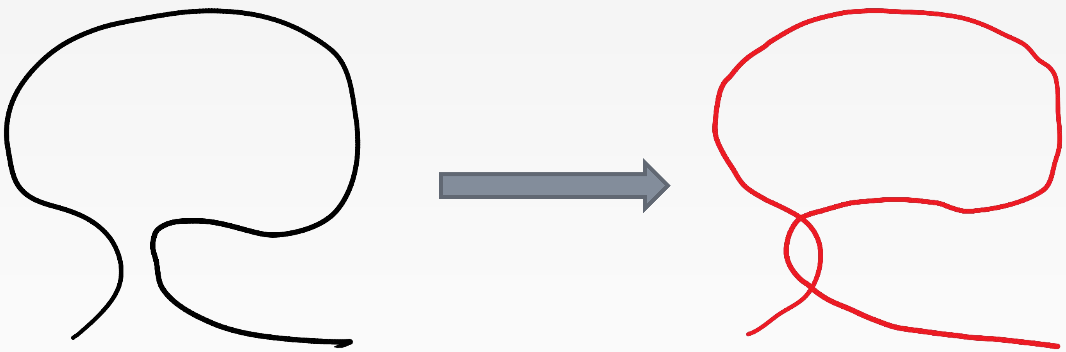
# La característica de Euler

Topología - 11

Georgy Nuzhdin
2022-2023

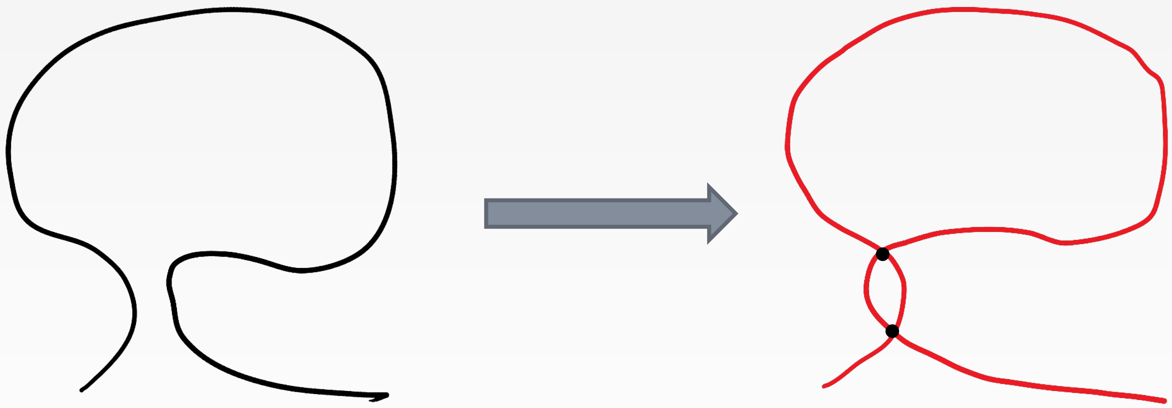
# Consideraciones previas

- Consideremos una curva $f:[0;1]\to G$
- ¿Es la cantidad de autointersecciones un invariante topológico?



# Pero… ¿algo se ha conservado?

- ¿Cuántos “trocitos” había y cuántos se han formado?
- ¿Cuántos vértices había y cuántos se han formado?
- ¿Cuántas zonas cerradas había y cuántas se han formado?

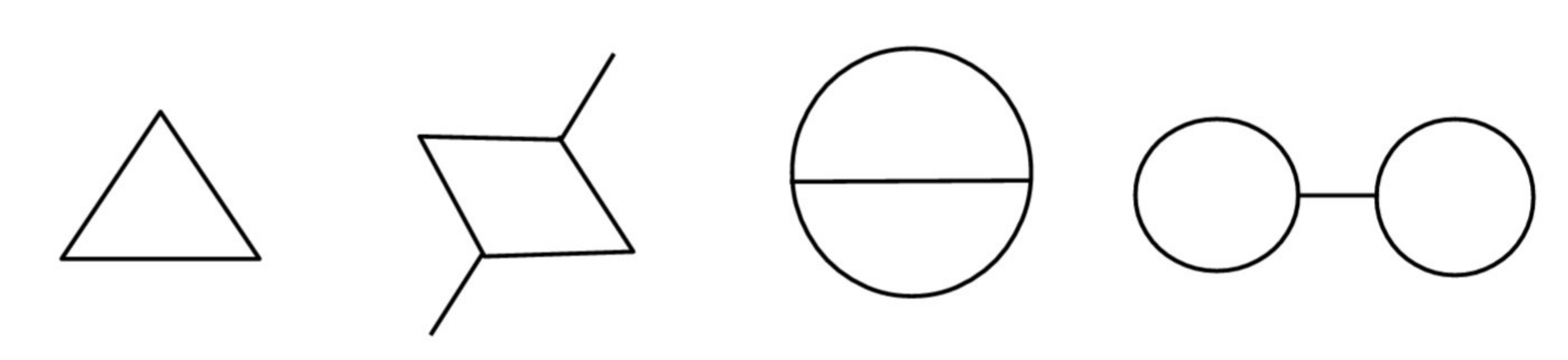


# La característica de Euler

| Definición. Dado un grafo en la superficie G, la característica de Euler es la cantidad de
$\chi =$ **zonas cerradas + vértices – aristas**

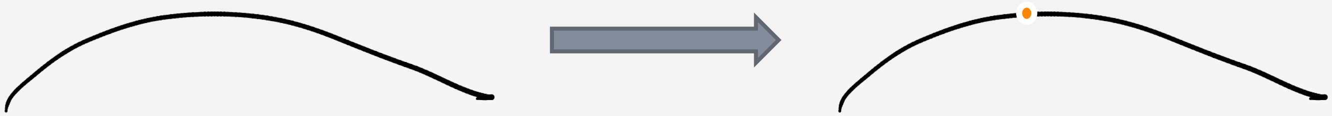
Recuerda que el "espacio exterior" cuenta como una zona cerrada

# Calcula la característica de Euler de estos grafos

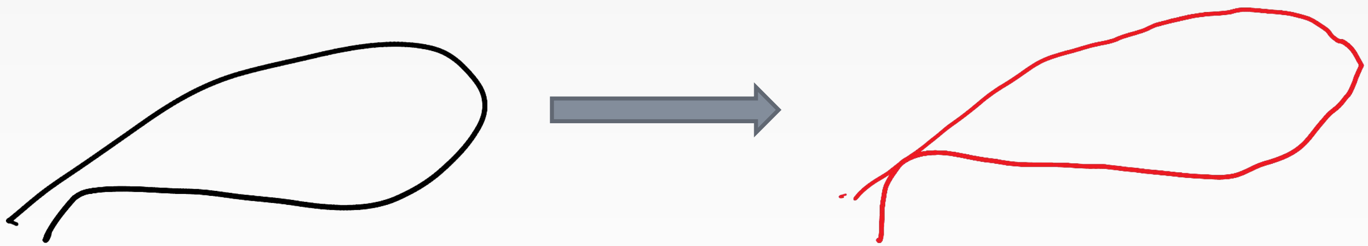


# La característica de Euler no varía con transformaciones continuas

¿Qué ocurre si añadimos un vértice en la curva?



