Topología del orden

Topología - 4

Georgy Nuzhdin

2022-202…

Orden lineal

- | Definición. Dado un conjunto X se dice que existe una **relación de orden lineal** si para cada pareja $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in X$ sabemos que o $\mathrm{a} > \mathrm{b}$ o que $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ o bien que $\mathrm{a} < \mathrm{b}$
- Además, tiene que cumplirse:

1) $a \leq a$

2) $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$

3) $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Topología del orden

- | Definición. Dado un conjunto X se llama la **topología del orden** la generada por la base que es la colección de conjuntos (a, b) (todos los elementos mayores de a y menores de b) más los conjuntos $[\min \mathrm{X}, \mathrm{b})$ y $(\mathrm{a}, \max \mathrm{X}]$ si el conjunto original tiene un mínimo o máximo

Consideremos $\mathrm{A} = [0;2]$

- ¿Coincide la topología del orden en A con la heredada de la canónica?
- En este caso, SÍ
- Además de los abiertos $(a;b)$ en la topología del orden hay dos tipos de abiertos especiales: $[0;b)$ y $(a;2]$ porque 0 y 2 son el mínimo y el máximo absolutos
- Pero estos intervalos los podemos obtener como intersecciones de A con abiertos de la canónica:
  - $[0;b) = \mathrm{A} \cap (-1;b)$
  - $(a;2] = \mathrm{A} \cap (a;3)$

Topología heredada vs. natural

- En la topología natural en $A = [0;2]$ solamente encontramos abiertos habituales (a, b)
- Si consideramos la topología heredada de la canónica en $A = [0;2]$ vemos que aparecen abiertos “raros”, como $[0;1)$. La topología heredada, por tanto, tiene más abiertos y es más fina

Topología del orden en conjuntos finitos

- Crea una topología del orden en X = {♠, ♣, ♦, ♥}
- Para esto, habrá que crear una relación de orden, por ejemplo,
- ♠<♣<♦<♥

Topología del orden en conjuntos finitos

- Demuestra que la topología discreta coincide con la del orden

Topología del orden en conjuntos no finitos

- Consideremos $X = (-2, 0) \cup [1, 3)$
- ¿Es abierto $[1, 2)$ en la topología del orden?
- ¿Es abierto $[1, 2)$ en la topología heredada de la canónica?
- $[1, 2)$ no es un abierto en la topología del orden porque no se pueden encontrar $a, b \in X$ tales que
$$1 \in \{a < x < b : x \in X\} \subset [1, 2).$$
- Sin embargo $[1, 2) = (0, 2) \cap X$, de modo que sí es abierto en la topología heredada por la canónica.

Topología del orden en conjuntos no finitos

- Ahora bien, en $X = (-2, 0) \cup [1, 3)$

  ¿es abierto $(-1; 0) \cup [1; 2)$ en la topología del orden?

- Sí.

  $$1 \in \{-1 < x < 2, x \in X\}$$

Topología del orden en $\mathbb{Z}^+$

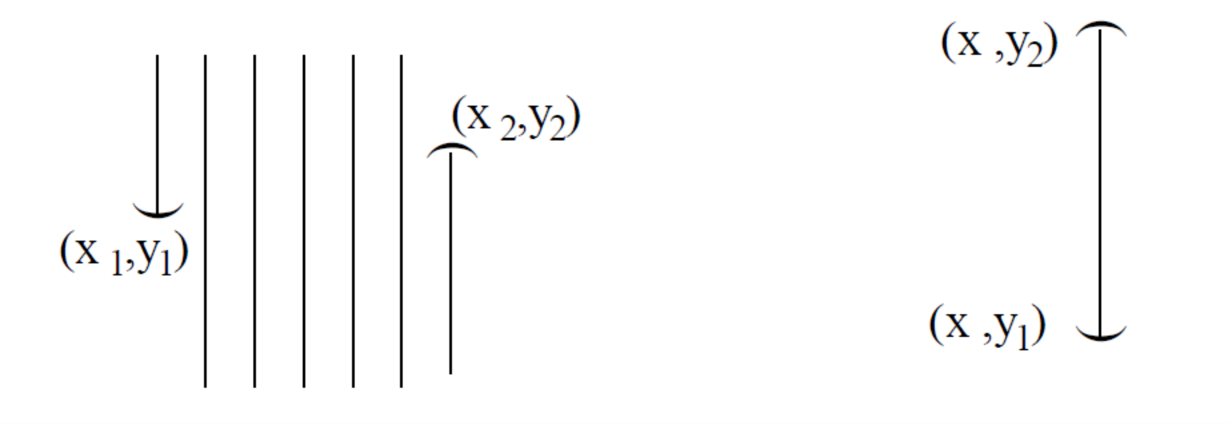
- Indica cuáles de estos conjuntos son abiertos
  - $[1;2)$
  - $(2;4)\cup(6;8)$
  - $[1;7]$
- Conclusión: como los puntos son abiertos, esta topología coincide con la discreta

