Formas bilineales y cuadráticas

Problemas resueltos

Mar Angulo Martínez
mar.angulo@u-tad.com

- **Problema 6**

f(x,y)= $x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3$ Calcular

a) Expresión matricial de f
b) Rango y núcleo de la forma bilineal
c) Si consideramos el cambio de base $x_1{}' = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $x_2{}' = -x_1 - x_3$, $x_3{}' = -x_2 - x_3$

$(x_1{}', x_2{}', x_3{}')$ son las coordenadas de un vector en una base B. Obtener la expresión de f en la base B

- f(x,y)= $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$
- El rango de la forma bilineal es el rango de cualquiera de sus matrices asociadas

rang $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$=2 (es una forma degenerada)

- Núcleo: N(f)={x∈ $V / f(x,y) = 0 \quad \forall y \in E\}$ $\Longrightarrow$ $Resolvemos$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es decir, N(f)={(z,-z,z)/z∈ $R\}$

- La expresión matricial del cambio de base es:

X=PX´ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Coordenadas de un vector en base B

Coordenadas de un vector en base B´

P=(|vectores de B´en función de B|)

f(x,y)= (PX´)^{t}A(PY´)=$X'^{t}P^{t}$APY´= X'^{t}MY´ con M= P^{t}AP

- **Problema 7**

De una forma bilineal f: $P1(x) \times P1(x) \longrightarrow R$
se sabe que es simétrica y que f(x+1,x+1) =8
f(x+2,x+2)=11
f(x,x)=3
Calcular A respecto de la base {1,x}.

- f(1,1)=a_{11} f(1,x)=a_{12} $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- f(x,1)=a_{21} f(x,x)=a_{22}
- Como f es una forma bilineal y simétrica:
- f(x+1,x+1) =f(x,x)+f(x,1)+f(1,x)+f(1,1)= $a_{22}+2a_{12}+a_{11}$= 8
- f(x+2,x+2) =f(x,x)+f(x,2)+f(2,x)+f(2,2)= $a_{22}+2f(2,x)+4f(1,1)=a_{22}+4a_{12}+4a_{11}$= 11
- f(x,x)=3=a_{22}

$a_{11}=-1$ a_{12}=3 $M_B(f)=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

- **Problema 8**

Dada la forma bilineal f: $P_2(x)\; xP_2(x) \longrightarrow$ R t.q. f(p,q)=p(0).q(0)

Obtener *siendo B={2+x-x^2,1+2x,3}={p_1, p_2, p_3}*

$Calculamos\ \ p_1$(0)=2 p_2(0)=1 p_3(0)=3

- f(p_1, p_1) $= a_{11} = p_1$(0). p_1(0)= 2x2=4 f(p_1, p_2) $= a_{12} = p_1$(0). p_2(0)= 2x1=2 f(p_1, p_3) $= a_{13} = p_1$(0). p_3(0)= 2x3=6
- f(p_2, p_1) $= a_{21} = p_2$(0). p_1(0)= 1x2=2 f(p_2, p_2) $= a_{22} = p_2$(0). p_2(0)= 1x1=1 f(p_2, p_3) $= a_{23} = p_2$(0). p_3(0)= 1x3=3
- f(p_3, p_1) $= a_{31} = p_3$(0). p_1(0)= 3x2=6 f(p_3, p_2) $= a_{32} = p_3$(0). p_2(0)= 3x1=3 f(p_3, p_3) $= a_{13} = p_3$(0). p_3(0)= 3x3=9

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 10

Descomponer la siguiente forma bilineal en suma de una forma bilineal simétrica y otra antisimétrica

f(x,y) = $2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 6x_2y_1 - x_2y_2$

$f_s = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x))$ $\qquad$ $f_a = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$

- 1ª forma: Directamente en la expresión de f

f_s(x,y)= $x_1y_1 + \frac{7}{2}x_1y_2 + 3x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2 +$

$+ x_1y_1 + 3x_1y_2 + \frac{7}{2}x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2 =$

