



Homeomorfismos

Topología - 7

Georgy Nuzhdin
2022-2023

Recordando el concepto de la continuidad

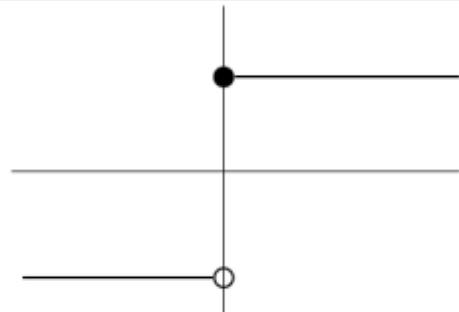
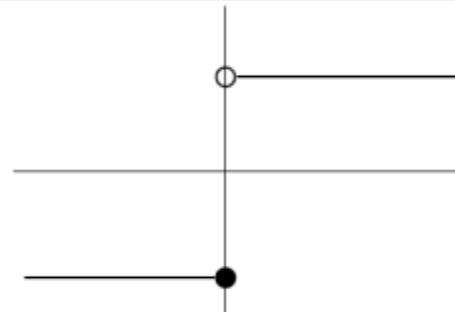
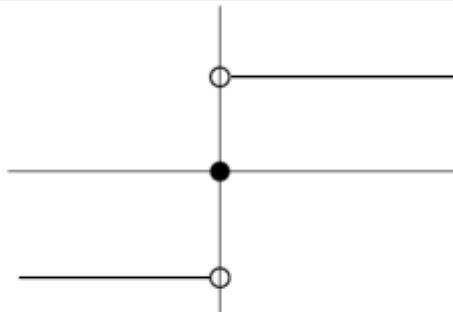
- “Continuidad en un punto”: los pequeños entornos de un punto pasan dentro de pequeños entornos de su imagen (si dos personas vivían cerca, después de trasladarse a otra ciudad, siguen viviendo cerca)
- “Continuidad global”: la preimagen de un abierto es un abierto

Demuestra que la función $f(x) = x^2$ es continua en
la topología canónica

Sea $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ con la topología canónica

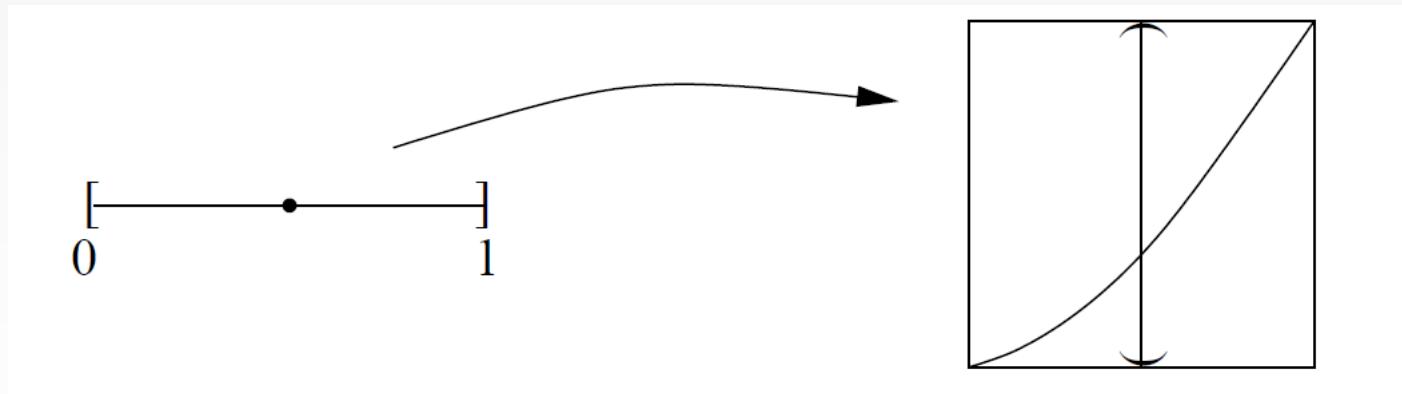
- ¿Es continua la función $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n n$?

¿Cuáles de estas funciones son continuas en Sorgenfrey?



¿Es continua la función

- $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1] \times [0; 1], f(x) = (x, x^2)$
- Considera la preimagen de $((0,5; 0), (0,5; 1))$



Función abierta

- | Definición. Una función se llama **abierta** si la imagen de un abierto es un abierto
- | Definición. Una función se llama **cerrada** si la imagen de un cerrado es un cerrado

- ¿Son abiertas? ¿Son cerradas? Ambas preguntas en la topología canónica
 - $y = -x$
 - $y = x^2$
 - $y = e^x$

¿Son abiertas o cerradas?

