

Soluciones de Sucesiones y Series

Solución Ejercicio 1

Consideramos el término general:

$$u_n = \frac{n+2}{a^n(n+1)}.$$

Para estudiar la convergencia en función de a , aplicamos el **criterio de comparación en el límite**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{a^n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+2)}{a^n(n+1)} = 0 \quad \text{si } a > 1.$$

Puesto que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, por comparación en el límite

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{converge si } a > 1.$$

Ahora, comparamos con $\sum \frac{1}{n}$ cuando $a \leq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{a^n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{a^n(n+1)} = +\infty \quad \text{si } a \leq 1.$$

Puesto que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, concluimos que también

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{diverge si } a \leq 1.$$

La serie converge si $a > 1$ y diverge si $0 < a \leq 1$.

Solución Ejercicio 2

Sea

$$a_n = \sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{7} + \cdots + \sqrt[3n]{5n-3}, \quad b_n = 7n+2.$$

Entonces la expresión del límite es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Observamos que a_n es creciente y b_n es creciente y no acotada, luego podemos aplicar el **criterio de Stolz**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

si el límite de la derecha existe.

Calculamos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt[3(n+1)]{5(n+1) - 3} - \sqrt[3n]{5n - 3} = \sqrt[3n+3]{5n+2} - \sqrt[3n]{5n-3}, \\ b_{n+1} - b_n &= 7. \end{aligned}$$

Por tanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3n+3]{5n+2}}{7} = \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} (5n+2)^{\frac{1}{3n+3}}.$$

El límite interior es de tipo ∞^0 . Usamos la forma

$$\lim f_n^{g_n} = e^{\lim g_n \ln f_n},$$

si dicho límite existe. Tomamos

$$f_n = 5n + 2, \quad g_n = \frac{1}{3n + 3}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n + 2)^{\frac{1}{3n+3}} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5n + 2)}{3n + 3} \right).$$

El límite del exponente es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5n + 2)}{3n + 3} = 0,$$

pues el numerador crece como $\ln n$ y el denominador como n .

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n + 2)^{\frac{1}{3n+3}} = e^0 = 1.$$

Finalmente,

$$L = \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{7} + \cdots + \sqrt[3n]{5n-3}}{7n+2} = \frac{1}{7}}$$

Solución Ejercicio 3

Sea

$$a_n = \frac{(n^2 - 3)^{3n}}{(6n^6 + 5n^5 - n + 1)^n}.$$

Aplicamos el **criterio de la raíz**:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n^2 - 3)^{3n}}}{\sqrt[n]{(6n^6 + 5n^5 - n + 1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 3)^3}{6n^6 + 5n^5 - n + 1}.$$

Desarrollamos el numerador:

$$(n^2 - 3)^3 = n^6 - 9n^4 + 27n^2 - 27.$$

Por tanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 - 9n^4 + 27n^2 - 27}{6n^6 + 5n^5 - n + 1}.$$

Dividimos numerador y denominador por n^6 :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{n^2} + \frac{27}{n^4} - \frac{27}{n^6}}{6 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{6}.$$

Como

$$L = \frac{1}{6} < 1,$$

por el criterio de la raíz la serie converge.

La serie es convergente.

Solución Ejercicio 4

a) Sea

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Aplicamos el **criterio del cociente**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Por tanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e}.$$

Como

$$\frac{3}{e} > 1,$$

por el criterio del cociente la serie diverge.

La serie a) es divergente (no converge ni absoluta ni condicionalmente).

b) Sea ahora

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

De nuevo aplicamos el **criterio del cociente**:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Entonces

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Por el criterio del cociente la serie converge absolutamente (al ser términos positivos).

La serie b) es convergente y la convergencia es absoluta.

c) Observamos que

$$\cos(\pi n) = (-1)^n,$$

por lo que

$$\frac{1}{n \cos(\pi n)} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

La serie se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cos(\pi n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que es la *serie armónica alternada*.

Sea $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad |a_n| = \frac{1}{n}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = |a_n|.$$

Es decir, los términos alternan de signo, su módulo es decreciente y tiende a cero. Por el **criterio de Leibniz**, la serie es convergente.

Sin embargo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es la serie armónica, que es divergente.

La serie c) converge, pero sólo de forma condicional (no absoluta).

Solución Ejercicio 5

Definimos

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2 2^k, \quad b_n = 2^n n^2.$$

Entonces el límite pedido es

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Como b_n es creciente y tiende a infinito, podemos aplicar el **criterio de Stolz**:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 2^{n+1}, \\b_{n+1} - b_n &= 2^{n+1}(n+1)^2 - 2^n n^2 = 2^n (2(n+1)^2 - n^2).\end{aligned}$$

Por tanto

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{2^n (2(n+1)^2 - n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{2(n+1)^2 - n^2}.$$

Desarrollamos numerador y denominador:

$$\begin{aligned}2(n+1)^2 &= 2(n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 4n + 2, \\2(n+1)^2 - n^2 &= (2n^2 + 4n + 2) - n^2 = n^2 + 4n + 2.\end{aligned}$$

Así,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 4n + 2} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\boxed{L = 2.}$$

