Análisis Matemático I

Tema 2

Números complejos

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2024-2025

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemática Computacional

Índice

1 Introducción

Los números complejos surgieron en respuesta a la necesidad de resolver problemas en los que los números reales no conseguían ofrecer una solución, siendo un ejemplo típico el cálculo de las soluciones de la ecuación $x^2+1=0$.

De forma precisa, se define **número complejo** como aquel par ordenado $z=(a,b)$, con $a,b \in \mathbb{R}$, donde al número a se le denomina **parte real** y al número b **parte imaginaria** del número complejo, de manera que se cumplen las siguientes propiedades y reglas de cálculo:

- Igualdad de números complejos: $(a,b)=(c,d) \iff a=c$ y $b=d$
- Suma de números complejos: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- Diferencia de números complejos: $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$
- Producto de un número complejo por un escalar: $k(a,b)=(ka,kb)$
- Producto de dos números complejos: $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$
- División de un número complejo por un escalar: $\dfrac{(a,b)}{k}=\dfrac{1}{k}(a,b)=\left(\dfrac{a}{k},\dfrac{b}{k}\right)$
- División de dos números complejos: $\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=\dfrac{(ac+bd,bc-ad)}{c^2+d^2}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

Al conjunto de los números complejos se le denota mediante la letra $\mathbb{C}$, y por la forma en que está construido constituye una extensión de los números reales, puesto que todo número $a \in \mathbb{R}$ se puede expresar como el número complejo $(a,0) \in \mathbb{C}$. En cambio, a los números complejos de la forma $(0,b)$ se les denomina números imaginarios puros. El único número real que a la vez es imaginario puro es el número 0.

En la práctica, los números complejos no se suelen representar como el par ordenado $z=(a,b)$, sino que habitualmente se utiliza la representación en forma **binómica** (o **binomial**) $z=a+ib$, donde i es la unidad imaginaria para la que se cumple que $i^2=-1$.

De esta forma, podemos definir el conjunto de los números complejos de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}}$$

Una tercera forma de representar los números complejos es la forma **polar**, donde se cumple la relación $z=x+iy=r\cos(\theta)+ir\,\text{sen}(\theta)$, conociéndose el valor r como **módulo** y el valor θ como **argumento** del número complejo. El módulo también se representa como $|z|$, y su valor se puede calcular como $\sqrt{x^2+y^2}$.

Dado un número complejo, su argumento θ no está definido de forma única, ya que $\theta+2\pi$, $\theta+4\pi$ y en general $\theta+2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$, representan el mismo argumento que θ. Por ello, el criterio habitual para referirse al argumento de un número complejo es usar $\theta \in [0,2\pi)$ o $\theta \in (-\pi,\pi]$.

La última manera de representar un número complejo es la forma **exponencial**, donde $z=re^{i\theta}$. Este tipo de representación es la utilizada en la conocida fórmula de Euler, así como en la identidad de Euler que es un caso particular de la anterior.

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\,\text{sen}(\theta) \qquad e^{i\pi}+1=0}$$

Con esta definición se pueden establecer las siguientes relaciones:

