Álgebra Lineal
Examen Parcial 2025
Resolución

Problema 1

Si z_1 es una de las raíces cuartas de $\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}i}$ y $z_2 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$, calcular el valor de $z_1 z_2^3$.

Solución

Primero simplificamos el número complejo:

$$\frac{-4}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-4(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-4(1+\sqrt{3}i)}{1+3} = \frac{-4(1+\sqrt{3}i)}{4} = -1-\sqrt{3}i$$

Entonces:

$$z_1 \text{ es una raíz cuarta de } -1-\sqrt{3}i$$

Escribimos este número en forma polar:

$$-1-\sqrt{3}i = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

Las raíces cuartas de un número complejo $re^{i\theta}$ son:

$$z_k = \sqrt[4]{r} \cdot e^{\frac{\theta+2k\pi}{4}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Entonces:

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\frac{4\pi}{3}i}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$$

Ahora, calculemos z_2^3:
Dado que:

$$z_2 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 4\sqrt{2}(-1+i)$$

La forma polar de $-1+i$ es:

$$|-1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

Entonces:

$$z_2 = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = 8 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Por lo tanto:

$$z_2^3 = 8^3 \cdot (e^{\frac{3\pi}{4}i})^3 = 512 \cdot e^{\frac{9\pi}{4}i} = 512 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Finalmente:

$$z_1 z_2^3 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 512 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\boxed{z_1 z_2^3 = 512 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{12}i}}$$

Problema 2

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 2-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & -2+\alpha-\alpha^2 & 1-2\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\alpha-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

a.1) Determinar si existe algún valor real de α para el que el sistema $AX = B$ sea compatible indeterminado.

Para que un sistema sea compatible indeterminado, el rango de la matriz de coeficientes A debe ser igual al rango de la matriz aumentada $(A|B)$, y ambos menores que el número de incógnitas (en este caso, 3).

Vemos cuando se anula el determinante de A

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 2-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & -2+\alpha-\alpha^2 & 1-2\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\alpha^2 & 1-2\alpha \end{vmatrix} = -2\alpha+2 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado para } \alpha = 1}$$

a.2) Análisis de la posición relativa de los planos para $\alpha = 0$

Cuando $\alpha = 0$, tenemos tres planos en $\mathbb{R}^3$. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, los planos se cortan en un punto.

Para $\alpha = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Entonces, el sistema tiene solución única, y los planos se intersectan en un punto.

$$\boxed{\text{Para } \alpha = 0, \text{ los planos se intersectan en un único punto}}$$

b) Condición para que las rectas r y s estén en un mismo plano

Las rectas están dadas por:

$$r : \begin{cases} x = p + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = q + 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Vector director de r: $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$
Vector director de s: $\vec{v}_s = (-1, 2, 1)$
Punto en r: $P_r = (p, 3, 0)$
Punto en s: $P_s = (1, q, 0)$

Para que estén en el mismo plano, el vector $\vec{P_r P_s} = (1 - p, q - 3, 0)$ debe estar contenido en el plano generado por $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, es decir:

$$\vec{P_r P_s} \in L < \{\vec{v}_r, \vec{v}_s\} >$$

Entonces, el determinante del siguiente sistema debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 - p & q - 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3p - 3q + 6 = 0 \rightarrow p - q + 2 = 0$$

Determinación de p y q para que el plano pase por el punto $(1, 1, 1)$

El plano contiene a las dos rectas y pasa por el punto $(1, 1, 1)$. Un punto del plano es $P_r = (p, 3, 0)$, y dos vectores directores son $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

Verificamos si el vector $(1 - p, -2, 1)$ (de P_r a $(1, 1, 1)$) es combinación lineal de $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 2, 1)$.

