Continuidad en autómatas celulares y su interpretación topológica

1. Configuraciones y estructura topológica

Un **autómata celular** es un sistema dinámico discreto definido sobre una red de celdas, donde cada celda puede adoptar un valor de un conjunto finito de estados.

Espacio de configuraciones

Sea:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{(conjunto finito de estados)},$$

y sea $\mathbb{Z}^d$ la red d-dimensional de índices de celdas.

Una **configuración** es una función:

$$x : \mathbb{Z}^d \longrightarrow A, \qquad i \longmapsto x(i),$$

que asigna a cada celda su estado.

El conjunto de todas las configuraciones posibles se denota:

$$X = A^{\mathbb{Z}^d}.$$

Cada elemento $x \in X$ representa un "estado global" del autómata.

Topología sobre X

Se dota a A de la **topología discreta**. La topología natural sobre X es la **topología producto discreta**, la más débil que hace continuas las proyecciones:

$$\pi_i : X \to A, \quad \pi_i(x) = x(i).$$

Base de abiertos

Los abiertos básicos se denominan **cilindros** y tienen la forma:

$$C(i_1, \dots, i_k; a_1, \dots, a_k) = \{\, x \in X : x(i_j) = a_j,\ j = 1, \dots, k \,\}.$$

En esta topología:

- Dos configuraciones son **cercanas** si coinciden en un gran número de posiciones alrededor de un punto central.
- Cuanto mayor sea la región de coincidencia, más "cercanas" son.

Esta noción de cercanía refleja la idea física de que un cambio local en una celda no debería alterar inmediatamente la configuración global.

2. Regla local y evolución global

Sea $N \subset \mathbb{Z}^d$ un conjunto finito (vecindario). La **regla local** es una función:

$$f : A^N \longrightarrow A,$$

que determina el nuevo estado de una celda en función de los valores de sus vecinas.

La **evolución global** del autómata se define como:

$$F : X \longrightarrow X, \qquad (F(x))(i) = f\big(x|_{i+N}\big),$$

donde $x|_{i+N}$ denota la restricción de x al bloque $i + N$.

3. Continuidad de F en la topología producto (canónica)

Proposición

La función global $F : A^{\mathbb{Z}^d} \to A^{\mathbb{Z}^d}$ es continua en la topología producto discreta.

Demostración

Sea U un cilindro en la imagen:

$$U = \{\, y \in X : y(i_j) = b_j,\ j = 1, \dots, k \,\}.$$

Entonces:

$$F^{-1}(U) = \{\, x \in X : (F(x))(i_j) = b_j,\ j = 1, \dots, k \,\}.$$

Por la definición de F:

$$(F(x))(i_j) = f(x|_{i_j+N}),$$

de modo que:

$$F^{-1}(U) = \bigcap_{j=1}^{k} \{\, x \in X : f(x|_{i_j+N}) = b_j \,\}.$$

Cada conjunto del tipo $\{x : f(x|_{i_j+N}) = b_j\}$ restringe solo un número **finito** de coordenadas. Como A tiene la topología discreta, fijar finitas coordenadas define un conjunto abierto (una unión de cilindros).

Por tanto, cada uno de los conjuntos anteriores es abierto, y su intersección finita también lo es.

$$\boxed{F^{-1}(U) \text{ es abierto } \Rightarrow F \text{ es continua.}}$$

Interpretación

La **localidad finita** de la regla f garantiza que la imagen de una configuración solo depende de un número finito de valores. Esto hace que la evolución global F sea continua en la topología producto: configuraciones "cercanas" (iguales en una gran región finita) evolucionan hacia configuraciones igualmente cercanas.

$$\text{Pequeños cambios locales} \Rightarrow \text{pequeños cambios en la evolución.}$$

4. Ejemplo numérico: Regla 90 (caso unidimensional)

Consideremos $A = \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}$ como red de celdas y $N = \{-1, 0, 1\}$ como vecindario. La regla local está dada por:

$$f(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = a_{i-1} + a_{i+1} \pmod 2.$$

