La conexidad por caminos y conexidad local

Topología - 9

Georgy Nuzhdin
2022-2024

Espacios conexos por caminos

| Definición. Se dice que un espacio topológico es **conexo por caminos** si para cualquier pareja de puntos $x, y \in X$ existe un camino que los une (función continua $f\colon [0;1] \to X\colon f(0) = x, f(1) = y$)

¿Son conexos por caminos?

- $S^1 \times S^1$
- $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, n \geq 2$
- $\mathbb{Q}$

Ser conexo ¿es lo mismo que ser conexo por caminos?

- Son conceptos muy parecidos, pero no equivalentes
- El concepto de “conexo por caminos” es más intuitivo: supone que podemos llegar de cualquier punto a cualquier punto por un camino continuo
- Si se es conexo, es que NO SE PUEDE SEPARAR
- Si se es conexo por caminos, es que ESTÁ UNIDO

Conexo por caminos implica conexo

- Sabemos que para cualquier pareja de puntos existe $f: [0;1] \to X: f(0) = x, f(1) = y)$
- Si hubiera una separación $X = U \cup V \dots$
- Cogeríamos $\mathrm{f}^{-1}(U) \cup \mathrm{f}^{-1}(V)$
- Sería una separación del conexo $[0;1]$ (¡imposible!)

¿Qué ocurre con la recta Sorgenfrey?

- ¿No es un contraejemplo? ¿No es conexa por caminos?
- Pues no.
- Elijamos dos puntos, $a < b$. Supongamos que existe un camino de b a a: $\exists\ f(x): [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = b, f(1) = a, f\ es\ continua$
- La función f no es una función constante, por lo que existen puntos en los que su valor es distinto de a. Llamemos $i = \sup(x \in [0;1] | f(x) > a\}$.
- $i \neq 0$ (si fuese 0, la función no sería continua en 0, porque en 0 sería igual a b pero en cualquier entorno sería igual a a)
- Como la función es continua en i, para $\epsilon = \frac{b-a}{2}\ \exists \delta > 0: \forall x \in (i-\delta, i)\ |f(x) - f(i)| < \frac{b-a}{2}$. Llamemos uno de estos x, pongamos, x_i y el valor $f(x_i) = m$
- Consideremos la preimagen de $[a; m)$, que es abierto en Sorgenfrey
- $f^{-1}([a; m)) = (x_i, 1]$, que NO es un abierto
- Por tanto, nuestra función NO es continua
- La dificultad de esta demostración ha sido encontrar un punto intermedio en el que sabemos que el valor de la función esté entre $a\ y\ b$ (piensa que en general la función puede ser igual a a no solo en 1 sino en otros puntos)

Pregunta importante

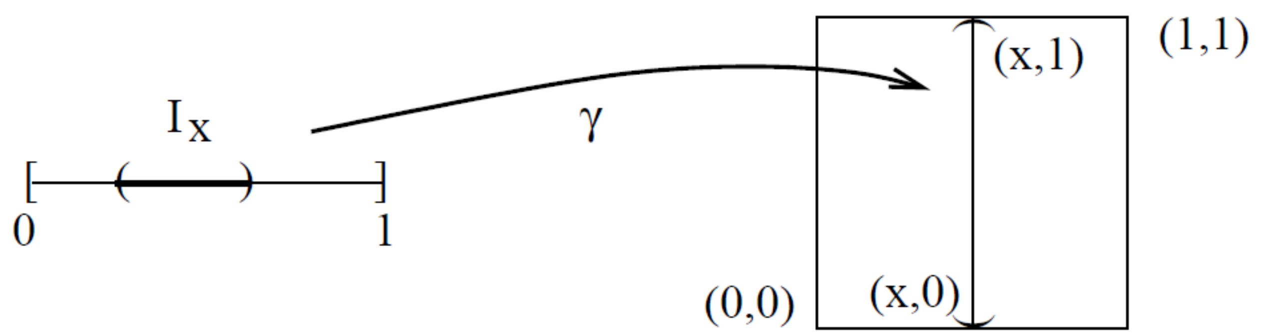
- ¿Existe en $\mathbb{R}$ una colección no numerablede abiertos disjuntos?
- ¿Existe en $\mathbb{R}$ una colección no numerable de cerrados disjuntos?