Eso ocurre si el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 - p & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3p + 6 = 0 \rightarrow p = -2$$

$$\boxed{p = -2, \quad q = 0}$$

Problema 3

Dada una matriz cuadrada A que verifica:

$$A^2 + 2A = I$$

a) Demostrar que A tiene rango completo y obtener una expresión de A^{-1}

Partimos de la ecuación dada:

$$A^2 + 2A = I$$

Factorizamos:

$$A(A + 2I) = I$$

Esto implica que el producto de dos matrices A y $A + 2I$ es la identidad. Por lo tanto, A es invertible y tiene rango completo.

Dado que:

$$A(A + 2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$$

$$\boxed{A^{-1} = A + 2I}$$

b) Calcular, si existen, los valores de p y q tales que $A^3 = pI + qA$

Partimos nuevamente de:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow A^2 = I - 2A$$

Multiplicamos ambos lados por A para obtener A^3:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(I - 2A) = A - 2A^2$$

Reemplazamos A^2 por $I - 2A$:

$$A^3 = A - 2(I - 2A) = A - 2I + 4A = 5A - 2I$$

Por lo tanto:

$$\boxed{A^3 = -2I + 5A} \Rightarrow \boxed{p = -2, \quad q = 5}$$

c) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, ¿existe algún valor de k para el que $A^2 + 2A = I$?

Calculamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 + k^2 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & 1 + k^2 + 2k \end{pmatrix}$$

Queremos que esta matriz sea igual a la identidad:

$$A^2 + 2A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos entrada a entrada:

$$k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

Verificamos la entrada (2,2):

$$1 + k^2 + 2k = 1 + 4 - 4 = 1$$

Todo coincide, por lo tanto:

$$\boxed{\text{Sí, para } k = -2 \text{ se verifica la ecuación}}$$

Cuestión 1

Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3,$$

calcular, utilizando propiedades de los determinantes, el valor de:

$$\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 2\alpha & \alpha + 6 \\ 3\beta + 4 & 2\beta & \beta \\ 3\gamma + 6 & 2\gamma & \gamma + 3 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 2\alpha & \alpha+6 \\ 3\beta+4 & 2\beta & \beta \\ 3\gamma+6 & 2\gamma & \gamma+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{} \begin{vmatrix} \alpha+2 & 2\alpha & \alpha+6 \\ \beta+4 & 2\beta & \beta \\ \gamma+6 & 2\gamma & \gamma+3 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} \alpha+2 & \alpha & \alpha+6 \\ \beta+4 & \beta & \beta \\ \gamma+6 & \gamma & \gamma+3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1-F_2;F_3-F_2]{} 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 6 \\ 4 & \beta & 0 \\ 6 & \gamma & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 6 \\ 2 & \beta & 0 \\ 3 & \gamma & 3 \end{vmatrix} = -4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & \alpha \\ 2 & 0 & \beta \\ 3 & 3 & \gamma \end{vmatrix} = -12$$

Nota: $det(A) = det(A^t)$

Cuestión 2

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) No existe ninguna matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $|A| = 1$ y $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Si $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$ para $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, entonces $\vec{v} \in \ker A$, lo que implica que A no es inyectiva y por tanto no es invertible.

Pero eso contradice el hecho de que $|A| = 1$, ya que una matriz con determinante distinto de cero es invertible, y su núcleo solo contiene el vector nulo.

$$\boxed{\text{Verdadera: si } A\vec{v} = \vec{0} \text{ con } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ entonces } A \text{ no es invertible, } \Rightarrow |A| \neq 1}$$

Por tanto:

$$\boxed{\text{Verdadera}}$$

b) No existe ninguna matriz A tal que $A^2 = D$ y $A^3 = E$, donde:

$$D = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix}-2 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

Analizamos: si $A^2 = D$ y $A^3 = E$, entonces multiplicando ambos lados de la primera ecuación por A, se debe cumplir:

$$A^3 = A\cdot A^2 = A\cdot D \Rightarrow E = A\cdot D \Rightarrow A = E\cdot D^{-1}$$