Entonces:

$$(F(x))(i) = f(x(i-1), x(i), x(i+1)).$$

Sea el cilindro:

$$U = \{\, y \in X : y(0) = 1,\ y(1) = 0 \,\}.$$

Su preimagen bajo F es:

$$F^{-1}(U) = \{\, x : f(x(-1), x(0), x(1)) = 1,\ f(x(0), x(1), x(2)) = 0 \,\}.$$

Sustituyendo f:

$$\begin{cases} x(-1) + x(1) \equiv 1 \pmod 2, \\ x(0) + x(2) \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(-1) \neq x(1), \\ x(0) = x(2). \end{cases}$$

Estas condiciones afectan solo a las coordenadas $\{-1, 0, 1, 2\}$, un conjunto finito. Cada combinación de valores que las satisface define un cilindro abierto, y la unión de todos ellos es abierta.

$$\boxed{F^{-1}(U) \text{ es abierto } \Rightarrow F \text{ es continua.}}$$

5. Contraejemplo: no continuidad con la topología de semirrectas derechas

Definición

La **topología de semirrectas derechas** sobre $X = A^{\mathbb{Z}}$ se define por la base:

$$U_N(x) = \{\, y \in X : y(i) = x(i) \text{ para todo } i \geq N \,\}.$$

En esta topología, dos configuraciones son "cercanas" si coinciden completamente a partir de cierto punto hacia la derecha.

Ejemplo

Consideremos nuevamente la regla local de la Regla 90:

$$F(x)(i) = x(i-1) + x(i+1) \pmod 2.$$

Sea el abierto en la imagen:

$$V = \{\, y : y(0) = 0 \,\}.$$

Entonces:

$$F^{-1}(V) = \{\, x : x(-1) = x(1) \,\}.$$

Prueba de no continuidad

Tomemos la configuración nula x_0, definida por $x_0(i) = 0$ para todo i. Entonces $x_0 \in F^{-1}(V)$.

Supongamos que F fuera continua. Entonces existiría algún N tal que $U_N(x_0) \subseteq F^{-1}(V)$.

Sin embargo, para cualquier N, definimos y como:

$$y(i) = \begin{cases} 1, & i = -1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $y \in U_N(x_0)$ (porque coincide con x_0 para todo $i \geq N$), pero:

$$(F(y))(0) = y(-1) + y(1) = 1 + 0 = 1 \pmod 2.$$

Por tanto, $y \notin F^{-1}(V)$.

Esto ocurre para todo N, de modo que ningún vecindario derecho de x_0 está contenido en $F^{-1}(V)$.

$$\boxed{F^{-1}(V) \text{ no es abierto } \Rightarrow F \text{ no continua.}}$$

Interpretación

En la topología de semirrectas derechas:

- La noción de cercanía solo considera la parte "futura" de la configuración (índices grandes).
- La regla local, en cambio, depende de valores tanto a izquierda como a derecha.
- Por tanto, un pequeño cambio a la izquierda (invisible topológicamente) puede alterar el resultado global.

$$\boxed{\text{Topología producto (canónica): } F \text{ continua.} \qquad \text{Topología semirrectas derechas: } F \text{ no continua.}}$$

6. Comentario topológico final: compacidad, Cantor y estabilidad

El espacio $X = A^{\mathbb{Z}^d}$, con A finito y topología discreta, es un **producto infinito de espacios finitos discretos**. Por el *teorema de Tychonoff*, X es **compacto**.

Además, como es totalmente disconexo, sin puntos aislados y compacto, X es **homeomorfo al espacio de Cantor**. Así, el espacio de configuraciones de un autómata celular tiene la misma estructura topológica que el famoso **conjunto de Cantor**.

Implicaciones dinámicas

- La continuidad de F garantiza que la dinámica del autómata es **estable** respecto a perturbaciones locales.
- La compacidad de X implica que toda secuencia de configuraciones tiene una subsecuencia convergente (en el sentido topológico).
- La estructura tipo Cantor permite aplicar herramientas de la **dinámica simbólica**, como medidas invariantes, entropía topológica y conjuntos invariantes.

En otras palabras, los autómatas celulares pueden verse como **transformaciones continuas en espacios de Cantor compactos**, lo que los sitúa dentro de la teoría general de los **sistemas dinámicos topológicos discretos**.

$$\boxed{(X, F) \text{ es un sistema dinámico topológico discreto y compacto.}}$$