial AC.
- Fernando Revilla. *Problemas de análisis real y complejo*. `http://fernandorevilla.es`.
- LibreTexts. Calculus. `https://math.libretexts.org`.