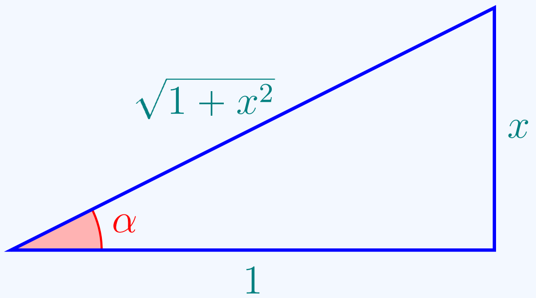
TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	**FECHA**	23/01/2024	
CURSO	1º	**HORA**	12:30	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	2 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 1

Transforma la siguiente expresión de forma que no dependa de funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\big(2\arctan(x)\big)$$

Solución:



$$\tan(\alpha) = \frac{x}{1} \qquad \longleftrightarrow \qquad \alpha = \arctan(x)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{sen}\big(2\arctan(x)\big) = \operatorname{sen}\big(\arctan(x) + \arctan(x)\big) =$$

$$= 2\operatorname{sen}\big(\arctan(x)\big)\cos\big(\arctan(x)\big) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) =$$

$$= 2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{2x}{x^2+1}}$$

PROBLEMA 2

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi\left(e^{\pi x}+1\right)-2\pi}{4x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\left(e^{\pi x}-1\right)}{4x\left(e^{\pi x}+1\right)}=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-1}{x\left(e^{\pi x}+1\right)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}\overset{L'H}{=}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\pi e^{\pi x}}{e^{\pi x}+1+\pi x e^{\pi x}}=\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	23/01/2024	
CURSO	1º	HORA	12:30	
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS	
ALUMNO				

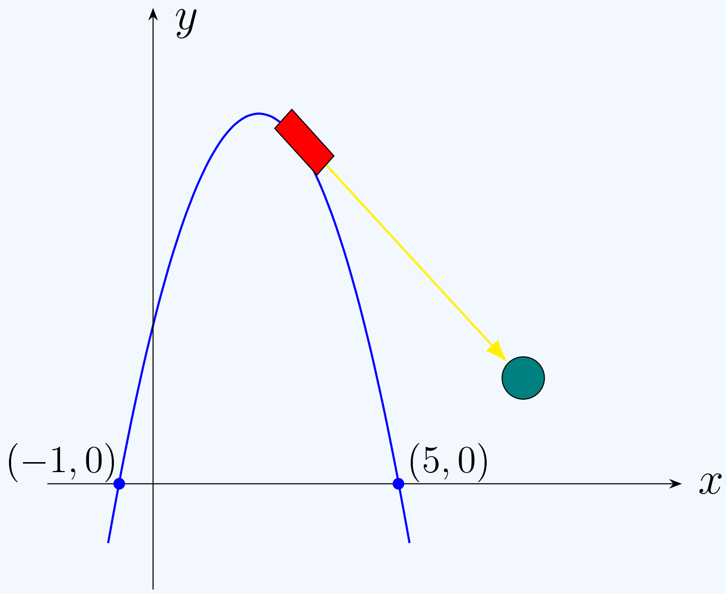
PROBLEMA 3

Un coche circula por la noche por un camino dado por la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ de tal forma que el sentido de circulación viene definido por los valores crecientes de la variable x. ¿En qué punto del camino iluminará con sus faros el objeto situado en el punto $(5, 4)$? Repite el problema suponiendo que el sentido de circulación está definido por los valores decrecientes de la variable x.

Solución:

Vamos a calcular los puntos de corte de la parábola con el eje X para construir un esquema del problema:

$$-x^2 + 4x + 5 = 0 \implies x^2 - 4x - 5 = 0 \implies x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \implies \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$



Si modelamos la luz de los faros como una recta tangente a la gráfica de la curva que además pasa por el punto $(5, 4)$, su ecuación será la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 4 = m(x - 5) \implies m = \frac{y-4}{x-5}$$

Respecto a la pendiente, su expresión es $m = f'(x) = -2x + 4$ para el valor x asociado al punto de tangencia. Vamos a igualar ambas expresiones:

$$\frac{y-4}{x-5} = -2x + 4 \implies y = 4 + (x-5)(-2x+4) \implies y = -2x^2 + 14x - 16$$

Puesto que el punto de tangencia pertenece a la curva, ya tenemos las ecuaciones necesarias para obtener su valor:

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x^2 + 14x - 16 \\ y = -x^2 + 4x + 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow -2x^2 + 14x - 16 = -x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \end{cases}$$

Dado que según el enunciado el coche circula en el sentido creciente de la variable x, la única solución posible es $x = 3$, con lo que el punto solicitado es $\boxed{P = (3, 8)}$.

En el caso de que el coche circulara en el sentido decreciente de la variable x, la única solución posible sería $x = 7$, con lo que obtendríamos el punto $\boxed{Q = (7, -16)}$.

TITULACIÓN	MATEMÁTICA COMPUTACIONAL & ING. SOFTWARE	FECHA	23/01/2024	
CURSO	1º	HORA	12:30	
GRUPO	A	DURACIÓN	2 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 4

Demuestra, calculándolo, que el polinomio interpolador de Lagrange correspondiente a los siguientes datos tiene grado 2. ¿Cuál debería haber sido el grado? ¿Por qué?

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-2	11	13	2

Solución:

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x) + f(x_3)\,L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{x\,(x^2-5x+6)}{(-1)(-3)(-4)} = -\frac{1}{12}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x+1)\,(x^2-5x+6)}{(1)(-2)(-3)} = \frac{1}{6}\left(x^3-4x^2+x+6\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} = \frac{x\,(x^2-2x-3)}{(3)(2)(-1)} = -\frac{1}{6}\left(x^3-2x^2-3x\right)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{x\,(x^2-x-2)}{(4)(3)(1)} = \frac{1}{12}\left(x^3-x^2-2x\right)$$

$$\begin{aligned} P(x) = &-2\left(-\frac{1}{12}(x^3-5x^2+6x)\right) + 11\left(\frac{1}{6}(x^3-4x^2+x+6)\right) + \\ &+13\left(-\frac{1}{6}(x^3-2x^2-3x)\right) + 2\left(\frac{1}{12}(x^3-x^2-2x)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{6}+\frac{11}{6}-\frac{13}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{-5}{6}-\frac{44}{6}+\frac{26}{6}-\frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{6}{6}+\frac{11}{6}+\frac{39}{6}-\frac{2}{6}\right)x + 11 = \\ &= -\frac{24}{6}x^2 + \frac{54}{6}x + 11 = \boxed{-4x^2+9x+11} \end{aligned}$$

Aunque el enunciado proporciona cuatro puntos, con lo que en principio deberíamos haber obtenido un polinomio de tercer grado, el polinomio calculado es de segundo grado porque en la práctica tenemos más puntos de los que necesitábamos para calcular el polinomio (se podría considerar que solo había tres puntos realmente independientes, el cuarto contenía información redundante para el cálculo de la curva).