¿Qué ocurre si la curva se interseca?

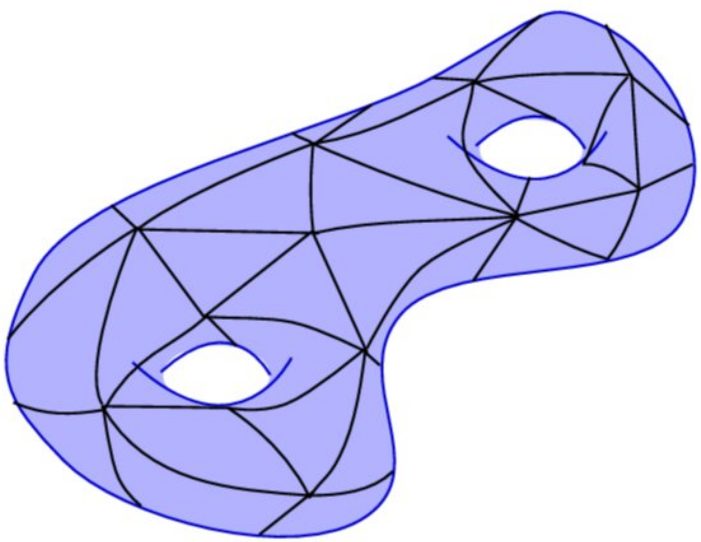


# Si la característica de Euler no depende del grafo

- ¿Para qué sirve?
- ¿De qué depende?

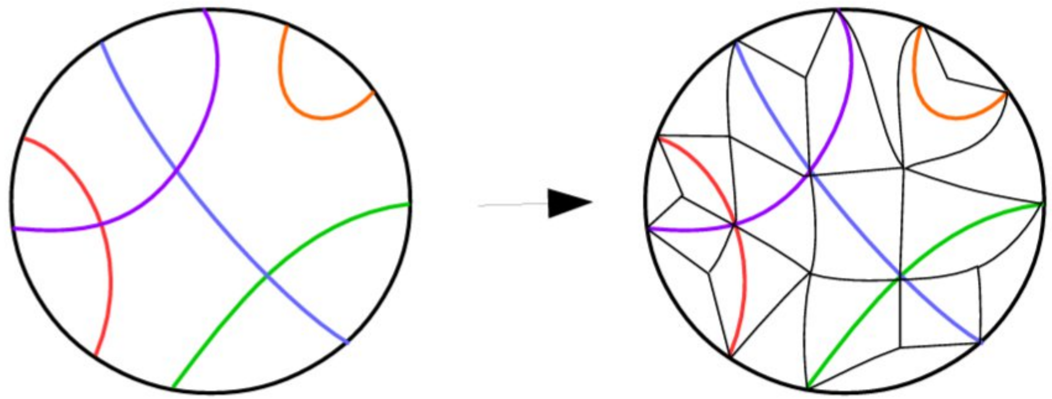
# Triangulaciones

| Definición. Una triangulación de una superficie es una división en triángulos topológicos (posiblemente con lados curvos) que se intersecan en aristas o vértices



# Cada superficie compacta admite una triangulación finita

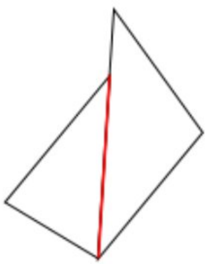
- Cada superficie localmente es isomorfa a un disco abierto
- Estos discos forman un recubrimiento abierto
- Por ser compacta, nuestra superficie admite un subrecubrimiento finito de regiones
- Estas regiones se tocan en vértices o aristas. Juntando todos los puntos de intersección se forma un grafo finito que podemos triangular



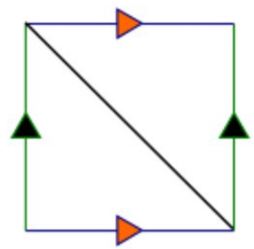
# Conversión de la superficie en disco poligonal

- Cada superficie compacta y conexa S puede obtenerse a partir de un disco poligonal P identificando sus lados de dos en dos
- Demostración. Como S se puede triangular, S es una unión finita de triángulos pegados por aristas. Como S es conexa, podemos numerar los triángulos de modo que cada triángulo $T_i$ tenga (al menos) una arista en común con alguno de los anteriores.
- El disco P se obtiene empezando con $T_1$, pegándole $T_2$ a lo largo de una arista, y así hasta pegar $T_n$ a $T_1 \bigcup T_2 \bigcup T_3 ... T_{n-1}$ a lo largo de una arista.

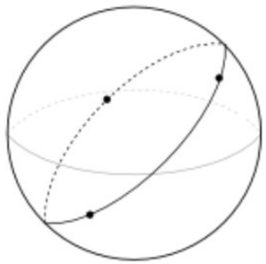
# Triangulaciones: The Good, the Bad and the Ugly



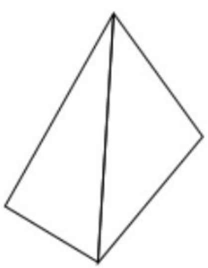
Bad: intersection is not a complete side of one of the triangles



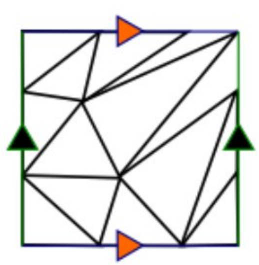
Bad: not a triangulation, since the two "triangles" are in fact not triangles at all



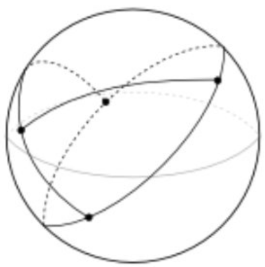
Bad: while this does divide the sphere into two triangles, their intersection consists of three sides and verticies, which is not allowed



Good!

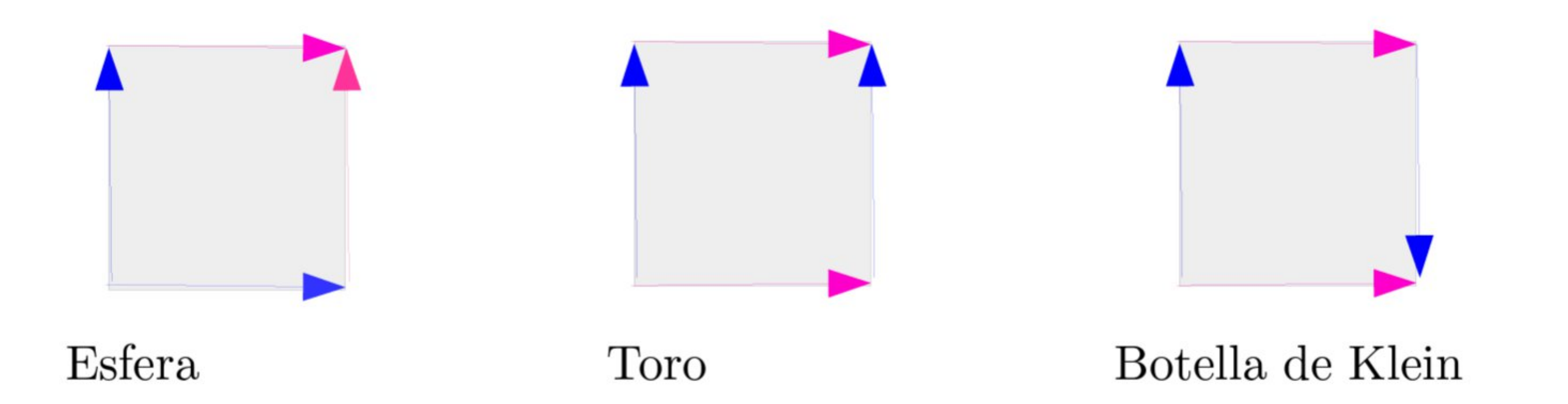


Ugly, but a triangulation!

