Topología
Georgy Nuzhdin Gelfand

Tema 4. Axiomas y propiedades topológicos

1. Considera la topología T_B generada por la base $B = \{(-\infty; a]: a \in \mathbb{R}\}$.
    a. ¿Es Hausdorff?
    b. ¿Es T_1?

2. Considera la topología T_B generada por la base $B = \{(-\infty; a]: a \in \mathbb{R}\}$.
    a. ¿Es 1AN?
    b. ¿Es 2AN?

3. Demuestra que la intersección de dos densos abiertos $A \cap B$ es densa.
   ¿Es verdad que la intersección $A \cap B$ es densa incluso si A, B no son abiertos?

4. Explica por qué la base $B = \{[a; b): a, b \in \mathbb{Q}\}$ no genera la topología Sorgenfrey.

5. Un espacio finito es Hausdorff. Describe su topología.

6. ¿Es Hausdorff la topología de semirrectas derechas base $T_{\rightarrow} = \{(a;\ \infty): a \in \mathbb{R}\}$? Busca el límite de $a_n = n$

7. Demuestra que en un espacio separable cualquier familia de abiertos disjuntos es numerable

8. Demuestra que un espacio que satisface 2AN es separable

9. Demuestra que el espacio X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\{(x, x) \in X \times X\}$ es cerrada en $X \times X$.

CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Tema 5. Homeomorfismos

1. Demuestra que el conjunto de Cantor es homeomorfo al producto infinito de conjuntos de dos elementos, $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots$

2. Demuestra que la cinta de Moebius es homeomorfa al plano proyectivo con un disco eliminado.
PISTA: Considera un anillo. Inventa un buen pegado

3. Si en el toro $S^1 \times S^1$ pegamos los puntos $(x, y) \sim (y, x)$, el resultado es homeomorfo a una superficie conocida. ¿Cuál? Demuéstralo.

4. Considera la bola unitaria $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ con la frontera pegada (es decir, el espacio cociente $B/\sim$, donde $a \sim b \Leftrightarrow a, b \in \{x^2 + y^2 = 1\}$). Demuestra que es homeomorfo a S^2.

5. La recta proyectiva real es el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas en $\mathbb{R}^2$.
Consideremos los conjuntos $R_x = \{recta\ que\ pasa\ por\ (0;0)\ y\ x\}$, $U_V = \{R_x : x \in V\}$. Dibuja U_V para
    a. $V = [0;1] \times [0;1]$
    b. $V = \{(x-3)^2 + y^2 < 1 : x, y \in \mathbb{R}^2\}$

6. Demuestra que $T = \{U_V : V\ abiertos\ en\ \mathbb{R}^2\}$ es una topología para la recta proyectiva real

7. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es el conjunto de rectas que pasan por el origen de coordenadas en $\mathbb{R}^3$ con la topología análoga a la descrita en el problema 4.
Demuestra que $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo
    a. a la esfera S^2 con algunos puntos pegados. ¿Cuáles?
    b. al disco con algunos puntos pegados. ¿Cuáles?

CENTRO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Tema 6. Superficies

1. Dibuja el esquema de la superficie de Riemann para las siguientes funciones e indica los cortes del plano correspondientes (donde la función pasa de una hoja a otra)
   a. $y = \sqrt[3]{z^2 - 1}$
   b. $y = \sqrt[3]{(z^2 + 1)^2}$

2. Dibuja el esquema de la superficie de Riemann para $y = \sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$ e indica los cortes del plano correspondientes (donde la función pasa de una hoja a otra)

3. Dibuja el esquema de la superficie de Riemann para $y = \sqrt{\sqrt{z} - 1}$ e indica los cortes del plano correspondientes (donde la función pasa de una hoja a otra)

4. Define matemáticamente una función recubridora $\mathbb{R} \to S^1$. Demuestra que recubre la circunferencia.

5. Inventa una aplicación recubridora $S^1 \to S^1$ que tenga 5 hojas. Demuestra que recubre la circunferencia.