La conexidad

Topología - 8

Georgy Nuzhdin

2022-2024

Espacios conexos

| Definición 1. Se dice que un espacio topológico es **conexo** si no existen dos abiertos, U y V, disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$

Parafraseando, un espacio es **conexo** si **está hecho de una sola pieza**, es decir, no se divide en dos o más partes separadas

En caso de existir $X = U \cup V$ se llama "separación"

Discusión

- ¿Por qué es importante que U y V sean **abiertos**?
- Considera $(0;2] = (0;1) \cup [1;2]$. Algo nos dice que el intervalo $(0;2]$ está hecho de una sola pieza y por tanto no deberíamos considerar esta división como “separación”.

Discusión 2

- ¿Qué me decís del conjunto $X = \{0\} \cup \{1\}$?
- Claramente no está hecho de una sola pieza, pero al mismo tiempo los dos puntos que lo constituyen no son abiertos
- Necesitamos mejorar la definición 1

Espacios conexos

| Definición 1′. Se dice que un **subespacio** de un espacio topológico es **conexo** si no existen dos abiertos, U y V, disjuntos y no vacíos tales que X = U ∪ V **en la topología heredada**

- En nuestro caso, el conjunto $X = \{0\} \cup \{1\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ ¡está formado por dos abiertos!
- Considera los abiertos $(-1; 0{,}5)$ y $(0{,}5; 2)$ en $\mathbb{R}$. Los abiertos en X son la intersección de los abiertos en $\mathbb{R}$ con X, que son precisamente los puntos 0 y 1

Otra definición posible

| Definición 2. Se dice que un espacio topológico es **conexo** si no se puede representar como la unión $X = U \cup V$ de dos subespacios disjuntos y no vacíos U y V, tales que ninguno tiene puntos de acumulación del otro

Nuestro ejemplo $(0;2] = (0;1) \cup [1;2]$ ahora es conexo porque 1 es el punto de acumulación de $(0;1)$

El segundo ejemplo, $X = \{0\} \cup \{1\}$ en cambio, sí se puede representar como la unión de dos disjuntos tales que ninguno tiene puntos de acumulación del otro

¿Son conexos?

- $\mathbb{R}$ con la topología canónica
- $\mathbb{R}$ con la topología Sorgenfrey
- $\mathbb{R}$ con la topología cofinita
- $\mathbb{R}$ con la topología discreta

¿Son conexos?

- $\mathbb{R}$ con la topología canónica: SÍ.
  - De momento no sabemos demostrarlo, pero podemos intuirlo
  - Si $\mathbb{R} = U \cup V$, ambos abiertos, también sabemos que $\mathbb{R} = U \cup U^{comp}$, por lo que $U^{comp} = V$ sería cerrado y abierto a la vez. Algo nos dice que es imposible, y lo vamos a demostrar
- $\mathbb{R}$ con la topología Sorgenfrey: NO.
  - $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0; +\infty)$
  - Vemos que aquí es posible encontrar una separación gracias al hecho de que algunos conjuntos son abiertos y cerrados a la vez
- $\mathbb{R}$ con la topología cofinita. SÍ.
  - No existen abiertos disjuntos.
- $\mathbb{R}$ con la topología discreta. NO. $\mathbb{R} = \mathbb{R} \backslash \{0\} \cup \{0\}$

¿Son conexos?

- $A = (2, 3] \cup [4, 5) \subset \mathbb{R}$ con la topología canónica heredada
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología canónica
- Un punto en cualquier topología

¿Son conexos?

- A = (2, 3] ∪ [4, 5) ⊂ $\mathbb{R}$ con la topología canónica heredada. NO.
  - Ambos intervalos en A son abiertos.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología canónica. NO.
  - $\mathbb{Q} = \left(\left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}\right) \cup \left((\sqrt{2};\ +\infty) \cap \mathbb{Q}\right)$
  - Observamos que, a diferencia de $\mathbb{R}$, podemos hallar una separación gracias al hecho de que la “frontera”, $\sqrt{2}$, no pertenece a ninguno de los abiertos
- Un punto en cualquier topología. SÍ
  - Ningún punto puede representarse como suma de dos elementos no nulos

¿Es conexa la unión $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$?

- No
- Hay varias maneras de demostrarlo. Podemos, por ejemplo, considerar dos abiertos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < \frac{1}{2x}\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > \frac{1}{2x}\}$
- Claramente, los abiertos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < \frac{1}{2x}\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > \frac{1}{2x}\}$ en $\mathbb{R}^2$ generan en la topología heredada precisamente nuestro subespacio, por tanto, es la unión de dos abiertos, o sea, una separación
- Lo que hemos hecho ha sido separar dos partes de nuestro espacio por una curva
- Hay otra manera de verlo: cada componente de nuestro espacio en $\mathbb{R}^2$ es cerrada, por lo que contiene sus puntos de acumulación

Teorema. Los siguientes postulados son equivalentes

1) X es conexo.

2) Los únicos subconjuntos de X simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.

3) No existe ninguna función $f : X \to \{0, 1\}$ continua y sobreyectiva

Teorema. Los siguientes postulados son equivalentes

1) X es conexo $\Rightarrow$ 2) Los únicos subconjuntos de X simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X

- Como siempre, vamos a suponer lo contrario. Si existiera otro subconjunto de X abierto y cerrado (llamémoslo Y), su complemento sería abierto. La unión de Y (abierto) y su complemento (abierto) es una separación.

