Parcial 1: Topología

Laia Delgado

24 de noviembre de 2023

1 Definiciones

Base

Una colección de subconjuntos B_i de X se llama base si:

1. *Cada punto de X está en algún elemento de la base*:

$$\forall x \in X, \exists B_i \in B : x \in B_i$$

2. *Si un punto está en la intersección de dos elementos, hay un elemento de la base en la intersección que contiene este punto*:

$$\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in B : B_3 \subset B_1 \cap B_2 \quad \text{y} \quad x \in B_3$$

Función continua

Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos, la función $f : X_1 \to X_2$ se llama continua en $x \in X_1$ si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

Una función es continua si y solo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta.

Espacio 1AN

Un espacio satisface el primer axioma de numerabilidad si cualquier punto $x \in X$ tiene una colección numerable de entornos $\{A_i(x)\}$ tales que cualquier entorno abierto $B(x)$ contiene alguno de ellos.

Espacio 2AN

Un espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad si tiene al menos una base numerable.

Homeomorfismo

Una biyección $f(x) : X \to Y$ se llama homeomorfismo si son continuas tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$.

2 Ejercicios

¿En qué topología la sucesión $a_n = n$ converge al menos a 2 valores distintos? Describe la topología y razona tu respuesta.

Sabemos que una sucesión converge a l si $\varepsilon(l), n > N : a_n \in \varepsilon(l)$.

Consideremos la topología de semirrectas derechas cuyos intervalos tienen la forma $(a; +\infty)$, a$\in \mathbb{R}$.

Ahora, supongamos que $l = 17$, entonces:

$(15; +\infty)$

$(16; +\infty)$

Elijamos el entorno que elijamos, los entornos de la sucesión estarán dentro del mismo entorno.

¿Qué superficies obtendremos a partir del cuadrado $[0;1] \times [0;1]$ aplicando las siguientes equivalencias?

a) $(0;x) \sim (1;1-x); (x;0) \sim (x;1)$

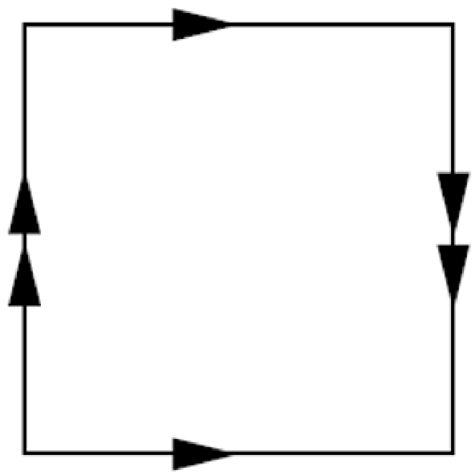

Figura 1: Resultado de la equivalencia a)

$(0;x) \sim (1;1-x)$: Cojo el borde de la izquierda y lo pego con el borde de la derecha en sentido contrario.

$(x;0) \sim (x;1)$: Cojo el borde de abajo y lo pego con el borde de arriba en el mismo sentido.

Obtengo una botella de Klein.

b) $(0;x) \sim (1;1-x); (x;0) \sim (1-x;x)$

$(0;x) \sim (1;1-x)$: Cojo el borde de la izquierda y lo pego con el borde de la derecha en sentido contrario.

$(x;0) \sim (1-x;x)$: Cojo el borde de abajo y lo pego al borde de arriba en sentido contrario.

Obtengo un plano proyectivo.

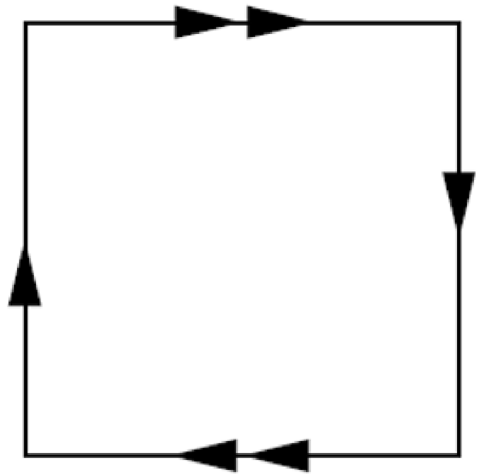

Figura 2: Resultado de la equivalencia b)

¿Son distancia?

a) $d(x,y) = |x^3 - y^3|$

Para que sea una distancia, deben cumplirse tres propiedades:

1. $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$:

   $d(x,y) = |x^3 - y^3|$. Si $x = y$, entonces $d(x,x) = |x^3 - x^3| = 0$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$:

   $d(x,y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = d(y,x)$.

