La recta final
Preparación para el examen

Topología - 14

Georgy Nuzhdin
2022-2024

¿Son homeomorfos?

a) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\backslash\{1\}$?

b) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2\backslash\{1\}$?

c) S^1 y $\{1 < x^2 + y^2 < 3\}$?

d) S^1 y $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$?

e) $\mathbb{R}^n$ y $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \left|\left|x\right|\right| < 1\}$?

f) $I = [-1;1] \in \mathbb{R}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \cup (x+1)^2 + y^2 = 1\}$?

g) $\mathbb{R}$ con la cofinita y $\mathbb{R}$ con la canónica?

h) $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey y $\mathbb{R}$ con la canónica?

¿Son homeomorfos?

a) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\backslash\{1\}$?
NO. El primero es conexo, el segundo no
Sus grupos fundamentales no coinciden

b) NO
Sus grupos fundamentales no coinciden

c) S^1 y $\{1 < x^2 + y^2 < 3\}$?
NO. El primero es compacto, el segundo no

d) S^1 y $\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$
NO. Aunque sus grupos fundamentales coinciden, la circunferencia se desconecta al quitar cualquier pareja de puntos, el aro no

e) $\mathbb{R}^n$ y $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$?
SÍ. $f = \frac{x}{1+|x|}$ define el homeomorfismo

f) $I = [-1; 1] \in \mathbb{R}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \cup (x+1)^2 + y^2 = 1\}$
NO. Existe una función continua del primero al segundo. Pero sus grupos fundamentales son distintos. Además, cualquier punto menos los extremos desconecta el intervalo, y el conjunto Ocho, solamente el punto de unión de las circunferencias

g) $\mathbb{R}$ con la cofinita y $\mathbb{R}$ con la canónica?
NO. El primero es NO-Hausdorff, el segundo sí es Hausdorff
El primero es compacto, el segundo no

h) NO. $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey y $\mathbb{R}$ con la canónica no son homeomorfos porque el primero no es conexo por caminos y el segundo sí

(X,τ) con $X = (0,1)$ y $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{(0,a); 0 < a < 1\}$

- ¿Cuáles son los conjuntos compactos?

(X, τ) con $X = (0,1)$ y $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{(0, a); 0 < a < 1\}$

- ¿Es compacto el propio X?
- No, considera $\cup_{n=2}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) = X$
- ¿Es compacto $(0, \frac{1}{2})$?
- Busca un espacio compacto
- Que no sea un punto
- Si $E \subset X$ y el supremo de E le pertenece, es compacto
- Porque debe estar en un abierto del recubrimiento, y este abierto sólo cubre todo E

Sea $f: X \rightarrow S^1$ *continua y suprayectiva*

- ¿Es verdad que X es compacto?

Sea $f: X \to S^1$ *continua y suprayectiva*

- ¿Es verdad que X es compacto?
  NO. para $f: X \to Y$ sería compacto Y si lo fuese X, pero no al revés
- $f: S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$, $f(\alpha, t) = \alpha$ es continua, pero $S^1 \times \mathbb{R}$ no es compacto
- Podríamos considerar el recubrimiento de la circunferencia
- $f: \mathbb{R} \to S^1, f(\alpha) = (cos\alpha, \sin\alpha)$

¿Es verdad que la imagen de un espacio Hausdorff por una aplicación abierta también es Hausdorff?

¿Es verdad que la imagen de un espacio Hausdorff por una aplicación continua y abierta también es Hausdorff?

- Necesitamos una condición: que la función sea inyectiva
- $f:(0;1) \to \{\{a\},\{a,b\}\}, f(t)=a$

¿Son homeomorfos?

- $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) | x = 1\}$
- $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) | y = 0\}$

¿Son homeomorfos?

- $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $[-1;1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1;1]$

¿Son homeomorfos?

- $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$
  - *NO es compacto.*
  - *Se desconecta si quito un punto*
- $\mathbb{R}^2$.
  - *NO es compacto*
  - *Sigue conexo aunque quite un punto*
- $[-1; 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1; 1]$
  - ES compacto

Decidir justificadamente si $C \cup \{(0,0)\}$ es conexo y si es compacto.

$$C = [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(x,x) \ : \ -1 \leq x \leq 1\}$$

- ¿Qué tal si empezamos por un dibujo?
- Claramente, C es conexo por caminos, por lo que es conexo también
- Claramente, C no coincide con su clausura, por lo que no es cerrado ni tampoco puede ser compacto

