

## Resolución parcial Topología 2024-25

Curso: MAIS 3

Óscar Corrochano y Carolina Gutiérrez Soria

### 1. Definiciones (0,9 puntos máximo. TACHA UNO)

Aporta al menos **un ejemplo** para cada concepto

a. (0,3) Espacio topológico

**Solución:** Dado un conjunto  $X$  se dice que una colección de subconjuntos  $T$  es una topología si se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\emptyset, X \in T$ : El conjunto vacío y el propio espacio pertenecen a la topología.
2.  $\bigcap_{n=1}^k T_i \in T$ : La intersección de un número finito de elementos de  $T$  también pertenece a  $T$ .
3.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_i \in T$ : La unión de cualquier número (puede que infinito) de elementos de  $T$  también le pertenece.

**Ejemplo:** Sea  $X = \{a, b, c\}$ ,  $T = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$  es un espacio topológico porque cumple las tres propiedades.

b. (0,3) Espacios  $T_2$  (Hausdorff) y  $T_1$  (Frechet)

**Solución:** Un espacio tiene **propiedad de Hausdorff** (o es  $T_2$ ) si para cada pareja de puntos  $x_1, x_2 \in X$  existen entornos disjuntos  $U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2$  tales que:

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Un espacio es de **Fréchet**, o  $T_1$  si para cada pareja de puntos  $x_1, x_2 \in X$  existen  $U_1 \ni x_1, U_2 \ni x_2$  tales que:

$$x_1 \notin U_2 \quad \text{y} \quad x_2 \notin U_1$$

December 1, 2024

**Ejemplo:**

Consideremos el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , donde:

- El conjunto base es  $X = \mathbb{R}$ , el conjunto de los números reales.
- La topología  $\mathcal{T}$  es la topología canónica, formada por uniones arbitrarias de intervalos abiertos.

**Verificación de la propiedad de Hausdorff:** Si tomamos dos puntos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  con  $x_1 \neq x_2$ , podemos encontrar dos entornos abiertos  $U_1$  y  $U_2$  (por ejemplo,  $U_1 = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$  y  $U_2 = (x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon)$ , con  $\epsilon > 0$ ) tales que:

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Esto demuestra que cada par de puntos distintos en  $\mathbb{R}$  puede ser separado por entornos disjuntos. Por lo tanto,  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es un espacio de Hausdorff.

Consideremos la recta numérica con la topología cofinita. Es un espacio  $T_1$  porque para cualquier pareja  $a, b$  existen entornos abiertos  $U_a = \mathbb{R} \setminus \{b\}$ ,  $U_b = \mathbb{R} \setminus \{a\}$  que cumplen  $a \notin U_b$ ,  $b \notin U_a$ , pero no son disjuntos ya que en la cofinita todos los abiertos tienen puntos en común. Por lo tanto, la recta numérica con la cofinita es  $T_1$  y no Hausdorff.

c. (0,3) Conjunto denso

**Solución:**

**Definición 1.** El subconjunto  $H \subseteq X$  se llama denso si  $\overline{H} = X$ .

**Definición 2.** El subconjunto  $H \subseteq X$  se llama denso si su intersección con cualquier abierto no vacío de  $X$  no es nula.

**Análisis.** La idea de un subconjunto denso consiste en que aproxima con cualquier precisión los puntos del propio conjunto  $X$ . Es decir, en cualquier entorno de cualquier punto de  $X$  hay puntos del subconjunto  $H$ .

**Ejemplo:**

En el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , donde  $\mathcal{T}$  es la topología estándar de los números reales, el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es **denso** en  $\mathbb{R}$ .

Para cualquier número real  $x \in \mathbb{R}$  y para cualquier entorno abierto  $U$  que contiene a  $x$ , siempre existe al menos un número racional  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $q \in U$ .

Por lo tanto,  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , lo que significa que  $\mathbb{Q}$  es un conjunto denso en  $\mathbb{R}$ .

