TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/07/2024
CURSO	3º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 1

Resuelve la ecuación diferencial $xy^2y' = \frac{b^3}{x} - y^3$ utilizando el factor integrante apropiado, donde $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Solución:

$$xy^2y' = \frac{b^3}{x} - y^3 \implies \underbrace{\left(y^3 - \frac{b^3}{x}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(xy^2\right)}_{N(x,y)} dy = 0$$

Comprobamos que no es diferencial exacta: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3y^2 \neq y^2 = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Puesto que $\dfrac{M_y - Nx}{N} = \dfrac{3y^2 - y^2}{xy^2} = \dfrac{2}{x} = g(x)$, consideraremos $\mu = \mu(x)$.

$$\mu = \mu(x) \implies \underbrace{\mu(x) \cdot M(x,y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\mu(x) \cdot N(x,y)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \implies \mu(x) \cdot \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \mu'(x) \cdot N(x,y) + \mu(x) \cdot \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \implies$$

$$\implies \mu \cdot \left(3y^2\right) = \mu' \cdot xy^2 + \mu \cdot y^2 \implies \mu' x \cancel{y^2} = 2\cancel{y^2}\mu \implies \frac{d\mu}{dx} = \frac{2}{x}\mu \implies$$

$$\implies \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{2}{x} dx \implies \int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{2}{x} dx \implies \mathrm{Ln}|\mu| = 2\mathrm{Ln}|x| + C \implies$$

$$\overset{C=0}{\implies} \mathrm{Ln}\left(\mu\right) = \mathrm{Ln}\left(x^2\right) \implies \mu(x) = x^2$$

Multiplicamos la ecuación diferencial inicial por $\mu(x) = x^2$ y comprobamos que ahora sí es diferencial exacta:

$$x^2\left(y^3 - \frac{b^3}{x}\right) dx + x^2\left(xy^2\right) dy = 0 \implies \underbrace{\left(x^2y^3 - xb^3\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x^3y^2}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \implies \text{es diferencial exacta}$$

Procedemos a continuación a obtener la función $F(x,y)$:

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	04/07/2024	
CURSO	3º	**HORA**	15:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO				

$$P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \implies F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y) \implies$$

$$\implies F(x,y) = \int \left(x^2y^3 - xb^3\right) dx + C(y) = \frac{x^3y^3}{3} - \frac{x^2b^3}{2} + C(y)$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \implies \cancel{x^3y^2} = \cancel{x^3y^2} + C'(y) \implies C'(y) = 0 \implies C(y) = C$$

Luego la solución es $F(x,y) = \boxed{\dfrac{x^3y^3}{3} - \dfrac{x^2b^3}{2} + C = 0}$

PROBLEMA 2

Halla la solución de la ecuación diferencial $y' = (1-3x)y^4 - y$.

Solución:

Se trata de una ecuación de Bernoulli:

$$y' = (1-3x)y^4 - y \implies y' + \underbrace{\boxed{1}}_{p(x)}\, y = \underbrace{\boxed{(1-3x)}}_{r(x)}\, y^{\overset{\alpha}{\boxed{4}}} = 0$$

Hacemos el cambio $u = y^{1-\alpha} = y^{-3} \implies u' = -3y^{-4}y' \implies y' = -\dfrac{u'}{3y^{-4}}$

$$y' = (1-3x)y^4 - y \implies -\frac{u'}{3}y^4 = (1-3x)y^4 - y \implies u' = -3\left((1-3x) - y^{-3}\right) \implies$$

$$\implies u' = (9x-3) + 3u \implies u' - 3u = 9x - 3$$

Se trata de una ecuación lineal completa de primer orden en la variable u:

a) SGEH:

$$u' - 3u = 0 \implies \frac{du}{dx} = 3u \implies \frac{1}{u}du = 3dx \implies \operatorname{Ln}(u) = 3x + K \implies u = Ce^{3x}$$

b) SPEC:

Vamos a utilizar el método de los coeficientes indeterminados:

$$s(x) = 9x - 3 \implies u_p = Ax + B \implies u_p' = A$$

$$u' - 3u = 9x - 3 \implies A - 3(Ax+B) = 9x - 3 \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{rcl} -3A &=& 9 \\ A - 3B &=& -3 \end{array}\right\} \implies A = -3, B = 0 \implies u_p = -3x$$

$$u = Ce^{3x} - 3x \implies y^{-3} = Ce^{3x} - 3x \implies \boxed{Ce^{3x}y^3 - 3xy^3 = 1} \implies \boxed{y = \frac{1}{\sqrt[3]{Ce^{3x} - 3x}}}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/07/2024	
CURSO	3º	HORA	15:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 3

Halla la solución general de la ecuación diferencial $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial de tercer orden, lineal, completa y de coeficientes constantes.

a) SGEH:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \implies r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \implies \begin{cases} r = 1 \\ r = 2 \\ r = 3 \end{cases} \implies$$

$$\implies y_{SGEH} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

b) SPEC:

Utilizaremos el método de coeficientes indeterminados.

$$s(x) = 2xe^{-x} \implies \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{array}\right] \to t = 0 \\ \left.\begin{array}{l} P_m(x) = 2x \to m = 1 \\ Q_n(x) = 0 \to n = 0 \end{array}\right] \to k = 1 \end{array} \right.$$

$$y_p = (Ax + B)e^{-x} \implies y_p' = (-Ax + (A - B))\, e^{-x} \implies$$

$$\implies y_p'' = (Ax + (-2A + B))\, e^{-x} \implies y''' = (-Ax + (3A - B))\, e^{-x}$$

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x} \implies$$

$$\implies (-Ax + (3A - B))\, e^{-x} - 6\,(Ax + (-2A + B))\, e^{-x} + 11(-Ax + (A - B))e^{-x}$$

$$-6(Ax + B)e^{-x} = 2xe^{-x} \implies$$

$$\implies (-24Ax + (26A - 24B))e^{-x} = 2xe^{-x} \implies A = -\frac{1}{12}, B = -\frac{13}{144}$$

Por lo tanto la solución es $\boxed{y_{SGEC} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} - \left(\frac{1}{12} x + \frac{13}{144} \right) e^{-x}}$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/07/2024
CURSO	3º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 4

Resuelve el PVI $\begin{cases} y''' + y' = e^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases}$ utilizando transformadas de Laplace.

