Geometría Lineal

Tema 4

Movimientos afines

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 2.1

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Espacios afines

Un **espacio afín** sobre un cuerpo K es un trío $\mathbb{A} = (\mathrm{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ formado por un conjunto A, un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y una aplicación $\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathcal{V}$ que cumple lo siguiente:

1) Para todo punto $P \in \mathrm{A}$ y todo vector $\overline{v} \in \mathcal{V}$, existe un único punto Q tal que $\overline{v} = \varphi(P, Q)$.

2) $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$ para todos $P, Q, R \in \mathrm{A}$ (relación de Chasles).

A los elementos de A se les llama **puntos**, mientras que los elementos de $\mathcal{V}$ son **vectores**. Por otra parte, se dice que $\mathcal{V}$ es el espacio vectorial asociado al conjunto A, definiéndose la dimensión de A como la dimensión de $\mathcal{V}$.

En el caso $K = \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} = \left(\mathbb{R}^n, +, \cdot\right)$, dada la aplicación φ y los puntos $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ tal que $\varphi(P, Q) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n)$, a $\mathbb{A}^n = (\mathrm{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ se le conoce como el espacio afín estándar de dimensión n sobre K.

Habitualmente se escribe $\varphi(P, Q) = \overline{PQ}$ y se dice que P y Q son, respectivamente, el origen y el extremo del vector $\overline{PQ}$. Con esta notación, las condiciones que debe cumplir un espacio afín pueden reescribirse de la siguiente manera:

1) Para todo punto $P \in \mathrm{A}$ y todo vector $\overline{v} \in \mathcal{V}$, existe un único punto Q tal que $\overline{v} = \overline{PQ}$.

2) $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ para todo punto $P, Q, R \in \mathrm{A}$.

Ejemplo 1

$\mathbb{A}^2 = \left(\mathbb{R}^2, (\mathbb{R}^2, +, \cdot), \varphi\right)$ es un espacio afín ya que para cualquier par de puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ podemos definir el vector $\overline{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ que verifica las dos propiedades de la definición.

Ejemplo 2

$\mathbb{A}^3 = \left(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, +, \cdot), \varphi\right)$ es un espacio afín ya que para cualquier par de puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ podemos definir el vector $\overline{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ que verifica las dos propiedades de la definición.

A continuación se muestran algunas propiedades derivadas de la definición de espacio afín:

1) $\forall P, Q \in \mathrm{A} \quad \overline{PQ} = \overline{0} \iff P = Q$

2) $\forall P, Q \in \mathrm{A} \quad \overline{PQ} = -\overline{QP}$

3) $\forall P, Q, R \in \mathrm{A} \quad \overline{PQ} = \overline{RS} \iff \overline{PR} = \overline{QS}$

Se dice que un espacio afín $\mathbb{A} = (\mathrm{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ es un espacio afín métrico si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial euclídeo, es decir, si $\mathcal{V}$ tiene definido un producto escalar.

2 Variedades lineales

2.1 Definición

Sea $\mathbb{A} = (\mathrm{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ un espacio afín. Dado un punto $P \in \mathrm{A}$ y un subespacio $\mathcal{S}$ del espacio vectorial $\mathcal{V}$, se llama **variedad lineal** que pasa por P y tiene la dirección $\mathcal{S}$ al subconjunto $\{Q \in \mathrm{A} \mid \overline{PQ} \in \mathcal{S}\}$, donde $\overline{v} = \overline{PQ} = Q - P$, con lo que $Q = P + \overline{v}$.

A partir de la anterior definición podemos representar una variedad lineal de la siguiente manera alternativa:

$$\boxed{P + \mathcal{S} = \{Q \in \mathbb{A} \mid Q = P + \overline{v},\ \overline{v} \in \mathcal{S}\} = \{Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} \in \mathcal{S}\}}$$

La dimensión de una variedad lineal $P + \mathcal{S}$ es la dimensión de su subespacio $\mathcal{S}$, pudiendo establecerse la siguiente clasificación cuando $\dim(\mathcal{V}) = n$:

- Las variedades de dimensión 0 son los puntos de $\mathbb{A}$.
- Las variedades de dimensión 1 son las rectas de $\mathbb{A}$.
- Las variedades de dimensión 2 son los planos de $\mathbb{A}$.
- Las variedades de dimensión $n - 1$ son los hiperplanos de $\mathbb{A}$.