**d. (0,3) Espacio 1AN**

**Solución:** Un espacio satisface el primer axioma de numerabilidad si cualquier punto  $x \in X$  tiene una colección numerable de entornos  $\{A_i(x)\}$  tales que cualquier entorno abierto  $B(x)$  contiene alguno de ellos.

**Ejemplo:**

El espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , donde  $\mathcal{T}$  es la topología estándar, satisface el primer axioma de numerabilidad. Para cualquier punto  $x \in \mathbb{R}$ , consideremos la colección numerable de entornos:

$$A_i(x) = \left(x - \frac{1}{i}, x + \frac{1}{i}\right) \quad \text{para } i \in \mathbb{N}.$$

Cualquier entorno abierto  $B(x)$  que contenga a  $x$  también contiene al menos uno de estos intervalos  $A_i(x)$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, esta colección satisface el 1AN.

## 2. Contraejemplos (1,2 puntos máximo. TACHA UNO)

**a. (0,2) La intersección de un número finito o infinito de abiertos es abierto**

**Solución:** La intersección infinita de abiertos no siempre es un abierto. Consideremos los intervalos abiertos:

$$\left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

La intersección infinita de estos intervalos es:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) = [1, 2]$$

Para cualquier  $x \in [1, 2]$ , existe un  $n$  suficientemente grande tal que  $x \in \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$  para todos los  $n \geq 1$ . Sin embargo, ningún punto fuera de  $[1, 2]$  pertenece a todos los intervalos, ya que eventualmente quedará fuera de algún intervalo  $\left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ . Por lo tanto, la intersección infinita es el intervalo cerrado  $[1, 2]$ , que no es abierto en la topología canónica de  $\mathbb{R}$ .

**b. (0,3)** En un espacio el mismo conjunto no puede ser a la vez abierto y cerrado a menos que sea el conjunto vacío o todo el universo

**Solución:** Veamos dos contraejemplos:

1. En un espacio con la topología discreta, todos los subconjuntos son tanto abiertos como cerrados. Esto se debe a que en la topología discreta los puntos son abiertos, por lo que cualquier conjunto es abierto. Además, el complementario de cualquier conjunto es abierto, por lo que todos los conjuntos son también cerrados.
2. Consideremos el espacio de Sorgenfrey  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ , donde la topología  $\mathcal{T}_S$  está generada por la base  $[a, b)$  con  $a < b$ . En este espacio, el intervalo  $[a, b)$  es un ejemplo de un conjunto que puede ser considerado tanto abierto como cerrado en ciertas circunstancias, ya que cumple las definiciones de ambas propiedades en esta topología.

- $[a, b)$  es abierto porque pertenece a la base.
- $[a, b)$  es cerrado porque su complemento,  $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ , es una unión de intervalos abiertos en la topología de Sorgenfrey:

$$[a, b)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a - n, a) \cup [b, b + n)$$

Conclusión: En la topología de Sorgenfrey, el intervalo  $[a, b)$  es un conjunto que cumple simultáneamente las propiedades de ser abierto y cerrado.

**c. (0,4)** La topología heredada coincide con la interior

**Solución:** La afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo:

Consideremos el conjunto  $A = \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \right]$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

- En la topología heredada del plano,  $A$  es un conjunto abierto por ser intersección de un abierto con el conjunto original:

$$A = [0, 1] \times [0, 1] \cap \left( \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \left( \frac{1}{2}, 2 \right) \right)$$

- En la topología del orden en  $[0, 1] \times [0, 1]$   $A$  no es un abierto porque el punto  $\left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  es frontera.

Este contraejemplo muestra que la topología heredada del plano y la topología generada por el orden interno en  $[0, 1] \times [0, 1]$  no coinciden.

**d. (0,5)** La distancia del supremo genera los mismos abiertos que la integral

**Solución:** La afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo:

Consideremos el conjunto

$$U = \{f(x) > 0\},$$

- En la métrica del supremo, la distancia entre dos funciones  $f$  y  $g$  se define como:

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|.$$

En esta métrica,  $U$  es abierto porque cualquier función positiva tiene un entorno de funciones positivas ya que por el teorema de Weierstrass cualquier función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo, lo que significa que  $\exists \epsilon : \forall x \in [0, 1] f(x) > \epsilon$ . De esta manera la bola abierta  $\{g(x) : |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$  solamente contiene funciones positivas.

