

Entregables Distancias Topología

Juan Rodríguez

Ejercicio 1

Determinar cuáles de las siguientes funciones son distancias en \mathbb{R} .

1. $d(x, y) = |x - y|$.

Es distancia: cumple todos los axiomas de una métrica (distancia euclidiana).

Propiedad Reflexiva: Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$

$$d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$$

Si $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$

$$d(x, y) = |x - y| = 0 \rightarrow x - y = 0 \rightarrow x = y$$

Propiedad Simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$$

Desigualdad Triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$d(x, z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$$

$$a = x - y \quad b = y - z$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

2. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$.

No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva

$$d(1, -1) = 0 \text{ y } 1 \neq -1.$$

3. $d(x, y) = |x - 2y|$.

No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva

$$d(1, 1) = 1 \neq 0$$

4. $d(x, y) = (x - y)^2$.

No es distancia. Incumple la desigualdad triangular

$$d(0, 2) = 4 \not\leq 1 + 1 = d(0, 1) + d(1, 2)$$

5. $d(x, y) = \sin^2(x - y)$.

No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva

$$d(x, y) = 0 \rightarrow x - y = k\pi, \text{ no solo cuando } x = y.$$

6. $d(x, y) = \arctan |x - y|$.

Es distancia: cumple todos los axiomas de una métrica (distancia euclidiana).

Propiedad Reflexiva:

Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$

$$d(x, x) = \arctan |x - x| = \arctan |0| = 0$$

Si $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$

$$d(x, y) = \arctan |x - y| = 0 \rightarrow x - y = 0 \rightarrow x = y$$

Propiedad Simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$

$$d(x, y) = \arctan |x - y| = \arctan |-(y - x)| = \arctan |y - x| = d(y, x)$$

Desigualdad Triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$d(x, z) = \arctan |x - z| \leq \arctan |x - y| + \arctan |y - z|$$

Tomamos tangente a ambos lados de la igualdad (Podemos hacerlo porque es una función monótona creciente, por lo que se cumple que $f(a) < f(b)$ si $a < b$)

$$\tan(\arctan |x - z|) \leq \tan(\arctan |x - y| + \arctan |y - z|)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

$$|x - z| \leq \frac{|x - y| + |y - z|}{1 - |x - y| \cdot |y - z|}$$

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq \frac{|x - y| + |y - z|}{1 - |x - y| \cdot |y - z|}$$

Ejercicio 2

Sea $d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|$ para A, B subconjuntos finitos de un conjunto universo U .

Propiedad Reflexiva:

Si $A = B$, entonces

$$d(A, A) = |A \cup A| - |A \cap A| = |A| - |A| = 0.$$

Si $d(A, B) = 0$, entonces $|A \cup B| = |A \cap B|$. Esto sólo puede ocurrir si $A = B$. Por tanto, $d(A, B) = 0 \iff A = B$.

Propiedad Simétrica

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B| = |B \cup A| - |B \cap A| = d(B, A).$$

Luego $d(A, B)$ es simétrica.

Desigualdad Triangular:

Queremos probar que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Empecemos escribiendo:

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|.$$

Por la fórmula de inclusión-exclusión:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

entonces

$$d(A, B) = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

De modo análogo:

$$d(A, C) = |A| + |C| - 2|A \cap C|, \quad d(B, C) = |B| + |C| - 2|B \cap C|.$$

Sumando las dos últimas:

$$d(A, C) + d(B, C) = |A| + |B| + 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

La desigualdad triangular

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$$

es equivalente a

$$|A| + |B| - 2|A \cap B| \leq |A| + |B| + 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

$$-2|A \cap B| \leq 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

$$-|A \cap B| \leq |C| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

$$|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B| \leq |C|.$$

Interpretación. El término de la izquierda representa los elementos de C en común con A y con B , restando los que se cuentan dos veces. Esa cantidad siempre es menor o igual que el número de elementos de C . Por tanto, la desigualdad se cumple y la desigualdad triangular queda demostrada.

Conclusión

| |
|---|
| $d(A, B) = A \cup B - A \cap B $ es una métrica en la familia de subconjuntos finitos de U . |
|---|

Ejercicio 3

Determinar cuáles de las siguientes funciones son distancias en \mathbb{R}^2 :

a) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

b) $d_{\times}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2|$,

c) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,

d) $d_{\min}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$,

e) $d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

Sean $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$, $r = (x_3, y_3)$.

a) Euclidiana d_2

Si $p = q$, entonces $d(p, q) = 0$

$$d(p, p) = \sqrt{(0+0)} = 0$$

Si $d(p, q) = 0$, entonces $p = q$ $d(p, q) = 0 \rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x_1 - x_2 = 0$ y también que $y_1 - y_2 = 0$

Por lo tanto $p = q$

Simetría: $d_2(p, q) = d_2(q, p)$.