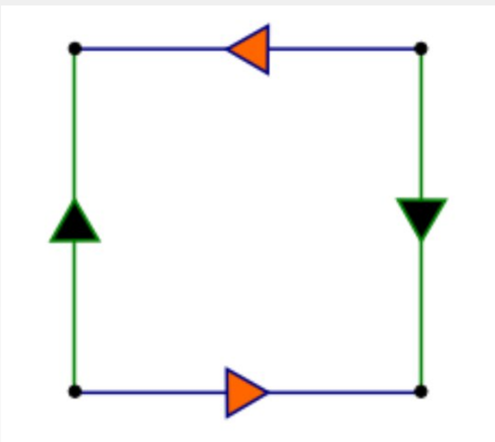


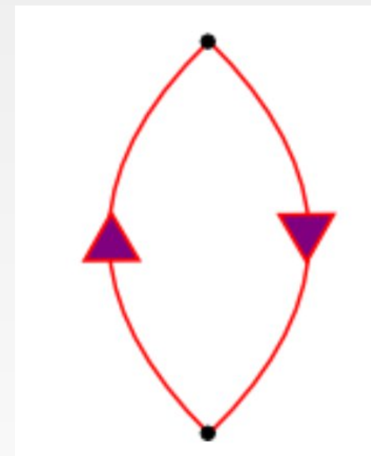
Good!

