



# Topología del orden

Topología - 4

Georgy Nuzhdin  
2022-202...

# Orden lineal

---

- | Definición. Dado un conjunto  $X$  se dice que existe una **relación de orden lineal** si para cada pareja  $a, b \in X$  sabemos que o  $a > b$  o que  $a = b$  o bien que  $a < b$
- Además, tiene que cumplirse:
  - 1)  $a \leq a$
  - 2)  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
  - 3)  $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

## Topología del orden

---

- | Definición. Dado un conjunto  $X$  se llama la **topología del orden** la generada por la base que es la colección de conjuntos  $(a, b)$  (todos los elementos mayores de  $a$  y menores de  $b$ ) más los conjuntos  $[\min X, b)$  y  $(a, \max X]$  si el conjunto original tiene un mínimo o máximo

## Consideremos $A = [0; 2]$

---

- ¿Coincide la topología del orden en  $A$  con la heredada de la canónica?
- En este caso, SÍ
- Además de los abiertos  $(a; b)$  en la topología del orden hay dos tipos de abiertos especiales:  $[0; b)$  y  $(a; 2]$  porque 0 y 2 son el mínimo y el máximo absolutos
- Pero estos intervalos los podemos obtener como intersecciones de  $A$  con abiertos de la canónica:
  - $[0; b) = A \cap (-1; b)$
  - $(a; 2] = A \cap (a; 3)$

## Topología heredada vs. natural

---

- En la topología natural en  $A = [0; 2]$  solamente encontramos abiertos habituales  $(a, b)$
- Si consideramos la topología heredada de la canónica en  $A = [0; 2]$  vemos que aparecen abiertos “raros”, como  $[0; 1)$ . La topología heredada, por tanto, tiene más abiertos y es más fina

## Topología del orden en conjuntos finitos

---

- Crea una topología del orden en  $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$
- Para esto, habrá que crear una relación de orden, por ejemplo,
- $\spadesuit < \clubsuit < \diamondsuit < \heartsuit$

# Topología del orden en conjuntos finitos

---

- Demuestra que la topología discreta coincide con la del orden

## Topología del orden en conjuntos no finitos

---

- Consideremos  $X = (-2, 0) \cup [1, 3)$
- ¿Es abierto  $[1, 2)$  en la topología del orden?
- ¿Es abierto  $[1, 2)$  en la topología heredada de la canónica?
- $[1, 2)$  no es un abierto en la topología del orden porque no se pueden encontrar  $a, b \in X$  tales que
$$1 \in \{a < x < b : x \in X\} \subset [1, 2).$$
- Sin embargo  $[1, 2) = (0, 2) \cap X$ , de modo que sí es abierto en la topología heredada por la canónica.



## Topología del orden en conjuntos no finitos

---

- Ahora bien, en  $X = (-2, 0) \cup [1, 3)$   
¿es abierto  $(-1; 0) \cup [1; 2)$  en la topología del orden?
- Sí.

$$1 \in \{-1 < x < 2, x \in X\}$$

## Topología del orden en $\mathbb{Z}^+$

---

- Indica cuáles de estos conjuntos son abiertos
  - $[1; 2)$
  - $(2; 4) \cup (6; 8)$
  - $[1; 7]$
- Conclusión: como los puntos son abiertos, esta topología coincide con la discreta