4. Decidir si es conexo el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(1/n, t) : n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, 1) : -1 \leq t < 0\} \cup \{(s, -1) : 0 < s \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

- Intenta dibujarlo primero
- Podemos “redefinirlo” como $P_{-} \cup \{(0; 0)\} \cup P_{+}$
- Claramente, los peines izquierdo y derecho son conexos por caminos
- $P_{-}(conexo) \subset P_{-} \cup \{(0; 0)\} \subset \overline{P_{-}}$. Por eso $P_{-} \cup \{(0; 0)\}$ es conexo
- Análogamente, $P_{+} \cup \{(0; 0)\}$ lo es y lo es su unión por tener un punto en común
- Nota que la unión de los peines sin el origen ¡NO es conexa! Por tanto el argumento de que nuestro conjunto está entre la unión de los peines y su clausura NO es válido
- ¿Es conexo por caminos?
- NO. Basta considerar cualquier entorno del origen. Son barras verticales disjuntas, por lo que el conjunto no es localmente conexo por caminos y, por ende, no es conexo por caminos

3) Decidir si algunos de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$ (con la topología usual) son homeomorfos:

$$\text{a) } (\mathbb{Q}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\{0\}), \qquad \text{b) } (\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R}),$$

$$\text{c) } (\mathbb{R}\times\mathbb{Q})\cup(\{0\}\times\mathbb{R}), \qquad \text{d) } ([0,1]\times\{0\})\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{\frac{1}{n}\}\times[0,\frac{1}{n}]).$$

- A y C son homeomorfos (con la función $f\big((x,y)\big) = (y,x)$)
- Los espacios A, B y C no son acotados, por lo que no son compactos, mientras que D lo es (nos costará un poco demostrar que es cerrado, habrá que demostrar que ningún punto fuera de D es su frontera)
- El espacio A es conexo y lo será aún quitándole cualquier punto (0, p)
- El espacio B se desconecta al quitarle cualquier punto

4) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Si K es compacto, entonces $K \cup \{x\}$ también lo es (x es un punto arbitrario).
b) Si dos espacios topológicos tienen el mismo grupo fundamental, son homeomorfos.
c) La intersección de conexos es conexa.
d) $\mathbb{Q}$ es compacto en $\mathbb{R}$ con la cofinita.

a) Verdadero. Elijamos un recubrimiento de $K \cup \{x\}$. Como este recubrimiento recubre también K, admite un subrecubrimiento. Si este subrecubrimiento no contiene x, añadamos cualquier abierto que lo contenga
b) Falso. El plano y la esfera. Un intervalo cerrado y la recta $\mathbb{R}$
c) Falso. Basta elegir una circunferencia y una recta que pase por su centro
d) Verdadero (¿no recuerdas que en la cofinita todo es compacto?) En todo caso lo demostraremos: cojamos el primer abierto. Es todo $\mathbb{R}$ menos unos cuantos puntos. Cada punto está en algún abierto. Cogeremos ahora la unión de estos abiertos con el primero

Averigua el grupo fundamental de $S^2 \setminus \{polo\ norte, polo\ sur\}$

- $S^2 \setminus \{polo\ norte, polo\ sur\} \cong (0;1) \times S^1$
- $\pi_1(S^2 \setminus \{polo\ norte, polo\ sur\}) \cong \mathbb{Z}$
- Otra idea: $S^2 \setminus \{polo\ norte, polo\ sur\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Averigua el grupo fundamental de $T^2 \times S^1$

- $\pi_1(T^2 \times S^1) = \pi_1(T^2) \times \pi_1(S^1)$
- Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

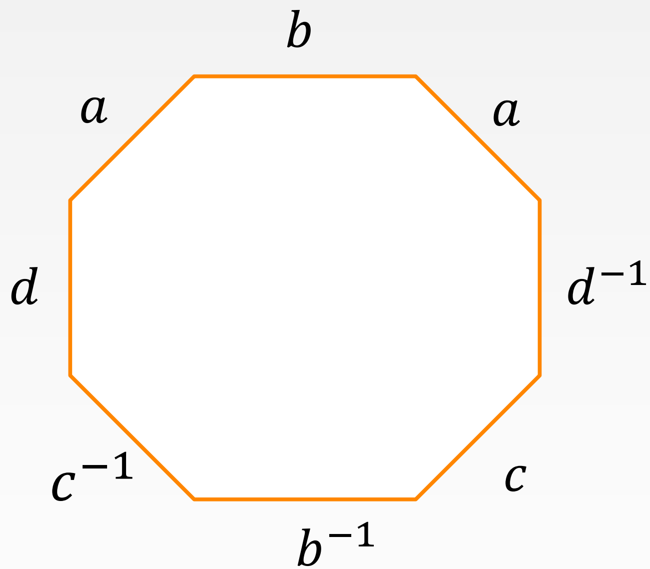
Sea $A_n = \{1, 2, \dots, n\}, X = (\mathbb{N}, \tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, A_n\})$