# Ejemplos de pegados

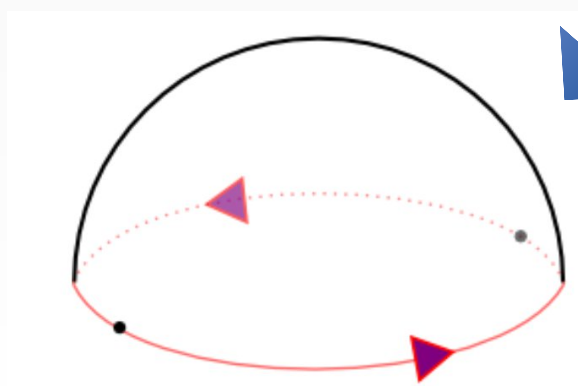


# ¿Qué son estas superficies?



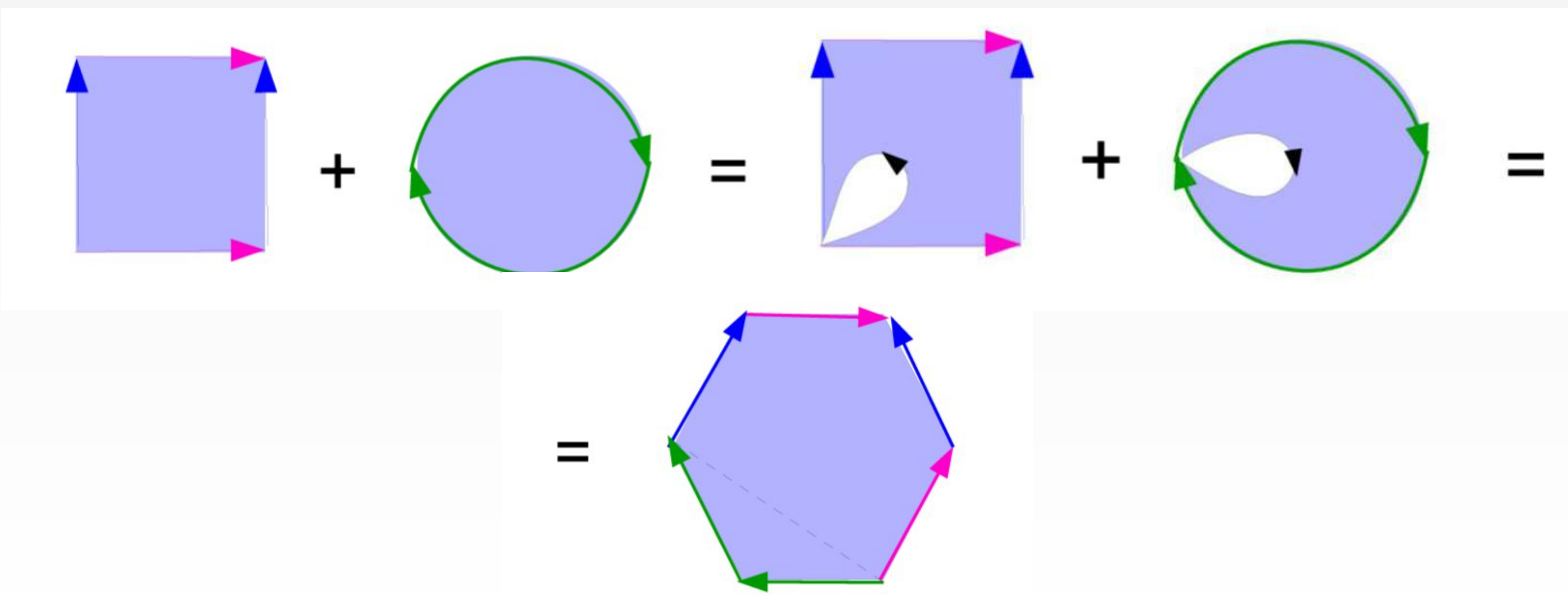


Cambia la orientación de las flechas rojas en el dibujo de la izquierda

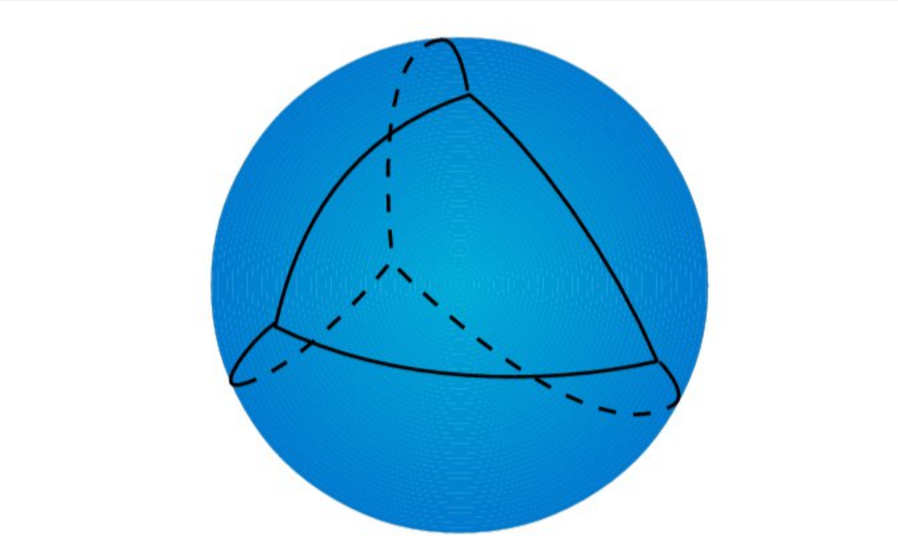


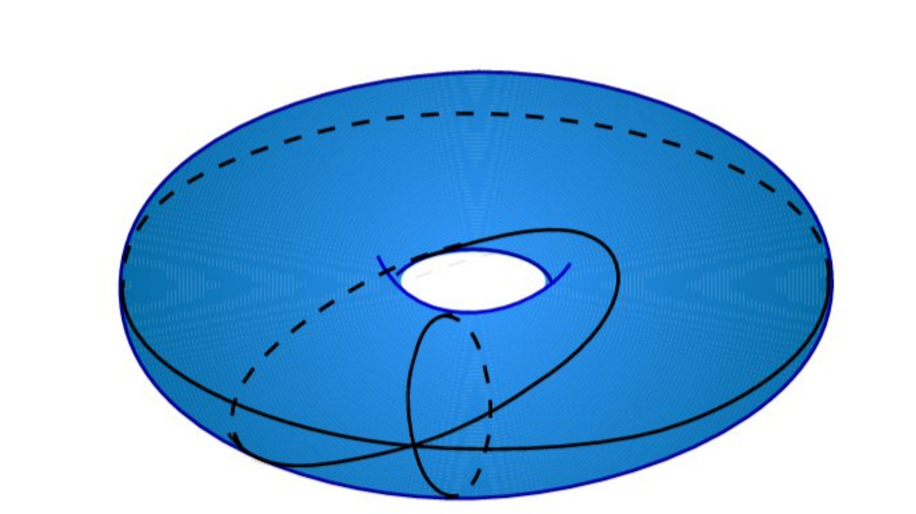
# Suma conexa

- Primero recortamos un disco en cada superficie
- Luego realizamos el pegado por el borde del disco
- Finalmente, lo simplificamos

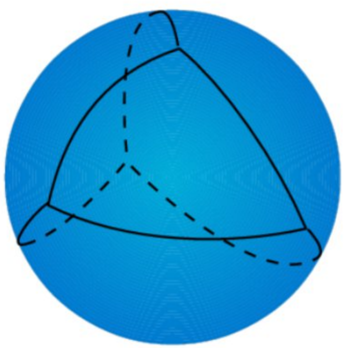


# Calcula $\chi$ para estas superficies

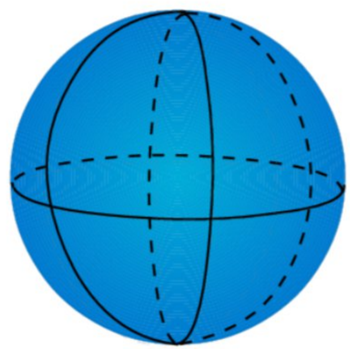




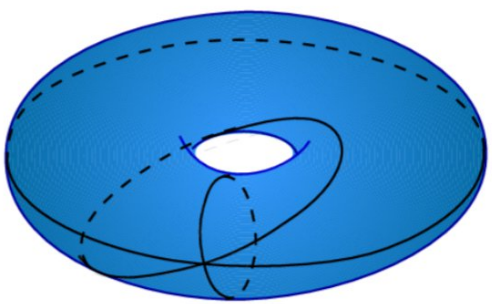
# $\chi\left(S^2\right)$ y $\chi(S^1 \times S^1)$



$v = 4$
$a = 6$
$t = 4$
$v - a + t = 2$



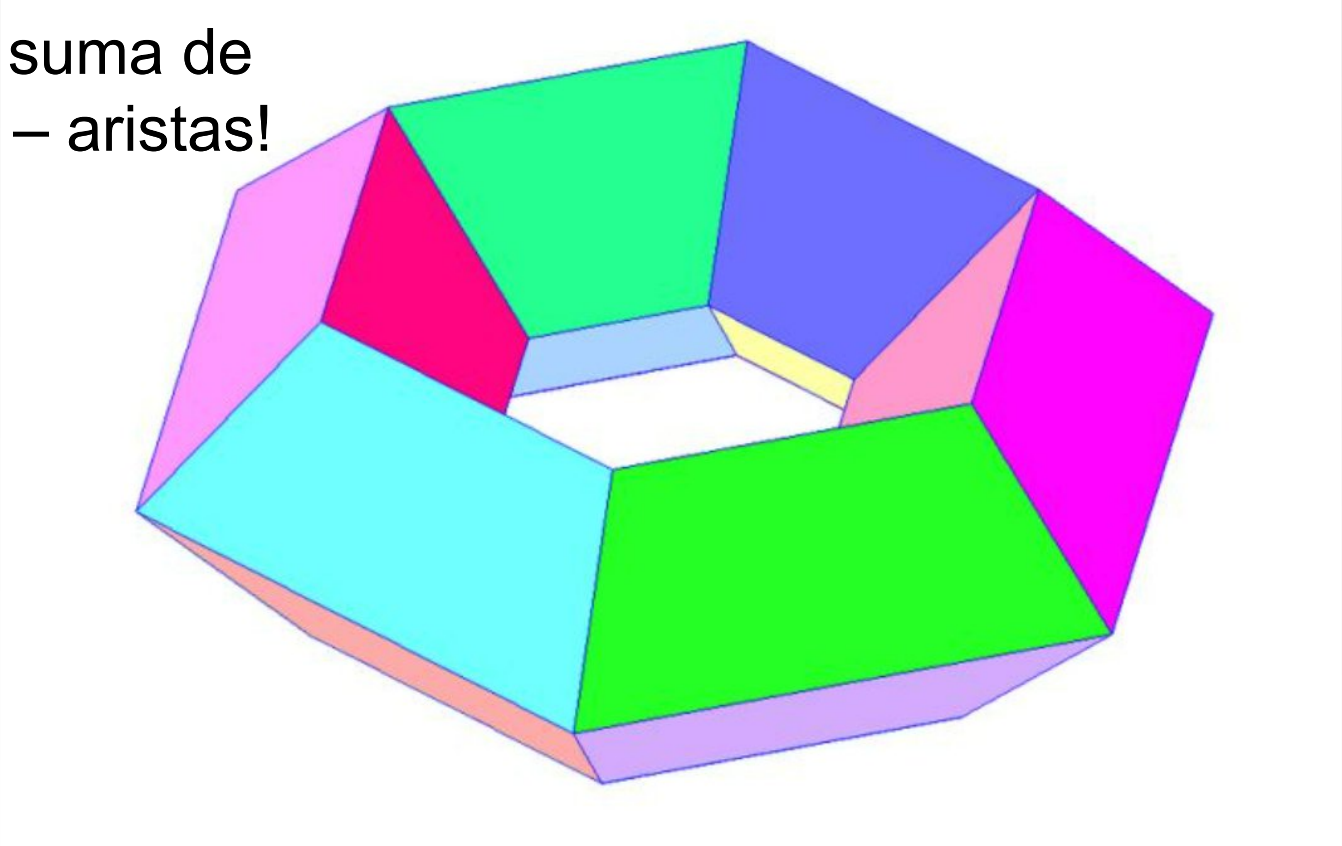
$v = 6$
$a = 12$
$t = 8$
$v - a + t = 2$



