Continuidad y convergencia

Topología - 2

Georgy Nuzhdin

2022-2023

Bolas abiertas / Entornos abiertos

| **Definición**: Si (X, d) es un espacio métrico, para cada punto $x \in X$ una **bola abierta** de radio ε es

- $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$

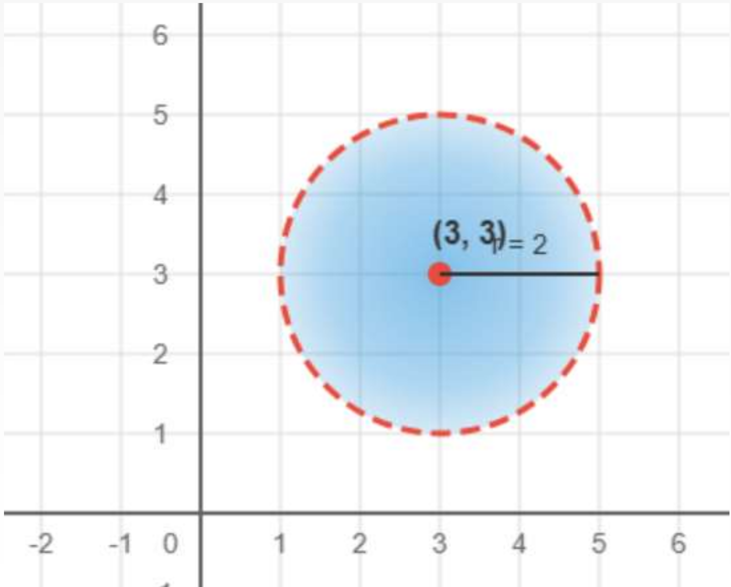
Bolas cerradas / Entornos cerrados

| **Definición**: Si (X, d) es un espacio métrico, para cada punto $x \in X$ una **bola cerrada** de radio ε es

- $\overline{B_\varepsilon}(x) = \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$

Dibuja la bola abierta

- $B_2(3)$ en $\mathbb{R}$
- Respuesta: intervalo abierto $(1,5)$
- $B_2((3,3))$ en $\mathbb{R}^2$
- Respuesta: $\{(x,y)|(x-3)^2+(y-3)^2 < 4\}$

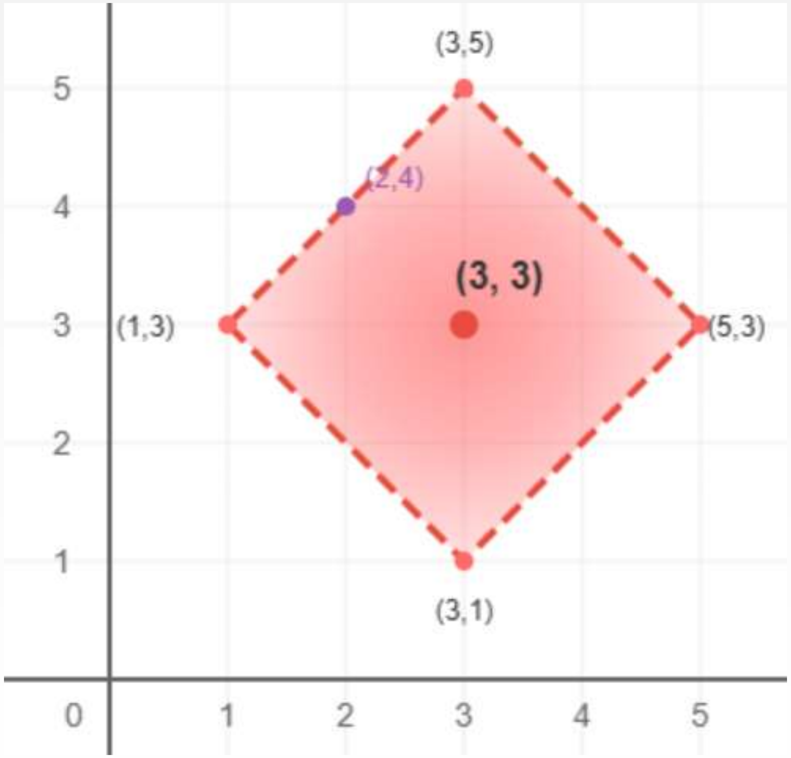


Se os ha olvidado preguntar de qué distancia se trata…

- Dibuja $B_2((3,3))$ en la
  - Taxicab
  - Distancia del máximo
  - Discreta
  - Hamming (discreta por coordenadas)