Teorema. Los siguientes postulados son equivalentes

1) X es conexo ⇒ 3) No existe ninguna función f : X → {0, 1} continua y sobreyectiva

- Si hubiera una función continua X → {0, 1}, consideraríamos

$$V = f^{-1}(0), W = V = f^{-1}(1)$$

- Ambos son abiertos, por tanto, forman una separación

Teorema. Los siguientes postulados son equivalentes

3) No existe ninguna función f : X → {0, 1} continua y sobreyectiva

⇒1) X es conexo

- Si X no es conexo, existe una separación en dos abiertos $X = V \cup W$
- Definamos

$$f(x) = \begin{cases} 0, si\ x \in V \\ 1, si\ x \in W \end{cases}$$

Componentes conexas

| Definición 1. Si existe una función continua y sobreyectiva $f : X \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, se dice que X tiene N **componentes conexas**: $f(0), f(1), \ldots, f(N-1)$

| Definición 2. También podemos definir una **componente conexa** $Y \subset X$ como el conjunto conexo tal que $\forall Z$: $Y \subset Z \subset X$, Z no es conexo (es decir, "la máxima parte conexa")

| Definición 3. Si existe una relación de equivalencia $x \sim y : \exists A$: $x, y \in A\ conexo$, las clases de equivalencia definen las **componentes conexas**

Teorema. La unión de conexos que tienen intersección entre sí es conexa

- Supongamos que $X = \bigcup A_i$, A_i son conexos y $\exists x \in A_i$ (es decir, tienen intersección)
- Si la unión no fuera conexa, $X = P \cup Q$, unión de dos abiertos que no tienen intersección. Supongamos que $x \in P$
- Ahora bien. Cada uno de los espacios A_i, ¿están en P o en Q?
- Tienen que tener al menos un punto en común con P ($x \in P$, $x \in A_i$)
- Pero, al ser conexos ¡no pueden tener puntos en común con otro abierto disjunto!
- Es decir, si $\exists k$: $A_k \cap Q \neq \emptyset$, entonces $A_k \cap P$ y $A_k \cap Q$ sería una separación de un conexo

Demuestra que cualquier intervalo cerrado es conexo en la topología canónica

- Consideremos el intervalo $[a;b]$
- Supongamos que tiene una separación $[a;b] = U \cup V$, llamemos V el intervalo que tiene el punto b
- Busquemos una especie de “frontera” entre ellos, el punto más cercano a b que separe U de V
- U debe tener al menos un punto. Consideremos $s = \sup(x \in U)$ (“frontera”)
- $s \neq a$
- $s \notin U$ (U no sería abierto porque si $s \in U$ tendría que existir un entorno abierto de s dentro de U y s dejaría de ser el supremo)
- Entonces $s \in V$
- $s \neq b$ (V tendría solo un punto y no sería abierto)
- Pero cualquier punto de un abierto contiene un entorno que está completamente dentro, por lo que $(s-\epsilon, s+\epsilon) \in V$. Entonces $s-\epsilon$ es supremo menor que s. Contradicción

¿Por qué cualquier intervalo cerrado tiene separación en Sorgenfrey y en los racionales?

- Básicamente, porque no hay “frontera” entre los abiertos
- En Sorgenfrey, la “frontera” puede pertenecer al intervalo derecho
- En los racionales, la “frontera” puede estar fuera de ambos conjuntos

Demuestra que cualquier intervalo abierto es conexo en la topología canónica

- ¿Podemos representar un abierto como una unión infinita de cerrados que tienen intersección?
- ¡Claro! Cualquier $(a;b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}; b - \frac{1}{n}]$
- Como todos estos intervalos tienen un punto en común (por ejemplo, $\frac{a+b}{2}$), su unión es conexa

Demuestra que la recta numérica es conexa en la topología canónica

- ¿Podemos representar la recta como una unión infinita de cerrados que tienen intersección?
- ¡Claro! Cualquier $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n; n]$
- Como todos estos intervalos tienen un punto en común (por ejemplo, 0), su unión es conexa

Sea $X = [0;1] \times [0;1]$ (topología del orden)

- ¡Dibuja estos conjuntos! ¿Son conexos?
  - $A = \{0{,}5\} \times [0;1]$
  - $B = [0;1] \times \{0{,}5\}$
  - $C = \{0{,}5\} \times [0;1] \cup \{0{,}6\} \times [0;1] \cup [0;1] \times \{0\}$
  - $D = [0;1] \times \{0{,}5\} \cup [0;1] \times \{0{,}6\} \cup \{0\} \times [0;1]$
- Compara los dos últimos con el conjunto
  - $D' = [0;1] \times \{0{,}5\} \cup [0;1] \times \{0{,}6\} \cup \{0\} \times [0;1]$ *en la* ***canónica***

Propiedad del supremo

Intuimos que la demostración de que el intervalo cerrado es conexo en la canónica se puede generalizar a otros espacios.