A continuación se muestran algunas propiedades derivadas de la definición de variedad lineal:

1) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \quad Q \in P + \mathcal{S} \implies P + \mathcal{S} = Q + \mathcal{S}$

2) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \quad P, Q \in R + \mathcal{S} \implies \overline{PQ} \in \mathcal{S}$

De forma similar a como tratábamos con subespacios vectoriales en el contexto de un espacio vectorial, podemos considerar a las variedades lineales como los subespacios afines en el contexto de un espacio afín.

2.2 Suma e intersección de variedades lineales

Se dice que dos variedades lineales $P + \mathcal{S}$, $Q + \mathcal{T}$ son paralelas si $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ o $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Dos variedades paralelas o no se cortan o una está contenida en la otra.

Por otra parte, decimos que dos variedades lineales $P + \mathcal{S}$, $Q + \mathcal{T}$ se cortan si y solo si $\overline{PQ} \in \mathcal{S} + \mathcal{T}$.

En cuanto a la intersección, si dos variedades $L_1 = P + \mathcal{S}$ y $L_2 = Q + \mathcal{T}$ tienen un punto R en común (es decir, $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$), entonces $L_1 \cap L_2 = R + (\mathcal{S} \cap \mathcal{T})$. Por ello, si la intersección de dos variedades lineales no es el conjunto vacío, entonces dicha intersección es una variedad lineal.

Dos variedades lineales se cruzan si no son paralelas ni se cortan.

La variedad lineal suma de $L_1 = P + \mathcal{S}$ y $L_2 = Q + \mathcal{T}$ es la variedad lineal mínima que contiene tanto a L_1 como a L_2, y dicha variedad lineal es $L_1 + L_2 = P + \mathcal{S} + \mathcal{T} + \mathcal{L}(\{\overline{PQ}\})$.

Las fórmulas de Grassman relacionan las diferentes operaciones con variedades lineales. Sean $L_1 = P + \mathcal{S}$ y $L_2 = Q + \mathcal{T}$ dos variedades lineales, y sea $L_1 + L_2$ su suma y $L_1 \cap L_2$ su intersección, lás fórmulas de Grassman son:

$$\boxed{\begin{array}{ll} L_1 \cap L_2 \neq \varnothing: & \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) \\ L_1 \cap L_2 = \varnothing: & \dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) + 1 \end{array}}$$

3 Sistemas de referencia y coordenadas

En los espacios afines el vector $\overline{0}$ deja de tener la importancia que tiene en los espacios vectoriales, por lo que es necesario especificar un sistema de referencia.

Dado un espacio afín $(\mathsf{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ y unos puntos $P_1, P_2, \ldots, P_k \in \mathsf{A}$, se dicen que los puntos son linealmente independientes si los vectores $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_1P_k}$ son linealmente independientes.

Una consecuencia de la anterior definición es que dos puntos $P, Q \in \mathsf{A}$ son linealmente independientes si y solo si $P \neq Q$. Por otra parte, si $\dim(\mathsf{A}) = n$, el número máximo de puntos linealmente independientes es $n + 1$.

Llamaremos sistema de referencia de un espacio afín de dimensión n a todo conjunto de $(n+1)$ puntos linealmente independientes $O, P_1, \ldots, P_n$, donde el punto O es el origen. Otra forma alternativa de representar el sistema de referencia es $R = \{O; \overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_n\}$, donde $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_n\}$ es una base de vectores tal que $\overline{v}_i = \overline{OP_i}$. Si la base es ortonormal, se dirá que el sistema de referencia es cartesiano o rectangular.

Denominaremos coordenadas de un punto $X \in \mathsf{A}$ en el sistema $R = \{O; \overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_n\}$ a la tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tal que $\overline{OX} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_R$.