- La función de Dirichlet (canónica – discreta)
- La función $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Función abierta y cerrada en Sorgenfrey

- ¿Son abiertas? ¿Son cerradas? Ambas preguntas en la topología Sorgenfrey
 - $y = -x$
 - $y = x^2$
 - $y = e^x$

Teoremas de continuidad

- 1) Si $A \subset X$, la inclusión $j : A \rightarrow X$, $j(x) = x$, es continua.
- 2) Si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ son continuas, $g \circ f : X \rightarrow Z$ también lo es.
- 3) Si $f : X \rightarrow Y \times Z$ es continua \Leftrightarrow las proyecciones
 $X \rightarrow Y: \pi_1 \circ f$ y $X \rightarrow Z: \pi_2 \circ f$ también lo son.
- 4) (Pasting Lemma / Lema del pegado) Si $X = A \cup B$ con A , B cerrados en X , entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua \Leftrightarrow las restricciones de la función $f|A$ y $f|B$ lo son y $f(x)|_{A \cap B} = f(x)|_A + f(x)|_B$ en la intersección $A \cap B$

Homeomorfismos

Una biyección $f(x): X \rightarrow Y$ se llama **homeomorfismo** si son continuas tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$

Una biyección es homeomorfismo si es continua y abierta

¿Por qué son tan importantes los homeomorfismos?

- Transforman abiertos en X en abiertos en Y y viceversa
- Es decir, conservan la estructura topológica
- Si conseguimos establecer un homeomorfismo, demostramos que dos espacios topológicos son **equivalentes**

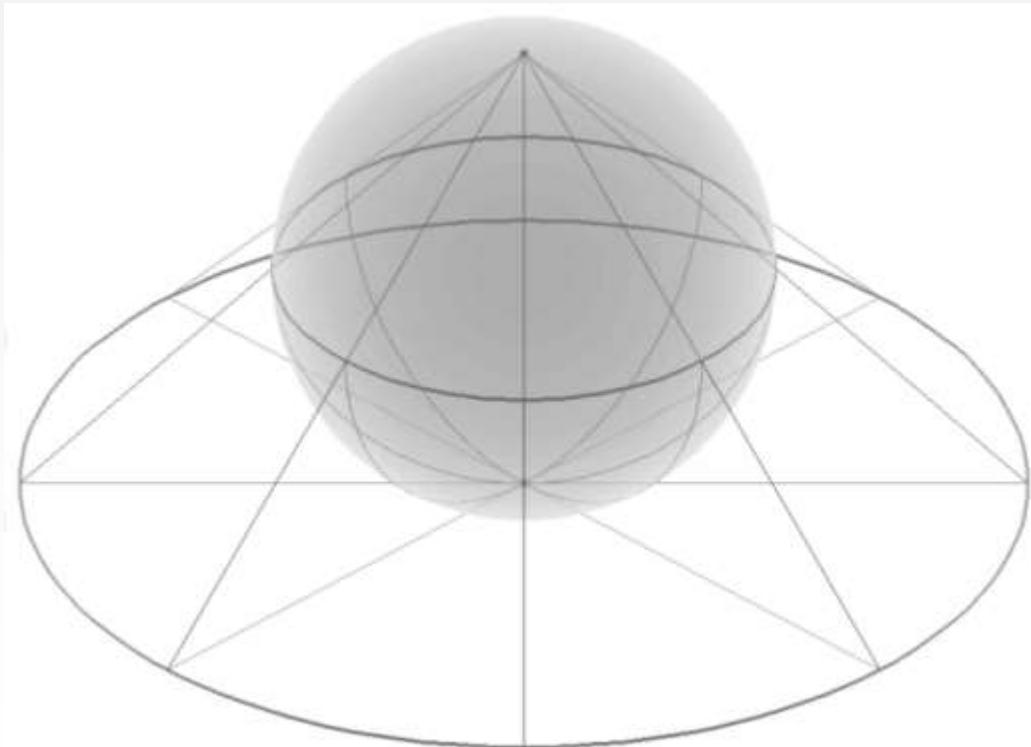
Ejemplos de homeomorfismos

- El cuadrado es homeomorfo a una circunferencia
- Trazando un segmento desde el centro común hasta el cuadrado se establece la biyección



Ejemplos de homeomorfismos

- La esfera sin un punto es homeomorfa al plano.
El homeomorfismo correspondiente es la proyección estereográfica



¿Son homeomorfismos?