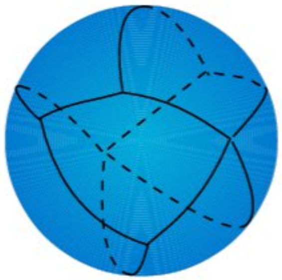
$v = 1$
$a = 3$
$t = 2$
$v - a + t = 0$

# ¿No estás convencido?

¡Calcula aquí la suma de vértices + caras – aristas!



# Podemos subdividir en discos, no sólo en triángulos



$$v = 6$$
$$a = 10$$
$$d = 6$$
$$v - a + d = 2$$

# La característica de Euler

| Definición. Dada una triangulación de la superficie S, su característica de Euler es la suma

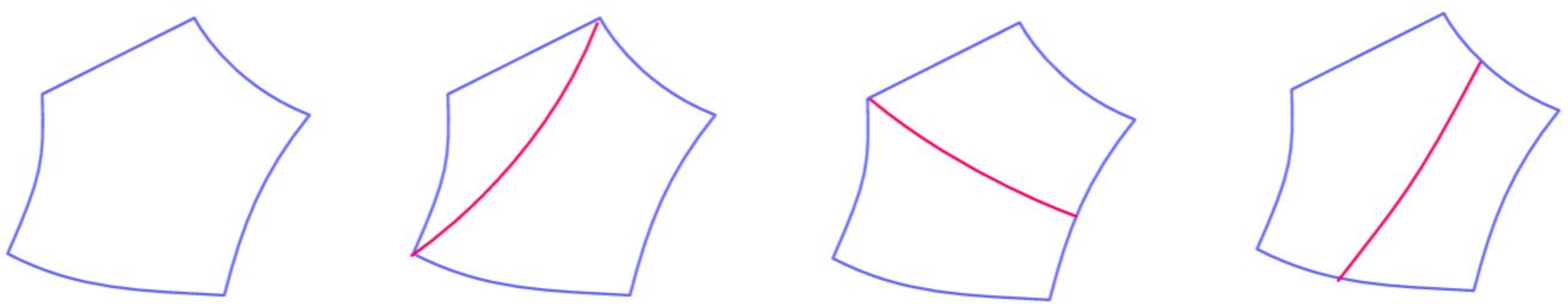
$$\chi(S) = \textit{vértices} + \textit{discos poligonales} - \textit{aristas}$$

# Teorema. La característica de Euler no depende de la triangulación

- Supongamos que tenemos dos triangulaciones $T_1, T_2$
- Como sabemos que la característica de Euler se conserva con transformaciones continuas, podemos transformar la segunda triangulación de modo que se interseque con la segunda en una cantidad finita de puntos
- Consideremos la unión de ambas triangulaciones $T = T_1 \bigcup T_2$. Si demostramos que la CE es la misma para una "subtriangulación", el teorema queda demostrado, ya que cada $T_i \subset T$

# Teorema. La característica de Euler no depende de la triangulación (2)

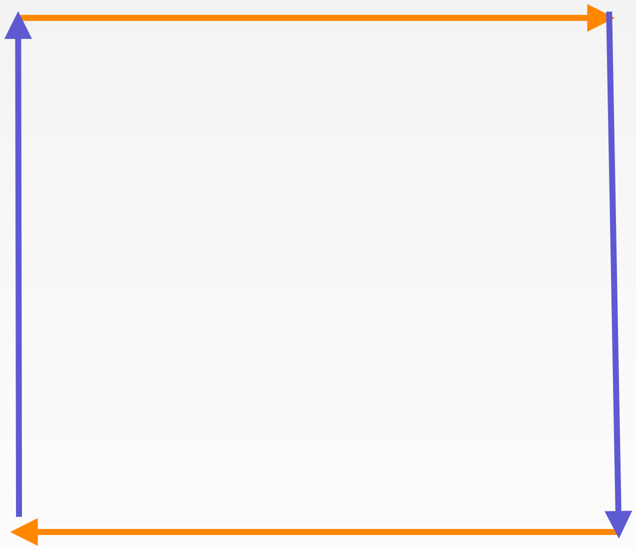
- Tenemos que demostrar ahora que al subdividir un disco en dos, la CE no cambia
- Podemos comprobarlo para cada uno de los siguientes casos:

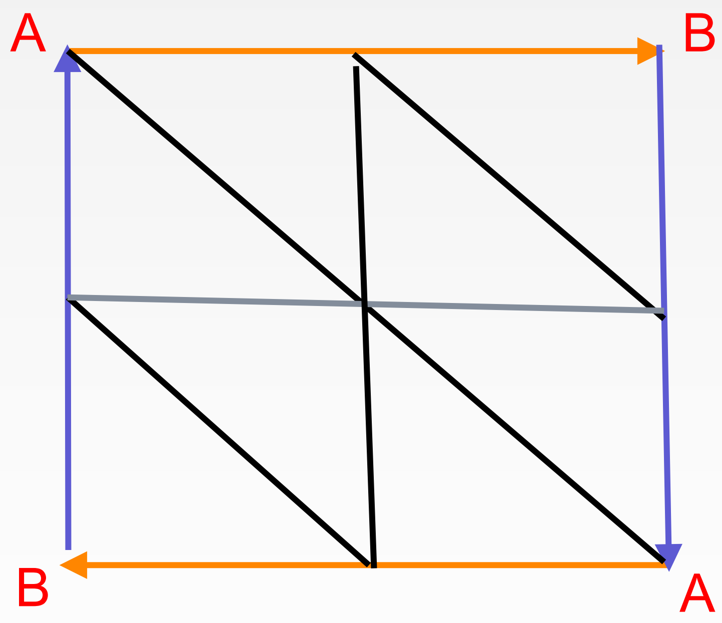


| | | | |
|---|---|---|---|
| $v$ | $v$ | $v+1$ | $v+2$ |
| $a$ | $a+1$ | $a+2$ | $a+3$ |
| $d$ | $d+1$ | $d+1$ | $d+1$ |