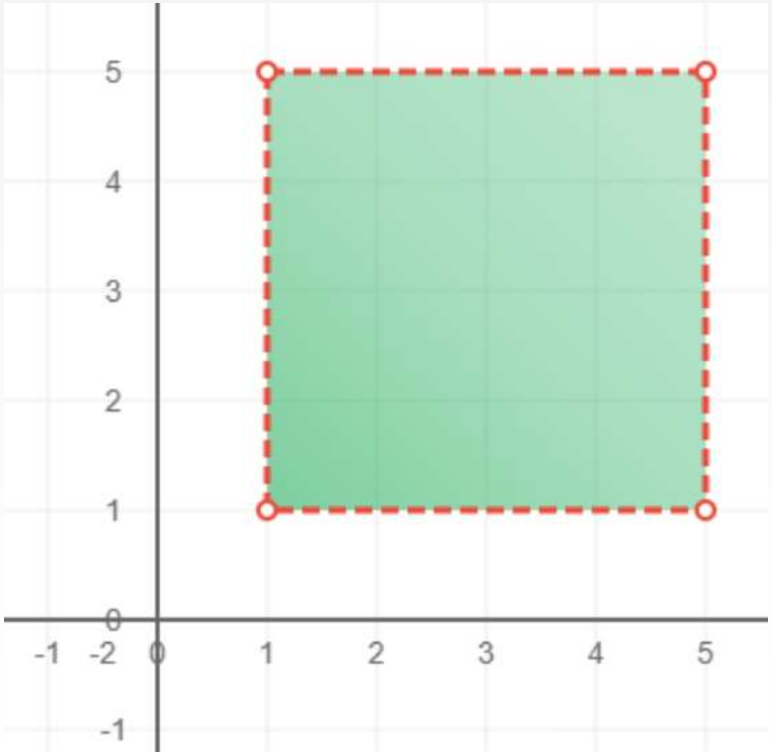
Se os ha olvidado preguntar de qué distancia se trata…

