Geometría Lineal

Tema 3

Isometrías vectoriales

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 2.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Espacios vectoriales **1**
1.1 Definición 1
1.2 Propiedades derivadas 1
1.3 Subespacios vectoriales 2
1.4 Espacio vectorial euclídeo 2
1.5 Espacio vectorial normado 3
1.6 Base de un espacio vectorial 3
1.7 Ortogonalidad 3
2 Aplicaciones lineales **5**
2.1 Definición 5
2.2 Clasificación de aplicaciones lineales 5
2.3 Propiedades de las aplicaciones lineales 5
2.4 Matriz de una aplicación lineal 6
3 Forma canónica de Jordan **6**
3.1 Diagonalización por semejanza de matrices cuadradas 6
3.2 Autovalores y autovectores 6
3.3 Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización de una matriz 7
3.4 Matrices no diagonalizables 7
4 Isometrías vectoriales **8**
4.1 Definición 8
4.2 Matriz de una isometría 8
4.3 Vectores fijos y subespacios invariantes por una isometría 9
5 Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^2$ **9**
5.1 Tipo 1 (identidad) 9
5.2 Tipo 2 (simetría respecto de recta) 10
5.3 Tipo 3 (giro) 10
5.4 Tipo 4 (simetría respecto del origen) 10
5.5 Resumen 10

6 Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^3$ **11**

6.1 Tipo 1 (identidad) 11

6.2 Tipo 2 (simetría respecto de plano) 11

6.3 Tipo 3 (simetría respecto de recta) 11

6.4 Tipo 4 (giro respecto de recta) 11

6.5 Tipo 5 (composición de giro y simetría) 12

6.6 Tipo 6 (simetría respecto del origen) 12

6.7 Resumen 12

7 Problemas **12**

1 Espacios vectoriales

1.1 Definición

Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo K es un trío $(V,+,\cdot)$ formado por un conjunto V, una operación interna sobre V y otra externa sobre V de la forma

$$\begin{array}{rccc} +: & V\times V & \longrightarrow & V \\ & (\overline{u},\overline{v}) & \longrightarrow & \overline{u}+\overline{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} *: & K\times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda,\overline{u}) & \longrightarrow & \lambda*\overline{u} \end{array}$$

que verifican las siguientes propiedades:

0) La operación $+$ es ley de composición interna y la operación $*$ es ley de composición externa.

1) $\forall\,\overline{u},\overline{v},\overline{w}\in V \quad (\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})\in V$ (Propiedad asociativa)

2) $\forall\,\overline{u},\overline{v}\in V \quad \overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}\in V$ (Propiedad conmutativa)

3) $\exists\,\overline{0}\in V \quad | \quad \overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$ (Elemento neutro de la operación $+$, denominado vector nulo)

4) $\forall\,\overline{u}\in V \quad \exists\,(-\overline{u})\in V \quad | \quad \overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$ (Elemento opuesto o simétrico)

5) $\forall\,\overline{u},\overline{v}\in V,\ \forall\,\lambda\in K \quad \lambda*(\overline{u}+\overline{v})=\lambda*\overline{u}+\lambda*\overline{v}$ (Distributiva respecto a la suma de vectores)

6) $\forall\,\overline{u}\in V,\ \forall\,\lambda,\mu\in K \quad (\lambda+\mu)*\overline{u}=\lambda*\overline{u}+\mu*\overline{u}$ (Distributiva respecto a la suma de escalares)

7) $\forall\,\overline{u}\in V,\ \forall\,\lambda,\mu\in K \quad \lambda*(\mu*\overline{u})=(\lambda\mu)*\overline{u}$ (Propiedad asociativa mixta)

8) $\exists\,1\in K \quad | \quad \forall\,\overline{u}\in V \quad 1*\overline{u}=\overline{u}$ (Elemento neutro de la operación $\cdot$)

Las propiedades 1-4 se pueden resumir diciendo que $(V,+)$ es un grupo conmutativo. Los otros cuatro requisitos regulan el modo de actuar de los escalares del cuerpo K sobre el grupo $(V,+)$.

Los elementos de K se suelen representar mediante minúsculas griegas y reciben el nombre de **escalares**. Normalmente $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$. Si $K=\mathbb{R}$, se trata de un espacio vectorial real. Si por el contrario $K=\mathbb{C}$, nos encontramos ante un espacio vectorial complejo.

A los elementos de V, representados normalmente mediante minúsculas ordinarias con subrayado alto, se les denomina **vectores**.

A la operación interna $+$ se la llama **suma de vectores** y a la operación $\cdot$ se la denomina **producto externo** o **producto por un escalar**.

Cuando hablemos del espacio vectorial V nos referiremos a un trío $(V,+,*)$, cuyas operaciones supondremos conocidas. A veces se utiliza la expresión "sea V un K-e.v." para abreviar.

