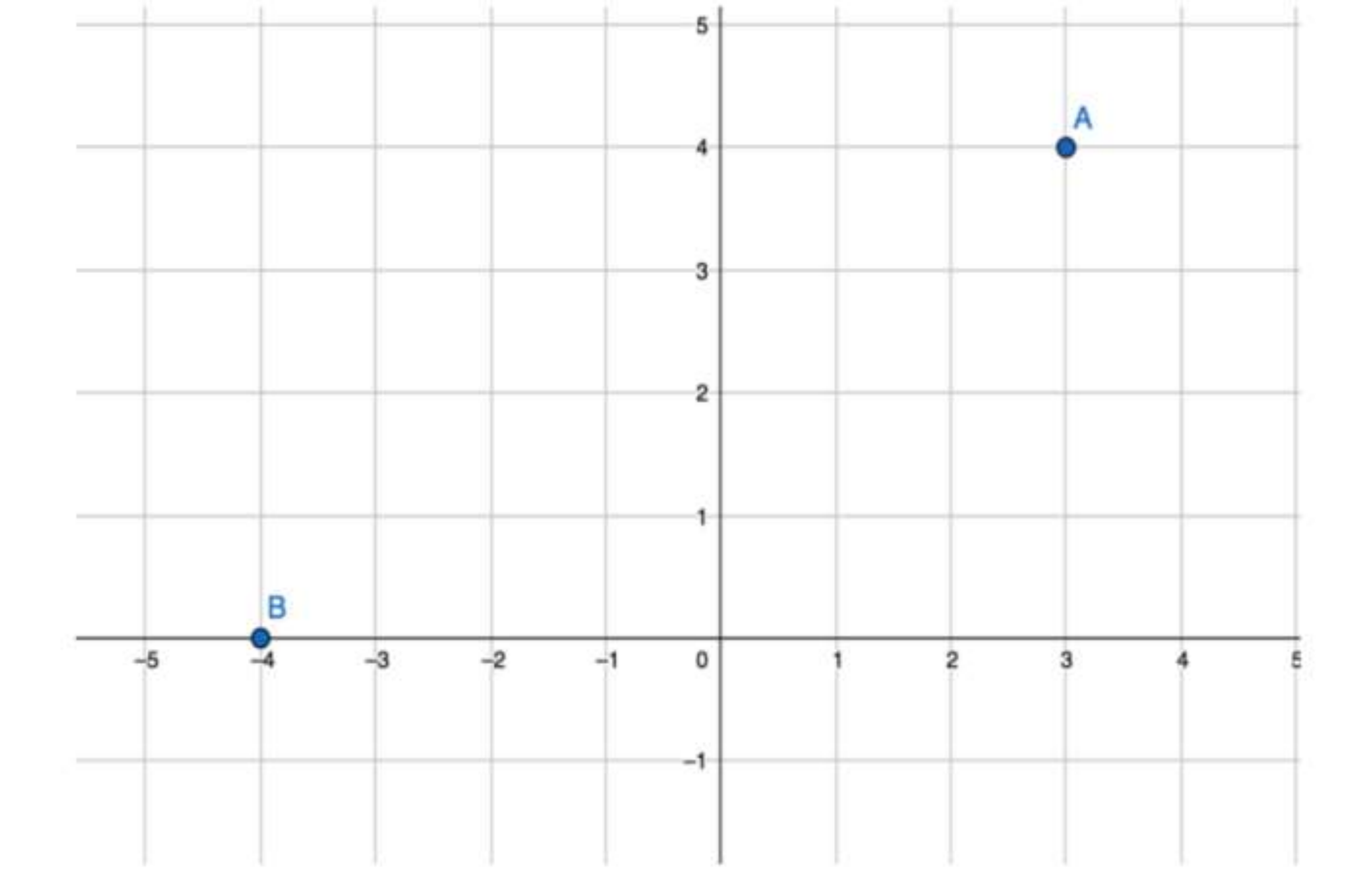
# Distancias

Topología - 1

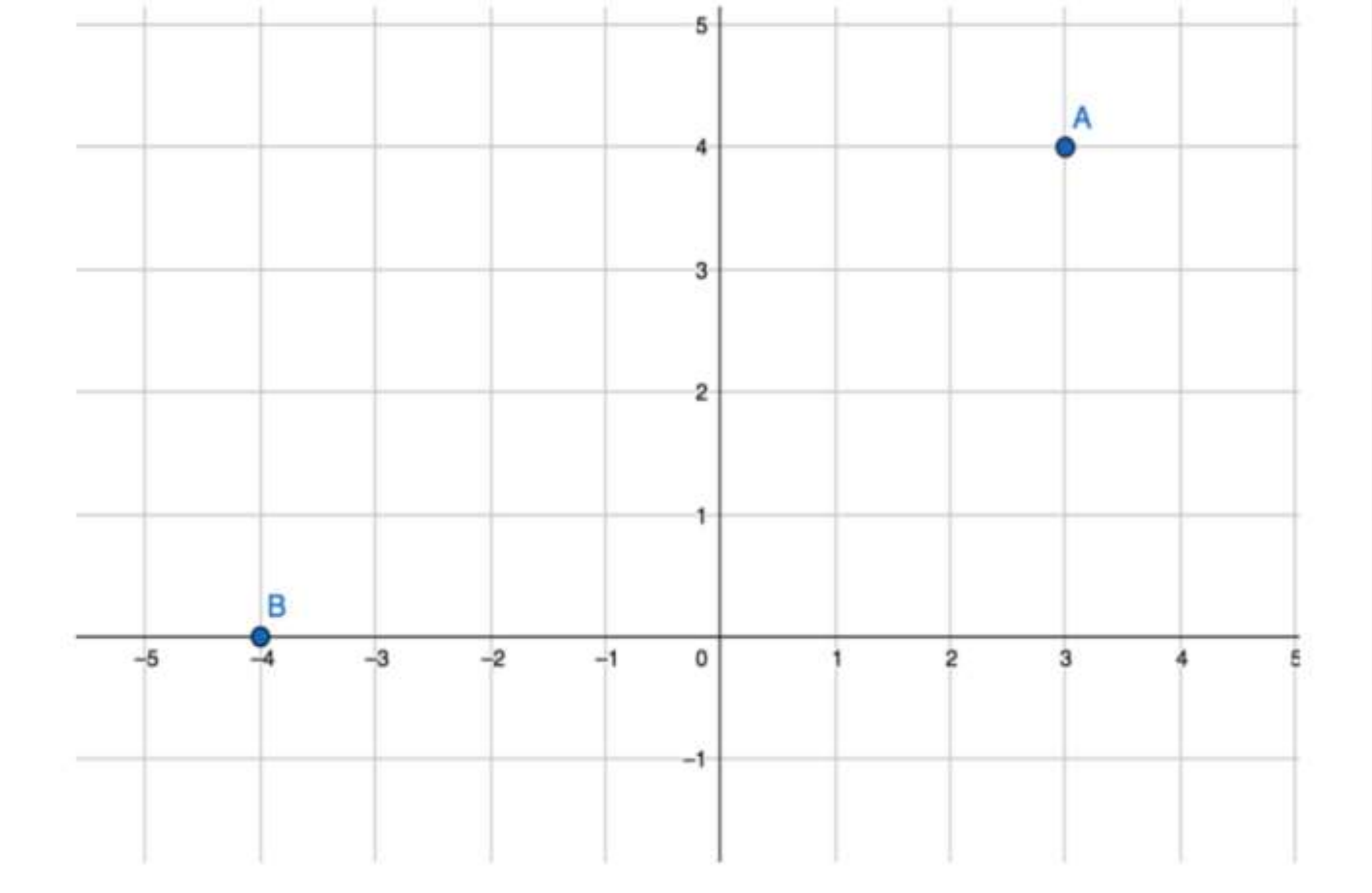
Georgy Nuzhdin

2023-2024

# La distancia entre los puntos A y B, ¿cómo calcularla?



# Imagínate que estás en Manhatten. Las rectas son calles y los cuadrados, edificios. ¿Cambia algo?



# DISTANCIA

| **Definición**: Sea $X$ un conjunto. Se dice que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una distancia (o **métrica**) en $X$ si se cumplen las propiedades

- 1) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular)

En estas condiciones, se dice que el par ($X$; $d$) es un **espacio métrico**.