Relación de orden en $\mathbb{R}^2$

- Inventa una relación de orden en el plano
- ¿Qué tal esta?
- $(a, b) < (c, d)\ si\ a < c\ \boldsymbol{o}\ a = c\ y\ b < d$
- Podemos ahora crear intervalos ¡entre dos puntos del plano!

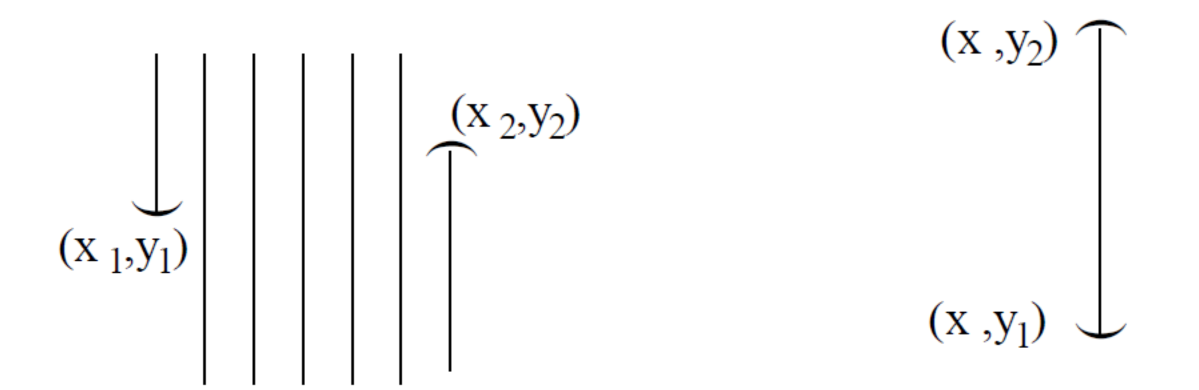
Topologías del orden en $\mathbb{R}^2$

- Vamos a considerar dos topologías generadas por las siguientes bases:
- $B = \{((a,b),(c,d)) \colon (a,b) < (c,d)\}$
- $B' = \{((a,b),(a,d)) \colon b < d\}$
- ¿Cuál es más fina?
- ¿Son equivalentes?



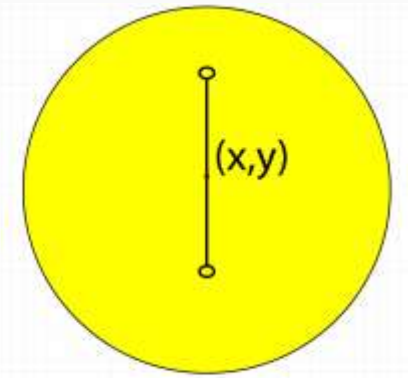
Topologías del orden en $\mathbb{R}^2$

- Sí, son equivalentes
- $B = \{((a,b),(c,d)) \colon (a,b) < (c,d)\}$
- $B' = \{((a,b),(a,d)) \colon b < d\}$
- Todos los abiertos de la base B' están en $B, B' \subset B$, por lo que B es igual o más fina.
- Por otro lado, dentro de cada abierto de B hay un abierto de B', por lo que B' es igual o más fina
- Otra forma de verlo: cubrir el intervalo izquierdo con intervalos de la derecha



Topología del orden en $\mathbb{R}^2$

- ¿Qué representa en realidad esta topología?
- $B = \{((a,b),(c,d))\colon (a,b) < (c,d)\}$
- ¿Se parece a la canónica?
- ¿Cómo son las bolas abiertas?
- Como siempre, hay que comprobar si dentro de las bolas canónicas caben las del orden y viceversa
- La primera es evidente. Basta coger las bolas del tipo $((a,b);\ (a,c))$
- Sin embargo, la segunda NO se cumple
- No hay ninguna bola canónica que esté dentro del intervalo $((a,b);\ (a,c))$