1.2 Propiedades derivadas

Por ser $(V,+)$ un grupo, se verifica que el vector nulo $\overline{0}$ es único y que cada vector $\overline{u}$ tiene un solo opuesto denotado como $-\overline{u}$. Otras consecuencias de los requisitos que definen los espacios vectoriales son:

1) $\lambda*\overline{0}=\overline{0}$

2) $0*\overline{u}=\overline{0}$

3) $\lambda * \overline{u} = \overline{0} \implies \lambda = 0$ o $\overline{u} = \overline{0}$

4) $\lambda * \overline{u} = \mu * \overline{u}$ y $\overline{u} \neq \overline{0} \implies \lambda = \mu$

5) $\lambda * \overline{u} = \lambda * \overline{v}$ y $\lambda \neq 0 \implies \overline{u} = \overline{v}$

6) $(-\lambda) * \overline{u} = \lambda * (-\overline{u}) = -\lambda * \overline{u}$

1.3 Subespacios vectoriales

Se llaman **subespacios** de un espacio vectorial V a aquellos subconjuntos de V que son, a su vez, espacios vectoriales respecto de las mismas operaciones de V.

Sea V un espacio vectorial sobre K y sea S un subconjunto no vacío de V ($S \subset V$). Se dice que S es un subespacio vectorial de V si las operaciones de V son, también, operaciones para S y, con ellas, S es a su vez un espacio vectorial sobre K.

Para demostrar que S es un subespacio vectorial de V no es necesario demostrar todas las propiedades de los espacios vectoriales. Es suficiente con demostrar que la operación interna $+$ y la operación externa $\cdot$ son también operaciones respecto del subespacio (para lo que se dice que S es cerrado para las operaciones de V). Es decir, únicamente es necesario comprobar las siguientes propiedades:

(sev1) $\forall \overline{u}, \overline{v} \in S \quad \overline{u} + \overline{v} \in S$

(sev2) $\forall \lambda \in K,\ \forall \overline{u} \in S \quad \lambda * \overline{u} \in S$

En la práctica, estas dos propiedades se pueden sustituir por la siguiente propiedad:

(sev-1) $\forall \overline{u}, \overline{v} \in S,\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \lambda * \overline{u} + \mu * \overline{v} \in S$

Un espacio vectorial V tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto $O = \{\overline{0}\}$, formado solo por el vector nulo, que se llama subespacio nulo o subespacio trivial. El propio espacio V es igualmente un subespacio de sí mismo, puesto que $V \subset V$. Los demás subespacios de V, distintos de V y O, se llaman subespacios propios. El vector nulo $\overline{0}$ pertenece a todos los subespacios de V.

Los subespacios pueden quedar definidos mediante ecuaciones cartesianas (también llamadas ecuaciones implícitas), o mediante ecuaciones paramétricas.

1.4 Espacio vectorial euclídeo

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define **producto escalar** como la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\overline{x}, \overline{y}) & \longrightarrow & \overline{x} \cdot \overline{y} \end{array}$$

que cumple las siguientes características:

1) $\forall\ \overline{x} \in V,\ \overline{x} \cdot \overline{x} \geqslant 0.$

2) Dado $\overline{x} \in V$, $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{0}$.

3) $\forall\ \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x} \in \mathbb{R}$

4) $\forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V,\ \overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$

5) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(\overline{x} \cdot \overline{y}) = (\lambda * \overline{x}) \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot (\lambda * \overline{y})$

Se llama **espacio vectorial euclídeo** a todo espacio vectorial $(V, +, *)$ dotado de un producto escalar. En ocasiones, el producto escalar se representa también como $< \overline{x}, \overline{y} >$.

1.5 Espacio vectorial normado

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define **norma** de un vector como la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \overline{x} & \longrightarrow & \|\overline{x}\| \end{array}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, \overline{x} \in V,\ \|\overline{x}\| \geqslant 0$.

2) Dado $\overline{x} \in V$, $\|\overline{x}\| = 0$ si y solo si $\overline{x} = \overline{0}$.

3) $\forall\, \overline{x} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda * \overline{x}\| = \|\lambda\|\,\|\overline{x}\|$.

4) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ \|\overline{x} + \overline{y}\| \leqslant \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (desigualdad triangular o de Minkowski).

5) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V,\ |\overline{x} \cdot \overline{y}| \leqslant |\overline{x}||\overline{y}|$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Se llama **espacio vectorial normado** a todo espacio vectorial $(V, +, *)$ dotado de una norma. Todo espacio vectorial euclídeo es también un espacio vectorial normado con la norma inducida por el producto escalar, que es $\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$, y que coincide con la longitud de ese vector. En el espacio vectorial ($\mathbb{R}$,+,$*$), la norma coincide con el valor absoluto.