# Triangulación del plano proyectivo

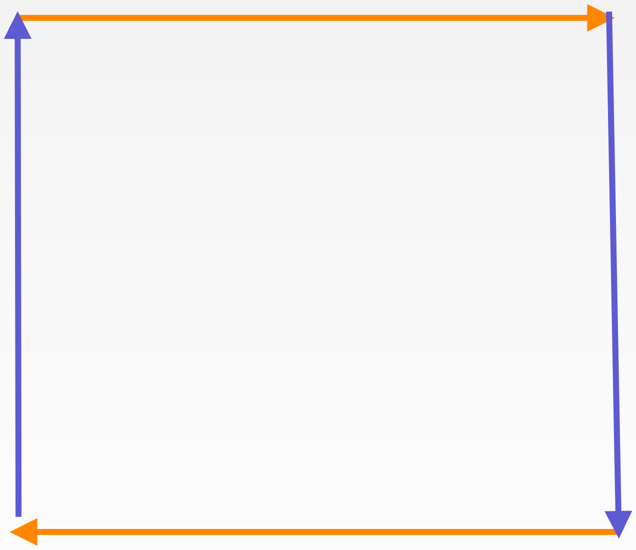
- Cuenta los vértices, las aristas y los discos. NO CUENTAN ni vértices ni aristas equivalentes

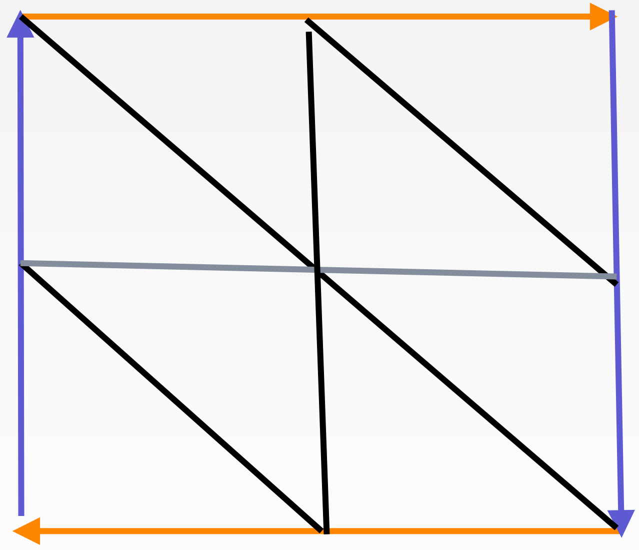




# Triangulación del plano proyectivo

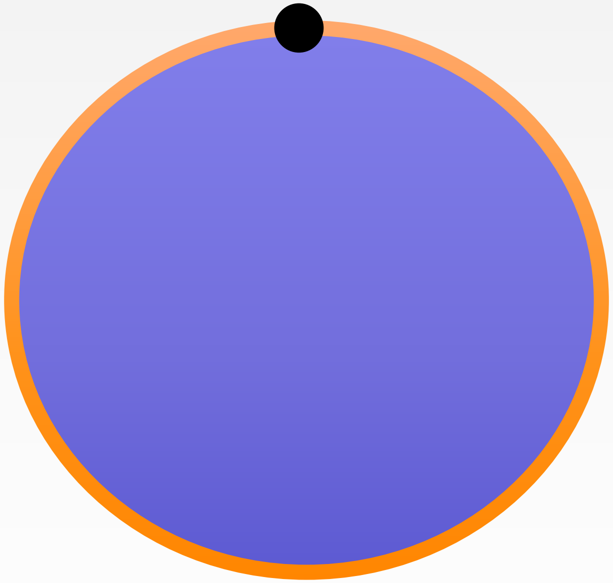
- V= 5, A = 12, D = 8. $\chi\left(P^2\right) = 1$

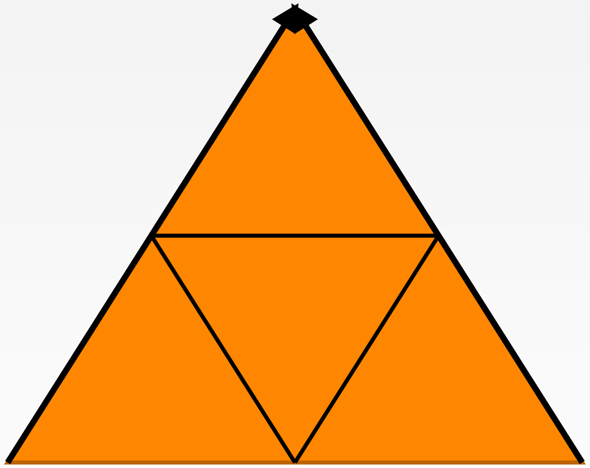




# Triangulación de un disco

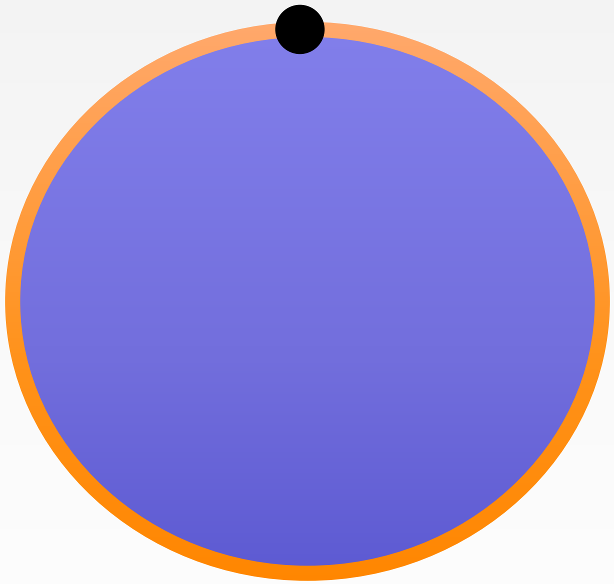
- Calcula la CE a partir de estas triangulaciones

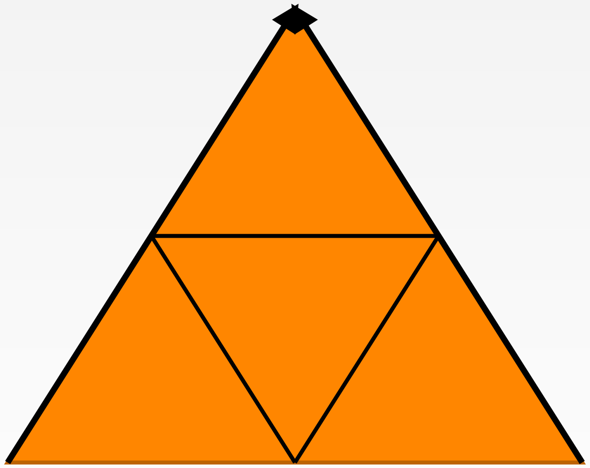




# Triangulación de un disco

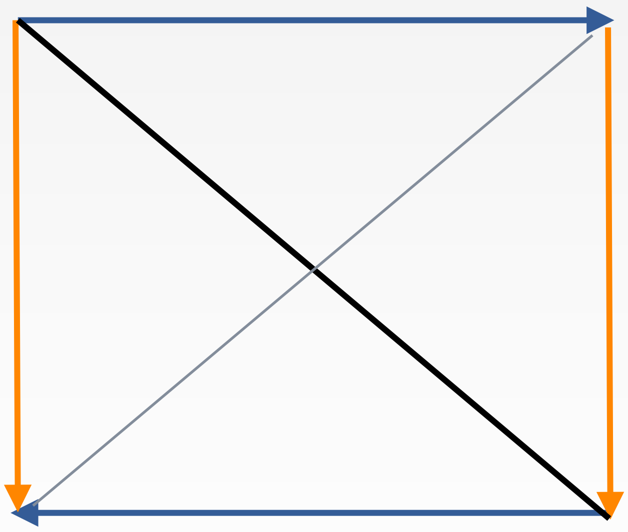
- V = 1. A = 1, D = 1
- V = 4, A = 7, D = 4





