Corrección del Parcial de Topología 2025–2026

Lino Vives

Octubre 2025

1. Definiciones (0,8 puntos)

(a) Base de una topología (0,2 puntos)

Una colección de subconjuntos B_i de X se llama **base** si:

$$\forall x \in X, \exists B_i \in \mathcal{B} : x \in B_i$$

Además, si un punto está en la intersección de dos elementos, hay un elemento de la base en la intersección que contiene este punto:

$$\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Ejemplo. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$. Esta colección forma una base de la topología usual de $\mathbb{R}$, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un intervalo abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$ y la intersección de dos intervalos abiertos es otro intervalo abierto.

(b) Espacios T_1 y T_2 (0,2 puntos)

Propiedad de Fréchet (T_1)

Un espacio topológico X es T_1 si para cada pareja de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen entornos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \notin U_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 \in U_2, \quad x_1 \notin U_2.$$

En los espacios T_1 todos los puntos de X son cerrados y viceversa.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, dados dos puntos distintos $x < y$, podemos elegir los abiertos $U_x = (x - 0{,}1, \frac{x+y}{2}), U_y = (\frac{x+y}{2}, y + 0{,}1)$, así que existe un entorno de x que no contiene a y y un entorno de y que no contiene x, lo que demuestra que $\mathbb{R}$ es T_1.

Propiedad de Hausdorff (T_2)

Un espacio topológico X es T_2 o Hausdorff si para cada pareja de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen entornos abiertos disjuntos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que:

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2 \qquad \text{y} \qquad U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Intuitivamente, los puntos de un espacio Hausdorff "viven en casas separadas". El ejemplo anterior nos vale para demostrar que $\mathbb{R}$ es también T_2.

(c) Espacios 1AN, 2AN (0,2 puntos)

Primer Axioma de Numerabilidad (1AN)

Un espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad si para cada punto $x \in X$ existe una familia numerable de entornos $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cualquier entorno abierto V de x, existe $n \in \mathbb{N}$ con $U_n(x) \subseteq V$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, para cada punto x consideramos la familia numerable:

$$U_n(x) = \left(x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dado cualquier entorno abierto V de x, existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq V$, y eligiendo un n grande se cumple $U_n(x) \subseteq V$. Por tanto, $\mathbb{R}$ es un espacio que satisface el 1AN.

Segundo Axioma de Numerabilidad (2AN)

Un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad si su topología admite una **base numerable**, es decir, existe una colección numerable $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \tau$ tal que todo abierto de X puede expresarse como unión de algunos de los B_i.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, la colección de intervalos con extremos racionales:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

es numerable y forma una base de la topología usual. Por tanto, $\mathbb{R}$ satisface el 2AN.

(d) Conjunto homogéneo (0,2 puntos)

Definición. Un espacio topológico X se llama **topológicamente homogéneo** si para cualquier par de puntos $a, b \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(a) = b$.

Es decir, todos los puntos de X "se ven igual" desde un punto de vista topológico.

Ejemplo. El toro $S^1 \times S^1$ es un espacio homogéneo. Dados dos puntos $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in S^1 \times S^1$, existen rotaciones $R_1, R_2 : S^1 \to S^1$ tales que:

$$R_1(a_1) = b_1 \qquad \text{y} \qquad R_2(a_2) = b_2.$$

Entonces la aplicación

$$h : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1, \qquad h(x_1, x_2) = (R_1(x_1),\ R_2(x_2))$$

es un homeomorfismo que cumple $h(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Por tanto, en el toro cualquier punto puede trasladarse topológicamente a cualquier otro, lo que demuestra que $S^1 \times S^1$ es homogéneo.

2. Contraejemplos (1,1 puntos máximo, TACHA UNO)

(a) La intersección de un numero finito o infinito de abiertos es abierto (0,3 puntos)

Consideremos los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ definidos por:

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{n},\ 2 + \frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Cada A_n es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Ahora consideremos la intersección infinita:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [1,2].$$

El conjunto $[1,2]$ no es abierto en la topología usual de $\mathbb{R}$, ya que ni 1 ni 2 poseen un entorno completamente contenido en $[1,2]$.

Por tanto, la intersección de un número infinito de abiertos puede no ser abierta.