- Estudiar que subconjuntos de X son conexos y cuales son compactos
- IDEAS
- Es topología del tipo Matrioska
- La unión de cualquier cantidad de A_n es el $A_{\max(n)}$
- Claramente, no existen abiertos disjuntos
- Por tanto, cualquier subconjunto es conexo
- Y cualquier subconjunto finito es compacto, y viceversa, no hay subconjuntos infinitos compactos

Busca el grupo fundamental de $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$:

- Piensa qué caminos se pueden contraer.
- Si no, demuestra que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$
- El homeomorfismo viene dado por $f: (x, y, z) \to (x(z+1), y(z+1), 0)$
- Si no lo ves, haz Seifert-von Kampen
- $X = U \cup V$
- $\pi_1(U) \cong \{e]$
- $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{e]$

¿Qué superficies son? ¿Son homeomorfas?



Crea a partir de un polígono una superficie sin borde

- Con la característica de Euler -3
- No orientable
- IDEA: sabemos que es suma de K planos proyectivos
- Sabemos que $\chi = 2 - K \Rightarrow K = 5$
- También podemos usar la suma de 2 toros y un plano proyectivo

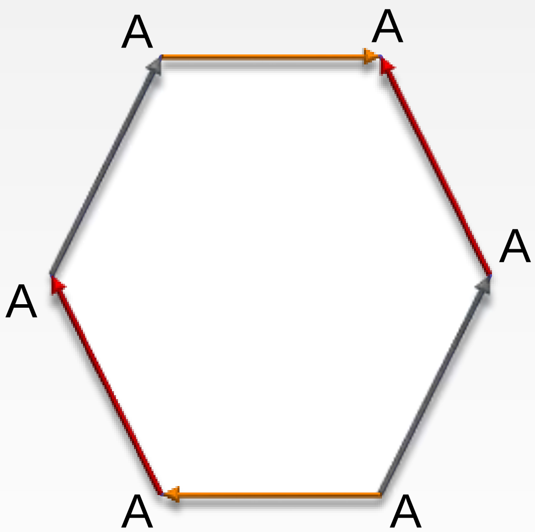
¿Son homeomorfos? ¡Sí!

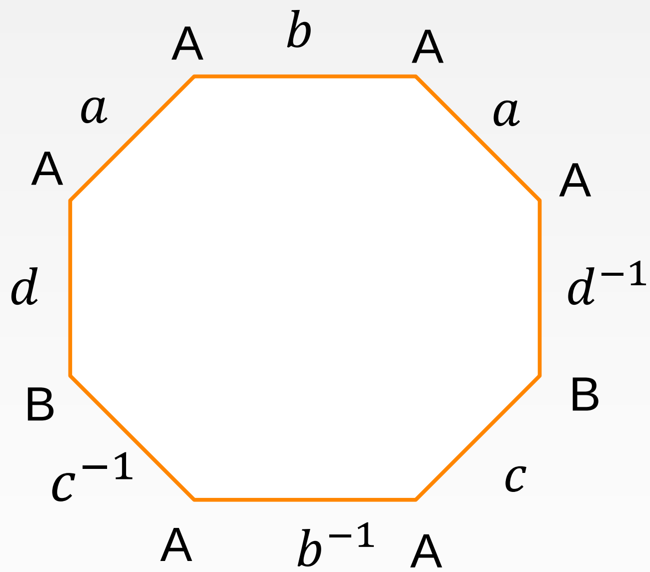
$\chi = 1 - 3 + 1 = -1. \, No\ orientable$