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Desigualdad triangular):

   $|x^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|$.

   Utilizando la desigualdad triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$, obtenemos:

   $|x^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3| \rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Cumple con todas las propiedades, por lo tanto, sí es una distancia.

b) $d(v_1, v_2) = n -$ **la cantidad de coordenadas que coinciden en** $\mathbb{R}^n$

Para que sea una distancia, deben cumplirse tres propiedades:

1. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$:

   En este caso, $d(v_1, v_2) = n-$la cantidad de coordenadas que coinciden en $\mathbb{R}^n$. Si $v_1 = v_2$, entonces todas las coordenadas coinciden, y $d(v_1, v_2) = n - n = 0$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$:

   $d(v_1, v_2) = n -$ la cantidad de coordenadas que coinciden en $\mathbb{R}^n = d(v_2, v_1)$.

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular):

   $(n-\text{coincidencias}(x, y) \leq (n-\text{coincidencias}(x, z)+(n-\text{coincidencias}(z, y)) \rightarrow (n-\text{coincidencias}(x, y) \leq 2n - (\text{coincidencias}(x, z) + \text{coincidencias}(z, y)))$

   - Si $x = z$ o $y = 0$, la desigualdad se cumple.
   - Dado que $\text{coincidencias}(x, z) + \text{coincidencias}(z, y) \leq n$, como mínimo, esa parte de la desigualdad será n para $x \neq z$ y $y \neq z$ tal que $n \geq n - \text{coincidencias}(x, y)$.

Cumple con todas las propiedades, por lo tanto, sí es una distancia.

¿Qué funciones son continuas? ¿Cuáles son abiertas? Ambas respuestas en la topología de Sorgenfrey

a) $f(x) = x^2$

- Continua: Una función es continua si y solo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta. Veamos si $f(x) = x^2$ cumple esto en la topología de Sorgenfrey.

$$f^{-1}([a, b)) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, \sqrt{b})$$

Este conjunto no es abierto en la topología de Sorgenfrey, ya que la unión de dos intervalos no adyacentes no forma un intervalo en la topología de Sorgenfrey.

- Abierta: Una función es abierta si y solo si la imagen de un conjunto abierto es abierta. Sin embargo, para $f(x) = x^2$, la imagen de un conjunto abierto no es necesariamente abierta en la topología de Sorgenfrey.

$$f([a; b)) = (b^2, a^2] \quad \text{si } a, b < 0 \rightarrow \text{no abierto}$$

Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no es continua ni abierta en la topología de Sorgenfrey.

b) $f(x) = -x^3$

- Continua: Al igual que en el caso anterior, la preimagen de un conjunto abierto no es abierta en la topología de Sorgenfrey.

$$f^{-1}([a, b)) = (\sqrt[3]{-b}, \sqrt[3]{-a}] \quad \text{si } a, b > 0$$

Este conjunto no es abierto en la topología de Sorgenfrey.

- Abierta: Similar al caso anterior, la imagen de un conjunto abierto no es necesariamente abierta en la topología de Sorgenfrey.

$$f([a; b)) = (-b^3, -a^3] \quad \text{si } a, b > 0 \rightarrow \text{no abierto}$$

Por tanto, $f(x) = -x^3$ tampoco es continua ni abierta en la topología de Sorgenfrey.