(b) Dos bases distintas pueden generar la misma topología (0,3 puntos)

Consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{R}^2$ con la topología del orden. Dadas las siguientes dos bases para dicha topología:

$$\mathcal{B}_1 = \{((a,b),(c,d)) \mid (a,b) < (c,d)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{((a,b),(a,d)) \mid b < d\}.$$

Podemos observar que cualquier conjunto abierto generado por $\mathcal{B}_1$ puede ser expresado como una unión de conjuntos abiertos generados por $\mathcal{B}_2$. Por tanto, la topología generada por la base $\mathcal{B}_1$ está contenida en la generada por $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Por otro lado, claramente $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$, lo que implica que $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Esto demuestra que ambas bases generan la misma topología del orden en $\mathbb{R}^2$.

(c) La topología heredada y la topología del orden interno pueden no coincidir

Sea el subespacio $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto:

$$A = \left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),\ \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)\right].$$

En la topología heredada del plano, A es un abierto. En efecto:

$$A = [0,1]^2 \cap \left(\left(\tfrac{1}{2}, 0\right),\ \left(\tfrac{1}{2}, 2\right)\right),$$

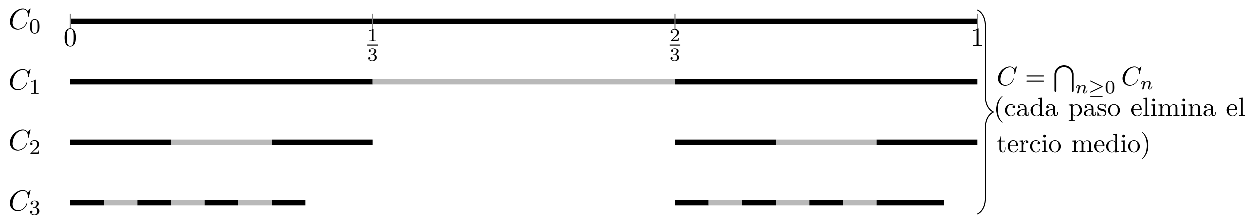
ya que $\left(\left(\tfrac{1}{2}, 0\right),\ \left(\tfrac{1}{2}, 2\right)\right)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Sin embargo, en la topología del orden interno en $[0,1] \times [0,1]$, el punto $\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$ no es un máximo del intervalo, pues el máximo es $(1,1)$. Por tanto, dicho intervalo no puede ser cerrado en el orden interno, y en consecuencia A no es un abierto en esa topología.

Por lo tanto, la topología heredada del plano y la topología del orden interno en $[0,1] \times [0,1]$ no coinciden.

(d) Un conjunto no numerable no puede ser no denso en ninguna parte (0,5 puntos)

Contraejemplo: el conjunto de Cantor $C \subseteq [0,1]$.



Construyamos una función del conjunto de fracciones ternarias al conjunto de Cántor: el k-esimo dígito es 0 si en la k-ésima iteración elegimos el intervalo izquierdo y es 2 si elegimos el intervalo derecho. Esta función es la función de identidad. Es fácil ver que cualquier entorno de un elemento de C contiene elementos que no le pertenecen: son fracciones ternarias que contienen al menos un 1. Para demostrarlo, consideremos un entorno $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, elijamos n tal que $3^{-n} < \epsilon$ y cambiemos el $n-$ésimo dígito por 1. Así que C no tiene interior, es todo frontera. Como además C es cerrado (por ser intersección de cerrados), C es **no denso en ninguna parte**.

Cardinalidad de C. Cada punto de C tiene una expansión ternaria usando solo dígitos $\{0,2\}$. Identificando $0 \leftrightarrow 0$ y $2 \leftrightarrow 1$, obtenemos una biyección con

$$\underbrace{0{,}0202\ldots}_{\text{base 3}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{0{,}0101\ldots}_{\text{base 2}}$$

Como las fracciones binarias describen todos los reales del intervalo $[0,1]$ vemos que C es **no numerable**.

3. Teoremas (1,5 puntos máximo, TACHA UNO)

(a) La clausura del conjunto A es la intersección de todos los cerrados que contienen A (0,4 puntos)

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y:

$$\overline{A} = \bigcap_{C_i} C_i,$$

donde cada C_i es cerrado y $A \subseteq C_i$.

(i) $\overline{A} \subseteq \bigcap_i C_i$ Supongamos que existe $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin \bigcap_i C_i$. Entonces existe algún C_j con $x \notin C_j$. Como C_j es cerrado, $U_j = X \setminus C_j$ es abierto y $x \in U_j$. Además, $A \subseteq C_j$ implica $U_j \cap A = \varnothing$.