$= 2x_1y_1 + \frac{13}{2}x_1y_2 + \frac{13}{2}x_2y_1 - x_2y_2$

f_a(x,y)= $x_1y_1 + \frac{7}{2}x_1y_2 + 3x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2$

$- x_1y_1 - 3x_1y_2 - \frac{7}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 =$

$= \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1$

- 2ª forma: Matricialmente
- $A_s = \frac{A+A^t}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13/2 \\ 13/2 & -1 \end{pmatrix}$

$A_a = \frac{A-A^t}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$

- **Problema 11**

La matriz de una forma bilineal f: ExF $\longrightarrow$ K

en las bases $B_E = \{u_1, u_2\}$ $B_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Si $= \{u_1 - u_2, u_1 + u_2\}$ $B'_F = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$
Hallar la matriz de f en estas bases

- P=$P_E = M_{B'_E B_E}$=$(|vectores\ de B'_E|)_{B_E}$=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ X=PX´

$Q = P_F = M_{B'_F B_F}$=$(|vectores\ de B'_F|)_{B_F}$=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ Y=QY´

f(x,y)= $(PX')^t A(QY')$=$X'^t P^t AQY'$= $X'^t MY'$ con M= $P^t AQ$
A y M son equivalentes

M=P^tAQ=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -1 & -6 & -6 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

- **Problema 12**

La matriz de la forma bilineal f: $R^2 x R^2 \longrightarrow R$ en la base B={(1,2); (3,-7)} es A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Obtener la matriz de f en la base canónica de R^2.

- En R^2: $B \longrightarrow B_c \quad P = M_{B_C B}$=(|$vectores\ de B_C$|)$_B$=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}^{-1}$ = $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- En este caso: X=PX´ e Y=PY´

f(x,y)= (PX´)^{t}A(PY´)=$X^{\prime t} P^t$APY´= $X^{\prime t}$MY´ con M= P^tAP
A y M son congruentes

M=P^tAP= $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$=$\frac{1}{13^2}\begin{pmatrix} 150 & 55 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$

- **Problema 13**

Si S_2 *es el espacio vectorial real de las matrices simétricas* $2x2$

Y B= $\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\}$ es una base del mismo.

F es una forma bilineal simétrica sobre S_2 cuya $M_B(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) ¿cuál es el rango de f? Hallar una base del núcleo de f
b) Calcular el subespacio conjugado de la matriz
c) Construye una base de vectores conjugados dos a dos de S_2
d) Clasificar la forma cuadrática asociada.

- rang f= rang $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$=2; kerf=N(f)={(x,y,z)/ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$={(-y,y,y)/y∈ R} $Base: (-1,1,1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$
- Subespacio conjugado de M=$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}$ es S={$\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}$/f(A,M)=0}={(a,b,c)/(1, 2, 0) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$=0={(a,b,c)/3a+5b-2c=0}
- Base de vectores conjugados 2 a 2 de S_2 Tomamos un vector cualquiera v_1= $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ y calculamos su subespacio conjugado

={$\begin{pmatrix}x & y\\y & z\end{pmatrix}$/(1, 0, 0) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$=0={(x,y,z)/x+y=0} Tomamos un vector de S_1: v_2=(0,0,1)=$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

- calculamos ahora el subespacio conjugado de v_1 y v_2: le llamamos S_2

$$S_2=\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} / (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0=\{(x,y,z)/x+y=0;\ -y+z=0\}$$

Tomamos un vector de S_2: $v_3=(-1,1,1)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nuestra base de vectores conjugados es B={$v_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $v_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $v_3=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$}

- la forma cuadrática asociada es q(x)=f(x,x) $=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$$

- $P_1=1>0$ $\quad P_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}>0$ $\quad P_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ ***forma cuadrática semidefinida positiva***

- **Problema 15**

Clasificar las formas cuadráticas (según los valores de a)
$q(x_1, x_2\ x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

$$M_B(q)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

- Hemos de construir una matriz diagonal que represente a q

D=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-a^2 & 0\\ 0 & 0 & (1-a^2)(-5a^2-4a)\end{pmatrix}$ (Válida para a$\neq \pm 1$)

