Soluciones Probabilidad y Modelos Probabilísticos

Juan Rodríguez

December 23, 2025

1 Solución Ejercicio 1

- $p(A) = 0.6$
- $p(B) = 0.4$
- $p(T1) = 0.7$
- $p(T1 \cap T2) = 0.3$
- $p(T1 \cup T2) = 1$
- $p(C/A) = 0.1$
- $p(C/B) = 0.15$
- $p(C/T1) = 0.05$

C - Corte de llamada
a) Nos piden la probabilidad de que se corte la llamada (C) (Teorema de Probabilidad Total)

$$p(C) = p(C/A) \cdot p(A) + p(C/B) \cdot p(B) = (0.1 \cdot 0.6) + (0.15 \cdot 0.4) = \boxed{0.12}$$

b) Nos piden la probabilidad de T2 y no T1

$$p(T1 \cup T2) = p(T1) + p(T2) - p(T1 \cap T2) \rightarrow p(T2) = p(T1 \cup T2) - p(T1) + p(T1 \cap T2) = 1 - 0.7 + 0.3 = 0.6$$

$$p(T2 \cap \bar{T}1) = p(T2) - p(T1 \cap T2) = 0.6 - 0.3 = \boxed{0.3}$$

c) Nos piden la probabilidad de T1 condicionado por C

$$p(C/T1) = p(C \cap T1)/p(T1) \rightarrow p(C \cap T1) = p(T1) \cdot p(C/T1) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

$$p(T1/C) = 0.035/0.12 = 0.292$$

d) Nos piden la probabilidad de C condicionado por no T1

$$p(C/\bar{T}1) = p(C \cap \bar{T}1)/p(\bar{T}1) = (p(C) - p(C \cap T1))/1 - p(T1) = \frac{0.12 - 0.035}{0.3} = \boxed{0.28}$$

2 Solución Ejercicio 2

- $p(R) = 24/86 = 0.28$
- $p(D) = 68/86 = 0.79$
- $p(D \cup R) = 1$
- $p(C/R) = 0.65$
- $p(C/D) = 0.8$

R - Robos, D - Daños, C - Compensaciones
a) Nos piden la intersección de robos y daños

$$p(R \cup D) = p(R) + p(D) - p(R \cap D) \rightarrow p(R \cap D) = p(R) + p(D) - p(R \cap D) = 0.28 + 0.79 - 1 = \boxed{0.07}$$

b) Si los sucesos son independientes, verifican que $p(R \cap D) = p(R) \cdot p(D)$, pero $0.07 \neq 0.28 \cdot 0.79 = 0.22$. Por lo tanto, no son independientes
c) Nos piden R y no C (C = compensación)

$$p(R \cap \bar{C}) = p(\bar{C}/R) \cdot p(R) = (1 - p(C/R)) \cdot p(R) = 0.35 \cdot 0.28 = \boxed{0.098}$$

d) Nos piden D y C

$$p(D \cap C) = p(C/D) \cdot p(D) = 0.8 \cdot 0.79 = \boxed{0.63}$$

3 Solución Ejercicio 3

- $p(E) = 0.01$
- $p(P/E) = 0.97$
- $p(\bar{P}/\bar{E}) = 0.98 \rightarrow p(P/\bar{E}) = 0.02$

a) Nos piden la probabilidad de que de positivo y este enfermo

$$p(P \cap E) = p(P/E) \cdot p(E) = 0.97 \cdot 0.01 = \boxed{0.0097}$$

b) Nos piden la probabilidad de que este enfermo sabiendo que ha dado positivo (Bayes)

$$p(P) = p(P/E) \cdot p(E) + p(P/\bar{E}) \cdot p(\bar{E}) = (0.97 \cdot 0.01) + (0.02 \cdot 0.99) = 0.0295$$

$$p(E/P) = p(E \cap P)/p(P) = \frac{0.097}{0.0295} = \boxed{0.33}$$

4 Solución Ejercicio 4

- $p(\bar{A}) = \frac{2}{3} \to p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- $p(S/A) = \frac{1}{2}$
- $p(\bar{S}/A) = \frac{1}{2}$
- $p(\bar{S}/\bar{A}) = 0.25 \to p(S/\bar{A}) = 1 - 0.25 = 0.75$

A - Asistir a clase, S - Suspender el examen
Nos piden la probabilidad de que haya asistido a clase sabiendo que ha suspendido (Bayes)

$$p(S) = p(S/A) \cdot p(A) + p(S/\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}) + (0.75 \cdot \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$p(S/A) = p(A \cap S)/p(A) \to p(A \cap S) = p(S/A) \cdot p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p(A/S) = p(A \cap S)/p(S) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \boxed{0.25}$$