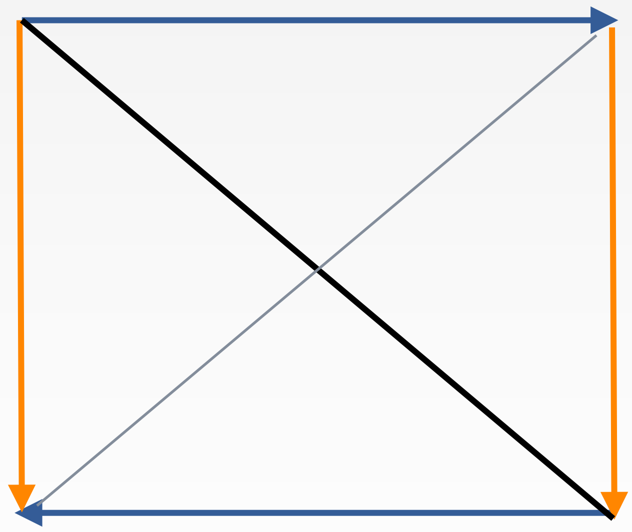
# Triangulación de la botella de Klein

- Cuenta los vértices, las aristas y los discos. NO CUENTAN ni vértices ni aristas equivalentes



# Triangulación de la botella de Klein

- **V = 2**, A = 6, D= 4, $\chi\,(botella\ de\ Klein) = 0$

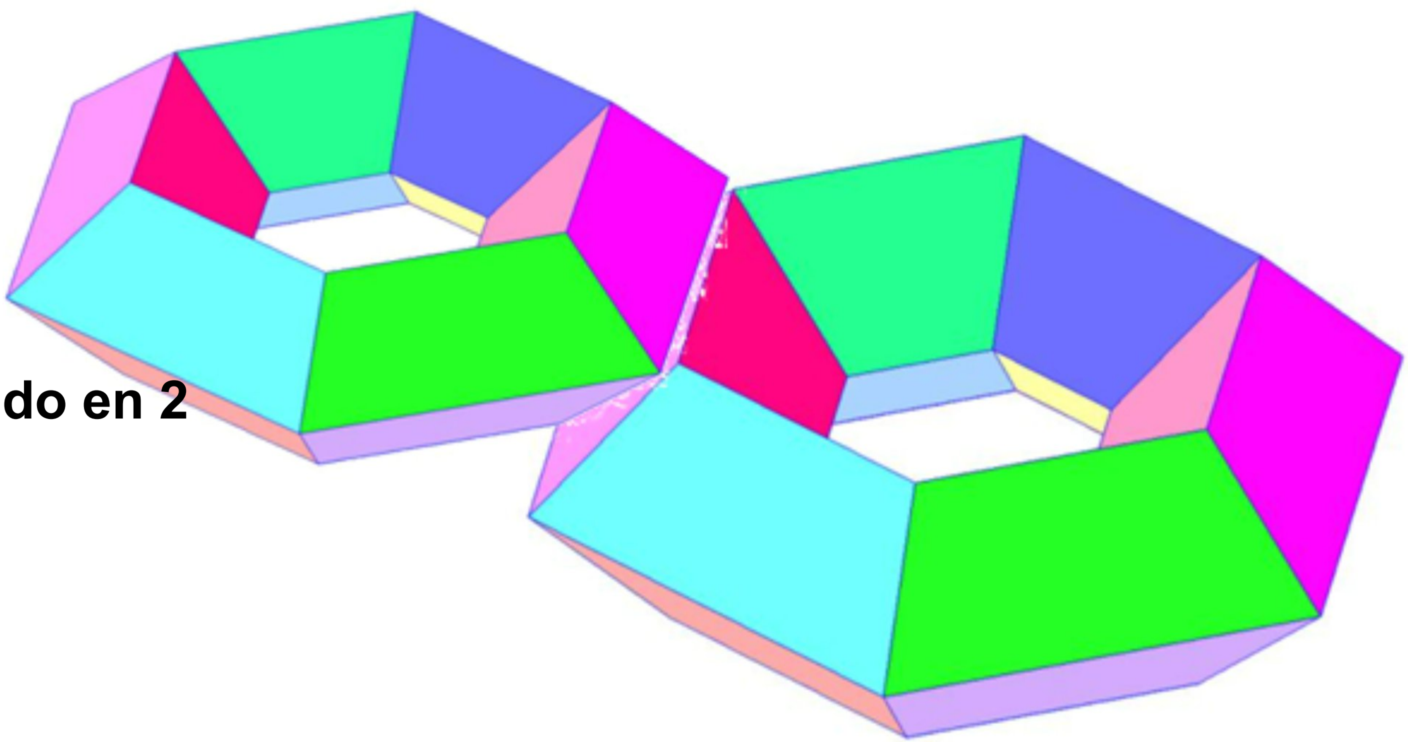


# Unas conclusiones

- La CE nos permite diferenciar determinadas superficies
- Por ejemplo, vemos que el plano proyectivo, la esfera y el toro son tres superficies NO homeomorfas
- Sin embargo, algunas superficies no se pueden diferenciar (el toro y la botella de Klein tienen la misma CE, lo mismo ocurre con el plano proyectivo y el disco)
- PERO
- Recordemos que algunas superficies (como la botella de Klein o el plano proyectivo) NO SON ORIENTABLES
- La pareja CE+Orientabilidad nos clasifica cualquier superficie compacta sin borde

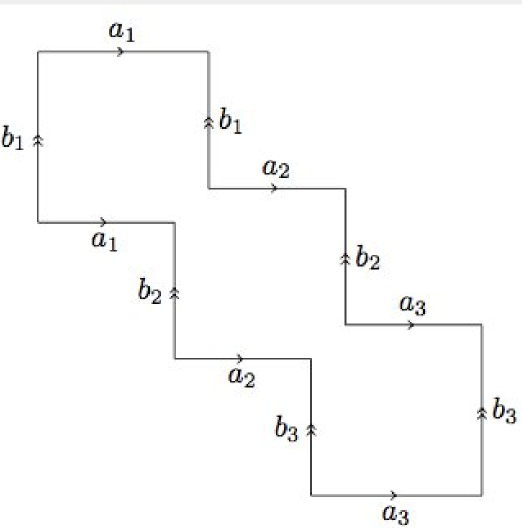
# Sumas conexas de toros

- Peguemos dos toros identificando dos cuadriláteros
- Hemos perdido
- 4 vértices
- 2 discos
- 4 aristas