Si en nuestro conjunto X existe una relación de orden decimos que cumple la **propiedad del supremo** si cualquier subconjunto acotado en X $U \subset X, \exists x \in X \colon \forall u \in U \; x \geq u$ tiene supremo (cota superior mínima), es decir, $\exists s \in X \colon \forall u \in U \; u \leq s$ y $\nexists w < s \in X \colon \forall u \in U \; u \leq w$

- $\mathbb{R}$ cumple esta propiedad.
- Busca un universo dentro de $\mathbb{R}$ que no la tenga
- Piensa en los racionales
- $X = \mathbb{Q} \cap (0; \sqrt{2}) \cup \{\sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$

Continuos lineales

Se dice que el conjunto X es un **continuo lineal** si

- X tiene la propiedad del supremo
- Para cualquier pareja de puntos de X hay un punto entre ellos:

$$\forall a < b \in X \; \exists \, x \in X : a < x < b$$

Sea $X = [0;1] \times [0;1]$ (topología del orden)

- ¡Dibuja estos conjuntos! ¿Son conexos?
  - $A = \{0,5\} \times [0;1]$
  - $B = [0;1] \times \{0,5\}$
  - $C = \{0,5\} \times [0;1] \cup \{0,6\} \times [0;1] \cup [0;1] \times \{0\}$
  - $D = [0;1] \times \{0,5\} \cup [0;1] \times \{0,6\} \cup \{0\} \times [0;1]$
- Compara los dos últimos con el conjunto
  - $D' = [0;1] \times \{0,5\} \cup [0;1] \times \{0,6\} \cup \{0\} \times [0;1]$ *en la **canónica***

¿Son continuos lineales? ¿Son conexos?

- $X = [0;1] \times [0;1]$ (topología del orden)
- $X = (0;1] \cup (2;3)$ (topología canónica heredada)
- $X = (0;1] \cup [2;3)$ (topología canónica heredada)
- $X = (0;1] \cup (2;3)$ (topología del orden)
- $X = (0;1] \cup [2;3)$ (topología del orden)

¿Son continuos lineales? ¿Son conexos?

- $X = [0;1] \times [0;1]$ (topología del orden). SÍ.
- $X = (0;1] \cup (2;3)$ (topología canónica heredada). NO
  - Ambos son abiertos
- $X = (0;1] \cup [2;3)$ (topología canónica heredada). NO
  - Ambos son abiertos
- $X = (0;1] \cup (2;3)$ (topología del orden). SÍ.
  - Entre el 1 y cualquier $2+\epsilon$ hay otro elemento. Es un continuo lineal
- $X = (0;1] \cup [2;3)$ (topología del orden). NO.
  - No hay NADA entre el 1 y el 2. NO es un continuo lineal
  - $(0;1]$ es un abierto: $\{x < 2\}$, $[2;3)$ es otro abierto: $\{x > 1\}$

$X = [0;2] \cup (3;4]$ (topología del orden) ¿es homeomorfo a $[0;3]$?

- En la topología del orden ambos espacios son conexos
- El paso del 2 al 3 en X es continuo (¡¡¡no hay puntos intermedios!!!)

En los continuos lineales los intervalos son conexos

- Si hubiera una separación en abiertos $U \cup V$, podríamos considerar la cota superior mínima s del U, que "está a la izquierda" (que contiene el límite inferior)
- Este punto o pertenece al U o al V
- Si $s \in U$, un entorno suyo $[s-e, s+e]$ pertenece a U, por lo que no puede ser su cota superior $s+e > s$
- Si $s \in V$, un entorno suyo $[s-e, s+e]$ pertenece a V, por lo que no puede ser su cota superior ya que $s-e$ también lo es

La propiedad de conexidad

- ¿Se conserva cuando refinamos la topología?
- ¿Se conserva cuando engrosamos la topología?

La propiedad de conexidad

- ¿Se conserva cuando refinamos la topología?
  - NO. Ejemplo: cualquier intervalo de la canónica es conexo, pero en Sorgenfrey “se cae a pedazos”: puede ser representado como unión de infinitos abiertos disjuntos
- ¿Se conserva cuando engrosamos la topología?
  - SÍ. Si un espacio fuese representado como unión de abiertos disjuntos en una topología más gruesa, podríamos usar estos mismos abiertos para construir la separación en la topología inicial (más fina)

Espacio totalmente disconexo

Un espacio se llama **totalmente disconexo** si sus componentes conexas son puntos

- Busca un espacio totalmente disconexo
- Busca un espacio totalmente disconexo con la topología canónica

Espacio totalmente disconexo

Un espacio se llama **totalmente disconexo** si sus componentes conexas son puntos

- Busca un espacio totalmente disconexo: **R con la topología discreta**
- Busca un espacio totalmente disconexo con la topología canónica: **El conjunto de Cantor**

Teorema. Dada una función continua $f: X \to Y$ se da que $f^{-1}(conexo) = conexo$

- Es un teorema MUY importante y muy fácil de demostrar
- Si la imagen tuviera una separación en abiertos… $Y = U \cup V$
- ¡la preimagen también la tendría! $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
- Este hecho es MUY IMPORTANTE: demuestra que la propiedad de ser conexo ES CONSERVADA POR HOMEOMORFISMOS

