Interior y clausura. Propiedad de Hausdorff

Topología - 5

Georgy Nuzhdin

2022-2024

Recordemos algunas definiciones

- Un conjunto X en la topología T se llama **abierto** si todos sus puntos tienen un entorno abierto dentro de él
$$\forall\, x \in X\; \exists\, B \subset X: x \in B, B \in T$$
- El **interior** del conjunto X, $\mathrm{Int}\,(X)$ son todos los puntos que satisfacen la definición anterior. Concretamente, cada conjunto abierto coincide con su interior
- Un punto se llama **fronterizo** si cada entorno suyo contiene puntos del conjunto X y puntos que NO le pertenecen. La unión de todos los puntos fronterizos se llama **frontera** $\mathrm{Fr}(X)$
- La **clausura** $\bar{X}$ del conjunto X es la unión del conjunto con su frontera
- Los **puntos de acumulación**, o **puntos límites**, X' son aquellos que cualquier entorno suyo tiene al menos otro punto de X
- Los elementos de $\bar{X}\backslash \mathrm{X}'$ se llaman **puntos aislados**

Busca la clausura, puntos límite, puntos aislados, frontera e interior de

- $(0,2)\ en\ \mathbb{R}$
- $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\}\ en\ \mathbb{R}$
- $(0,2)\ en\ (0;4)$
- $\mathbb{Q}\ en\ \mathbb{R}$
- $[1;2] \cup \{3\}\ en\ \mathbb{R}$

Busca la clausura, puntos límite, puntos aislados, frontera e interior de

- $\left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\right\} \cup [1;2) \cup \{3+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\}\ en\ Sorgenfrey$

Busca la clausura, puntos límite, puntos aislados, frontera e interior de

- $X = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\right\} \cup [1;2) \cup \{3 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\}\ en\ Sorgenfrey$
- El interior es $[1;2)$
- Ni el 1 ni el 2 ni el 0 son frontera: $[1;2)$ es el abierto que contiene el 1 (por tanto, es interior), el abierto $[2;3)$ contiene el 2 y no tiene ningún punto de X, el 0 está en el abierto $[0;1)$
- El 3 sí es frontera aunque no pertenezca al conjunto: cualquier entorno de 3 tiene también $3+\epsilon$, que contiene infinitos $3+\frac{1}{n}$
- El interior junto con el 3 son puntos de acumulación
- Todos los puntos $3+\frac{1}{n}$ y $-\frac{1}{n}$ son frontera y puntos aislados

Busca la clausura, puntos límite, puntos aislados, frontera e interior de

- $\left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\right\} \cup [1; 2) \cup \{3 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\}$ *en semirrectas derechas*

Busca la clausura, puntos límite, puntos aislados, frontera e interior de

- $X = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\right\} \cup [1;2) \cup \{3 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^{+}\}$ $en\ semirrectas\ derechas$
- Cualquier punto del intervalo $(-\infty, 4]$ es frontera porque si $a \in (-\infty, 4]$, cualquier abierto que lo contiene tiene forma de $A_a = (a - \epsilon, \infty)$ y la intersección $A_a \cap X$ tiene puntos dentro y fuera de conjunto (por ejemplo, 4 está dentro y 5 fuera)
- Por tanto, todo es frontera: no hay interior.
- Todo son puntos de acumulación menos el punto 4. El abierto $(3.8, \infty)$ no tiene **otros** puntos de X
- El 4 es el único punto aislado

Teorema. Cada conjunto cerrado C coincide con su clausura

- Demostraremos lo contrario. Vamos a suponer que hay algún misterioso punto $x \notin C$ de la frontera de nuestro conjunto cerrado que NO le pertenece
- El complementario del cerrado es un conjunto abierto. Por tanto, $x \in X \backslash \mathrm{C}$ debe tener un entorno completamente dentro de $X \backslash \mathrm{C}$
- Pero cualquier entorno suyo tiene tener puntos del conjunto C. Contradicción

Teorema. La unión de todos los abiertos que contiene X coincide con $\mathrm{Int}(X)$

- Es decir, el interior es el "abierto más grande" que cabe en X
- Claramente, si un punto pertenece al interior, su entorno abierto pertenece a la unión de todos los abiertos
- Ahora bien, ¿por qué cada punto de la unión de los abiertos pertenece al Interior?
- Si está en la unión, está en un abierto, ¿verdad?