Dado un punto X cuyas coordenadas en el sistema de referencia cartesiana $R = \{O; \overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_n\}$ con $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_n\}$ son $(x_1, \ldots, x_n)_R$, las coordenadas en un segundo sistema de referencia cartesiana representado por $R^* = \{O^*; \overline{w}_1, \overline{w}_2 \ldots, \overline{w}_n\}$ con $B^* = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2 \ldots, \overline{w}_n\}$ y $O^* = (o_1^*, o_2^*, \ldots, o_n^*)_R$, son $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)_{R^*}$, que se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = M_{B \to B^*} \begin{pmatrix} x_1 - o_1^* \\ x_2 - o_2^* \\ \vdots \\ x_n - o_n^* \end{pmatrix} = \left(M_{B^* \to B}\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - o_1^* \\ x_2 - o_2^* \\ \vdots \\ x_n - o_n^* \end{pmatrix}$$

4 Transformaciones afines

Dados dos espacios afines $\mathbb{A} = (\mathsf{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ y $\mathbb{A}' = (\mathsf{A}', \mathcal{V}', \varphi')$. Una transformación afín (también llamada aplicación afín o afinidad) es una aplicación $f : \mathsf{A} \to \mathsf{A}'$ entre puntos de manera que la aplicación asociada $\overline{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ definida como $\overline{f}(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$ es lineal para todo $P, Q \in \mathsf{A}$.

Como consecuencia de la anterior definición, si f es una aplicación afín, entonces para todo $P \in \mathsf{A}$ y $\overline{v} \in \mathcal{V}$, $f(P + \overline{v}) = f(P) + \overline{f}(\overline{v})$. Es decir, para cualquier punto $Q \in \mathsf{A}$, $f(Q) = f(P) + \overline{f}(\overline{PQ})$.

Dada la aplicación afín $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, donde $\mathbb{A} = (\mathsf{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ es un espacio afín con sistema de referencia $\{O; \overline{e}_1, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$, y $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_R$ es un punto de $\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}' = (\mathsf{A}', \mathcal{V}', \varphi')$ es un espacio afín con sistema de referencia $\{O'; \overline{u}_1, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$ y $f(O) = O' = (o_1', o_2', \ldots, o_n')$, entonces podemos expresar la aplicación afín de forma matricial de la siguiente manera:

$$X' = f(O) + AX \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_1' \\ o_2' \\ \vdots \\ o_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La aplicación se puede representar de forma equivalente mediante una única multiplicación de matrices de esta manera:

$$\widetilde{X}' = M\widetilde{X} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline o_1' & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ o_2' & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & \\ o_n' & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dadas dos transformaciones afines f_1 y f_2, entonces la composición $f_1 \circ f_2$ es a su vez una transformación afín.

5 Tipos de transformaciones afines

Con carácter general, se pueden mencionar tres tipos de transformaciones afines: **movimientos rígidos**, **homotecias** y **semejanzas**.

5.1 Movimientos rígidos

Dado un espacio afín euclídeo $\mathbb{A} = (\mathrm{A}, V, \varphi)$, una aplicación afín $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ se llama **movimiento rígido** (o simplemente **movimiento**) si conserva distancias. Es decir, si para todo $P, Q \in \mathbb{A}$ se cumple que $d\big(f(P), f(Q)\big) = d(P, Q)$. Debido a ello, los movimientos rígidos también conservan los ángulos y las formas.

Si f_1 y f_2 son dos movimientos, entonces la composición $f_1 \circ f_2$ es a su vez un movimiento. Sin embargo, es importante tener en cuenta que dicha composición en general no es conmutativa.

Si $\mathbb{A} = (\mathrm{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ es un espacio afín euclídeo y f es un movimiento rígido en $\mathbb{A}$, entonces $\overline{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es una isometría.