- Valores que anulan algún elemento diagonal: a= ± 1; a=0 y a=-4/5
- Si a=1 D=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Si a=-1 D=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- Si a$\in (-\infty, -1)$ $los\ d_i\ \ son + \ - \ +$ $\quad$ $q\ es\ indefinida$
- Si a$\in \left(-1, -\frac{4}{5}\right)$ $los\ d_i\ \ son + \ + \ -$ $\quad$ $q\ es\ indefinida$
- Si a = $-\frac{4}{5}$ $\ los\ d_i\ \ son$ + + 0 $\quad$ q es semidefinida positiva
- Si a$\in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$ $los\ d_i\ \ son + \ + \ +$ $\quad$ $q\ es\ definida\ positiva$
- Si a = 0 $\ los\ d_i\ \ son$ + + 0 $\quad$ q es semidefinida positiva
- Si a$\in (0,1)$ $los\ d_i\ \ son + \ + \ -$ $\quad$ $q\ es\ indefinida$
- Si a$\in (1, \infty)$ $los\ d_i\ \ son + \ - \ +$ $\quad$ $q\ es\ indefinida$

- **Problema 16**

Clasificar q(x)= $X^t A X = (x_1, \dots \dots x_n) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- Estudiamos el signo de los menores principales Δ_k
  - Δ_1=1 >0 $\quad$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$ >0 $\quad$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}$ =2a-2

    Si a>1: q es definida positiva

    Si a=1: q es semidefinida positiva

- **Problema 17**

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre R y
B=$\{e_1, e_2, e_{3,} e_4\}$.
Consideramos la forma cuadrática (definida sobre V):
$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$
Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática

- A(q)=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Haciendo transformaciones elementales

D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Es una forma indefinida y degenerada

- **B** $=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ A(q)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- **Vamos a construir una base B´=$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vectores conjugados de modo que $M_{B'}(q)$ =D**
- Elegimos un vector v_1 tal que f(v_1, v_1)$\neq 0$ $p.ej.$ $v_1 = (1,0,0,0)$ $\longrightarrow$ f(v_1, v_1) =1
- Construimos una base del subespacio conjugado
- $L < v_1 >^c$ ={(x,y,z,t)/(1,0,0,0) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$=0 ={(x,y,z,t)/x+2y+z+t=0}

Elegimos $v_2 = (1,0,0,-1)$ $\longrightarrow$ f(v_2, v_2) =(1,0,0,-1).A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$=-1

- Construimos una base del subespacio conjugado $L<v_1,v_2>^c$=$L<v_1>^c\cap L<v_2>^c$
- $L<v_1,v_2>^c$=$L<v_1>^c\cap L<v_2>^c$=
- {(x,y,z,t)/x+2y+z+t=0; (1,0,0,-1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$=0 ={(x,y,z,t)/x+2y+z+t=0; y+2z+t=0}

$\longrightarrow$ {(x,y,z,t)/ z=x+y; t=-2x-3y}={(x, y, x+y, -2x-3y) Elegimos v_3= (1,0,1,-2) $\longrightarrow$ f(v_3, v_3) =2

- Construimos una base del $L<v_1,v_2,v_3,>^c$=$L<v_1>^c\cap L<v_2>^c\cap L<v_3>^c$=
- {(x,y,z,t)/x+2y+z+t=0; y+2z+t=0; (1,0,1,-2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$=0 =

{(x,y,z,t)/x+2y+z+t=0; y+2z+t=0; z=0}={(x,y,z,t)/ x=-y; t=-y}={(-y, y, 0, -y)
Elegimos v_4= (-1,1,0,-1) $\longrightarrow$ f(v_4, v_4) =0

- Por tanto, en la base **B´ ={**$v_1=(1,0,0,0)$, v_2= (1,0,0,−1), v_3= (1,0,1,-2), v_4= (-1,1,0,-1) }

Diagonalización por congruencia

- $La\ matriz\ de\ paso\ M_{B'B} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} & \boldsymbol{v_4} \end{array}$$

- D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Es una forma indefinida y degenerada

¿Y cuál es la expresión de la forma cuadrática en B y en B´?

