

Hojas de Ejercicios de Topología

Ejercicios Distancias

Ejercicio 1

¿Son distancias en \mathbb{R} .?

1. $d(x, y) = |x - y|$
2. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
3. $d(x, y) = |x - 2y|$
4. $d(x, y) = (x - y)^2$
5. $d(x, y) = \sin^2(x - y)$
6. $d(x, y) = \arctan |x - y|$

Ejercicio 2

¿Es o no distancia entre dos conjuntos A y B ?

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|.$$

Ejercicio 3

¿Son distancias en \mathbb{R}^2 ?

a) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$

b) $d_{\times}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| \cdot |y_1 - y_2|,$

c) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$

d) $d_{\min}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$

e) $d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$

Ejercicio 5

Demuestra que en un conjunto finito sólo hay una distancia posible que tenga valores 0 o 1.

Ejercicio 6

Demuestra que la distancia Taxicab/Manhattan en \mathbb{R}^2 es equivalente a la euclidiana

Ejercicio 8

Calcula el número π en la Taxicab

Ejercicio 9

Calcula la distancia entre $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos(x)$ en $[0, \pi]$

- a) En la métrica integral
- b) En la métrica del supremo

Hojas 3: Ejercicios sobre Topologías

Ejercicio 1

¿Son una topología?

1. $X = \{a, b, c\}$, $T_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.
2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.
3. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Ejercicio 2

¿Son una topología?

1. $X = \{a, b, c\}$, $T_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, X\}$.
2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \setminus U| < \infty\}$.

Ejercicio 3

Halla un ejemplo de topología heredada de un espacio que no coincida con la topología interior

Ejercicio 4

Busca interior, frontera y clausura

1. $(0, 2)$ en \mathbb{R}
2. $\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ en \mathbb{R}
3. $(0, 2)$ en $(0, 4)$

Ejercicio 5

Busca interior, frontera y clausura

1. $A = \{-3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (1, 2) \cup \{4 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ en Sorgenfrey.
2. $[1, 2] \cup \{3\}$ en \mathbb{R}

Ejercicio 6

Busca interior, frontera y clausura

- a. \mathbb{Q} en \mathbb{R} (topología canónica).
- b. $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ en \mathbb{R}^2 (topología canónica).

Ejercicio 7

¿Es verdad que?

c. $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

d. $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.

e. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.

f. $\text{Int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$.