- En la métrica integral, la distancia entre  $f$  y  $g$  se define como:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

En este caso,  $U$  no es abierto porque para cada función  $f(x) > 0$  y  $\epsilon > 0$  existe una función no positiva  $g(x)$  tal que  $d_{int}(f, g) < \epsilon$ . Llamemos  $M = \max f(x) + 1$  y elijamos  $\delta = \epsilon/M$ . Ahora basta definir  $g(x) = f(x)$  para  $x \geq \delta$  y  $g(x) = -1 + x/\delta \cdot f(\delta)$  para  $x \in [0, \delta)$ . Claramente  $g(0) < 0$  y  $d(f, g) < \epsilon/M \cdot M = \epsilon$ .

### 3. Teoremas (1,6 puntos máximo. TACHA UNO)

a. (0,4) Cada cerrado coincide con su clausura

**Solución:**

- Demostraremos lo contrario. Vamos a suponer que hay algún misterioso punto  $x \notin C$  de la frontera de nuestro conjunto cerrado que no le pertenece.
- El complementario del cerrado es un conjunto abierto. Por tanto,  $x \in X \setminus C$  debe tener un entorno completamente dentro de  $X \setminus C$
- Pero cualquier entorno suyo tiene que tener puntos dentro del conjunto  $C$ . Hemos llegado a una contradicción, por lo que queda demostrado que cada cerrado coincide con su clausura.

b. (0,6) Demuestra que las dos definiciones del conjunto denso  $H$  dentro del universo  $X$  son equivalentes:

$$\overline{H} = X \iff H \cap A \neq \emptyset \quad \text{para cualquier abierto } A$$

**Solución:**

December 1, 2024

- $\Rightarrow$  Sabemos que  $\overline{H} = X$ . Supongamos lo contrario, que  $\exists U \subset X : U \cap H = \emptyset$ .
- Como  $U$  es abierto, tiene un punto  $x$  que está en  $X$  pero no en  $H$ , por tanto, está en la frontera de  $H$ , por lo que cada entorno suyo tiene que tener puntos de  $H$ . Contradicción
- $\Leftarrow$  Demostraremos que  $X \setminus (H \cup Fr(H)) = \emptyset$ , es decir,  $X$  no tiene puntos fuera de  $H$  y de la frontera de  $H$ . Elijamos un punto  $x \in X : x \notin H$ . Cualquier abierto  $U$  que contenga  $x$  contiene también elementos de  $H$ .
- Pero entonces por la definición de la frontera de  $H$  sabemos que el punto  $x \in Fr(H)$ . Por lo que queda demostrado que ambas definiciones de conjunto denso coinciden.

**c.** (1) Una función es continua ( $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ ) si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta.

**Demostración:**

$\Rightarrow$  Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces la preimagen de un conjunto abierto es abierta. Sea  $U \subset Y$  un conjunto abierto. Definimos  $V = f^{-1}(U)$ , y debemos demostrar que  $V$  es abierto en  $X$ .

Supongamos lo contrario, es decir, que  $V$  no es abierto. Entonces, existe un punto fronterizo  $x \in V$  tal que cualquier entorno de  $x$  tiene puntos dentro y fuera de  $V$ .

Construiremos una sucesión de puntos  $x_i$  que converja a  $x$ , pero tal que  $x_i \notin V$  (es decir,  $f(x_i) \notin U$ ). Como  $x_i \rightarrow x$ , sus imágenes  $f(x_i)$  deben converger a  $f(x)$ , y  $f(x) \in U$  porque  $f$  es continua y  $U$  es abierto. Sin embargo, dado que  $x_i \notin V$ , se tiene que  $f(x_i) \notin U$ , lo cual lleva a una contradicción. Esto muestra que  $V$  debe ser abierto.