Solución:

$$y''' + y' = e^x \implies \mathcal{L}\{y''' + y'\} = \mathcal{L}\{e^x\} \implies \mathcal{L}\{y'''\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^x\} \implies$$

$$\implies \left(s^3 Y(s) - s^2 \cancel{y(0)} - s\,\cancel{y'(0)} - \cancel{y''(0)}\right) + \left(sY(s) - \cancel{y(0)}\right) = \frac{1}{s-1} \implies$$

$$\implies \left(s^3 + s\right) Y(s) = \frac{1}{s-1} \implies Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}$$

$$\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{A(s-1)(s^2+1) + Bs(s^2+1) + s(s-1)(Cs+D))}{s(s-1)(s^2+1)} =$$

$$= \frac{A\left(s^3 - s^2 + s - 1\right) + B\left(s^3 + s\right) + C\left(s^3 - s^2\right) + D\left(s^2 - s\right)}{s(s-1)\left(s^2+1\right)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)s^3 + (-A-C+D)s^2 + (A+B-D)s + (-A)}{s(s-1)\left(s^2+1\right)} \implies$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} A & + & B & + & C & & & = & 0 \\ -A & & & - & C & + & D & = & 0 \\ A & + & B & & & - & D & = & 0 \\ -A & & & & & & & = & 1 \end{array}\right\} \implies A = -1,\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2},\ D = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \implies$$

$$\implies \boxed{y(x) = -1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x)}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	04/07/2024
CURSO	3º	HORA	15:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 5

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & -2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 \\ y_2' & = & -4y_1 & + & 3y_2 & & \\ y_3' & = & & - & y_2 & + & 3y_3 \end{array}\right\}$$

Un estudiante ha obtenido la siguiente solución:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-2x \\ -x \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} -1+2x \\ 4x \\ 1+2x \end{pmatrix} e^{x}$$

Sin embargo, otra estudiante ha obtenido esta solución:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 3-5x \\ 1-10x \\ -2-5x \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 3-7x \\ -1-14x \\ -4-7x \end{pmatrix} e^{x}$$

¿Por qué las dos soluciones son correctas? Justifica la respuesta de forma detallada en base a lo aprendido en la asignatura (autovalores, autovectores, estructura de las soluciones, etc.).

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \implies |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 2 & -1 \\ -4 & (3-\lambda) & 0 \\ 0 & -1 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = -4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} + (3-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} (-2-\lambda) & -1 \\ 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= 4\left(2(3-\lambda)-1\right) + (3-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 4(5-2\lambda) - \left(9-6\lambda+\lambda^2\right)(2+\lambda) =$$

$$= 20 - 8\lambda - \left(18 + 9\lambda - 12\lambda - 6\lambda^2 + 2\lambda^2 + \lambda^3\right) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- Autovectores asociados a $\lambda = 2$:

  Comprobamos que $(1,4,4)$ es autovector de $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

- Autovectores asociados a $\lambda = 1$:

$$(A - I)\cdot X = O \implies \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \leftarrow 3f_2]{f_1 \leftarrow 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 8 & -4 & 0 \\ -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right) f_1]{f_2 \leftarrow f_2 - f_1}$$

$$\xrightarrow[f_1 \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right) f_1]{f_2 \leftarrow f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \leftarrow f_3 - f_2]{f_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}\right) f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{array}\right. \implies$$

$$\implies B_{S_{\lambda=1}} = \{(1,2,1)\} \implies m_g(\lambda = 1) = 1 < 2 = m_a(\lambda = 1)$$

Sabemos que $\operatorname{Ker}(A - I) \subset \operatorname{Ker}(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Claramente, $\operatorname{Ker}(A - I)^2 = \{(\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Si escogemos $V_2 = (0,1,1) \in \text{Ker}(A-I)^2$ (donde además $V_2 = (0,1,1) \notin \text{Ker}(A-I)$), entonces:

$$V_1 = (A-I)V_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tendríamos la siguiente solución:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} + \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2} + x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} \right) e^x = \begin{pmatrix} e^{2x} + xe^x \\ 4e^{2x} + (1+2x)e^x \\ 4e^{2x} + (1+x)e^x \end{pmatrix}$$

En cambio, si elegimos $V_2 = (6,0,-6) \in \text{Ker}(A-I)^2$ (donde $V_2 = (6,0,-6) \notin \text{Ker}(A-I)$), entonces:

$$V_1 = (A-I)V_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

En este caso, la solución sería:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} + \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}}_{V_2} + x \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}}_{V_1} \right) e^x = \begin{pmatrix} e^{2x} + (6-12x)e^x \\ 4e^{2x} - 24xe^x \\ 4e^{2x} + (-6-12x)e^x \end{pmatrix}$$

Como puede apreciarse, ambas soluciones coinciden con las del enunciado.