Pero $x \in \overline{A}$ significa que *todo* entorno abierto de x corta a A, lo cual contradice $U_j \cap A = \varnothing$. Por tanto:

$$\overline{A} \subseteq \bigcap_i C_i.$$

(ii) $\bigcap_i C_i \subseteq \overline{A}$ Supongamos que existe $x \in \bigcap_i C_i$ con $x \notin \overline{A}$. Por definición de clausura, existe un abierto U tal que:

$$x \in U \qquad \text{y} \qquad U \cap A = \varnothing.$$

Entonces $C^* = X \setminus U$ es cerrado y contiene a A, por lo que pertenece a la familia $\{C_i\}$. Pero $x \in U$ implica $x \notin C^*$, contradicción.

Así que:

$$\bigcap_i C_i \subseteq \overline{A}.$$

Conclusión. De ambas inclusiones, se obtiene:

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap_i C_i \quad \text{donde cada } C_i \text{ es cerrado y } A \subseteq C_i.}$$

(b) $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey no es metrizable

Recordemos que la topología de Sorgenfrey está generada por la base

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}.$$

Demostración (por reducción al absurdo)

Supongamos que $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey tiene una *base numerable*. Para cada punto $x \in \mathbb{R}$ debe existir un elemento básico de la forma

$$B_x = [x, x + \varepsilon_x),$$

pues si el extremo izquierdo fuera $a < x$, entonces B_x no sería un entorno básico mínimo de x.

Como cada $x \in \mathbb{R}$ determina un extremo izquierdo distinto, el conjunto

$$\mathcal{B}_x = \{B_x : x \in \mathbb{R}\}$$

tiene cardinalidad $|\mathbb{R}|$, no numerable:
$$|\mathcal{B}_x| \geq \mathfrak{c}.$$

Esto contradice la existencia de una base numerable. Por tanto, $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey **no cumple el segundo axioma de numerabilidad**.
Demostremos ahora que no cumplir $2AN$ supone no ser metrizable. Supongamos que la recta Sorgenfrey fuese metrizable. Entonces podríamos definir una base de bolas de radios $1/n$, $\mathcal{B} = B_x = \{B_{1/n}(x), n \in \mathbb{N}\}$, lo que implicaría ser metrizable. Contradicción.

(c) Teorema del Punto Fijo de Banach (0,9 puntos)

Enunciado. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una **contracción**, es decir, existe una constante $0 < c < 1$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Entonces:
1. Existe un único punto fijo $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = x^*$.
2. Para cualquier $x_0 \in X$, la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge a dicho punto fijo.

Unicidad del punto fijo

Supongamos que existen dos puntos fijos $a, b \in X$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces:

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c\, d(a, b).$$

Como $0 < c < 1$, esto solo es posible si $d(a, b) = 0$, es decir, $a = b$. Por tanto, el punto fijo, si existe, es **único**.

Existencia del punto fijo

Definimos la sucesión $\{x_n\}$ por:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0.$$

Queremos demostrar que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Sea $m > n$. Aplicando la desigualdad contractiva repetidamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq c^{n+m-1} d(x_1, x_0) + c^{n+m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + c^n d(x_1, x_0) \\ &\leq c^n\, d(x_1, x_0)\, \frac{1 - c^m}{1 - c} \leq c^n\, d(x_1, x_0)\, \frac{1}{1 - c}. \end{aligned}$$

Como $0 < c < 1$, cuando $n \to \infty$ se tiene:

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_1, x_0) \longrightarrow 0.$$

Por tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x^* \in X$ tal que $x_n \to x^*$.

Comprobación de que x^* es punto fijo

Por continuidad de f (la contracción es continua),

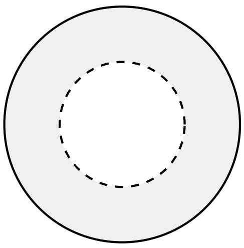
$$f(x^*) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Por tanto, x^* es punto fijo.

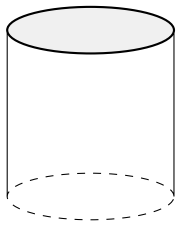
4. Ejercicios (6,6 puntos máximo, TACHA UNO)

(a) ¿Son homeomorfos? Si es así, presenta un homeomorfismo (0,6 puntos)

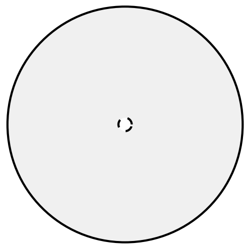
$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\},\\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq 2,\ x^2 + y^2 = 1\},\\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 2\}.
\end{aligned}$$



$A:\ 1 < r^2 \leq 2$



$B:\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z \leq 2$



$C:\ 0 < r^2 \leq 2$

Cada conjunto es del tipo $S^1 \times I$:

$$A \cong S^1 \times (1, \sqrt{2}], \qquad B \cong S^1 \times (0, 2], \qquad C \cong S^1 \times (0, \sqrt{2}].$$

Homeomorfismos entre A, B y C

Como los tres conjuntos dependen únicamente del radio o de la altura, basta definir aplicaciones continuas y biyectivas que reescalen esos valores.