Respuesta importante

- ¿Existe en $\mathbb{R}$ una colección no numerable de abiertos disjuntos? NO
  Cada abierto en $\mathbb{R}$ contiene al menos un número racional.
  Por tanto, cada colección de abiertos es un subconjunto de $\mathbb{Q}$, que es numerable
- ¿Existe en $\mathbb{R}$ una colección no numerable de cerrados disjuntos?
  SÍ. Por ejemplo, los irracionales (cada punto es un cerrado)

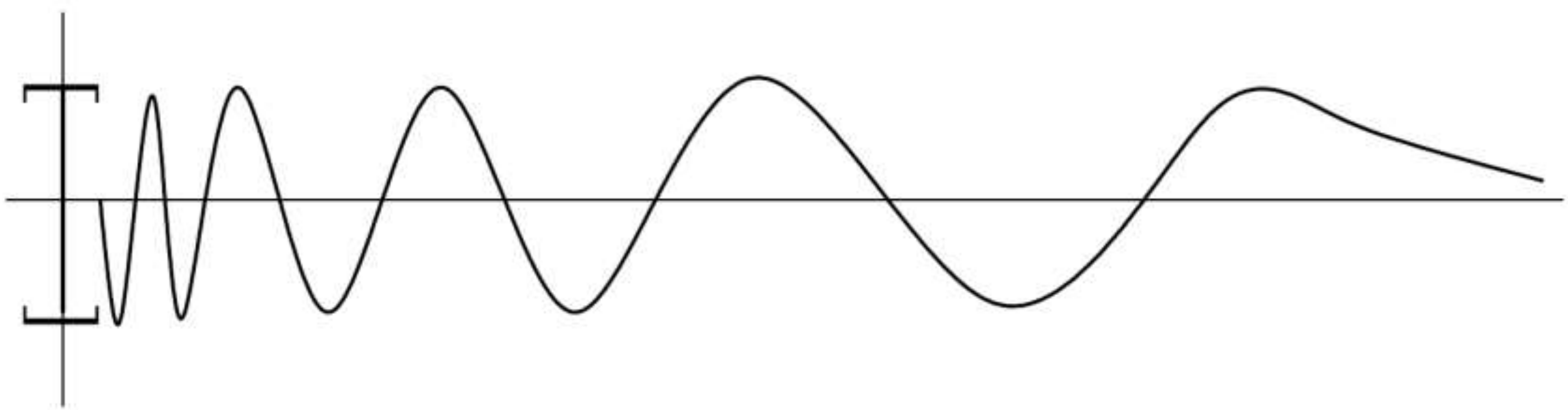
Conexo NO IMPLICA conexo por caminos

- Veamos $C = [0;1] \times [0;1]$ con el orden lexicográfico
- Supongamos que existe una aplicación $f\colon [0;1] \to C, f(0) = (0;0), f(1) = (1;1)$
- La preimagen de cada abierto $f^{-1}\left(\left((x;0),(x;1)\right)\right) = I_x$ es un abierto no nulo y todos los I_x son disjuntos y no numerables, lo que es imposible



