Entregables Distancias Topología

Juan Rodríguez

Ejercicio 1

Determinar cuáles de las siguientes funciones son distancias en $\mathbb{R}$.

1. $d(x,y) = |x-y|$.
   Es distancia: cumple todos los axiomas de una métrica (distancia euclidiana).

   Propiedad Reflexiva: Si $x = y$, entonces $d(x,y) = 0$
   $d(x,x) = |x-x| = |0| = 0$
   Si $d(x,y) = 0$, entonces $x = y$
   $d(x,y) = |x-y| = 0 \to x-y = 0 \to x = y$

   Propiedad Simétrica: $d(x,y) = d(y,x)$
   $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$

   Desigualdad Triangular: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
   $d(x,z) = |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$
   $a = x-y \quad b = y-z$
   $|a+b| \leq |a| + |b|$

2. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$.
   No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva
   $d(1,-1) = 0$ y $1 \neq -1$.

3. $d(x,y) = |x-2y|$.
   No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva
   $d(1,1) = 1 \neq 0$

4. $d(x,y) = (x-y)^2$.
   No es distancia. Incumple la desigualdad triangular
   $d(0,2) = 4 \not\leq 1 + 1 = d(0,1) + d(1,2)$

5. $d(x,y) = \sin^2(x-y)$.
   No es distancia. Incumple la propiedad reflexiva
   $d(x,y) = 0 \to x-y = k\pi$, no solo cuando $x = y$.

6. $d(x,y) = \arctan|x-y|$.
   Es distancia: cumple todos los axiomas de una métrica (distancia euclidiana).

Propiedad Reflexiva:
Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$
$d(x, x) = \arctan|x - x| = \arctan|0| = 0$
Si $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$
$d(x, y) = \arctan|x - y| = 0 \to x - y = 0 \to x = y$

Propiedad Simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) = \arctan|x - y| = \arctan|-(y - x)| = \arctan|y - x| = d(y, x)$

Desigualdad Triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
$d(x, z) = \arctan|x - z| \leq \arctan|x - y| + \arctan|y - z|$
Tomamos tangente a ambos lados de la igualdad (Podemos hacerlo porque es una función monotona creciente, por lo que se cumple que $f(a) < f(b)$ si $a < b$)
$\tan(\arctan|x - z|) \leq \tan(\arctan|x - y| + \arctan|y - z|)$

$\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}$

$|x - z| \leq \frac{|x-y|+|y-z|}{1-|x-y|\cdot|y-z|}$
$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| \leq \frac{|x-y|+|y-z|}{1-|x-y|\cdot|y-z|}$

Ejercicio 2

Sea $d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|$ para A, B subconjuntos finitos de un conjunto universo U.

Propiedad Reflexiva:
Si $A = B$, entonces

$$d(A, A) = |A \cup A| - |A \cap A| = |A| - |A| = 0.$$

Si $d(A, B) = 0$, entonces $|A \cup B| = |A \cap B|$. Esto sólo puede ocurrir si $A = B$. Por tanto, $d(A, B) = 0 \iff A = B$.

Propiedad Simétrica

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B| = |B \cup A| - |B \cap A| = d(B, A).$$

Luego $d(A, B)$ es simétrica.

Desigualdad Triangular:
Queremos probar que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Empecemos escribiendo:

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|.$$

Por la fórmula de inclusión–exclusión:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

entonces
$$d(A,B) = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

De modo análogo:
$$d(A,C) = |A| + |C| - 2|A \cap C|, \qquad d(B,C) = |B| + |C| - 2|B \cap C|.$$

Sumando las dos últimas:
$$d(A,C) + d(B,C) = |A| + |B| + 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

La desigualdad triangular
$$d(A,B) \le d(A,C) + d(B,C)$$
es equivalente a
$$|A| + |B| - 2|A \cap B| \le |A| + |B| + 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

$$-2|A \cap B| \le 2|C| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C|.$$

$$-|A \cap B| \le |C| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

$$|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B| \le |C|.$$

Interpretación. El término de la izquierda representa los elementos de C en común con A y con B, restando los que se cuentan dos veces. Esa cantidad siempre es menor o igual que el número de elementos de C. Por tanto, la desigualdad se cumple y la desigualdad triangular queda demostrada.