¿Es un abierto en la topología del orden en $\mathbb{R}^2$? Dibújalo

- $\{(a, b) | b = 1,\ 1 < a < 3\}$

Topología del orden en $X = [0;1] \times [0;1]$

- $B_{lex} = \{((a,b),(c,d))\colon\ (a,b) < (c,d), donde (a,b),(c,d) \in [0;1]\}$
- ¿Cómo son las bolas abiertas aquí?
- ¿Son abiertos?
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{3},0\right))$
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right))$
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right)]$
- Considera el punto $P = (\frac{1}{2};1)$. Indica un entorno suyo. ¿Está en alguno de los intervalos anteriores?
- ¿Para qué podemos necesitar esta topología?
- Piensa en algo que ocurra cíclicamente… ¿El tiempo?

Topología del orden en $X = [0;1] \times [0;1]$ HEREDADA DE LA CANÓNICA

- $B_{HER} = \{((a,b),(c,d)) \cap [0;1]^2 : (a,b) < (c,d), donde\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2\}$
- ¿Son abiertos?
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{3},0\right))$
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right))$
  - $(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right)]$
- Considera el punto $P = (\frac{1}{2};1)$. Indica un entorno suyo

$B = ((1/2,1/2),(1/2,2)) \cap X$ $\qquad$ $P \in ((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

Comparación de abiertos

	Orden en $\mathbb{R}^2$	Orden en $[0;1]^2$	Orden en $[0;1]^2$ heredada de $\mathbb{R}^2$	Heredada de la canónica en $[0;1]^2$
$\big((0,0),(0,1)\big)$				
$\big[(0,0),(0,1)\big)$				
$\big((0.5,0),(0.5,1)\big]$				
$[(0.4,0),(0.5,1)]$				

Comparación de abiertos

	Orden en $\mathbb{R}^2$	Orden en $[0;1]^2$	Orden en $[0;1]^2$ heredada de $\mathbb{R}^2$	Heredada de la canónica en $[0;1]^2$
$\big((0,0),(0,1)\big)$	Abierto	Abierto	Abierto	No abierto
$\big[(0,0),(0,1)\big)$	No abierto	Abierto porque (0,0) es el mínimo	Abierto porque $\big[(0,0),(0,1)\big) = [\mathbf{0};\mathbf{1}]^2 \cap \big((0,-1),(0,1)\big)$	No abierto
$\big((0.5,0),(0.5,1)\big]$	No abierto	No abierto	Abierto porque $\big((0.5,0),(0.5,1)\big] = [\mathbf{0};\mathbf{1}]^2 \cap \big((0.5,0),(0.5,2)\big)$	No abierto
$[(0.4,0),(0.5,1)]$	No abierto	No abierto	Abierto	Abierto

Conclusión. Topología heredada vs. natural

- $B_{lex} = \{((a,b),(c,d)) \colon (a,b) < (c,d), donde (a,b),(c,d) \in [0;1]\}$
- $B'_{HER} = \{((a,b),(c,d)) \cap X : (a,b) < (c,d), donde\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2\}$
- La topología heredada tiene MÁS abiertos que la natural, por lo que es **más fina**

Topología del orden en $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}^+$

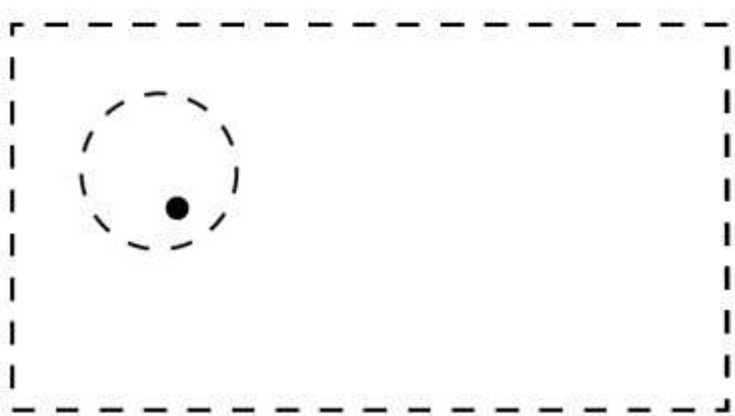
- ¿Qué es más grande
  - $(2,3)$ o $(1,4)$?
  - $(1,7)$ o $(2,8)$?