Homeomorfismo entre A y C

Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En A se cumple $1 < r \leq \sqrt{2}$. Definimos la función lineal que transforma el radio

$$r \in (1, \sqrt{2}]$$

Entonces definimos

$$h_{A\to C}(x,y) = \frac{r-1}{r}(x,y).$$

La inversa es simplemente

$$h_{C\to A}(x,y) = \frac{1+r}{r}(x,y).$$

Son continuas y biyectivas, por lo que:

$$A \cong C.$$

Homeomorfismo entre A y B

Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En A se cumple $1 < r \leq \sqrt{2}$. Normalizamos el radio a la circunferencia unitaria y el sobrante lo convertimos en altura:

$$h_{A\to B}(x,y) = \left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ r-1\right).$$

La inversa es simplemente

$$h_{B\to A}(u,v,z) = ((1+z)u,\ (1+z)v).$$

Son continuas y biyectivas, por lo que:

$$A \cong B.$$

Homeomorfismo entre C y B

Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En C se cumple $0 < r \leq \sqrt{2}$. Convertimos directamente el radio en altura:

$$h_{C\to B}(x,y) = \left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ r\right).$$

La inversa es simplemente

$$h_{B\to C}(u,v,z) = (zu,\ zv).$$

Son continuas y biyectivas, por lo que:

$$C \cong B.$$

Conclusión

$$\boxed{A \cong B \cong C}$$

(b) Resuelve la ecuación $x^3 = \ln x$ con el método de Newton construyendo una función contractiva auxiliar $\varphi(x)$. Empieza en el punto $x_0 = 2$ y busca x_1. (0,8 puntos)

Sea

$$f(x) = x^3 - \ln x, \qquad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}.$$

El método de Newton usa

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - \ln x}{3x^2 - \frac{1}{x}} = x - \frac{x^4 - x\ln x}{3x^3 - 1}.$$

Cálculo de x_1 desde $x_0 = 2$

$$x_1 = \varphi(2) = 2 - \frac{2^3 - \ln 2}{3\cdot 2^2 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{8 - \ln 2}{11{,}5}.$$

Con $\ln 2 \approx 0{,}6931$,

$$x_1 \approx 2 - \frac{7{,}3069}{11{,}5} \approx 1{,}3647.$$

$$\boxed{x_1 \approx 1{,}36}$$

(c) Estudia la convergencia de la sucesión $a_n = 17$ (indica a qué valores converge) en las siguientes topologías: (0,8 puntos)

1. Semirrectas Derechas
2. Cofinita

Estudiamos la convergencia de la sucesión constante $a_n = 17$ en dos topologías distintas.

1) Topología de semirrectas derechas

Tomamos como base los abiertos de la forma (a, ∞), con $a \in \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. La sucesión a_n converge a x si para todo entorno (a, ∞) de x, se tiene $a_n \in (a, \infty)$ a partir de algún índice, es decir:

$$17 > a.$$

Pero el entorno (a, ∞) contiene al punto x precisamente cuando $x > a$. Por tanto,

$$\boxed{\forall x \leqslant 17 \ a_n \to x}$$

2) Topología cofinita

Un abierto cofinito $U \subseteq \mathbb{R}$ cumple que $\mathbb{R} \setminus U$ es finito.

Sea $x \in \mathbb{R}$. La sucesión a_n converge a x si para todo abierto $U \ni x$, se tiene $a_n \in U$ para n suficientemente grande.

- Si $x = 17$: cualquier abierto que contenga a 17 contiene a $a_n = 17$ para todo n. Converge.
- Si $x \neq 17$: el abierto $U = \mathbb{R} \setminus \{17\}$ contiene a x, pero no contiene a ningún a_n. No converge a x.

