



# Homeomorfismos

Topología - 7

Georgy Nuzhdin  
2022-2023

## Recordando el concepto de la continuidad

---

- “Continuidad en un punto”: los pequeños entornos de un punto pasan dentro de pequeños entornos de su imagen (si dos personas vivían cerca, después de trasladarse a otra ciudad, siguen viviendo cerca)
- “Continuidad global”: la preimagen de un abierto es un abierto

Demuestra que la función  $f(x) = x^2$  es continua en la topología canónica

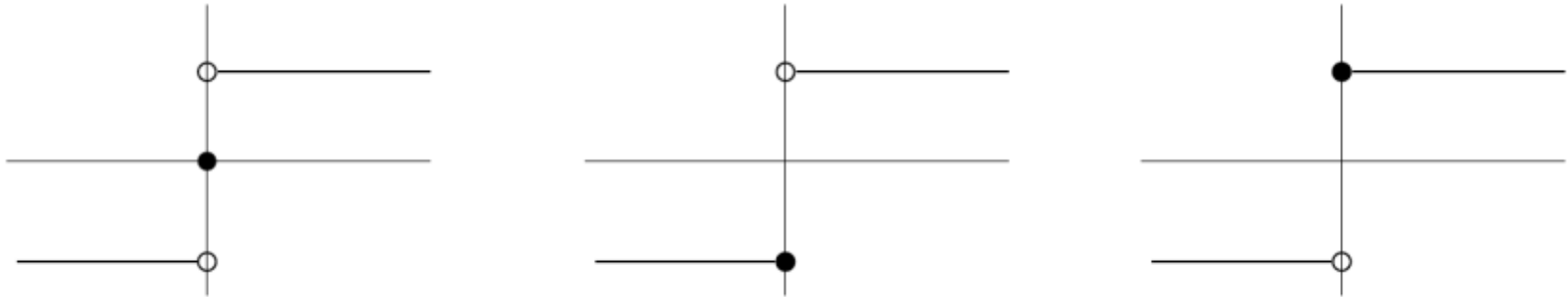
---

Sea  $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$  con la topología canónica

---

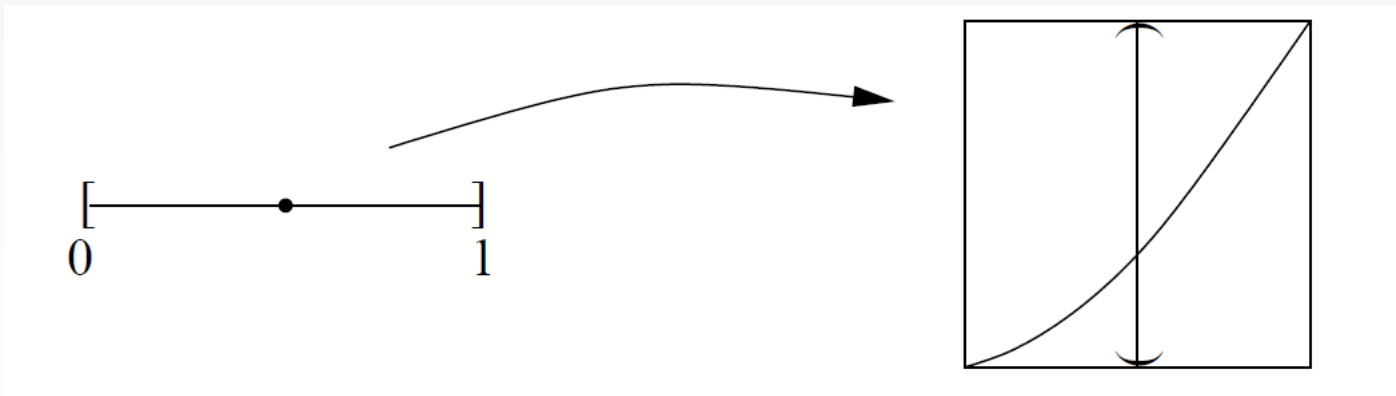
- ¿Es continua la función  $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n n$  ?

¿Cuáles de estas funciones son continuas en Sorgenfrey?



