Topología 2024/25. Segundo Parcial

Profesor: Georgy Nuzhdin. Fecha: 13.01.2025

Nombre: ___________________________
Apellidos: _________________________________

CONSTRUYE UN EJEMPLO JUSTIFICADO (TACHA UNO. 1,2 puntos)

- Un conexo localmente que no es conexo
- Un conjunto conexo con una topología y no conexo con otra
- Un espacio acotado y cerrado que no es compacto
- Un espacio topológico en el que todos los subconjuntos son compactos
- Dos espacios con el mismo grupo fundamental **no trivial** que no son homeomorfos

DEFINICIONES (0,8 puntos)

- (0,4) Grupo fundamental
- (0,2) Conjunto localmente conexo
- (0,2) Espacio simplemente conexo

TEOREMAS (TACHA DOS. 2 puntos)

- (0,5) El grupo fundamental de la esfera es trivial
- (1) El producto cartesiano de dos espacios compactos es compacto
- (1) Teorema del valor extremo: las funciones continuas de un espacio compacto a uno ordenado alcanzan sus valores máximo y mínimo
- (1) Teorema Heine-Borel: en los espacios con la topología canónica ser compacto es equivalente a ser cerrado y acotado

EJERCICIOS (TACHA UNO. 6 puntos)

1. (0,9 puntos) **¿Son conexos por caminos? ¿Son conexos? Si no, indica una separación.**

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq y \leq 2\}$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2\}$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$
c) $[1; 2]$ con la topología Sorgenfrey

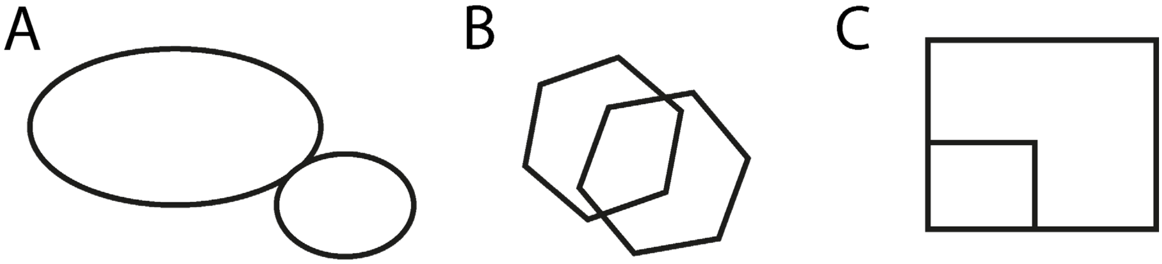
2. (0,75 puntos) **¿Son compactos estos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología de semirrectas derechas? Si no lo son, indica un recubrimiento que no admite subrecubrimiento finito.**

a) $A = [0; 2]$
b) $B = [0; 2)$
c) $C = (0; 2]$
d) $D = (-\infty, 2)$
e) $E = (2, \infty)$

3. (0,8) Considera una familia de conjuntos $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{m}{x}\}, m \in \mathbb{N}$ y $A = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\} \cup A_m$.
    - **Busca la clausura** $\bar{A}$ y **demuestra que los puntos que has añadido pertenecen a la frontera**
    - **Averigua si** $\bar{A}$ **es conexo, conexo por caminos, localmente conexo**

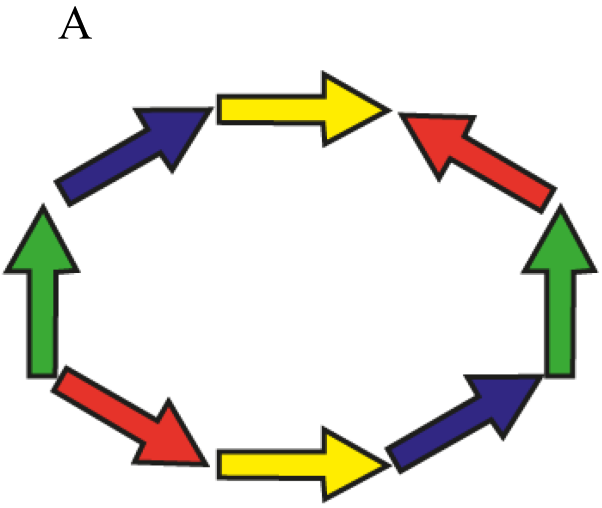
4. (0,6 puntos) La suma conexa de un toro y 2 botellas de Klein es homeomorfa a la suma de 2 esferas y varios planos proyectivos. **¿Cuántos?**

5. (0,6) ¿Son homeomorfos estos espacios?



6. (1,2 puntos) **¿Qué espacios son homeomorfos y cuáles no? Razona la respuesta**
    - $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
    - $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 = 9, 1 \leq z \leq 4\}$
    - $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4 \}$
    - $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 < 4 \}$

7. (0,6 puntos) **¿Qué superficies representan estos diagramas?**



8. (1,2 puntos) **¿Cuál es el grupo fundamental de estos espacios? Justifícalo**

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| \leq 1\}$

b) $S^2 \times S^1$

c) $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) | x^2 + y^2 < 1\}$