1.6 Base de un espacio vectorial

Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, se dice que el espacio vectorial es de tipo finito si está generado por un número finito de vectores. Es decir, si en V existe algún sistema de vectores $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_p\}$ tal que $V = \mathcal{L}(S)$.

Si V es de tipo finito, se dice que un sistema de vectores $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ es una **base** de V si verifica una cualquiera de las dos condiciones siguientes, que son equivalentes entre sí:

- B es un sistema generador de V que, además, es linealmente independiente.
- Todo vector de V se puede expresar de una sola manera como combinación lineal de los vectores de B.

1.7 Ortogonalidad

Dos vectores $\overline{u}, \overline{v} \in V$ son **ortogonales** cuando se cumple que $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$.

Un vector $\overline{u} \in V$ es ortogonal a un subespacio vectorial S de V si y solo si $\overline{u} \cdot \overline{x} = 0$ para todo $\overline{x} \in S$, lo que en la práctica implica que $\overline{u}$ es ortogonal a los vectores de una base de S.

Dos subespacios S_1 y S_2 de V son ortogonales cuando $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$ para todo $\overline{x} \in S_1$ y todo $\overline{y} \in S_2$. Para ello, es necesario y suficiente que los vectores de una base de S_1 sean ortogonales a los vectores de una base de S_2.

Si S es un subespacio de V de dimensión $k < n$, siendo n la dimensión de V, entonces se representa como $S^{\perp}$ al conjunto de vectores de V que son ortogonales a todos los vectores de S. Dicho conjunto tiene estructura de subespacio, y se le denomina **subespacio ortogonal** o **complemento ortogonal** de S.

$$S^{\perp} = \{\overline{x} \in V \mid \overline{x} \cdot \overline{y} = 0 \quad \forall \overline{y} \in S\}$$

Los subespacios S y $S^{\perp}$ son suplementarios, por lo que se cumple lo siguiente:

$$S \oplus S^{\perp} = V \implies \begin{cases} S + S^{\perp} = V \\ S \cap S^{\perp} = \varnothing \end{cases} \qquad \dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(V)$$

Se dice que una **base** $B = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\}$ es **ortogonal** si sus componentes son ortogonales; es decir, si $\overline{e_i} \cdot \overline{e_j} = 0$ para todo $i \neq j$, donde $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Por otra parte, se dice que una **base** B es **ortonormal** si es una base ortogonal de vectores unitarios; es decir, si además de ser una base ortogonal, se cumple que $\overline{e_i} \cdot \overline{e_i} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

El **método de ortogonalización Gram-Schmidt** permite obtener una base ortogonal a partir de una base cualquiera $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$:

$$\begin{aligned}
\overline{w}_1 &= \overline{v}_1 \\
\overline{w}_2 &= \overline{v}_2 - \left(\frac{\overline{v}_2 \cdot \overline{w}_1}{\overline{w}_1 \cdot \overline{w}_1}\right)\overline{w}_1 \\
\overline{w}_3 &= \overline{v}_3 - \left(\frac{\overline{v}_3 \cdot \overline{w}_1}{\overline{w}_1 \cdot \overline{w}_1}\right)\overline{w}_1 - \left(\frac{\overline{v}_3 \cdot \overline{w}_2}{\overline{w}_2 \cdot \overline{w}_2}\right)\overline{w}_2 \\
&\vdots \\
\overline{w}_n &= \overline{v}_n - \left(\frac{\overline{v}_n \cdot \overline{w}_1}{\overline{w}_1 \cdot \overline{w}_1}\right)\overline{w}_1 - \left(\frac{\overline{v}_n \cdot \overline{w}_2}{\overline{w}_2 \cdot \overline{w}_2}\right)\overline{w}_2 - \cdots - \left(\frac{\overline{v}_n \cdot \overline{w}_{n-1}}{\overline{w}_{n-1} \cdot \overline{w}_{n-1}}\right)\overline{w}_{n-1}
\end{aligned}$$

Si lo que se desea es obtener una base ortonormal, entonces el resultado sería:

$$B_N = \left\{\frac{\overline{w}_1}{\|\overline{w}_1\|}, \frac{\overline{w}_2}{\|\overline{w}_2\|}, \frac{\overline{w}_3}{\|\overline{w}_3\|}, \ldots, \frac{\overline{w}_n}{\|\overline{w}_n\|}\right\}$$

En comparación, se dice que una matriz cuadrada A es una **matriz ortogonal** cuando sus columnas forman una base ortonormal, con lo que se cumple que $AA^t = I$.