# Las distintas distancias en $\mathbb{R}$

- De las siguientes definiciones, ¿cuáles son distancias?
  - $d(x, y) = |x - 2y|$
  - $d(x, y) = |x - y|$
  - $d(x, y) = (x - y)^2$
  - $d(x, y) = \begin{cases} 0, si\ x = y \\ 1, si\ x \neq y \end{cases}$

# Las normas y las distancias

- Cada norma induce una distancia
- $d(x, y) = ||x - y||$
- Cada distancia en el espacio vectorial induce una norma
- $||x|| = d(x, 0)$

# La distancia discreta

- Resulta que la última distancia que hemos visto

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, si\ x = y \\ 1, si\ x \neq y \end{cases}$$

puede definir distancia en cualquier conjunto discreto (por ejemplo, en el conjunto de alumnos de esta clase)

# La distancia en el conjunto de cadenas de letras

- ¿Se os ocurre alguna?
- La **Distancia de Hamming**: cantidad de caracteres distintos
- Problemas:
  - Ham (“Yo quiero salir contigo”, “No quiero salir contigo”) = 1
  - Ham (“Es casi lo mismo”, “ Es casi lo mismo”) = 16
- ¿Se os ocurre algo mejor?
- La **Distancia de Levenshtein** (o distancia de edición) entre dos cadenas de caracteres es la cantidad de borradas, inserciones, o sustituciones requeridas para transformar la cadena original a la cadena final
  - Lev (“Es casi lo mismo”, “ Es casi lo mismo”) = 1

# La distancia del taxista (Taxicab distance) en $\mathbb{R}^2$

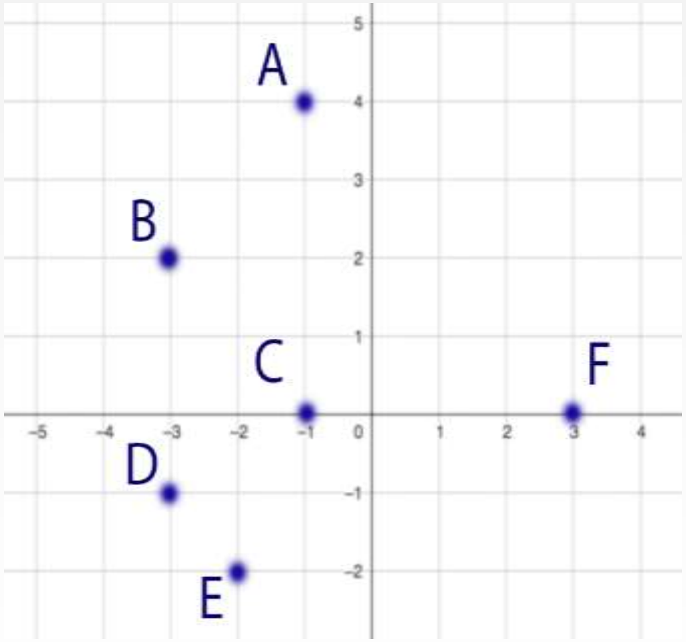
- Demuestra que, efectivamente, satisface la definición
- Escribe la fórmula de la distancia entre dos puntos $A\ (x_1, y_1)$ y $B\ (x_2, y_2)$
  - Usando la distancia euclidiana
  - Usando Taxicab distance
- ¿Qué distancia suele ser mayor, la TD o la Euclidiana? ¿Puedes demostrarlo?
- ¿Hay alguna constante C tal que $\frac{d_M}{C} \leq d_\epsilon$?

# Geodésicas

| **Definición**: un camino entre A y B se llama geodésica si no existe otro camino más corto entre ellos

