Topología 2025-26. Examen parcial

Profesor: Georgy Nuzhdin. Fecha: 27.10.2025

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Nombre: ___________________________

Apellidos: __________________________________

Elige en cada apartado el ítem que **NO** vas a desarrollar y **táchalo en el enunciado** del examen

1. **DEFINICIONES** (0,8 puntos máximo).
   Aporta al menos **un ejemplo** para cada concepto.
   a. (0,2) Base
   b. (0,2) Espacios T_1, T_2
   c. (0,2) Espacios 1AN, 2AN
   d. (0,2) Conjunto homogéneo

2. **CONTRAEJEMPLOS**. (1,1 puntos máximo. TACHA UNO)
   a. (0,3) La intersección de un número finito o infinito de abiertos es abierto

   b. (0,3) Dos bases distintas no pueden generar la misma topología

   c. (0,3) La topología heredada coincide con la topología interior

   d. (0,5) Un conjunto no numerable no puede ser no denso en ninguna parte (demostrar no numerable, demostrar no denso en ninguna parte)

3. **TEOREMAS** (1,5 puntos máximo. TACHA UNO)
   a. (0,4) La clausura del conjunto A es la intersección de todos los cerrados que contienen A

   b. (0,6) $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey no es metrizable

   c. (0,9) Teorema de Banach: en un espacio completo una función contractiva tiene exactamente un punto fijo

4. **EJERCICIOS** (6,6 puntos máximo. TACHA DOS**).**
   a. (0,6) ¿Son homeomorfos en la topología canónica?
   Si es así, presenta un homeomorfismo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x^2 + y^2| \leq 2\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < z \leq 2, x^2 + y^2 = 1\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x^2 + y^2| \leq 2\}$$

   b. (0,8) Resuelve la ecuación $x^3 = lnx$ con el método de Newton construyendo una función contractiva auxiliar $\varphi(x)$. Empieza en el punto $x_0 = 2$ y busca x_1.

c. (0,8) Estudia la convergencia de la sucesión $a_n = 17$ (indica a qué valores converge) en las siguientes topologías:

1. Semirrectas Derechas
2. Cofinita

d. (1) Construye dos funciones continuas en [0,1] tales que

1. la distancia integral entre ellas sea 1 y la del supremo, 0.5
2. la distancia del supremo entre ellas sea 1 y la integral, 0.5
   o demuestra que es imposible.

e. (1,2) Estudia si las siguientes topologías son 1AN, 2AN, T_1, T_2

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{A_x = (-\infty, x]\}\}$
2. $\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{U: |\mathbb{R} \setminus U| es\ numerable\}\}$

f. (1,2) ¿Qué funciones son continuas? ¿Cuáles son abiertas?

1. $f(x) = x^2$ en la topología discreta
2. $f(x) = -x^3$ en Sorgenfrey
3. $f(x) = cosx$ en la cofinita

g. (1,2) Dibuja las bolas abiertas en las siguientes topologías en $\mathbb{R}^2$. Indica qué topologías son más finas que otras si son comparables.

1. $Sorgenfrey \times Sorgenfrey$
2. $orden\ lexicográfico$
3. $discreta \times discreta$
4. $canónica \times discreta$

h. (1,2) Busca Clausura, Interior y Frontera de

1. $\{(a; 1), a \in (0{,}4; 0{,}6)\} \subset [0; 1] \times [0; 1]$ con la topología del orden
2. $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup\ [1; 4) \cup \{5 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ en Semirrectas derechas
3. $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup\ [1; 4) \cup \{5 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ en $Sorgenfrey$