Demuestra que la circunferencia es conexa

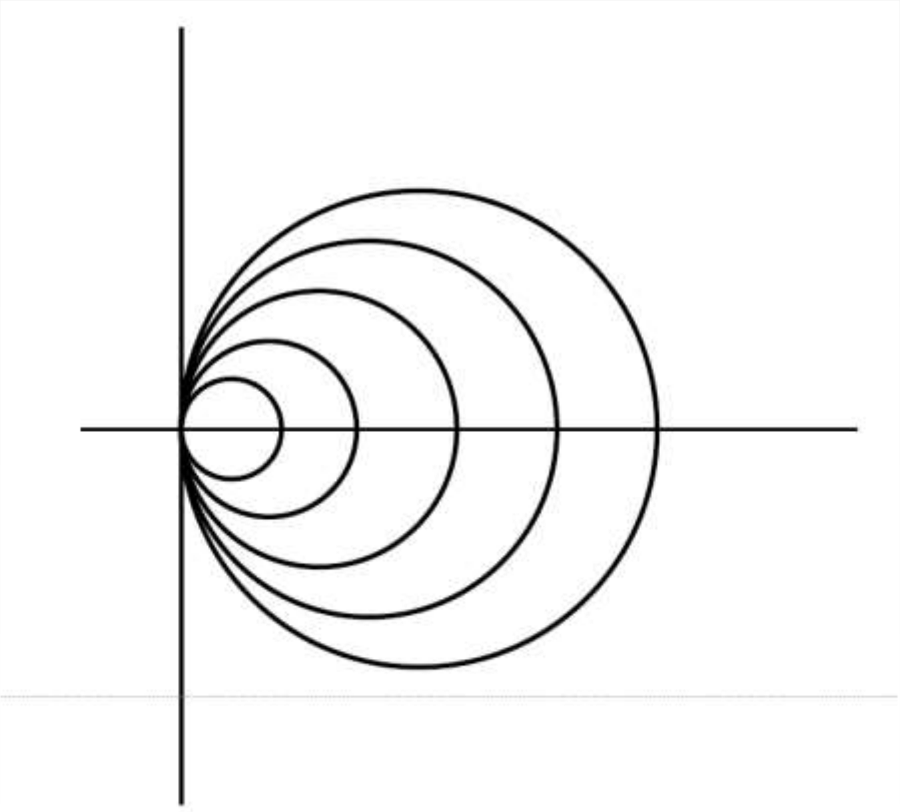
- Piensa que la circunferencia es una curva continua
- Podemos montar la circunferencia con dos mitades, la izquierda y la derecha: tienen dos puntos en común (los polos)
  Ahora bien, ¿por qué es conexa cada mitad?
- Porque es homeomorfa al intervalo $[-R; R]$: basta coger la coordenada *y* de cada punto de la mitad de la circunferencia

Demuestra que la gráfica de cualquier función continua es conexa

- Claro, es la imagen de una función conexa desde un espacio conexo

Demuestra que el círculo es conexo

Recuerda que la unión de conexos que tienen un punto en común es conexa ¿Se te ocurre cómo representar el círculo como unión de conexos?



Demuestra que el círculo es conexo

- Opción B: cubrir el círculo con radios
- Tienen un punto en común (el centro)

Demuestra que la esfera es conexa

Podemos cubrir la esfera entera con meridianos

La clausura y la conexidad

| **Teorema**. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ es un subconjunto conexo entonces cualquier subconjunto $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ con $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \overline{\mathrm{A}}$, es también conexo.

- Como siempre, pensaremos en lo contrario: supongamos que B tiene una separación $B = U \cup V$
- ¿Dónde puede estar A? No puede tener intersección con ambos, ya que esto generaría una separación de un conexo
- Supongamos que $A \subset U$. Entonces $X \backslash \mathrm{V}$ es un cerrado que contiene A, por tanto, tiene que contener su clausura (que es el mínimo cerrado que contiene A).
- Si $\bar{A} \subset X \backslash \mathrm{V}$, entonces todo $\bar{A}$ (y, por tanto, también B) está contenido en U

La clausura y la conexidad: corolarios

| **Corolario 1**. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ es un subconjunto conexo entonces su clausura es también conexa.

- Es evidente si en el teorema anterior cambiamos B por la clausura de A

| **Corolario 2**. Las componentes conexas son cerrados.

- Si dos puntos pertenecen a una componente conexa, es el máximo conjunto que la contiene. Si fuera un abierto, su clausura sería un conjunto más grande y conexo que la contuviera. Contradicción.
- Pregunta capciosa. ¿Y qué pasa con el conjunto $X = (0;1)\,\mathrm{U}(2;3)$? ¿No son abiertas sus componentes conexas?
- Pues claro. Son abiertas y cerradas a la vez (piensa que el punto 1 no existe en el mundo X)

Si la clausura de A es conexa, ¿A es conexo?