Conclusión

$$\boxed{d(A,B) = |A \cup B| - |A \cap B| \text{ es una métrica en la familia de subconjuntos finitos de } U.}$$

Ejercicio 3

Determinar cuáles de las siguientes funciones son distancias en $\mathbb{R}^2$:

a) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$,
b) $d_\times((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| \cdot |y_1-y_2|$,
c) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$,
d) $d_{\min}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \min\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$,
e) $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$.

Sean $p = (x_1,y_1)$, $q = (x_2,y_2)$, $r = (x_3,y_3)$.

a) Euclidiana d_2

Si $p = q$, entonces $d(p,q) = 0$
$d(p,p) = \sqrt{(0+0)} = 0$

Si $d(p,q) = 0$, entonces $p = q$ $d(p,q) = 0 \to +(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0 \to$
$\to x_1 - x_2 = 0$ y también que $y_1 - y_2 = 0$
Por lo tanto $p = q$
Simetría: $d_2(p,q) = d_2(q,p)$.

$d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-(x_2 - x_1))^2 + (-(y_2 - y_1))^2} =$

$= \sqrt{((x_2 - x_1))^2 + ((y_2 - y_1))^2} = d(q,p)$

Desigualdad triangular: Escribimos $u = q - p$, $v = r - q$ y $u + v = r - p$. Entonces

$$d_2(p,r) = \|u + v\| = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} \leq \|u\| + \|v\|,$$

donde la última desigualdad es la de Minkowski. Por tanto, d_2 es distancia.

b) Producto $d_\times$

No cumple la propiedad reflexiva: si $p \neq q$ pero comparten una coordenada, por ejemplo $p = (0,0)$, $q = (0,1)$, entonces

$$d_\times(p,q) = |0 - 0| \cdot |0 - 1| = 0 \quad \text{con } p \neq q.$$

No es distancia.

c) Manhattan d_1

Propiedad Reflexiva:
Si $p = q$, entonces $d(p,q) = 0$
$d(p,p) = 0 + 0 = 0$

Si $d(p,q) = 0$ entonces $p = q$
$d(p,q) = 0 \to |x_1 - x_2| = 0$ y también que $|y_1 - y_2| = 0$
$\to p = q$

Simetría: $d_1(p,q) = d_1(q,p)$.
Desigualdad triangular: usando la triangular en $\mathbb{R}$ para cada coordenada,

$$|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, \qquad |y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|.$$

Sumando,

$$d_1(p,r) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|) + (|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|) = d_1(p,q) + d_1(q,r).$$

Luego d_1 es distancia.

d) Mínimo $d_{\min}$

Incumple la propiedad reflexiva: si $p \neq q$ y comparten alguna coordenada, por ejemplo $p = (0,0)$, $q = (0,1)$,

$$d_{\min}(p,q) = \min\{|0-0|, |0-1|\} = 0 \quad \text{con } p \neq q.$$

No es métrica.

e) Máximo d_∞

Propiedad Reflexiva: $d_\infty(p,q) = 0 \iff p = q$.
Simetría: inmediata por el valor absoluto.
Desigualdad triangular: con $u = q - p$, $v = r - q$ y $u + v = r - p$:

$$\begin{aligned} d_\infty(p,r) = \max\{|u_1+v_1|, |u_2+v_2|\} &\leq \max\{|u_1|+|v_1|,\ |u_2|+|v_2|\} \\ &\leq \max\{|u_1|,|u_2|\} + \max\{|v_1|,|v_2|\} = d_\infty(p,q) + d_\infty(q,r). \end{aligned}$$

Por tanto, d_∞ es métrica.

Ejercicio 4

Sea $X = [0,1)$ y definamos, para $x, y \in X$,

$$d(x,y) \ = \ \min\{|x-y|,\ 1-|x-y|\}.$$

Probar que d es una distancia en X.