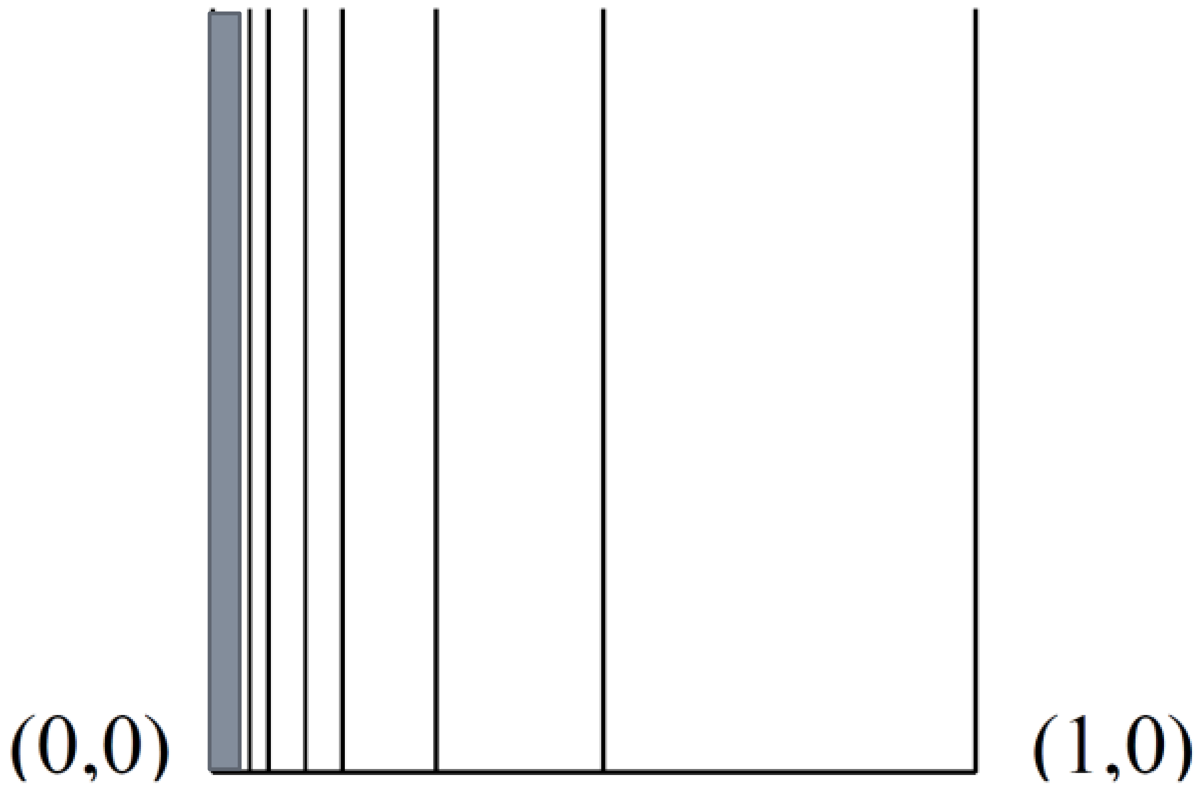
Conexo NO IMPLICA conexo por caminos

- No hay ningún camino que una el segmento vertical $\{(0, y): y \in [-1; 1]\}$ con la curva $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y = sen\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$
- La curva del seno se aproxima al segmento vertical pero nunca lo toca (demostración exacta después)



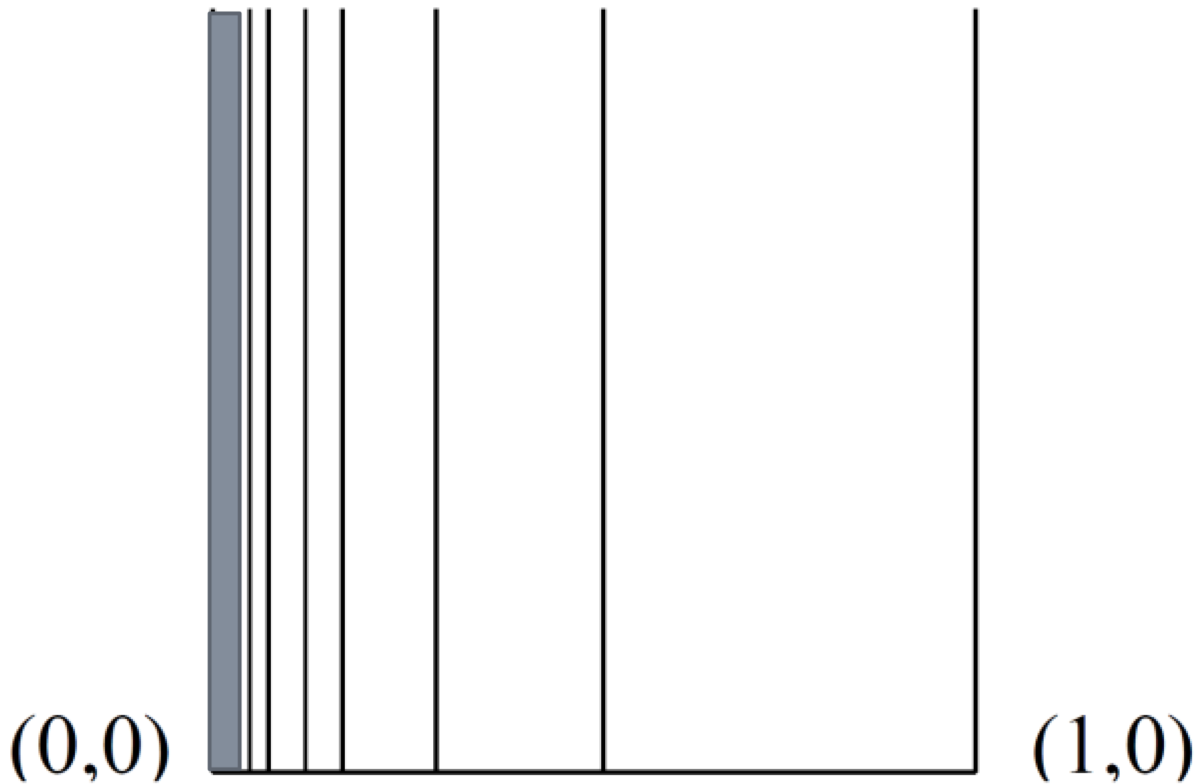
El peine

- $\left\{(x,y), x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}: y\in[0;1]\right\} \cup \{(0,y): y\in[0;1]\} \cup \{(x,0): x\in[0;1]\}$



El peine

- ¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos?



El peine

- ¿Es conexo por caminos? Sí. Todas las púas están conectadas a la base
- ¿Es conexo? Sí (porque es conexo por caminos). Sí porque es unión de conexos que tienen puntos en común.

