El grupo fundamental

Topología - 12

Georgy Nuzhdin

2022-2023

El grupo: definición

- Una pareja $(G,*)$ donde G es un conjunto y $*$ es una operación binaria
$$\forall\, a, b \in G \colon a * b \in G$$
se llama grupo si cumple las siguientes propiedades:
- **Asociativa**: $a * (b * c) = (a * b) * c$
- **Neutro**: $\exists\, e \colon \forall a \in G\ a * e = e * a = a$
- **Inverso**: $\forall a \in G\ \exists\, a^{-1} \colon a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Ejemplos de grupos: $\mathbb{Z}$

- Los números enteros forman un grupo con la operación “suma”
  - ¿Cuál es el neutro?
  - ¿Cuál es el inverso del 7?
- El neutro es el 0
- El inverso es el opuesto

Ejemplos de grupos: $\mathbb{Z}_n$

- Son congruencias módulo n (o restos de división entre n)
- Ejemplo: $\mathbb{Z}_5$ con la operación “suma módulo 5”

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Ejemplos de grupos: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Son parejas de enteros con la suma por coordenadas
- Por ejemplo, $(3, -5) + (7, 2) = (10, -3)$

Ejemplos de grupos: *grupo libre*

- El conjunto tiene el alfabeto en el que cada letra tiene su inverso
- Por ejemplo, $\{a, A, b, B\}, a^{-1} = A, A^{-1} = a, b^{-1} = B, B^{-1} = b$
- El neutro es la palabra vacía, $''$
- Sumamos palabras colocándolas juntas:
- $aaaB + aBAb = aaaBaBAb$
- Las parejas de letras inversas se “colapsan”:
- $aaaB + bAAaB = aaaBbAAaB = aaaAAaB = aaAaB = aaB$

$\mathbb{Z}$ es también un grupo libre

- ¿Cuántas letras hay en su alfabeto?
- Una letra y su inverso
- $\{a, A\}$
- Por ejemplo,
  - $3 = aaa$
  - $-4 = AAAA$
  - $3 - 4 = aaaAAAA = A$

Ejemplos de grupos: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

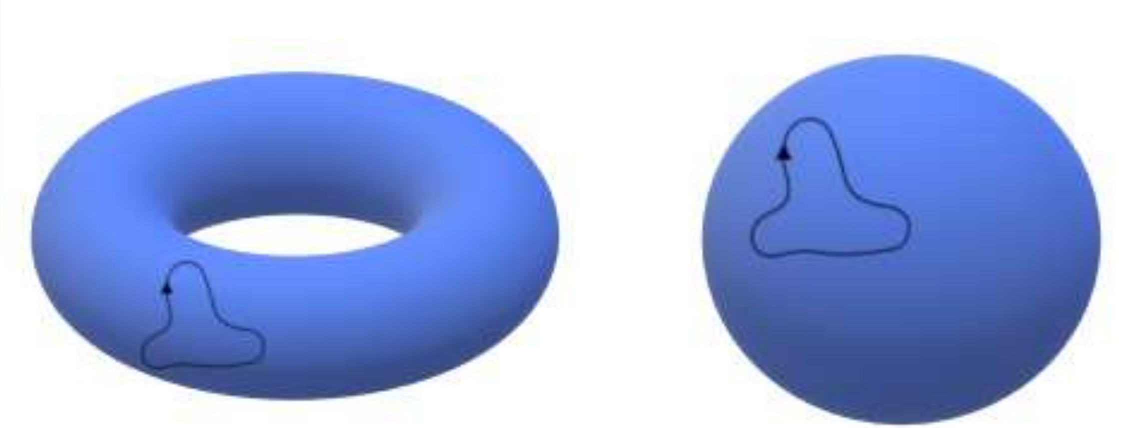
- El producto libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ es el grupo libre de dos parejas de letras inversas $\{a, A, b, B\}$
- Compara:

	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
elementos	$(3,4)$ o $(-3,1)$	$(3,4)$ o $(0,-2)$ $aaabbbb$ o BB
suma	$(3,4) + (-3,1) = (0,5)$	$aaabbbb + BB = aaabb$
¿Abeliano?	$(-3,1) + (3,4) = (0,5)$ SÍ	$BB + aaabbbb = BBaaabbbb$ NO

El lazo

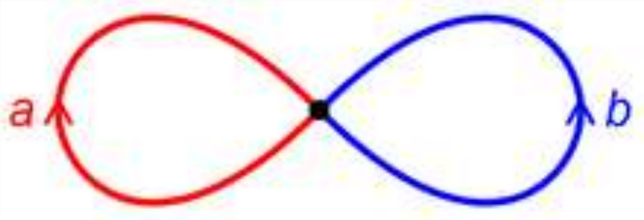
| Definición. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$.
El **lazo con base** x_0 es una aplicación continua $\alpha\colon\ [0;1] \to X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