## ¿Es continua la función

- $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1] \times [0; 1], f(x) = (x, x^2)$
- Considera la preimagen de  $((0,5; 0), (0,5; 1))$



# Función abierta

---

- | Definición. Una función se llama **abierta** si la imagen de un abierto es un abierto
- | Definición. Una función se llama **cerrada** si la imagen de un cerrado es un cerrado
- ¿Son abiertas? ¿Son cerradas? Ambas preguntas en la topología canónica
  - $y = -x$
  - $y = x^2$
  - $y = e^x$

## ¿Son abiertas o cerradas?

---

- La función de Dirichlet (canónica – discreta)
- La función  $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

## Función abierta y cerrada en Sorgenfrey

---

- ¿Son abiertas? ¿Son cerradas? Ambas preguntas en la topología Sorgenfrey
  - $y = -x$
  - $y = x^2$
  - $y = e^x$

## Teoremas de continuidad

---

- 1) Si  $A \subset X$ , la inclusión  $j : A \rightarrow X$ ,  $j(x) = x$ , es continua.
- 2) Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  son continuas,  $g \circ f : X \rightarrow Z$  también lo es.
- 3) Si  $f : X \rightarrow Y \times Z$  es continua  $\Leftrightarrow$  las proyecciones  $X \rightarrow Y: \pi_1 \circ f$  y  $X \rightarrow Z: \pi_2 \circ f$  también lo son.
- 4) (Pasting Lemma / Lema del pegado) Si  $X = A \cup B$  con  $A, B$  cerrados en  $X$ , entonces  $f : X \rightarrow Y$  es continua  $\Leftrightarrow$  las restricciones de la función  $f|_A$  y  $f|_B$  lo son y  $f(x)|_A = f(x)|_B$  en la intersección  $A \cap B$ .

# Homeomorfismos

---

Una biyección  $f(x): X \rightarrow Y$  se llama **homeomorfismo** si son continuas tanto  $f(x)$  como  $f^{-1}(x)$

Una biyección es homeomorfismo si es continua y abierta

## ¿Por qué son tan importantes los homeomorfismos?

---

- Transforman abiertos en  $X$  en abiertos en  $Y$  y viceversa
- Es decir, conservan la estructura topológica
- Si conseguimos establecer un homeomorfismo, demostramos que dos espacios topológicos son **equivalentes**

## Ejemplos de homeomorfismos

---

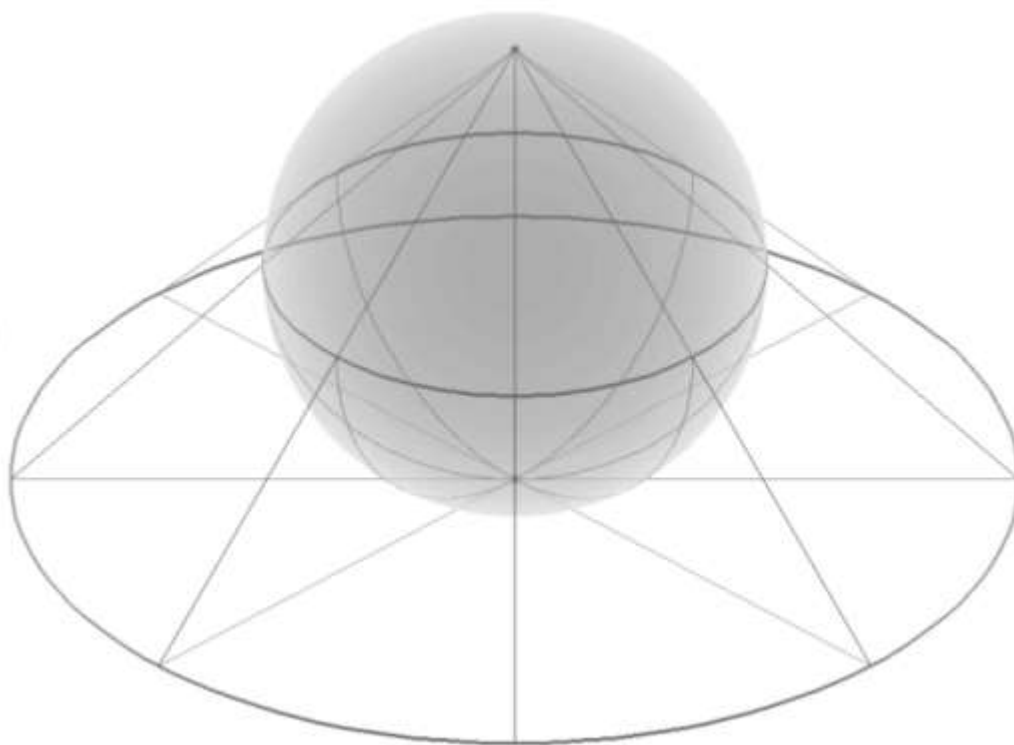
- El cuadrado es homeomorfo a una circunferencia
- Trazando un segmento desde el centro común hasta el cuadrado se establece la biyección



## Ejemplos de homeomorfismos

---

- La esfera sin un punto es homeomorfa al plano.  
El homeomorfismo correspondiente es la proyección estereográfica



## ¿Son homeomorfismos?

---

- $f(x) = e^x, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
- $f(x) = (\cos x, \sin x), \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^2$
- $f(x) = -2x, [0; 1] \rightarrow [-2; 0]$