Teorema. La clausura de A es la intersección de todos los cerrados que contienen A

- Es decir, la clausura es el "cerrado más pequeño" que contiene A
- Está claro que la intersección de todos los cerrados que contienen A también contiene A
- ¿Por qué contiene la frontera? Cojamos un punto x de la frontera. Si no está en la intersección de todos los cerrados, ¡tiene que estar en su complementario, o sea, en la unión de todos los abiertos que NO contienen A! Entonces, existe un entorno de x que no intresecta con A
- Pero ¡cualquier entorno de x contiene elementos de A porque está en la frontera!
- Ahora bien, ¿y si hay elementos en la intersección de todos los cerrados que contienen A que NO estén en la clausura de A? Tiene que ser un punto que NO pertenezca a A. Si no está en la clausura, hay un **entorno** suyo que NO pertenezca a A (es decir, está "separado"). Por tanto, está en el **complementario** a la intersección de todos los cerrados. Contradicción.

¿Puede el interior de un conjunto coincidir con su clausura?

- El interior es un abierto. La clausura es un cerrado
- ¿Qué conjunto es abierto y cerrado a la vez?
- Por ejemplo, cada conjunto en sí mismo. $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. $(0;1)$ en $(0;1)$.
- En topologías “raras” como la Sorgenfrey: $[0;1)$ es abierto y cerrado a la vez y su interior coincide con su clausura.

Teoremas de frontera, clausura e interior

- $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \backslash A}$
- $\bar{A} = A \cup A'$

¿Es verdad que

- $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int(B)$?
- $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$?
- $Int(Fr(A)) = \emptyset$?

¿Es verdad que

- $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int(B)$?
- NO. Cojamos $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. También podemos elegir $A = (0,1), B = [1,2)$
- $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$?
- SÍ. Para los puntos interiores de A y B la identidad claramente se cumple. Si un punto está en la frontera de A, o bien no pertenece a $A \cap B$, o bien está en su frontera. De esta manera, no pertenece ni a la parte izquierda, ni a la derecha
- $Int(Fr(A)) = \emptyset$?
  SOLAMENTE SI A ES UN CERRADO. En este caso $A = Fr(A) + Int(A)$ (aquí los miembros de la "suma" no tienen intersección)
  Pero en el caso general la igualdad NO se cumple.
  Podemos nuevamente coger $A = \mathbb{Q}, Fr\ (A) = \mathbb{R}, \mathrm{Int}\big(\mathrm{Fr}(\mathrm{A})\big) = \mathbb{R}$

¿Es verdad que

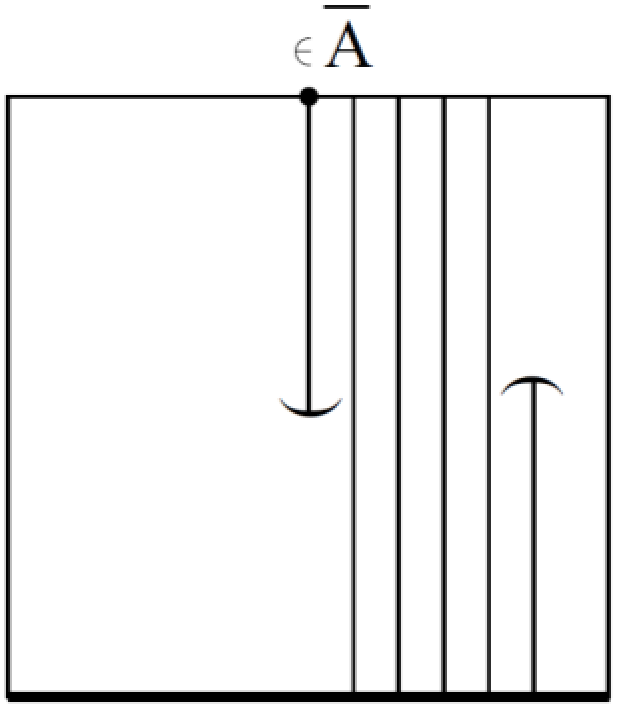
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$?
- $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$?