- *Evidentemente…*
- *¡NO!* $A = (0;1) \cup (1;2)$

Componentes conexas: teoremas

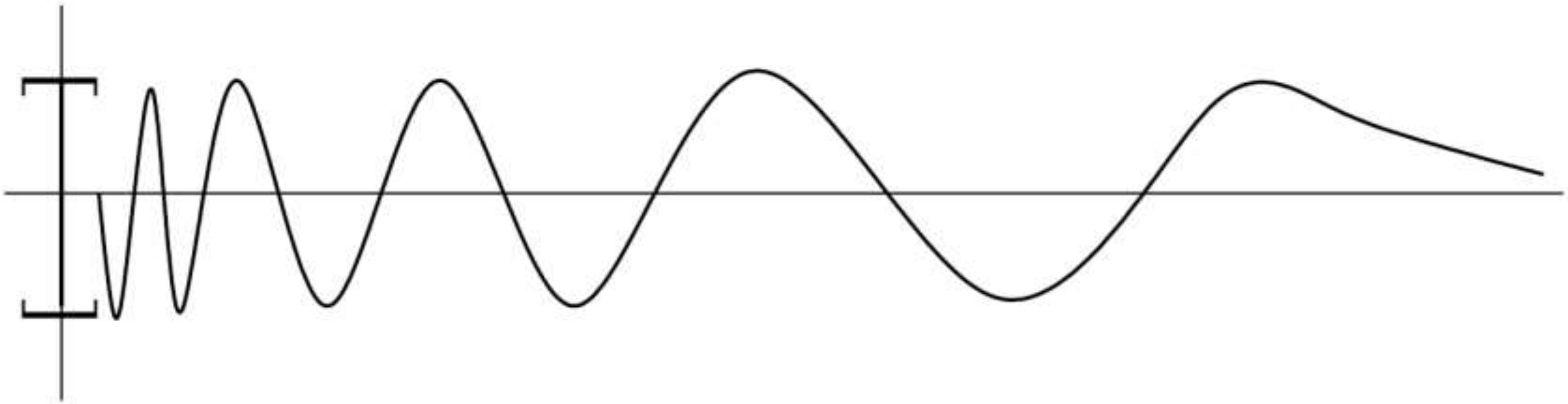
- Teorema 1. Cada punto de X pertenece a una única componente conexa
- Demostración: la unión de conexos que tienen un punto común es conexa. Si un punto perteneciera a dos, la unión de dos componentes conexas, que no es conexa por definición, sería conexa
- Teorema 2. Ser componente conexa equivale a ser a la vez abierto y cerrado.
- Hemos visto que ser abierto y cerrado y conexo significa ser el universo entero. Las componentes conexas son cerradas (porque si un abierto es cerrado también lo es su clausura) pero, por otro lado, el conjunto entero se separa en abiertos disjuntos, por lo que, si son finitas, deben ser abiertos también

¿Es verdad que la intersección de conexos es conexa?

- No
- Piensa en dos espacios conexos que se corten en dos puntos
- Por ejemplo, el eje X y una circunferencia con centro en origen de coordenadas

Un ejemplo original

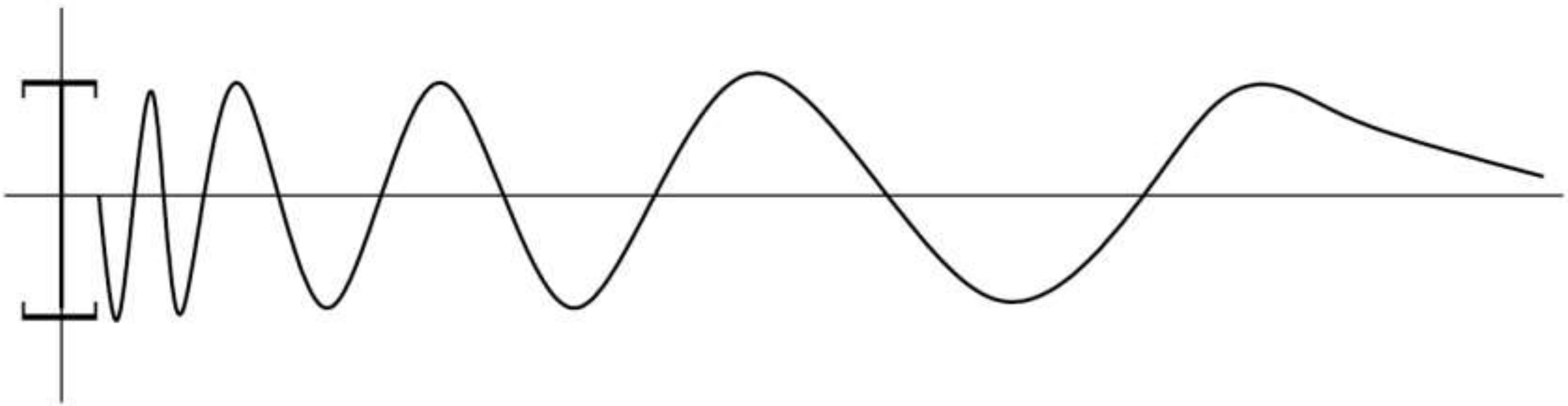
- Vamos a definir el subconjunto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$
- ¿Cuál es su clausura?



$$\bar{S} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0,y) : y \in [-1;1]\}$$

El seno topológico

- Por lo que hemos demostrado, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y =$



Teorema del valor intermedio

- Una función continua $f: X \to Y$ donde X es conexo e Y posee la topología del orden toma todos sus valores intermedios
- Demostración (como siempre reductio ad absurdum)
- Supongamos que $\exists y: f(x_1) < y_0 < f(x_2)$: $\nexists x: f(x) = y$
- ¡Entonces habrá una separación de X!
- En concreto, $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V), donde\ U = \{y < y_0\}, V = \{y > y_0\}$