- Ejemplos de un lazo en un toro y en una esfera



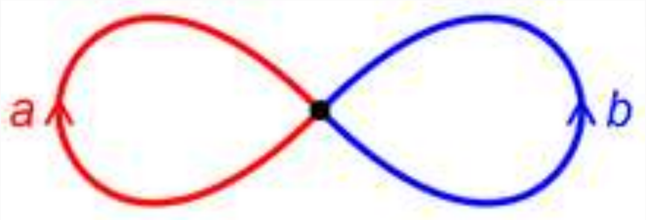
El lazo: discusión

- El lazo es un camino cerrado, un paseo circular.
- Si α es un lazo, ¿cómo definirías el lazo inverso?
- ¡Correcto! Como $\alpha'(t) = \alpha(1-t)$
- Ahora empieza lo más interesante: ¡los lazos se pueden sumar!
- ¿Cómo definirías la suma de dos lazos, α y β?
- $\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t), t \leq 0{,}5 \\ \beta(2t-1), t > 0{,}5 \end{cases}$



Suma de lazos: discusión

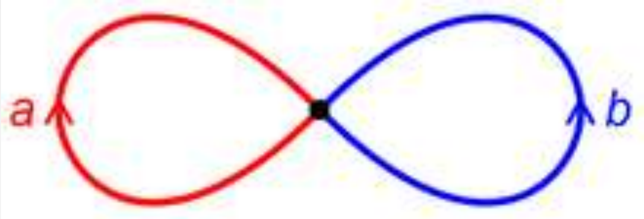
- Podemos definir la suma en función de la longitud de α y β. Si $\frac{longitud\ de\ \alpha}{longitud\ de\ \beta} = k$
- $\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(t/k), t \leq k \\ \beta(t/k - 1), t > k \end{cases}$



Propiedades de la suma de lazos

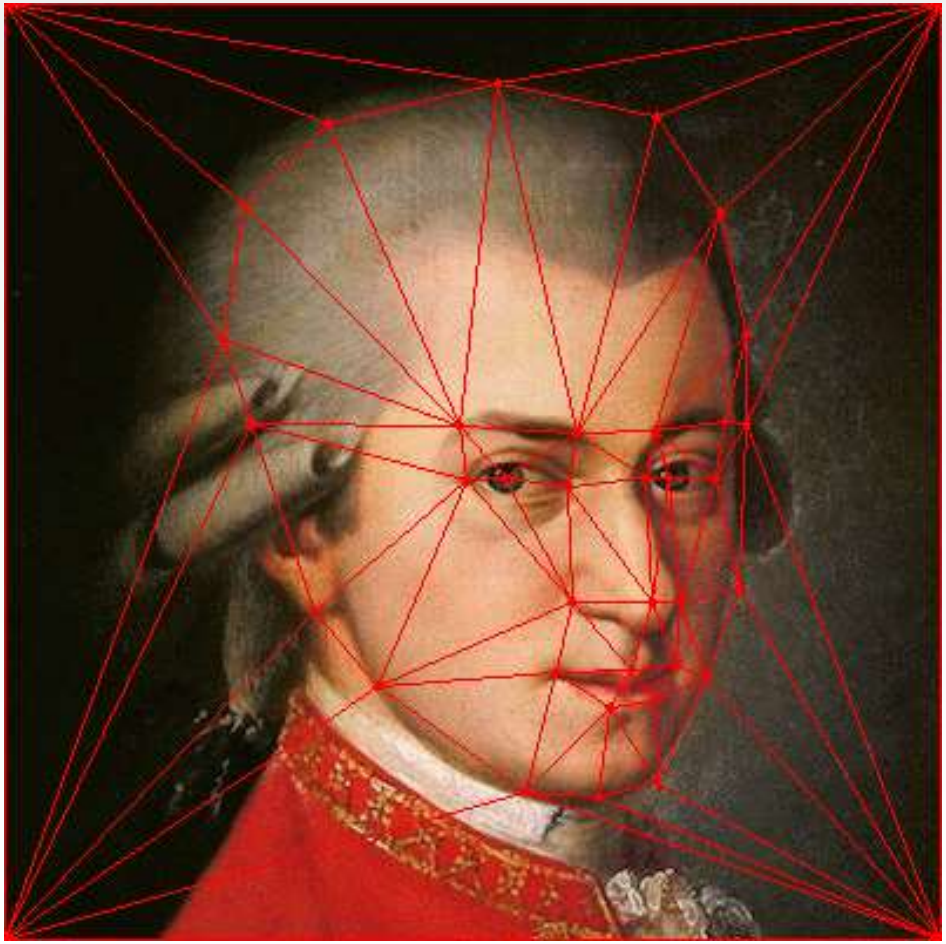
- La suma de dos lazos ¿es conmutativa?
- ¿Es asociativa?
- ¿Cuál es el inverso de $\alpha * \beta$ en términos de α^{-1}, β^{-1}?
- ¿Hay alguna unidad en el mundo de los lazos tal que $\alpha * 1 = \alpha$?