Dada una base cualquiera $B = \{\overline{v}_1, \ldots \overline{v}_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo, la **matriz del producto escalar** (también conocida como la **matriz de Gram**) en la base B tiene la siguiente forma:

$$G_B = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_n \\ \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{v}_n \cdot \overline{v}_1 & \overline{v}_n \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \cdot \overline{v}_n \end{pmatrix}$$

2 Aplicaciones lineales

2.1 Definición

Dados dos espacios vectoriales V y W, definidos ambos sobre el mismo cuerpo de escalares K, y una aplicación $f: V \longrightarrow W$, se dice que f es un **homomorfismo** o **aplicación lineal** si cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, \overline{u}, \overline{v} \in V \quad f(\overline{u}+\overline{v}) = f(\overline{u}) + f(\overline{v})$

2) $\forall\, \overline{u} \in V,\ \forall \lambda \in K \quad f(\lambda * \overline{u}) = \lambda * f(\overline{u})$

Las dos condiciones anteriores son equivalentes a la siguiente:

1) $\forall\, \overline{u}, \overline{v} \in V,\ \ \forall \lambda, \mu \in K \quad f(\lambda * \overline{u} + \mu * \overline{v}) = \lambda * f(\overline{u}) + \mu * f(\overline{v})$

Ejemplo 1

Las aplicaciones $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $f(x,y,z) = (3x - y + z, x + y - 2z)$ y $g\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{12}, a_{21} - a_{11}, a_{22} + a_{21})$, son lineales.

2.2 Clasificación de aplicaciones lineales

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ se dice que es un **monomorfismo** si es inyectiva.

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ se dice que es un **epimorfismo** si es sobreyectiva.

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ se dice que es un **isomorfismo** si es biyectiva.

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow F$ se dice que es un **endomorfismo** si $E = F$. Es decir, un endomorfismo es una aplicación lineal $f: E \longrightarrow E$.

Una aplicación lineal $f: E \longrightarrow E$ biyectiva se dice que es un **automorfismo**. Es decir, un automorfismo es un endomorfismo biyectivo.

2.3 Propiedades de las aplicaciones lineales

Para cualquier aplicación lineal $f: V \longrightarrow W$ se verifican las siguientes propiedades:

1) $f(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$

2) $f(-\overline{v}) = -f(\overline{v})$

3) Si dos vectores $\overline{u}, \overline{v} \in V$ son linealmente dependientes, entonces sus imágenes $f(\overline{u}), f(\overline{v}) \in W$ también son linealmente dependientes.

4) Si dos vectores $\overline{u}, \overline{v} \in V$ son linealmente independientes, entonces sus imágenes $f(\overline{u}), f(\overline{v}) \in W$ pueden no ser linealmente independientes.

5) Si A es subespacio vectorial de V, el conjunto $f(A) = \{f(\overline{a}) \in W \mid \overline{a} \in A\}$ es un subespacio de W.

6) Si B es subespacio vectorial de W, el conjunto $f^{-1}(B) = \{\overline{a} \in V \mid f(\overline{a}) \in B\}$ es subespacio de V.

7) Si S es sistema generador del subespacio $A \subset V$, entonces $f(S)$ es sistema generador de $f(A)$.

2.4 Matriz de una aplicación lineal

Para especificar una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ se puede determinar una ley de formación que transforme los elementos $\overline{v} \in V$ en sus imágenes $f(\overline{v}) \in W$ o, alternativamente, se pueden utilizar las imágenes en W de una base de V.

Sean V y W dos espacios vectoriales, y sean $B_V = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ y $B_W = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m\}$ unas bases de V y W respectivamente. Considérense dos vectores $\overline{x} \in V$ e $\overline{y} \in W$, cuyas coordenadas respectivas en función de las bases B_V y B_W son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Se llama **matriz de la aplicación lineal** $f : V \longrightarrow W$ a la matriz $A = [a_{ij}]$ que cumple la siguiente relación:

$$AX = Y \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz A son las coordenadas de las imágenes $f(\overline{v}_j)$ en función de los elementos de la base B_W. En resumen, una aplicación lineal queda completamente determinada si se conocen las imágenes en W de los elementos de una base de V. Adicionalmente, se puede afirmar que el rango de la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es igual al rango de la matriz asociada A.

Si los espacios vectoriales V y W tienen la misma dimensión, la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si y solo si la matriz asociada es regular. Si f es un endomorfismo y B es la base del espacio vectorial V, entonces se utiliza la expresión $A = M_B(f)$ para indicar que A es la matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \to V$ utilizando la base B.

3 Forma canónica de Jordan

3.1 Diagonalización por semejanza de matrices cuadradas

Diagonalizar por semejanza una matriz A consiste en encontrar una matriz P, denominada **matriz de paso**, y una matriz D, conocida como **matriz diagonal**, tal que:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad P \cdot D = A \cdot P$$

La matriz P de paso está formada por autovectores, mientras que la matriz diagonal D está compuesta por autovalores.