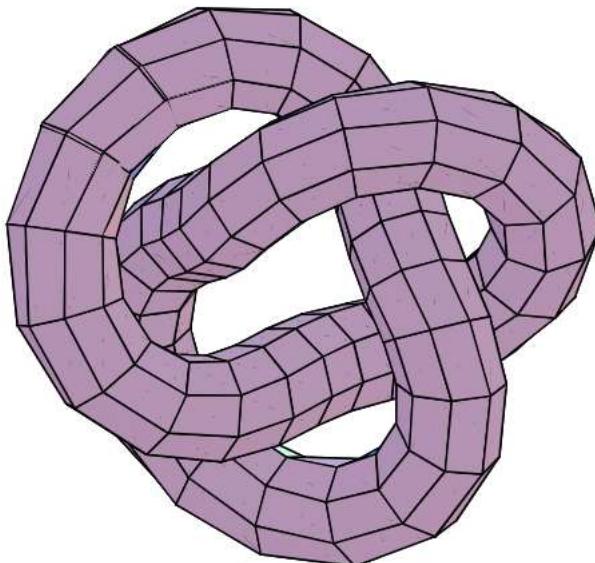
- $f(x) = e^x, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
- $f(x) = (\cos x, \sin x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^2$
- $f(x) = -2x, [0; 1] \rightarrow [-2; 0]$

Inventa un homeomorfismo

- $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
- $(2; 5) \rightarrow (-9; 0)$
- $(0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$
- $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$

¿Qué es lo que importa?

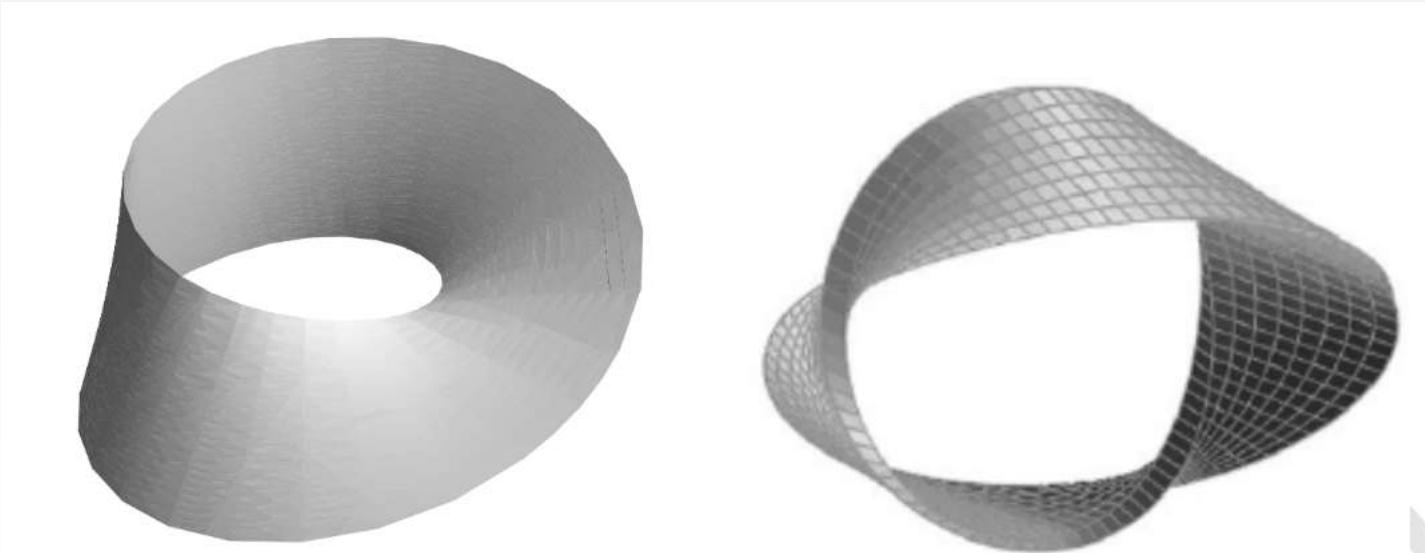
- El tamaño NO importa (cualquier intervalo abierto es homeomorfo a toda la recta numérica)
- La forma NO importa (el cuadrado es homeomorfo a la circunferencia)
- La posibilidad de transformar una figura en otra NO importa