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-(x_2 - x_1))^2 + (-(y_2 - y_1))^2} =$$

$$= \sqrt{((x_2 - x_1))^2 + ((y_2 - y_1))^2} = d(q, p)$$

Desigualdad triangular: Escribimos $u = q - p$, $v = r - q$ y $u + v = r - p$. Entonces

$$d_2(p, r) = \|u + v\| = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} \leq \|u\| + \|v\|,$$

donde la última desigualdad es la de Minkowski. Por tanto, d_2 es distancia.

b) Producto d_\times

No cumple la propiedad reflexiva: si $p \neq q$ pero comparten una coordenada, por ejemplo $p = (0, 0)$, $q = (0, 1)$, entonces

$$d_\times(p, q) = |0 - 0| \cdot |0 - 1| = 0 \quad \text{con } p \neq q.$$

No es distancia.

c) Manhattan d_1

Propiedad Reflexiva:

Si $p = q$, entonces $d(p, q) = 0$

$$d(p, p) = 0 + 0 = 0$$

Si $d(p, q) = 0$ entonces $p = q$

$$d(p, q) = 0 \rightarrow |x_1 - x_2| = 0 \quad \text{y también que} \quad |y_1 - y_2| = 0$$

$$\rightarrow p = q$$

Simetría: $d_1(p, q) = d_1(q, p)$.

Desigualdad triangular: usando la triangular en \mathbb{R} para cada coordenada,

$$|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, \quad |y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|.$$

Sumando,

$$d_1(p, r) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|) + (|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|) = d_1(p, q) + d_1(q, r).$$

Luego d_1 es distancia.

d) Mínimo d_{\min}

Incumple la propiedad reflexiva: si $p \neq q$ y comparten alguna coordenada, por ejemplo $p = (0, 0)$, $q = (0, 1)$,

$$d_{\min}(p, q) = \min\{|0 - 0|, |0 - 1|\} = 0 \quad \text{con } p \neq q.$$

No es métrica.

e) Máximo d_{∞}

Propiedad Reflexiva: $d_{\infty}(p, q) = 0 \iff p = q$.

Simetría: inmediata por el valor absoluto.

Desigualdad triangular: con $u = q - p$, $v = r - q$ y $u + v = r - p$:

$$\begin{aligned} d_{\infty}(p, r) &= \max\{|u_1 + v_1|, |u_2 + v_2|\} \leq \max\{|u_1| + |v_1|, |u_2| + |v_2|\} \\ &\leq \max\{|u_1|, |u_2|\} + \max\{|v_1|, |v_2|\} = d_{\infty}(p, q) + d_{\infty}(q, r). \end{aligned}$$

Por tanto, d_{∞} es métrica.

Ejercicio 4

Sea $X = [0, 1)$ y definamos, para $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

Probar que d es una distancia en X .

1) Reflexiva y simetría

- **Reflexiva:** $d(x, y) = 0 \iff \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$ (como $|x - y| < 1$ para $x, y \in [0, 1)$).
- **Simetría:** $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = \min\{|y - x|, 1 - |y - x|\} = d(y, x)$.

2) Desigualdad triangular

La idea es ver $X = [0, 1)$ como el cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} (la circunferencia), y expresar d como un ínfimo de distancias euclidianas en \mathbb{R} . Para $x, y \in [0, 1)$ definimos

$$\tilde{d}(x, y) := \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - y - k|.$$

Observemos que, como $|x - y| \in [0, 1)$, se tiene

$$\tilde{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} = d(x, y).$$

Por tanto, basta probar la desigualdad triangular para \tilde{d} :

$$\tilde{d}(x, z) \leq \tilde{d}(x, y) + \tilde{d}(y, z) \quad (\forall x, y, z \in [0, 1)).$$

Sea $m, n \in \mathbb{Z}$ arbitrarios. Usando la triangular en \mathbb{R} ,

$$|x - z - (m + n)| = |(x - y - m) + (y - z - n)| \leq |x - y - m| + |y - z - n|.$$

Tomando ínfimos (primero en m, n y notando que $m + n$ recorre todo \mathbb{Z}), obtenemos

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - z - k| \leq \inf_{m, n \in \mathbb{Z}} (|x - y - m| + |y - z - n|) \leq \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - y - m| + \inf_{n \in \mathbb{Z}} |y - z - n|.$$