3.2 Autovalores y autovectores

En el ámbito del endomorfismo $f : V \longrightarrow V$, un vector $\overline{x} \in V$ (siendo $\overline{x} \neq 0$) es un **vector propio** o **autovector** del endomorfismo f si existe algún escalar λ, denominado **valor propio** o **autovalor**, tal que $f(\overline{x}) = \lambda * \overline{x}$.

Dada una matriz A cuadrada de orden n, se dice que un escalar λ del cuerpo K es un autovalor si existe un vector columna X distinto de cero (el autovector), tal que se cumple que $A \cdot X = \lambda \cdot X$. El conjunto de los vectores propios asociados al mismo autovalor λ constituye por sí mismo un subespacio vectorial del espacio vectorial V, y se calcula a partir del propio dato λ.

Se llama **polinomio característico** a la expresión $|A - \lambda \cdot I|$. Si la matriz A tiene orden n, entonces el polinomio característico tendrá grado n. Por otra parte, se denomina **ecuación característica** a la igualdad $|A - \lambda \cdot I| = 0$.

Los autovalores son las soluciones de la ecuación característica o, expresado de manera equivalente, las raíces del polinomio característico. En cuanto a los autovectores, estos se calculan a partir de la expresión $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = O$, sin más que particularizar para el valor λ concreto.

3.3 Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización de una matriz

Cualquiera de las siguientes condiciones implican que la matriz A es diagonalizable:

1) Existe una base de V formada por vectores propios.
2) Para todo i, se cumple que $\mathrm{rango}(A - \lambda_i I) = n - \alpha_i$, siendo α_i la **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i.
3) La dimensión del subespacio vectorial asociado a cada autovalor (su **multiplicidad geométrica**) es igual a la multiplicidad algebraica de dicho autovalor.

3.4 Matrices no diagonalizables

En el caso de una matriz no diagonalizable, es posible llegar a una relación equivalente a la vista anteriormente, y que utiliza lo que se conoce como la **forma canónica de Jordan**.

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} \qquad P \cdot J = A \cdot P$$

Las matrices de Jordan están formadas por lo que se denomina bloques de Jordan a lo largo de su diagonal principal (es decir, los elementos de la diagonal principal de la matriz de Jordan deben coincidir con los elementos de la diagonal principal de los bloques de Jordan).

Un bloque de Jordan de tamaño m asociado al autovalor λ es una matriz $J_m(\lambda)$ que donde la diagona principal contiene el valor λ en todas sus posiciones, la diagonal por encima de la diagonal principal está formada por unos y el resto de posiciones tienen el valor cero.

$$J_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como ejemplo, a continuación se muestra una posible matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(5) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4 Isometrías vectoriales

4.1 Definición

Sean $(V,\cdot)$ y $(W,\odot)$ dos espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación lineal $f : V \to W$ es una **isometría vectorial** (también llamada **transformación ortogonal**) si cumple lo siguiente para todo par de vectores $\overline{x}, \overline{y} \in V$:

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = f(\overline{x}) \odot f(\overline{y})$$

Las isometrías tienen las siguientes propiedades:

1) Las isometrías conservan la norma: $\|\overline{v}\| = \|f(\overline{v})\|$.
2) Las isometrías conservan el ángulo entre vectores: $\angle\big(\overline{x}, \overline{y}\big) = \angle\big(f(\overline{x}), f(\overline{y})\big)$.
3) Las isometrías son inyectivas: $\mathrm{Ker}(f) = \{\overline{0}_V\}$.
4) Si los espacios vectoriales $(V,\cdot)$ y $(W,\odot)$ tienen la misma dimensión, entonces la isometría $f : V \to W$ es biyectiva, con lo que f es un isomorfismo.
5) Las isometrías transforman toda base ortonormal $B_{N_V} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ en otra base ortonormal $B_{N_W} = \{f(\overline{v}_1), f(\overline{v}_2), \ldots, f(\overline{v}_n)\}$.
6) La composición de dos isometrías es a su vez una isometría.
7) La inversa de una isometría (que existe, al ser toda isometría de un espacio en sí mismo una aplicación biyectiva) también es una isometría.

Por ello, dados dos espacios vectoriales euclídeos $(V,\cdot)$ y $(W,\odot)$ y una aplicación $f : V \to W$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es una isometría vectorial.
b) f conserva el producto escalar.
c) f es lineal y conserva la norma.

4.2 Matriz de una isometría

Dado un endomorfismo f en un espacio vectorial euclídeo $(V,\cdot)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f es una isometría de V.
2) Si B_N es una base ortonormal de V y $A = M_{B_N}(f)$, entonces A es una matriz ortogonal, por lo que $AA^t = I$.
3) f transforma una base ortonormal de V en otra base ortonormal de V.
4) Dada una base cualquiera B de V, si $A = M_B(f)$ y G_B es la matriz del producto escalar en dicha base, entonces $G_B = A^t G_B A$.