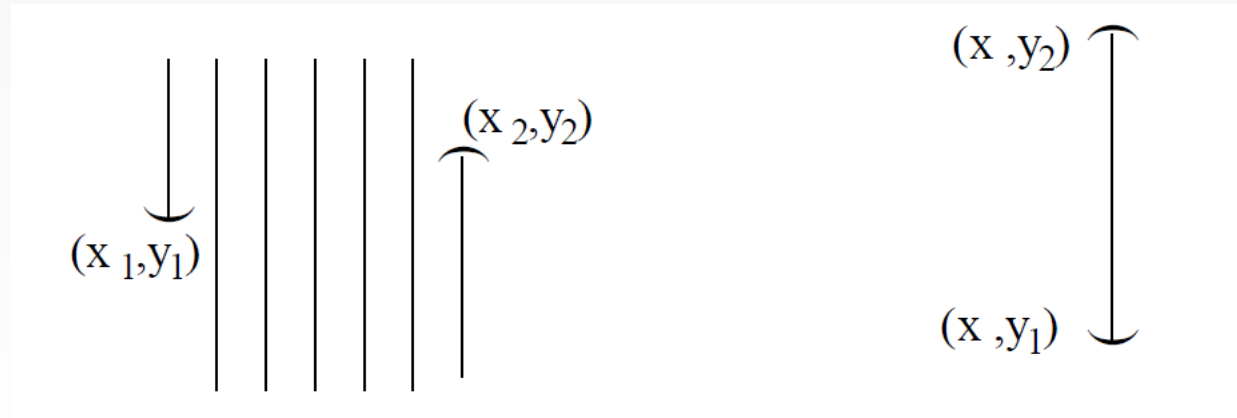
## Relación de orden en $\mathbb{R}^2$

---

- Inventa una relación de orden en el plano
- ¿Qué tal esta?
- $(a, b) < (c, d)$  si  $a < c$  o  $a = c$  y  $b < d$
- Podemos ahora crear intervalos entre dos puntos del plano!

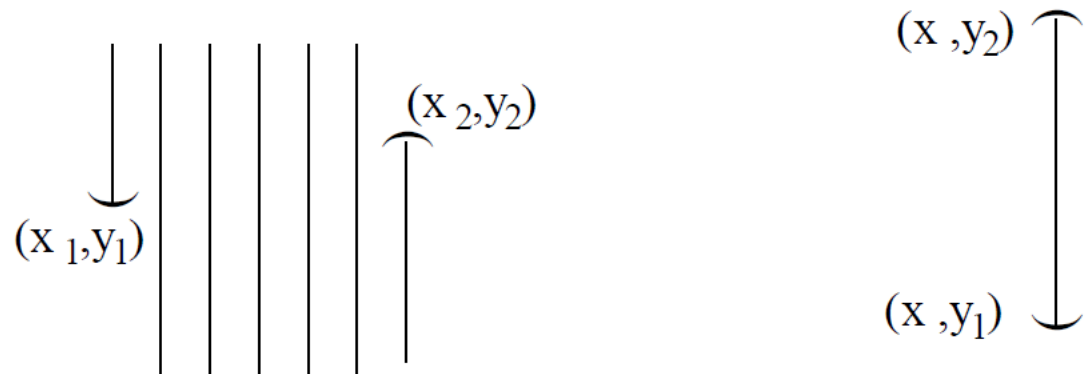
## Topologías del orden en $\mathbb{R}^2$

- Vamos a considerar dos topologías generadas por las siguientes bases:
- $B = \{((a, b), (c, d)): (a, b) < (c, d)\}$
- $B' = \{((a, b), (a, d)): b < d\}$
- ¿Cuál es más fina?
- ¿Son equivalentes?



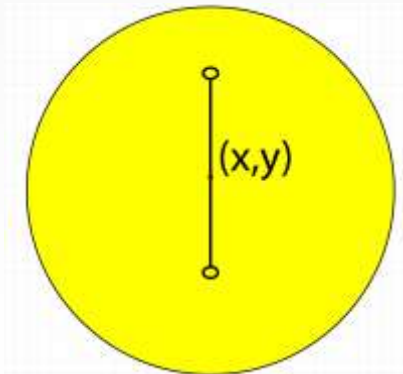
## Topologías del orden en $\mathbb{R}^2$

- Sí, son equivalentes
- $B = \{((a, b), (c, d)): (a, b) < (c, d)\}$
- $B' = \{((a, b), (a, d)): b < d\}$
- Todos los abiertos de la base  $B'$  están en  $B, B' \subset B$ , por lo que  $B$  es igual o más fina.
- Por otro lado, dentro de cada abierto de  $B$  hay un abierto de  $B'$ , por lo que  $B'$  es igual o más fina
- Otra forma de verlo:  
cubrir el intervalo  
izquierdo con intervalos  
de la derecha



## Topología del orden en $\mathbb{R}^2$

- ¿Qué representa en realidad esta topología?
- $B = \{((a, b), (c, d)): (a, b) < (c, d)\}$
- ¿Se parece a la canónica?
- ¿Cómo son las bolas abiertas?
- Como siempre, hay que comprobar si dentro de las bolas canónicas caben las del orden y viceversa
- La primera es evidente. Basta coger las bolas del tipo  $((a, b); (a, c))$
- Sin embargo, la segunda NO se cumple
- No hay ninguna bola canónica que esté dentro del intervalo  $((a, b); (a, c))$



¿Es un abierto en la topología del orden en  $\mathbb{R}^2$  ?