## Inventa un homeomorfismo

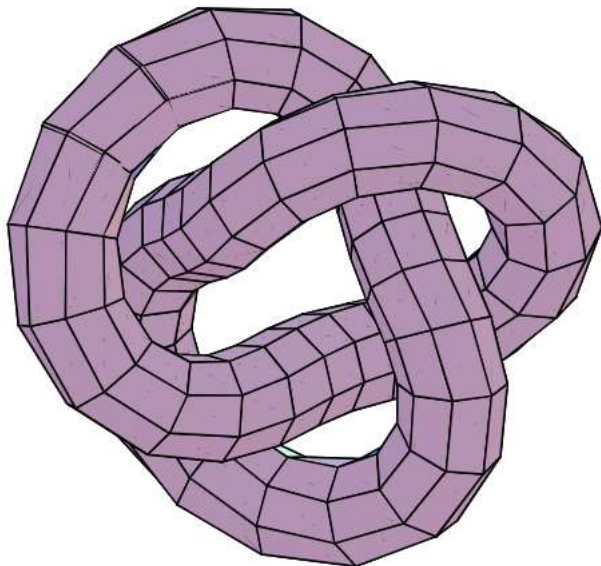
---

- $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
- $(2; 5) \rightarrow (-9; 0)$
- $(0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$
- $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 1\}$

## ¿Qué es lo que importa?

---

- El tamaño NO importa (cualquier intervalo abierto es homeomorfo a toda la recta numérica)
- La forma NO importa (el cuadrado es homeomorfo a la circunferencia)
- La posibilidad de transformar una figura en otra NO importa