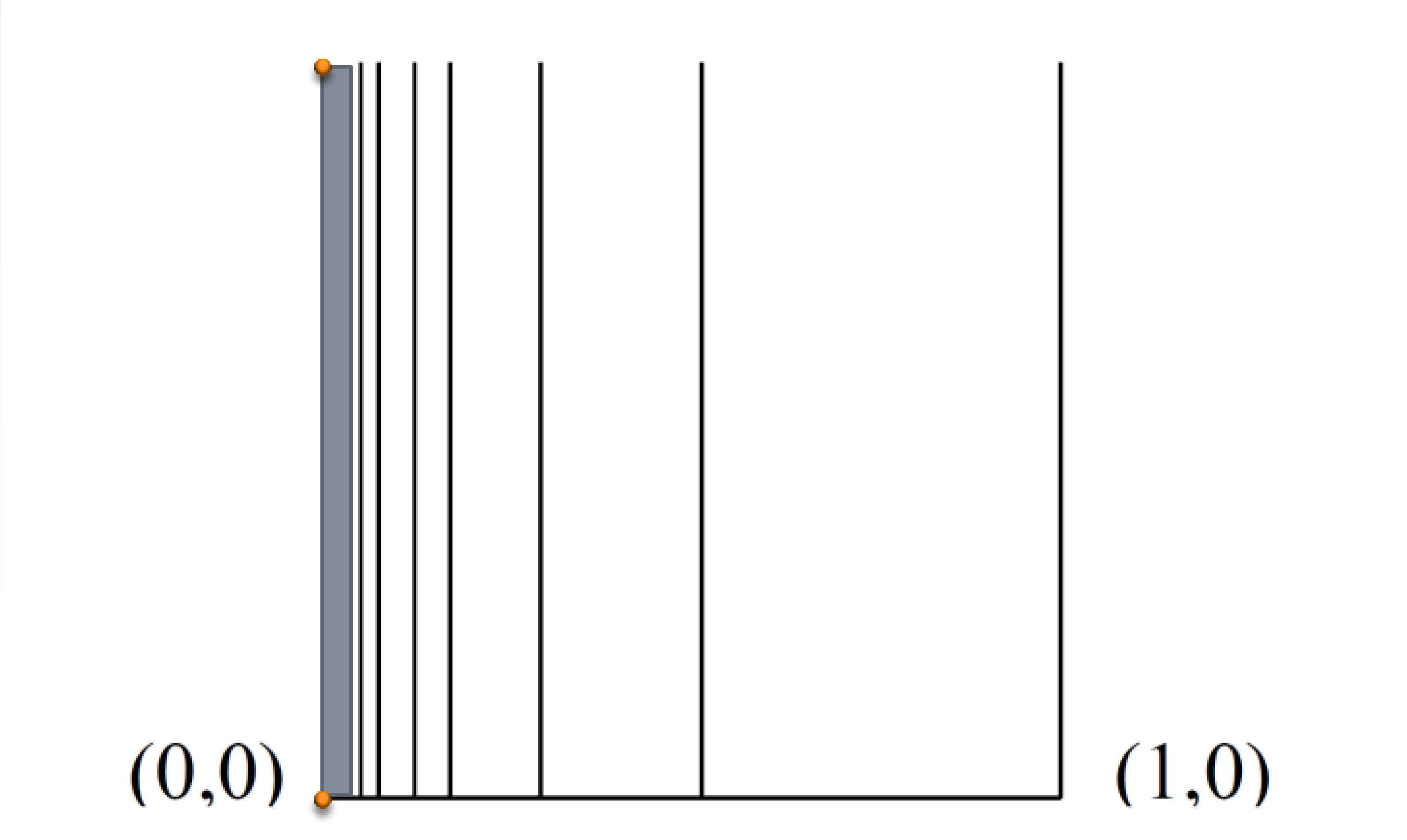
El peine reducido: quitamos la primera púa dejando dos puntos: (0;0) y (0;1)

- $\left\{(x,y), x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}: y\in[0;1]\right\}\cup\{(0,y): y\in\{0,1\}\}\cup\{(x,0): x\in[0;1]\}$

- $\left\{(x,y), x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}: y\in[0;1]\right\}\cup\{(0,y): y\in\{0,1\}\}\cup\{(x,0): x\in[0;1]\}$

El peine reducido: quitamos la primera púa dejando dos puntos: (0;0) y (0;1)

- ¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos?



¿Por qué el peine reducido NO es conexo por caminos?

- Supongamos que existe un camino
  $$f:[0;1] \to Peine: f(0) = (0;1) = x, f(1) = (0;0)$$
- Como nuestra función es continua, cada entorno abierto de x viene de un abierto que contiene 0. Vamos a llamarlo $U = [0;\lambda)$
- Vamos a considerar un punto u de $f^{-1}(x)$ y su entorno abierto $\mathrm{B} = (u-\epsilon, u+\epsilon) \subset U$. Si U tuviera un único punto, consideramos el abierto $[0;\epsilon)$
- B es **conexo**. Por tanto, su imagen $f(B)$ es **conexa** y contiene x
- ¡¡MOMENTO CENTRAL!! La única componente conexa de $f(B)$ que contiene x es el propio punto x , que es un cerrado
- La preimagen de un cerrado es cerrado, por tanto B es abierto y cerrado a la vez
- Pero el único abierto y cerrado a la vez en $[0;1]$ es el propio intervalo $[0;1]$, por tanto, nuestro camino termina donde acaba. Contradicción

¿Por qué el peine reducido SÍ es conexo?