Propiedades de la suma de lazos



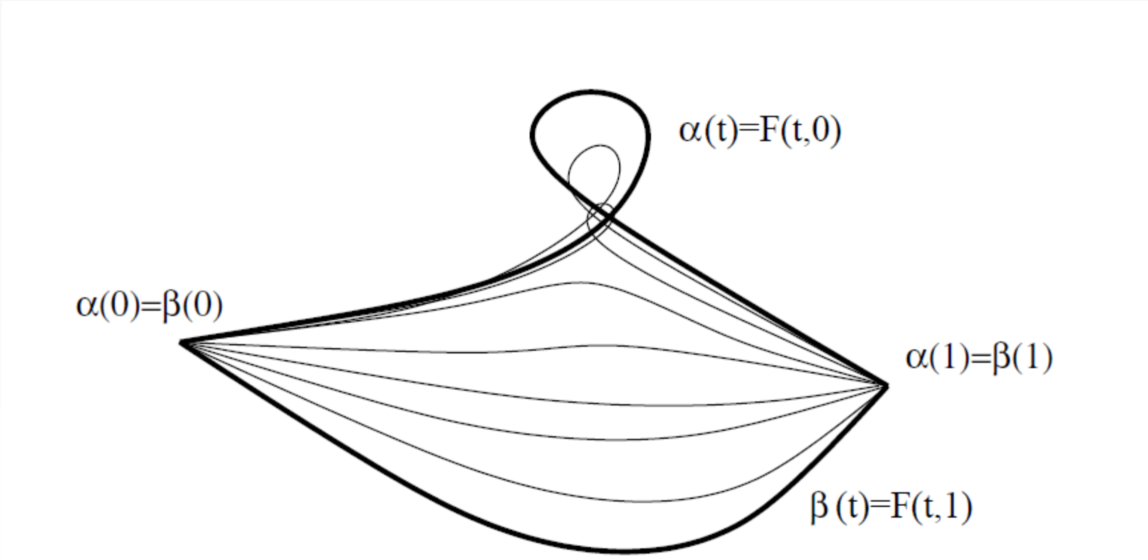
- La suma de dos lazos ¿es conmutativa?
- NO. Es fácil ver en el dibujo que, aunque se recorra el mismo itinerario, $\alpha * \beta$ lo hace primero por la izquierda, mientras que $\beta * \alpha$ empieza por la derecha
- ¿Es asociativa?
- SÍ. $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$. Ahora el itinerario es el mismo pero también lo es el orden de recorrido
- ¿Cuál es el inverso de $\alpha * \beta$?
- $(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$. Si vamos primero por la izquierda y luego por la derecha, para desandar el camino iremos primero por la derecha
- ¿Hay alguna unidad en el mundo de los lazos tal que $\alpha * 1 = \alpha$?
- SÍ. El lazo trivial, o constante, que no se aleja de su base $\alpha(t) = x_0$

¿Podemos transformar una cara en otra de manera continua?



Dos lazos equivalentes

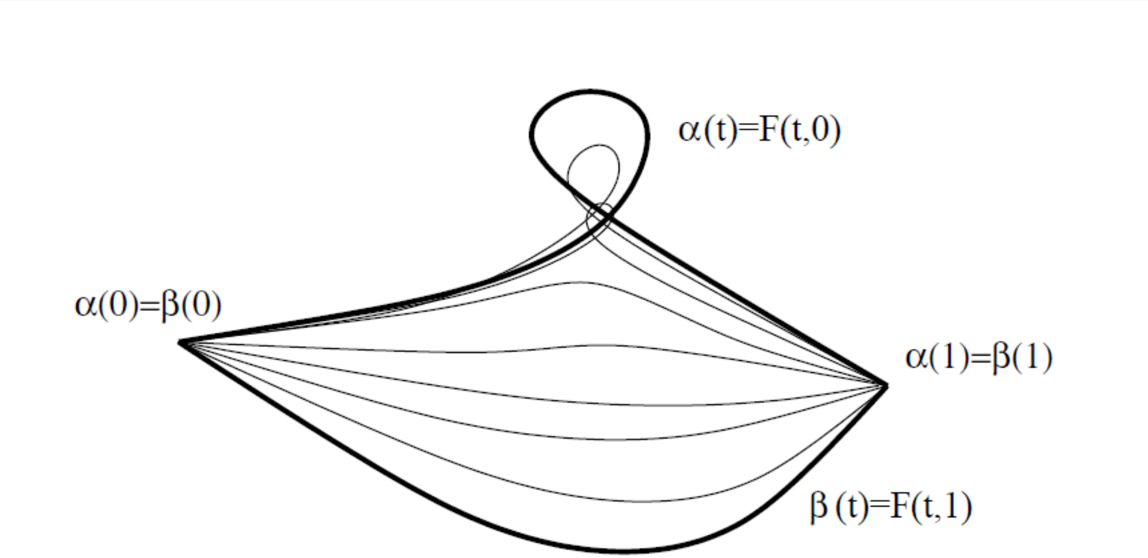
- Dos lazos se consideran **equivalentes** si se pueden transformar uno en el otro de forma continua
- Formalmente, tenemos que definir una **homotopía**: una aplicación continua definida en un cuadrado 1x1 tal que
  $h: [0;1] \times [0;1] \rightarrow X: h(t,0) = \alpha(t), h(t,1) = \beta(t)$