Busca Clausura, Interior y Frontera

a) $\{(a; 0), a \in (0,4; 0,6)\}[0; 1]x[0; 1]$ **con la topología del orden**

1. $Int(A) = \emptyset$
2. $Cl(A) = \{(a; 0), a \in (0,4; 0,6)\} \cup \{(0,4; 0)\} \cup \{(0,6; 1)\}$
3. $Fr(A) = Cl(A)$

b) $\{\frac{1}{n} \in \mathbb{N}\} \cup [2; 4) \cup \{6 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

1. $Int(A) = [2; 4)$
   - El intervalo de la forma $[a; b)$ es abierto.
   - El resto son puntos sueltos por lo que no pertenecen al interior.
2. $Fr(A) = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{N}\} \cup \{6 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
   - El 2 pertenece al interior por lo que no es frontera.

- El 4 tampoco pertenece a la frontera porque el intervalo $[4;5)$ tiene intersección con el conjunto.
- El 0 sí que es frontera porque el intervalo $[0;1)$ tiene intersección con el conjunto.
- El 6 no es frontera porque el intervalo $[6;7)$ no tiene intersección con el conjunto.

3. $Cl(A) = [2;4) \cup \{\frac{1}{n} \in \mathbb{N}\} \cup \{6 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

- No hay entorno de $\mathbb{R}^2$ que sólo contenga puntos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

1. $Fr(A) = \mathbb{R}^2$
   - Todos los entornos de $\mathbb{R}^2$ tienen puntos dentro y fuera de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
2. $Cl(A) = \mathbb{R}^2$

¿Son topologías? Si no lo son, explica por qué y considera la topología inducida por esta base. ¿Son Hausdorff, son T_1?

a) $T_q = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-a;a), a > 0\}$

T_q es una topología ya que cumple con las tres propiedades necesarias:

1. El conjunto vacío y $\mathbb{R}$ pertenecen a T_q.
2. La intersección finita de elementos de T_q pertenece a T_q.

   Sean dos intervalos $(-a;a)$ y $(-b;b)$, la intersección será $(\text{mín}(-a,-b); \text{mín}(a,b))$. El intervalo resultante es de la forma $(-a;a)$, por lo que pertenece a la topología definida.
3. La unión arbitraria de elementos de T_q pertenece a T_q.

   Sean dos intervalos $(-a;a)$ y $(-b;b)$, la unión será $(\text{máx}(-a,-b); \text{máx}(a,b))$. El intervalo resultante es de la forma $(-a;a)$, por lo que pertenece a la topología definida.

No es Hausdorff ni T_1 porque no existen conjuntos disjuntos en esta topología, ya que cada intervalo está contenido en otro más grande. Es una topologia Matrioska.

b) $T_a = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

T_a es una topología ya que cumple con las tres propiedades necesarias:

1. El conjunto vacío y $\mathbb{R}$ pertenecen a T_q.
2. La intersección finita de elementos de T_q pertenece a T_q.
   $X = \{a,b,c\}$
   $\{a\} \cup \{b,c\} = X \in T_a$
   $\{a\} \cup X = X \in T_a$
   $\{b,c\} \cup X = X \in T_a$
3. La unión arbitraria de elementos de T_q pertenece a T_q.
   $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset \in T_a$
   $\{a\} \cap X = \{a\} \in T_a$
   $\{b,c\} \cap X = \{b,c\} \in T_a$

No es Hausdorff ni T_1 porque no existen conjuntos disjuntos en esta topología.

c) $T_b = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

A simple vista podemos ver que $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ no pertenece a la topología definida, por lo que no puede ser una topología.

Aunque no sea topología, puede ser una base que genere una topología. Para verificar si es una base, deben incluirse todas sus intersecciones:

$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in T_a$

$\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset \in T_a$

$\{b\} \cap \{c\} = \emptyset \in T_a$

$\{a\} \cap X = \{a\} \in T_a$

$\{b\} \cap X = \{b\} \in T_a$

$\{c\} \cap X = \{c\} \in T_a$

$\{b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \in T_a$

$\{c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \in T_a$

Es una base ya que todas las intersecciones están incluidas.

La topología inducida por esta base es Hausdorff, ya que existen conjuntos disjuntos $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, y al ser Hausdorff, también será T_1.

3 Contraejemplos

La unión de un número finito o infinito de conjuntos de cerrados es cerrado

Consideremos $C_n = [1 + \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}]$, cerrados de la forma $[a, b]$.

Su unión infinita $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = (1, 2)$, ¿y por qué esto es así?