Si calentamos un aro

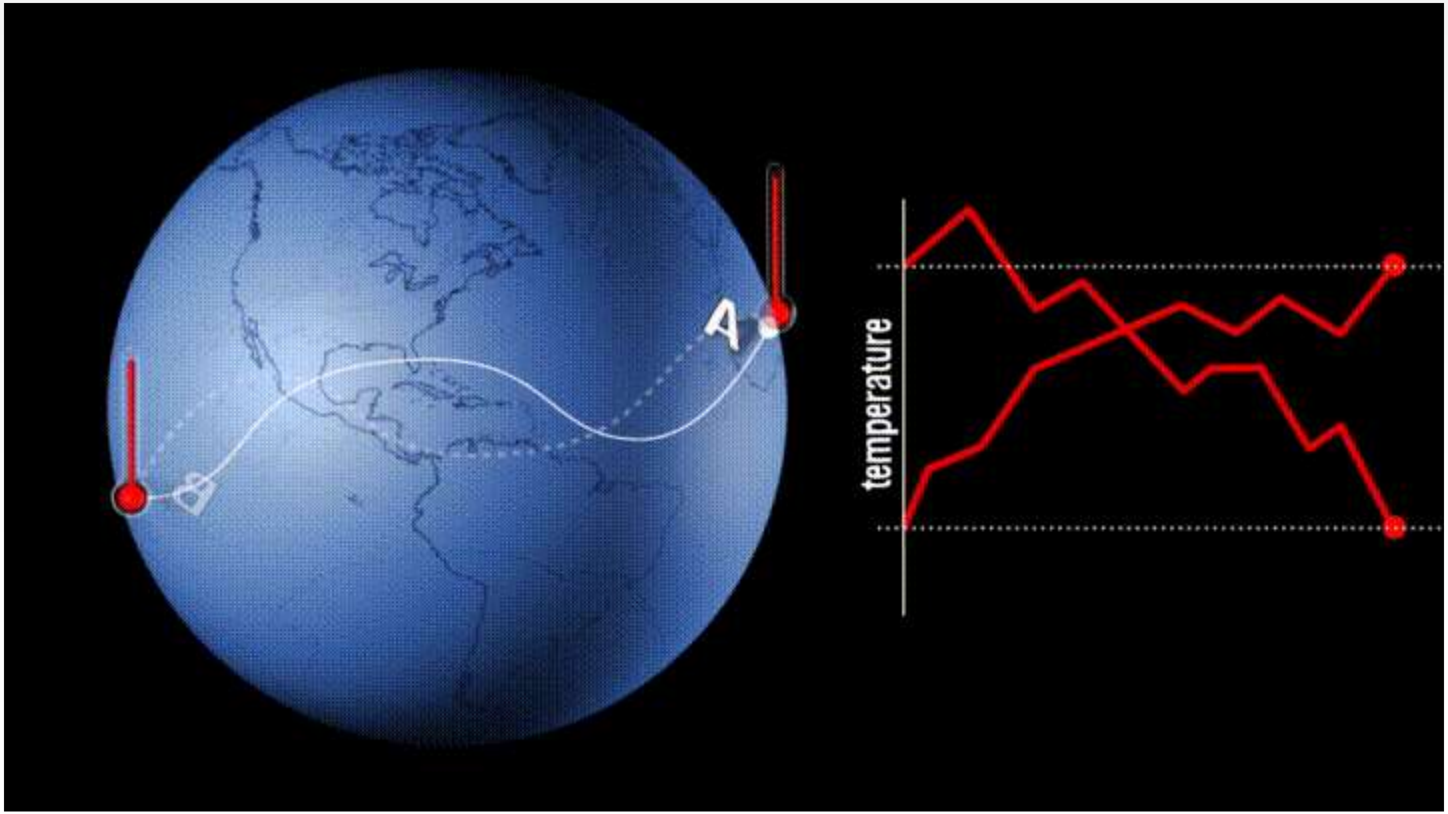
- ¡Dos puntos opuestos suyos siempre tienen la misma temperatura!

Teorema del valor intermedio: corolario

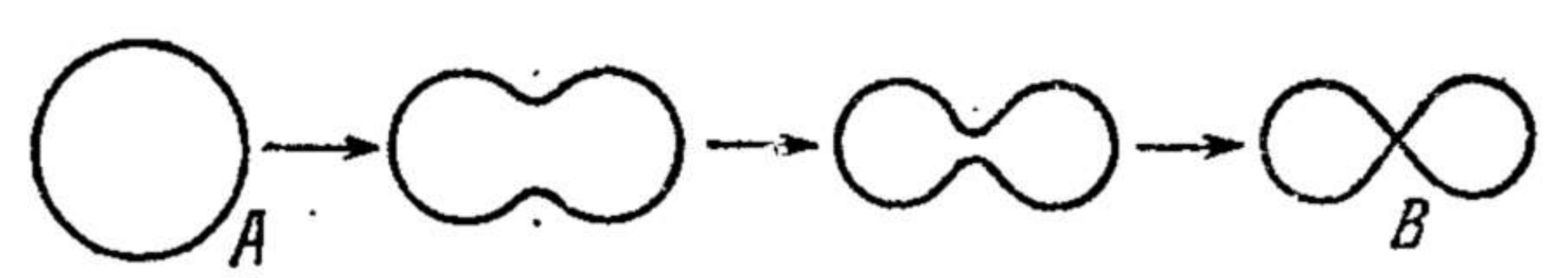
- Para cualquier aplicación continua $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ existen dos puntos opuestos de la circunferencia que generan las mismas imágenes
- Demostración
- Consideremos la función $g\colon f(x) - f(x+\pi)$
- $g\,(0) = f(0) - f(\pi) = -\big(f(\pi) - f(0)\big) = -g(\pi)$
- Si tienen signos distintos, en algún punto la función g se anula

Generalización en más dimensiones

- ¡Dos puntos opuestos en la Tierra siempre tienen la misma temperatura (presión atmosférica, etc.)!