Verificamos si D es invertible:

$$|D| = 1 \Rightarrow D^{-1} \text{ existe}$$

Entonces calculamos:

$$A = ED^{-1}$$

Primero, la inversa de D es:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos:

$$A = ED^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora verificamos si $A^2 = D$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -12 & 25 \end{pmatrix} \neq D$$

Por tanto, aunque $A = ED^{-1}$, no se cumple que $A^2 = D$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Verdadera: no existe tal matriz } A}$$

Cuestión 3

Calcular en forma binómica:

$$Z = \frac{(2 + i\sqrt{5}) \cdot (1 + i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}$$

y obtener su módulo.

Solución

Primero calculamos $(1 + i\sqrt{3})^3$. Pasamos a forma polar:

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (1 + i\sqrt{3})^3 = 2^3 \cdot e^{i\pi} = 8 \cdot (-1) = -8$$

Entonces:

$$Z = \frac{(2 + i\sqrt{5})(-8)}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}} = \frac{-8(2 + i\sqrt{5})}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{-8(2+i\sqrt{5})(\sqrt{5}-i\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+i\sqrt{3})(\sqrt{5}-i\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{-8(2+i\sqrt{5})(\sqrt{5}-i\sqrt{3})}{5+3} = \frac{-8(2+i\sqrt{5})(\sqrt{5}-i\sqrt{3})}{8}$$

Simplificamos el 8:

$$Z = -(2+i\sqrt{5})(\sqrt{5}-i\sqrt{3})$$

Desarrollamos:

$$Z = -\left[2\sqrt{5} - 2i\sqrt{3} + i\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - i\sqrt{5}\cdot i\sqrt{3}\right]$$

$$= -\left[2\sqrt{5} - 2i\sqrt{3} + 5i - i^2\sqrt{15}\right] = -\left[2\sqrt{5} - 2i\sqrt{3} + 5i + \sqrt{15}\right]$$

$$Z = -\left(2\sqrt{5} + \sqrt{15} + i(5-2\sqrt{3})\right) = -2\sqrt{5} - \sqrt{15} - i(5-2\sqrt{3})$$

$$\boxed{Z = -2\sqrt{5} - \sqrt{15} - i(5-2\sqrt{3})}$$

Módulo de Z

Denotamos:

$$x = -2\sqrt{5} - \sqrt{15}, \quad y = -(5-2\sqrt{3})$$

$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2\sqrt{5}-\sqrt{15})^2 + (5-2\sqrt{3})^2}$$

Calculamos:

$$x^2 = (2\sqrt{5}+\sqrt{15})^2 = 4\cdot 5 + 2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{15} + 15 = 20 + 4\sqrt{75} + 15 = 35 + 20\sqrt{3}$$

$$y^2 = (5-2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 4\cdot 3 = 25 - 20\sqrt{3} + 12 = 37 - 20\sqrt{3}$$

Entonces:

$$|Z| = \sqrt{(35+20\sqrt{3}) + (37-20\sqrt{3})} = \sqrt{72} = \boxed{6\sqrt{2}}$$

—

Cuestión 4

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tal que el rango de la matriz de coeficientes coincide con el número de incógnitas puede tener infinitas soluciones.

Un sistema homogéneo $AX = 0$ con $\text{rg}(A) = n$ (número de incógnitas) tiene como única solución el vector nulo:

$$\dim(\ker A) = n - \text{rg}(A) = 0 \Rightarrow \text{sólo existe la solución } X = 0$$

$$\boxed{\text{Falsa}}$$

b) Un sistema de ecuaciones lineales con $n+1$ ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de la matriz ampliada es $n+1$ puede ser indeterminado.

El rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el número de incógnitas para que el sistema sea compatible. Si:

$$\text{rg}(A|B) = n + 1 > n = \text{rg}(A) \Rightarrow \text{El sistema es incompatible}$$

Por tanto, nunca puede ser indeterminado:

$$\boxed{\text{Falsa}}$$