1)Reflexiva y simetría

- **Reflexiva:** $d(x,y) = 0 \iff \min\{|x-y|, 1-|x-y|\} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$ (como $|x-y| < 1$ para $x, y \in [0,1)$).
- **Simetría:** $d(x,y) = \min\{|x-y|, 1-|x-y|\} = \min\{|y-x|, 1-|y-x|\} = d(y,x)$.

2) Desigualdad triangular

La idea es ver $X = [0,1)$ como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (la circunferencia), y expresar d como un ínfimo de distancias euclidianas en $\mathbb{R}$. Para $x, y \in [0,1)$ definimos

$$\tilde{d}(x,y) \ := \ \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - y - k|.$$

Observemos que, como $|x-y| \in [0,1)$, se tiene

$$\tilde{d}(x,y) = \min\{|x-y|,\ 1-|x-y|\} = d(x,y).$$

Por tanto, basta probar la desigualdad triangular para $\tilde{d}$:

$$\tilde{d}(x,z) \ \leq \ \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) \qquad (\forall\, x, y, z \in [0,1)).$$

Sea $m, n \in \mathbb{Z}$ arbitrarios. Usando la triangular en $\mathbb{R}$,

$$|x - z - (m+n)| = |(x-y-m) + (y-z-n)| \leq |x-y-m| + |y-z-n|.$$

Tomando ínfimos (primero en m, n y notando que $m+n$ recorre todo $\mathbb{Z}$), obtenemos

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |x-z-k| \;\le\; \inf_{m,n\in\mathbb{Z}} \big(|x-y-m| + |y-z-n|\big) \;\le\; \inf_{m\in\mathbb{Z}} |x-y-m| + \inf_{n\in\mathbb{Z}} |y-z-n|.$$

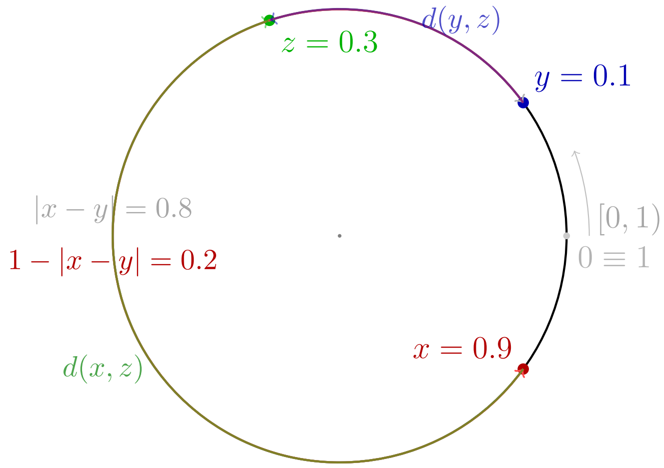
Esto es, $\tilde{d}(x,z) \le \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$. Como $\tilde{d} = d$, la desigualdad triangular queda probada para d.

Conclusión

Las tres propiedades (no negatividad y separación, simetría y desigualdad triangular) se cumplen. Luego

$$\boxed{d(x,y) = \min\{|x-y|,\, 1-|x-y|\} \text{ define una métrica en } [0,1).}$$

Observación. Esta es la *distancia geodésica* en la circunferencia S^1 al identificar $0 \sim 1$.



Ejercicio 5

Sea X un conjunto finito. Supongamos que $d : X \times X \to \{0,1\}$ es una distancia. Probar que necesariamente d coincide con la *distancia discreta*

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Sea ahora $d : X \times X \to \{0,1\}$ una *distancia* cualquiera.

- Por la propiedad reflexiva, $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$.
- Si $x \neq y$, entonces por reflexiva *no* puede ocurrir $d(x,y) = 0$; como el codominio es $\{0,1\}$, necesariamente $d(x,y) = 1$.

Concluimos que, para todos $x, y \in X$, $d(x,y) = \delta(x,y)$. Es decir, $d = \delta$.