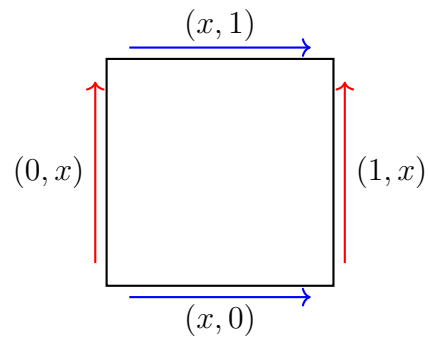
$\Leftarrow$  Si la preimagen de un conjunto abierto  $U$  es abierta, entonces la función  $f$  es continua.

Esta parte es casi trivial. Si la preimagen de  $U$  es abierta, entonces para cada punto  $x \in X$ , existe un entorno abierto  $B_\delta(x)$  tal que  $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ . Como  $f^{-1}(U)$  es abierto, la imagen de este entorno bajo  $f$ , es decir,  $f(B_\delta(x))$ , estará completamente contenida en  $U$ . Esto satisface la definición de continuidad, ya que para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $d_X(x, y) < \delta$ , entonces  $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

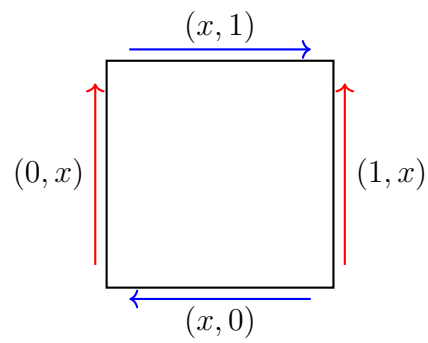
## 4. Ejercicios (6,3 puntos máximo. TACHA DOS)

**a.** (0,4) ¿Qué superficies obtendremos a partir del cuadrado  $[0; 1] \times [0; 1]$  aplicando las siguientes equivalencias (pegando bordes)?

1.  $(0, x) \sim (1, x); \quad (x, 0) \sim (x, 1)$  En este caso, los bordes identificados son los lados opuestos del cuadrado. Al identificar estos bordes, obtenemos un toro:



2.  $(0, x) \sim (x, 0)$ ;  $(x, 1) \sim (1, x)$  En este caso, los bordes identificados son lados adyacentes del cuadrado. Al identificar estos bordes, obtenemos una elipse o Botella de Klein:



**b.** (0,5) Dentro del mapa de España en la escala 1: 3000000 han colocado otro mapa en la escala 1: 5000000. Demuestra que algún punto coincidirá en ambos mapas y será único.

**Solución:** Este problema se puede resolver utilizando el Teorema del Punto Fijo de Banach. Este teorema establece que, en un espacio métrico completo, toda función contractiva tiene un único punto fijo.

El mapa más pequeño  $M$  (escala 1 : 5000000) está contenido dentro del mapa más grande  $M'$  (escala 1 : 3000000). Podemos considerar una función de contracción  $f : M' \rightarrow M$ . -  $f$  representa la transformación que reduce el mapa grande a las dimensiones del mapa pequeño.

Dado que  $f$  es una función contractiva (porque el mapa pequeño es una reducción del mapa grande), el Teorema de Banach garantiza la existencia de un único punto fijo  $P$  tal que:

$$f(P) = P.$$

El punto fijo  $P$  es un punto en el mapa grande que coincide exactamente con su correspondiente punto en el mapa pequeño.

**c.** (0,6) Para la función  $y = x \cos x$  definida en  $[0, 1]$ , indica un intervalo propio (es decir, un intervalo menor) en el que:

1. La función sea contractiva.
2. La función no sea contractiva.

Justifica tu respuesta.

**Solución:**

La función dada es  $f(x) = x \cos(x)$ . Su derivada es:  $f'(x) = \cos(x) - x \sin(x)$ . Evaluando en  $x = 0$ :  $f'(0) = \cos(0) - 0 \cdot \sin(0) = 1$ . Dado que  $f'(0) = 1$ , cualquier intervalo que incluya el punto 0 no puede ser contractivo, ya que para que la función sea contractiva, necesitamos  $|f'(x)| < 1$  en todo el intervalo.