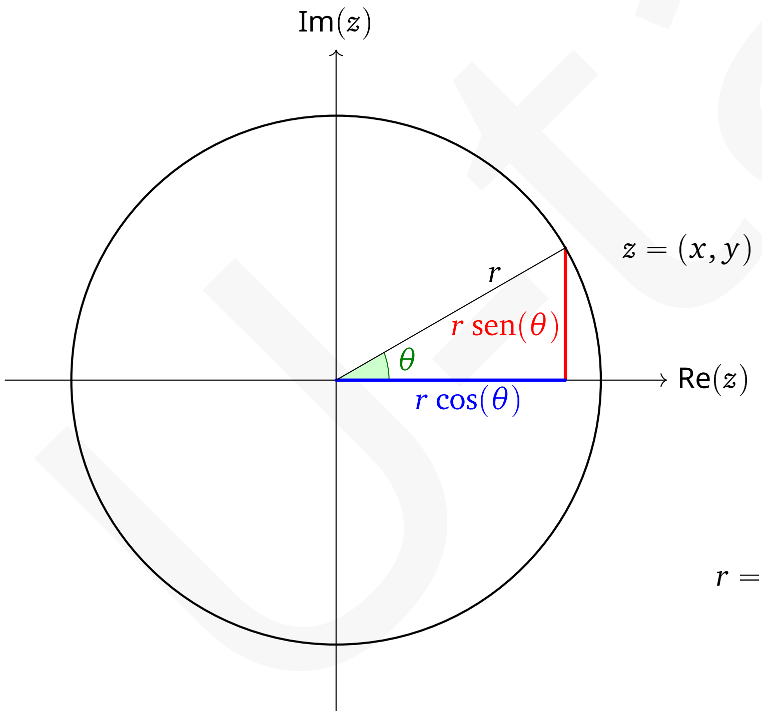
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

En la forma exponencial, el producto de dos números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ se expresa como $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. De manera similar, una potencia se puede expresar como $z^n = \left(r e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$.

2 Representación gráfica

Si identificamos el número complejo $a + ib$ con el elemento $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, podemos representar los números complejos mediante puntos del plano, donde el eje de abscisas es el eje real y el eje de ordenadas es el eje imaginario. El **afijo** de un número complejo es precisamente el punto que se le hace corresponder en el plano. Como curiosidad, el plano complejo a veces recibe el nombre de plano de Argand, en cuyo caso el número complejo se representa como un vector trazado desde el origen hasta el punto (a, b).

A continuación se muestra gráficamente la interpretación geométrica de un número complejo, así como la relación existente entre las cuatro formas de representación.



$$z = (x, y) = x + iy = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = re^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

3 Conjugado de un número complejo

Si $z = a + ib$, entonces se llama **conjugado** de z, y se denota como $\overline{z}$, al complejo cuyo valor es $\overline{z} = a - ib$. Desde un punto de vista geométrico, $\overline{z}$ es el punto simétrico de z respecto del eje real. Con esta definición, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

4 Fórmula de De Moivre

La **fórmula de De Moivre** es una de las más conocidas en números complejos, y tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\left(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^n=\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)}$$

Esta fórmula es más fácil de recordar utilizando la forma exponencial de los números complejos:

$$\left(\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)^n=\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}=\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