- Recuerda que el peine completo es conexo
- El peine sin la primera púa es conexo (la unión de conexos que tienen puntos en común es conexa)
- El peine con dos puntos es un conjunto intermedio entre un conexo y su clausura, por tanto, es conexo

La conexión por caminos también es propiedad topológica

- ¿Qué hay que demostrar?
- Dada $f\colon X \to Y$ continua tal que X es conexo por caminos, entonces Y también lo es
- Pero la imagen de un camino es un camino

Más definiciones

- Un espacio es **localmente conexo** si cada entorno abierto contiene un subentorno abierto conexo
- Un espacio es **localmente conexo** por caminos si cada entorno abierto contiene un subentorno abierto conexo por caminos
- Localmente conexo y localmente conexo por caminos son **propiedades topológicas**

¿Son conexas localmente? ¿Localmente conexas por caminos?

- $(1;2) \cup (3;4)$
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Q}$

¿Es el cuadrado con la topología del orden localmente conexo por caminos?

- Piensa en el borde superior y el inferior
- El cuadrado sin estos bordes sí sería localmente conexo por caminos (cada punto (x, y) tiene un entorno $((x, y-\epsilon),\ (x, y+\epsilon))$
- Pero los puntos del borde ya no. Consideremos cualquier punto del borde superior $(x_0, 1)$ y cualquier entorno abierto suyo $((x_0 - a, b), (x_0 + c, d))$. Este entorno necesariamente contiene una franja vertical $\left[\left(x_0 + \frac{c}{3}, 0\right), \left(x_0 + \frac{c}{2}, 1\right)\right]$. A esta franja sele puede aplicar la misma idea de demostración de antes (cada barra vertical de esta franja es un abierto y no son numerables)

Localmente conexo NO IMPLICA conexo

- $(1;2)\cup(3;4)$ SÍ es localmente conexo y localmente conexo por caminos
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ SÍ es localmente conexo y localmente conexo por caminos
- $\mathbb{Q}$. NO

Conexo NO IMPLICA localmente conexo

- $El\ peine\ normal$: En $(0;\ 1)$ no es localmente conexo (falta la base)
- Más estricto: en un entorno por muy pequeño que sea del punto $(0;\ 1)$ hay al menos uno $(\frac{1}{n};\ 1)$ que pertenece a una componente conexa distinta (si la bola que contiene $(0;\ 1)$ es V, $\mathrm{V}\cap(\frac{1}{n};y)$ es un abierto distinto del $\mathrm{V}\cap(0;y)$

Reexplicando el peine reducido

- Si el peine reducido fuera conexo por caminos con la aplicación f, habría una aplicación continua $f\left(1 - f^{-1}(x)\right)$ de un entorno de (0,0) (que es localmente conexo) a un entorno del punto (0; 1) que NO es conexo localmente

Relación de distintos tipos de conexidad

- Conexo por caminos implica conexo (si podemos unir, es que no podemos separar)
- Conexo y localmente conexo por caminos implica conexo por caminos (si no se puede separar y encima en cada parte podemos unir, es que podemos unir globalmente)
- Localmente conexo por caminos implica localmente conexo
- Si no es conexo pero localmente conexo por caminos, cada componente conexa será conexa por caminos

¡A la basura viejas demostraciones!

- ¿Cuánto hemos tardado en demostrar que el círculo, la esfera o la circunferencia son conexas?
- ¡Pues es evidente que todos son conexos por caminos! Y conexo por caminos implica conexo.

¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos? ¿Localmente conexo o conexo por caminos?

- $\mathbb{R}^2 \backslash \{xy = 0\}$
- $\mathbb{R}^2 \backslash \{x = 0, y \leq 0\}$

¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos? ¿Localmente conexo o conexo por caminos?