El toro es homeomorfo a esta figura, pero NO se puede transformar en ella

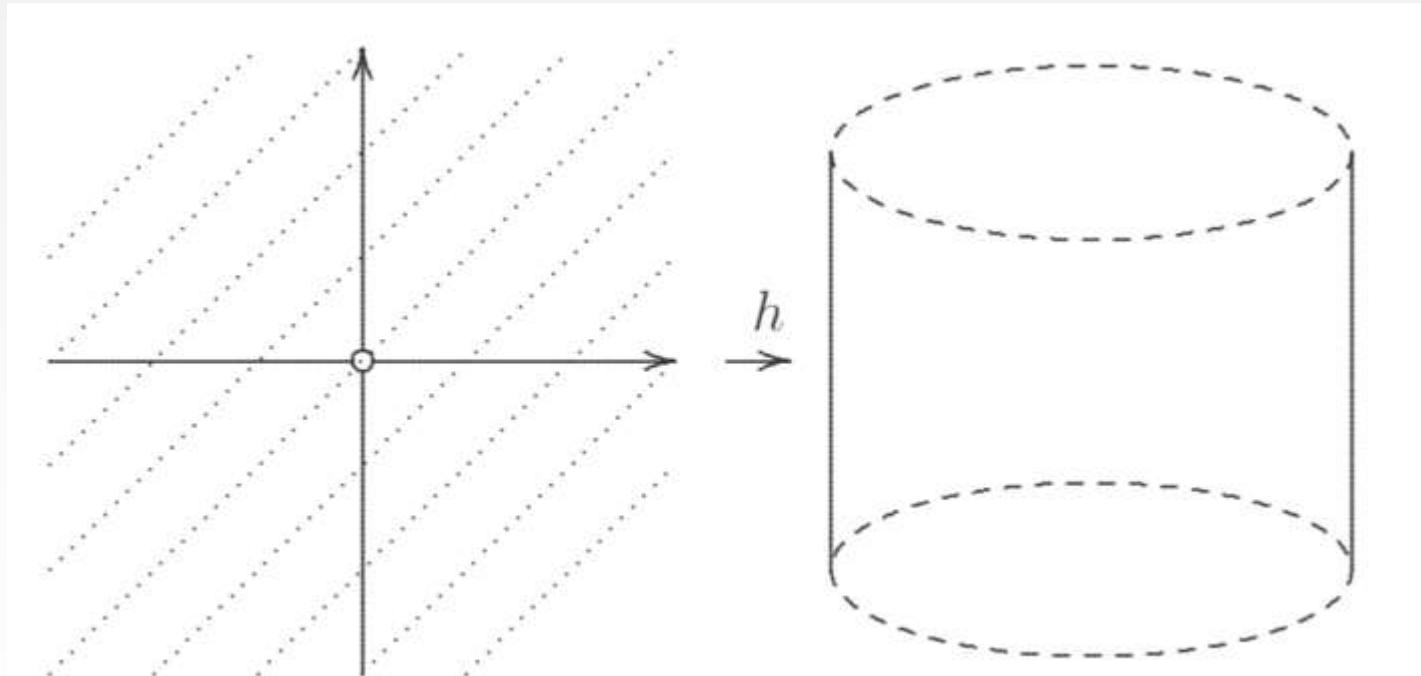
¿Son homeomorfos?

- ¿Dos cintas de Moebius con distinto número de giros? ¿Siempre?



¿Son homeomorfos?

- ¿El plano sin un punto y un cilindro infinito?



Encuentra parejas de espacios homeomorfos y demuestra el homeomorfismo

- \mathbb{R}
- \mathbb{S}^1
- $\mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$
- $(0; 1)$
- $[0; 2\pi)$
- $[0; 2\pi]$

Importante: Por qué \mathbb{S}^1 no es homeomorfo a $[0; 2\pi)$

- Supongamos que existe un homeomorfismo $f(x), [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$
- $f(0) = P$ es un punto de la circunferencia
- A ambos lados de este punto hay puntos cerca
- Pero la $f^{-1}(x)$ manda cerca los puntos que están a un lado y lejos los que están al otro
- ¿Lo podrás reformular en términos estrictamente matemáticos?

¿Son homeomorfos?

- $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ y $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

¿Son homeomorfos

- $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con la topología canónica y $\mathbb{N} \times [0; 1)$ con la topología del orden?

¿Son homeomorfos?

- $A_1 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $A_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$
- $B_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $B_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0\right\}$

¿Son homeomorfos?

- $\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}, A_n = \{1, 2, \dots, n\}\}$
- $\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}, B_n = \{n, n + 1, \dots\}\}$

Conjuntos homogéneos

| Definición. Un conjunto X se llama **topológicamente homogéneo** cuando $\forall a, b \in X$, existe un homeomorfismo $h: X \rightarrow X$ tal que $h(a) = b$

- ¿Son homogéneos
 - S^2 ?
 - $S^1 \times S^1$ (un toro)?
 - $(0; 1)$?
 - $[0; 1]$?