Supongamos que existe un intervalo  $I \subseteq [0, 1]$  que no contiene 0, y sea  $c$  una constante tal que:  $d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b)$ , donde  $0 < c < 1$ .

En cualquier intervalo  $I$  estrictamente contenido en  $(0, 1]$ , la contribución de  $-x \sin(x)$  hace que  $|f'(x)|$  disminuya por debajo de 1. Esto ocurre porque  $\cos(x)$  tiene un máximo 1, y  $-x \sin(x)$  es decreciente.

Por lo tanto, en cualquier intervalo  $I \subset (0, 1]$ , podemos elegir un  $c \in (0, 1)$  tal que  $|f'(x)| \leq c$  en todo el intervalo.

1. La función  $f(x)$  no es contractiva en ningún intervalo que incluya 0, porque  $f'(0) = 1$ , violando la condición  $|f'(x)| < 1$ .
  2. La función  $f(x)$  es contractiva en cualquier intervalo propio contenido dentro de  $(0, 1]$ , porque en tales intervalos  $|f'(x)| < c$  con  $c < 1$ .
- d. (0,6) ¿Son distancias?

1.  $d(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Solución:**

La función  $d(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2)$  no es una distancia porque no es simétrica:

$$-5 = d(1, 2) \neq d(2, 1) = 5$$

2. Sean  $x = 2^k a$ ,  $y = 2^m b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $d(x, y) = \frac{1}{2^{\min(k, m)}}$ , el inverso de la máxima potencia común de 2 en  $\mathbb{Z}$ .

**Solución:**

La función  $d(x, y) = \frac{1}{2^{\min(k, m)}}$  no es una distancia válida porque no cumple con la primera propiedad ( $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ).

- e. (0,6) ¿Son topologías? Si no lo son, explica por qué. Si lo son, averigua si son Hausdorff o  $T_1$

1.  $T_a = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, S_a = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a\}\}$
2.  $T_b = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
3.  $T_c = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

**Solución:** Dada una colección  $T$ , verificaremos si cumple las condiciones para ser una topología:

1. El conjunto vacío  $\emptyset$  y el espacio total  $X$  pertenecen a  $T$ .
2. La intersección finita de elementos de  $T$  pertenece a  $T$ .
3. La unión arbitraria de elementos de  $T$  pertenece a  $T$ .

$$1. T_a = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, S_a = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a\}\}$$

- (a)  $\emptyset \in T_a$  y  $\mathbb{R}^2 \in T_a$ : se cumple.
- (b) La intersección finita de conjuntos en  $T_a$  pertenece a  $T_a$ , porque la intersección de  $\mathbb{R}^2$  con  $S_a$  o  $\emptyset$  es  $S_a$  o  $\emptyset$ , respectivamente.
- (c) La unión arbitraria de conjuntos en  $T_a$  pertenece a  $T_a$ , porque cualquier unión de conjuntos  $\emptyset, \mathbb{R}^2$  o  $S_a$  es uno de los conjuntos en  $T_a$ .

Como vemos,  $T_a$  es de tipo matrioska, por lo que es topología pero ni es  $T_1$  ni es Hausdorff.

$$2. T_b = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

- (a)  $\emptyset \in T_b$  y  $\{a, b, c\} \in T_b$ : se cumple.
- (b) La intersección finita de conjuntos en  $T_b$  pertenece a  $T_b$ :

$$\begin{aligned}\emptyset \cap \{c\} &= \emptyset \in T_b, \\ \emptyset \cap \{a, b\} &= \emptyset \in T_b, \\ \emptyset \cap \{a, b, c\} &= \emptyset \in T_b, \\ \{c\} \cap \{a, b\} &= \emptyset \in T_b, \\ \{c\} \cap \{a, b, c\} &= \{c\} \in T_b, \\ \{a, b\} \cap \{a, b, c\} &= \{a, b\} \in T_b.\end{aligned}$$