Por tanto:

$$\boxed{a_n \to 17 \text{ y no converge a ningún otro punto.}}$$

(d) Construye dos funciones continuas en $[0, 1]$ tales que: (1 punto)

1. **La distancia integral entre ellas sea 1 y la distancia del supremo sea $0{,}5$.**
2. **La distancia del supremo entre ellas sea 1 y la distancia integral sea $0{,}5$, o demuestra que es imposible.**

Sea $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f - g|\, dx$ y $d_\infty(f, g) = \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Imposible que $d_1 = 1$ y $d_\infty = 0{,}5$

Sea $h(x) = |f(x) - g(x)|$ en $[0, 1]$ y sea

$$M = \sup_{x \in [0,1]} h(x) = d_\infty(f, g).$$

Por definición de supremo, $0 \le h(x) \le M$ para todo $x \in [0,1]$. Al integrar una función no negativa acotada por M, el área bajo su gráfica no puede superar el área del rectángulo de base 1 y altura M:

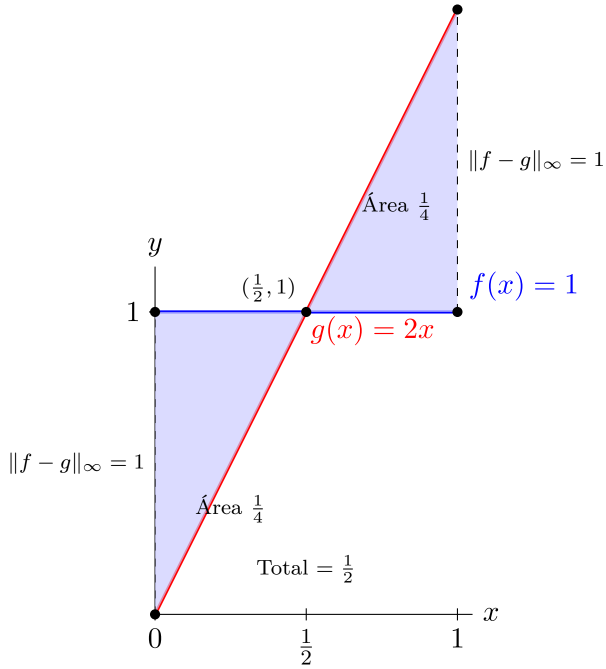
$$\int_0^1 h(x)\,dx \;\le\; \int_0^1 M\,dx \;=\; M \cdot 1 \;=\; M.$$

Por tanto,

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,dx \;\le\; d_\infty(f,g).$$

2. Construcción de $d_\infty = 1$ y $d_1 = 0{,}5$

Tomamos $f(x) = 1$ y $g(x) = 2x$ en $[0,1]$. Ambas son continuas.



Entonces:

$$|f(x) - g(x)| = |1-2x| = \begin{cases} 1-2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2x-1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Distancia del supremo.

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |1-2x| = \text{máx}\{|1-0|,\ |1-2|\} = 1.$$

Distancia integral.

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |1-2x|\,dx = \int_0^{1/2} (1-2x)\,dx + \int_{1/2}^1 (2x-1)\,dx \\ &= \left[x - x^2\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^1 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(1 - 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{d_\infty(f,g) = 1 \quad \text{y} \quad d_1(f,g) = 0{,}5.}$$

(e) Estudia si las siguientes topologías son 1AN, 2AN, T_1, T_2: (1,2 puntos)

1. $\tau_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{A_x = (-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}\}$
2. $\tau_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \setminus U| \text{ es numerable}\}$

Topología τ_1: semirrectas izquierdas cerradas

Sea

$$\tau_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \{A_x = (-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}\}$$

Todo abierto no vacío es de la forma $(-\infty, x]$. Además, para cualesquiera $x \leq y$ se tiene $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$; es decir, los abiertos están *totalmente ordenados* por inclusión.

T_1:

Sea $a < b$. Para que el espacio sea T_1 debe existir un abierto que contenga a b y no a a. Pero cualquier abierto que contiene a b es de la forma $(-\infty, x]$ con $x \geq b$, y entonces $a < b \leq x$ implica $a \in (-\infty, x]$. Por tanto no hay abierto que contenga b y excluya a. Conclusión: $(\mathbb{R}, \tau_1)$ **no es** T_1.

T_2 (Hausdorff):

Si U, V son abiertos no vacíos de τ_1, entonces $U = (-\infty, x]$, $V = (-\infty, y]$, y necesariamente $U \subseteq V$ o $V \subseteq U$. Luego nunca pueden ser disjuntos a la vez que contengan dos puntos distintos. Por tanto no existen entornos abiertos disjuntos de dos puntos distintos y $(\mathbb{R}, \tau_1)$ **no es** T_2.