¿Qué ocurre con la clausura si refinamos la topología?

- ¿Puede la clausura de A en la topología $T_1 \subset T_2$ no coincidir con $\bar{A}$ en T_2?
- Construye un ejemplo. Piensa, por ejemplo, en la Sorgenfrey vs. la canónica
- ¿Qué le pasa a la clausura de $(0;1)$?
- ¿Cuál es la conclusión?
- ¡Eso es! La clausura en la topología más gruesa CONTIENE la clausura en la topología más fina

Ejemplo “rarito”

- Consideremos el cuadrado $X = [0;1] \times [0;1]$ con el orden lexicográfico
- Dentro de él, veremos el borde inferior $A = \{(x,0), x \in [0;1]\}$
- ¿Cuál es la clausura $\bar{A}$?
- PIENSA BIEN. Localiza puntos fuera de A cuyo entorno siempre contiene puntos de A



Subconjuntos densos

| Definición 1. El subconjunto $H \subset X$ se llama **denso** si $\overline{H} = X$

| Definición 2. El subconjunto $H \subset X$ se llama **denso** si su intersección con cualquier abierto no vacío de X no es nula

- **Análisis**. La idea de un subconjunto denso consiste en que aproxima con cualquier precisión los puntos del propio conjunto X. Es decir, en cualquier entorno de cualquier punto de X hay puntos del subconjunto H

Subconjuntos densos

- **Teorema**. Las dos definiciones coinciden: el subconjunto es denso si y solo si su intersección con cualquier abierto no vacío no es nula
- $\Rightarrow$ Sabemos que $\overline{H} = X$. Supongamos lo contrario, que $\exists\, U \subset X : U \cap H = \emptyset$
- Como este U es abierto, tiene un punto x que está en X pero no en H, por tanto, está en la frontera de H, por tanto cada entorno suyo tiene que tener puntos de H. *Contradicción*
- $\Leftarrow$ Demostraremos que $X \backslash (H \cup Fr(H)) = \emptyset$ es decir, X no tiene puntos fuera de H y de la frontera de H. Elijamos un punto $x \in X : x \notin H$, Cualquier abierto U que contenga x contiene también elementos de H.
- Pero entonces por la definición de la frontera de H sabemos que el punto $x \in Fr(H)$

¿Son densos

- Los enteros en racionales?
- Los racionales en $\mathbb{R}$?
- Los irracionales en $\mathbb{R}$?

Teorema de Weierstrass

- Los polinomios son densos en el conjunto de funciones continuas
- “Traduciendo” este teorema al lenguaje humano, cada función continua puede ser aproximada por un polinomio con cualquier precisión

No denso en ninguna parte

| Definición. Un subconjunto **no es denso en ninguna parte** si el interior de su clausura es vacío.

Reformulando, un conjunto no denso en ninguna parte sólo es frontera

¿Son no densos en ninguna parte

- ¿$\mathbb{Z}\ en\ \mathbb{R}$?
- ¿$\mathbb{R}\ en\ \mathbb{R}^2$?
- Una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$?

