Problema 1 (primer parcial)

domingo, 11 de mayo de 2025 21:30

Demuestra la validez e independencia de las soluciones para una ecuación lineal homogénea de segundo orden en los casos de dos raíces reales distintas y una raíz real doble.

Ecuación lineal homogénea de segundo orden: $y'' + b_1 y' + b_0 y = 0$

Caso 1: Dos raíces reales distintas r_1 y r_2 soluciones de $r^2 + b_1 r + b_0 = 0$.

Utilizaremos las soluciones $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$

$$y_1(x): y'' + b_1 y' + b_0 y = (r_1)^2 e^{r_1 x} + b_1 \cdot r_1 e^{r_1 x} + b_0 \cdot e^{r_1 x} = \cancel{(r_1^2 + b_1 r_1 + b_0)} e^{r_1 x} = 0 \checkmark$$

$$y_2(x): y'' + b_1 y' + b_0 y = (r_2)^2 e^{r_2 x} + b_1 \cdot r_2 e^{r_2 x} + b_0 \cdot e^{r_2 x} = \cancel{(r_2^2 + b_1 r_2 + b_0)} e^{r_2 x} = 0 \checkmark$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 \cdot e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{r_1 x} e^{r_2 x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (r_1 \neq r_2)$$

Caso 2: Una raíz real doble $r_1 = -b_1/2$, solución de $r^2 + b_1 r + b_0 = 0$.

Utilizaremos las soluciones $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = x \cdot e^{r_1 x}$

$$y_1(x): y'' + b_1 y' + b_0 y = (r_1)^2 e^{r_1 x} + b_1 \cdot r_1 e^{r_1 x} + b_0 \cdot e^{r_1 x} = (r_1^2 + b_1 r_1 + b_0) e^{r_1 x} = 0 \checkmark$$

$$y_2(x): y'' + b_1 y' + b_0 y = (2r_1 + r_1^2 \cdot x) e^{r_1 x} + b_1 (1 + r_1 x) e^{r_1 x} + b_0 x e^{r_1 x} =$$

$$= \cancel{(2r_1 + b_1)} e^{r_1 x} + x\cancel{(r_1^2 + b_1 r_1 + b_0)} e^{r_1 x} = 0 \checkmark$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x \cdot e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & (1 + r_1 x) e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2 r_1 x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Problema 2 (primer parcial)

domingo, 11 de mayo de 2025 21:30

Resuelve la ecuación diferencial $(x^2y+4xy+2y)\,dx+(x^2+x)\,dy=0$ eligiendo el factor integrante adecuado.

$$\underbrace{(x^2y+4xy+2y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(x^2+x)}_{N(x,y)}dy=0$$

Comprobamos que no es de tipo diferencial exacta:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=x^2+4x+2\neq 2x+1=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Vamos a utilizar un factor integrante $\mu=\mu(x)$:

$$\underbrace{\mu(x)\cdot(x^2y+4xy+2y)}_{P(x,y)}dy+\underbrace{\mu(x)(x^2+x)}_{Q(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\Rightarrow \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{d\mu}{dx}\cdot N(x,y)+\mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\cdot(x^2+4x+2)=\frac{d\mu}{dx}\cdot(x^2+x)+\mu\cdot(2x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x^2+2x+1)=\frac{d\mu}{dx}(x^2+x)\Rightarrow \frac{1}{\mu}d\mu=\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\left(1+\frac{x+1}{x(x+1)}\right)dx\Rightarrow\int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|\mu|=x+\operatorname{Ln}|x|+C\Rightarrow|\mu|=|x|\cdot e^x\Rightarrow \mu(x)=x\cdot e^x$$

Obtenemos la ecuación modificada:

$$\mu(x)\cdot(x^2y+4xy+2y)dy+\mu(x)(x^2+x)dy=0\Rightarrow$$

$$\underbrace{(x^3y+4x^2y+2xy)e^x}_{P(x,y)}dy=\underbrace{(x^3+x^2)e^x}_{Q(x,y)}dy=0$$

Comprobamos que es diferencial exacta:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=(x^3+4x^2+2x)e^x=(3x^2+2x+x^3+x^2)e^x=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\ \checkmark$$