Debido a su naturaleza, los autovalores de una isometría solo pueden ser números reales o complejos cuyo módulo sea la unidad.

Por último, se dice que una isometría es **propia** o **directa** si $|M_B(f)| = 1$, mientras que es **impropia** o **inversa** o **indirecta** si $|M_B(f)| = -1$.

4.3 Vectores fijos y subespacios invariantes por una isometría

Dada una isometría $f : V \to V$, vamos a fijarnos en las siguientes definiciones:

- Se dice que $\overline{v} \in V$ es un **vector fijo** por f si $f(\overline{v}) = \overline{v}$.
- Un **subespacio** vectorial S de V es **invariante** por f cuando $f(S) \subset S$. En la práctica, se cumple que $f(S) = S$, ya que f es biyectiva.

A continuación se indican algunas consecuencias derivadas de las anteriores definiciones:

1) Si S es un subespacio invariante por f, entonces $S^{\perp}$ también es invariante.
2) Si la dimensión del espacio vectorial V es impar, entonces toda isometría en V admite algún subespacio invariante de dimensión 1, por lo que existe $\overline{v} \neq \overline{0}$ tal que $f(\overline{v}) = \overline{v}$ o $f(\overline{v}) = -\overline{v}$.

$$V_1 = V_f = \{\overline{v} \in V \mid f(\overline{v}) = \overline{v}\} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \qquad V_{-1} = V_{-f} = \{\overline{v} \in V \mid f(\overline{v}) = -\overline{v}\} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$$

Es importante resaltar lo siguiente de cara a la clasificación de isometrías:

- En $\mathbb{R}^3$, $V_1 \neq \{\overline{0}\}$ o $V_{-1} \neq \{\overline{0}\}$.
- $V_{-1} \subset V_1^{\perp}$.
- $\dim(V_1 + V_{-1}) = \dim(V_1) + \dim(V_{-1})$.
- El valor de $\dim(V_1 + V_{-1})$ solo puede ser 1 o 3.

Por último, durante los cálculos para determinar la matriz de una isometría respecto de la base canónica será útil emplear la siguiente relación:

$$\boxed{M_{B_c}(f) = M_{B_N \to B_C} M_{B_N}(f) \left(M_{B_N \to B_C}\right)^{-1}}$$

5 Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^2$

5.1 Tipo 1 (identidad)

Si $\lambda = 1$ es el único autovalor y $\dim(V_1) = 2$, todos los vectores son fijos mediante la isometría, por lo que se trata de la aplicación **identidad**. En este caso, la matriz de la isometría respecto a cualquier base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta simetría se puede considerar también como un giro de 0°, representando por ello un caso particular del Tipo 3.

5.2 Tipo 2 (simetría respecto de recta)

Si $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son los dos autovalores, con lo que $\dim(V_1) = \dim(V_{-1}) = 1$ es el subespacio invariante mediante f, entonces la isometría es una **simetría ortogonal** de base la recta $r \equiv V_1$. Dada la base $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ ortogonal (pero no necesariamente ortonormal), donde $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_1\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_2\}\right)$, con $V_1^{\perp} = V_{-1}$, y la base canónica, las matrices de la isometría son:

$$M_{B_O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_C} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

5.3 Tipo 3 (giro)

Si los autovalores son números complejos conjugados, lo que implica que $\dim(V_1) = \dim(V_{-1}) = 0$, la isometría no tiene vectores fijos, por lo que se trata de un **giro** de ángulo θ, considerándose que el sentido de giro es el sentido positivo (sentido antihorario). La matriz de la isometría en cualquier base ortonormal, incluyendo la base canónica es:

$$M_{B_N} = M_{B_C} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

5.4 Tipo 4 (simetría respecto del origen)

Si $\lambda = -1$ es el único autovalor y $\dim(V_{-1}) = 2$, se trata de una **simetría** respecto del origen. En este caso, la matriz de la isometría respecto a cualquier base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.5 Resumen

A continuación se muestra un resumen de las principales características asociadas a los diferentes casos, distinguiendo entre el valor del determinante y la traza de la matriz de la isometría y la dimensión de sus subespacios V_1 y V_{-1}.