ϕ(x,y,z)=$X^t\ M_{B'}(f)X = x^2$-y^2+2z^2

- **Problema 18**

Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
$q(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz$

- A(q)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- **Vamos a construir una base B´={v_1, v_2, v_3} de vectores conjugados de modo que $M_{B'}(f)$ =D**
- Elegimos un vector v_1 tal que f(v_1, v_1)$\neq 0$ $p.ej.$ $v_1 = u_1$=(1,0,0)
  f(v_1, v_1) =1
- Construimos una base del subespacio conjugado
- $L<v_1>^c$ ={(x,y,z)/(1,0,0) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=0} ={(x,y,z)/x+2y+z=0}

Elegimos v_2= (1,-1,1) f(v_2, v_2) =1

- Construimos una base del subespacio conjugado de ambos

$L < v_1, v_2 >^c$=$L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$

- $L < v_2 >^c$ ={(x,y,z)/(1,-1, 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$={(x,y,z)/2y=-3z}
- $L < v_1, v_2 >^c$=$L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$={(x,y,z)/x+2y+z=0; 2y=-3z}

Elegimos v_3= (4,-3,2) f(v_3, v_3) =-7

- Por tanto en la base **B´ ={**$v_1 = (1,0,0)$, v_2 =(1,-1, 1), $v_3 = (4, -3,2)$}

$M_{B'}(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Es una forma indefinida y no degenerada

Diagonalización por congruencia

- **Problema 19**

- Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
- $q(x, y, z) = x^2 - 3z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$

- $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2+C_1 \\ C_3-C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{C_3-2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

D $\qquad$ P^t

- Es una forma indefinida y degenerada

- **Problema 20**

- Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
- $q(x, y, z, t)$=xy+yz+xt+yt+zt

$q(x, y, z, t)$=xy+yz+xt+yt+zt=$\underbrace{(x+z+t)(y+t)}$$-t^2$= $x'^2 - y'^2 - t^2$

- Tratamos de escribirlo como suma por diferencia= diferencia de cuadrados
  - Así: x+z+t= x´+y´ y y+t=x´-y´

- Es una forma indefinida y degenerada

- A(q)=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Problema 21**

- Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
- $q(x, y, z)$=$3y^2 + 2xz$=$3y'^2$+2(x´+z´) (x´-z´)

$= 3y'^2 + 2x'^2 - 2z'^2$

- Es una forma indefinida y no degenerada

- **Problema 22**

> - Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
> - $q(x,y,z)=x^2+ay^2+3z^2+2xy+2xz+2ayz$

- $M_B(q)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a\\ 1 & a & 3\end{pmatrix}$

- $x^2+ay^2+3z^2+2xy+2xz+2ayz=(x+y+z)^2+(a-1)y^2+2z^2+2(a-1)yz=$
  $=(x+y+z)^2+(a-1)(y+z)^2+(3-a)z^2$

$$= x'^2 \quad +(a-1)y'^2 \quad + \quad (3-a)z'^2$$

- $D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & a-1 & \\ & & 3-a\end{pmatrix}$

Diagonalización por congruencia

- **Utilizando matrices elementales**

- $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$

> - Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
> - $q(x, y, z)=x^2 + ay^2 + 3z^2 + 2xy+2xz+2ayz$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{C_3 - C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

D $\qquad\qquad$ P^t

- Si a$\in (-\infty, 1)$ $los\ d_i\ \ son + \ - \ +$ $q\ es\ indefinida$ (no degenerada)
- Si a = 1 $\quad los\ d_i\ \ son$ + 0 + q es semidefinida positiva
- Si a$\in (1,3)$ $los\ d_i\ \ son + \ + \ +$ $q\ es\ definida\ positiva$
- Si a = 3 $\quad los\ d_i\ \ son$ + + 0 q es semidefinida positiva
- Si a$\in (3, \infty)$ $los\ d_i\ \ son + \ \pm$ $q\ es\ indefinida$ no degenerada

- **Problema 23**

- Diagonalizar y clasificar la forma cuadrática
- $q(x,y,z)=x^2-ay^2+2xz-4ayz$

- $M_B(q)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -a & -2a\\ 0 & -2a & 0\end{pmatrix}$

