Solución del Parcial 2023-2024

Juan Rodríguez

Ejercicio 1

a) $[0,2]\times\{0\}$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$

Sea

$$X = [0,2]\times\{0\} \subset \mathbb{R}^2$$

En X, podemos presentar la separación:

$$X = ((0,0),(1,0'5)) \cup ((1,0'5),(2,0))$$

Por tanto, X no es conexo lo que implica que tampoco lo es por caminos.

$$\boxed{[0,2]\times\{0\}\ \text{ no es conexo ni conexo por caminos}}$$

b) $\{0\}\times[0,2]$ con la topología del orden en $\mathbb{R}^2$

Sea

$$Y = \{0\}\times[0,2] \subset \mathbb{R}^2$$

En Y, el orden lexicográfico queda determinado por la segunda coordenada:

$$(0,y) < (0,y') \iff y < y'.$$

Por tanto, Y con la topología del orden es homeomorfo al intervalo $[0,2]$ con la topología canónica.

Luego Y es conexo y conexo por caminos.

$$\boxed{\{0\}\times[0,2]\ \text{ es conexo y conexo por caminos}}$$

c) $P = \{x=0\}\cup\{y=\ln x\}$

Sea

$$P = L\cup G,\quad L = \{(0,y) : y\in\mathbb{R}\},\quad G = \{(x,\ln x) : x>0\}.$$

Observamos que $L\cap G = \varnothing$. Además, $P = L\cup G$

Por lo tanto,

$$P = L\cup G$$

es una separación de P en dos abiertos disjuntos no vacíos. Por tanto, P no es conexo y tampoco es conexo por caminos.

$$\boxed{P\ \text{ no es conexo ni conexo por caminos}}$$

d) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $A \cup \{(1,0)\}$

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y = x/n\}, \qquad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Cada A_n es la imagen continua de $[0,1]$ (por $x \mapsto (x, x/n)$), luego es conexo. Además,

$$(0,0) \in A_n \quad \forall n,$$

así que la unión $\bigcup_n A_n$ es conexa. Por tanto, A es conexo.

El punto $(1,0)$ pertenece a la clausura de A, pues $(1,1/n) \in A_n$ y $(1,1/n) \to (1,0)$. Como la unión de un conexo con un punto de su clausura es conexa, se concluye que

$$A \cup \{(1,0)\} \text{ es conexo.}$$

Sin embargo, $A \cup \{(1,0)\}$ no es conexo por caminos (ejemplo clásico de la "escoba infinita"): no existe un camino continuo contenido en $A \cup \{(1,0)\}$ que una $(1,0)$ con $(0,0)$.

$$\boxed{A \cup \{(1,0)\} \text{ es conexo pero no conexo por caminos}}$$

Ejercicio 2

Decidimos si los siguientes subconjuntos son compactos.

a) $[0,2] \cup [3,4]$

En $\mathbb{R}$ con la topología usual, un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado (Teorema de Heine–Borel).

El conjunto $[0,2] \cup [3,4]$ es cerrado (unión de cerrados) y acotado. Luego es compacto.

$$\boxed{[0,2] \cup [3,4] \text{ es compacto}}$$

b) $[0,2) \cup (2,4]$

El conjunto no es cerrado: el punto 2 es punto de acumulación, pero $2 \notin [0,2) \cup (2,4]$. Luego no es compacto (en $\mathbb{R}$, compacto $\Rightarrow$ cerrado).

$$\boxed{[0,2) \cup (2,4] \text{ no es compacto}}$$

c) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

Sea

$$C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}.$$

Es acotado. Además, su único punto de acumulación es 0, y $0 \in C$, luego C es cerrado.

Por Heine–Borel, C es compacto.

$$\boxed{\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \text{ es compacto}}$$

d) $\mathbb{R}$ con la topología cofinita

Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ con la topología cofinita. Recordamos que un abierto no vacío tiene complementario finito.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$. Elige $U_{i_0} \neq \varnothing$. Entonces $\mathbb{R} \setminus U_{i_0}$ es finito, digamos $\mathbb{R} \setminus U_{i_0} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Como $\{U_i\}$ recubre $\mathbb{R}$, para cada x_j existe U_{i_j} tal que $x_j \in U_{i_j}$.

