Topología - Definiciones

Curso 2025-2026

Lucía Manso

1 Distancias

1.1 Distancia / Métrica

Definición: Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una **distancia** (o **métrica**) en X si se cumplen las propiedades:
1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ (Propiedad simétrica)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Propiedad reflexiva)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Propiedad triangular ó Minkowski)

En estas condiciones, se dice que el par (X, d) es un **espacio métrico**.

2 Continuidad y Convergencia

2.1 Función continua

Definición: Si $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ son espacios métricos, la función $f : X_1 \to X_2$ se llama **continua** en $x \in X_1$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f\Big(B_{\delta(x)}\Big) \subset B_{\varepsilon(f(x))}$$

La función $f : X_1 \to X_2$ se llama **continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

3 Espacios topológicos

3.1 Topología

Definición: Dado un conjunto X, se dice que una colección de subconjuntos T es una **topología** si se cumplen las siguientes propiedades:
1. $\emptyset, X \in T$
2. La intersección de un número **finito** de elementos de T también pertenece a T:

$$\bigcap_{n=1}^{k} T_n \in T$$

3. La unión de cualquier número (puede que **infinito**) de elementos de T también le pertenece:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \in T$$

3.2 Conceptos básicos

Espacio topológico La pareja (X, T) se llama **espacio topológico**.

Conjunto abierto Los elementos de T se llaman **abiertos**.

Conjunto cerrado El conjunto $F \subset X$ se llama **cerrado** si su complemento es abierto ($X \setminus F \in T$).

3.3 Base de una topología

Definición Una colección de subconjuntos B_i de X se llama **base** si:

$\forall x \in X, \exists B_i \in B : x \in B_i$

Cada punto de X está en algún elemento de la base.

$\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in B : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \land x \in B_3$

Si un punto está en la intersección de dos elementos, hay un elemento de la base en la intersección que contiene este punto.

3.4 Topologías inducidas

Topología heredada Si tenemos un espacio topológico (X, T) en cualquier subconjunto $A \subset X$ podemos definir $T_U = \{A_i = T_i \cap A, T_i \in T\}$.

Topología inducida por la distancia Cualquier función de distancia permite definir bolas abiertas. Si cogemos estas bolas abiertas como base, la topología resultante se llama **topología inducida por una distancia**.

4 Construcción de topologías

4.1 Topología del orden

Definición: Dado un conjunto ordenado X, la **topología del orden** es la generada por la base de intervalos (a, b), añadiendo $[\min(X), b)$ y $(a, \max(X)]$ si existen.

4.2 Topología producto

Definición: La base de la topología producto $X \times Y$ se construye tomando todos los productos cartesianos de conjuntos abiertos de los espacios originales.

5 Propiedades de conjuntos

5.1 Interior, Clausura y Frontera

Interior El **interior** de un conjunto A, denotado $\mathrm{Int}(A)$, es el mayor conjunto abierto contenido en A. Es la unión de todos los abiertos contenidos en A.

Clausura La **clausura** de A, denotado $|(A)$, es la unión del conjunto con su frontera $(A \cup \mathrm{Fr}(A))$. Es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

Frontera Un punto es **fronterizo** si cada entorno suyo contiene puntos de A y puntos del complemento de A. El conjunto de estos puntos es la **frontera**, $\mathrm{Fr}(A)$.

Puntos de acumulación Denotado A', son aquellos puntos x tal que todo entorno de x contiene al menos un punto de A distinto de x.

5.2 Puntos y Densidad

Conjunto denso Un subconjunto $H \subset X$ se llama **denso** en X si su clausura es todo el espacio $(|(H) = X)$. Esto significa que H «se acerca» a cualquier punto de X.

Conjunto no denso en ninguna parte Un subconjunto no es denso en ninguna parte si el interior de su clausura es vacío.

Un conjunto no denso en ninguna parte sólo es frontera

5.3 Propiedades de Separación (Axiomas T)

Propiedad de Hausdorff (T2) Un espacio es **Hausdorff** si para cada par de puntos distintos x_1, x_2, existen entornos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Propiedad de Fréchet (T1) Un espacio es $\boldsymbol{T_1}$ si para cada par de puntos distintos x_1, x_2, existe un entorno de x_1 que no contiene a x_2 y viceversa.