$T^2 \# P^2\ o\ P^2 \# P^2 \# P^2$

$\chi = 2 - 4 + 1 = -1. \, No\ orientable$

$Suma\ de\ 3\ planos\ proyectivos$ o $T^2 \# P^2$





Calcula la característica de Euler de la suma de 4 planos proyectivos y 3 toros

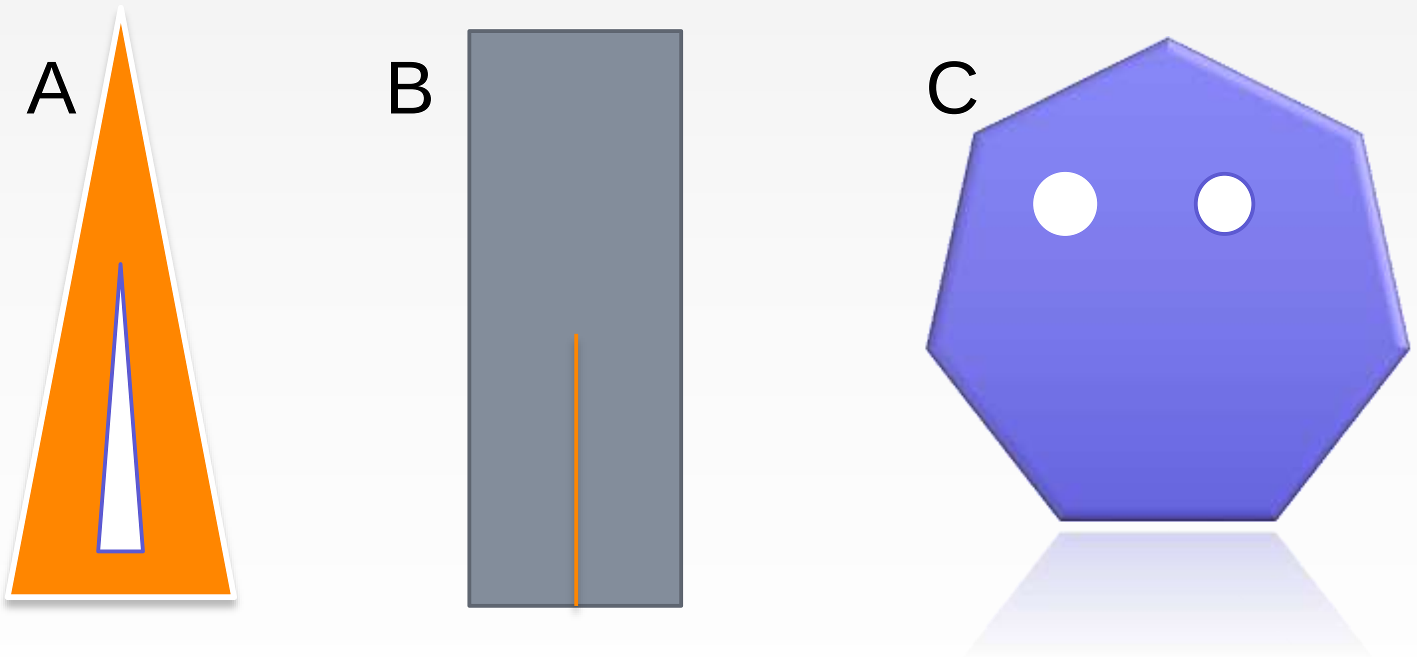
- Piensa que sumar un toro resta 2
- Y sumar un plano proyectivo resta 1
- Si partimos de un toro con $\chi(T^2) = 0$,
- $\chi\,(T^2 \# T^2 \# T^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2) = 0 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 = -8$

Dibuja un diagrama que corresponde a la suma conexa de dos toros. Presenta una triangulación

Haz un diagrama de la superficie con la $\chi = 0$ ¿Es orientable? ¿Qué superficie es?