Tipo "matrioska". Los abiertos no vacíos de τ_1 son *anidados*:

$$(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y] \quad \text{si y solo si} \quad x \leq y.$$

Esta estructura en cadena impide separar puntos con abiertos disjuntos (falla T_2) y también impide, para un par $a < b$, encontrar un abierto que contenga a b excluyendo a a (falla T_1). Al ser tipo matrioska, no es T_1 ni T_2

1AN: Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos la base local numerable

$$\mathcal{B}(x) \;=\; \Big\{ B_0(x) = (-\infty, x] \Big\} \;\cup\; \Big\{ B_n(x) = (-\infty, x + \tfrac{1}{n}] \;:\; n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Sea $U \in \tau_1$ un entorno abierto de x. Entonces $U = (-\infty, y]$ con $y \geq x$.

- Si $y = x$, tomamos $B_0(x) = (-\infty, x] \subseteq U$.
- Si $y > x$, elige $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + \frac{1}{n} \leq y$ (por ejemplo, cualquier $n \geq \frac{1}{y-x}$). Entonces $B_n(x) = (-\infty, x + \frac{1}{n}] \subseteq (-\infty, y] = U$.

Así, todo entorno de x contiene algún $B_n(x)$. Como $\mathcal{B}(x)$ es numerable, $(\mathbb{R}, \tau_1)$ **cumple** 1**AN**.

2AN: Observemos que para cada x el abierto $(-\infty, x]$ es el *mínimo* abierto que contiene a x. Si una base $\mathcal{B}$ generara τ_1, entonces para cada x debería existir $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq (-\infty, x]$. Pero cualquier abierto contenido en $(-\infty, x]$ es de la forma $(-\infty, z]$ con $z \leq x$; si $z < x$, la unión de tales abiertos nunca alcanza x (sólo da $(-\infty, x)$). Así pues, necesariamente $B_x = (-\infty, x]$. Concluimos que toda base debe contener *todos* los $(-\infty, x]$ (uno por cada $x \in \mathbb{R}$), luego no puede ser numerable. Por tanto $(\mathbb{R}, \tau_1)$ **no** cumple 2AN.

Topología τ_2: conumerable

Sea
$$\tau_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \setminus U| \text{ es numerable}\}$$

T_1**:**

Para $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x\}$ es numerable, luego $\mathbb{R} \setminus \{x\} \in \tau_2$. Dados $x \neq y$, el abierto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ contiene a y y no contiene a x, y análogamente $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ contiene a x y no a y. Por tanto $(\mathbb{R}, \tau_2)$ es T_1.

T_2**:**

Si $U, V \in \tau_2$ son abiertos no vacíos, entonces
$$\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$$
es unión de dos numerables, por tanto numerable; luego $U \cap V \neq \varnothing$. Así, cualesquiera entornos abiertos de dos puntos distintos intersectan, y no se pueden separar por abiertos disjuntos. No es Hausdorff (T_2).

1**AN.**

Supongamos por contradicción que $(\mathbb{R}, \tau_2)$ es 1AN. Elijamos un punto, por ejemplo $0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una base local numerable en 0, que denotamos por
$$\{B_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad B_n(0) \in \tau_2.$$

Cada entorno abierto
$$B_n(0) = \mathbb{R} \setminus F_n,$$
donde cada $F_n \subseteq \mathbb{R}$ es numerable.

Sea
$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$
Como unión numerable de conjuntos numerables, F es numerable.

Dado que $\mathbb{R}$ es no numerable, existe un punto
$$x \in \mathbb{R} \setminus (F \cup \{0\}).$$

Consideremos ahora el abierto
$$B = \mathbb{R} \setminus \{x\} \in \tau_2,$$
el cual contiene a 0, pero $x \notin B$.

Como $\{B_n(0)\}$ es una base local en 0, debe existir un índice k tal que
$$B_k(0) \subseteq B.$$

Pero esto es imposible, porque $x \notin B$, mientras que $x \in B_k(0)$ ya que $x \notin F_k \subseteq F$ por construcción.

Contradicción. Por tanto:
$$\boxed{(\mathbb{R}, \tau_2) \text{ no es 1AN.}}$$

2AN

Todo espacio 2AN es 1AN. Como $(\mathbb{R}, \tau_2)$ no es 1AN, tampoco es 2AN.

Conclusión:

Topología	$\mathbf{T_1}$	$\mathbf{T_2}$	**1AN**	**2AN**
$\tau_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, x]\}$	No	No	Sí	No
$\tau_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{U : \lvert\mathbb{R} \setminus U\rvert \text{ es numerable}\}$	Sí	No	No	Sí

(f) ¿Qué funciones son continuas? ¿Cuáles son abiertas? (1,2 puntos)

1. $f(x) = x^2$ en la topología discreta.
2. $f(x) = -x^3$ en la topología de Sorgenfrey.
3. $f(x) = \cos x$ en la topología cofinita.

