Definiciones

Juan Rodríguez

Contents

Métrica o Distancia

Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una **distancia** (o **métrica**) en X si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ (Reflexiva)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetría)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (Desigualdad triangular)

En estas condiciones, el par (X, d) se denomina **espacio métrico**.

Continuidad

Función continua en espacios métricos

Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. La función $f : X_1 \to X_2$ se dice **continua en un punto** $x \in X_1$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

La función f se llama **continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

Caracterización topológica de continuidad

Sea $f : X_1 \to X_2$ una función entre espacios topológicos. La función f es **continua** si y solo si la preimagen de todo conjunto abierto de X_2 es abierta en X_1; es decir,

$$\forall A \subseteq X_2 \text{ abierto}, \quad f^{-1}(A) \text{ es abierto en } X_1.$$

Espacios topológicos

Topología

Dado un conjunto X, se dice que una colección de subconjuntos $\mathcal{T}$ de X es una **topología** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. La intersección de un número **finito** de elementos de $\mathcal{T}$ también pertenece a $\mathcal{T}$:
$$\bigcap_{i=1}^{k} T_i \in \mathcal{T}$$
3. La unión de cualquier número (posiblemente infinito) de elementos de $\mathcal{T}$ también pertenece a $\mathcal{T}$:
$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{T}$$

La pareja $(X, \mathcal{T})$ se llama **espacio topológico**, y los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan **abiertos**.

Base de una topología

Una colección de subconjuntos B_i de X se llama **base** si:

$$\forall x \in X,\ \exists B_i \in \mathcal{B} : x \in B_i$$

Además, si un punto está en la intersección de dos elementos, hay un elemento de la base en la intersección que contiene este punto

$$\forall x \in B_1 \cap B_2,\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Topología heredada

Si tenemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto $A \subseteq X$, podemos definir una topología en A dada por:

$$\mathcal{T}_A = \{\, A \cap T : T \in \mathcal{T} \,\}.$$

La pareja $(A, \mathcal{T}_A)$ se llama **topología heredada** de X.

Topología inducida por una distancia

Cualquier función de distancia d en un conjunto X permite definir **bolas abiertas** como los conjuntos de puntos que están a una distancia menor que una dada respecto de un centro:

$$B_r(x) = \{ y \in X : d(x, y) < r \}.$$

Si tomamos estas bolas abiertas como base de nuestra topología, la topología resultante se llama **topología inducida por una distancia**.

Topología del orden

Dado un conjunto ordenado X, la **topología del orden** es la generada por la base de intervalos abiertos de la forma $(a, b) = \{ x \in X : a < x < b \}$, añadiendo además los conjuntos $[\min(X), b)$ y $(a, \max(X)]$ si estos extremos existen en X.

Topología producto

Si $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(Y, \mathcal{T}_2)$ son espacios topológicos, se llama **topología producto** en $X \times Y$ a la topología cuya base está formada por todos los productos cartesianos de conjuntos abiertos de los espacios originales:

$$\mathcal{B} = \{ U \times V : U \in \mathcal{T}_1,\ V \in \mathcal{T}_2 \}.$$

Conceptos básicos

Conjunto abierto

Un conjunto $A \subseteq X$ se llama **abierto** si para cada punto $x \in A$ existe un entorno abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.

Conjunto cerrado

Un conjunto $A \subseteq X$ se llama **cerrado** si contiene a todos sus puntos frontera, o equivalentemente, si su complementario $X \setminus A$ es abierto.

Punto fronterizo y frontera

Un punto $x \in X$ se llama **fronterizo** de un conjunto A si todo entorno de x contiene puntos de A y de su complementario $X \setminus A$. El conjunto de todos los puntos fronterizos de A se llama la **frontera** de A, denotada $\mathrm{Fr}(A)$.

Interior

El **interior** de un conjunto A, denotado $\mathrm{Int}(A)$, es el mayor conjunto abierto contenido en A. Equivalentemente, es la unión de todos los abiertos contenidos en A.

Clausura

La **clausura** de un conjunto A, denotada $\overline{A}$, es el menor conjunto cerrado que contiene a A. Se puede expresar como $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Puntos de acumulación

Un punto $x \in X$ se llama **punto de acumulación** (o límite) de un conjunto A si todo entorno de x contiene algún punto de A distinto de x. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A'.

Puntos aislados

Los **puntos aislados** de un conjunto A son aquellos que pertenecen a $\overline{A}$ pero no son puntos de acumulación, es decir, los elementos de $\overline{A} \setminus A'$.

Densidad

Conjunto denso

Un subconjunto $H \subseteq X$ se llama **denso** en X si su clausura es todo el espacio, es decir:

$$\overline{H} = X.$$

Equivalentemente, H es denso si su intersección con cualquier abierto no vacío de X es no vacía. Intuitivamente, los puntos de H se aproximan arbitrariamente a cualquier punto de X.

Conjunto no denso en ninguna parte

Un subconjunto $A \subseteq X$ se llama **no denso en ninguna parte** si el interior de su clausura es vacío:

$$\mathrm{Int}(\overline{A}) = \varnothing.$$

Esto significa que A sólo puede ser frontera.

Axiomas de Separación T

Propiedad de Fréchet ($\mathbf{T_1}$)

Un espacio topológico X es $\mathbf{T_1}$ si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen entornos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \notin U_1, \qquad \text{y} \qquad x_2 \in U_2, \quad x_1 \notin U_2.$$

Equivalente a decir que todos los puntos de X son conjuntos cerrados.

Propiedad de Hausdorff ($\mathbf{T_2}$)

Un espacio topológico X es **Hausdorff** o $\mathbf{T_2}$ si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen entornos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2, \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Intuitivamente, los puntos de un espacio Hausdorff "viven en casas separadas".

Axiomas de Numerabilidad

Primer Axioma de Numerabilidad (1AN)

Un espacio topológico X satisface el **primer axioma de numerabilidad** si para cada punto $x \in X$ existe una colección numerable de entornos $\{A_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que todo entorno abierto $B(x)$ de x contiene al menos uno de los $A_i(x)$.
Todo espacio metrizable cumple el primer axioma de numerabilidad.

Segundo Axioma de Numerabilidad (2AN)

Un espacio topológico X satisface el **segundo axioma de numerabilidad** si la topología de X tiene una base numerable, es decir, existe una familia numerable de abiertos $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que todo abierto de X puede expresarse como unión de algunos de los B_i.

Homeomorfismo

Sea $f : X \to Y$ una biyección entre espacios topológicos. Se dice que f es un **homeomorfismo** si f es continua y abierta (es decir, si la imagen de cualquier conjunto abierto de X es abierta en Y).
Equivalentemente, f es homeomorfismo si f y su inversa f^{-1} son continuas.
En tal caso, los espacios X y Y se dicen **homeomorfos**, lo que significa que son topológicamente equivalentes.