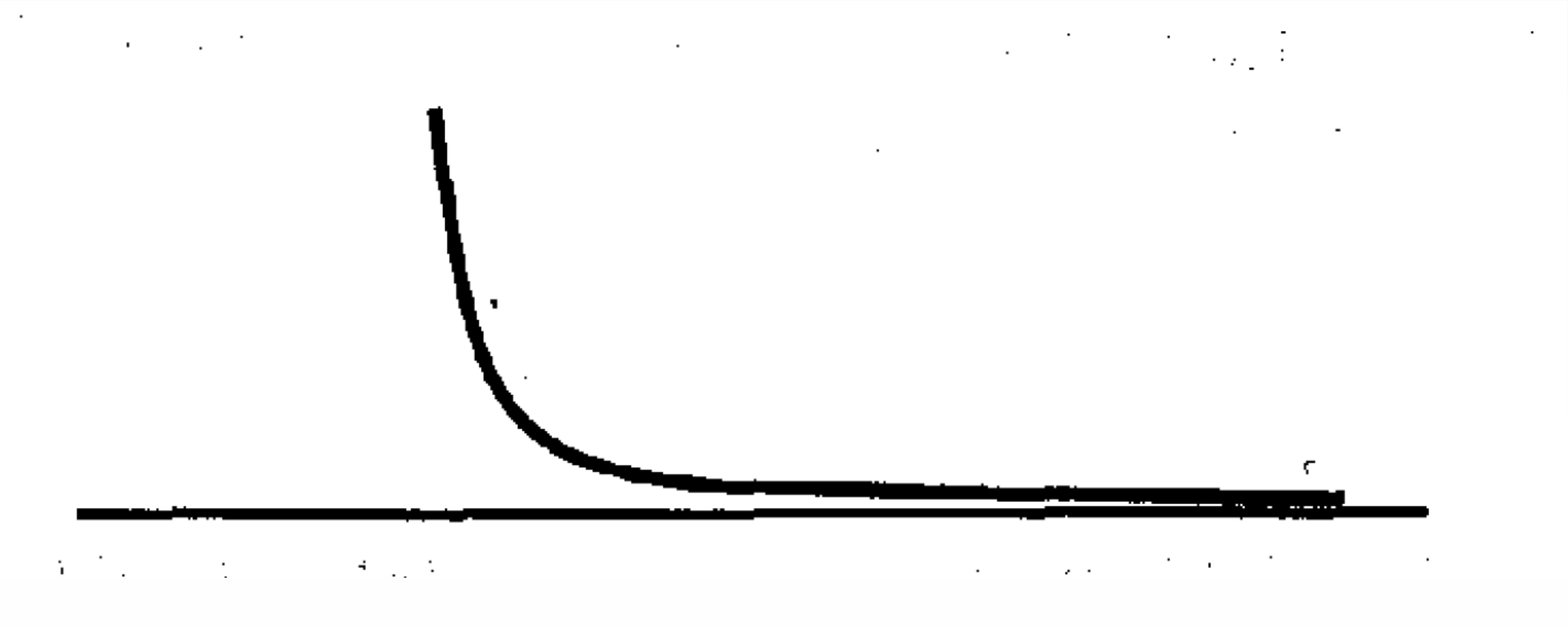
- $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{(0,y) | 1 \leq y \leq \sqrt{2}\} \cup (0,-1)$
- $A_n = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}\}$

¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos? ¿Cuál es su clausura?

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x/n\}$

¿Es conexo, localmente conexo?

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 1/x\}$



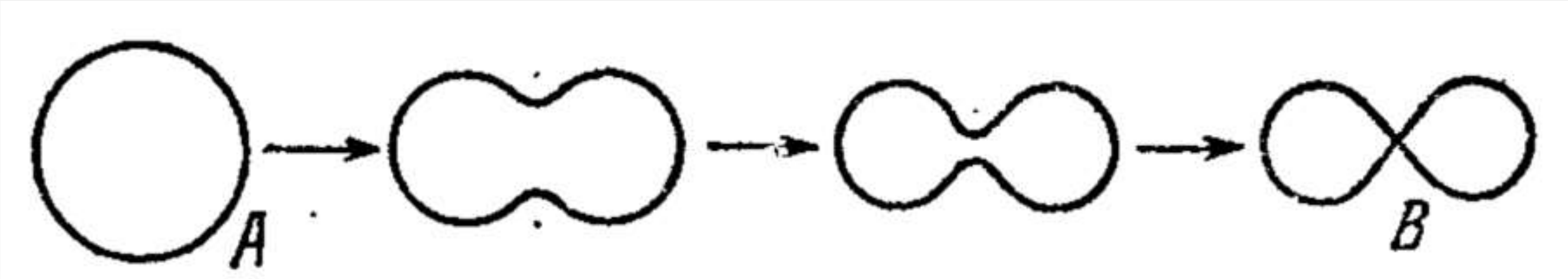
¿Es conexo, localmente conexo?

- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|y = \frac{1}{n}x, x \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}$

¿Son homeomorfos?

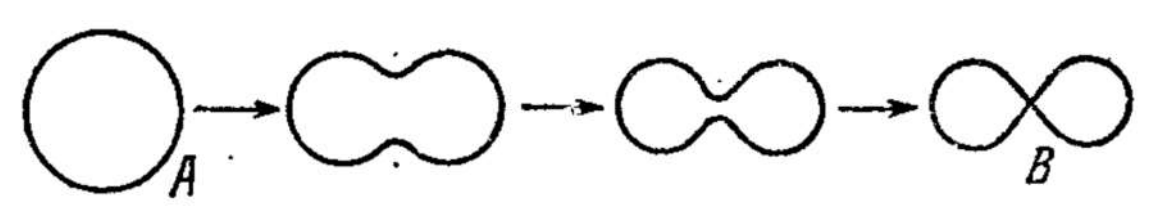
- $(0;1) \times [0;1]$ *con la topología del orden y* $\mathbb{R}$ *con la canónica*
- ¿Qué propiedad topológica NO comparten?
- ¡Uno es conexo por caminos y el otro no!

