Entregables Espacios Topologicos Topología

Juan Rodríguez

Ejercicio 1: ¿Son una topología?

1. $X = \{a, b, c\}$, $T_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$.

   Solución. Comprobamos axiomas: (i) $\varnothing, X \in T_1$ (sí). (ii) Intersección finita: por ejemplo, $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing \in T_1$, $\{a\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in T_1$, $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in T_1$, etc. (iii) Unión arbitraria: $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in T_1$, $\{b\} \cup \{a, c\} = X \in T_1$, etc. Como todos los casos cierran,

   $$\boxed{T_1 \text{ es topología en } X.}$$

2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

   Solución. No es topología tal como está escrita porque $\varnothing \notin \mathcal{T}$. (Obs.: estas semirrectas forman *base* de una topología —la de semirrectas derechas—, pero la familia dada no incluye $\varnothing$ ni garantiza que toda unión de ellas siga estando en $\mathcal{T}$ como *un solo elemento*.)

   $$\boxed{\mathcal{T} \text{ no es topología (falta } \varnothing).}$$

3. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$.

   Solución. Tampoco es topología como *colección* final, porque (i) $\varnothing \notin \mathcal{S}$ ni $X \in \mathcal{S}$; (ii) una unión arbitraria de intervalos de la forma $[a, b)$ no tiene por qué ser nuevamente un único intervalo $[a, b)$. (En realidad, $\mathcal{S}$ es *base* de la topología de Sorgenfrey.)

   $$\boxed{\mathcal{S} \text{ no es topología (sí es base).}}$$

Ejercicio 2: ¿Son una topología?

1. $X = \{a, b, c\}$, $T_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$.

   Solución. No cierra por uniones: $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin T_2$.

   $$\boxed{T_2 \text{ no es topología.}}$$

2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{U \subset \mathbb{R} : \ |\mathbb{R} \setminus U| < \infty\}$.

   Solución. La *topología cofinita* estándar es $\mathcal{C} \cup \{\varnothing\}$. Tal como está escrita (sin $\varnothing$ explícita), $\varnothing \notin \mathcal{C}$ porque $|\mathbb{R} \setminus \varnothing| = |\mathbb{R}| = \infty$. Luego la familia dada *no* es topología, aunque basta añadir $\varnothing$ para que sí lo sea (y, de hecho, lo es): las uniones arbitrarias de cofinito siguen siendo cofinito, y las intersecciones finitas de cofinito también lo son.

   $$\boxed{\mathcal{C} \text{ no es topología tal como está (falta } \varnothing).}$$

Ejercicio 3

Halla un ejemplo de topología heredada de un espacio que no coincida con la topología "usual" (interior/inferior).

Ejemplo claro con Sorgenfrey. Sea $(\mathbb{R}, \tau_S)$ la topología de Sorgenfrey (base $[a, b)$). Considérese el *subespacio* $X = \mathbb{R} \subset (\mathbb{R}, \tau_S)$: la topología *heredada* en X *coincide* con τ_S, pero *no* coincide con la topología usual canonica τ_C en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $[0, 1)$ es abierto en τ_S y no es abierto en τ_C. Así, en el mismo conjunto $X = \mathbb{R}$ tenemos dos topologías distintas: la heredada de Sorgenfrey y la canonica.

$$\boxed{\text{Conclusión: la topología heredada de Sorgenfrey en } X \text{ no coincide con la canonica de } X.}$$

Ejercicio 4

Determinar el interior, la frontera y la clausura de los siguientes conjuntos.

1. $(0, 2)$ en $\mathbb{R}$ (topología usual).
   $\mathrm{Int}((0, 2)) = (0, 2), \quad \overline{(0, 2)} = [0, 2], \quad Fr((0, 2)) = \{0, 2\}.$
2. $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ en $\mathbb{R}$.
   Todo punto $1/n$ es aislado $\to \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. El punto 0 es límite porque $1/n \to 0$.
   $\overline{A} = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}, \quad Fr(A) = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}.$
3. $(0, 2)$ en $(0, 4)$ con la topología subespacio.
   $\mathrm{Int}(A) = (0, 2), \quad \overline{A} = (0, 2], \quad Fr(A) = \{2\}.$

Ejercicio 5

Determinar el interior, la frontera y la clausura de los siguientes conjuntos.

1. $A = \{-3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (1, 2) \cup \{4 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   en la recta de Sorgenfrey (base de abiertos $[a, b)$).

   - **Interior:** las partes discretas no contienen abiertos, mientras que $(1, 2)$ sí es abierto.
     $\mathrm{Int}_{\mathbb{S}}(A) = (1, 2)$.
   - **Clausura:** $\overline{(1, 2)}^{\mathbb{S}} = [1, 2)$, el punto 4 se añade porque $[4, 4+\varepsilon)$ corta $\{4+\frac{1}{n}\}$, mientras que -3 no pertenece a la clausura (no hay puntos de A a su derecha).
     $\overline{A}^{\mathbb{S}} = \{-3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [1, 2) \cup \{4 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{4\}.$
   - **Frontera:**
     $Fr(A) = \{-3 - \frac{1}{n}\} \cup \{1\} \cup \{4 + \frac{1}{n}\} \cup \{4\}.$

2. $[1, 2] \cup \{3\}$ en $\mathbb{R}$ (topología usual).
   $\mathrm{Int}([1, 2] \cup \{3\}) = (1, 2), \quad \overline{[1, 2] \cup \{3\}} = [1, 2] \cup \{3\}, \quad Fr([1, 2] \cup \{3\}) = \{1, 2, 3\}.$

Ejercicio 6

Determinar el interior, la frontera y la clausura de los siguientes conjuntos.

1. $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (topología usual).
   $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$

2. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (topología usual).
   $\text{Int} = \varnothing$ (pues $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no tiene interior),
   $\overline{A} = \mathbb{R}^2$
   $Fr(A) = \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 7

1. $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

   Verdadero. Si $x \in \text{Fr}(A)$, todo abierto de x corta A y A^c, luego $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c}$. Recíprocamente, si $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$, todo abierto de x corta ambos conjuntos, así que $x \notin \text{Int}(A)$ ni en $\text{Int}(A^c)$ y, por tanto, $x \in \text{Fr}(A)$. También: $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{Int}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

2. $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$

   Falso en general. Siempre vale la inclusión $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$, pero la igualdad puede fallar. Contraejemplo en $\mathbb{R}$ usual: $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces $A \cup B = \mathbb{R}$ y $\text{Int}(A \cup B) = \mathbb{R}$, mientras que $\text{Int}(A) = \text{Int}(B) = \varnothing$.

3. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

   Verdadero. Vía dualidad con clausura:

   $$\text{Int}(A) = X \setminus \overline{A^c}.$$

   Así,

   $$\text{Int}(A\cap B) = X\setminus\overline{(A \cap B)^c} = X\setminus\overline{A^c \cup B^c} = X\setminus\big(\overline{A^c}\cup\overline{B^c}\big) = \big(X\setminus\overline{A^c}\big)\cap\big(X\setminus\overline{B^c}\big) = \text{Int}(A)\cap\text{Int}(B).$$

4. $\text{Int}(\text{Fr}(A)) = \varnothing$

   Falso en general. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, si $A = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$ y $\text{Int}(A) = \varnothing$, así que $\text{Fr}(A) = \mathbb{R}$ y, por tanto, $\text{Int}(\text{Fr}(A)) = \mathbb{R} \neq \varnothing$. (Sí puede ocurrir que sea vacía para muchos A, pero no es una verdad general.)