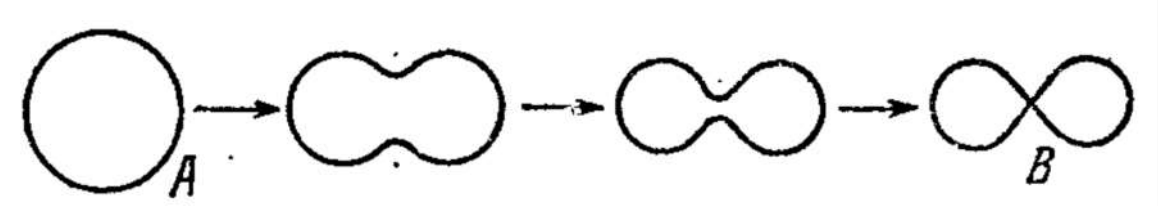


¿Son homeomorfas las figuras A y B?



¿Cómo demostrar que dos espacios NO son homeomorfos?

- **Truco Básico**: eliminemos un punto de ambos.
  ¿Han cambiado sus propiedades?
- En el ejemplo anterior, la figura B posee un punto que, al eliminarlo, “rompe” la figura en dos componentes conexas.
  Sin embargo, no hay ningún punto en la circunferencia que lo haga



¿Son homeomorfos?

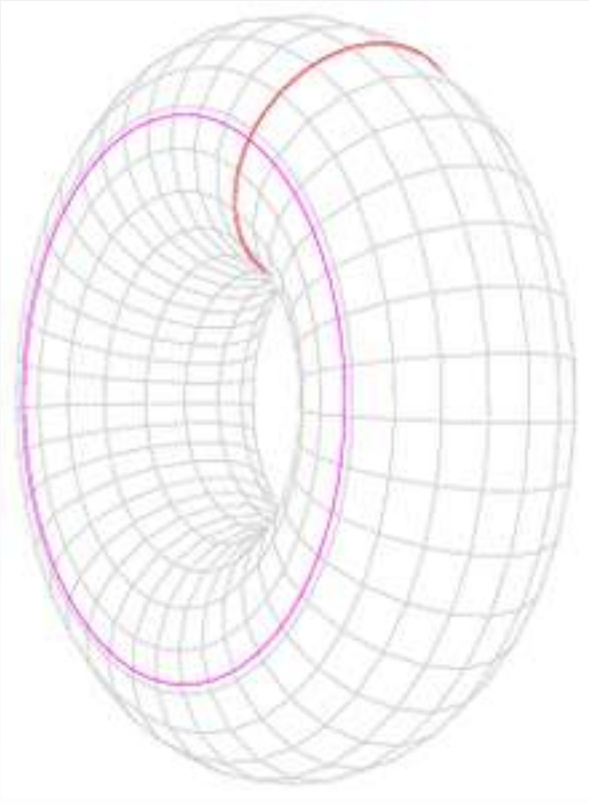
- La letra T y la letra L?
- La letra K y la letra X?
- La letra R y la letra B?
- La letra E y la letra F?

¿Son homeomorfos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$?

¿Son homeomorfos S y S^n?