Es decir, en el borde de abajo del cuadrado la homotopía coincide con el primer lazo y en el borde de arriba, con el segundo

Homotopía NO IMPLICA homeomorfismo

- Fijaros en que un lazo sin intersecciones puede ser equivalente a otro con, como en la imagen
- Los lazos deben poder transformarse unos en otros, pero no tienen por qué ser homeomorfos



La homotopía es una relación de equivalencia

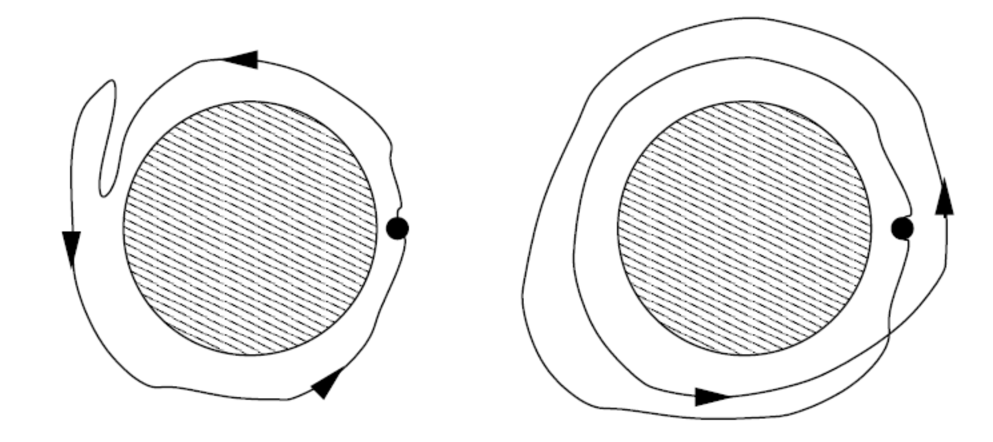
- Prueba definiendo una homotopía adecuada que
  - $\alpha \sim \alpha$
  - h: $h(t,0) = \alpha(t), h(t,1) = \alpha(t)$: es constante
  - $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \sim \alpha$
  - Si h: $h(t,0) = \alpha(t), h(t,1) = \beta(t)$, ¿Cómo defines h^{-1}: $\beta \rightarrow \alpha$?
  - $h^{-1}(t,x) = h(t,1-x)$
  - $\alpha \sim \beta\ \ y\ \ \beta \sim \gamma \Leftrightarrow \alpha \sim \gamma$
  - Si $h_1(t,0) = \alpha(t), h_1(t,1) = \beta(t)$, $h_2(t,0) = \beta(t), h_2(t,1) = \gamma(t)$ ¿Cómo defines h_3 $\alpha \rightarrow \gamma$?
  - $h_3(t,s) = \begin{cases} h_1(t,2s), s \leq 0.5 \\ h_2(t,2s-1), s > 0.5 \end{cases}$

Prueba a dibujar dos lazos equivalentes y tres no equivalentes (¡no siempre será posible!)

- En S^1
- En S^2
- En $S^1 \times S^1$
- En $\mathbb{R}^2$

Dibuja dos lazos equivalentes y dos no equivalentes

- En S^1 El lazo que le da una vuelta a la circunferencia entera y el que da dos vueltas son diferentes



- En S^2 TODOS LOS LAZOS SON EQUIVALENTES
- En $S^1 \times S^1$ El lazo horizontal y el vertical son diferentes
- En $\mathbb{R}^2$ TODOS LOS LAZOS SON EQUIVALENTES

Todos los lazos en $\mathbb{R}^2$ son equivalentes

- *A ver si sabes construir una homotopía entre* $\alpha(t)$ *y* $\beta(t)$
- $h(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$

El grupo fundamental

El grupo de clases de equivalencia de lazos en $\boldsymbol{X}$ con base en el punto x_0 se llama el **grupo fundamental**, o el **grupo de Poincaré,** $\boldsymbol{\pi_1(X, x_0)}$

¿Qué grupos hay en este mundo?