No denso en ninguna parte

- El complemento de un no denso en ninguna parte es denso

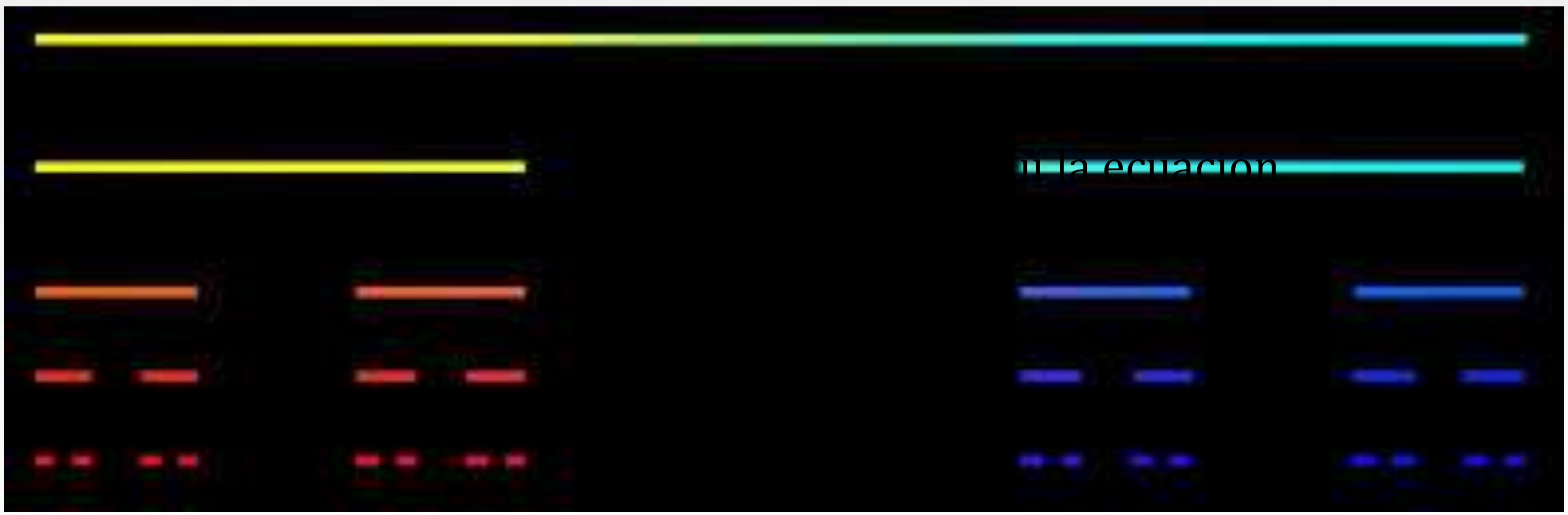
Espacios separables

- Un espacio topológico se llama separable si tiene un subconjunto numerable denso
- ¿Es separable $\mathbb{R}$ con la canónica? ¿Y con la Sorgenfrey?
- ¿Con qué topología $\mathbb{R}$ no es separable?
- ¿Algún otro espacio no separable?

Espacios separables: respuestas

- ¿Es separable $\mathbb{R}$ con la canónica? Sí: los racionales son densos
- ¿Y con la Sorgenfrey? También por lo mismo
- ¿Con qué topología $\mathbb{R}$ no es separable? Con la discreta: los puntos son abiertos. Si hubiera un denso numerable, todos los números reales serían numerables y no es así
- ¿Algún otro espacio no separable? Funciones de variable real.

El conjunto de Cantor



$$C_0 = [0,1]$$
$$C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$$
$$C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$$
$$C = \cap C_i$$