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
$\lvert M(f)\rvert = 1$	$\lvert M(f)\rvert = -1$	$\lvert M(f)\rvert = 1$	$\lvert M(f)\rvert = 1$
$\operatorname{tr}(M(f)) = 2$	$\operatorname{tr}(M(f)) = 0$	$\operatorname{tr}(M(f)) = 2\cos(\theta)$	$\operatorname{tr}(M(f)) = -2$
$\dim(V_1) = 2$	$\dim(V_1) = 1$	$\dim(V_1) = 0$	$\dim(V_1) = 0$
$\dim(V_{-1}) = 0$	$\dim(V_{-1}) = 1$	$\dim(V_{-1}) = 0$	$\dim(V_{-1}) = 2$

6 Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^3$

6.1 Tipo 1 (identidad)

Si $\lambda = 1$ es el único autovalor y $\dim(V_1) = 3$, todos los vectores son fijos mediante la isometría, por lo que se trata de la aplicación **identidad** (que también se puede interpretar como un giro alrededor de una recta cualquiera con giro 0°). En este caso, la matriz de la isometría respecto a cualquier base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Tipo 2 (simetría respecto de plano)

Si $\lambda = 1$ es un autovalor doble con $\dim(V_1) = 2$ y $\lambda = -1$ es un autovalor simple con $\dim(V_{-1}) = 1$, entonces la isometría tiene un plano de vectores fijos y el movimiento consiste en una **simetría ortogonal** de base el plano $\pi \equiv V_1$. Dada la base (no necesariamente ortogonal ni ortonormal) $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, donde $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_3\}\right)$, con $V_1^{\perp} = V_{-1}$, la matriz de la isometría f en la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.3 Tipo 3 (simetría respecto de recta)

Si $\lambda = 1$ es un autovalor simple y $\lambda = -1$ es un autovalor doble, con lo que $\dim(V_1) = 1$, entonces la isometría tiene una recta de vectores fijos y el movimiento consiste en una **simetría ortogonal** respecto a la recta $r \equiv V_1$. Dada la base (no necesariamente ortogonal ni ortonormal) $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ tal que $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_1\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_2, \overline{v}_3\}\right)$, con $V_1^{\perp} = V_{-1}$, la matriz de la isometría f en la base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta simetría se puede considerar también como un giro de 180° respecto de la recta, representando por ello un caso particular del Tipo 4.

6.4 Tipo 4 (giro respecto de recta)

Si $\lambda = 1$ es un autovalor triple y $\dim(V_1) = 1$, entonces la isometría tiene una recta de vectores fijos y el movimiento consiste en un **giro** de eje la recta $r \equiv V_1$ y ángulo θ. Dada la base ortonormal $B_N = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ tal que $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$, la matriz de la isometría f en la base ortonormal B_N es:

$$M_{B_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

6.5 Tipo 5 (composición de giro y simetría)

Si $\lambda = -1$ es un autovalor triple y $\dim(V_{-1}) = 1$, entonces el movimiento consiste en la **composición** (en cualquier orden) de un **giro** de ángulo θ respecto al eje $r \equiv V_{-1}$ con una **simetría** respecto al plano $\pi \equiv V_{-1}^{\perp}$. Dada la base ortonormal $B_N = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, con $V_{-1} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$ y $V_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$, la matriz de la isometría f en la base B_N es:

$$M_{B_N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 Tipo 6 (simetría respecto del origen)

Si $\lambda = -1$ es un autovalor triple y $\dim(V_{-1}) = 3$, se trata de una **simetría** respecto del origen. En este caso, la matriz de la isometría respecto a cualquier base B es:

$$M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta simetría se puede considerar también como una composición de giro de 180° alrededor del eje Z y simetría respecto al plano $z = 0$, representando por ello un caso particular del Tipo 5.

6.7 Resumen

A continuación se muestra un resumen de las principales características asociadas a los diferentes casos, distinguiendo entre el valor del determinante y la traza de la matriz de la isometría y la dimensión de sus subespacios V_1 y V_{-1}, considerando que los tipos son excluyentes.

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5	Tipo 6
$\lvert M(f)\rvert = 1$	$\lvert M(f)\rvert = -1$	$\lvert M(f)\rvert = 1$	$\lvert M(f)\rvert = 1$	$\lvert M(f)\rvert = -1$	$\lvert M(f)\rvert = -1$
$\operatorname{tr}(M(f)) = 3$	$\operatorname{tr}(M(f)) = 1$	$\operatorname{tr}(M(f)) = -1$	$\operatorname{tr}(M(f)) =$ $1 + 2\cos(\theta)$	$\operatorname{tr}(M(f)) =$ $-1 + 2\cos(\theta)$	$\operatorname{tr}(M(f)) = -3$
$\dim(V_1) = 3$	$\dim(V_1) = 2$	$\dim(V_1) = 1$	$\dim(V_1) = 1$	$\dim(V_1) = 0$	$\dim(V_1) = 0$
$\dim(V_{-1}) = 0$	$\dim(V_{-1}) = 1$	$\dim(V_{-1}) = 2$	$\dim(V_{-1}) = 0$	$\dim(V_{-1}) = 1$	$\dim(V_{-1}) = 3$

7 Problemas

1) Determina un vector unitario de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal simultáneamente a los vectores $(1, 2, 1)$ y $(0, -1, 1)$.