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}_n$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: imagínate dos manivelas, una izquierda y otra derecha. Primero giramos la izquierda, luego la derecha, y así muchas veces

Algunos grupos fundamentales

- $\forall x_0\ \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \{e\}$
- $\forall x_0\ \pi_1(S^2, x_0) = \{e\}$ (no es tan trivial como parece, pero lo demostraremos más tarde)
- $\forall x_0\ \pi_1(\mathbb{R}^3, x_0) \cong \{e\}$

Espacios “simplemente conexos”

| Definición. Un espacio es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial

- Acabamos de ver que la esfera y el espacio $\mathbb{R}^n$ son simplemente conexos

Independencia del punto base

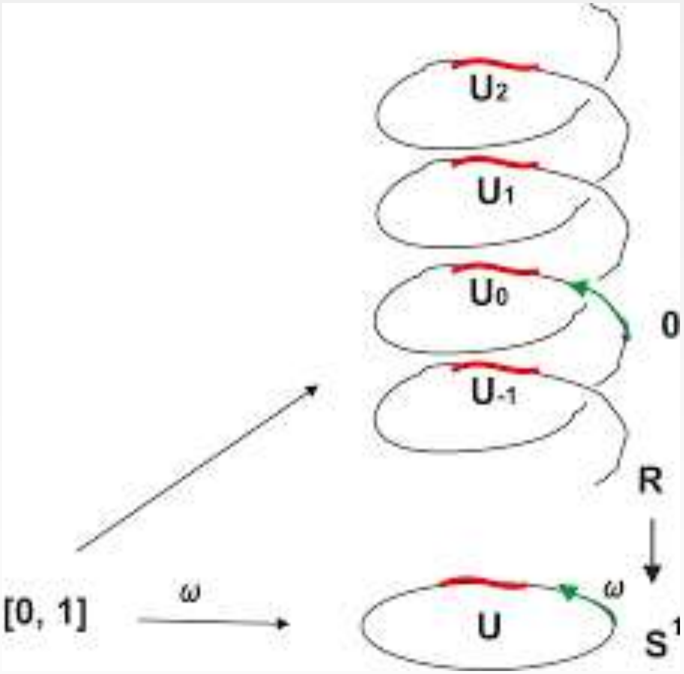
- **Teorema**. En un espacio conexo por caminos el grupo fundamental no depende del punto base
- Demostración.
- $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo de lazos con base en x_0. Pero cada lazo α con base en y_0 se puede convertir en lazo α' con base en x_0 añadiendo el camino $f\colon [0;1] \to X : f(0) = x_0, f(1) = \mathrm{y}_0$ al principio y el camino inverso $y_0 \to \mathrm{x}_0$ al final:
- $\alpha'(t) = \begin{cases} f(3t), 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \alpha(3t-1), \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ f^{-1}(3t-2), \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}$
- Ahora podemos escribir $\pi_1(\mathbb{R}^2) = \{e\}$ en vez de $\forall x_0\ \pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \{e\}$

El grupo fundamental de la circunferencia

- Cada lazo tiene una característica entera, que es “el número de vueltas que da a la circunferencia”
- IDEA PRINCIPAL: Si dos lazos dan distinta cantidad de vueltas, no puede existir una homotopía entre ellos porque la función “cantidad de vueltas” no sería continua (daría un salto en algún punto)

El recubrimiento de S^1: $t \to (\cos t, \sin t)$ (parking infinito)

- Vamos a considerar una especie de parking infinito que tiene infinitos niveles tanto sobre tierra como bajo tierra
- Podemos representarlo como una hélice sobre nuestra circunferencia
- Cada pequeño trocito de la hélice se puede proyectar a la circunferencia de forma unívoca. Inversamente, cada trocito de la circunferencia se eleva a infinitos trocitos de la hélice del parking infinito
- Cada lazo en la circunferencia también se puede elevar a múltiples lazos en la hélice