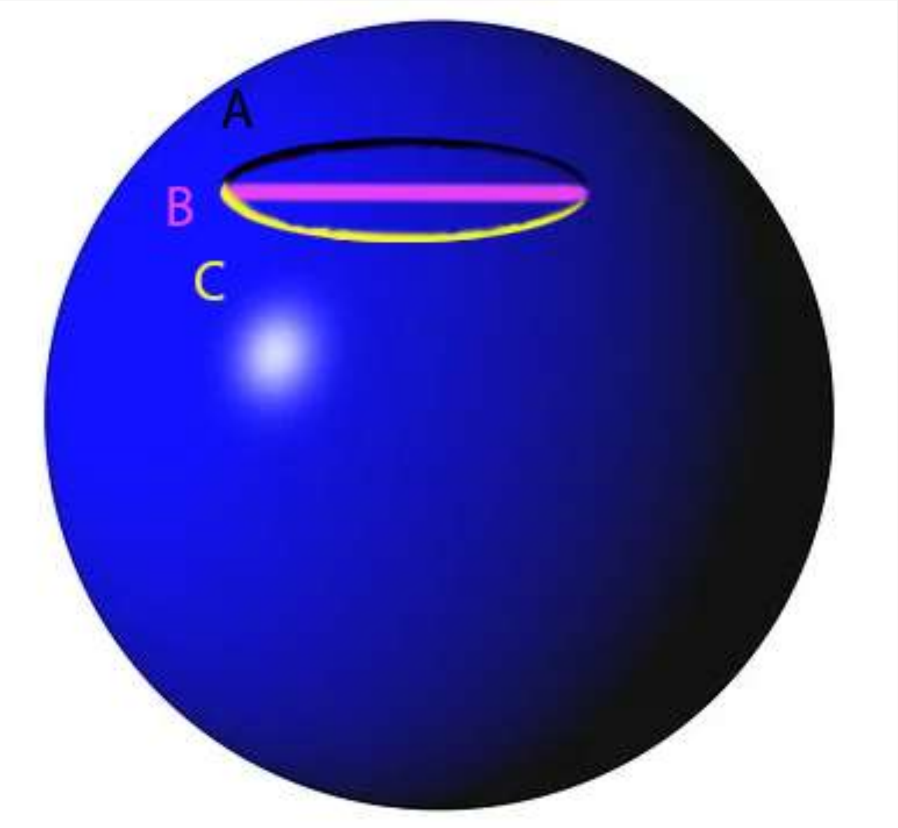
# Geodésicas en TD y ED

- ¿Cuáles son las geodésicas entre dos puntos en la distancia euclidiana?
- ¿Cuáles son las geodésicas en la TD?
- ¿Cuántas geodésicas hay entre
  - C y D
  - C y F
  - B y C
  - E y F
  - A y F ?



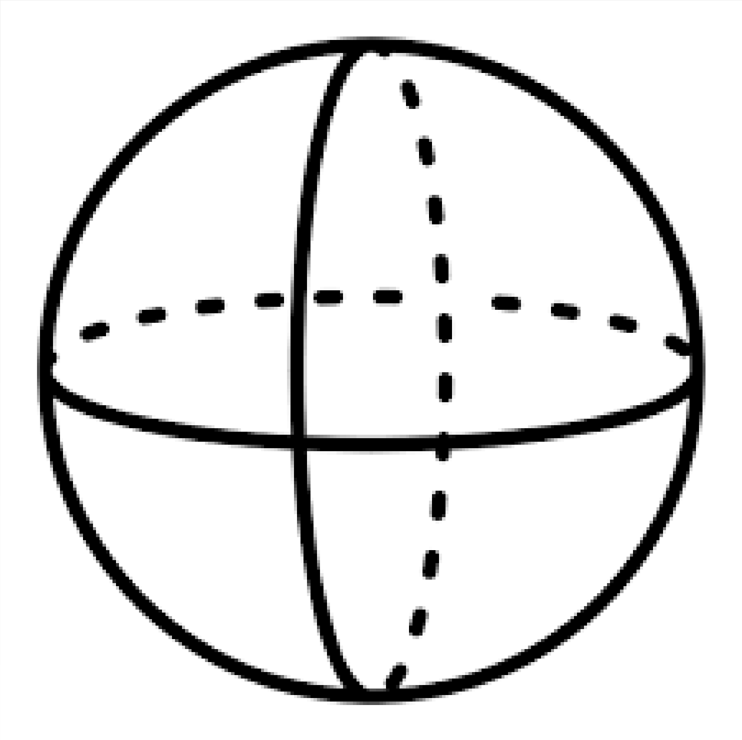
# Pequeño pero importante inciso: geodésicas en $S_2$

- ¿Cuál de los 3 caminos os parece el más corto, A, B o C?