Entonces

$$U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} = \mathbb{R},$$

y hemos obtenido un subrecubrimiento finito. Por tanto, $\mathbb{R}$ es compacto en la topología cofinita.

$$\boxed{(\mathbb{R}, \tau_{cf}) \ \text{ es compacto}}$$

Ejercicio 3

Queremos hallar k tal que

$$3K \ \cong \ 2T \,\#\, k\mathbb{RP}^2,$$

donde K es la botella de Klein y T el toro.

Usamos la característica de Euler y la fórmula de suma conexa:

$$\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Recordamos:

$$\chi(T) = 0, \qquad \chi(K) = 0, \qquad \chi(\mathbb{RP}^2) = 1.$$

Cálculo de $\chi(3K)$

$$\chi(K\#K) = 0 + 0 - 2 = -2, \qquad \chi(K\#K\#K) = (-2) + 0 - 2 = -4.$$

Luego

$$\chi(3K) = -4.$$

Cálculo de $\chi(2T\#k\mathbb{RP}^2)$

Primero,

$$\chi(2T) = \chi(T\#T) = 0 + 0 - 2 = -2.$$

Además, para $k\mathbb{RP}^2$ se tiene $\chi(k\mathbb{RP}^2) = 2 - k$. Entonces,

$$\chi(2T\#k\mathbb{RP}^2) = \chi(2T) + \chi(k\mathbb{RP}^2) - 2 = (-2) + (2 - k) - 2 = -(k + 2).$$

Igualación

Como las superficies son homeomorfas, sus características de Euler coinciden:

$$-4 = -(k + 2) \quad \Rightarrow \quad k = 2.$$

$$\boxed{k = 2}$$

Ejercicio 4

Sea S una superficie compacta, sin borde, **orientable** y con

$$\chi(S) = -2.$$

Queremos identificar S y dar un diagrama poligonal.

Identificación por característica de Euler

Si S es orientable, entonces $S \cong \#^g T$ (suma conexa de g toros) y

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

Imponiendo $\chi(S) = -2$:

$$2 - 2g = -2 \quad \Longrightarrow \quad 2g = 4 \quad \Longrightarrow \quad g = 2.$$

Por tanto,

$$\boxed{S \cong T\#T}$$

(es decir, la superficie orientable de género 2, el “doble toro”).

Diagrama poligonal

Un modelo estándar para $T\#T$ es un octógono con identificaciones

$$a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,c\,d\,c^{-1}\,d^{-1}.$$

Ejercicio 5

Dados los espacios:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \quad B = S^2 \setminus \{(4, 0, 0)\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 3\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\},$$
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\},$$
$$G = F \setminus \{(1, 1)\}.$$

1) Clase homeomorfa a $\mathbb{R}^2$

- $B \cong \mathbb{R}^2$: por proyección estereográfica, la esfera menos un punto es homeomorfa al plano.
- $C \cong \mathbb{R}^2$: el cambio lineal $(u, v) = (x + y, x - y)$ es un homeomorfismo lineal de $\mathbb{R}^2$ y lleva
$$C = \{|x + y| < 3\}$$
al conjunto $(-3, 3) \times \mathbb{R}$, que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo con $u \mapsto \tan(\frac{\pi}{6}u)$).
- $E \cong \mathbb{R}^2$: el disco abierto es homeomorfo al plano (por ejemplo mediante una aplicación radial).

Por tanto,

$$\boxed{B \cong C \cong E \cong \mathbb{R}^2.}$$

2) A no es homeomorfo a B, C, E

El conjunto A son los ejes de coordenadas (homeomorfo a $\mathbb{R}$). Además, $A \setminus \{0, 0\}$ es disconexo (se separa en cuatro semirrectas), mientras que $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ es conexo para cualquier $q \in \mathbb{R}^2$.

Como el número de componentes conexas tras quitar un punto es invariante topológica, se concluye que

$$\boxed{A \ncong B, \quad A \ncong C, \quad A \ncong E.}$$

3) D no es homeomorfo a los anteriores

El conjunto D es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$). En cambio, A, B, C, E no son compactos.

Como la compacidad es invariante topológica,

$$\boxed{D \ncong A,\ B,\ C,\ E.}$$

4) Clasificación de F y G mediante π_1

El conjunto F es el disco cerrado de radio 3 con el origen eliminado. Se retrae por deformación fuerte a la circunferencia S^1 (proyección radial), luego

$$\pi_1(F) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por tanto F no es homeomorfo a A, B, C, D, E (todos ellos son simplemente conexos salvo A, o bien compactos).