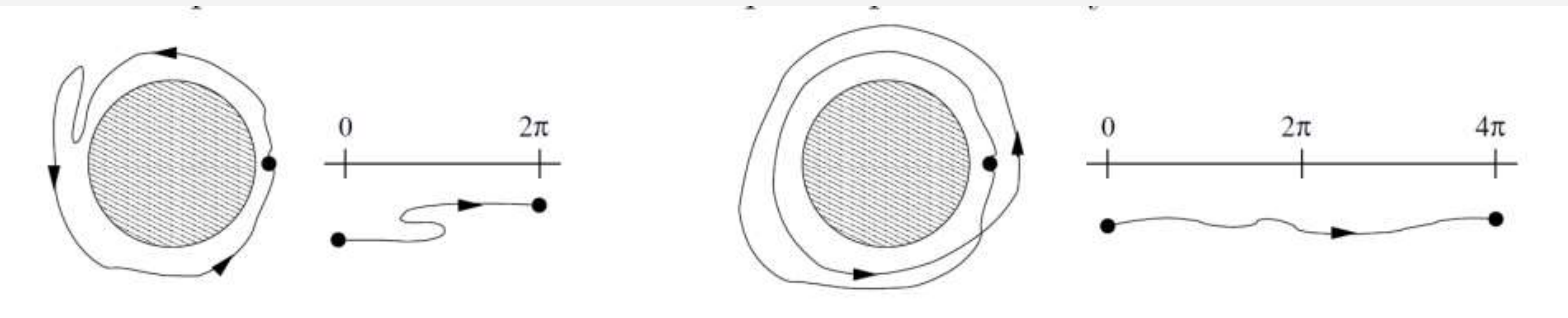


El lifting lemma

- Cada lazo tiene infinitas preimágenes. Cada punto del lazo tiene infinitas preimágenes en cada piso del parking recubridor. Pero queremos demostrar que si fijamos el comienzo de la preimagen de un lazo, podremos continuarlo correctamente, es decir, cada lazo α que sale del punto x_0 se eleva a intervalos en $\mathbb{R}$ de longitud $2\pi k_n$ con origen en puntos r_n: $p^{-1}(\alpha) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[r_n; r_n + 2\pi k_n]$
- Vamos a fijar uno de los comienzos $p^{-1}(x_0) = r_0$ en uno de los pisos del parking y demostraremos que tenemos una única continuación
- Consideremos un recubrimiento $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ del lazo α con abiertos U_n tales que las preimágenes $p^{-1}(U_n)$ sean disjuntas. Ahora la preimagen $\alpha^{-1}(U)$ del recubrimiento crea un recubrimiento con abiertos del compacto $[0; 1]$ del que podemos extraer un recubrimiento finito, supongamos que es la colección V_k. $\alpha(V_k)$ crea un recubrimiento del lazo α
- Ahora la elevación $p^{-1}(V_0)$ contiene el punto inicial r_0 y, por tanto, está correctamente definida. $V_0 \cap V_1$ contiene al menos un punto x_1, cuya elevación está bien definida. Por tanto, la elevación $p^{-1}(V_1)$ también está bien definida, y así hasta $p^{-1}(V_k)$

¿Cómo definir el “número de vueltas”

- La idea que funciona es cortar el lazo por el punto base y *desenrollarlo* sobre IR.



Grupo fundamental de la circunferencia

- Nuestra tarea ahora es demostrar que dos lazos equivalentes conservan su longitud en $\mathbb{R}$, es decir, que un lazo que da k vueltas necesariamente se convierte en un intervalo de longitud exactamente $2\pi k$
- Vamos a fijar el origen de uno de estos intervalos, pongamos, r_0
- Supongamos que tenemos dos lazos equivalentes cuyas elevaciones empiezan en el mismo punto r_0 pero terminan en puntos distintos: $p^{-1}(\alpha) = [r_0; r_0 + 2\pi k]$ pero $p^{-1}(\beta) = [r_0; r_0 + 2\pi n], n \neq k$
- Consideremos una homotopía $h(t, s)$ que convierte $\alpha \to \beta$ y la elevamos a una homotopía de intervalos en $\mathbb{R}$: $\tilde{h}: = [r_0; r_0 + 2\pi k] \to [r_0; r_0 + 2\pi n]$
- Prestemos atención a $\mathrm{Fin} = \bigcup \tilde{h}(1, s)$, el conjunto de finales de camino. Todos los puntos en él tienen forma de $r_0 + 2\pi m$, por lo que es un conjunto disconexo. Pero la función $\mathrm{h_f(s)} = \tilde{h}(1, s)$ es continua, por lo que este conjunto solamente puede tener un único punto.
- Esto significa que los lazos equivalentes tienen la misma longitud en $\mathbb{R}$, por lo que dan la misma cantidad de vueltas en torno a la circunferencia

El grupo fundamental de la circunferencia

- Acabamos de ver que
- $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$
- El isomorfismo viene dado por el “número de vueltas”
- La suma de lazos que tienen k y n vueltas nos da un lazo de $k + n$ vueltas

El grupo fundamental es un invariante topológico

- Si tenemos una aplicación continua entre dos espacios $f: X \to Y$ podemos "enviar" los lazos de X a Y, $f_*: \alpha \to f(\alpha)$
- Si la aplicación f es un homeomorfismo, f_* es un homomorfismo entre los grupos fundamentales $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$

La relación entre espacios topológicos y sus grupos fundamentales

- Dos espacios homeomorfos tienen el mismo grupo fundamental
- ¿Es verdad que dos espacios que tienen el mismo grupo fundamental son homeomorfos?
- La respuesta es
- NO.
- Ejemplo: $\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \pi_1(S^2, x_0) = \{e\}$