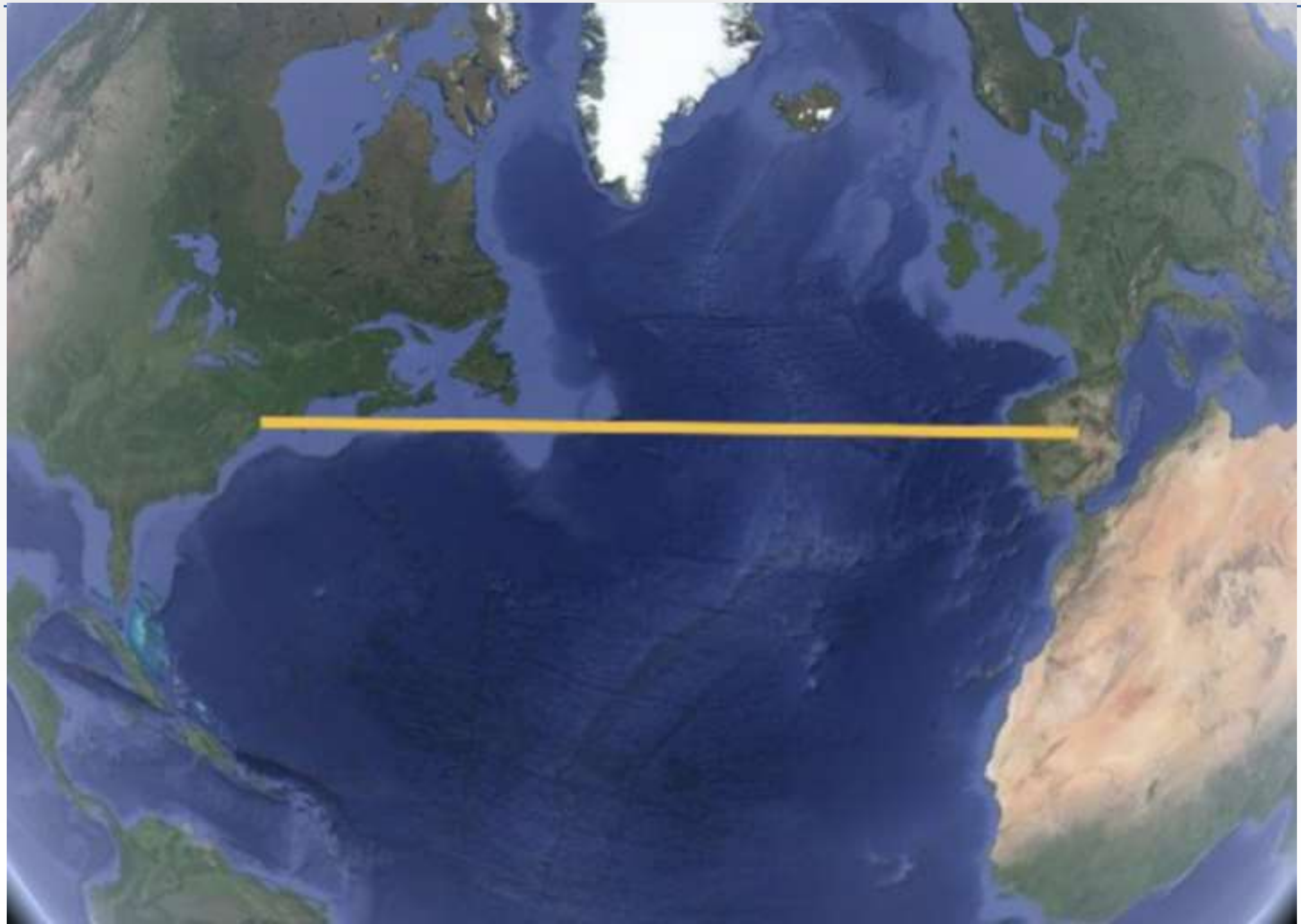


# Las geodésicas en $S_2$

- Son **circunferencias** con el centro en el centro de la esfera



# La ruta Nueva York – Madrid desde arriba



# La ruta Nueva York – Madrid en el mapa

# Las distintas distancias en $\mathbb{R}^2$

- La distancia euclidiana
- La Taxicab
- ¿SON DISTANCIAS?
  - La distancia de la Torre
  - La distancia del Rey
  - La distancia del Caballo

# Es fácil demostrar que cualquier pieza de ajedrez que recorra todas las casillas crea una distancia

- SI la distancia entre dos casillas es el mínimo de movimientos que tiene que hacer determinada pieza de ajedrez para desplazarse de una casilla a la otra, entonces la desigualdad triangular es obvia
- Efectivamente, si no se cumpliera, significaría que existe un camino más corto que el mínimo (contradicción)

# Distancia del máximo

- En un espacio vectorial definiremos distancia como máximo de las diferencias entre las coordenadas (aplicando el valor absoluto)
- **Ejemplo**: $A = (1,4,6), B = (3,-2,1),\ \overline{AB} = (2,-6,-5)$
- $d_{max}(A,B) = Max(2,|-6|,|-5|) = 6$