1) $f(x) = x^2$ en la topología discreta

En la topología discreta todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos.

- **Continuidad:** Sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Entonces $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ es cualquier conjunto, por lo que también es abierto. Por tanto, f es continua.
- **Función abierta:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Como todo subconjunto es abierto, $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ es también abierto. Luego, f es función abierta.

$$\boxed{\text{En la topología discreta, } f(x) = x^2 \text{ es continua y abierta.}}$$

2) $f(x) = -x^3$ en la topología de Sorgenfrey

En la topología de Sorgenfrey los abiertos son uniones de intervalos del tipo $[a, b)$.

No continua. Sea $U = [a, b)$ con $a < b$. Entonces:

$$f^{-1}([a, b)) = \big((-b)^{1/3},\ (-a)^{1/3}\big].$$

Esto es un intervalo del tipo $(c, d]$, que **no** es abierto en Sorgenfrey (el punto derecho es cerrado). Ejemplo:

$$f^{-1}([0, 1)) = (-1, 0],$$

que no es abierto. Por tanto, f **no es continua**.

No abierta. Como f es estrictamente decreciente,

$$f([a, b)) = \big(-b^3, -a^3\big],$$

de nuevo un conjunto del tipo $(c, d]$, que no es abierto.

Ejemplo:

$$f([0, 1)) = (-1, 0],$$

que no es abierto. Entonces f **no es abierta** tampoco.

$$\boxed{\text{En Sorgenfrey, } f(x) = -x^3 \text{ no es continua ni abierta.}}$$

3) $f(x) = \cos x$ en la topología cofinita

En la topología cofinita, un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si su complementario es finito.

No es continua. Tomamos un abierto cualquiera que *no sea todo* $\mathbb{R}$, por ejemplo

$$U = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

que es abierto porque su complementario es finito.
Entonces su preimagen es

$$f^{-1}(U) = \{x : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

El conjunto $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es **infinito**, y por tanto su complementario *no* es finito.
Luego $f^{-1}(U)$ no es abierto en la cofinita. Por definición, f **no es continua**.

No es abierta. Sea $V = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, abierto cofinito.

$$f(V) = \cos(\mathbb{R} \setminus \{\pi\}) = [-1, 1],$$

cuyo complementario es infinito. Así, $f(V)$ **no** es abierto.
Por tanto,

$$\boxed{f(x) = \cos x \text{ no es continua ni abierta en la cofinita.}}$$

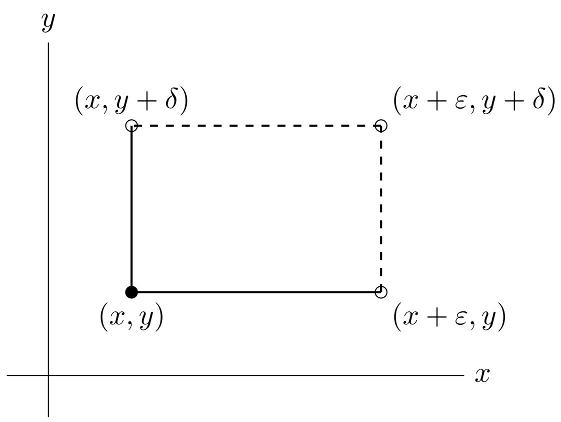
(g) Dibuja las bolas abiertas en las siguientes topologías en $\mathbb{R}^2$. Indica qué topologías so más finas que otras si son comparables. (1,2 puntos)

1) Topología $Sorgenfrey \times Sorgenfrey$

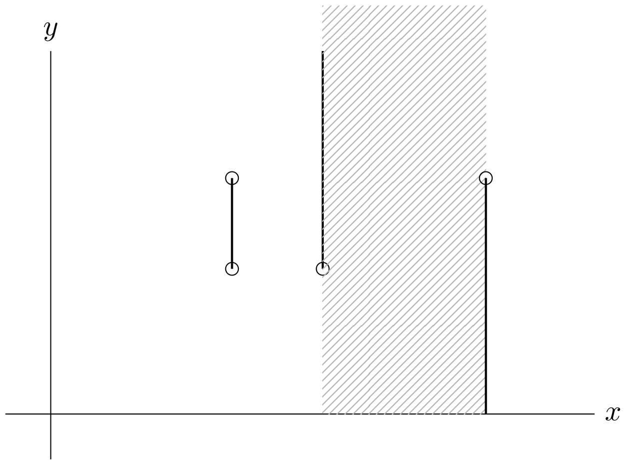
Los abiertos básicos son rectángulos del tipo:

$$[x, x+\varepsilon) \times [y, y+\delta),$$

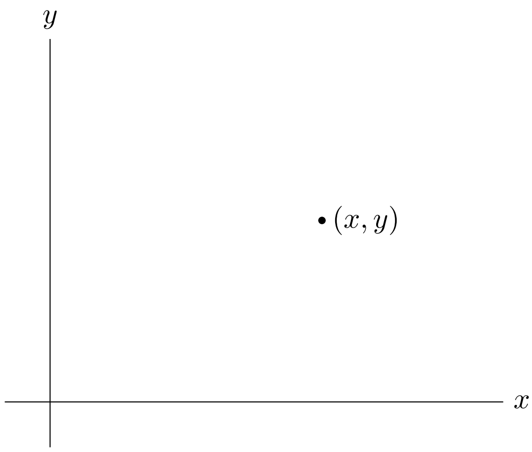
que incluyen únicamente el vértice inferior izquierdo y se extienden hacia la derecha y hacia arriba.



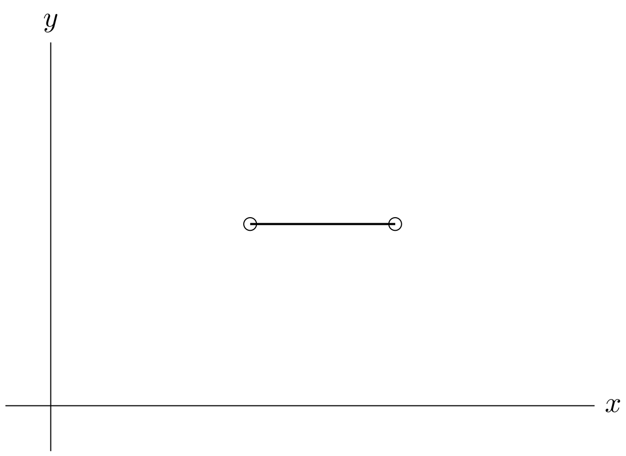
2) Topología del orden lexicográfico



3) Topología discreta $\times$ discreta



4) Topología canónica $\times$ discreta



Relaciones de finura

Claramente, la discreta es la topología más fina que cualquier otra: los puntos çaben.^{en} cualquier abierto de cualquier otra topología.
La Sorgenfrey por Sorgenfrey es incomparable con las demás 2 topologías: ninguna unión de abiertos puede conseguir la esquina inferior izquierda.
Por otro lado, las bolas de otras dos topologías son intervalos abiertos horizontales o verticales. Dentro de ellos no cabe ninguna bola Sorgenfrey. Como estos intervalos no caben tampoco uno en el otro, ninguna de estas tres topologías es comparable.

h) Interior, frontera y clausura

1) En $[0,1] \times [0,1]$ con topología del orden

Sea $A = \{(a,1) : a \in (0{,}4, 0{,}6)\}$.

Interior.

$$\operatorname{int}(A) = \varnothing.$$

Frontera. La frontera es el propio conjunto más el borde de abajo (los puntos de este borde son ïnseparables"del borde de arriba: cualquier abierto que contenga un punto de abajo necesariamente contendrá uno de arriba):

$$A \ \cup \ \{(a;0) | a \in (0{,}4, 0, 6)\}.$$

Clausura.

$$\overline{A} \ = \ A \ \cup \ \{(a;0) | a \in (0{,}4, 0, 6)\}.$$

2) En $\mathbb{R}$ con semirrectas derechas

Sea $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [1,4) \cup \{\, 5 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Interior.

$$\operatorname{int}(B) = \varnothing.$$

Frontera.

$$Fr(B) = (-\infty, 5].$$

Clausura.

$$\overline{B} \ = \ B \cup Fr(B) \ = \ B \cup (-\infty, 5].$$

3) En $\mathbb{R}$ con topología de Sorgenfrey

Sea $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [1,4) \cup \{\, 5 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Interior.

$$\operatorname{int}(C) = [1,4).$$

Frontera.

$$Fr(C) = \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\,5 - \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

El 1 no es frontera porque es interior. El 5 no es frontera porque el abierto $[5, 6)$ no tiene ningún punto del conjunto.

Clausura.

$$\overline{C} = Int(C) \cup Fr(C)$$