Conclusión

La única distancia en X que toma valores exclusivamente en $\{0,1\}$ es la métrica discreta:

$$\boxed{d(x,y) = 0 \text{ si } x = y, \quad d(x,y) = 1 \text{ si } x \neq y.}$$

Ejercicio 6

En $\mathbb{R}^2$, para $v = (x, y)$, demostrar

$$\|v\|_2 \;\le\; \|v\|_1 \;\le\; \sqrt{2}\,\|v\|_2, \qquad \text{donde} \;\; \|v\|_1 = |x| + |y|, \;\; \|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La cota derecha es equivalente a acotar la razón

$$R(x, y) := \frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por simetría basta suponer $x \ge 0$ y $y \ge 0$ (los valores absolutos eliminan signos) y parametrizar $y = kx$ con $k \ge 0$ y $x > 0$:

$$R(x, y) = \frac{x + kx}{\sqrt{x^2 + k^2 x^2}} = \frac{1 + k}{\sqrt{1 + k^2}} =: f(k).$$

Buscamos $\max_{k \ge 0} f(k)$. Derivando,

$$f(k) = \frac{1 + k}{(1 + k^2)^{1/2}}, \qquad f'(k) = \frac{(1 + k^2)^{1/2} - (1 + k)\,\dfrac{k}{(1 + k^2)^{1/2}}}{1 + k^2} = \frac{1 - k}{(1 + k^2)^{3/2}}.$$

Así, $f'(k) = 0 \iff k = 1$, con $f'(k) > 0$ si $k < 1$ y $f'(k) < 0$ si $k > 1$. Por tanto $k = 1$ es máximo global:

$$\max_{k \ge 0} f(k) = f(1) = \frac{1 + 1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Concluimos que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\|v\|_1}{\|v\|_2} \le \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\|v\|_1 \le \sqrt{2}\,\|v\|_2}.$$

Para la cota izquierda usamos que $(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|xy| \ge x^2 + y^2$, luego

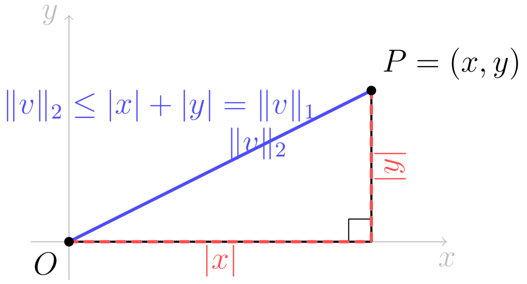
$$\boxed{\|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \;\le\; |x| + |y| = \|v\|_1}.$$

Conclusión (equivalencia de métricas)

De las dos desigualdades obtenemos

$$\boxed{\|v\|_2 \;\le\; \|v\|_1 \;\le\; \sqrt{2}\,\|v\|_2},$$

así d_1 y d_2 son *equivalentes* (inducen la misma topología).



Ejercicio 7

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^2$.

(a) Métrica taxicab continua en $\mathbb{R}^2$

Definimos $d_1(P,Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$. Probar que existe $O \in \mathbb{R}^2$ tal que $d_1(O,A) = d_1(O,B) = d_1(O,C)$.

Idea. El lugar geométrico de los puntos equidistantes a dos puntos P, Q:

$$\mathcal{B}(P,Q) := \{X : \ d_1(X,P) = d_1(X,Q)\}$$

es una línea poligonal no vacía formada por tramos con pendiente ± 1 (la "bisectriz ℓ^1"). Bastará ver que $\mathcal{B}(A,B)$ y $\mathcal{B}(A,C)$ *siempre* se cortan.

Prueba (signos a lo largo de rectas). Sea, para $X = (x,y)$,

$$F_{AB}(X) := d_1(X,A) - d_1(X,B).$$

Tomemos la recta $\gamma(t) = (t, -t)$. Entonces $t \mapsto F_{AB}(\gamma(t))$ es continua y, para $|t|$ grande, los valores absolutos se "despegan", quedando

$$F_{AB}(\gamma(t)) = |t - a_x| + |-t - a_y| - |t - b_x| - |-t - b_y| = \big(a_y - a_x\big) - \big(b_y - b_x\big) \quad \text{para } t \gg 1,$$

mientras que, para $t \ll -1$,

$$F_{AB}(\gamma(t)) = \big(a_x - a_y\big) - \big(b_x - b_y\big) = -\Big[\big(a_y - a_x\big) - \big(b_y - b_x\big)\Big].$$