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Los extremos tienden a 1 y 2 respectivamente, pero ningún conjunto C_n los va a llegar a contener, entonces como resultado se obtiene un intervalo abierto. De esta forma, probamos que no siempre la unión de un número finito o infinito de conjuntos cerrados tiene que ser cerrado, hemos encontrado una unión que da como resultado un abierto.

En un espacio el mismo conjunto no puede ser a la vez abierto y cerrado

Consideremos el intervalo de la forma $[a, b)$ en Sorgenfrey.

Sabemos que este intervalo es abierto por la propia definición de la base de esta topología: $B = \{[a; b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Y, ¿será cerrado?

El complementario de $[a, b)$ es $(-\infty; a) \cup [b; +\infty)$. Vamos a ver como es el complementario:

$(-\infty; a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n; a) \rightarrow$ como $[a-n; a)$ es abierto, $(-\infty; a)$ también lo es

$[b; +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [b-n; b) \rightarrow$ como $[b-n; b)$ es abierto, $(-\infty; b)$ también lo es

Dado que la unión de abiertos es abierta, el complementario que está formado por la unión de dos abiertos también será abierto.

Como el complementario de un abierto es cerrado, podemos afirmar que el intervalo $[a; b)$ es cerrado.

Podemos concluir por tanto que el intervalo $[a; b)$ en Sorgenfrey es abierto y cerrado.

La función identidad no siempre es continua, da igual la topología del espacio de salida y de llegada

Sabemos que una función es continua si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta. Además, una topología es más fina que otra si tiene más abiertos.

Entonces podemos intuir que si el espacio de llegada es más fino que el de salida, la función identidad no será continua.

Imaginemos una topología T y T', donde T' es más fina que T. Esto significa que en T' encontraremos más abiertos que en T.

Ahora pongamos una función identidad tal que $f : T \rightarrow T'$, en este caso sucedería lo siguiente:

T	T'
A	A
?	A
A	A

Al haber más abiertos en T' que es el espacio de llegada, no podemos asegurar que cogiendo un abierto de T' también lo sea en T que es su espacio de salida, es decir, no podemos asegurar que la preimagen de un abierto sea abierta.

En caso contrario tendríamos una función identidad tal que $f : T' \rightarrow T$ y sí podríamos asegurar que la preimagen de un abierto será abierta, ya que ahora tenemos menos abiertos en la topología de llegada.

T'	T
A	A
A	?
A	A

Con esto podemos afirmar que la función identidad siempre será continua en caso de que la topología de llegada sea igual o más fina que la de salida.

Ahora veamos este mismo ejemplo, pero para un caso concreto, pongamos la topología canónica y Sorgenfrey. ¿Cuál de ellas es más fina?

	$Cannica$	$Sorgenfrey$
(0, 1)	A	A
(0, $+\infty$)	A	A
[0, 1)	NA	A
[0, $+\infty$)	NA	A

Como Sorgenfrey tiene más conjuntos abiertos que la canónica, podemos decir que Sorgenfrey es más fina.

id: Canónica $\Rightarrow$ Sorgenfrey	Función NO continua
id: Sorgenfrey $\Rightarrow$ Canónica	Función SI continua

Por lo tanto, la función identidad no siempre es continua, dado que dependerá de la topología del espacio de salida y de llegada.

Un conjunto no numerable no puede ser no denso en ninguna parte

Estudiemos el conjunto de Cantor.

¿Es no numerable?

Los elementos del conjunto de Cantor se pueden expresar como fracciones binarias donde 0 es a la izquierda y 1 es a la derecha.

Si el conjunto es completo, tiene que tener todos los elementos posibles.

0.01001

0,01100

0,00100

Si tomamos la diagonal indicada con números rojos, tenemos 0,011. El complementario sería 0,100 que existe, pero no está en el conjunto. Entonces, no es un conjunto completo y por lo tanto es no numerable.

¿Y es no denso en ninguna parte?

Una bola abierta alrededor de un elemento del conjunto tiene puntos del complementario de C.

Sea > 0, n la longitud del intervalo $l(\frac{1}{3})^n <$. En $[x; x+)$ conforme avanza n, vamos a encontrar puntos que pertenecen a C^{comp}.