Averigua el grupo fundamental de $S^2 \backslash \{0\}$

- $S^2 \backslash \{0\} \cong R^2$
- $\pi_1(S^2 \backslash \{0\}, x_0) \cong \{e\}$

Averigua el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 \backslash S^1$

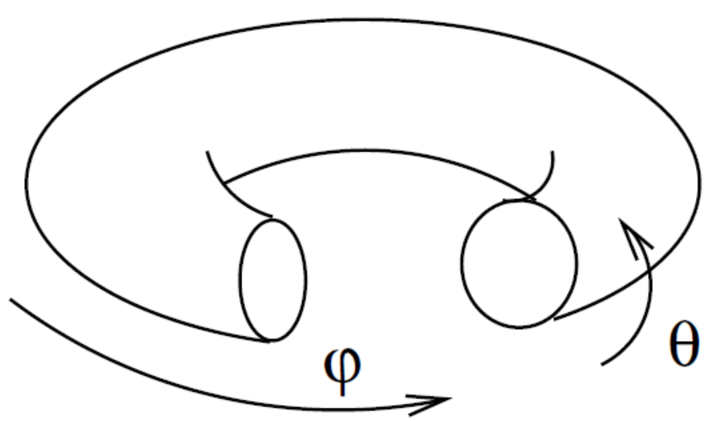
- Los lazos no son equivalentes si uno se engancha a la circunferencia y el otro no
- Tampoco si dan una cantidad de vueltas distinta
- $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$

Busca $\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\{x^3+y^3+z^3\leq 1\})$

- Ahora todos los lazos son equivalentes
- $\pi_1(\mathbb{R}^3\backslash\{x^3+y^3+z^3\leq 1\})\cong\{e\}$
- Fijaos en que no tenemos otra manera de diferenciar el espacio anterior de este, ambos son no compactos, conexos, conexos por caminos, abiertos,…

El grupo fundamental del toro

- Primero, reflexionemos un poco
- Podemos dar vueltas alrededor del agujero
- También podemos dar vueltas transversalmente respecto al agujero
- Cada movimiento es independiente
- $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$
- Conclusión…



El grupo fundamental del producto

- $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

- Ejemplo:

$$\pi_1(S^1 \times S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Calcula el grupo fundamental del cilindro $S^1 \times [0;1]$

- El grupo fundamental del segmento es trivial
- $\pi_1(S^1 \times [0;1], x_0) \cong \mathbb{Z} \times \{e\} \cong \mathbb{Z}$

Calcula los grupos fundamentales para

- EL cono con la base
- El cono sin la base
- El cubo

Averigua el grupo fundamental de $S^2 \backslash \{0,1\}$

- Al eliminar dos puntos de la esfera, ésta se puede transformar en una cinta y luego en una circunferencia
- $\pi_1(S^2 \backslash \{0,1\}) \cong \mathbb{Z}$

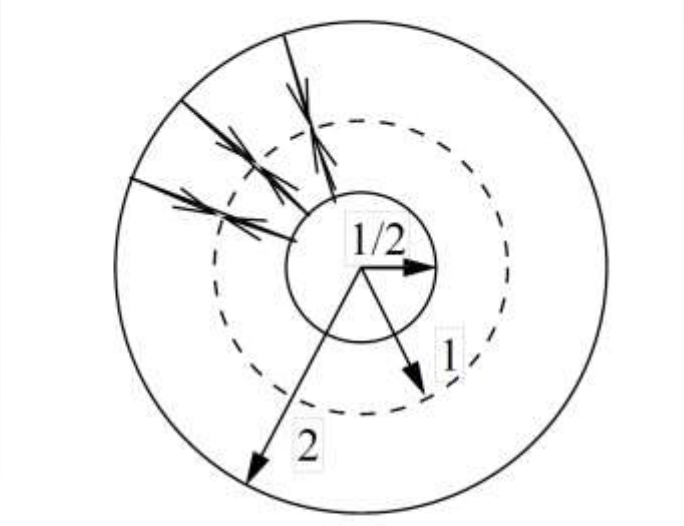
Calcula el grupo fundamental del producto $T^2 \times T^2$

- El grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\pi_1(T^2 \times T^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Retracto por deformación fuerte

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es un **retracto por deformación fuerte** de X, si existe una función continua $R: X \times [0,1] \to X$ tal que para todo $x \in X$, todo $a \in A$ y todo $s \in [0,1]$, se cumple

1) $R(x,0) = x$
2) $R(x,1) \in A$
3) $R(a,s) = a$



Si A es un retracto de X sus grupos fundamentales son isomorfos

- Pero los espacios NO tienen por qué ser homeomorfos.
- La circunferencia es un retracto del aro, pero no son homeomorfos. ¿Por qué?
- Eliminando 2 puntos cualesquiera de la circunferencia la desconectamos, el aro, no
- Por otro lado, la propiedad “conexidad por caminos” se preserva con las deformaciones fuertes

