

Definiciones

Juan Rodríguez

Conexidad

Espacio conexo

Un espacio topológico X se dice **conexo** si no existen dos abiertos disjuntos y no vacíos $U, V \subset X$ tales que

$$X = U \cup V.$$

En caso de existir tal descomposición, se dice que X admite una **separación**.

Intuitivamente, un espacio es conexo si está hecho de una sola pieza, es decir, no puede dividirse en dos partes abiertas separadas.

Espacio conexo por caminos

Un espacio topológico X se dice **conexo por caminos** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un camino continuo

$$f : [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$f(0) = x, \quad f(1) = y.$$

Espacio localmente conexo

Un espacio topológico X se dice **localmente conexo** si para todo punto $x \in X$ y todo entorno abierto U de x , existe un subentorno abierto V tal que

$$x \in V \subset U$$

y V es conexo.

Espacio localmente conexo por caminos

Un espacio topológico X se dice **localmente conexo por caminos** si para todo punto $x \in X$ y todo entorno abierto U de x , existe un subentorno abierto V tal que

$$x \in V \subset U$$

y V es conexo por caminos.

Espacio simplemente conexo

Un espacio topológico X se dice **simplemente conexo** si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial, es decir,

$$\pi_1(X) = \{e\}.$$

Componente conexa

Sea X un espacio topológico. Una **componente conexa** de X es un subconjunto $C \subset X$ que es conexo tal que,

$$\forall Z : C \subset Z \subset X, \quad Z \text{ no es conexo}$$

Dicho de otro modo, una componente conexa es la *máxima parte conexa* de X que contiene a un punto dado.

Espacio compacto

Un espacio topológico X se dice **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Recubrimiento abierto

Un **recubrimiento abierto** de X es una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Un **subrecubrimiento finito** es una subfamilia finita

$$U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$$

tal que

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Característica de Euler

Sea G un grafo contenido en una superficie. La **característica de Euler** se define como

$$\chi = V - A + F,$$

donde:

- V es el número de vértices,
- A es el número de aristas,
- F es el número de zonas cerradas (caras).

Triangulación

Una **triangulación** de una superficie es una descomposición de la misma en triángulos topológicos (posiblemente con lados curvos), de manera que dos triángulos cualesquiera se intersecan en una arista o vértice.

Grupo fundamental

Lazo

Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$. Un **lazo con base en x_0** es una aplicación continua

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

Suma de lazos

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ dos lazos con el mismo punto base x_0 . La **suma de lazos** $f + g$ se define como el lazo

$$(f + g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Esta definición puede generalizarse reparametrizando los lazos según su longitud.

Lazo neutro

El **lazo neutro** es el lazo constante

$$e : [0, 1] \rightarrow X, \quad e(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Este lazo actúa como elemento identidad para la suma de lazos.

Lazo inverso

Dado un lazo $f : [0, 1] \rightarrow X$ con base en x_0 , su **lazo inverso** se define como

$$f^{-1}(t) = f(1 - t), \quad t \in [0, 1].$$

Homotopía de lazos

Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ dos lazos con base en x_0 . Se dice que son **homotópicos** si existe una aplicación continua

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$h(t, 0) = \alpha(t), \quad h(t, 1) = \beta(t),$$

y además

$$h(0, s) = h(1, s) = x_0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Lazos equivalentes

Dos lazos se dicen **equivalentes** si son homotópicos fijando el punto base.

Esta relación define una relación de equivalencia en el conjunto de lazos con base en x_0 .

Grupo fundamental

El **grupo fundamental** de X con base en x_0 , también llamado **grupo de Poincaré**, es el conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en x_0 , con la operación inducida por la suma de lazos:

$$\pi_1(X, x_0).$$

Grupo cociente

Sea A un conjunto y sea \sim una relación de equivalencia en A . El **conjunto cociente** es el conjunto de clases de equivalencia

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Si además A está dotado de una operación binaria y la relación de equivalencia \sim es compatible con dicha operación, entonces el conjunto cociente hereda de forma natural una estructura de grupo, llamada **grupo cociente**.

Grupo fundamental como grupo cociente

Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea $\Omega(X, x_0)$ el conjunto de todos los lazos con base en x_0 .

Consideramos en $\Omega(X, x_0)$ la relación de equivalencia dada por la homotopía fijando el punto base.

El **grupo fundamental** de X con base en x_0 se define como el grupo del conjunto cociente

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\sim,$$

es decir, el conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en x_0 módulo homotopía, con la operación inducida por la suma de lazos.