- (c) La unión arbitraria de conjuntos en  $T_b$  pertenece a  $T_b$ :

$$\begin{aligned}\emptyset \cup \{c\} &= \{c\} \in T_b, \\ \emptyset \cup \{a, b\} &= \{a, b\} \in T_b, \\ \emptyset \cup \{a, b, c\} &= \{a, b, c\} \in T_b, \\ \{c\} \cup \{a, b\} &= \{a, b, c\} \in T_b, \\ \{c\} \cup \{a, b, c\} &= \{a, b, c\} \in T_b, \\ \{a, b\} \cup \{a, b, c\} &= \{a, b, c\} \in T_b.\end{aligned}$$

$T_b$  cumple las propiedades necesarias, por lo que es topología.

En esta topología no hay abiertos que tengan  $a$  pero no tengan  $b$ . Por lo tanto,  $T_b$  no es ni  $T_1$  ni Hausdorff.

3.  $T_c = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

(a)  $\emptyset \in T_c$  y  $\{a, b, c\} \in T_c$ : se cumple.

(b) La intersección finita de conjuntos en  $T_c$  no pertenece a  $T_c$ :

La intersección de  $\{a, c\}$  y  $\{b, c\}$  es  $\{c\}$ , pero  $\{c\} \notin T_c$ . Por lo tanto,  $T_c$  no cumple la condición de intersección finita.

$T_c$  no cumple las propiedades necesarias por lo que no es una topología.

f. (0,8) Considera la topología de semirrectas derechas. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones (a qué números convergen si es que convergen):

1. la sucesión  $s_n = -n^2$ .

**Solución:** Una sucesión converge a un punto  $L \in \mathbb{R}$  si para cualquier conjunto abierto  $U$  que contiene a  $L$ , existe un índice  $N$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $s_n \in U$ .

Supongamos que la sucesión converge a  $L \in \mathbb{R}$ . Todos los abiertos que lo contienen tienen forma  $(L - a, \infty)$ . Pero para cualquiera de estos abiertos la sucesión  $s_n = -n^2$  tiene finitos términos que le pertenecen.

2. la sucesión  $t_n = n^2$ .

**Solución:** Está claro que para cualquier abierto  $(L, \infty)$  todos los términos de la sucesión a partir de  $\sqrt{L}$  si  $L > 0$  y la sucesión entera para  $L < 0$  le pertenecen. Así que esta sucesión converge a cualquier número real.

**g.**  $(0,8)$  ¿Son homeomorfos en la topología canónica? Si es así, presenta un homeomorfismo

(1)  $(-2, 1)$  y  $(0, \infty)$

Podemos convertir el intervalo  $(-2, 1)$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$  mediante la función

$$g(x) = \frac{\pi}{6}(x + 2).$$

Esta función es continua y biyectiva en  $(-2, 1) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ . Su inversa es:

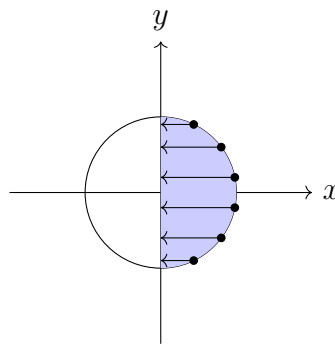
$$g^{-1}(x) = \frac{6x}{\pi} - 2,$$

que también es continua. Ahora aplicamos la función  $\tan(x)$ , que es biyectiva y continua en  $(0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$ . Su inversa,  $\arctan(x)$ , también es continua. Componiendo ambas transformaciones, el homeomorfismo queda definido como:

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}(x + 2)\right).$$

Por lo tanto, los intervalos  $(-2, 1)$  y  $(0, \infty)$  son homeomorfos.

(2)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$  y el intervalo  $[-1, 1]$  en  $\mathbb{R}$



Si establecemos el homeomorfismo  $f((x, y)) = (0, y)$ , obtenemos una proyección de los puntos de la circunferencia sobre el eje  $y$ .