Por el teorema del valor intermedio, existe t_0 tal que $F_{AB}(\gamma(t_0)) = 0$; es decir, $\gamma(t_0) \in \mathcal{B}(A,B)$. Un razonamiento idéntico (por ejemplo sobre la recta $\eta(s) = (s,s)$) muestra que $\mathcal{B}(A,C)$ también corta a alguna recta de pendiente $+1$. Como $\mathcal{B}(A,B)$ tiene tramos de pendiente $+1$ y -1 (y lo mismo $\mathcal{B}(A,C)$), y ambos son no acotados en el plano, necesariamente

$$\mathcal{B}(A,B) \cap \mathcal{B}(A,C) \neq \varnothing.$$

Cualquier punto O en la intersección cumple $d_1(O,A) = d_1(O,B) = d_1(O,C)$.

Conclusión. En $(\mathbb{R}^2, \ell^1)$ siempre existe (aunque puede no ser único) un punto O equidistante a A, B, C.

(b) Métrica taxicab discreta en $\mathbb{Z}^2$

Ahora $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ y buscamos $O \in \mathbb{Z}^2$ con $d_1(O,A) = d_1(O,B) = d_1(O,C)$.

Afirmación. Tal O existe **si y sólo si**

$$a_x + a_y \equiv b_x + b_y \equiv c_x + c_y \pmod 2.$$

Necesidad (condición de paridad). Sea $O = (u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Como $|m| \equiv m \pmod 2$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$d_1(O, P) = |u - p_x| + |v - p_y| \equiv (u - p_x) + (v - p_y) = (u + v) - (p_x + p_y) \pmod 2.$$

Si $d_1(O, A) = d_1(O, B)$, entonces

$$(u + v) - (a_x + a_y) \equiv (u + v) - (b_x + b_y) \pmod 2 \;\Rightarrow\; a_x + a_y \equiv b_x + b_y \pmod 2.$$

Aplicando a los tres pares, todas las sumas deben tener la *misma* paridad.

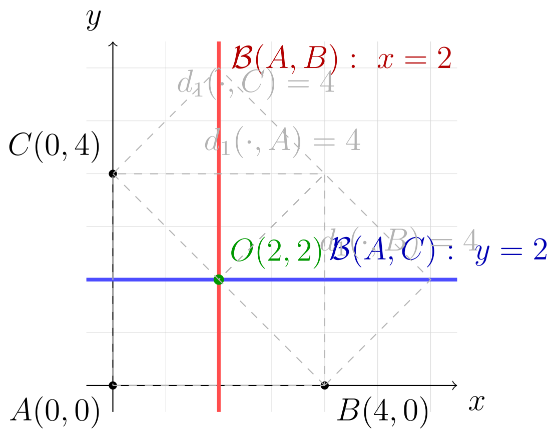
Suficiencia (construcción). Supongamos $a_x + a_y \equiv b_x + b_y \equiv c_x + c_y \pmod 2$. La bisectriz ℓ^1 de dos puntos de $\mathbb{Z}^2$ con la misma paridad *sí* contiene puntos de la retícula (sus tramos de pendiente ± 1 pasan por vértices de la cuadrícula), mientras que si las paridades difieren, la bisectriz "queda entre" nodos de la retícula.

Sea $L_{AB} := \mathcal{B}(A, B) \cap \mathbb{Z}^2$ y $L_{AC} := \mathcal{B}(A, C) \cap \mathbb{Z}^2$. Bajo la hipótesis de paridad común, ambas son no vacías y, como en la parte continua, tienen tramos infinitos en direcciones de pendiente ± 1. Dos tales conjuntos infinito–rectilíneos en direcciones cruzadas *siempre* se intersecan en algún nodo de la retícula; sea $O \in L_{AB} \cap L_{AC}$. Entonces

$$d_1(O, A) = d_1(O, B) = d_1(O, C),$$

con $O \in \mathbb{Z}^2$.