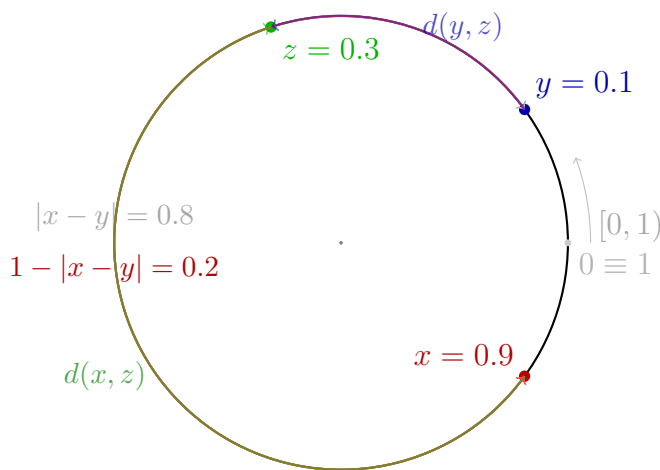
Esto es, $\tilde{d}(x, z) \leq \tilde{d}(x, y) + \tilde{d}(y, z)$. Como $\tilde{d} = d$, la desigualdad triangular queda probada para d .

Conclusión

Las tres propiedades (no negatividad y separación, simetría y desigualdad triangular) se cumplen. Luego

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\} \text{ define una métrica en } [0, 1).$$

Observación. Esta es la *distancia geodésica* en la circunferencia S^1 al identificar $0 \sim 1$.



Ejercicio 5

Sea X un conjunto finito. Supongamos que $d : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ es una distancia. Probar que necesariamente d coincide con la *distancia discreta*

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Sea ahora $d : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ una *distancia* cualquiera.

- Por la propiedad reflexiva, $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$.
- Si $x \neq y$, entonces por reflexiva *no* puede ocurrir $d(x, y) = 0$; como el codominio es $\{0, 1\}$, necesariamente $d(x, y) = 1$.

Concluimos que, para todos $x, y \in X$, $d(x, y) = \delta(x, y)$. Es decir, $d = \delta$.

Conclusión

La única distancia en X que toma valores exclusivamente en $\{0, 1\}$ es la métrica discreta:

$$d(x, y) = 0 \text{ si } x = y, \quad d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$

Ejercicio 6

En \mathbb{R}^2 , para $v = (x, y)$, demostrar

$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{2} \|v\|_2, \quad \text{donde } \|v\|_1 = |x| + |y|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La cota derecha es equivalente a acotar la razón

$$R(x, y) := \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por simetría basta suponer $x \geq 0$ y $y \geq 0$ (los valores absolutos eliminan signos) y parametrizar $y = kx$ con $k \geq 0$ y $x > 0$:

$$R(x, y) = \frac{x + kx}{\sqrt{x^2 + k^2x^2}} = \frac{1 + k}{\sqrt{1 + k^2}} =: f(k).$$

Buscamos $\max_{k \geq 0} f(k)$. Derivando,

$$f(k) = \frac{1 + k}{(1 + k^2)^{1/2}}, \quad f'(k) = \frac{(1 + k^2)^{1/2} - (1 + k) \frac{k}{(1 + k^2)^{1/2}}}{1 + k^2} = \frac{1 - k}{(1 + k^2)^{3/2}}.$$

Así, $f'(k) = 0 \iff k = 1$, con $f'(k) > 0$ si $k < 1$ y $f'(k) < 0$ si $k > 1$. Por tanto $k = 1$ es máximo global:

$$\max_{k \geq 0} f(k) = f(1) = \frac{1 + 1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Concluimos que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \leq \sqrt{2} \implies \boxed{\|v\|_1 \leq \sqrt{2} \|v\|_2}.$$

Para la cota izquierda usamos que $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|xy| \geq x^2 + y^2$, luego

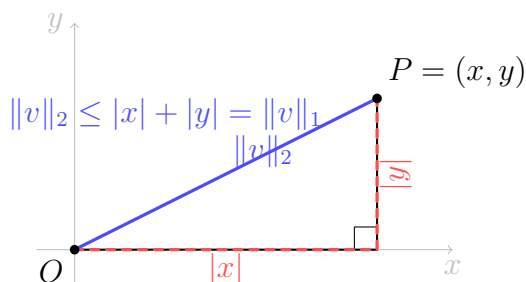
$$\boxed{\|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| = \|v\|_1}.$$

Conclusión (equivalencia de métricas)

De las dos desigualdades obtenemos

$$\boxed{\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{2} \|v\|_2},$$

así d_1 y d_2 son *equivalentes* (inducen la misma topología).