Todo movimiento rígido puede representarse como $f(X) = B + AX$, donde A es una matriz ortogonal, con lo que $AA^t = I$.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En un movimiento $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ definido como $f(X) = B + AX$, un **punto fijo** cumple lo siguiente:

$$\boxed{(A - I)X + B = O}$$

Por otra parte, se dice que L es una **variedad invariante** de $\mathbb{A}$ si $f(L) = L$. En caso de que un movimiento tenga una variedad invariante, entonces se cumple lo siguiente:

$$\boxed{(A - I)^2 X + (A - I)B = O}$$

5.2 Homotecias

Una **homotecia** $H_{C,\lambda}$ de centro C y razón λ definida como $H_{C,\lambda}(X) = C + \lambda(X - C)$ es una aplicación afín que conserva los ángulos y las formas, pero no las distancias entre puntos. Las homotecias se pueden representar de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (1-\lambda)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline (1-\lambda)c_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ (1-\lambda)c_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ (1-\lambda)c_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se dice que la homotecia es directa si $\lambda > 0$, mientras que es inversa si $\lambda < 0$. Por otra parte, si $|\lambda| > 1$ se trata de una expansión, mientras que si $0 < |\lambda| < 1$ tendríamos una contracción.

5.3 Semejanzas

De forma general, una **semejanza** es la combinación de una homotecia y un movimiento rígido. Las semejanzas preservan los ángulos y escalan las distancias por un factor constante.

En una semejanza $f(X) = B + AX$, la matriz A no es ortogonal, pero sí es múltiplo de una matriz ortogonal, por lo que $AA^t = k^2 I$ para algún valor $k \in \mathbb{R}$.

6 Clasificación de movimientos rígidos en $\mathbb{R}^2$

6.1 Caso 1: Identidad

Se trata del movimiento más sencillo en $\mathbb{R}^2$, transformando todos los puntos en ellos mismos.

- Todos los puntos son fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 2$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A - I) = 0 = \mathrm{rg}(A - I| - B)$
- $\overline{f}$ es la isometría vectorial identidad (tipo 1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

6.2 Caso 2: Traslación

- Ningún punto es fijo (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 2$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 0 < 1 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$
- $\overline{f}$ es la isometría vectorial identidad (tipo 1)

La traslación se puede definir como $X' = B + AX$, donde $B = O'$ define la traslación.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_x & 1 & 0 \\ b_y & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

6.3 Caso 3: Simetría respecto de recta

- Tiene una recta de puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 1$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 1 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$
- $\overline{f}$ es una simetría respecto de recta (tipo 2)

La recta de simetría viene dada por $(M-I)\widetilde{X} = O$, es decir, el subespacio de autovectores asociados a $\lambda = 1$ referido a la matriz M. Una forma alternativa consiste en identificar la recta perpendicular al segmento OO' que pasa por su punto medio.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o'_x \\ o'_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ o'_y & \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, $P = (p_x, p_y)$ es un punto cualquiera del eje de simetría y A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base canónica.

6.4 Caso 4: Simetría deslizante

- No tiene puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 1$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 1 < 2 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$
- $\overline{f}$ es una simetría respecto de recta (tipo 2)

Para calcular el eje de la simetría deslizante, podemos considerar que P, el punto medio del segmento OO', pertenece al eje de simetría. La transformación de dicho punto P, P', también pertenece al eje de simetría, por lo que podemos identificar el vector que define el eje como el vector $\overline{PP'}$. A partir del punto P y del vector $\overline{PP'}$ podemos obtener la expresión de la recta que representa el eje de la simetría deslizante.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline o'_x + v_x & \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ o'_y + v_y & \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, $\overline{v} = (v_x, v_y)$ es el vector de traslación y $(x, y) = p_x, p_y) + t(v_x, v_y)$ es el eje de simetría y A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base canónica.

6.5 Caso 5: giro

- Tiene 1 punto fijo (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 0$ (respecto a $\overline{f}$) si $\theta \neq 0$
- $\operatorname{rg}(A - I) = 2 = \operatorname{rg}(A - I | -B)$
- $\overline{f}$ es un giro (tipo 3)

Si la ecuación está expresada $X' = C + A(X - C)$ o como $X' = B + AX$, podemos obtener el punto fijo C resolviendo $(A - I)X = -B$. El ángulo de giro se puede obtener directamente a partir de la matriz A.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o'_x \\ o'_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ o'_y & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, $O' = (o'_x, o'_y)$ es la transformación del origen, $C = (c_x, c_y)$ es el centro del giro y A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base canónica.

