Problema 1

lunes, 31 de marzo de 2025 0:30

Demuestra que dos soluciones de una ecuación diferencial ordinaria son linealmente independientes si y solo si su Wronskiano es distinto de cero.

$y_1(x), y_2(x)$ linealmente independientes $\Longleftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0$

$\Updownarrow$

$y_1(x), y_2(x)$ linealmente dependientes $\Longleftrightarrow W(y_1, y_2) = 0$

$\Rightarrow$) Caso 1:

$$y_1(x) = 0 \Rightarrow W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

Caso 2:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) \neq 0 \\ y_2(x) = \lambda \cdot y_1(x) \end{array}\right] \Rightarrow W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda y_1 y_1' - \lambda y_1 y_1' = 0$$

$\Leftarrow$) Caso 1:

$y_1(x) = 0$ (alt. $y_2(x) = 0$) $\Rightarrow$ $y_1(x), y_2(x)$ son linealmente dependientes

Caso 2:

Ni $y_1(x)$ ni $y_2(x)$ son la función nula

$$W(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} \Rightarrow \int \frac{y_1'}{y_1} dx = \int \frac{y_2'}{y_2} dx \Rightarrow \ln|y_1| = \ln|y_2| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |y_1| = C_2 \cdot |y_2| \Rightarrow y_1 = C_3 \cdot y_2 \Rightarrow y_1(x), y_2(x)$ linealmente dependientes

Problema 2

lunes, 31 de marzo de 2025 0:30

Resuelve la ecuación diferencial $(3x^2y^2-2y^4)dx+(x^3y-2xy^3)dy=0$ utilizando el factor integrante adecuado.

Comprobamos primero que no es diferencial exacta:

$$\underbrace{(3x^2y^2-2y^4)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(x^3y-2xy^3)}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=6x^2y-8y^3\neq 3x^2-2y^3=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Comprobamos a continuación que tiene un factor integrante $\mu=\mu(x)$:

$$\underbrace{\mu(x)\cdot(3x^2y^2-2y^4)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{\mu(x)\cdot(x^3y-2xy^3)}_{Q(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\Rightarrow \mu\cdot(6x^2y-8y^3)=\mu'\cdot(x^3y-2xy^3)+\mu(3x^2y-2y^3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(6x^2y-8y^3-3x^2y+2y^3)=\mu'(x^3y-2xy^3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\cdot(3x^2y-6y^3)=\frac{d\mu}{dx}(x^3y-2xy^3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{3x^2y-6y^3}{x^3y-2xy^3}dx\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{3\cancel{y}(\cancel{x^2-2y^2})}{x\cancel{y}(\cancel{x^2-2y^2})}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\frac{3}{x}dx\Rightarrow \ln|\mu|=3\ln|x|+C\Rightarrow \mu=x^3$$

Volvemos a la ecuación diferencial exacta:

$$x^3\cdot(3x^2y^2-2y^4)dx+x^3\cdot(x^3y-2xy^3)dy=0\Rightarrow$$

$$\underbrace{(3x^5y^2-2x^3y^4)}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(x^6y-2x^4y^3)}_{Q(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 6x^5y - 8x^3y^3 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \Longrightarrow \text{Diferencial exacta}$$

- $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Longrightarrow F(x,y) = \int \left(3x^5y^2 - 2x^3y^4\right) dx = \frac{x^6y^2}{2} - \frac{x^4y^4}{2} + C(y)$$

- $$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Longrightarrow \cancel{x^6y} - \cancel{2x^4y^3} + C'(y) = \cancel{x^6y} - \cancel{2x^4y^3} \Longrightarrow C'(y) = 0 \Longrightarrow C(y) = C$$

Solución: $F(x,y) = \boxed{\frac{x^6y^2}{2} - \frac{x^4y^4}{2} + C = 0}$

<u>Nota:</u> La solución también se puede expresar como $x^4y^2(x^2 - y^2) = K$.