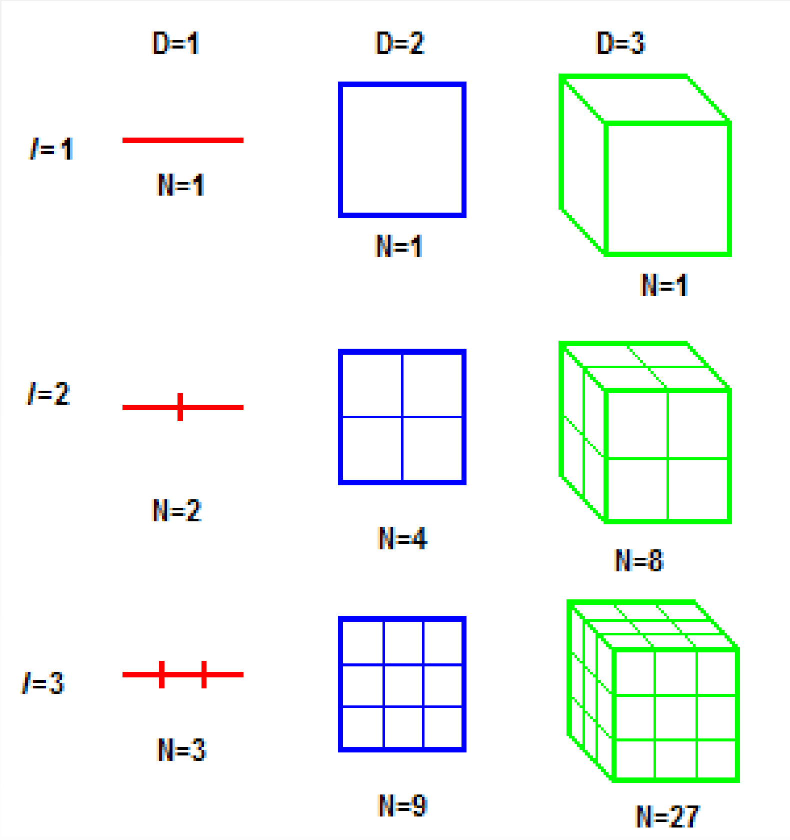
Demuestra que

- El conjunto de Cantor no es denso en ninguna parte
- El conjunto de Cantor mide 0
- Sin embargo, el conjunto de Cantor no es numerable (por tanto, existe una biyección entre C y $\mathbb{R}$

¿Qué es la “dimensión”?

- ¿Por qué decimos que un segmento es de dimensión 1, que un cuadrado es de dimensión 2 y que un cubo es de dimensión 3?
- Al duplicar el objeto, se hace $2^{dimensión}$ veces más grande
- Al triplicarlo, se hace $3^{dimensión}$ veces más grande
- Entonces, la dimensión es…

$$\log_2 aumento\ duplicado$$



Calcula la dimensión del conjunto de Cantor

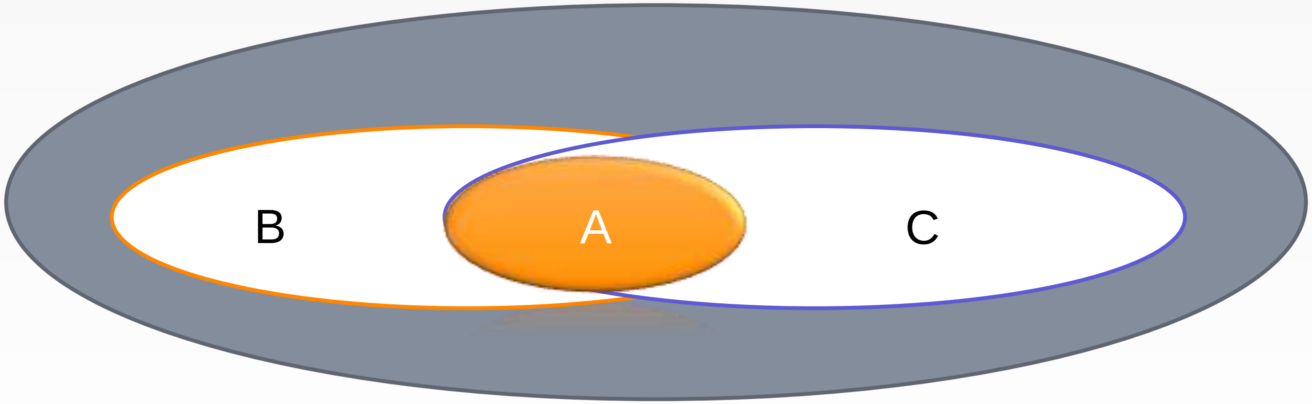
- Cuando triplicamos su tamaño, ¿cuántas copias suyas aparecen?

¿Qué significa que una sucesión s_n converge a un punto s?