2) Obtén una base del complemento ortogonal de $S_1 = \mathcal{L}\{(1, 2, 3)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

3) Obtén una base ortonormal del complemento ortogonal del subespacio representado como $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 0\}$.

4) Construir una base ortonormal mediante el método Gram-Schmidt a partir de los vectores $(1,2,1)$ y $(1,1,3)$.

5) ¿Existe una isometría en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual que transforme el vector $(1,1,0)$ en el vector $(1,1,1)$? Por otra parte, ¿existe una isometría en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ y $f(0,1) = (1,0)$?

6) Demuestra que el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $f(1,1) = (-1,1)$ y $f(1,2) = (-1,2)$ es una isometría.

7) Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2. Sea $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ una base ortonormal de V. Consideremos $B' = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ la base dada por $\overline{v}_1 = \overline{e}_1$, $\overline{v}_2 = \overline{e}_2 - \overline{e}_1$. Sea $f : V \to V$ el endomorfismo dado por $f(\overline{v}_1) = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$, $f(\overline{v}_2) = -2\overline{v}_1 - \overline{v}_2$. ¿Es f una isometría?

8) Describe geométricamente la isometría de $\mathbb{R}^2$ sabiendo que A es su matriz respecto a la base canónica.

$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

9) Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y la orientación positiva dada por la base canónica. Determina la matriz en la base canónica que define la simetría ortogonal respecto de la recta $3x - 2y = 0$.

10) Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y la orientación positiva dada por la base canónica. Clasifica la transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

11) Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y la orientación positiva dada por la base canónica. Determina la matriz en la base canónica que define la simetría ortogonal que representa un giro de 60° en sentido horario.

12) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f(x,y) = \left((3/5)x + (4/5)y, (4/5)x - (3/5)y\right)$. ¿Es f una transformación ortogonal? En caso afirmativo, estudia de qué tipo y descríbela geométricamente.

13) Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ y la orientación positiva dada por la base canónica. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por la siguiente matriz en la base canónica es una transformación ortogonal. Para los valores hallados, clasifica la transformación ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

14) En $\mathbb{R}^2$, estudia el resultado de componer:

a) Dos rotaciones.

b) Dos simetrías.

c) Una rotación con una simetría.

15) Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es A, demuestra que es una isometría vectorial y descríbela geométricamente.

$$A = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16) Calcula la matriz asociada a la simetría respecto del plano de ecuación $x + y - z = 0$. ¿Es posible generar la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?

17) Describe geométricamente la isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

18) Obtén la expresión matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$.

19) Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es A, demuestra que es una isometría vectorial y descríbela geométricamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20) Obtén la expresión matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la rotación de 60° alrededor del eje que contiene al vector $(1,1,1)$.

21) Dada la isometría f cuya matriz en la base canónica es A, determina el tipo de isometría y los elementos geométricos que la caracterizan.

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

22) Obtén la matriz referida a la base canónica de la isometría en $\mathbb{R}^3$ formada por la combinación de una simetría respecto al plano $z = 0$ y un giro de 120°.

23) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar habitual. Clasifícala indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, conociendo los siguientes datos:

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$
- $|A| = -1$
- $\mathrm{tr}(A) = 1$

24) Dada el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z\right)$, demuestra que es una isometría e identifica su tipo.

25) En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar habitual, escoge un eje y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ a los semiejes positivos OY, OZ, OX, respectivamente.

26) Sea el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la base $B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Demuestra que el endomorfismo f dado por la siguiente matriz en la base B es una transformación ortogonal y clasifícala razonadamente, indicando los subespacios de simetría y/o eje y ángulo de giro.

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

27) Determina las matrices en la base canónica de todas las isometrías vectoriales de $\mathbb{R}^3$ que dejan invariante el plano de ecuaciones $x - y = 0$, actuando como un giro de ángulo $\theta = \pi$.

28) Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Determina los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por la siguiente matriz respecto de la base canónica es una transformación ortogonal. Para los valores hallados, clasifica la transformación ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alberto Borobia Vizmanos y Beatriz Estrada López. *Álgebra lineal y geometría vectorial*. Ed. Sanz y Torres. ISBN 978-84-15550-85-3.
- María Isabel García Planas. *Álgebra lineal y geometría para la ingeniería*. Disponible en `https://upcommons.upc.edu/handle/2117/11985`.
- Agustín de la Villa Cuenca. *Problemas de álgebra con esquemas teóricos*. Ed. CLAGSA. ISBN 978-84-92184-71-2.
- María Luisa Casado Fuente, Ángeles Castejón Solanas, José Fábrega Golpe, María del Carmen Morillo y Luis Sebastián Lorente. Apuntes de Geometría Lineal. Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Universidad Politécnica de Madrid.