Ejercicio 7

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^2$.

(a) Métrica taxicab continua en \mathbb{R}^2

Definimos $d_1(P, Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$. Probar que existe $O \in \mathbb{R}^2$ tal que $d_1(O, A) = d_1(O, B) = d_1(O, C)$.

Idea. El lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos puntos P, Q :

$$\mathcal{B}(P, Q) := \{X : d_1(X, P) = d_1(X, Q)\}$$

es una línea poligonal no vacía formada por tramos con pendiente ± 1 (la “bisectriz ℓ^1 ”). Bastará ver que $\mathcal{B}(A, B)$ y $\mathcal{B}(A, C)$ *siempre* se cortan.

Prueba (signos a lo largo de rectas). Sea, para $X = (x, y)$,

$$F_{AB}(X) := d_1(X, A) - d_1(X, B).$$

Tomemos la recta $\gamma(t) = (t, -t)$. Entonces $t \mapsto F_{AB}(\gamma(t))$ es continua y, para $|t|$ grande, los valores absolutos se “despegan”, quedando

$$F_{AB}(\gamma(t)) = |t - a_x| + |-t - a_y| - |t - b_x| - |-t - b_y| = (a_y - a_x) - (b_y - b_x) \quad \text{para } t \gg 1,$$

mientras que, para $t \ll -1$,

$$F_{AB}(\gamma(t)) = (a_x - a_y) - (b_x - b_y) = -[(a_y - a_x) - (b_y - b_x)].$$

Por el teorema del valor intermedio, existe t_0 tal que $F_{AB}(\gamma(t_0)) = 0$; es decir, $\gamma(t_0) \in \mathcal{B}(A, B)$. Un razonamiento idéntico (por ejemplo sobre la recta $\eta(s) = (s, s)$) muestra que $\mathcal{B}(A, C)$ también corta a alguna recta de pendiente $+1$. Como $\mathcal{B}(A, B)$ tiene tramos de pendiente $+1$ y -1 (y lo mismo $\mathcal{B}(A, C)$), y ambos son no acotados en el plano, necesariamente

$$\mathcal{B}(A, B) \cap \mathcal{B}(A, C) \neq \emptyset.$$

Cualquier punto O en la intersección cumple $d_1(O, A) = d_1(O, B) = d_1(O, C)$.

Conclusión. En (\mathbb{R}^2, ℓ^1) siempre existe (aunque puede no ser único) un punto O equidistante a A, B, C .

(b) Métrica taxicab discreta en \mathbb{Z}^2

Ahora $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ y buscamos $O \in \mathbb{Z}^2$ con $d_1(O, A) = d_1(O, B) = d_1(O, C)$.

Afirmación. Tal O existe **si y sólo si**

$$a_x + a_y \equiv b_x + b_y \equiv c_x + c_y \pmod{2}.$$

Necesidad (condición de paridad). Sea $O = (u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Como $|m| \equiv m \pmod{2}$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$d_1(O, P) = |u - p_x| + |v - p_y| \equiv (u - p_x) + (v - p_y) = (u + v) - (p_x + p_y) \pmod{2}.$$

Si $d_1(O, A) = d_1(O, B)$, entonces

$$(u + v) - (a_x + a_y) \equiv (u + v) - (b_x + b_y) \pmod{2} \Rightarrow a_x + a_y \equiv b_x + b_y \pmod{2}.$$

Aplicando a los tres pares, todas las sumas deben tener la *misma* paridad.

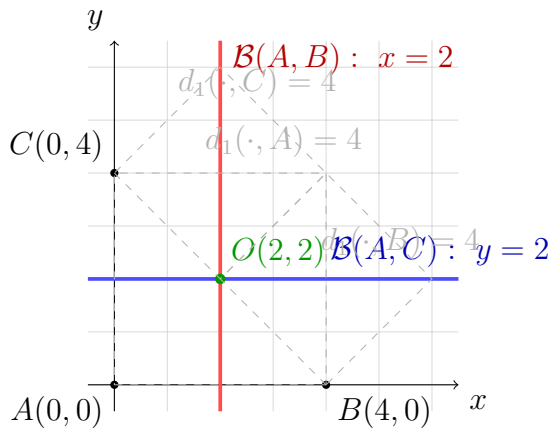
Suficiencia (construcción). Supongamos $a_x + a_y \equiv b_x + b_y \equiv c_x + c_y \pmod{2}$. La bisectriz ℓ^1 de dos puntos de \mathbb{Z}^2 con la misma paridad *sí* contiene puntos de la retícula (sus tramos de pendiente ± 1 pasan por vértices de la cuadrícula), mientras que si las paridades difieren, la bisectriz “queda entre” nodos de la retícula.