# Distintas caras de la misma moneda

- Sean $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$
- Podemos definir $d_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \cdots}$
- Es fácil ver que $d_1 = d_M, d_2 = d_\epsilon, d_\infty = d_{max}$

# Métricas en el conjunto de funciones continuas en [0; 1]

- ¡¡¡¿¿¿Cómo podemos definir la **distancia entre DOS FUNCIONES**???!!!
- Piensa que cada función es un vector de infinitas coordenadas (valores en cada punto)
- ¿Cómo sería el análogo de la distancia del máximo?
- ¿La euclidiana? ¿La Taxicab?

# Métricas en funciones continuas en [0; 1]

- *Métrica integral:* $d(f,h) = \int_0^1 |f(x) - h(x)|dx$
- *Métrica integral-2:* $d(f,h) = \sqrt{\int_0^1 \left(f(x) - h(x)\right)^2 dx}$
- *Métrica del supremo (mínima cota superior):*
$$d(f,h) = \sup(|f(x) - g(x)|)$$

- Busca la distancia en las tres métricas entre
  - $f = x, h = x^2$
  - $f = x, h = 2x$

# Métricas en funciones en [0; 1]

- *¿Cuál de estas distancias DEJA DE SER distancia si consideramos el espacio de todas las funciones, también las que no son continuas?*
  - *Métrica integral:* $d(f,h) = \int_0^1 |f(x) - h(x)|dx$
  - *Métrica integral-2:* $d(f,h) = \sqrt{\int_0^1 \left(f(x) - h(x)\right)^2 dx}$
  - *Métrica del supremo (mínima cota superior):*
    $$d(f,h) = \sup(|f(x) - g(x)|)$$
- Piensa en dos funciones que se diferencian solamente en un punto

# Métricas / Distancias equivalentes

Dos distancias $d_1, d_2$ se llaman **equivalentes** si existen $c > 0, C > 0$:

$$\forall\, X, Y \; c d_1(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq C d_1(X,Y)$$

# Métricas / Distancias equivalentes

- $\exists\, c, C > 0\text{: } \forall\, X, Y \; c d_1(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq C d_1(X,Y)$
- ¿Son equivalentes las métricas Taxicab y la euclidiana?
- ¿La del máximo y la euclidiana?

# Vamos a demostrar que

- $d_{max}$ es equivalente a la euclidiana en un espacio de finitas dimensiones
- Elijamos dos vectores, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Supongamos que entre todas las diferencias $|x_i - y_i|$ la más grande es la $|x_1 - y_1|$ (si no, cambiamos las coordenadas)
- Como $|x_1 - y_1| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2} \leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ sabemos que $\forall\ x, y\ d_{max}(x, y) \leq d_e(x, y)$
- Por otro lado, $d_e(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ $\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_1 - y_1|^2} = \sqrt{n}\sqrt{|x_1 - y_1|^2}$ $= \sqrt{n} d_{max}(x, y)$

# Métricas / Distancias equivalentes

- Demuestra que estas distancias NO son equivalentes

- $d_1(X,Y) = |X - Y|$
- $d_2(X,Y) = \arctan|X - Y|$

- Piensa que la segunda está acotada y la primera no

# Distancia de SUP vs Distancia integral en el conjunto de funciones

- Si C es el conjunto de funciones continuas de [0,1] en [0,1], compara estas distancias
  - $d_{sup}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \,/\, x \in R|\}$
  - $d_{int}(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$
- ¿Son equivalentes?

# Distancia de SUP vs Distancia integral en el conjunto de funciones

- ¿Son métricas equivalentes?
- Para demostrar que NO son equivalentes tenemos que construir ejemplos de funciones $f, g$ tales que
- $\forall c > 0 \; \exists \; f, g$: $d_{sup}(f, g) > c d_{int}(f, g)$
- Reductio ad absurdum: supongamos lo contrario, es decir
- $\exists c > 0 \; \forall \; f, g$: $d_{sup}(f, g) < c d_{int}(f, g)$
- Sea la función $f(x) = 0$ y la función $g(x) = x^c$
- Calcula $d_{sup}(f, g)$ (la del supremo) y $c d_{int}(f, g)$ (la integral) para estas funciones y termina la demostración