

Nombre: \_\_\_\_\_

Apellidos: \_\_\_\_\_

**CONSTRUYE UN EJEMPLO JUSTIFICADO (TACHA UNO. 1,5 puntos)**

- Un conexo localmente que no es conexo
- Un conexo que no es localmente conexo
- Un conjunto conexo que no es conexo por caminos
- Un espacio acotado y cerrado que no es compacto
- Dos espacios con la misma característica de Euler que no son homeomorfos
- Dos espacios con el mismo grupo fundamental **no trivial** que no son homeomorfos

**DEFINICIONES (0,6 puntos)**

- Conjunto compacto
- Conjunto conexo
- Conjunto conexo por caminos

**TEOREMAS (TACHA DOS. 2 puntos)**

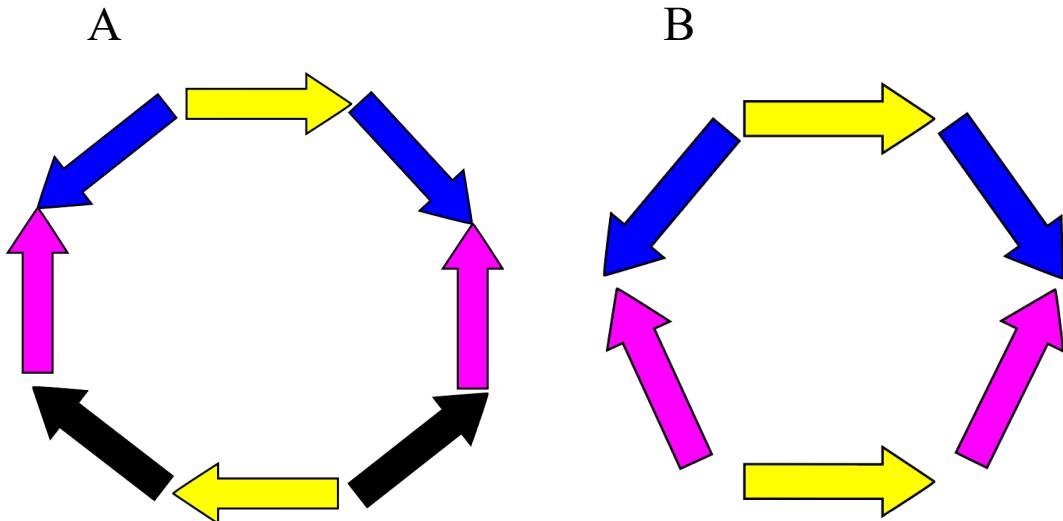
- (0,5) El grupo fundamental de la esfera es trivial
- (0,6) La recta Sorgenfrey no es conexa por caminos ni compacta
- (1) El intervalo  $[0; 1]$  es compacto
- (1) En los espacios Hausdorff los compactos son separables de cualquier punto exterior

**EJERCICIOS (TACHA DOS. 6 puntos)**

1. (1,2 puntos) **¿Son conexos? ¿Son conexos por caminos?  
¡Demuéstralos!**
  - a)  $[0; 2] \times \{0\}$  con la topología del orden en  $\mathbb{R}^2$
  - b)  $\{0\} \times [0; 2]$  con la topología del orden en  $\mathbb{R}^2$
  - c) El conjunto  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ln x\}$
  - d) El conjunto  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,  $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x/n\}$  y el conjunto  $A \cup (1, 0)$
2. (1,2 puntos) **¿Son compactos?**
  - a)  $A = [0; 2] \cup [3; 4]$
  - b)  $B = [0; 2] \cup (2; 4]$
  - c)  $C = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$
  - d)  $\mathbb{R}$  con la topología cofinita

3. (0,6 puntos) La suma conexa de 3 botellas de Klein es homeomorfa a la suma de 2 toros y varios planos proyectivos. **¿Cuántos?**
4. (0,9 puntos) **Dibuja un disco poligonal** con los lados pegados de dos a dos con la característica de Euler igual a menos 2 y orientable.  
**¿Qué superficie es** en términos de la suma conexa de toros y planos proyectivos?
5. (1,5 puntos) **¿Qué espacios son homeomorfos y cuáles no? Razona la respuesta**
- A =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
  - B =  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16\} \setminus (4, 0, 0)$
  - C =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 3\}$
  - D =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$
  - E =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 9\}$
  - F =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
  - G =  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 9\} \setminus \{(1, 1)\}$

6. (0,9 puntos) **¿Qué superficies representan estos diagramas?**



7. (1,2 puntos) **¿Cuál es el grupo fundamental de estos espacios? Justifícalo**
- a)  $T^2 \times S^1$
  - b)  $\mathbb{R}^4$
  - c)  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3, |y| \leq 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 9\}$
  - d)  $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 9\}$