**h.**  $(0,8)$  ¿Son continuas? ¿Son abiertas?

(1)  $f(x) = x^2$ , Sorgenfrey  $\rightarrow$  Canónica

Para que  $f(x)$  sea continua se debe cumplir que la preimagen de cualquier conjunto abierto en la topología canónica sea abierta en la topología de Sorgenfrey.

$f^{-1}((a, b)) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$  es abierto en Sorgenfrey. Y cualquier abierto en la topología canónica es abierto en Sorgenfrey. Por lo tanto  $f(x)$  es una función continua.

Para que  $f(x)$  sea abierta se debe cumplir que la imagen de cualquier conjunto abierto en la topología de Sorgenfrey sea abierta en la topología canónica.

$f((a, b)) = [a^2, b^2)$ , este intervalo no es abierto en la topología canónica. Por tanto  $f(x)$  no es una función abierta.

(2)  $f(x) = \frac{1-x}{2}$ , Canónica  $\rightarrow$  Semirectas Derechas

Para que  $f(x)$  sea continua se debe cumplir que la preimagen de cualquier conjunto abierto en la topología de Semirectas Derechas sea abierta en la topología canónica.

$f^{-1}((a, \infty)) = (-\infty, b)$  con  $b=1-2a$  es abierto en la topología canónica. Por lo tanto  $f(x)$  es una función continua.

Para que  $f(x)$  sea abierta se debe cumplir que la imagen de cualquier conjunto abierto en la topología canónica sea abierta en la topología de Semirectas Derechas.  $f((a, b)) = (\frac{1-b}{2}, \frac{1-a}{2})$ , este intervalo no es abierto en la topología de Semirectas Derechas. Por tanto  $f(x)$  no es una función abierta.

i. (0,9) Busca Clausura, Interior y Frontera de

(1)  $A = [0, \frac{1}{2}) \times [0, 1) \subset [0, 1] \times [0, 1]$  con la topología del orden

$$Int(A) = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1) \cup \{(0, 0)\}$$

$$Fr(A) = (0, \frac{1}{2}) \times \{0\} \cup [0, \frac{1}{2}) \times \{1\}$$

$$\overline{A} = A \cup Fr(A)$$

(2)  $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup [3, 4) \cup \{6 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  en Sorgenfrey

$$Int = [3, 4)$$

$$Fr = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{6 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\overline{X} = X \cup Fr(A)$$

(3)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$  con la canónica en  $\mathbb{R}^2$

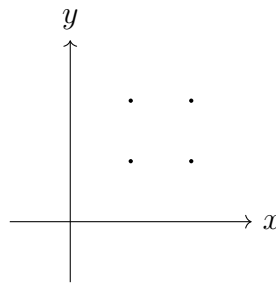
$$Int = \emptyset$$

$$Fr = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

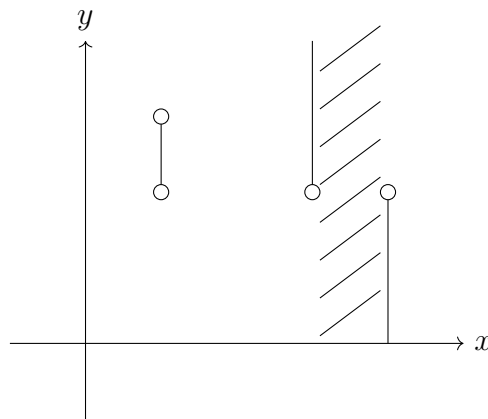
$$\overline{X} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

j. (1,2) Dibuja los abiertos en las siguientes topologías. Marca todas las parejas de topologías equivalentes y explica por qué otras no lo son. Indica cuál es más fina y cuál es menos fina.