- $x^2-ay^2+2xz-4ayz= =(x+z)^2-ay^2-z^2-4ayz=$

$$=(x+z)^2-a(y+2z)^2+(4a-1)z^2$$

$$= x'^2 \quad -ay'^2 \quad + \quad (4a-1)z'^2$$

- Si a$\in (-\infty, 0)$ $los\ d_i\ \ son + \ + y\ -$ $q\ es\ indefinida$ no degenerada
- Si a = 0 $los\ d_i\ \ son$ + 0 - q es indefinida degenerada
- Si a$\in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ $los\ d_i\ \ son +, -, -$ $q\ es\ indefinida\ no\ degenerada$
- Si a = $\frac{1}{4}$ $los\ d_i\ \ son$ + - 0 q es indefinida degenerada
- Si a$\in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ $los\ d_i\ \ son +, -, +$ $q\ es\ indefinida$ no degenerada

- **Problema 24**

Dada la familia de formas cuadráticas

$q(x,y,z)=x^2+y^2+(k+1)z^2+2xz+2kyz$ calcular:

a) Matriz de dichas formas cuadráticas, para cada valor de k
b) Clasificar las formas cuadráticas según los valores de k
c) Para k=2 obtener el subespacio conjugado de S={(x,y,z)/x-y=0;y=0}
a) Diagonalizar q para k=3
b) Para k=4 diagonalizar encontrando una base de vectores conjugados

- $M_B(q)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & k\\ 1 & k & k+1\end{pmatrix}$

➢ Estudiamos el signo de los menores principales Δ_k

- $\Delta_1=1>0$ $\quad\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2>0$ $\quad\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & k\\ 1 & k & k+1\end{vmatrix}=k(1-k)$

Si k<0 ó k>1: q es indefinida no degenerada
Si 0<k<1 $\Delta_3>0$ q es definida positiva
Si k=0 ó k=1 q es semidefinida positiva

c) Para k=2 obtener el subespacio conjugado de S={(x,y,z)/x-y=0;y=0}

- El conjugado de S será el subespacio generado por vectores que sean conjugados de los vectores de una base de S
- Obtenemos por tanto una base de S: dim S=1 Base de S: (0,0,1)

  - Construimos una base del subespacio conjugado
  - $L<(0,0,1)>^c$ ={(x,y,z)/(0,0,1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$=0} ={(x,y,z)/x+2y+3z=0}

d) Diagonalizar q para k=3

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

- **Utilizando matrices elementales**
- $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 - F_1$ $\qquad$ $C_3 - C_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3 - 3F_2$ $\qquad$ $C_3 - 3C_2$

D $\qquad$ P^t

Diagonalización por congruencia

- **B =**$\{u_1, u_2\ , u_3\ \}$ $\quad M_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- **Vamos a construir una base B´=**$\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\ , \boldsymbol{v_3}\ \}$ **de vectores conjugados de modo que** $\boldsymbol{M_{B'}(q)} =$**D**
- Elegimos un vector v_1 tal que f(v_1, v_1)≠ 0 $\quad p.ej.\quad v_1 = u_1 \Longrightarrow$ f(v_1, v_1) =1
- Construimos una base del subespacio conjugado $L < v_1 >^c$ ={(x,y,z)/(1,0,0) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=0}

  ={(x,y,z)/x+z=0}

  Elegimos v_2= (0,1,0) $\Longrightarrow$ f(v_2, v_2) =1
- Construimos una base del subespacio conjugado $L < v_1, v_2 >^c = L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$
- $L < v_2 >^c$ ={(x,y,z)/(0,1,0) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$={(x,y,z)/y+4z=0}
- $L < v_1, v_2 >^c = L < v_1 >^c \cap L < v_2 >^c$={(x,y,z)/x+z=0; y+4z=0}

  Elegimos v_3= (-1,-4,1) $\Longrightarrow$ f(v_3, v_3) =-12
- Por tanto en la base **B´ =**$\{v_1 = (1,0,0), v_2$ =(0,1,0), $v_3 = (-1,-4,1)\}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$