- $\forall\ A(s)\ \exists N > 0 \colon \forall\ n > N\ s_n \in A(s)$
- Es decir, para cualquier entorno de s todos los términos de la sucesión a partir de un determinado número están dentro de este entorno

¿Puede una sucesión converger a varios puntos?

- Recordemos que significa “converger”
- Decimos que la sucesión x_n converge a x si a partir de cualquier N todas las $x_n : n > N$ están en un entorno de x
- Considera ahora esta topología: { {}, {A}, {A,B}, {A, C}, {A, B, C} }
- ¿Dónde converge la sucesión $x_n = A$? ¿Y $x_n = B$?



Queremos evitar estos casos

- ¿Cuál era el problema del ejemplo anterior?
- ¡Que no había entornos que separaran A de B!
- Por tanto para cualquier entorno de B todos los términos de la sucesión $x_n = B$ contenían A (y no al revés)

Propiedad de Hausdorff y T_1

- Un espacio tiene **propiedad de Hausdorff (o es T_2)** si para cada pareja de puntos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ existen entornos disjuntos $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : U_1 \cap U_2 = \emptyset$
  Es decir, los habitantes viven en "casas separadas"
- Un espacio es **de Frechet**, o $\boldsymbol{T_1}$ si para cada pareja de puntos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ existen $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : x_1 \notin U_2 \ y \ x_2 \notin U_1$
  Es decir, aunque las "casas" sean "particulares" (uno no vive en casa del otro) puedan tener "espacios comunes" o "moradores compartidos"

¿Cuál de las dos condiciones es más restrictiva?

- Hausdorff contra Frechet
- Claramente, cualquier espacio T_2 también es T_1
- Para las topologías discretas es verdad al revés. Pero no siempre
- ¿Qué topología conocida es T_1 pero no T_2?
- PISTA: ¿En qué topología CADA pareja de abiertos tiene un punto en común, por lo que no existen casas que no compartan espacio?
- La cofinita. ¿Qué abierto tiene siempre x que no tenga y?
- $\mathbb{R}\backslash y$

Un espacio es T_1 si y solo si los puntos son cerrados

- $\Rightarrow$ Si es T_1, queremos comprobar que el conjunto $\{x\}$ es cerrado, es decir, que su complementario $X\setminus\{x\}$ es abierto.
- Sabemos que cualquier punto y tiene un abierto A_y que no incluya el punto x. Consideremos la unión de todos los $\bigcup_{y\in X, y\neq x} A_y = X\setminus\{x\}$. Es abierto
- $\Leftarrow$ Es casi evidente. Si el punto es cerrado, su complementario es abierto. Cogiendo cualquier y buscamos un entorno abierto suyo que no contenga x
- Pues es $X\setminus\{x\}$

Si un espacio es Hausdorff entonces

- Cada sucesión convergente converge a un único punto
- Los puntos son conjuntos cerrados (por ser T_1)
- Si es un espacio finito, es topología discreta
  - Demostración.
  - Al ser Hausdorff, también es T_1
  - Los puntos son cerrados, por lo que los complementarios son abiertos
  - La intersección de los complementarios genera los puntos, que son abiertos (y cerrados a la vez, pero no pasa nada ☺)

La importancia de llamarse Hausdorff

- ¿A qué punto(s) converge la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ en la topología cofinita?
- Demostremos que converge a cualquier punto x
- Cualquier entorno de x es $\mathbb{R}\backslash\{puntos\}$. Estos puntos son finitos y están en una parte finita de la sucesión. Excluyendo esta parte todos los demás términos de la sucesión están en este entorno
- ¿A qué converge esta sucesión en Semirrectas Derechas?
- ¡A todos los negativos!