¿Son homeomorfas las figuras A y B?



¿Cómo demostrar que dos espacios NO son homeomorfos?

- **Truco Básico**: eliminemos un punto de ambos.
  ¿Han cambiado sus propiedades?
- En el ejemplo anterior, la figura B posee un punto que, al eliminarlo, “rompe” la figura en dos componentes conexas.
  Sin embargo, no hay ningún punto en la circunferencia que lo haga



¿Son homeomorfos?

- La letra T y la letra L?
- La letra K y la letra X?
- La letra R y la letra B?
- La letra E y la letra F?

¿Son homeomorfos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$?

PISTA: quitemos un punto cualquiera

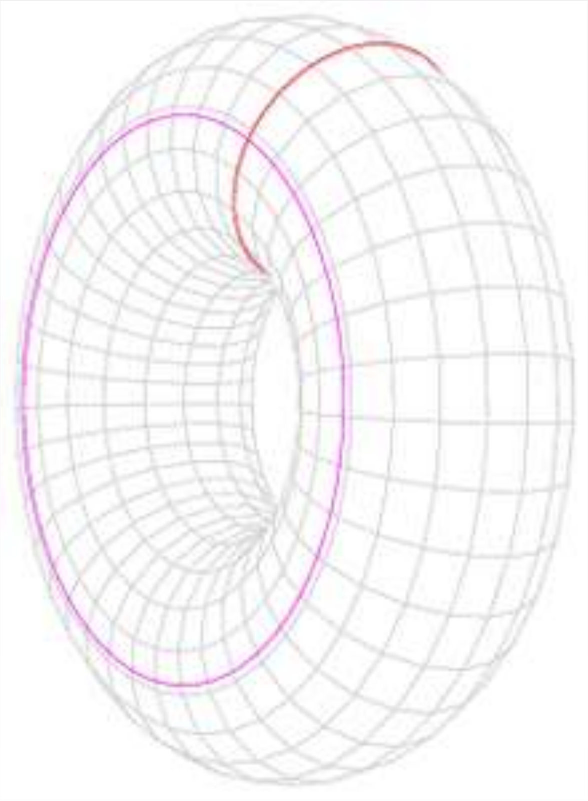
¿Son homeomorfos $(0;1)$ y $[0;1]$?

Pista: quitemos el punto $f(0)$

¿Son homeomorfos S^1 y S^n?