Por lo tanto, el conjunto de Cantor es no denso en ninguna parte.

Después de estudiar qué sucede con el conjunto de Cantor, hemos encontrado un conjunto que es no numerable y no denso en ninguna parte.

La distancia del supremo genera los mismos abiertos que la integral

Veamos cómo es $U = \{f(x) > 0\}$ en las dos distancias.

Distancia del supremo $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$

Los abiertos en esta distancia son un conjunto de funciones que forman una banda de radio alrededor de la función f.

Siempre vamos a poder conseguir abiertos de tal forma que el conjunto de funciones sea positivo alrededor de la función f, es decir, van a pertenecer al conjunto abierto U.

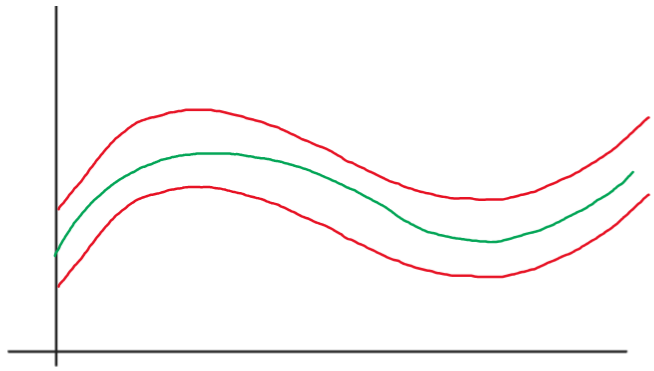

Figura 3: Abiertos en la distancia del supremo.

Distancia integral $d(f,g) =_0^1 |f(x) - g(x)|dx$

Los abiertos en esta distancia son funciones que comparten todos los puntos con la función f excepto en un pico (se hunde o se dispara) de tal forma que la integral no varía.

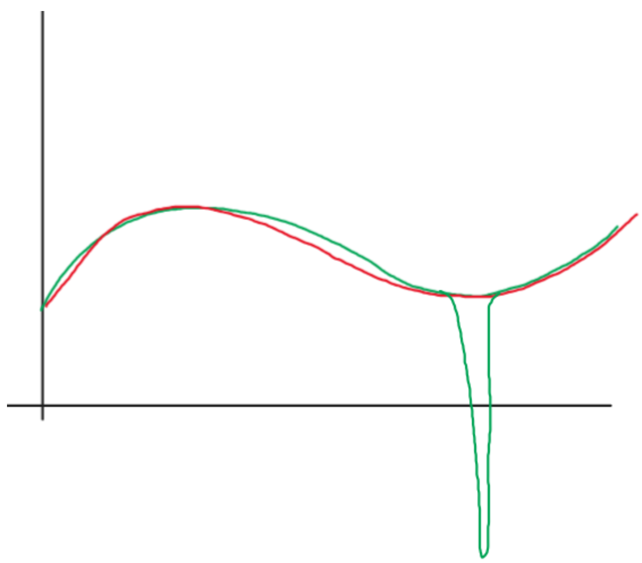

Figura 4: Abiertos en la distancia integral.

En este caso, vamos a encontrar funciones que no sean siempre positivas, por lo que no pertenecerán a U en algunos casos.

La distancia del supremo genera abiertos que pueden no estar en la distancia integral, mientras que todos los abiertos de la distancia integral también lo son en la del supremo. Por lo tanto, la distancia del supremo genera una T' más fina que la distancia integral ya que hay más abiertos.

4 Teoremas

La distancia Taxicab y la del máximo generan topologías equivalentes

Para demostrar que dos distancias generan topologías equivalentes basta con ver si podemos meter una bola de una distancia d dentro de otra bola de distancia d' y viceversa.