Calculamos la función potencial $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int (x^3+x^2)\, e^x \, dy + C(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x,y) = (x^3+x^2)\, y\, e^x + C(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow y\left(\cancel{x^3} + 4\cancel{x^2} + 2\cancel{x}\right) e^x + C'(x) = \left(\cancel{x^3 y} + \cancel{4x^2 y} + \cancel{2xy}\right) e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = 0 \Rightarrow F(x,y) = (x^3+x^2)\, y\, e^x + C$$

Solución: $F(x,y) = \boxed{(x^3+x^2)\, y\, e^x + C = 0}$

Problema 3 (primer parcial)

domingo, 11 de mayo de 2025 21:30

Obtén la solución general de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2}$.

a) SGEH:

La ecuación homogénea es una ecuación Cauchy-Euler (tipo 1):

$$y = x^m \longrightarrow y' = m\cdot x^{m-1} \longrightarrow y'' = m\cdot(m-1)\,x^{m-2}$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \Rightarrow m(m-1)x^{m-2}\cdot x^2 - 2\,m\cdot x^{m-1}\cdot x + 2\cdot x^m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m - 2m + 2)\,x^m = 0 \Rightarrow (m^2 - 3m + 2)\,x^m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Luego $y_{SGEH} = C_1\cdot x + C_2\cdot x^2$

b) SGSC / SPEC:

Vamos a utilizar el método de variación de constantes:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) &= x^{5/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1'\cdot x + C_2'\cdot x^2 &= 0 \\ C_1'\cdot 1 + C_2'\cdot 2x &= x^{5/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} C_1' + C_2'\cdot x &= 0 \\ C_1' + 2C_2'\,x &= x^{5/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_2'\cdot x = x^{5/2} \Rightarrow C_2'(x) = x^{3/2} \Rightarrow C_2(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + C_2$$

$$C_1' = -C_2'x \Rightarrow C_1'(x) = -x^{5/2} \Rightarrow C_1(x) = -\frac{2}{7}x^{7/2} + C_1$$

Luego $y_{SGEC} = C_1(x)\cdot x + C_2(x)\cdot x^2 = \left(-\frac{2}{7}x^{7/2} + C_1\right)x + \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C_2\right)x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{SGEC} = C_1\cdot x + C_2\cdot x^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right)x^{9/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{SGEC} = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{4}{35}x^{9/2}}$$

Problema 4 (primer parcial)

domingo, 11 de mayo de 2025 21:30

Sabemos que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del medio ambiente. Un objeto con una temperatura de $72°F$ se coloca en el exterior, donde la temperatura es de $-20°F$. A las 11:05 la temperatura del objeto es de $60°F$ y a las 11:07 su temperatura es de $50°F$. ¿A qué hora se colocó el objeto en el exterior?

Vamos a considerar que $T(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t, y que $t_0=0$ son las 11:05, de forma que $T(t_0)=T_0=60$. Además, $t_1=2$ son las 11:07, con $T(t_1)=50$.

$$\frac{dT}{dt}=K(T-T_m) \Rightarrow \frac{1}{T-T_m}\,dT=K\cdot dt \Rightarrow \ln(|T-T_m|)=K\cdot t+C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T-T_m|=C_2\cdot e^{K\cdot t} \xrightarrow{T>T_m} T(t)=T_m+C\cdot e^{K\cdot t}=-20+C\cdot e^{Kt}$$

$$t=0 \longrightarrow T(0)=-20+C=60 \Rightarrow C=80$$

$$t=2 \longrightarrow T(2)=-20+C\cdot e^{K\cdot 2}=-20+80\cdot e^{2K}=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80e^{2K}=70 \Rightarrow e^{2K}=7/8 \Rightarrow 2K=\ln(7/8) \Rightarrow K=\tfrac{1}{2}\ln(7/8)$$

Ya podemos calcular el dato pedido:

$$T(t)=-20+80\,e^{\frac{1}{2}\ln(7/8)\cdot t} \Rightarrow T(t_x)=-20+80\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(7/8)t_x}=72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80e^{1/2\ln(7/8)t_x}=92 \Rightarrow e^{1/2\ln(7/8)t_x}=\frac{23}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{8}\right)t_x=\ln\left(\frac{23}{20}\right) \Rightarrow t_x=\frac{\ln(23/20)}{\frac{1}{2}\ln(7/8)}\simeq -2{,}093 \text{ min.}$$

Luego el objeto se colocó en el exterior aproximadamente 2 minutos y 5 segundos antes de las 11:05, es decir, a las $\boxed{11:02:55}$