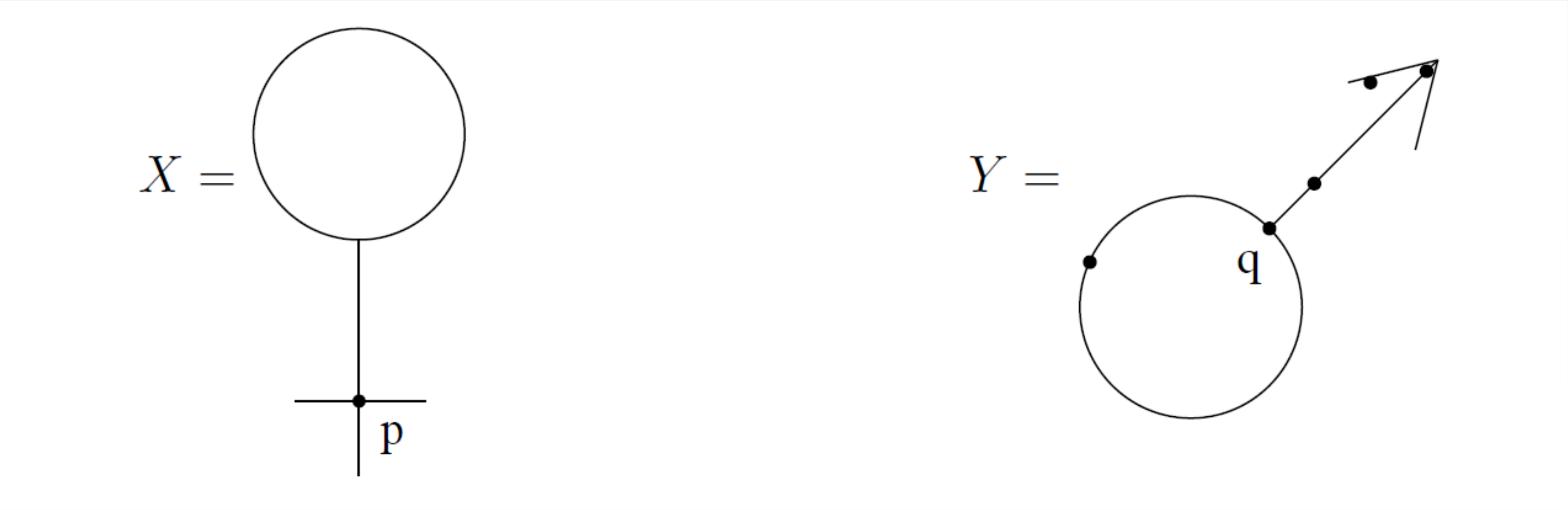
Pista: quitemos dos puntos

¿Son homeomorfos el toro y la esfera?

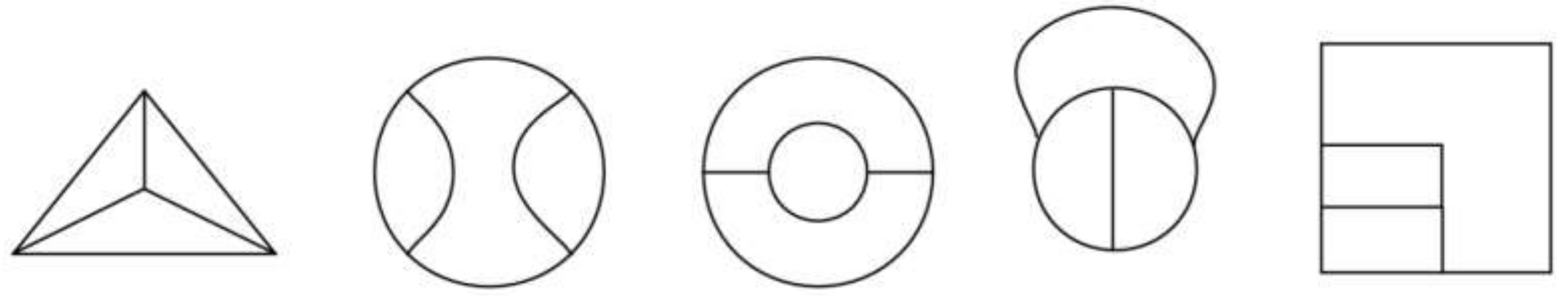


¿Son homeomorfos?

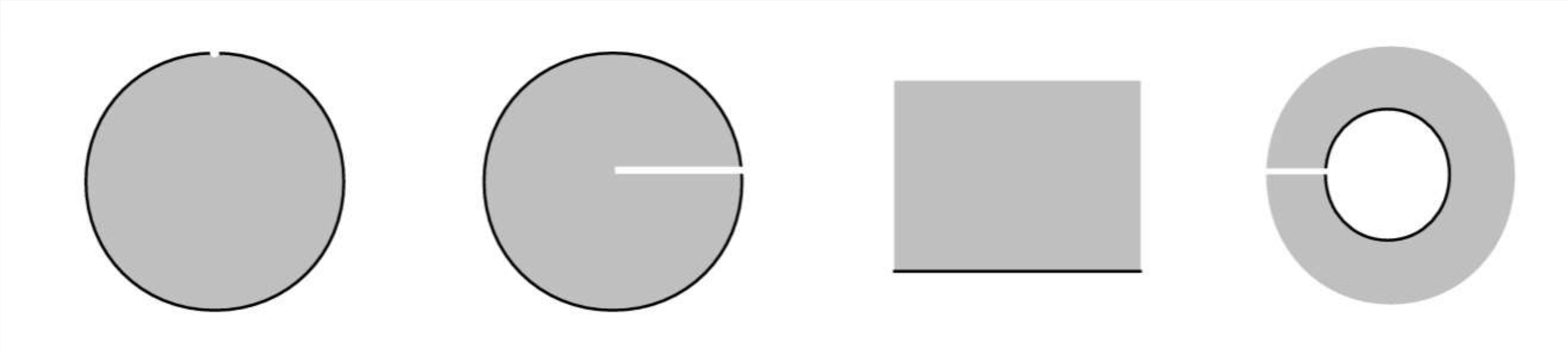
- Técnica: si quitamos el punto p, ¿qué le puede pasar a Y?



De estas gráficas, ¿cuáles son homeomorfas?



De estos espacios, ¿cuáles son homeomorfos?



Invariantes topológicos

| Definición. Una propiedad del espacio se llama **invariante topológico** (o **propiedad topológica**) si todos los espacios homeomorfos también la poseen

- Por ejemplo, la **conexidad** (conexo, conexo por caminos o localmente conexo) es un invariante topológico
- Ser **Hausdorff,** $\boldsymbol{T_1}$ o **2AN** (satisfacer el segundo axioma de numerabilidad), también lo es