Problema 3

lunes, 31 de marzo de 2025 0:30

Resuelve la ecuación no homogénea $y'' + y' - 6y = -5e^{2x} + \operatorname{sen}(x)$.

a) SGEH:

$$r^2 + r - 6 = 0 \implies \begin{cases} r = 2 \\ r = -3 \end{cases} \implies y_{SGEH} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

b) SGEC / SPEC:

Vamos a resolver el problema utilizando el método de coeficientes indeterminados.

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x), \quad S_1(x) = -5e^{2x}, \quad S_2(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$S_1(x) = -5e^{2x} \implies \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{matrix}\right] \; t = 1 \\ \left.\begin{matrix} P_m(x) = 0 \longrightarrow m = 0 \\ Q_n(x) = 1 \longrightarrow n = 0 \end{matrix}\right] \; K = \max(m,n) = 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $y_{p_1} = A \cdot x\, e^{2x}$

$$S_2(x) = \operatorname{sen}(x) \implies \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix}\right] \; t = 0 \\ \left.\begin{matrix} P_m(x) = 1 \longrightarrow m = 0 \\ Q_n(x) = 0 \longrightarrow n = 0 \end{matrix}\right] \; K = \max(m,n) = 0 \end{bmatrix}$$

Luego $y_{p_2} = B \cdot \operatorname{sen}(x) + C \cdot \cos(x)$

Si juntamos a la vez ambas soluciones, tendremos lo siguiente:

$$y_p = A \cdot x e^{2x} + B \cdot \operatorname{sen}(x) + C \cdot \cos(x) \longrightarrow y_p' = (A + 2Ax)\, e^{2x} + B\cos(x) - C\operatorname{sen}(x) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_p'' = (4A + 4Ax)\, e^{2x} - B\operatorname{sen}(x) - C \cdot \cos(x)$$

$$y'' + y' - 6y = -5e^{2x} + \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left((4A + 4Ax)e^{2x} - B\operatorname{sen}(x) - C \cdot \cos(x) \right) + \left((A + 2Ax)e^{2x} + B\cos(x) - C\operatorname{sen}(x) \right)$$

$$-6\left(Axe^{2x} + B\operatorname{sen}(x) + C\cos(x) \right) = -5e^{2x} + \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(4A + 4\cancel{A}x + A + 2\cancel{A}x - 6\cancel{A}x \right) e^{2x} + \left(-B - C - 6B \right)\operatorname{sen}(x) + \left(-C + B - 6C \right)\cos(x) =$$

$$= -5e^{2x} + \operatorname{sen}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5A = -5 \\ -7B - C = 1 \\ B - 7C = 0 \end{array} \right| \Rightarrow A = -1, \quad B = -\frac{7}{50} \quad C = \frac{-1}{50}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{y_{SGEC} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-3x} - x\, e^{2x} - \frac{7}{50}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{50}\cos(x)}$$

Problema 4

lunes, 31 de marzo de 2025 0:30

Obtén la expresión de las curvas ortogonales a la familia dada por la ecuación $x^2 + b^2y^2 = 1$.

1) Despejamos b^2:

$$x^2 + b^2y^2 = 1 \Rightarrow \cancel{2}x + b^2 \cdot \cancel{2}y \cdot y' = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{-x}{y \cdot y'}$$

2) Obtenemos la ecuación diferencial asociada a la familia inicial:

$$x^2 + b^2y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{-x}{\cancel{y} \cdot y'}\right) y^{\cancel{2}} = 1 \Rightarrow x^2 \cdot y' - xy = y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)\, y' = xy \Rightarrow y' = \frac{xy}{x^2-1}$$

3) Planteamos la ecuación diferencial de la nueva familia:

$$y' = \frac{-(x^2-1)}{xy} = \frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y \cdot dy = \int \frac{(1-x^2)}{x}\, dx \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_1} \Rightarrow$$

Alternativamente, la solución se puede escribir como $\boxed{x^2 + y^2 = \ln(x^2) + C_2}$