Ejemplos de retractos

- La circunferencia es el retracto de un aro. Por tanto, sus grupos fundamentales son isomorfos a enteros
- La circunferencia es el retracto de plano sin origen de coordenadas. Demuéstralo presentando este retracto
- $R(\vec{x}, s) = (1 - s)\vec{x} + s\frac{\vec{x}}{|x|}$
- Por tanto, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$

¿Hay un subespacio del interavlo [0,1] que no sea su retracto por deformación fuerte?

- Sí
- Los extremos, por ejemplo

Busca el grupo fundamental de la cinta de Möbius

- Considera que la cinta de Möbius es un cuadrado unitario con la equivalencia $(x,0) \sim (1-x,1)$
- Piensa en aplastar la cinta hasta convertirla en su circunferencia interior
- Considera la aplicación $F(x,y,t) = (1-t)(x,y) + t(0.5,y)$

Calcula el grupo fundamental del espacio menos un eje removido, es decir, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\})$

- Definimos $F: X \times [0,1] \to X$ por:
  - $F((x, y, z), t) = (x, y, z(1 - t))$
- Verificamos:
  - $F((x, y, z), 0) = (x, y, z)$ (identidad)
  - $F((x, y, z), 1) = (x, y, 0)$ (retracción al plano Oxy menos el origen)
- F es continua y mantiene puntos en X
- También podemos usar el teorema del producto: $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{x = y = 0\} \times \mathbb{R}$

Teorema de Seifert-van Kampen

- Si $X = U_1 \cup U_2$ y la intersección $U_1 \cap U_2$ es simplemente conexa, entonces $\pi_1(X) = \pi_1(U_1) * \pi_1\,(U_2)$
- Es decir, el grupo fundamental es producto libre de los grupos fundamentales

Grupo fundamental del OCHO

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$
- $\pi_1(X) = ?$
- $\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Teorema de Seifert-van Kampen (II)

- Si $X = U_1 \cup U_2$ y la intersección $U_1 \cap U_2$ NO es simplemente conexa, entonces $\pi_1(X) = \pi_1(U_1) * \pi_1\ (U_2)/Normalizador(\pi_1(U \cap V))$
- El grupo fundamental de la unión es producto libre amalgamado de los grupos fundamentales, es decir, consideramos equivalentes los lazos subidos de la intersección
- **Corolario**. Si los espacios U_i son simplemente conexos, su unión también lo es
- En concreto, considerando $U_1 = S^2 \backslash \{polo\ norte\}, U_2 = S^2 \backslash \{polo\ sur\}$, vemos que su grupo fundamental es el producto libre de un grupo trivial por otro factorizado por algo. Pero el producto de dos grupos triviales es trivial, y ya no se puede factorizar
- Por tanto, $\pi_1(S^2) = \{e\}$

Calcula los grupos fundamentales

- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\})$
- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0),(2,0)\})$

Calcula los grupos fundamentales

- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$ (por retracto)
- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0),(1,0)\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
- ¿Cómo demostrarlo?
- Vamos a crear dos subespacios del plano
  - $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < 0.6\}$
  - $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0.4\}$
- ¿Cuál es la intersección?
- $U_1 \cap U_2$ es una franja vertical SIN puntos eliminados. Por tanto, su grupo fundamental es trivial y podemos usar Seifert van Kampen:
- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0),(1,0)\}) = \pi_1(U_1 \cup U_2) = \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)/\{e\} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
- Análogamente (creando dos subespacios) vemos que
$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0),(1,0),(2,0)\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Calcula el grupo fundamental de la esfera con los polos norte y sur pegados

- Considera un camino α en la esfera S^2 que va desde el Polo Norte hasta el Polo Sur.
- Al realizar la identificación $N \sim S$, el camino α se convierte en un **lazo cerrado**
- Este lazo es el generador del grupo fundamental $\mathbb{Z}$

- Es como si al identificar los extremos de los meridianos pegáramos una circunferencia (un meridiano cerrado) a la esfera
- Es homotópicamente equivalente a la suma en cuña $S^2 \vee S^1$ porque la operación de colapsar un par de puntos en un espacio conectado es homotópicamente equivalente a **añadir un círculo** (S^1) al espacio original

¿Cuál es el grupo fundamental del plano proyectivo?

- Recuerda que el plano proyectivo es la esfera con los puntos opuestos pegados
- ¿Qué tipos de camino vuelven al punto de partida?
- ¿Cuál es la suma de los caminos del mismo tipo?
- ¡Bingo! ¡Es el $\mathbb{Z}_2$!