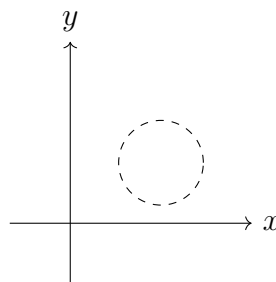
(1) Topología producto Discreta en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



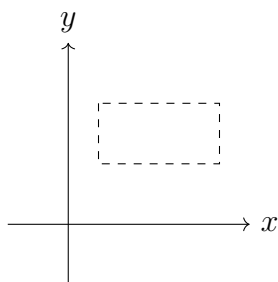
(2) Topología del orden en  $\mathbb{R}^2$



(3) Topología canónica en  $\mathbb{R}^2$

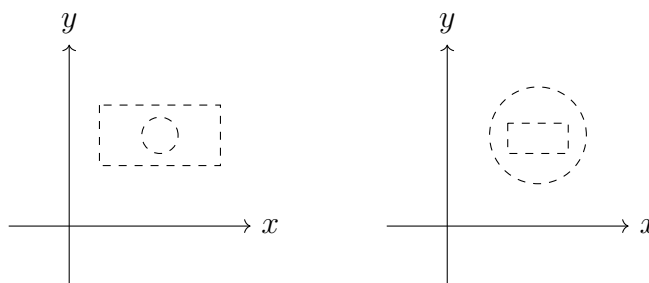


(4) Topología producto canónica en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



En orden de más fina a menos fina tenemos:

topología discreta  $>$  topología del orden  $>$  topología canónica  $\cong$  topología producto canónica. La topología canónica y la canónica  $\times$  canónica son equivalentes porque dentro de un abierto de la canónica podemos meter un abierto de la canónica  $\times$  canónica y viceversa.



## 1 5. (0,5)SUBIDA DE NOTA. Demuestra que la topología cofinita no es metrizable

Un espacio topológico  $X$  es metrizable si existe una función distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un espacio topológico  $X$  satisface el primer axioma de numerabilidad si para cada punto  $x \in X$ , existe una colección numerable de entornos  $\{A_i(x)\}$  tal que para cualquier entorno abierto  $B(x)$ , existe algún  $A_i(x)$  contenido en  $B(x)$ .

Demostraremos que:

1. Todo espacio metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad (1AN).
2. La topología cofinita no satisface el primer axioma de numerabilidad.

De esta forma, concluiremos que la topología cofinita no es metrizable.

1. Sea  $(X, d)$  un espacio metrizable. Para cualquier punto  $x \in X$ , consideremos la colección numerable de bolas abiertas centradas en  $x$  de radio  $\frac{1}{n}$ :

$$\mathcal{B}_x = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

Esta colección es numerable porque está acotada por los números naturales. Además, para cualquier entorno abierto  $U$  de  $x$ , existe una bola  $B_\epsilon(x) \subset U$  (por la definición de topología inducida por la métrica). Basta entonces elegir un  $n$  suficientemente grande tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , y se cumple que  $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_\epsilon(x) \subset U$ . Por lo tanto,  $\mathcal{B}_x$  es una colección numerable que satisface el primer axioma de numerabilidad.

2. Sea  $X$  un conjunto con la topología cofinita, donde los abiertos son conjuntos cuyo complemento es finito. Consideremos cualquier punto  $x \in X$ .

Supongamos, por contradicción, que existe una colección numerable  $\{A_i(x)\}$  de entornos de  $x$  tal que para cualquier entorno abierto  $B(x)$  de  $x$ , existe algún  $A_i(x) \subset B(x)$ .

En la topología cofinita, cualquier entorno abierto  $B(x)$  de  $x$  tiene la forma  $B(x) = X \setminus F$ , donde  $F$  es un conjunto finito que no contiene a  $x$ . Esto significa que:

$$B(x) \supset \{x\} \cup (X \setminus F).$$

Dado que  $\{A_i(x)\}$  es numerable, tomemos su unión:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i(x).$$

El conjunto  $A$  es una unión numerable de conjuntos finitos, por lo que  $A$  es numerable. Sin embargo, en la topología cofinita, los entornos abiertos  $B(x)$  de  $x$  pueden ser no numerables, lo que contradice la suposición de que  $\{A_i(x)\}$  es suficiente para cubrir cualquier entorno.

Por lo tanto, no existe una colección numerable de entornos en la topología cofinita, y esta no satisface el primer axioma de numerabilidad.

Por lo tanto, concluimos que la topología cofinita no es metrizable.  $\square$