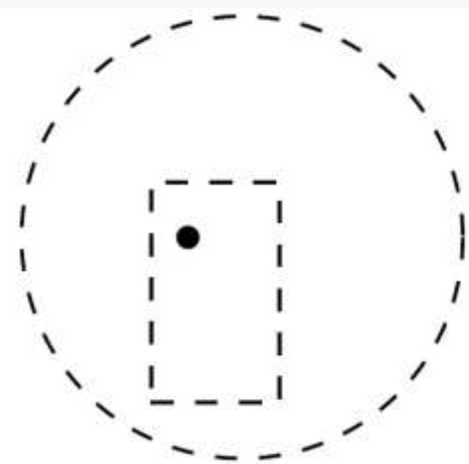
Topología producto $X \times Y$

- Los abiertos de la base son productos de abiertos

Topología producto $X \times Y$

- Demuestra que la topología producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es equivalente a la topología canónica $\mathbb{R}^2$
- Piensa en cómo son las bolas abiertas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$. ¿Caben unas en otras?



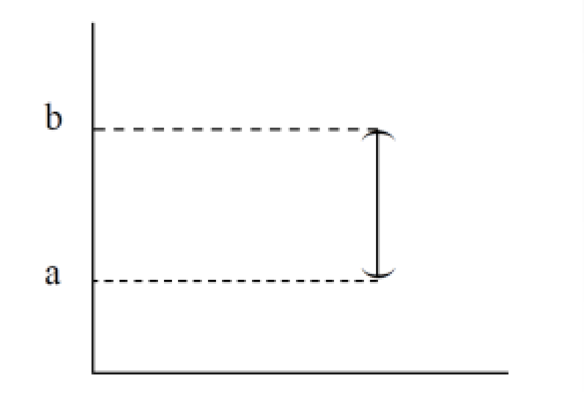


¿Cómo son las bolas abiertas en la topología producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ (ambas con la topología canónica)

- ¡Pues claro!
- ¡Son cilindros!

¡Comparemos topologías! ¿Cómo? ¡Dibujando!

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto $discreta\ en\ \mathbb{R} \times canónica\ en\ \mathbb{R}$. Recuerda que en la discreta ¡los puntos son abiertos!
- ¿Coincide con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$?
- La respuesta es SÍ
- La base de la discreta son puntos. Un abierto de la base en discreta × canónica es $\{x\} \times (a, b)$
- Como base de la topología del orden podemos elegir $\big((x, a), (x, b)\big)$
- ¡Pero si es exactamente lo mismo!



¡Ojo!

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto

$canónica\ en\ \mathbb{R} \times discreta\ en\ \mathbb{R}$.

- ¿Coincide con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$?
- La respuesta es NO
- Los segmentos horizontales no son abiertos en la del orden

¿Qué pasa con el cuadrado 1x1?

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto $discreta\ en\ [0;1] \times heredada\ de\ la\ canónica\ en\ [0;1]$.
- ¿Coincide
  - con la topología del orden interna en $[0;1] \times [0;1]$?
  - con la topología del orden heredada de $\mathbb{R}^2$ en $[0;1] \times [0;1]$?

¿Qué pasa con el cuadrado 1x1?

- Dibuja las bolas abiertas en la topología producto $discreta\ en\ [0;1] \times heredada\ de\ la\ canónica\ en\ [0;1]$.
- ¿Coincide
  - con la topología del orden interna en $[0;1] \times [0;1]$? NO. El problema son los intervalos $((x,a),(x,1)]$ que son abiertos en discreta × heredada de la canónica y NO lo son en la del orden
  - con la topología del orden heredada de $\mathbb{R}^2$ en $[0;1] \times [0;1]$? SÍ. Aquí son abiertos en ambos

Proyecciones desde $X \times Y$

- Los abiertos de la base son proyecciones de abiertos a cada uno de los conjuntos (piensa en coordenadas)
- Las funciones $\pi_x: X \times Y \to X, \pi_y: X \times Y \to Y$ se llaman “proyecciones”.
- Pasan abiertos a abiertos (demuéstralo)