Dibújalo

---

- $\{(a, b) | b = 1, 1 < a < 3\}$

## Topología del orden en $X = [0; 1] \times [0; 1]$

- $B_{lex} = \{((a, b), (c, d)): (a, b) < (c, d), \text{ donde } (a, b), (c, d) \in [0; 1]\}$
- ¿Cómo son las bolas abiertas aquí?
- ¿Son abiertos?
  - $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, 0))$
  - $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1))$
  - $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1])$
- Considera el punto  $P = (\frac{1}{2}; 1)$ . Indica un entorno suyo. ¿Está en alguno de los intervalos anteriores?
- ¿Para qué podemos necesitar esta topología?
- Piensa en algo que ocurra cíclicamente... ¿El tiempo?



# Topología del orden en $X = [0; 1] \times [0; 1]$ HEREDADA DE LA CANÓNICA

- $B_{HER} = \{((a, b), (c, d)) \cap [0; 1]^2 : (a, b) < (c, d), \text{ donde } (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$

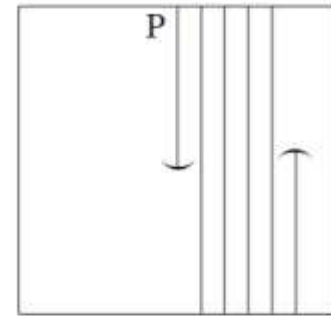
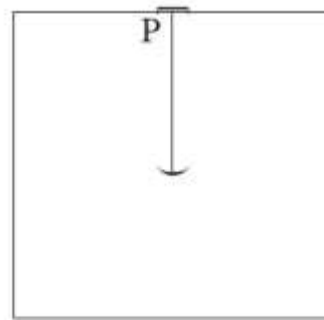
- ¿Son abiertos?

- $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, 0))$

- $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1))$

- $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)]$

- Considera el punto  $B = ((1/2, 1/2), (1/2, 2)) \cap X$   $P \in ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$   
 $P = (\frac{1}{2}; 1)$ . Indica un entorno suyo



## Comparación de abiertos

	Orden en $\mathbb{R}^2$	Orden en $[0; 1]^2$	Orden en $[0; 1]^2$ heredada de $\mathbb{R}^2$	Heredada de la canónica en $[0; 1]^2$
$((0,0), (0,1))$				
$[(0,0), (0,1))$				
$((0.5,0), (0.5,1)]$				
$[(0.4,0), (0.5,1)]$				

## Comparación de abiertos

	Orden en $\mathbb{R}^2$	Orden en $[0; 1]^2$	Orden en $[0; 1]^2$ heredada de $\mathbb{R}^2$	Heredada de la canónica en $[0; 1]^2$
$((0,0), (0,1))$	Abierto	Abierto	Abierto	No abierto
$[(0,0), (0,1))$	No abierto	Abierto porque $(0,0)$ es el mínimo	Abierto porque $[(0,0), (0,1)) =$ $[0; 1]^2 \cap ((0, -1), (0, 1))$	No abierto
$((0.5,0), (0.5,1)]$	No abierto	No abierto	Abierto porque $((0.5,0), (0.5,1)] =$ $[0; 1]^2 \cap ((0.5,0), (0.5,2))$	No abierto
$[(0.4,0), (0.5,1)]$	No abierto	No abierto	Abierto	Abierto

## Conclusión. Topología heredada vs. natural

---

- $B_{lex} = \{((a, b), (c, d)) : (a, b) < (c, d), \text{ donde } (a, b), (c, d) \in [0; 1]\}$
- $B'_{HER} = \{((a, b), (c, d)) \cap X : (a, b) < (c, d), \text{ donde } (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2\}$
- La topología heredada tiene MÁS abiertos que la natural, por lo que es **más fina**

## Topología del orden en $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}^+$

---

- ¿Qué es más grande
  - $(2,3)$  o  $(1,4)$  ?
  - $(1,7)$  o  $(2,8)$  ?

