Topología 2023/24. Examen global

Profesor: Georgy Nuzhdin. Fecha: 26.01.2024

Nombre: ____________________________

Apellidos: __________________________________

CONSTRUYE UN EJEMPLO JUSTIFICADO (TACHA DOS. 1,5 puntos)

- Un conjunto no vacío que no coincide con el espacio entero y es a la vez abierto y cerrado
- Un conexo localmente que no es conexo
- Un conexo que no es localmente conexo
- Un conjunto conexo que no es conexo por caminos
- Un espacio acotado y cerrado que no es compacto
- Dos espacios con la misma característica de Euler que no son homeomorfos
- Dos espacios con el mismo grupo fundamental **no trivial** que no son homeomorfos

DEFINICIONES (0,6 puntos)

- Conjunto compacto
- Conjunto conexo
- Conjunto conexo por caminos

TEOREMAS (TACHA DOS. 2 puntos)

- (0,5) El grupo fundamental de la esfera es trivial
- (0,6) La recta Sorgenfrey no es conexa por caminos ni compacta
- (1) El intervalo $[0; 1]$ es compacto
- (1) En los espacios Hausdorff los compactos son separables de cualquier punto exterior

EJERCICIOS (TACHA TRES. 6 puntos)

1. (0,6) ¿Son distancias?
    a. $d(x, y) = |x^4 - y^4|$
    b. $d(x, y) = \sin|x - y|\ en\ (-\pi, \pi)$

2. (0,6) Considera el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ y tres conjuntos,
   $\tau_1 = \{\emptyset, A_n\}, A_n = \{1,2,3, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$
   $\tau_2 = \{\emptyset, A_n\}, A_n = \{nk, k \in \mathbb{N}\}, n \in \mathbb{N}$
   $\tau_3 = \{\emptyset, S\}, S \subset \mathbb{N}, |S| = \infty$ (conjunto de los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$)
    a. Determina si alguno de los τ_i forma una **topología** en $\mathbb{N}$
    b. Determina si alguno de los τ_i forma una **base de topología** en $\mathbb{N}$
    c. Averigua si alguna de las topologías generadas es **Hausdorff**

3. (0,6) **Busca el Interior, la Frontera y la Clausura del conjunto**
   $X = [0; 3) \cup \{4 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{5 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
    a. En la topología canónica
    b. En Sorgenfrey
    c. En la topología de Semirrectas Derechas

4. (0,6) **Averigua si la función identidad $f(x) = x$ es continua**
    a. $\mathbb{R}\ canónica \to \mathbb{R}\ cofinita$
    b. $\mathbb{R}\ cofinita \to \mathbb{R}\ canónica$
    c. $\mathbb{R}\ canónica \to \mathbb{R}\ Sorgenfrey$
    d. $\mathbb{R}\ Sorgenfrey \to \mathbb{R}\ canónica$

5. (0,9) **Determina si las siguientes funciones en la topología canónica son abiertas y/o continuas. ¿Alguna de ellas representa un homeomorfismo?**
    a. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 3/x$
    b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3$
    c. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(x) = x^2$

6. (0,8) **¿Son conexos? ¿Son conexos por caminos? ¡Demuéstralo!**

a) $[0; 2] \times \{0\}$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$
b) $\{0\} \times [0; 2]$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$
c) El conjunto $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = lnx\}$
d) El conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, y = x/n\}$ y el conjunto $A \cup (1,0)$

7. (0,8) **¿Son compactos?**

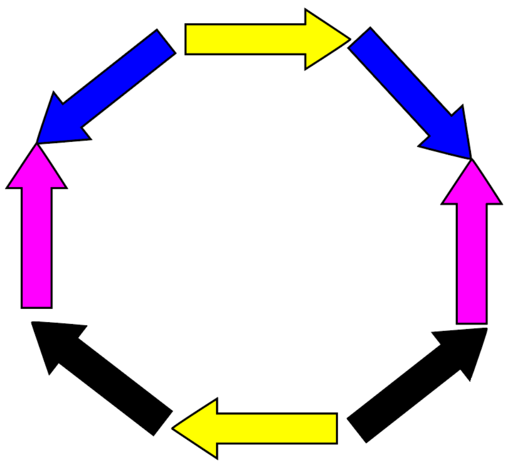
a) $A = [0; 2] \cup [3; 4]$
b) $B = [0; 2) \cup (2; 4]$
c) $C = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} \cup \{0\}$
d) $\mathbb{R}$ con la topología cofinita

8. (0,5 puntos) **Dibuja un disco poligonal** con los lados pegados de dos a dos con la característica de Euler igual a menos 2 y orientable.
   ¿Qué superficie es en términos de la suma conexa de toros y planos proyectivos?

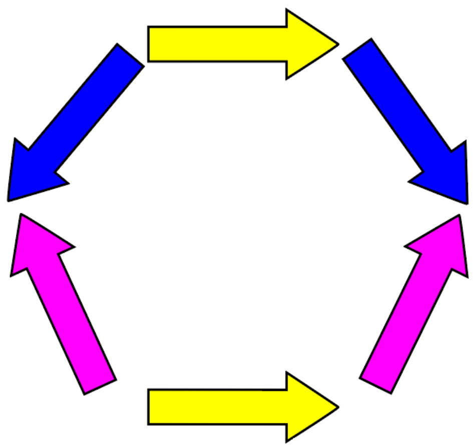
9. (1) **¿Qué espacios son homeomorfos y cuáles no? Razona la respuesta**
   - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ xy = 0\}$
   - $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16\} \backslash (4,0,0)$
   - $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 3\}$
   - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
   - $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$
   - $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
   - $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\} \backslash \{(1,1)\}$

10. (0,5) **¿Qué superficies representan estos diagramas?**

A



B



11. (0,8) **¿Cuál es el grupo fundamental de estos espacios? Justifícalo**

a) $\mathbb{T}^2 \times S^1$

b) $\mathbb{R}^4$

c) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 3, |y| \leq 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 9\}$

d) $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 9\}$