- Dibuja $B_2((3,3))$ en
  - Taxicab



Se os ha olvidado preguntar de qué distancia se trata…

- Dibuja $B_2((3,3))$ en la
  - Distancia del máximo

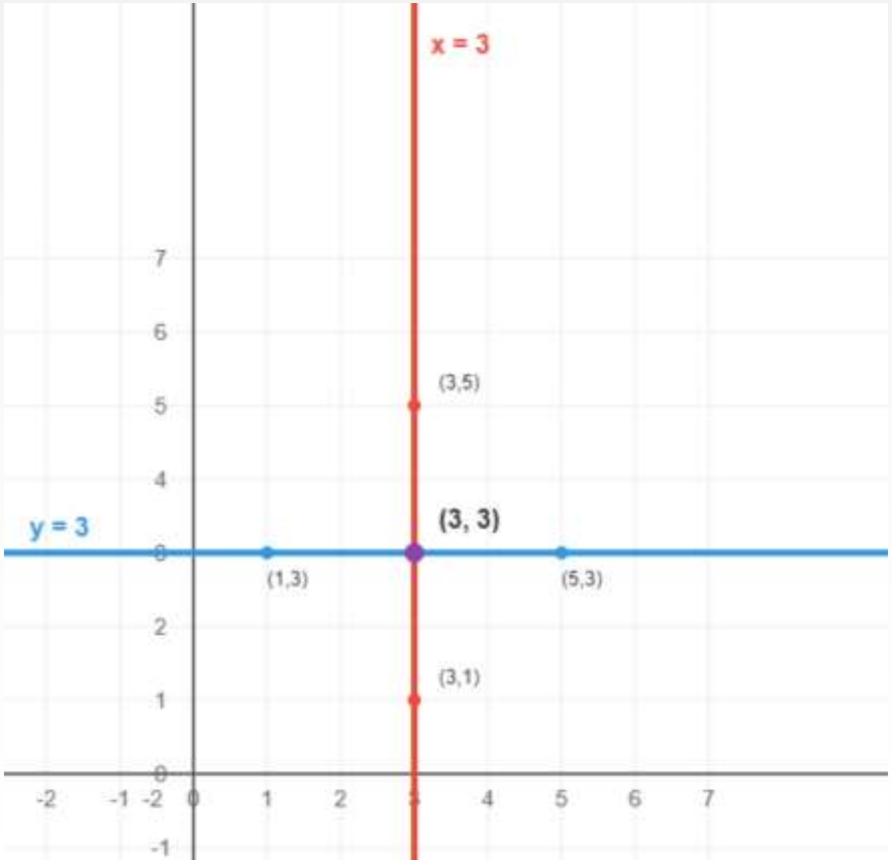


Se os ha olvidado preguntar de qué distancia se trata…

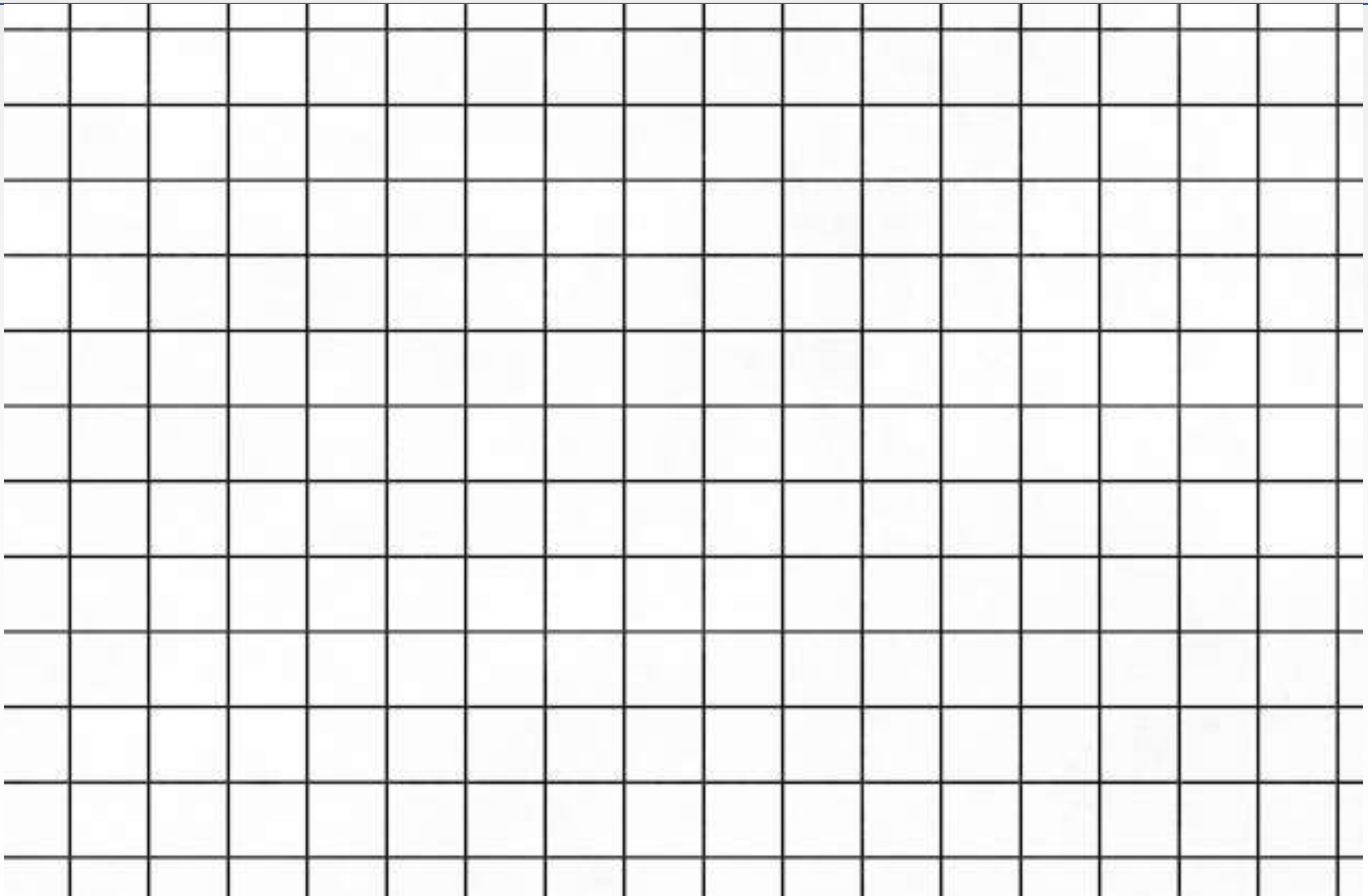
- Dibuja $B_2((3,3))$ en la
  - Distancia discreta
  - ¡Es todo el plano!

Se os ha olvidado preguntar de qué distancia se trata…

- Dibuja $B_2((3,3))$ en la
  - Hamming
  - Es una cruz



Modelizando la vida: autómatas celulares



Entornos en autómatas celulares

- El Juego Life de Conway
- Modelización de una pandemia

Conjuntos abiertos y cerrados

| Un conjunto se llama **abierto** si cualquier punto suyo tiene un entorno abierto que está completamente dentro del conjunto

| Un punto se llama **fronterizo** si cualquier entorno suyo tiene puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no le pertenecen

| El conjunto se llama **cerrado** si su frontera le pertenece

¿Son abiertos o cerrados?

- [3; 5]
- (3; 5)
- El punto 3 en la recta numérica
- $\mathbb{R}$

¿Son abiertos o cerrados?

- [3; 5] sí
- (3; 5) no
- El punto 3 en la recta numérica: sí
- $\mathbb{R}$: es abierto y cerrado a la vez

¿Son abiertos o cerrados?

- $\{(x, y) |\ x^2 + y^2 < 9\}$
- $\{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 9\}$
- $\{(x, y) |\ 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) |\ x^2 + y^2 < 9\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 9\}$

¿Son abiertos o cerrados?

