

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tema 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2025-2026

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

Índice

1 Conceptos básicos	1
2 Problemas de valor inicial y problemas de contorno	2
3 Curva integral	3
4 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden	3
5 Ecuación diferencial de una familia de curvas	4
6 Problemas	4

1 Conceptos básicos

Se denomina **ecuación diferencial ordinaria** o EDO a toda ecuación en la que aparece una variable independiente, una variable dependiente y las derivadas de esta última. Como variable independiente se suele utilizar x o t . Como variable dependiente, $y = y(x)$ o $x = x(t)$. Finalmente, las derivadas se suelen representar y' , y'' , y''' , ... o bien \dot{x} , \ddot{x} , \dddot{x} ,

Las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden presentarse en dos formatos: como ecuación en forma implícita o en forma normal.

- Forma implícita: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{n)}) = 0$
- Forma normal o canónica: $y^{n}) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Por su parte, se denomina **grado** de una ecuación diferencial al exponente natural al que está elevada la derivada de mayor orden, en caso de tenerlo.

Ejemplo 1

La ecuación $(y'')^3 + 2xy - 5y^4 = \operatorname{sen}(x)$ es de segundo orden y tercer grado.

Una ecuación diferencial ordinaria **lineal** de orden n es una ecuación de la siguiente forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

En una ecuación lineal de orden n solo pueden aparecer las primeras potencias de la variable y y de sus derivadas. No pueden aparecer productos de esa variable con sus derivadas o de sus derivadas entre sí, ni funciones trascendentes (exponentiales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas) de la variable y , ni de sus derivadas.

Si $b(x) = 0$, la ecuación lineal es **homogénea**, mientras que si $b(x) \neq 0$ se dice que la ecuación lineal es **completa o no homogénea**.

Si todos los coeficientes $a_i(x)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal es de **coeficientes constantes**. En caso contrario, se afirma que la ecuación es de **coeficientes variables**.

Ejemplo 2

La ecuación $y'' + 5y' + 6y = 0$ es lineal, homogénea, de segundo orden y de coeficientes constantes.

Ejemplo 3

La ecuación $(y'')^2 + 5y' + 6y = 0$ no es lineal ya que una de las derivadas está elevada al cuadrado.

Ejemplo 4

La ecuación $x \tan(y) + y' - x = 0$ no es lineal ya que la variable y aparece como el argumento de una función trascendente.

Llamaremos **solución** de una ecuación diferencial ordinaria a toda función que satisfaga dicha ecuación diferencial. Una solución puede tener las siguientes formas:

- Forma explícita: $y = f(x)$
- Forma implícita: $F(x, y) = 0$
- Forma paramétrica: $x = x(t), y = y(t)$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$

El proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial se denomina **integrar** la ecuación. Se denomina **solución general** de una ecuación diferencial a una familia de n parámetros (cuyo número coincide con el orden de la ecuación) cuyos miembros verifican la ecuación, y que representan en muchos casos todas o casi todas las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5

La ecuación $y' - y = 0$ tiene como solución general $y = Ce^x$, mientras que la solución general de la ecuación $y'' + y = 1$ es $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) + 1$.

Una **solución particular** es cualquier función que forme parte de la solución general, y que se obtiene dando valores concretos a los parámetros. Por otra parte, cuando existe alguna solución de la ecuación que no pertenece a la familia de funciones representada por la solución general, esa función recibe el nombre de **solución singular**. Es importante aclarar que no siempre existen soluciones singulares.

Ejemplo 6

La ecuación $yy' - xy' - xy + x^2 = 0$ tiene como solución general a la familia $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Una solución particular es $y = \frac{x^2}{2} + 1$, mientras que $y = x$ es una solución singular.

2 Problemas de valor inicial y problemas de contorno

Una de las aplicaciones prácticas más importantes de las ecuaciones diferenciales es la resolución de problemas en las que aparece una ecuación y una o más condiciones (en función del orden de la ecuación), y que deben ser satisfechas por la solución de la ecuación.