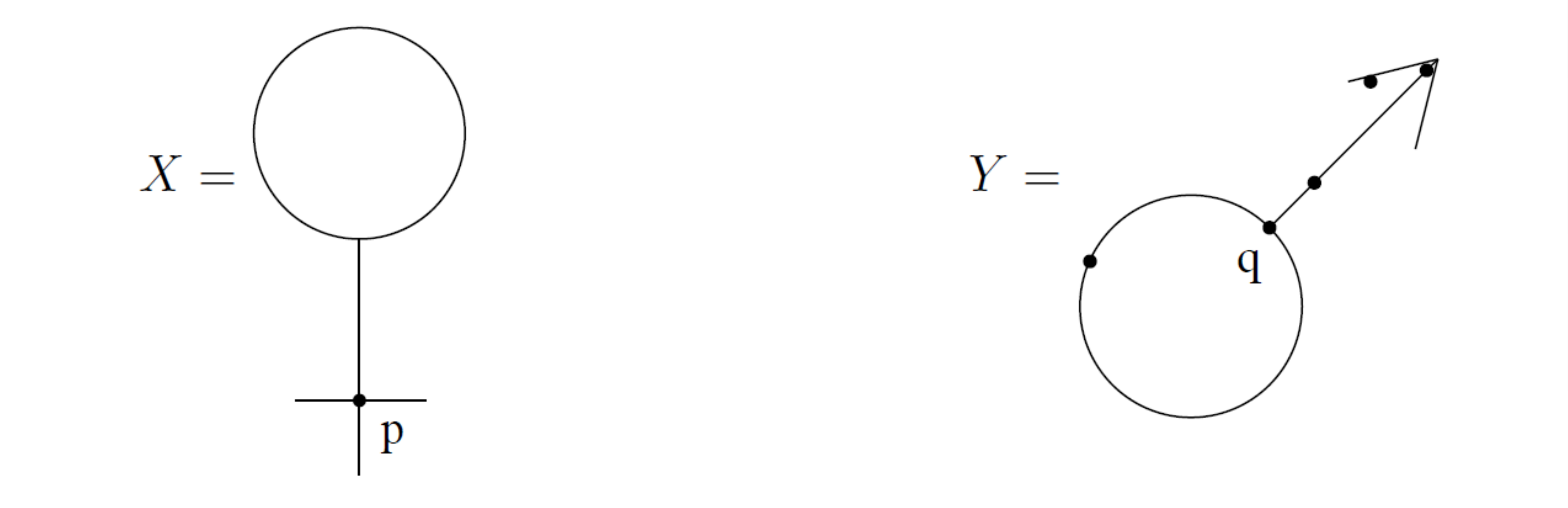
Pista: quitemos dos puntos

¿Son homeomorfos el toro y la esfera?

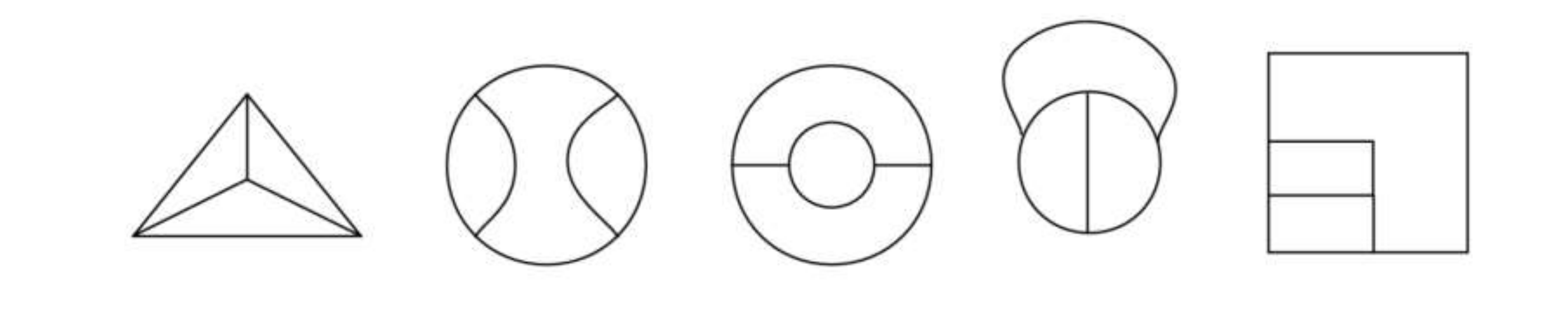


¿Son homeomorfos?

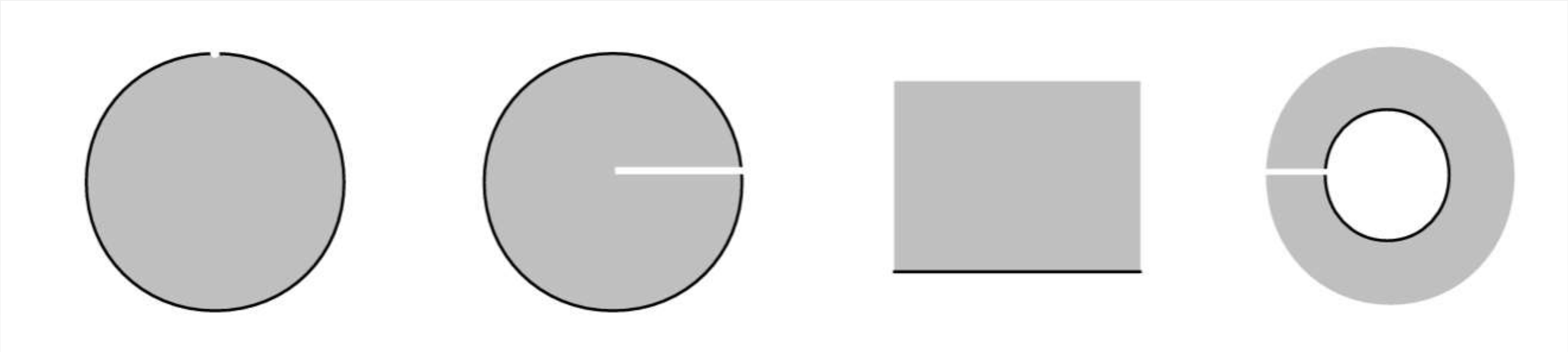
- Técnica: si quitamos el punto p, ¿qué le puede pasar a Y?



De estas gráficas, ¿cuáles son homeomorfas?



De estos espacios, ¿cuáles son homeomorfos?



Invariantes topológicos

| Definición. Una propiedad del espacio se llama **invariante topológico** si todos los espacios homeomorfos también la poseen

- Por ejemplo, la **conexidad** es un invariante topológico
- Ser **Hausdorff,** $\boldsymbol{T_1}$ o **2AN** (satisfacer el segundo axioma de numerabilidad), también lo es