7 Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^3$

7.1 Caso 1: identidad

- Todos los puntos son fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 3$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\operatorname{rg}(A - I) = 0 = \operatorname{rg}(A - I | -B)$
- $\overline{f}$ es la isometría vectorial identidad (tipo 1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7.2 Caso 2: traslación

- No tiene puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 3$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 0 < 1 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$
- $\overline{f}$ es la isometría vectorial identidad (tipo 1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & 1 & 0 & 0 \\ o'_y & 0 & 1 & 0 \\ o'_z & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7.3 Caso 3: simetría respecto de plano

- Tiene un plano de puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 2$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 1 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$
- $\overline{f}$ es una simetría respecto de plano (tipo 2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & 1 & 0 & 0 \\ o'_y & 0 & 1 & 0 \\ o'_z & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En la anterior expresión, A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, donde $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_3\}\right)$, con $V_1^{\perp} = V_{-1}$.

7.4 Caso 4: simetría deslizante (respecto a plano)

- No tiene puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 2$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 1 < 2 = \mathrm{rg}(A-I|-B)$.
- $\overline{f}$ es una simetría respecto de plano (tipo 2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a+u_x & 1 & 0 & 0 \\ b+u_y & 0 & 1 & 0 \\ c+u_z & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En la anterior expresión, A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$, donde $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{v}_3\}\right)$, con $V_1^{\perp} = V_{-1}$.

7.5 Caso 5: giro

- Tiene una recta de puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 1$ (respecto a $\overline{f}$) .
- $\mathrm{rg}(A - I) = 2 = \mathrm{rg}(A - I| - B)$.
- $\overline{f}$ es un giro respecto de recta (tipo 4)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & 1 & 0 & 0 \\ o'_y & 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ o'_z & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base ortonormal $B_N = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ tal que $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$.

7.6 Caso 6: movimiento helicoidal

- No tiene puntos fijos (respecto a f)
- $\dim(V_1) = 1$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A - I) = 2 < 3 = \mathrm{rg}(A - I| - B)$.
- $\overline{f}$ es un giro respecto de recta (tipo 4)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline o'_x + v_x & 1 & 0 & 0 \\ o'_y + v_y & 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ o'_z + v_z & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base ortonormal $B_N = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ tal que $V_1 = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$ y $V_1^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$ y $\overline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector de desplazamiento.

7.7 Caso 7: simetría rotatoria

- Tiene un punto fijo (respecto a f)
- $\dim(V_{-1}) = 1$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A - I) = 3 = \mathrm{rg}(A - I| - B)$
- $\overline{f}$ es composición de simetría respecto del plano $V_{-1}^{\perp}$ y rotación respecto a la recta V_{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline o'_x & -1 & 0 & 0 \\ o'_y & 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ o'_z & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En las anteriores expresiones, A es la matriz de la isometría vectorial respecto de la base ortonormal $B_N = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, con $V_{-1} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_1\}\right)$ y $V_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\{\overline{u}_2, \overline{u}_3\}\right)$.

7.8 Caso 8: simetría central

- Tiene un punto fijo (respecto a f)
- $\dim(V_{-1}) = 3$ (respecto a $\overline{f}$)
- $\mathrm{rg}(A-I) = 3 = \mathrm{rg}(A-I\,|-B)$
- $\overline{f}$ es la simetría respecto del origen (tipo 5).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8 Problemas

1) Dado el espacio afín $\mathbb{A}^3$ y la base canónica $B_c = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, obtén las ecuaciones de la recta afín definida como $r : (1,2,3) + \mathcal{L}(\{\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3\})$.

2) Dado el espacio afín $\mathbb{A}^4$, determina la ecuación implícita del plano que contiene los puntos $P_1 = (1,1,1,0)$, $P_2 = (0,1,2,3)$ y $P_3 = (0,0,1,-1)$.

