Álgebra Lineal
Examen Final 2025
Resolución

Problema 1

Consideramos el endomorfismo $f : P_2(x) \to P_2(x)$, y usamos el isomorfismo:

$$P_2(x) \cong \mathbb{R}^3, \quad a + bx + cx^2 \mapsto (a, b, c)$$

Datos del problema

-
$$\ker f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\} = L\langle(1, 1, 1)\rangle \Rightarrow \dim(\ker f) = 1$$

- $\forall(0, b, c) \in \mathbb{R}^3$, se tiene:
$$f(0, b, c) = (0, b, c)$$
  Es decir:
$$W = \{(0, b, c)\} = L\langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle \Rightarrow W \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

a) Matriz del endomorfismo en la base canónica

Sea la base canónica $\mathcal{B}_C = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Ya sabemos que:

$$f(e_2) = (0, 1, 0), \quad f(e_3) = (0, 0, 1)$$

Para $f(e_1)$, sabemos que:

$$f(e_1) \in \mathrm{Im}(f) = L\langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle \Rightarrow f(1, 0, 0) = (0, \alpha, \beta)$$

Ahora usamos linealidad:

$$f(1, 1, 1) = f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0) + f(0, 0, 1) = (0, \alpha, \beta) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (0, \alpha + 1, \beta + 1)$$

Pero como $(1, 1, 1) \in \ker f$, entonces:

$$f(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha + 1 = 0,\ \beta + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = -1$$

Por lo tanto:

$$f(1,0,0) = (0,-1,-1)$$

Finalmente, la matriz del endomorfismo en la base canónica es:

$$M_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Imagen de f y su dimensión

Sabemos que:

$$\ker f = L\langle (1,1,1) \rangle \Rightarrow \dim(\ker f) = 1$$

Por el teorema del rango:

$$\dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 1 = 2$$

Además, como $f(0,1,0) = (0,1,0)$, $f(0,0,1) = (0,0,1)$, entonces:

$$\operatorname{Im} f = L\langle (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle$$

c) Determinar $f(S)$

Sea el conjunto:

$$S = \{(\lambda - 2\mu + \delta,\ \lambda - 2\mu - \delta,\ \lambda - 2\mu) \mid \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Aplicamos $f(a,b,c) = (0,\ -a+b,\ -a+c)$, donde:

$$a = \lambda - 2\mu + \delta, \quad b = \lambda - 2\mu - \delta, \quad c = \lambda - 2\mu$$

Calculamos los componentes:

$$-a + b = -(\lambda - 2\mu + \delta) + (\lambda - 2\mu - \delta) = -2\delta$$
$$-a + c = -(\lambda - 2\mu + \delta) + (\lambda - 2\mu) = -\delta$$

Entonces:

$$f(a,b,c) = (0, -2\delta, -\delta) = -\delta \cdot (0,2,1)$$

Por lo tanto:

$$f(S) = L\langle (0,2,1) \rangle, \qquad \dim(f(S)) = 1$$

d) Matriz en la base $\mathcal{B}^* = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$

Denotamos:

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (1,0,0)$$

Aplicamos la transformación a cada vector:

$$f(v_1) = f(1,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(v_2) = f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) = (0,-1,-1) + (0,1,0) = (0,0,-1)$$

Buscamos α, β, γ tales que:

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,-1)$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(v_3) = f(1,0,0) = (0,-1,-1)$$

Buscamos α, β, γ tales que:

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,-1,-1)$$

Resolviendo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow [f(v_3)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz del endomorfismo en la base $\mathcal{B}^*$ es:

$$M_{\mathcal{B}^*}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método matricial

Usamos la fórmula de cambio de base:

$$M_{\mathcal{B}^*}(f) = M_{\mathcal{B}_C \to \mathcal{B}^*} \cdot M_{\mathcal{B}_C}(f) \cdot M_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}_C}$$

Las matrices de cambio de base son:

$$M_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}_C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}_C \to \mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz del endomorfismo f en la base canónica es:

$$M_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$M_{\mathcal{B}^*}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este resultado coincide con el obtenido por coordenadas, como debe ocurrir.