Solución Ejercicio 6

1. Acotación.

Como todos los términos se obtienen aplicando una raíz cuadrada, se tiene $a_n \geq 0$ para todo n . Además $a_1 = 0,5 > 0$, luego la sucesión está acotada inferiormente por

$$a_n \geq a_1 = 0,5, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veamos ahora que está acotada superiormente por 3. Probamos por inducción que $a_n < 3$ para todo n :

■ Caso base:

$$a_1 = 0,5 < 3.$$

■ Paso inductivo: supongamos que para algún $k \geq 1$ se cumple $a_k < 3$. Entonces

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = \sqrt{9} = 3.$$

Por inducción, $a_n < 3$ para todo n . Por tanto, la sucesión está acotada:

$$0,5 \leq a_n < 3, \quad \forall n.$$

2. Monotonía.

Estudiamos el signo de $a_n - a_{n-1}$. Para $n \geq 2$,

$$a_n - a_{n-1} = \sqrt{a_{n-1} + 6} - \sqrt{a_{n-2} + 6}.$$

Racionalizando:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(a_{n-1} + 6) - (a_{n-2} + 6)}{\sqrt{a_{n-1} + 6} + \sqrt{a_{n-2} + 6}} = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{\sqrt{a_{n-1} + 6} + \sqrt{a_{n-2} + 6}}.$$

El denominador es siempre positivo, luego el signo de $a_n - a_{n-1}$ coincide con el de $a_{n-1} - a_{n-2}$.

Calculamos el primer incremento:

$$a_2 - a_1 = \sqrt{a_1 + 6} - a_1 = \sqrt{0,5 + 6} - 0,5 \approx 2,46 - 0,5 > 0.$$

Por lo tanto $a_2 > a_1$, y como cada diferencia tiene el mismo signo que la anterior, se deduce que

$$a_n - a_{n-1} > 0 \quad \forall n \geq 2.$$

Es decir, la sucesión es **estrictamente creciente**.

3. Límite.

Hemos probado que (a_n) es creciente y está acotada superiormente, por lo que es convergente. Sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Pasando al límite en la relación recurrente

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},$$

obtenemos

$$L = \sqrt{L + 6}.$$

Elevando al cuadrado:

$$L^2 = L + 6 \implies L^2 - L - 6 = 0 \implies (L - 3)(L + 2) = 0.$$

De aquí $L = 3$ o $L = -2$. Como todos los términos de la sucesión son positivos, el límite debe ser positivo, luego

$$L = 3.$$

La sucesión es creciente, está acotada y converge a 3.

Solución Ejercicio 7

1. Sea $a_n = \frac{n^3}{4^n}$. Aplicamos el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 4^n}{4^{n+1} n^3} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{4} < 1.$$

Por el criterio del cociente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$ es convergente. Como todos los términos son positivos, la convergencia es **absoluta**.

2. Consideramos

$$a_n = \frac{\cos(n^2) + 2}{n\sqrt{n}}.$$

Se tiene $|\cos(n^2) + 2| \leq 3$, luego

$$|a_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}} = \frac{3}{n^{3/2}}.$$

La serie de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2}}$ es convergente por Pringsheim con $p = \frac{3}{2} > 1$. Por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2) + 2}{n\sqrt{n}}$ es convergente y, además, lo es **absolutamente**.

3. Sea

$$a_n = (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

En primer lugar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = 0,$$

y los argumentos $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ son positivos y decrecientes a 0, por lo que $|\operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{n})|$ es también una sucesión decreciente. Luego, por el criterio de Leibniz, la serie alterna-da $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ es **convergente**.

Para estudiar la convergencia absoluta, observamos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right|$$

se comporta como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, que es divergente por Pringsheim con $p = \frac{1}{3} < 1$.

En conclusión, la serie del apartado c) es **convergente condicionalmente**.

Solución Ejercicio 8

1. Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{2^n}.$$

Como $0 \leq \cos^2(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$0 \leq \frac{\cos^2(n)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (ratio $1/2 < 1$). Por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{2^n}$ es **convergente** (y, de hecho, absolutamente convergente).

2. Ahora estudiamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}.$$

Aplicamos el criterio de Pringsheim para determinar el comportamiento de a_n cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot n^{1/6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4} n^{1/6}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}} = 1.$$

Por Pringsheim, $\alpha = \frac{1}{6} \leq 1$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3 + 4n + 3}}$ es **divergente**.

Solución Ejercicio 9

1.

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2n+1}.$$

Por un lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es de tipo 1^∞ . Lo resolvemos con

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{A_n}, \quad A_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

y

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} \right) = e \cdot \frac{1}{2} = \frac{e}{2}.$$

La sucesión es convergente y

$$a_n \longrightarrow \frac{e}{2}.$$

2. Consideramos

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{\operatorname{sen}(n) - n^2}.$$

Dividimos numerador y denominador por n^2 :

$$a_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} - 1}.$$

Como $|\operatorname{sen}(n)| \leq 1$ para todo n , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1+0}{0-1} = -1.$$

Luego la sucesión es convergente y

$$a_n \longrightarrow -1.$$