5 Solución Ejercicio 5

a) Nos piden la probabilidad de que ninguna empresa (0) presente suspensión de pagos durante un trimestre. Por lo tanto definimos:
X $\equiv$ número de empresas en suspensión de pagos al trimestre $\quad P(1.7)$

$$P(X = 0) = e^{-1.7}\frac{1.7^0}{0!} = \boxed{e^{-1.7}}$$

b) Nos piden la probabilidad de que al menos dos empresas presenten suspensión de pagos durante un año. Por lo tanto definimos:
Y $\equiv$ número de empresas en suspensión de pagos al año $\quad P(6.8)$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = \boxed{1 - (e^{-6.8}\frac{6.8^0}{0!} + e^{-6.8}\frac{6.8^1}{1!})}$$

6 Solución Ejercicio 6

Nos piden encontrar el radio donde encontrar al menos una langosta tenga probabilidad de 0.99. Por lo tanto definimos:
X $\equiv$ número de langostas por kilómetro cuadrado $\quad P(2)$
$\to$ en k kilómetros cuadrados $\quad P(2k)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2k}\frac{2k^0}{0!} = 0.99 \to e^{-2k} = 1 - 0.99$$

$$\to ln(e^{-2k}) = ln(0.01) \to k = \frac{-4.605}{-2} = 2.3$$

$$\pi r^2 = 2.3 \to \boxed{r = 0.856km}$$

7 Solución Ejercicio 7

a) Definimos lo siguiente: X $\equiv$ dureza de las probetas $\quad N(70;3)$

$$p(67 \leq X \leq 75) = p(\frac{67-70}{3} \leq \frac{X-70}{3} \leq \frac{75-70}{3}) = p(-1 \leq Z \leq 1.67) = 0.9525{-}0.1587 = \boxed{0.7938}$$

b) Primero definimos una variable de bernouilli

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si dureza} < 73.84 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p(X < 73.84) = p(\frac{X-70}{3} < \frac{73.84-70}{3}) = p(Z < 1.28) = 0.8997$$

$p = 0.8997; q = 0.1003$
Ahora definimos una distribución binomial - Y $\equiv$ número de probetas con dureza $< 73.84 \quad B(10, 0.8997)$

$$p(Y \leq 8) = 1 - p(Y > 8) = 1 - (p(Y = 9) + p(Y = 10)) =$$

$$= \boxed{1 - (\binom{10}{9} 0.8997^9 \cdot 0.1003^1 + \binom{10}{10} 0.8997^{10} \cdot 0.1003^0)}$$

c) Definimos una distribución binomial - T $\equiv$ número de probetas con dureza $< 73.84 \quad B(100, 0.8997)$
Pero podemos aproximarla con una normal $\quad N(89, 97, 3)$

$$p(T \leq 80) = p(\frac{T - 89.97}{3} \leq \frac{80 - 89.97}{3}) = p(Z \leq -3.32) = \boxed{0.005}$$

8 Solución Ejercicio 8

Definimos la variable $T \equiv$ tiempo antes de fallar $\quad E(\frac{1}{5})$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

a) Primero definimos una variable de Bernouilli:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si tiempo antes de fallar} > 8 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$p(T > 8) = 1 - F(8) = 0.2$$

$p = 0.2; q = 0.8$
Ahora definimos una distribución binomial - X $\equiv$ Número de componentes que siguen funcionando al cabo de 8 años $\quad B(7; 0, 2)$

$$p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = \boxed{1 - (\binom{7}{0}(0.2)^0(0.8)^7) - (\binom{7}{1}(0.2)^1(0.8)^6)}$$

b) Reutilizamos la variable de bernouilli definida en el apartado a) - X_i

Ahora definimos una distribución binomial - Y $\equiv$ Número de componentes que siguen funcionando al cabo de 8 años $\quad B(20; 0, 2)$

Calculamos la probabilidad de que no funcione ninguna componente del lote

$$p(Y = 0) = \binom{20}{0}(0.2)^0(0.8)^{20} = 0.0115$$

Ahora definimos una segunda distribución binomial (para los lotes) - N $\equiv$ Número de lotes de 20 componentes que no funcionan ninguna al cabo de 8 años $B(4; 0, 0115)$

Calculamos la probabilidad de que al menos un lote cumpla dichas condiciones

$$p(N \geq 1) = 1 - p(N < 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - (\binom{4}{0}(0.0115)^0(0.9885)^4) = \boxed{0.045}$$

c)

$$F(10) = 1 - f(10) = 1 - e^{\frac{-10}{5}} = \boxed{1 - e^{-2}}$$

d) Para hallar hasta el tercer éxito, debemos usar una binomial negativa. Por lo tanto, definimos la siguiente variable reutilizando la variable de bernouilli del apartado a). $K \equiv$ Número de componentes fallidas hasta el tercer éxito $BN(3; 0, 2)$

Nos piden hallar el valor medio:

$$\mu = \frac{3 * 0.8}{0.2} = 12$$

Por lo tanto necesitamos un total de 15 componentes de media (12 fallos y 3 exitos) para alcanzar 3 exitos