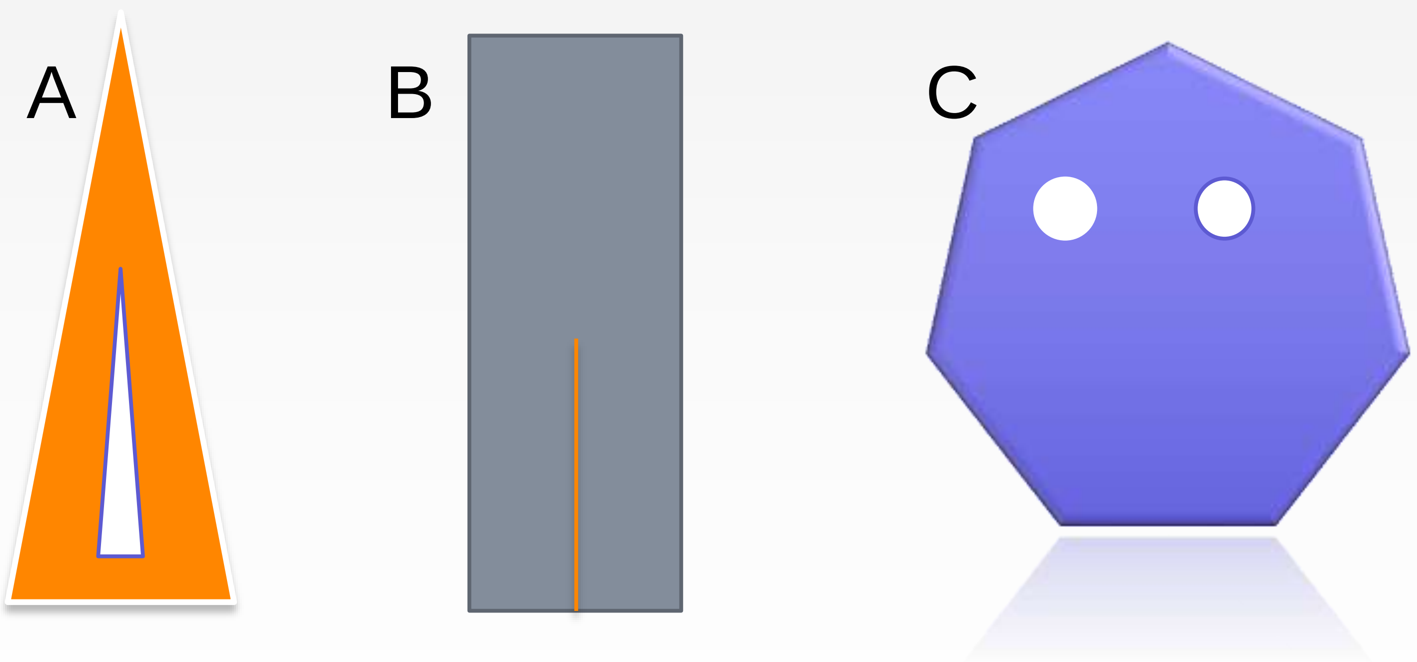
¿Son homeomorfos?

En el interior están dibujadas las superficies recortadas. Todas las superficies son abiertas



No son homeomorfos porque sus grupos fundamentales son diferentes

- El retracto de A es una circunferencia (grupo fundamental $\mathbb{Z}$), el de C es $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. El grupo fundamental del B es trivial



¿Son homeomorfos?

  - $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.
- $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ y $B = (-1, 0) \cup (0, 1]$
- $A = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

No son homeomorfos

- N y Q. N tiene la topología discreta ya que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} = \mathbb{N} \cap (n - 1, n + 1)$ es abierto. Pero los puntos de Q no son abiertos
- $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ y $B = (-1, 0) \cup (0, 1]$. Si fuesen homeomorfos, las componentes conexas lo serían también. Pero no es así. Los puntos frontera con un homeomorfismo pasan a puntos frontera, pero A no tiene frontera y B sí
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$. A es compacto y B no lo es. El grupo fundamental de A es trivial y el de B no

¿Son homeomorfos?

- El cilindro $S^1 \times R$ y el cono abierto $X = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$

Son homeomorfos

- El cilindro $S^1 \times R$ y el cono $X = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$
- $f : X \to S^1 \times R$, $f(x, y, z) = (\frac{xlnz}{x^2+y^2}, \frac{ylnz}{x^2+y^2}, lnz)$
- O $f(zcos\alpha, z\sin\alpha, z) = (cos\alpha, \sin\alpha, lnz)$

Conexos y compactos

Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $X = [0,1) \cup \{2\}$.
Determina si es conexo

- En la topología del orden
- En la topología heredada

Conexos y compactos

Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $X = [0,1) \cup \{2\}$.
Determina si es conexo

- En la topología del orden: sí. Es un continuo lineal porque
  - cualquier subconjunto tiene supremo (en concreto, $\sup[0,1) = 2$)
  - Es denso (entre cualquier pareja de puntos hay otro)
- En la topología heredada: no. $X = (-1,1) \cup (1,3)$

Y después, ¿qué?

- Geometría algebraica: Variedades (Manifolds) Algebraicas
- Geometría Topológica: Variedades topológicas
- Geometría Diferencial: estudio de formas diferenciales en las variedades (curvatura, distancias,…)
- Grupos de homotopía: además de π_1 existen otros grupos que describen propiedades topológicas
- Teoría de Nudos

¿Dónde vamos ahora?

- https://www.youtube.com/watch?v=KZjoxwUxlIs
- https://www.youtube.com/watch?v=cPg62OPdF8s&list=PLuFcVFHMIfhJSSX-tlv8XxiAZSAbhv1DA