Variedades topológicas

Topología - 13

Georgy Nuzhdin

2022-2024

Variedades topológicas

- Una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico M Hausdorff y 2AN tal que cada punto p en M tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$
- Localmente, una variedad se ve como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, aunque globalmente puede tener una estructura muy diferente

¿Son variedades topológicas?

- $\mathbb{R}^n$
- S^n
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
- $(0,1) \in \mathbb{R}$ con la topología SRD

- Una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico M Hausdorff y 2AN tal que cada punto p en M tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$
- Localmente, una variedad se ve como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, aunque globalmente puede tener una estructura muy diferente

¿Son variedades topológicas?

- ¡El propio espacio $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica!
- Las esferas S^n localmente son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$ (la circunferencia localmente es un intervalo, la esfera bidimensional, un disco,…)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ NO. Cualquier entorno del origen $(0,0)$ es una cruz, que no es homeomorfa a $\mathbb{R}^1$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ SÍ. Localmente, un trozo de parábola es homeomorfo a un intervalo, de hecho, la propia parábola es homeomorfa a $\mathbb{R}^1$
- $(0,1) \in \mathbb{R}$ con la topología SRD. NO. No es Hausdorff

Cartas y Atlas

- Una **carta** en M es una pareja (U, φ) donde:
  - U es un subconjunto abierto de M
  - φ: $U \rightarrow V$ es un homeomorfismo a un abierto V contenido en $\mathbb{R}^n$
  - *φ asigna coordenadas a los puntos de U*

- Un **atlas** es una colección de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que los U_α cubren M.
- Es decir: M = $\cup_\alpha U_\alpha$

Funciones de transición

- Las cartas se solapan: algunos puntos de M pueden estar cubiertos por varias cartas
- Necesitamos poder pasar de una carta a otra para poder recorrer toda la variedad de forma continua y, además, que no haya contradicción entre las cartas
- Una **función de transición** de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ a (U_β, φ_β) es el homeomorfismo $\varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1}$

S^1: Variedad topológica

- ¿Qué abiertos hay en la circunferencia?
- Claramente, $S^1 \setminus \{p\}$
- Considera la carta $(S^1 \setminus \{cos90°, sin90°\}, \phi_1)$. ¿Cuál es$\phi_1$?
- ϕ es la proyección estereográfica $\phi_1(x, y) \; = \frac{x}{1-y}$
- Necesitamos otra carta para cubrir la circunferencia. ¿Cuál?
- Por ejemplo, $(S^1 \setminus \{cos - 90°, sin - 90°\}, \phi_2)$. $\phi_2 = \frac{x}{1+y}$
- Busca la función de transición
- $a = \frac{cos\alpha}{1-sin\alpha} \Rightarrow sin\alpha = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \; cos\alpha = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$
- Es $\phi_2 \phi_1^{-1}(a) = \frac{1}{a}$

S^2: Variedad topológica

- ¿Cuántas cartas necesitamos para cubrirla?
- Claramente, dos, la esfera sin el polo norte y sin el polo sur
- De nuevo el homeomorfismo viene dado por la proyección estereográfica

$\mathbb{R}^n$: Variedad topológica

- ¿Cuántas cartas necesitamos para cubrirla?
- Claramente, una, ella misma
- Ahora el homeomorfismo es…
- ¡la función identidad!

El espacio OCHO

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1 \cup (x+1)^2 + y^2 = 1\}$

- ¿Cuántas cartas hacen falta?
- Espera, espera…
- NO es una variedad topológica
- Hay un punto cuyo entorno no es isomorfo a ningún intervalo abierto porque…
- Al desconectarlo se forman ¡4 componentes conexas!

La parábola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

- ¿Cuántas cartas hacen falta?
- Con una basta
- El homeomorfismo con $\mathbb{R}$ es…
- La proyección al eje Ox

El plano proyectivo P^2

- Pensemos en el plano proyectivo como en el conjunto de rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$. Es decir, cada punto del plano proyectivo tiene coordenadas homogéneas $(x, y, z) \sim (kx, ky, kz)$
- ¿Cuántas cartas hacen falta?
- Hagamos las siguientes cartas: $C_0 = (x \neq 0, y, z), C_1 = (x, y \neq 0, z), C_3 = (x, y, z \neq 0)$. Es decir, cada carta cubre los puntos con coordenadas no nulas.
- El homeomorfismo con $\mathbb{R}^2$ para la primera carta es $\phi_0 : (x \neq 0, y, z) \rightarrow ..?$
- $\phi_0 : (x \neq 0, y, z) \rightarrow (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$
- Se define para las cartas restantes análogamente

Transiciones

- Calcula la transición de la carta 0 a la 1. ¿En qué dominio está definida?
- $\phi_0 : (x \neq 0, y, z) \to (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, $\phi_1 : (x, y \neq 0, z) \to (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$
- $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} =$
- $\phi_0^{-1}(a, b) = (1, a, b)$
- $\phi_1(1, a, b) = (\frac{1}{a}, \frac{b}{a})$
- La composición está definida en $(x \neq 0, y \neq 0, z)$