3) Sea $(\mathsf{A}, \mathcal{V}, \varphi)$ un espacio afín real de dimensión finita y sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n puntos de A. Demostrar que $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} + \overline{P_nP_1} = \overline{0}$.

4) Demuestra que en el espacio afín $\mathbb{A}^2$, dos rectas o son paralelas o se cortan en un punto.

5) Demuestra que en el espacio afín $\mathbb{A}^3$, una recta y un plano o son paralelos o se cortan en un punto.

6) Dado el sistema de referencia $R = \{O; \overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, donde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, calcula las coordenadas de $P = (3,4)_R$ respecto del sistema $R^* = \{O^*; \overline{v}_1, \overline{v}_2\}$, donde $O^* = (1,3)$, $\overline{v}_1 = (1,2)$ y $\overline{v}_2 = (-2,1)$.

7) Dado el espacio afín $\mathbb{A}^3$, determinar cuáles de los siguientes conjuntos son sistemas de referencia afines:
   a) $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (1,1,1)$.
   b) $P_0 = (1,-1,1)$, $P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$.
   c) $P_0 = (1,1,1)$, $P_1 = (2,1,3)$, $P_2 = (2,2,1)$, $P_3 = (0,0,1)$.

8) En el plano afín $\mathbb{A}^2$ se considera el sistema de referencia $R = \{O; \overline{v}, \overline{w}\}$ y un segundo sistema de referencia $R^* = \{O; \overline{v'}, \overline{w'}\}$ donde $\overline{v}' = \overline{v} - 2\overline{w}$ y $\overline{w}' = \overline{v} + \overline{w}$. Determina la fórmula de cambio de sistema de referencia.

9) Dado el sistema de referencia $R = \{O; \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, donde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, sea π un plano de ecuación implícita $x + y + z = 2$ en el sistema R. Determina la ecuación implícita del plano en el sistema $R^* = \{O^*; -\overline{e}_1 + \overline{e}_3, -\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3\}$, donde $O^* = (1,1,0)$.

10) Demuestra que, si f es una aplicación afín y $\overline{f}$ es la aplicación vectorial asociada, entonces f es inyectiva si y solo si $\overline{f}$ es inyectiva.

11) Demuestra que, si f es una aplicación afín y $\overline{f}$ es la aplicación vectorial asociada, entonces f es suprayectiva si y solo si $\overline{f}$ es suprayectiva.

12) Determina si la siguiente transformación afín es biyectiva.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

13) Demuestra que una traslación distinta de la identidad no tiene ningún punto fijo.

14) Demuestra que si P y Q son dos puntos fijos de una aplicación afín f, entonces la recta r que pasa por P y Q también queda fija por f.

15) Demuestra que si $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ es una transformación afín entre planos afines y f tiene tres puntos fijos no alineados, entonces f es la aplicación identidad en $\mathbb{A}^2$.

16) En el plano afín se considera la transformación dada por $(x', y') = (4x - 3y, x)$, de forma que al punto $P = (x, y)$ le corresponde el punto $P' = (x', y')$.
   a) Identifica sus puntos fijos.
   b) Demuestra que el vector $\overline{PP'}$ es proporcional a un vector específico y determínalo.

17) Determina la variedad invariante del siguiente movimiento en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

18) Determina el centro de la homotecia de razón 2 que transforma el punto $A = (1, 1, 2)$ en el punto $A' = (2, -2, 6)$.

19) Sea $H_{O,3}$ la homotecia de centro $O = (0, 0)$ y razón 3. Si A' es el transformado del punto $A = (0, 2)$ mediante $H_{O,3}$, demuestra que la composición de las homotecias $H_{O,3}$ y $H_{A',2}$ es a su vez otra homotecia y determina sus características.

20) Halla la ecuación matricial de la transformación afín que convierte los puntos $O = (0, 0)$, $P = (1, 2)$ y $Q = (2, 1)$ en $O' = (15, -1)$, $P' = (-7, -5)$ y $Q' = (-5, 9)$. ¿Es la transformación una semejanza?