- $\{(x, y) | \ x^2 + y^2 < 9\}$ abierto
- $\{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 9\}$ cerrado
- $\{(x, y) | \ 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$ NI ABIERTO NI CERRADO
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | \ x^2 + y^2 < 9\}$ cerrado
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 9\}$ abierto

Os habréis dado cuenta de que

- El complemento de un abierto (TODO menos un abierto) es un
- CERRADO
- El complemento de un cerrado (TODO menos un cerrado) es un
- ABIERTO

¿Es abierto o cerrado el conjunto $\mathbb{Q}\ en\ \mathbb{R}$?

- Es cerrado porque cualquier entorno de un número racional q tiene puntos racionales e irracionales, es decir, q es un punto fronterizo

¿Es abierto o cerrado el conjunto de los puntos irracionales $en\ \mathbb{R}$?

- Es cerrado porque cualquier entorno de un número irracional *q* tiene puntos racionales e irracionales, es decir, *q* es un punto fronterizo

¿Es abierto o cerrado $\mathbb{R}\ en\ \mathbb{R}^2$?

- Es cerrado porque cualquier bola abierta alrededor de un punto de la recta tiene puntos que no pertenecen a la recta
- Conclusión importante: los espacios no son abiertos o cerrados “en abstracto” son abiertos o cerrados respecto al universo en el que se encuentran
- $\mathbb{R}\ en\ \mathbb{R}$ es abierto y cerrado, en cambio, $\mathbb{R}\ en\ \mathbb{R}^2$ es solamente cerrado

¿Puede la unión infinita de conjuntos cerrados ser conjunto abierto?

- La respuesta es SÍ

Ejemplo importante

- $Sean\, C_i = [\frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}]$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_i = ?$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_i = (0; 2)$

¿Puede la unión infinita de conjuntos abiertos ser conjunto cerrado?

- La respuesta es NO
- Demostración:
- Supongamos que $\exists\, C\ (cerrado){:}\, C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n$ son abiertos
- Ya que C es un conjunto cerrado, tiene al menos un punto fronterizo x. Esto supone que **cualquier bola abierta** alrededor de x tiene puntos dentro de C y puntos fuera
- Pero (!! Momento central !!) este punto x viene de algún A_k (si no no estaría en la unión). Al pertenecer a un abierto, tiene alrededor **una bola abierta que está completamente dentro** de este A_k(y, por tanto, dentro de C). Contradicción.

Dos preguntas más

- ¿Puede la intersección infinita de conjuntos cerrados ser conjunto abierto?
- ¿Puede la intersección infinita de conjuntos abiertos ser conjunto cerrado?

Dos respuestas más

- ¿Puede la intersección infinita de conjuntos cerrados ser conjunto abierto?
- NO. El complemento de la intersección de cerrados es unión de abiertos. Acabamos de demostrar que la unión de abiertos es siempre abierta, por lo que su complemento (intersección de cerrados) es siempre cerrado
- ¿Puede la intersección infinita de conjuntos abiertos ser conjunto cerrado?
- SÍ. Ejemplo: $\cap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0; 1]$

Demuestra que cualquier bola abierta es abierta

- Basta demostrar que cualquier punto x de la bola abierta tiene alrededor una pequeña bola abierta que cabe íntegramente dentro de la grande
- Para ello, elijamos una bola de radio = radio de la bola grande – la distancia del centro de la bola grande al punto x
- Luego usemos la desigualdad triangular

Demuestra que el complementario de una bola abierta es cerrado y al revés

- Primero demostraremos la frontera de cualquier abierto A es la misma que la de su complementario $X \setminus A$
- Cualquier bola abierta alrededor de un punto de la frontera de A tiene puntos de A y puntos de $X \setminus A$
- Por eso ¡también pertenece a la frontera de $X \setminus A$!
- Y viceversa, cualquier bola alrededor de un punto fronterizo de $X \setminus A$ tiene puntos dentro y puntos fuera, por tanto, es frontera de A
- Como la frontera de un abierto no le pertenece, ¡debe pertenecer a su complementario!

Entendiendo la continuidad

Imagínate que el gobierno decide trasladar a todos los madrileños a Santander. Este traslado será continuo si cada pareja de vecinos madrileños siguen siendo vecinos en Santander.

Trasladarlo al lenguaje matemático no es tan fácil, así que ¡prepárate! Vamos a coger a un madrileño, es decir, un punto x_0. ¿Qué puntos están cerca?

Si llamamos una corta distancia δ, los "vecinos madrileños", los puntos que están a menor distancia de x_0 satisfacen $|x - x_0| < \delta$. Ahora tenemos que decir que deben estar cerca en Santander. Pero no podemos usar la misma letra (Santander tiene otra dimensión que Madrid, de modo que "cerca" en Santander no es lo mismo que "cerca" en Madrid), así que llamemos ϵ esta nueva distancia de cercanía. Los puntos cercanos a $f(x_0)$ son, por tanto los que distan menos de épsilon, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. ¡Ya estamos preparados!