Si todas las condiciones del problema se refieren a un mismo valor x_0 , al problema se le llama **problema de valor inicial** (PVI) o **problema de Cauchy**. En el caso de las ecuaciones diferenciales de orden n , se necesitan n condiciones iniciales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$.

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ con condiciones $y(1) = 3$ e $y'(1) = -4$ es un problema de valor inicial.

Por el contrario, si las condiciones se refieren a valores diferentes de la variable x , al problema se le denomina **problema con condiciones de contorno**.

Ejemplo 8

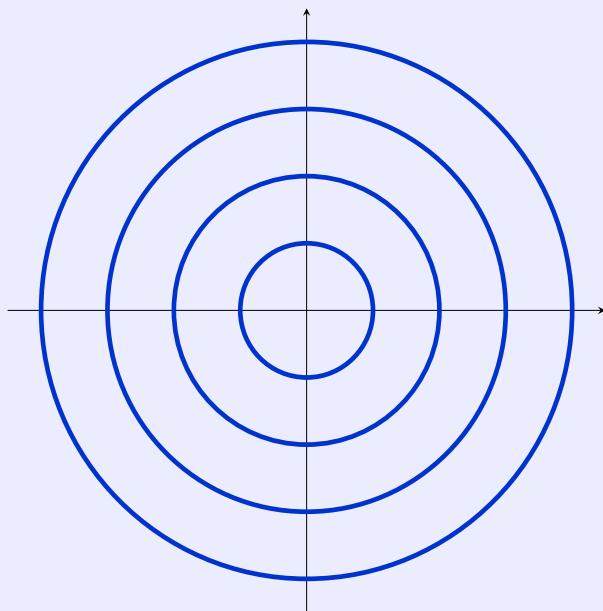
Resolver la ecuación $y'' + y = 0$ con condiciones $y(0) = 1$ e $y(1) = 3$ es un problema con condiciones de contorno.

3 Curva integral

Se llama curva integral de la ecuación a la gráfica asociada a la función $y = f(x)$ que es solución de dicha integral.

Ejemplo 9

Las curvas integrales de la ecuación $y' + x = 0$ son las circunferencias dadas por la expresión $x^2 + y^2 = K$, donde $K > 0$.



4 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden

Dada la ecuación $y' = f(x, y)$, si tanto $f(x, y)$ como $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo

D del plano, por cada punto (x_0, y_0) de dicho rectángulo pasará una única curva integral de la ecuación. En caso de no cumplirse las condiciones del teorema, no se puede asegurar nada para un punto (x_0, y_0) dado.

Ejemplo 10

Dada la ecuación $y' - xy + e^{-y} = 0$, como tanto $f(x, y) = xy - e^{-y}$ como su derivada respecto de y son continuas para toda pareja (x, y) , se puede asegurar que por cada punto (x, y) del plano pasa una única curva que sea solución de la ecuación diferencial.

5 Ecuación diferencial de una familia de curvas

Hasta ahora hemos hablado de buscar la solución (general, particular o singular) a una ecuación dada. El problema contrario consiste en determinar la ecuación diferencial cuya solución general viene dada por una familia de curvas representada por la ecuación $F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Para ello, es necesario derivar la expresión $F(x, y, C_1, \dots, C_n)$ tantas veces como parámetros C_i estén presentes en la solución general, despejando esos parámetros de las n ecuaciones obtenidas hasta poder ofrecer una expresión en la que no aparezca ningún parámetro.

Ejemplo 11

La ecuación cuya solución general es la familia $y = C_1 x^2 + C_2 x + 4$ es $x^2 y'' - 2x y' + 2y = 8$, dado que al derivar la primera vez la familia de curvas obtenemos $y' = 2C_1 x + C_2$ y al derivar por segunda vez se obtiene $y'' = 2C_1$.