21) Determina la expresión matricial de la transformación afín en $\mathbb{R}^3$ que primero realiza una homotecia de centro $C = (0, 0, 1)$ y razón $\lambda = 2$ y después aplica la transformación $f(x, y, z) = (2x + y - 1, 3z - 2, 4x + y)$. ¿Es la combinación de esas transformaciones una semejanza?

22) Clasifica la transformación del plano dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 4 \end{pmatrix}$$

23) Clasifica la transformación del plano dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

24) Obtén la ecuación matricial de la simetría respecto de la recta $x - y - 1 = 0$.

25) Clasifica la transformación del plano dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

26) Obtén la ecuación matricial de la simetría deslizante en la que la recta es $y = 2x - 1$ y el vector de desplazamiento el $(-1, -2)$.

27) Clasifica la transformación del plano dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1/5 \\ y - 2/5 \end{pmatrix}$$

28) Obtén la ecuación matricial del giro de centro $C(1, -1)$ y ángulo $\theta = 45^\circ$ en sentido positivo.

29) Dado el giro G_1 de centro $C_1 = (1, 2)$ y ángulo $\theta_1 = \pi/3$ y el giro G_2 de centro $C_2 = (0, -1)$ y ángulo $\theta_2 = \pi/6$, efectúa el producto de G_1 por G_2, determinando los elementos característicos de la transformación obtenida.

30) Analiza para qué valores de los parámetros a, b y c la siguiente transformación del plano es un movimiento rígido y clasifícala:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & b \\ 0 & a-1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

31) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

32) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10/3 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -20/3 & -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

33) Obtén la ecuación matricial de la simetría especular respecto del plano $x-2y=7$.

34) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

35) Obtén la ecuación matricial de la simetría deslizante respecto al plano $x+y+1=0$ cuyo vector de desplazamiento es $\overline{v}=(0,0,2)$.

36) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & (1+\sqrt{3})/3 & (1-\sqrt{3})/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & 1/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ (1+\sqrt{3})/3 & (1-\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

37) Obtén la ecuación matricial del giro en el espacio de 240° alrededor del eje dado por $x=1-\lambda$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$.

38) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

39) Obtén la ecuación del movimiento helicoidal de vector de desplazamiento $\overline{v}=(0,1,1)$ y giro de $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ en sentido $-\overline{v}$ alrededor de la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$.

40) Clasifica la transformación del espacio dada por la siguiente ecuación matricial y determina sus elementos característicos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

41) Calcula la ecuación matricial de la simetría respecto del plano $x=1$ y el giro de 90° respecto de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

42) Dada la transformación geométrica del espacio indicada a continuación, determina los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que se trata de un movimiento rígido y clasifica los movimientos en cada caso.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

43) Obtén la ecuación matricial del producto de las simetrías especulares de planos $3y-4z+6=0$ y $3y-4z-4=0$. Clasifica la transformación resultante.

44) Obtén la ecuación matricial del producto de la simetría especular de plano $3x-4z+5=0$ y la traslación de vector $\overline{v}=(15,0,-20)$. Clasifica la transformación resultante.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Alberto Borobia Vizmanos y Beatriz Estrada López. *Álgebra lineal y geometría vectorial*. Ed. Sanz y Torres. ISBN 978-84-15550-85-3.
- María Isabel García Planas. *Álgebra lineal y geometría para la ingeniería*. Disponible en `https://upcommons.upc.edu/handle/2117/11985`.
- Agustín de la Villa Cuenca. *Problemas de álgebra con esquemas teóricos*. Ed. CLAGSA. ISBN 978-84-92184-71-2.
- María Luisa Casado Fuente, Ángeles Castejón Solanas, José Fábrega Golpe, María del Carmen Morillo y Luis Sebastián Lorente. *Apuntes de Geometría Lineal*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Universidad Politécnica de Madrid.
- Máximo Anzola, José Caruncho y G. Pérez-Canales. *Problemas de Álgebra. Tomo 6. Geometría afín y euclídea*. Ed. Primer ciclo. ISBN 978-84-300-5246-2.