# Ejercicios de Integrales Indefinidas y Definidas

## Ejercicio 1

Dada la función $f(x) = e^{2x} - 1$, se define

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(t-1)\,dt \qquad \text{para todo } x \in [1, \infty).$$

Calcular $F'(x)$ y determinar si esa derivada se anula en algún punto de su dominio.

## Ejercicio 2

Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, para que la recta $y = ax$ divida a la región acotada que limitan las curvas

$$2y^2 = x \qquad \text{y} \qquad y = 2x^2,$$

en dos partes, una de área doble que la otra.

## Ejercicio 3

Hallar el área de la región limitada por las curvas

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{3x}{3x^2 + 6x + 10},$$

entre $x = 1$ y $x = 4$.

## Ejercicio 4

Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{2x^2 + \operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$$

## Ejercicio 5

Determinar el área geométrica encerrada por la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 \arctan(x),$$

el eje $X$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

## Ejercicio 6

Calcular el volumen del sólido engendrado al girar en torno al eje $OX$ la superficie limitada por la curva

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2\sqrt{x+2}}$$

y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

## Ejercicio 7

Calcular la integral definida

$$\int_e^{e^2} \frac{Ln(Ln(x))}{x}\, dx.$$

## Ejercicio 8

Una curva plana puede estar definida mediante ecuaciones cartesianas ($y = f(x)$) o mediante ecuaciones paramétricas ($x = x(t)$, $y = y(t)$), donde $t$ es el parámetro. Sabiendo que en este último caso la longitud de una curva desde $t = a$ hasta $t = b$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\, dt,$$

calcular la longitud de la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3, \qquad y(t) = \frac{1}{2}t^2$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

## Ejercicio 9

Calcula la integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2}\, dx$$

y proporciona tanto la expresión más simplificada posible correspondiente a la solución como su valor numérico

## Ejercicio 10

Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\operatorname{sen} x$ alrededor del eje $OX$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

## Ejercicio 11

Se tiene una barra metálica cuya densidad lineal viene dada por

$$\lambda(x) = 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \text{(kg/m)},$$

donde $x$ es la distancia desde uno de sus extremos, medida en metros. Calcular la masa total de la barra si esta mide un total de 4 metros.

## Ejercicio 12

Demostrar que la función

$$F(x) = -1 + \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

se anula en un único punto y acotar el intervalo en el que se encuentra dicho punto.