Topología 2024-25. Examen parcial

Profesor: Georgy Nuzhdin. Fecha: 08.11.2024

CENTRO UNIVERSITARIO
DE TECNOLOGÍA Y ARTE DIGITAL

Nombre: ____________________________

Apellidos: __________________________________

1. **DEFINICIONES** (0,9 puntos máximo. TACHA UNO).
   Aporta al menos **un ejemplo** para cada concepto.
   a. (0,3) Espacio topológico
   b. (0,3) Espacios T_2 (Hausdorff) y T_1(Frechet)
   c. (0,3) Conjunto denso
   d. (0,3) Espacio 1AN

2. **CONTRAEJEMPLOS**. (1,2 puntos máximo. TACHA UNO)
   a. (0,2) La intersección de un número finito o infinito de abiertos es abierto

   b. (0,3) En un espacio el mismo conjunto no puede ser a la vez abierto y cerrado a menos que sea el conjunto vacío o todo el universo

   c. (0,4) La topología heredada coincide con la topología interior

   d. (0,5) La distancia del supremo genera los mismos abiertos que la integral

3. **TEOREMAS** (1,6 puntos máximo. TACHA UNO)
   a. (0,4) Cada cerrado coincide con su clausura

   b. (0,6) Demuestra que dos definiciones del conjunto denso H dentro del universo X son equivalentes:
   $\overline{H} = X \Leftrightarrow H \cap A \neq \emptyset$ para cualquier abierto A

   c. (1) Una función es continua ($\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$) si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta

4. **EJERCICIOS** (6,3 puntos máximo. TACHA DOS**).**
   a. (0,4) ¿Qué superficies obtendremos a partir del cuadrado $[0;1] \times [0;1]$ aplicando las siguientes equivalencias (pegando bordes)?
      1. $(0,x) \sim (1,x); (x,0) \sim (x,1)$
      2. $(0,x) \sim (x,0); (x,1) \sim (1,x)$

   b. (0,5) Dentro del mapa de España en la escala 1: 3000000 han colocado otro mapa en la escala 1: 5000000. Demuestra que algún punto coincidirá en ambos mapas y será único.

c. (0,6) Para la función $y = xcosx$ definida en $[0,1]$ indica un intervalo propio (es decir, un intervalo menor) en el que
   a. Esta función sea contractiva
   b. Esta función no sea contractiva
   Justifica tu respuesta.

d. (0,6) ¿Son distancias?
   1. $d(x,y) = (x-y)(x^2+y^2)$ en $\mathbb{R}$
   2. $Sea\ x = 2^k a, y = 2^m b, a, b \in \mathbb{Z},\ d(x,y) = \frac{1}{2^{\min(k,m)}}$, el inverso de la máxima potencia común de 2 $en\ \mathbb{Z}$

e. (0,6) ¿Son topologías? Si no lo son, explica por qué. Si lo son, averigua si son Hausdorff o T_1
   1. $T_a = \{\emptyset,\ \mathbb{R}^2, S_a = \{(x,y): x^2+y^2 < a\}\}$
   2. $T_b = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$
   3. $T_c = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

f. (0,8) Considera la topología de semirrectas derechas. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones (a qué números convergen si es que convergen):
   1. la sucesión $s_n = -n^2$.
   2. la sucesión $t_n = n^2$.

g. (0,8) ¿Son homeomorfos en la topología canónica? Si es así, presenta un homeomorfismo
   1. $(-2;\ 1)$ y $(0;\infty)$
   2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ |x \geq 0, x^2+y^2 = 1\}$ y el intervalo $[-1,1]$ en $\mathbb{R}$

h. (0,8) ¿Son continuas? ¿Son abiertas?
   1. $f(x) = x^2$, Sorgenfrey → Canónica
   2. $f(x) = \frac{1-x}{2}$, Canónica → Semirrectas Derechas

i. (0,9) Busca Clausura, Interior y Frontera de
   1. $A = \left[0; \frac{1}{2}\right] \times [0,1) \subset [0;1] \times [0;1]$ con la topología del orden
   2. $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup\ [3;4) \cup \{6 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ en Sorgenfrey
   3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ con la canónica en $\mathbb{R}^2$

j. (1,2) Dibuja los abiertos en las siguientes topologías. Marca todas las parejas de topologías equivalentes y explica por qué otras no lo son. Indica cuál es más fina y cuál es menos fina.

   1. Topología producto Discreta en $\mathbb{R}$ × Discreta en $\mathbb{R}$
   2. Topología del orden en $\mathbb{R}^2$
   3. Topología canónica en $\mathbb{R}^2$
   4. Topología producto canónica en $\mathbb{R}$ × canónica en $\mathbb{R}$

5. (0,5) SUBIDA DE NOTA. Demuestra que la topología cofinita no es metrizable