Espacios metrizables

- Un espacio se llama **metrizable** si dispone de una función distancia
- La distancia, como sabemos, induce topología con la base de bolas de radio epsilon

Primer Axioma de numerabilidad

- Un espacio satisface el **primer axioma de numerabilidad** si cualquier punto $x \in X$ tiene una **colección numerable de entornos** $\{A_i(x)\}$ tales que cualquier entorno abierto $B(x)$ contiene alguno de ellos
- Discusión
- Esto significa que podemos "aproximarnos" a cualquier punto con una serie de entornos cada vez más pequeños
- Por ejemplo, $B_{\frac{1}{n}}(x)$, bolas de radio $\frac{1}{n}$, forman una serie de entornos cada vez más pequeños. Por muy pequeño entorno $B(x)$ que elijamos, alguna bola $B_{\frac{1}{n}}(x)$ estará contenida dentro
- De hecho, **cualquier espacio metrizable cumple el primer axioma de numerabilidad**: basta elegir $B_{\frac{1}{n}}(x)$

$\mathbb{R}$ con Sorgenfrey ¿es 1AN?

- Sí
- Considera para cada x una base de entornos $B_{\frac{1}{n}}(x) = \left[x; x + \frac{1}{n}\right)$. Es numerable
- Cualquier entorno abierto de x contiene al menos una bola $B_{\frac{1}{n}}(x)$

$\mathbb{R}$ con la cofinita, ¿es 1AN?

- Supongamos que sí. Elijamos el 0. Si es 1AN, existe una base de entornos abiertos $B_n(0)$. Cada entorno abierto $B_n = \mathbb{R} \backslash F_n$, donde F_n es una colección de puntos aislados.
- Vamos a construir un entorno de 0 que no contenga ninguno de los B_n. ¡Basta con encontrar un punto que no esté en ninguno de ellos! Hay muchos puntos en $\mathbb{R}$… ☺
- Lo único que necesitamos…
- …es que no sea ninguno de los puntos aislados F_n que hemos quitado
- Consideremos $F = \bigcup F_n$. Como la base es numerable, F también lo es
- Existe un punto $x \notin F$
- Ahora elijamos $B = \mathbb{R} \backslash x$
- B no contiene ninguno de los B_n (porque no tiene el punto x)

Segundo Axioma de numerablidad

- Un espacio satisface el **segundo axioma de numerabilidad** si tiene al menos **una base numerable**
- Discusión
- Un espacio puede tener una base no numerable pero satisfacer este axioma
- Por ejemplo, $B = \{(a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología canónica, y no es numerable
- Pero podemos coger un subconjunto de esta base que sea numerable, ¿cuál?
- Claramente, sí: $B_{\mathbb{Q}} = \{(a, b), a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$

Uno de los axiomas es más fuerte que el otro ... ¿Cuál?

- Si hay una base numerable, cada punto tiene una base de entornos numerable (porque todo entorno es una unión de elementos de la base)
- Por tanto, cada 2AN es también 1AN
- ¿Hay algún espacio que sea 1AN pero no 2AN?

$\mathbb{R}$ con Sorgenfrey, ¿tiene una base numerable?

- Discusión. ¿Por qué no vale el ejemplo anterior con el cambio de () por [)? $B_{\mathbb{Q}} = \{[a, b), a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$
- ¡Aja! $\left[\sqrt{2}, 2\right)$ no tiene extremos racionales…
- Supongamos que $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey tiene una base numerable.
- Elijamos un punto x
- El abierto $A_x = [x; x + 1)$ tiene que estar en la base o ser una unión de los elementos de la base, por tanto, en la base tiene que haber un abierto $B_x = [x; x + algo)$
- Elijamos ahora $y > x$. Para este punto debe existir un abierto B_y de la base, que no puede coincidir con el abierto B_x y no puede contenerlo (no contiene x)
- Entonces, la base tiene al menos tantos elementos cuantos x existen (todos los números reales, que es un conjunto no numerable)

$Teorema.$ $\mathbb{R}$ con Sorgenfrey no es metrizable

- Supongamos que lo es, que existe una distancia que genera la topología Sorgenfrey
- Cualquier distancia genera una base de abiertos que son bolas abiertas
- Elijamos la base de abiertos con centros en los racionales y radios racionales
- ¡Es una base numerable! Contradicción

La cofinita ¿es metrizable?

- No es 2AN
- No es Hausdorff