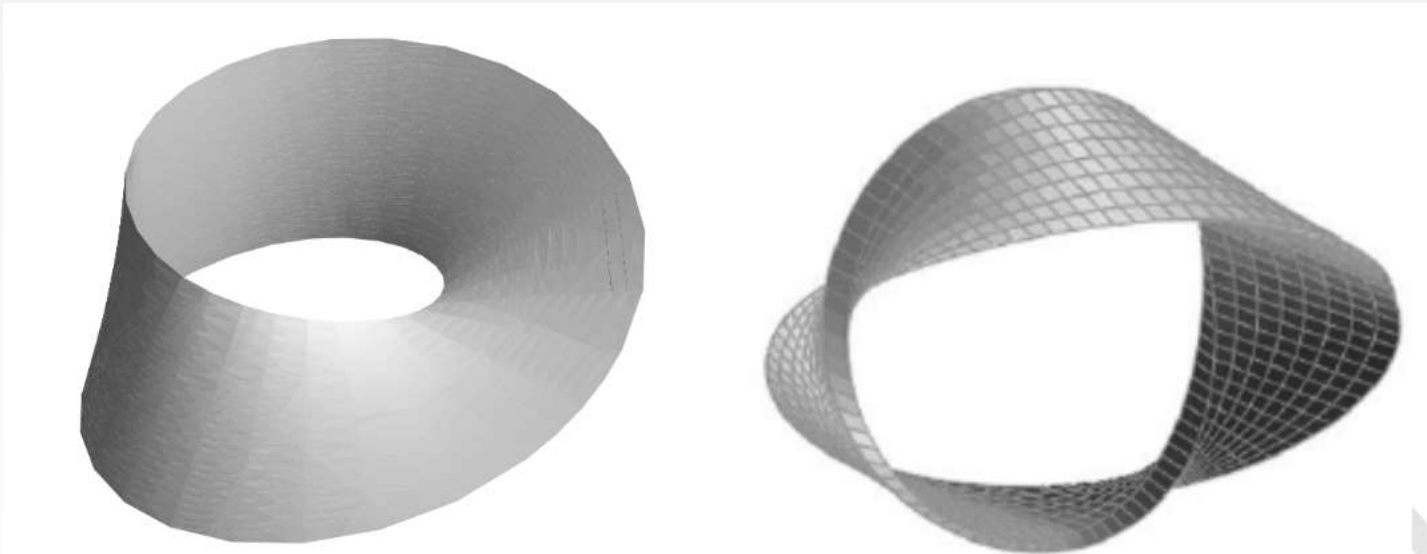


El toro es homeomorfo a esta figura, pero NO se puede transformar en ella

## ¿Son homeomorfos?

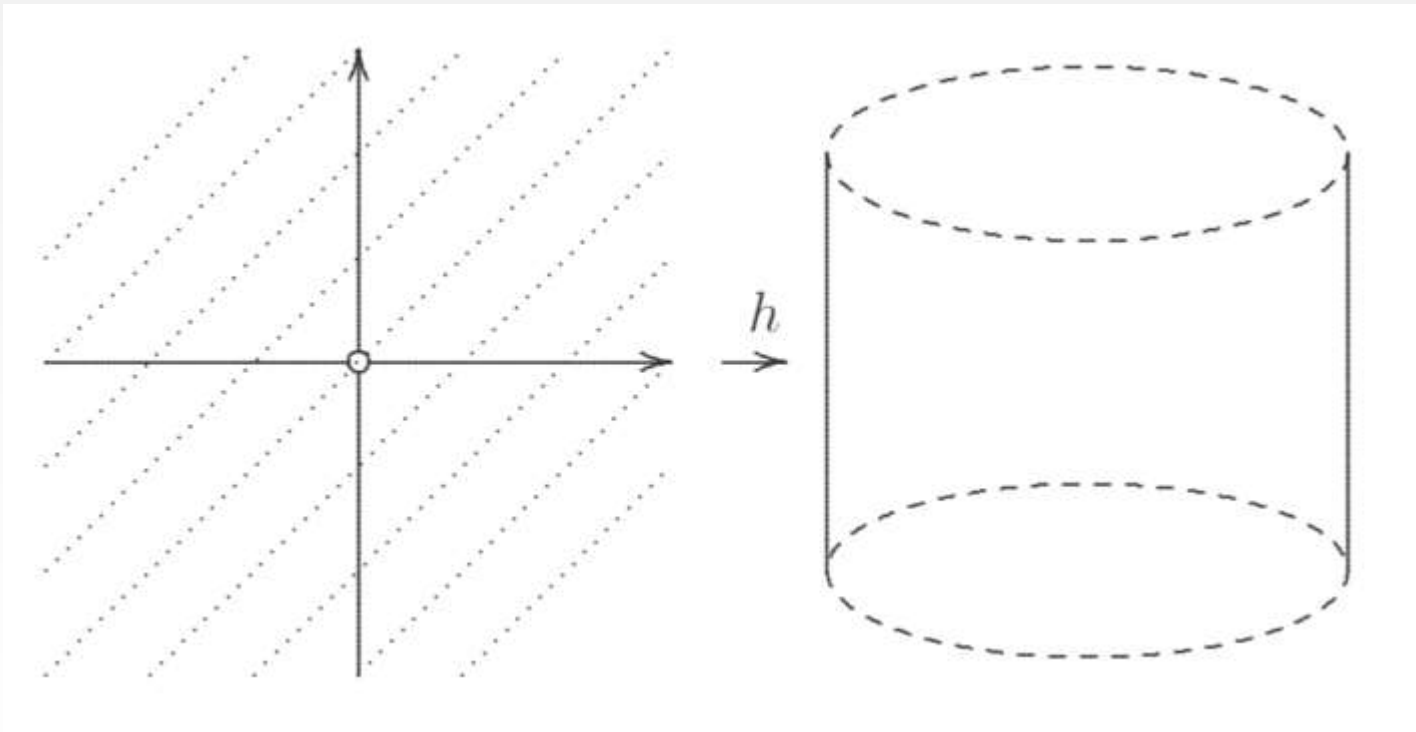
---

- ¿Dos cintas de Moebius con distinto número de giros? ¿Siempre?



## ¿Son homeomorfos?

- ¿El plano sin un punto y un cilindro infinito?



## Encuentra parejas de espacios homeomorfos y demuestra el homeomorfismo

---

- $\mathbb{R}$
- $S^1$
- $S^1 \setminus \{0\}$
- $(0; 1)$
- $[0; 2\pi)$
- $[0; 2\pi]$

## Importante: Por qué $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $[0; 2\pi)$

---

- Supongamos que existe un homeomorfismo  $f(x), [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1$
- $f(0) = P$  es un punto de la circunferencia
- A ambos lados de este punto hay puntos cerca
- Pero la  $f^{-1}(x)$  manda cerca los puntos que están a un lado y lejos los que están al otro
- ¿Lo podrás reformular en términos estrictamente matemáticos?

## ¿Son homeomorfos?

---

- $(0,1) \cap \mathbb{Q}$  y  $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

## ¿Son homeomorfos

---

- $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  con la topología canónica y  $\mathbb{N} \times [0; 1)$  con la topología del orden?

## ¿Son homeomorfos?

---

- $A_1 = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $A_2 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
- $B_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $B_2 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0\}$

## ¿Son homeomorfos?

---

- $\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}, A_n = \{1, 2, \dots, n\}\}$
- $\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}, B_n = \{n, n + 1, \dots\}\}$

## Conjuntos homogéneos

| Definición. Un conjunto  $X$  se llama **topológicamente homogéneo** cuando  $\forall a, b \in X$ , existe un homeomorfismo  $h: X \rightarrow X$  tal que  $h(a) = b$

- ¿Son homogéneos
  - $S^2$ ?
  - $S^1 \times S^1$  (un toro)?
  - $(0; 1)$ ?
  - $[0; 1]$ ?