Topología. Examen parcial. Chuleta

¿VERDADERO O FALSO? SI ES VERDADERO, DEMUÉSTRALO. SI ES FALSO, CONSTRUYE UN CONTRAEJEMPLO (2 puntos)

- La intersección de un número finito o infinito de abiertos es un abierto
  Contraejemplo: $(1-\frac{1}{n}; 2+\frac{1}{n})$
- La unión de un número finito o infinito de cerrados es cerrado
  Contraejemplo: $\bigcup[1+\frac{1}{n};\ 2-\frac{1}{n}]$
- Si un espacio tiene una base no numerable, no puede tener otra numerable
  Contraejemplo: la canónica con base de segmentos racionales
- En un espacio el mismo conjunto no puede ser a la vez abierto y cerrado
  Contraejemplo: la discreta, o el conjunto $[a; b)$ en Sorgenfrey
- Dos bases distintas generan la misma topología:
  $B_1 = \{(a, b)\}, B_2 = \{(a, a+e)\}, e \leq 1$
  También en la topología del orden la base canónica y la base en la que "el día" (coordenada x) coincide: ((a,b), (c,d)) frente a ((a,b), (a,d))
- Dos distancias no equivalentes siempre generan topologías distintas
  Contraejemplo: $d_1 = \arctan|x-y|\,, d_2 = |x-y|$
- La función identidad siempre es continua, da igual la topología del espacio de salida y la de llegada
  Contraejemplos: $id\colon canónica \to Sorgenfrey$, cofinita → canónica
- Si una sucesión de funciones continuas converge a $f(x)$ en cada punto, la función $f(x)$ es continua
  Contraejemplo: $f_n = x^n\ en\ [0; 1]$
- La distancia del supremo genera los mismos abiertos que la integral
  Contraejemplo: $U = \{f(x) > 0\}$ es un abierto en la del supremo y NO en la integral
- La topología heredada de un espacio coincide siempre con la topología interior
  Contraejemplo: $A = \left(\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right)\right]\ en\ [0; 1] \times [0; 1]$ en la heredada del plano es un abierto, y en la del orden interna, no
- $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int(B)$
  Contraejemplos: racionales e irracionales
- $Int(Fr(A)) = \emptyset$
  Racionales en la recta
- La unión de clausuras es la clausura de la unión
  Contraejemplo: $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. La clausura de la unión contiene el 0. Este contraejemplo sólo es válido para una unión infinita
- Sea cual sea la topología, una sucesión convergente siempre converge a un único punto
  Contraejemplos: topologías no Hausdorff (por ejemplo, la cofinita o la matrioska)
- Un conjunto no numerable no puede ser no denso en ninguna parte
  Contraejemplo: conjunto de Cantor

DEFINICIONES (1,5 puntos)

- Espacio topológico
- Función continua
- Métrica
- Base
- Topología del orden
- Topología inducida por la distancia
- Topología heredada
- Topología producto
- Conjunto abierto, cerrado, clausura, interior, puntos de acumulación, puntos aislados
- Espacio Hausdorff y T_1
- Espacio 1AN, 2AN
- Conjunto denso
- Conjunto no denso en ninguna parte
- Homeomorfismo

EJERCICIOS (4,5 puntos)

- ¿Son distancias?
- ¿Son topologías? ¿Son bases?
- De las topologías dadas, ¿cuáles NO son Hausdorff/1AN/2AN/T_1?
- Dibuja entornos en Manhattan, euclidiana, topología producto…
- Calcula la distancia del supremo y la integral entre dos funciones
- ¿Qué funciones son continuas en la topología de…
- ¿Son abiertas y/o cerradas estas funciones?
- ¿Son contractivas estas funciones? ¿Tienen algún punto fijo?
- Busca clausura, interior, frontera, puntos de acumulación, puntos aislados de… en la topología de…
- ¿Son densos? ¿Son no densos en ninguna parte?
- ¿Qué conjunto es homeomorfo a otro?
- Reconoce la superficie a partir de un pegado de lados
- Define la clase de equivalencia que convierte el objeto A en B
- ¿Son homeomorfos? Construye un homeomorfismo

TEOREMAS (2 puntos)

- Demuestra que la composición de dos funciones continuas es continua
- Demuestra que la distancia euclidiana, la del máximo y la taxicab son equivalentes
- Demuestra que dos distancias equivalentes generan una topología equivalente
- En $\mathbb{R}$ cada base se puede reducir
- La función identidad $id: (X,T) \rightarrow (X,T')$ es continua si y sólo si no refinamos la topología
- Una función es continua ($\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$) si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta
- *La función f es continua en $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión x_n convergiendo a x se cumple que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.*
- Demuestra el teorema de Banach: en un espacio completo una función contractiva siempre tiene exactamente un punto fijo
- Cada cerrado coincide con su clausura
- La clausura es la intersección de todos los cerrados que contienen A
- $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey no es metrizable
- $\mathbb{R}$ con la cofinita no es 1AN
- Un espacio es T_1 si y solo si los puntos son cerrados
- $\overline{H} = X \Leftrightarrow H \cap A \neq \emptyset$ para cualquier abierto A
- El complemento de no denso en ninguna parte es vacío