U-Tad. Topología 2025-26. Chuleta del Global

¿VERDADERO O FALSO? SI ES VERDADERO, DEMUÉSTRALO. SI ES FALSO, CONSTRUYE UN CONTRAEJEMPLO (1 punto)

- Un conexo localmente no tiene que ser conexo
  Ejemplo: $(0;1) \cup (1;2)$
- Si la clausura es conexa, el conjunto no tiene por qué serlo
  Ejemplo: $(0;1) \cup (1;2)$
- Un conexo no tiene que ser localmente conexo
  Ejemplo: el peine con el punto (0; 1). El punto (0; 1) localmente siempre tiene componentes abiertos y disjuntos con $x = \frac{1}{n}$
- Un conjunto conexo NO tiene por qué ser conexo por caminos
  Ejemplos: cuadrado 1x1 con la topología del orden. El peine reducido.
- Dos espacios con el mismo grupo fundamental no siempre son homeomorfos.
  Ejemplos: la esfera y el plano. El intervalo cerrado (compacto) y la recta R. El aro y la circunferencia (grupo fundamental $\mathbb{Z}$)
- Una función contractiva no siempre tiene un punto fijo si el espacio no es compacto
  Ejemplo: $f(x) = \frac{x}{2}$ en $(0;1)$
- Un abierto puede ser compacto.
  Ejemplo: la cofinita
- Un espacio acotado y cerrado no siempre es compacto
  Ejemplo: $[0;1] \times [0;1]$ con la topología del orden heredada de $\mathbb{R}^2$,
  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n+1}\right) \cup [1;2)$ es un recubrimiento con abiertos de [0; 1] en Sorgenfrey que no admite subrecubrimiento finito
- Dos espacios con la misma característica de Euler no siempre son homeomorfos
  Ejemplos: Dos espacios con la misma CE pero distinta orientación: el disco y el plano proyectivo. Un espacio con borde y otro sin borde (cinta de Moebius y botella de Klein)

DEFINICIONES (1 puntos)

- Conjunto conexo, conexo por caminos, localmente conexo, localmente conexo por caminos y simplemente conexo
- Componente conexa
- Conjunto compacto (explicar el concepto de recubrimiento)
- La característica de Euler (explicar el concepto de la triangulación)
- El grupo fundamental (lazos, suma de lazos, el neutro y el inverso, la homotopía y el grupo cociente)

EJERCICIOS (6 puntos)

- ¿Son conexos? ¿Son conexos por caminos?
- ¿Son compactos?
- ¿Son homeomorfos? Demuéstralo
- Determinar el resultado de la suma conexa de superficies
- ¿Qué superficie representa este diagrama?
- ¿Cuál es el grupo fundamental de ...?

TEOREMAS (2 puntos). En negrita van los más importantes

- La conexidad y conexidad por caminos son invariantes topológicas
- La compacidad es una invariante topológica
- **Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto**
- Demuestra que cualquier conexo por caminos es conexo
- La unión de conexos que cuya intersección no es nula es conexa
- **El intervalo $[\mathbf{0}\ ;\mathbf{1}\ ]$ es compacto**
- En la topología cofinita cada conjunto es compacto
- **En los espacios Hausdorff los compactos son separables de cualquier punto exterior**
- En los espacios Hausdorff los compactos son cerrados
- **Teorema de Heine-Borel**. En $\mathbb{R}^n$ con la topología canónica un espacio es compacto equivale a que es cerrado y acotado
- **El producto directo de compactos es compacto**
- **Teorema del valor extremo**. En los compactos las funciones continuas toman sus valores máximo y mínimo
- **El grupo fundamental en espacios conexos por caminos no depende del punto base**
- Todos los lazos en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes
- El grupo fundamental de la esfera es trivial