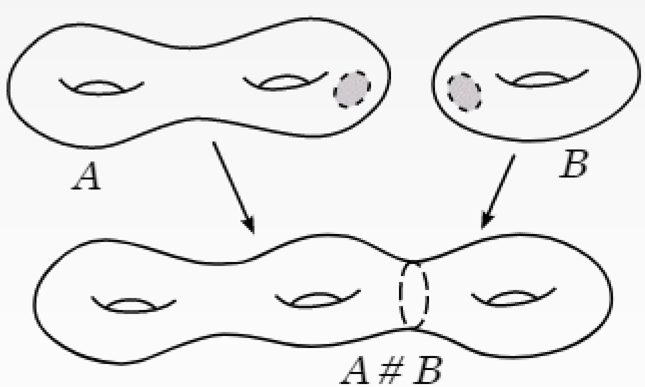
- CE **ha disminuido en 2**

# Sumas conexas de $n$ toros




*Después del pegado todos los vértices se identifican*
*Los $4n$ lados se identifican de 2 en 2 y hay un solo disco*

$$\chi\left(nT^2\right) = 2-2n$$

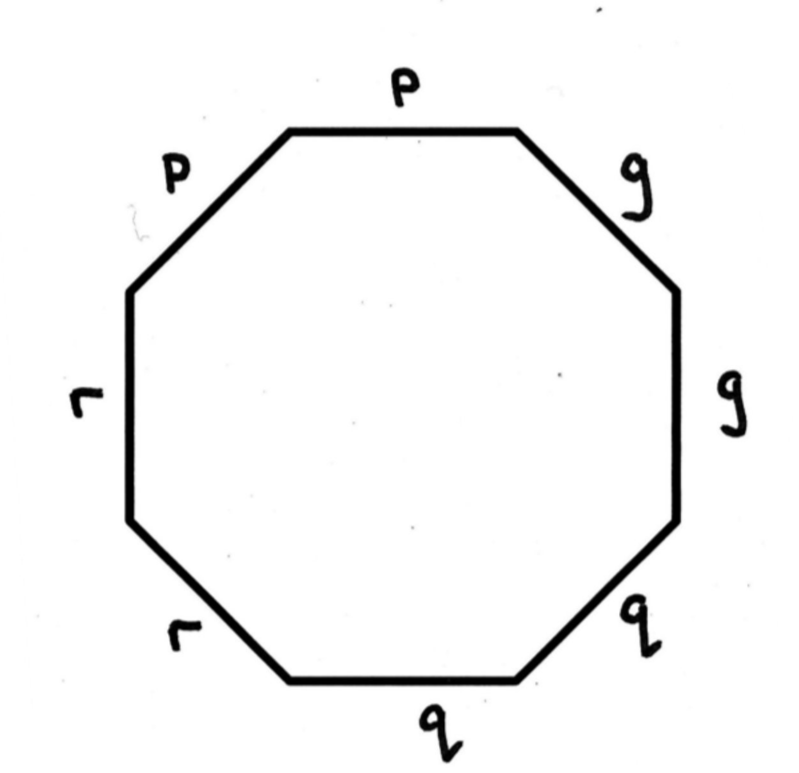



# Teorema. La CE de la suma conexa

- Para dos espacios conexos $M$ y $N$ $\chi(M\#N)=\chi(M)+\chi(N)-2$
- Demostración.
- Si cogemos una triangulación en cada espacio y pegamos un triángulo de cada uno de ellos
- Los vértices disminuyen en 3
- Los discos disminuyen en 2
- Las aristas disminuyen en 3

# Suma conexa de $n$ planos proyectivos

- Cada plano proyectivo es el pegado de dos flechas igualmente orientadas
- En este dibujo todos los vértices se identifican, hay $\frac{2n}{2} = n$ aristas y un único disco
- $\chi\left(nP^2\right) = 2-n$
- También podemos usar el teorema del pegado $\chi\left(nP^2\right) = n-2(n-1)$



# Teorema de clasificación de superficies compactas (Moebius-Jordan)

- Cualquier superficie compacta es una esfera o se puede representar como suma conexa de toros o planos proyectivos
- CE=2 – es una esfera
- CE<2. $\chi\left(nP^2\right) \neq \chi\left(mP^2\right)\ si\ m \neq n$. $\chi\left(nT^2\right) \neq \chi\left(mT^2\right)\ si\ m \neq n$
- $\chi\left(nP^2\right) = 2-n = \chi\left(mT^2\right) = 2-2m\ si\ 2m = n$
- Pero la suma de toros es ORIENTABLE, en cambio, la suma de planos proyectivos NO es ORIENTABLE
- Por tanto, estos 3 casos son DISTINTOS

# Teorema de clasificación de superficies compactas (Moebius-Jordan)

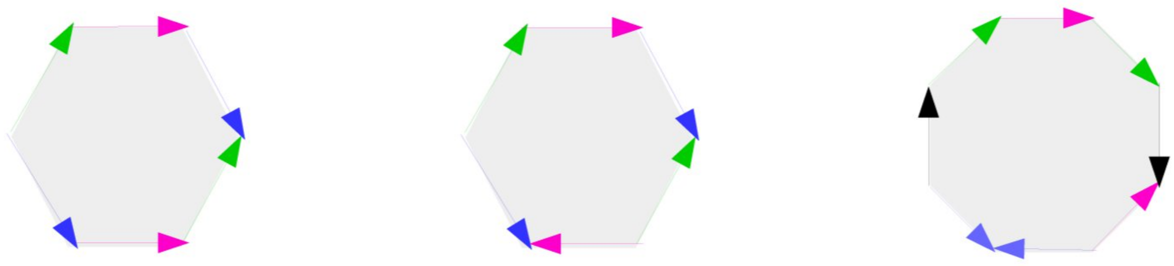
- Ahora bien, ¿cómo demostramos que cualquier superficie debe ser esfera, suma de toros o suma de planos proyectivos?
- IDEA: a cada superficie le corresponde una triangulación
- Cada triangulación se puede simplificar en un esquema poligonal con algunos vértices y lados identificados
- Cualquier esquema se puede simplificar

# Sumas de toros y espacios proyectivos

- $P^2 + T^2 = P^2 + P^2 + P^2$
- ¿Cómo demostrarlo?
- Podemos pensar de la siguiente manera:
  - Ambas partes tienen la misma CE
  - Ambas partes son no orientables

# ¿Qué superficies son?

¿Que superficies son estas? (sin modificar el diagrama, calcula $\chi$ y usa la orientabilidad)



The connected sum
of a real projective plane and a torus
is homeomorphic to the connected sum
of a real projective plane and a Klein bottle.

# La CE ¿sólo vale para superficies?

- NO
- Se puede generalizar a otras dimensiones como suma alternante de subespacios