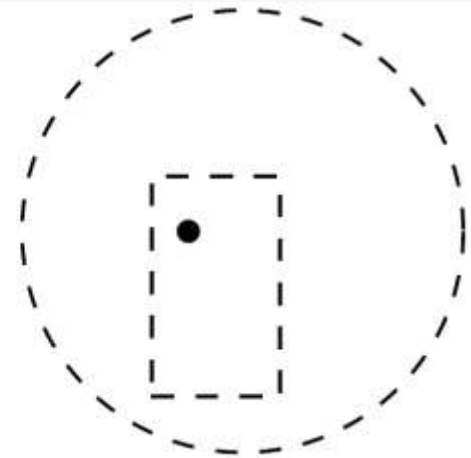
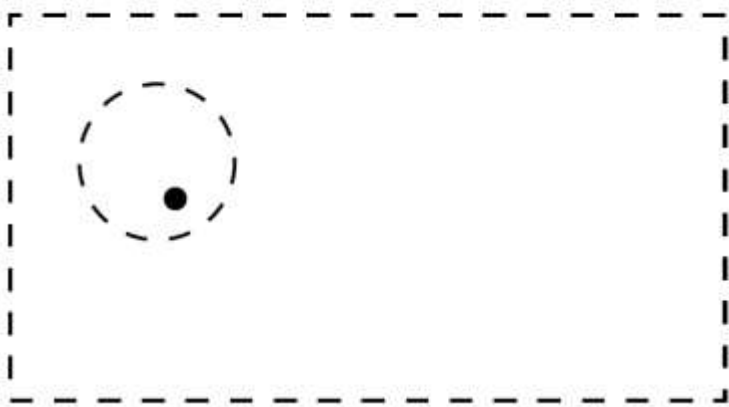
## Topología producto $X \times Y$

---

- Los abiertos de la base son productos de abiertos

## Topología producto $X \times Y$

- Demuestra que la topología producto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  es equivalente a la topología canónica  $\mathbb{R}^2$
- Piensa en cómo son las bolas abiertas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y en  $\mathbb{R}^2$ . ¿Caben unas en otras?



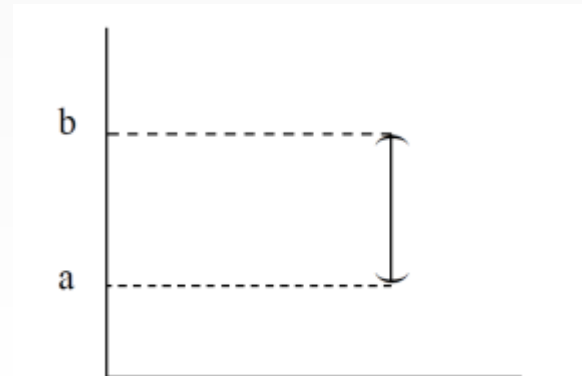
## ¿Cómo son las bolas abiertas en la topología producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (ambas con la topología canónica)

- ¡Pues claro!
- ¡Son cilindros!



## ¡Comparemos topologías! ¿Cómo? ¡Dibujando!

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto *discreta en  $\mathbb{R}$   $\times$  canónica en  $\mathbb{R}$* . Recuerda que en la discreta ¡los puntos son abiertos!
- ¿Coincide con la topología del orden en  $\mathbb{R}^2$ ?
- La respuesta es SÍ
- La base de la discreta son puntos. Un abierto de la base en discreta  $\times$  canónica es  $\{x\} \times (a, b)$
- Como base de la topología del orden podemos elegir  $((x, a), (x, b))$
- ¡Pero si es exactamente lo mismo!



## ¡Ojo!

---

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto *canónica en  $\mathbb{R} \times$  discreta en  $\mathbb{R}$ .*
- ¿Coincide con la topología del orden en  $\mathbb{R}^2$  ?
- La respuesta es NO
- Los segmentos horizontales no son abiertos en la del orden

## ¿Qué pasa con el cuadrado $1 \times 1$ ?

---

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto *discreta* en  $[0; 1] \times$  *heredada de la canónica* en  $[0; 1]$  .
- ¿Coincide
  - con la topología del orden interna en  $[0; 1] \times [0; 1]$ ?
  - con la topología del orden heredada de  $\mathbb{R}^2$  en  $[0; 1] \times [0; 1]$ ?

## ¿Qué pasa con el cuadrado $1 \times 1$ ?

---

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto *discreta* en  $[0; 1] \times$  *heredada de la canónica* en  $[0; 1]$  .
- ¿Coincide
  - con la topología del orden interna en  $[0; 1] \times [0; 1]$ ? NO. El problema son los intervalos  $((x, a), (x, 1])$  que son abiertos en discreta  $\times$  heredada de la canónica y NO lo son en la del orden
  - con la topología del orden heredada de  $\mathbb{R}^2$  en  $[0; 1] \times [0; 1]$ ? SÍ. Aquí son abiertos en ambos

## Proyecciones desde $X \times Y$

---

- Los abiertos de la base son proyecciones de abiertos a cada uno de los conjuntos (piensa en coordenadas)
- Las funciones  $\pi_x: X \times Y \rightarrow X, \pi_y: X \times Y \rightarrow Y$  se llaman “proyecciones”.
- Pasan abiertos a abiertos (demuéstralo)