Sea $L_{AB} := \mathcal{B}(A, B) \cap \mathbb{Z}^2$ y $L_{AC} := \mathcal{B}(A, C) \cap \mathbb{Z}^2$. Bajo la hipótesis de paridad común, ambas son no vacías y, como en la parte continua, tienen tramos infinitos en direcciones de pendiente ± 1 . Dos tales conjuntos infinito-rectilíneos en direcciones cruzadas *siempre* se intersecan en algún nodo de la retícula; sea $O \in L_{AB} \cap L_{AC}$. Entonces

$$d_1(O, A) = d_1(O, B) = d_1(O, C),$$

con $O \in \mathbb{Z}^2$.

Conclusión. En la retícula (\mathbb{Z}^2, ℓ^1) existe $O \in \mathbb{Z}^2$ equidistante a A, B, C ssi $a_x + a_y$, $b_x + b_y$ y $c_x + c_y$ tienen la misma paridad.



Ejercicio 8

Calcular el valor análogo a π en la métrica taxicab.

En ℓ^1 , el círculo de radio r es un rombo de perímetro $8r$ y diámetro $2r$, luego

$$\pi_{\text{taxi}} = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Ejercicio 9

Sea $f(x) = \sin(2x)$ y $g(x) = \cos x$ en $[0, \pi]$. Queremos calcular

$$d_1(f, g) = \int_0^\pi |f(x) - g(x)| dx, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - g(x)|.$$

Preparación

$$f(x) - g(x) = \sin(2x) - \cos x = \underbrace{\cos x}_0 \underbrace{(2 \sin x - 1)}_0.$$

Los ceros relevantes (cambios de signo) son:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \quad 2 \sin x - 1 = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

Con esto, el intervalo $[0, \pi]$ se parte en

$$[0, \frac{\pi}{6}], \quad (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}], \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}), \quad [\frac{5\pi}{6}, \pi],$$

en los que el signo de $\cos x(2 \sin x - 1)$ es, respectivamente,

$$-, +, -, +.$$

a) Distancia integral d_1

Escribimos

$$d_1(f, g) = \int_0^\pi |\cos x (2 \sin x - 1)| dx.$$

Para quitar el valor absoluto, integramos por tramos invirtiendo el signo donde el producto es negativo:

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \left(-\int_0^{\pi/6} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} - \int_{\pi/2}^{5\pi/6} + \int_{5\pi/6}^{\pi} \right) (\cos x (2 \sin x - 1)) dx \\ &= \left(-\int_0^{\pi/6} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} - \int_{\pi/2}^{5\pi/6} + \int_{5\pi/6}^{\pi} \right) (\sin 2x - \cos x) dx. \end{aligned}$$

Tomamos una primitiva

$$P(x) = \int (\sin 2x - \cos x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x.$$

Evaluamos en los puntos de corte (valores exactos):

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π |
|-----------|----------------|-----------------|-----------------|------------------|----------------|
| $\cos 2x$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $P(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |

Ahora, tramo a tramo (con el signo correspondiente):

$$\begin{aligned} I_1 &= -(P(\frac{\pi}{6}) - P(0)) = -(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \\ I_2 &= (P(\frac{\pi}{2}) - P(\frac{\pi}{6})) = -\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}, \\ I_3 &= -(P(\frac{5\pi}{6}) - P(\frac{\pi}{2})) = -(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \\ I_4 &= (P(\pi) - P(\frac{5\pi}{6})) = -\frac{1}{2} - (-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sumando:

$$d_1(f, g) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{1}.$$

b) Distancia del supremo d_∞

Como $x \in [0, \pi]$,

$$|\cos x| \leq 1, \quad \sin x \in [0, 1] \Rightarrow 2 \sin x - 1 \in [-1, 1] \Rightarrow |2 \sin x - 1| \leq 1.$$

Por tanto,

$$|f(x) - g(x)| = |\cos x (2 \sin x - 1)| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Este cota es alcanzable en $x = 0$ y $x = \pi$:

$$|f(0) - g(0)| = |\sin 0 - \cos 0| = |0 - 1| = 1, \quad |f(\pi) - g(\pi)| = |\sin 2\pi - \cos \pi| = |0 - (-1)| = 1.$$

Luego

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - g(x)| = \boxed{1}.$$