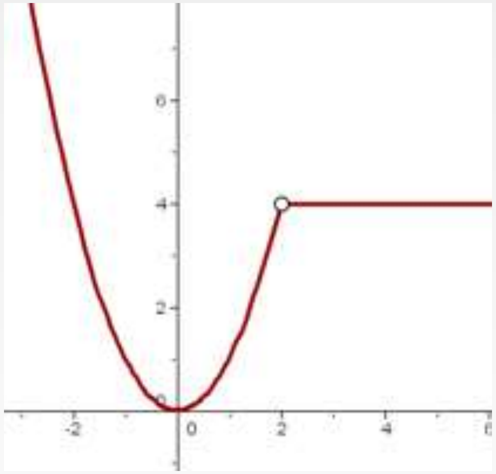
Función continua

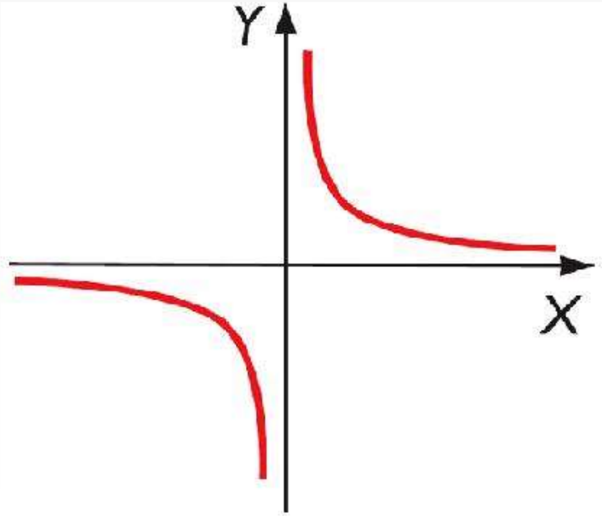
| **Definición**: Si $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ son espacios métricos, la función $f: X_1 \to X_2$ se llama **continua en** $\boldsymbol{x} \in X_1$ si y solo si

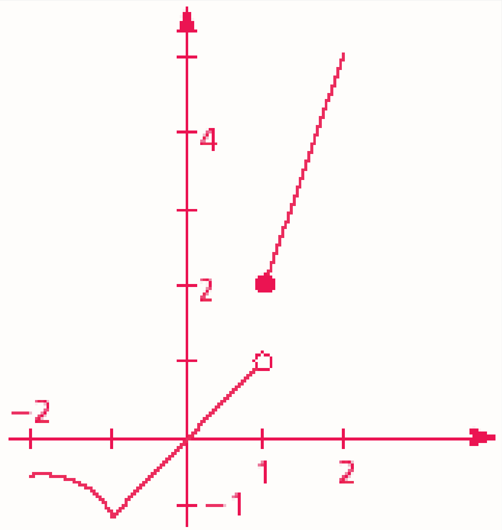
- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0: f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$

| **Definición**: la función $f: X_1 \to X_2$ se llama **continua** si lo es en todos los puntos de su dominio

¿Son continuas estas funciones con la distancia euclidiana?







¿Por qué $y = 1/x$ es continua?

Elijamos un ϵ positivo, es decir, lo de cerca que queremos que estén los vecinos madrileños en Santander. Queremos que

$$|(f(x) - f(x_0)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} < \epsilon$$

Vamos a construir un δ, una vecindad en Madrid que garantice que esto se cumpla. Fijaros en que el numerador debe ser menor que δ. Así

$$\frac{\delta}{|x \cdot x_0|} < \epsilon$$

No sabemos cuánto vale $|x|$ (si es muy pequeño puede aumentar mucho la fracción y fastidiarnos la desigualdad), pero no vale menos que $|x_0| - \delta$ porque está cerca. Así que

$$|x| > |x_0| - \delta \Rightarrow \frac{\delta}{|x \cdot x_0|} < \frac{\delta}{|(|x_0| - \delta) \cdot x_0|}$$