6 Problemas

- 1) Indica el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:
 - a) $(y'')^2 \operatorname{sen}(x) + 3xyy' + y^2 e^x = 0$
 - b) $y'' + 5x^2(y')^3 + 6y = 0$
 - c) $x^2 \sqrt{y'' + 3x} - 2y^2 = 3 \operatorname{sen}(x)$
- 2) Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:
 - a) $y' + x^2 - 1 = y$
 - b) $3xy'' - 4yy' + y \operatorname{sen}(x) = 4x$
 - c) $y dx + (xy + x - 3y) dy = 0$
 - d) $y'' - 2y + 3 = e^x$
 - e) $4xy + \cos(y) = 5x$
- 3) Comprueba que las funciones dadas son solución de sus correspondientes ecuaciones diferenciales:
 - a) $y = x + e^{-x}$ para la ecuación $y' + y = x + 1$
 - b) $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ para la ecuación $y'' - 7y' + 12y = 0$
 - c) $y = e^x(2x + 1)$ para la ecuación $y'' = 2y' - y$
 - d) $x(t) = \operatorname{sen}(t) + \cos(t)$ para la ecuación $\dot{x} \cos(t) + x \operatorname{sen}(t) = 1$
- 4) Determina los valores de m para los que la función $f(x) = e^{mx}$ es solución de la ecuación $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$.
- 5) Verifica que la expresión paramétrica $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ es solución de la ecuación $x + yy' = 0$.

- 6) Verifica que las siguientes expresiones implícitas son soluciones de las ecuaciones diferenciales asociadas:
- $x^2 + y^2 - 4 = 0$ para la ecuación $y' = -\frac{x}{y}$
 - $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$ para la ecuación $(1 + e^x)y y' = e^x$
- 7) Verifica que la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ es una solución de la ecuación $xy' - 2y = 0$.
- 8) Dada la ecuación $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, completa estos apartados:
- Demuestra que tanto $y_1(x) = x^2$ como $y_2(x) = x^3$ son soluciones de la ecuación.
 - ¿Es $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ también solución de la ecuación?
- 9) Comprueba que la familia de funciones $y = Cx + C^2$ es la solución general de la ecuación $y = xy' + (y')^2$. A continuación, determina el valor de K para que la función $y = Kx^2$ sea una solución singular de la misma ecuación.
- 10) Sabiendo que la solución general de la ecuación $x^2y' \operatorname{sen}(y) = 1$ está dada por la relación $\cos(y) = \frac{1}{x} + C$, calcula la solución particular que tiende al valor $\frac{\pi}{2}$ cuando x tiende a infinito.
- 11) Aplica el teorema de existencia y unicidad a la ecuación $y' = y^{1/3}$, determinando los recintos del plano donde se puede asegurar que en cada punto pase una única solución.
- 12) Dado el problema de valor inicial $\begin{cases} y' - xy^{1/2} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, comprueba que tanto $y = 0$ como $y = \frac{x^4}{16}$ son soluciones. ¿Contradice ese resultado el teorema de existencia y unicidad de soluciones en el origen de coordenadas?
- 13) Determina la ecuación diferencial asociada a las siguientes soluciones generales:
- $y - 4x - C = 0$.
 - $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
 - $x^2 + C_1 y^2 = C_2$ (donde $C_1, C_2 > 0$)
- 14) Escribe la ecuación diferencial asociada a una solución general representada por una familia de curvas para la que se verifica que, en todo punto, la pendiente de la recta tangente a cada curva es igual a la distancia de dicho punto al origen de coordenadas.

Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Ignacio Acero y Mariló López. *Ecuaciones diferenciales. Teoría y problemas.* Ed. Tébar Flores. ISBN 978-84-7360-609-7.
- Alfonsa García, Francisco García, Antonio López, Gerardo Rodríguez y Agustín de la Villa. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría y problemas.* Ed. CLAGSA. ISBN 84-921847-7-9.
- José Manuel Casteleiro Villalba y Antonio Ros Felip. *Problemas resueltos de ecuaciones diferenciales.* Ed. Garceta. ISBN 978-84-1622-886-7.
- Richard Bronson y Gabriel B. Costa. *Differential equations.* Ed. McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-182485-9.
- Jeffrey R. Chasnov. *Differential Equations for Engineers.* Disponible en <https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/differential-equations-for-engineers.pdf>.