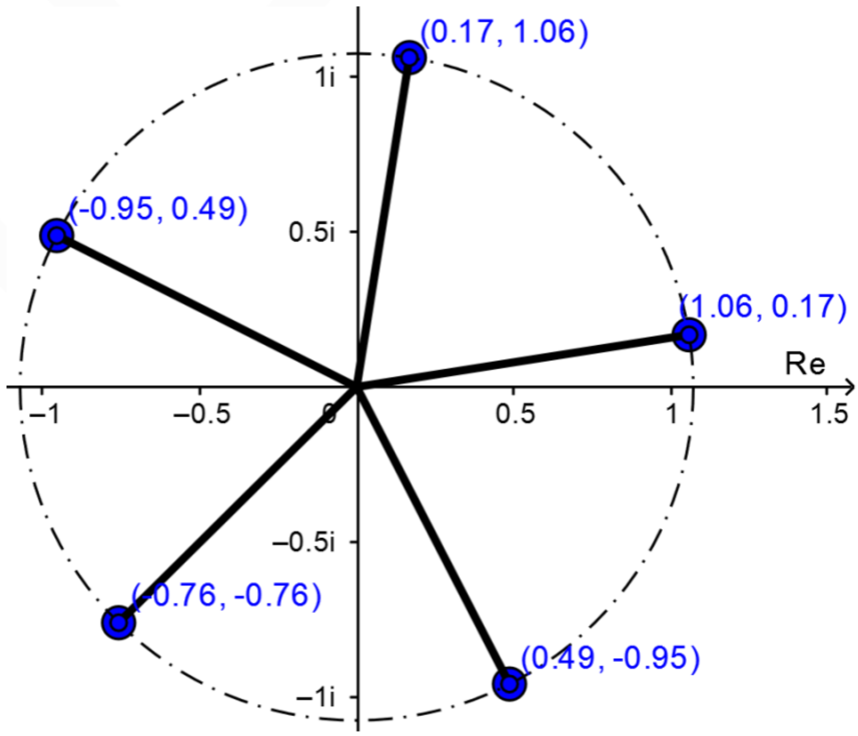
5 Raíces de un número complejo

La forma más sencilla de calcular la **raíz de orden n** de un número complejo consiste en utilizar la forma exponencial, ya que de esta manera obtenemos el siguiente resultado:

$$\boxed{\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}}$$

donde $k=0,1,\ldots,n-1$, y al valor obtenido cuando $k=0$ se le llama raíz principal. La función raíz n-ésima es por lo tanto una función multivaluada que genera n valores como resultado.

Todas las raíces de orden n se sitúan sobre la misma circunferencia centrada en el origen, estando equiespaciadas entre sí. La siguiente figura muestra la posición de las raíces quintas de $z=1+i$.



6 Logaritmo de un número complejo

El **logaritmo complejo** es una extensión compleja del logaritmo neperiano para valores reales. En términos de coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, el logaritmo complejo se puede expresar de esta forma:

$$\boxed{\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}\left(re^{i\theta}\right) = \mathrm{Ln}\left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right) = \mathrm{Ln}(r) + \mathrm{Ln}\left(e^{i(\theta+2k\pi)}\right) = \mathrm{Ln}(r) + i(\theta+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

El logaritmo complejo es una función multivaluada que proporciona infinitos valores para cada argumento de entrada z. La rama principal del logaritmo neperiano se obtiene cuando $k = 0$, y tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}(r) + i\theta}$$

Algunas de las propiedades que cumplen los logaritmos complejos son las siguientes:

- $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}(z_2) + \mathrm{Ln}(z_2)$
- $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}(z_1) - \mathrm{Ln}(z_2)$
- $\mathrm{Ln}\left(z_1^{z_2}\right) = z_2 \mathrm{Ln}(z_1)$

7 Potencia de un número complejo

Dada la expresión $f(z) = z^w$, donde tanto z como w son números complejos, tomando logaritmos se llega a la expresión:

$$\boxed{f(z) = z^w \implies \mathrm{Ln}\big(f(z)\big) = \mathrm{Ln}\left(z^w\right) = w\mathrm{Ln}(z) \implies f(z) = e^{w\mathrm{Ln}(z)}}$$

La **función potencia** es una función multivaluada que proporciona infinitos valores de salida para cada valor de entrada z.

A continuación se incluyen algunas propiedades interesantes de las potencias complejas:

- Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1^{z_2} z_1^{z_3} = z_1^{z_2+z_3}$.
- Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $\left(z_1 z_2\right)^{z_3} = z_1^{z_3} z_2^{z_3}$ para algún valor $k \in \mathbb{Z}$, pero esta propiedad no se cumple para los valores principales de las potencias complejas.
- Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, $\left(z_1^{z_2}\right)^n = z_1^{n z_2}$.

8 Problemas

1) Calcula la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = \dfrac{3-2i}{1+4i}$ b) $z_2 = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i}$ c) $z_3 = \cos(i)$ d) $z_4 = \operatorname{sen}(2+i)$

2) Calcula el módulo y argumento de $z_1 = 3^i$, $z_2 = i^i$, $z_3 = i^{3+i}$ y $z_4 = (1+i)^{2+i}$.

3) Calcula las raíces cuartas de la unidad.

4) Calcula las raíces cúbicas de -8.

5) Determina la forma binómica de $e^{\sqrt{i}}$.