Veamos cómo son las bolas de la distancia Taxicab y del máximo respectivamente:

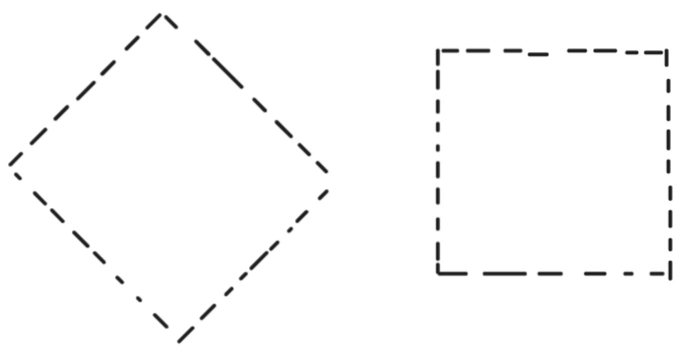

Figura 5: Bolas de la distancia Taxicab y del máximo.

Ahora que sabemos cómo es cada bola, vamos a comprobar si podemos meter una bola dentro de otra y viceversa:

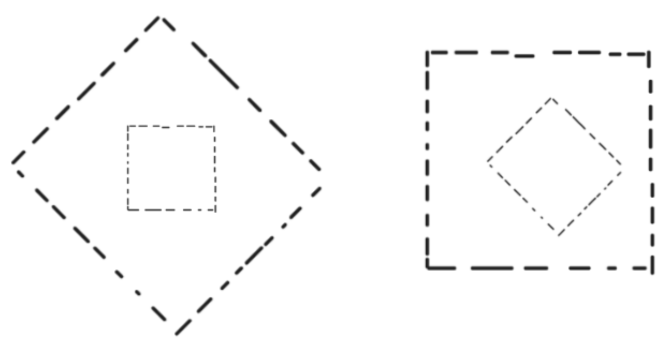

Figura 6: Bola del máximo dentro de una bola Taxicab y veceversa

En $\mathbb{R}$ cada base se puede reducir

Sea una base B y un entorno abierto $U \subset B$.

Elegimos dos puntos $x, y \in U$. Podemos cubrir el entorno U con intervalos de longitud $y - x$ porque la unión $\bigcup(x + n(y - x), y + n(y - x))$ cubre todo $\mathbb{R}$.

Necesitamos al menos dos intervalos, uno para cubrir x y otro para cubrir y.

Como los intervalos son abiertos, podemos elegir la unión de intervalos que sean distintos a U, pero que pertenezcan a B.

Entonces, U sobra, porque hemos conseguido cubrirlo con otros entornos abiertos de B.

De esta forma demostramos que en $\mathbb{R}$ cada base se puede reducir.

R en Sorgenfrey no es 2AN ni es metrizable

No es 2AN

Supongamos que tiene una base numerable.

Elijamos un punto x. El abierto $A_x = [x; x + 1)$ tiene que estar en la base o ser una unión de los elementos de la base, por tanto, en la base tiene que haber un abierto $B_x = [x; x + algo)$.

Elijamos ahora $y > x$. Para este punto debe existir un abierto B_y de la base, que no puede coincidir con el abierto B_x y no puede contenerlo (no contiene x).

Entonces, la base tiene al menos tantos elementos cuantos x existen, es decir, todos los números reales, que es un conjunto no numerable.

No es metrizable

Supongamos que existe una distancia que genera Sorgenfrey.

Cualquier distancia genera una base de abiertos que son bolas abiertas.

Elijamos la base de abiertos con centro en los racionales y radios racionales.

Un espacio es T_1 si y solo si los puntos son cerrados

Si un espacio es T_1, queremos demostrar que el conjunto $\{x\}$ es cerrado, es decir, que su complementario $X \setminus \{x\}$ es abierto.

Ahora tomamos un entorno abierto A_y alrededor del punto y, que no contiene al punto x ya que el espacio es T_1 $(x \in A_x, y \in A_y : x \notin A_y, y \notin A_x)$.

Si hacemos la unión de ambos entornos:

$\bigcup_{y \in X, y \neq x} A_y = X \setminus \{x\} \to$ la unión de abiertos es abierta $\to X \setminus \{x\}$ es abierto $\to \{x\}$ es cerrado

Si un punto es cerrado, su complementario es abierto.

Tenemos que encontrar un entorno A_y que no contenga el punto $x : X \setminus \{x\} \to$ entonces cumple la condición de espacio T_1.