y si

$$\delta < \epsilon \cdot |x_0| \cdot (|x_0| - \delta)$$

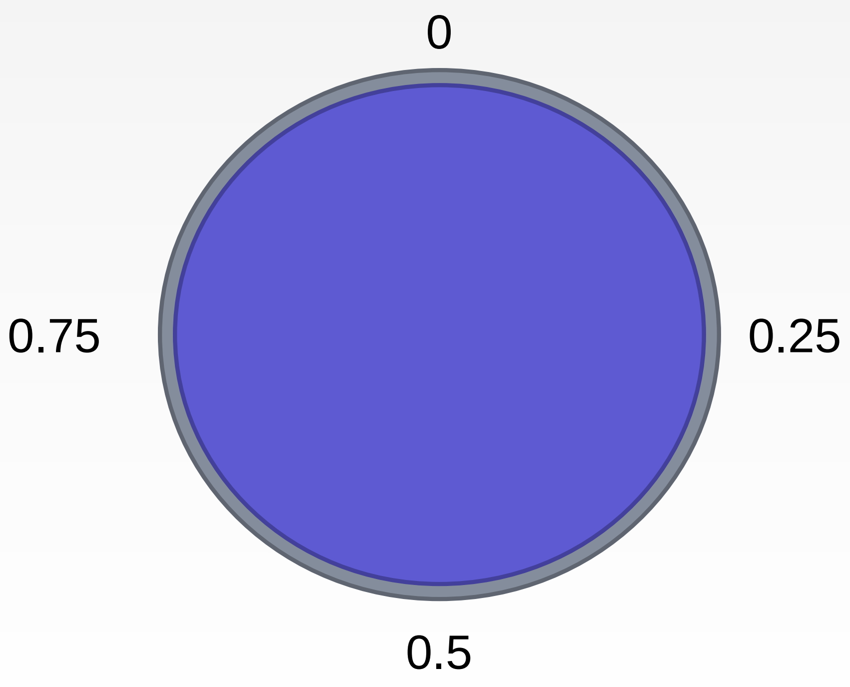
entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Así que pondremos

$$\delta = \frac{\epsilon \cdot |x_0| \cdot |x_0|}{1 + \epsilon \cdot |x_0|}$$

y ¡el éxito está garantizado!

Si consideramos el intervalo [0; 1)

- Con esta distancia: $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$
- Calcula
  - $d(0.1, 0.4)$
  - $d(0.1, 0.8)$
- Imagínate que nuestro intervalo es un camino circular para ciclistas
- ¿Se entiende mejor esta distancia?



¿Son estas funciones continuas en $X = [0;1)$?

- $f(x) = x \; con \; la \; distancia \; d(x,y) = |x-y|$
- $f(x) = x \; con \; la \; distancia \; d(x,y) = \min(|x-y|, 1-|x$

Si $d(x,y) = \min(|x-y|, 1-|x-y|)$

Inventa una función continua y no constante en [0; 1) con esta métrica

Por ejemplo, $y = x(x-1)$

¿Qué es una curva?

Inventa una definición para

- Curva finita
- Curva infinita
- Curva cerrada

Sucesión convergente

| **Definición**: Una sucesión de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ **converge al punto** $x \in X$ si

- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N: x_n \subset B_\varepsilon(x)$

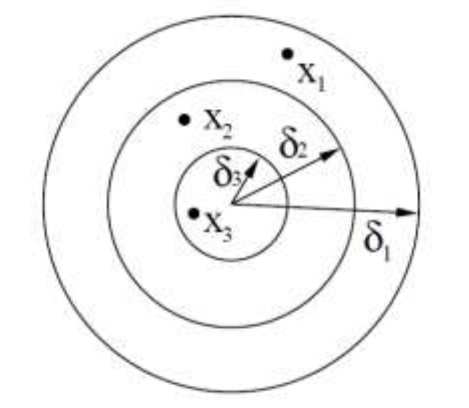
Tal sucesión se llama **convergente**

Teorema de continuidad y convergencia

- *Sea $f\colon (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ una función entre espacios métricos.*
- *La función f es continua en $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión x_n convergiendo a x se cumple que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.*
- ⇒ Si es continua, converge
- Si f es continua en x $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0{:}\ f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$
- La sucesión x_n converge a x, por tanto, a partir de algún momento estarán todos los elementos dentro de la bola $B_\delta(x)$. Pero su imagen está en $B_\varepsilon(f(x))$. Esto significa que la imagen de la sucesión converge a $f(x)$

Teorema de continuidad y convergencia

- *Sea $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ una función entre espacios métricos.*
- *La función f es continua en $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión x_n convergiendo a x se cumple que $f(x_n)$ converge a $f(x)$.*



- $\Leftarrow$ Si converge, es continua
- Vamos a demostrar que f es continua en $\forall\, x$. Supondremos lo contrario. Entonces
- $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\colon f(B_\delta(x)) \not\subset\ B_\varepsilon(f(x))$
- Consideremos $\delta = \frac{1}{n}$ y una sucesión x_n que converja a x y cuyas imágenes no estén en $B_\varepsilon(f(x))$. Resulta que la sucesión $f(x_n)$ no puede converger a $f(x)$. Contradicción

Redefiniendo la continuidad

| Teorema. Una función es continua si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta

⇒ Si $f(x): X \to Y$ es continua, la preimagen de un conjunto abierto es abierta

- Elijamos un conjunto abierto $\mathrm{U} \subset Y$
  Sea $V = f^{-1}(U)$. Tenemos que demostrar que es abierto
- Supongamos lo contrario. Entonces tendrá un punto fronterizo $x \in V$ tal que cualquier entorno suyo tendrá puntos dentro y fuera de V
- Construiremos una sucesión de puntos x_i que converja a x **fuera** de V. Sus imágenes convergerán a $f(x) \in \mathrm{U}$. Pero ninguno de $f(x_i) \notin \mathrm{U}$, ya que $x_i \notin V$. Entonces $f(x)$ está en la frontera del conjunto abierto U. Contradicción

Redefiniendo la continuidad

- $\Leftarrow$ Si la preimagen del abierto U es abierta, la función es continua
- Esta parte es casi trivial. Si la preimagen es abierta, en torno al punto x hay una bola abierta que está completamente dentro de la preimagen. La imagen de esta bola está dentro de la imagen U, por tanto, se cumple la definición de la continuidad

La composición de funciones continuas

- *Demuestra que la composición de funciones continuas es una función continua*

Métricas en el conjunto de funciones en [0; 1]

- *Métrica integral:* $d(f,h) = \int_0^1 |f(x) - h(x)|dx$
- *Métrica mínima cota superior:* $d(f,h) = \sup(|f(x) - g(x)|)$

Convergencia uniforme

- Si tenemos una sucesión de f_n que convergen a f.
  Es decir, $\forall x \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- ¿Es verdad que la función límite es continua?
- Consideremos la sucesión $f_n = x^n$
- ¿A qué función convergen?

Convergencia uniforme

- ¡Vamos a intentar mejorarlo!
- Suponemos que $\forall x \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- ¿Es verdad que $\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)$?
- Consideremos la sucesión $f_n = \begin{cases} n, x \in [0; \frac{1}{n}) \\ 0, x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$
- ¿A qué función convergen?

Funciones contractivas

- Son funciones que disminuyen la distancia entre cualquier pareja de puntos
- Formalmente,
- | **Definición**: La función $f: X \to X$ se llama **contractiva** si para $a, b \in X$ se cumple $d(f(a), f(b)) \leq Cd(a, b)$, donde $1 > C > 0$
- Inventa dos ejemplos de funciones contractivas en [0; 1]

¿Son contractivas?

- $f(x) = x^2 \; en \; [0, 0.1]$
- $f(x) = 2x \; en \; [0, 1]$
- $f(x) = \frac{x}{3} en \; [0,1]$
- $f(x) = x^2 - x/2 \; en \; [0, 0.5]$

¿Son contractivas?

- $f(x) = x^2$ *en* $[0, 0.1]$
  - *SÍ.* $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b$ *si* $a \neq b$*. El máximo de* $a + b$ *en este intervalo es 0.2. Poniendo c=0.3 se cumple*
- $f(x) = 2x$ *en* $[0, 1]$
  - NO. $f(1) - f(0) = 2(1 - 0)$
- $f(x) = \frac{x}{3}$ *en* $[0,1]$
  - SÍ. Ponemos $c = 0.5 \Rightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{1}{3} < 0.5$
- $f(x) = x^2 - x/2$ *en* $[0, 0.5]$
  - SÍ. $|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}| = |\frac{a^2-b^2-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}{a-b}| = |a + b - 0.5|$. El máximo es 0.5. Ponemos $c = 0.6$

Ejemplo importante: ¿por qué NO es contractiva

- $f(x) = x^2 \; en \; [0, 0.5]$?
- $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b \; si \, a \neq b.$
- $Pero \, \forall c < 1 \; \exists a, b \colon a + b > c$

¿Son contractivas?

- $f(x) = cosx\ en\ [0, \pi/2]$
- $f(x) = x + senx\ en\ [0, 2]$
- $f(x) = x + senx\ en\ [2, 4]$

¿Es contractiva $f(x) = cosx\ en\ [0, \pi/2]$?

- NO.
- Vamos a comparar $|\cos(x+a) - cosx|$ con $|(x+a) - x| = |a|$
- $\left|\frac{\cos(x+a)-cosx}{a}\right| = \left|\frac{-2sen\left(x+\frac{a}{2}\right)sen\frac{a}{2}}{a}\right| = \left|sen\left(x+\frac{a}{2}\right)\right| \cdot \left|\frac{sen\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right|$
- $\left|sen\left(x+\frac{a}{2}\right)\right| \leq 1, \left|\frac{sen\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right| < 1.$ *El producto es menor que 1 PERO*

$$\forall\ c < 1\ \exists a, x: \left|sen\left(x+\frac{a}{2}\right)\right| \cdot \left|\frac{sen\,\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right| > c$$

¿Es contractiva $f(x) = x + senx\ en\ [0,2]$?

- *NO.*
- *Basta comparar:*
- $d\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$
- $d\left(f(0), f(\frac{\pi}{2})\right) = \frac{\pi}{2} + 1$

¿Es contractiva $f(x) = x + senx\ en\ [2, 4]$?