Problema 2

Dado un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

El proceso de diagonalización consiste en encontrar una base B de autovectores tal que la matriz asociada al endomorfismo en dicha base sea diagonal

$$P^{-1}AP = D$$

Paso 1: Cálculo del polinomio característico

Calculamos:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

El desarrollo del determinante da:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(9-\lambda)$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{(multiplicidad algebraica 2)}, \quad \lambda_2 = 9 \quad \text{(multiplicidad algebraica 1)}$$

Paso 2: Cálculo de los subespacios propios

Para $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } 1 \Rightarrow \dim(\ker(A-2I)) = 2$$

Base del subespacio propio E_2**:**
Al resolver $(A-2I)\vec{v} = 0$, obtenemos una base:

$$E_2 = L\langle (1,2,0),\ (0,6,1) \rangle$$

Para $\lambda = 9$:

$$A - 9I = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } 2 \Rightarrow \dim(\ker(A-9I)) = 1$$

Base de E_9**:**
Resolviendo $(A-9I)\vec{v} = 0$ se obtiene:

$$E_9 = L\langle (1,1,1) \rangle$$

Paso 3: Matrices P **y** D

Tomamos como base los vectores propios:

$$v_1 = (1,2,0), \quad v_2 = (0,6,1), \quad v_3 = (1,1,1)$$

Entonces:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Y se cumple:

$$P^{-1}AP = D$$

Cuestión 1

Calcular la dimensión y una base del subespacio:

$$U = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}(MX) = 0\}, \quad \text{con } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Sea

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Entonces:

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(MX) = (a-c) + (-b+d) = a - b - c + d$$

$$\mathrm{tr}(MX) = 0 \to a - b - c + d = 0$$

La dimensión del subespacio U es:

$$\dim(U) = 3$$

y una base está dada por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cuestión 2

Dadas las aplicaciones lineales:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$$f(1,0) = (2,1,2), \quad f(0,1) = (3,2,1)$$

- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$g(1,0,0) = (3,-1), \quad g(0,1,0) = (1,0), \quad g(0,0,1) = (1,-2)$$

Definimos la aplicación $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y queremos calcular $h(4,-2)$ por dos métodos: por coordenadas y matricialmente.

Por coordenadas

Primero calculamos $f(4,-2)$ como combinación lineal:

$$f(4,-2) = 4 \cdot f(1,0) + (-2) \cdot f(0,1) = 4(2,1,2) - 2(3,2,1) = (8,4,8) - (6,4,2) = (2,0,6)$$

Luego aplicamos g:

$$g(2,0,6) = 2 \cdot g(1,0,0) + 6 \cdot g(0,0,1) = 2(3,-1) + 6(1,-2) = (6,-2) + (6,-12) = (12,-14)$$

$$\boxed{h(4,-2) = (12,-14)}$$

Matricialmente

La matriz de f (por columnas $f(1,0), f(0,1)$) es:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de g (por filas g aplicado a las canónicas de $\mathbb{R}^3$) es:

$$M_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de la composición es:

$$M_h = M_g M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$h(4,-2) = M_h \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{h(4,-2) = (12,-14)}$$

Cuestión 3

Dado:

$$U = L\langle (1,0,0,1),\ (1,1,1,1),\ (0,2,2,0) \rangle, \quad W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x + y - z - 3t = 0 \\ y - t = 0 \end{array} \right\}$$

Paso 1: Dimensiones

Notamos que:

$$(1,1,1,1) = (1,0,0,1) + \frac{1}{2}(0,2,2,0) \Rightarrow \text{Los vectores de } U \text{ son linealmente dependientes}$$

Una base de U es:

$$\{(1,0,0,1),\ (0,2,2,0)\} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

Resolvemos el sistema de W:

$$y = t, \quad 3x + y - z - 3t = 0 \Rightarrow z = 3x - 2t$$

$$\Rightarrow W = \{x(1,0,3,0) + t(0,1,-2,1)\} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

Paso 2: Verificación de suma directa

Juntamos las bases:

$$\{(1,0,0,1),\ (0,2,2,0),\ (1,0,3,0),\ (0,1,-2,1)\}$$

Formamos la matriz con estos vectores como filas y verificamos que el rango es 4. Por tanto:

$$\dim(U+W) = 4 = \dim(U) + \dim(W) \Rightarrow U \cap W = \{0\}$$

Conclusión

$$\boxed{U + W \text{ es una suma directa}}$$

Cuestión 4

1. Una matriz A tiene autovalor 0 si y solo si $\det(A) = 0$
Razonamiento:
Si A tiene autovalor 0, entonces existe un vector no nulo v tal que $Av = 0$, lo cual implica que el sistema homogéneo tiene solución no trivial y por tanto $\det(A) = 0$.
Si $\det(A) = 0$, entonces el sistema $Av = 0$ tiene infinitas soluciones $\to$ 0 es autovalor.

$$\boxed{\text{Verdadero}}$$

2. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son semejantes.
Razonamiento:
Dos matrices son semejantes si;
- Tienen el mismo rango
- Tienen el mismo determinante
- Tienen la misma traza

Calculamos las trazas:

$$tr(A) = 1 + 3 + 1 = 5 \quad tr(B) = 5 + 3 - 1 = 7 \quad 5 \neq 7$$

$$\boxed{\text{Falso}}$$