El conjunto $G = F \setminus \{(1, 1)\}$ es el disco (con borde) con dos puntos eliminados. Se retrae por deformación fuerte a un grafo con dos ciclos (equivalente a un “ocho”), luego

$$\pi_1(G) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

En particular, $\pi_1(G) \ncong \pi_1(F)$, luego

$$\boxed{G \ncong F.}$$

Conclusión

Las clases de homeomorfismo quedan:

$$\boxed{B \cong C \cong E,}$$

y los demás no son homeomorfos entre sí:

$$\boxed{A,\ D,\ F,\ G \ \text{ quedan cada uno en su propia clase.}}$$

Ejercicio 6

En ambos casos se nos da un polígono con lados identificados mediante colores y flechas. Para identificar la superficie asociada contamos el número de clases de vértices V, aristas E y caras F, calculamos la característica de Euler

$$\chi = V - E + F,$$

y estudiamos la orientabilidad.

Primer diagrama

El polígono tiene 8 lados identificados en 4 pares, luego

$$E = 4.$$

Al seguir las identificaciones de los extremos de las aristas se obtienen tres clases distintas de vértices, que denotamos por A, B, C. Por tanto,

$$V = 3.$$

El interior del polígono constituye una única cara, así que

$$F = 1.$$

La característica de Euler es

$$\chi = V - E + F = 3 - 4 + 1 = 0.$$

Además, el patrón de identificaciones no preserva la orientación, por lo que la superficie es no orientable.

En superficies no orientables se cumple

$$\chi = 2 - k,$$

donde k es el número de planos proyectivos en la suma conexa. Imponiendo $\chi = 0$, obtenemos

$$0 = 2 - k \quad \Rightarrow \quad k = 2.$$

Como $\#^2\mathbb{RP}^2$ es homeomorfa a la botella de Klein, concluimos que

$$\boxed{\text{El primer diagrama representa una botella de Klein.}}$$

Segundo diagrama

El polígono tiene 6 lados identificados en 3 pares, luego

$$E = 3.$$

Siguiendo las identificaciones de los vértices se obtienen dos clases distintas de vértices, por lo que

$$V = 2.$$

De nuevo, hay una única cara:

$$F = 1.$$

La característica de Euler es

$$\chi = V - E + F = 2 - 3 + 1 = 0.$$

En este caso, todas las identificaciones preservan la orientación, luego la superficie es orientable. Para superficies orientables se cumple

$$\chi = 2 - 2g,$$

donde g es el género. Imponiendo $\chi = 0$, obtenemos

$$0 = 2 - 2g \quad \Rightarrow \quad g = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\text{El segundo diagrama representa un toro.}}$$

Ejercicio 7

a) $\pi_1(\mathbb{T}^2 \times S^1)$

Usamos que el grupo fundamental del producto es el producto directo:

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Además,

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Luego

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^3.$$

$$\boxed{\pi_1(\mathbb{T}^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^3}$$

b) $\pi_1(\mathbb{R}^4)$

El espacio $\mathbb{R}^4$ es contractible (se retrae por deformación fuerte a un punto), por lo que su grupo fundamental es trivial:

$$\boxed{\pi_1(\mathbb{R}^4) = \{e\}}.$$

c) $\pi_1(Y)$, donde $Y = \{(x, y) : |x| \leq 3,\ |y| \leq 3\} \cup \{(x, y) : x^2 = 9\}$

Obsérvese que $\{(x, y) : x^2 = 9\} = \{x = 3\} \cup \{x = -3\}$ está contenida en el borde del cuadrado $\{(x, y) : |x| \leq 3,\ |y| \leq 3\}$. Por tanto,

$$Y = \{(x, y) : |x| \leq 3,\ |y| \leq 3\},$$

que es un cuadrado cerrado, y por tanto contractible.

Luego,

$$\boxed{\pi_1(Y) = \{e\}}.$$

d) $\pi_1(Z)$, donde $Z = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) : x^2 = 9\}$

El conjunto Z es la unión de la circunferencia de radio 3 con las dos rectas verticales $x = 3$ y $x = -3$. Estas rectas se pegan a la circunferencia en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y no añaden ciclos (son ramas contractibles).

Por tanto, Z se retrae por deformación fuerte a la circunferencia S^1 (de radio 3), y en consecuencia:

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}}.$$