- Sí.
- Por el Teorema del Valor Intermedio
- $d(f(a), f(b)) = |f(a) - f(b)| = f'(c)|a - b|$ para algún $c \in [2,4]$
- Pero la derivada $f'(x) = 1 + \cos x$ en el intervalo $[2,4]$ toma su máximo valor en $f'(2) \approx 0,6$
- Eligiendo $c = 0,7$ vemos que la función es contractiva

Punto fijo

| Definición. El punto x se llama punto fijo de la aplicación $f: X \to X$ si $f(x) = x$

¿Tienen un punto fijo estas aplicaciones?

- $f: [0;1] \rightarrow [0;1]\ f(x) = 4(x - x^2)$
- $f: (0;1) \rightarrow (0;1)\ f(x) = x^2$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\quad f(x) = x^2 - cos x$

Inventa alguna aplicación continua que tenga un único punto fijo

- $f: (0;1) \to (0;1)$
- $f: S^1 \to S^1$

Inventa alguna aplicación continua que tenga exactamente 3 puntos fijos

- $f: (0;1) \to (0;1)$
- $f: S^1 \to S^1$

Espacios completos

| **Definición**: El espacio X se llama **completo** si cualquier sucesión de Cauchí converge, es decir

- $\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n$

Teorema de Banach

- Si $f\colon X \to X$ es contractiva en el espacio completo X, entonces para cualquier x_0 la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$ converge al punto x y se da que $f(x) = x$
El punto fijo es único.

Teorema de Banach: demostración (1)

- Si $f: X \to X$ es contractiva en el espacio completo X, entonces para cualquier x_0 la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$ converge al punto x y se da que $f(x) = x$
  Este punto se llama “punto fijo” y es único.
- Primero demostraremos que de existir, este punto sería único.
- Supongamos que hay dos: $f(a) = a$ y $f(b) = b$
- La función f es contractiva, disminuye las distancias. Por tanto
- $f(a) - f(b) \leq C(a - b)$
- Esto solamente es posible si $a = b$

Teorema de Banach: demostración (2)

- Ahora demostraremos que la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$ converge
- Es suficiente demostrar que forman una sucesión fundamental (o de Cauchi), entonces, tendrán que converger
- Entonces necesitamos demostrar que $\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$
- Pongamos que $n = m + k$. Entonces
  - $d(x_n, x_m) \leq \mathrm{C}^{\mathrm{m}} d(x_0, x_k)$ ¿Por qué?
  - (porque hemos "contraído" la distancia *m* veces)
  - $\mathrm{C}^{\mathrm{m}} d(x_0, x_k) \leq \mathrm{C}^{\mathrm{m}}(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k))$ ¿Por qué?
  - $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}\big(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k)\big) \leq \mathrm{C}^{\mathrm{m}}\Big(d(x_0, x_1) + Cd(x_0, x_1) + \cdots$

Teorema de Banach: reflexiones

- ¿Puede ser cierto para un espacio abierto? ¿Siempre lo es?
- ¿Es cierto para $\mathbb{R}$?

Resolviendo ecuaciones con funciones contractivas

- Estamos buscando la solución de la ecuación $f(x) = 0$
- Sabemos buscar el punto fijo de una función contractiva mediante sucesión $\varphi(x_n) = x_{n+1}$
- Por tanto, queremos convertir la ecuación inicial en $\varphi(x) = x$ (porque sabemos buscar el punto fijo)
- Además, queremos que $\varphi'(x_n) = 0$
- Pongamos, $\varphi(x) = x + a(x)f(x)$ y busquemos $a(x)$
- $\varphi'(x) = 1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x) = 0.$
- Pero $f(x) = 0$, de ahí que $a(x) = -1/f'(x)$
- Conclusión: $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$

Resolviendo ecuaciones con funciones contractivas

- Resuelve la ecuación $x^2 = 4cosx$ usando: $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$

Teorema de Brouwer

- Cualquier morfismo continuo de una bola cerrada n-dimensional en sí misma tiene al menos un punto fijo
- Por ejemplo, si cojo una cucharilla y remuevo el café, siempre hay una gota que no ha cambiado de lugar
- ¿Es verdad para otros espacios?

Teorema de Borsuk-Ulam

Si $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ es continua entonces existe un $x \in S^n$ tal que: $f(-x) = f(x)$.

- Corolarios:
  - En cualquier anillo calentado al fuego hay dos puntos opuestos que tienen la misma temperatura
    - Esto se puede demostrar con Bolzano
  - En la Tierra existen dos puntos diametralmente opuestos que tienen la misma temperatura y presión
  - Cualquier campo de vectores tangentes a la esfera se anula en algún punto
    - POR TANTO:
    - No se puede peinar un erizo
    - En la Tierra hay un punto donde no sopla nada de viento