6) Expresa en forma binómica el número $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^6$.

7) Calcula $\sqrt{-16-30i}$.

8) Determina $m \in \mathbb{R}$ de modo que $\left(2e^{\sqrt{2}i}\right)^m$ sea un número real negativo.

9) Determina los números complejos no nulos tal que su quinta potencia, z^5, sea igual a su conjugado, es decir, $\bar{z}$.

10) Dado el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$, calcula $P(i\sqrt{3})$ y $P(-i\sqrt{3})$. Resuelve a continuación la ecuación $P(z) = 0$.

11) Dado el número complejo $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$, calcula z^2 en forma binómica. A continuación, expresa z^2 en forma exponencial y deduce la forma exponencial de z.

12) Obtén la forma exponencial del número completo $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{(1-i)}$.

13) Calcula la parte real e imaginaria del número complejo $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2i\right)$.

14) Obtén la forma binómica del número complejo $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$.

15) Resuelve la ecuación $z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos, proporcionando las soluciones en forma binómica o exponencial.

16) Dado el número complejo $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, completa los siguientes apartados:

a) Exprésalo en forma binómica y exponencial.

b) Prueba que $z^4 = z$.

c) Determina las otras tres raíces de cuarto grado de z (es decir, $\sqrt[4]{z}$).

17) Resuelve la ecuación $z^3 + (5+3i)z^2 + (4+7i)z = 0$ en el cuerpo de los números complejos. Una vez obtenidas las soluciones, proporcionar la forma binómica del inverso multiplicativo de cada solución z.

18) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en el cuerpo de los números complejos:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} (3-i)x & + & (4+2i)y & = & 2+6i \\ (4+2i)x & - & (2+3i)y & = & 5+4i \end{array}\right\}$$

19) Resuelve la ecuación compleja $\operatorname{sen}(z) = 5$.

20) Resuelve la ecuación compleja $\cos(z) + i\sqrt{3} = 0$.

21) Determina el valor de los parámetros a y b para que el número complejo $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y de módulo unidad.

22) Determina de forma analítica el objeto geométrico que forman los números complejos que satisfacen la relación $|z-2i| = 2|z+3|$.

23) Demuestra que el lugar geométrico de los números complejos z que satisfacen la ecuación $|z-b| + |z+b| = 2a$ es una elipse, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq \pm b$.

24) Determina los números complejos que cumplen cada una de las siguientes condiciones, proporcionando de forma añadida una interpretación de los dos conjuntos de soluciones desde un punto de vista geométrico.

a) $\text{Re}(iz) - z\overline{z} = 0$

b) $\text{Im}\big((3+i)z\big) = 2$

25) Determina el conjunto de números complejos que cumplen por separado las siguientes condiciones. En el caso de que los afijos de esos números complejos tengan una forma geométrica reconocible, indica de cuál se trata.

a) $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

b) $|z| = z + 2\overline{z} + 1 + 2i$

26 Sabiendo que $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, proporciona de forma razonada dos números complejos z_1 y z_2 con partes real e imaginaria ambas no nulas que cumplan la condición $|\tanh(z)| = 1$.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Domingo Pestana, José M. Rodríguez, Elena Romera, Eva Tourís, Venancio Álvarez y Ana Portilla. *Curso práctico de Cálculo y Precálculo*. Tercera edición. Ed. Ariel Ciencia.
- Domingo Pestana Galván, José Manuel Rodríguez García y Francisco Marcellán Español. *Curso práctico de variable compleja y teoría de transformadas*. Ed. Pearson.
- Mariano Soler Dorda, Rosendo Bronte Abaurrea y Leandro Marchante Gutiérrez. *Cálculo infinitesimal e integral*. Ed. M. Soler.
- E. Lawson. *Complex numbers (SageMath)*. Disponible en `https://cocalc.com/share/public_paths/7f9d9c6c16b55a04ebc3805b5c2c7d6d7f65f9de`.