Conclusión. En la retícula $(\mathbb{Z}^2, \ell^1)$ existe $O \in \mathbb{Z}^2$ equidistante a A, B, C *ssi* $a_x + a_y$, $b_x + b_y$ y $c_x + c_y$ tienen la misma paridad.



Ejercicio 8

Calcular el valor análogo a π en la métrica taxicab.

En ℓ^1, el círculo de radio r es un rombo de perímetro $8r$ y diámetro $2r$, luego

$$\pi_{\text{taxi}} = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Ejercicio 9

Sea $f(x) = \sin(2x)$ y $g(x) = \cos x$ en $[0, \pi]$. Queremos calcular

$$d_1(f, g) = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx, \qquad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - g(x)|.$$

Preparación

$$f(x)-g(x)=\sin(2x)-\cos x=\underbrace{\cos x}_{()}\,\underbrace{(2\sin x-1)}_{()}.$$

Los ceros relevantes (cambios de signo) son:

$$\cos x=0 \iff x=\frac{\pi}{2}, \qquad 2\sin x-1=0 \iff \sin x=\tfrac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}.$$

Con esto, el intervalo $[0,\pi]$ se parte en

$$[0,\tfrac{\pi}{6}], \quad (\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{2}], \quad (\tfrac{\pi}{2},\tfrac{5\pi}{6}), \quad [\tfrac{5\pi}{6},\pi],$$

en los que el signo de $\cos x(2\sin x-1)$ es, respectivamente,

$$-,\ +,\ -,\ +.$$

a) Distancia integral d_1

Escribimos

$$d_1(f,g)=\int_0^{\pi}\big|\cos x\,(2\sin x-1)\big|\,dx.$$

Para quitar el valor absoluto, integramos por tramos invirtiendo el signo donde el producto es negativo:

$$\begin{aligned}
d_1(f,g)&=\Big(-\int_0^{\pi/6}+\int_{\pi/6}^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{5\pi/6}+\int_{5\pi/6}^{\pi}\Big)\big(\cos x\,(2\sin x-1)\big)\,dx\\
&=\Big(-\int_0^{\pi/6}+\int_{\pi/6}^{\pi/2}-\int_{\pi/2}^{5\pi/6}+\int_{5\pi/6}^{\pi}\Big)\big(\sin 2x-\cos x\big)\,dx.
\end{aligned}$$

Tomamos una primitiva

$$P(x)=\int(\sin 2x-\cos x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x.$$

Evaluamos en los puntos de corte (valores exactos):

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos 2x$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$P(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$

Ahora, tramo a tramo (con el signo correspondiente):

$$\begin{aligned}
I_1&=-\big(P(\tfrac{\pi}{6})-P(0)\big)=-\big(-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\big)=\tfrac{1}{4},\\
I_2&=\ \big(P(\tfrac{\pi}{2})-P(\tfrac{\pi}{6})\big)=-\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{3}{4})=\tfrac{1}{4},\\
I_3&=-\big(P(\tfrac{5\pi}{6})-P(\tfrac{\pi}{2})\big)=-\big(-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\big)=\tfrac{1}{4},\\
I_4&=\ \big(P(\pi)-P(\tfrac{5\pi}{6})\big)=-\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{3}{4})=\tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Sumando:

$$d_1(f,g)=I_1+I_2+I_3+I_4=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=\boxed{1}.$$

b) Distancia del supremo d_∞

Como $x \in [0, \pi]$,

$$|\cos x| \le 1, \qquad \sin x \in [0,1] \;\Rightarrow\; 2\sin x - 1 \in [-1,1] \;\Rightarrow\; |2\sin x - 1| \le 1.$$

Por tanto,

$$|f(x) - g(x)| = \big|\cos x\,(2\sin x - 1)\big| \le 1 \cdot 1 = 1.$$

Este cota es alcanzable en $x = 0$ y $x = \pi$:

$$|f(0)-g(0)| = |\sin 0 - \cos 0| = |0-1| = 1, \qquad |f(\pi)-g(\pi)| = |\sin 2\pi - \cos \pi| = |0-(-1)| = 1.$$

Luego

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - g(x)| = \boxed{1}.$$