Ejercicios de Sucesiones y Series

Ejercicio 1

Determinar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{a^n(n+1)} \quad \text{en función del parámetro } a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Ejercicio 2

Calcular el siguiente límite utilizando el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{7} + \cdots + \sqrt[3n]{5n-3}}{7n+2}.$$

Ejercicio 3

Determinar el carácter de la siguiente serie usando alguno de los criterios vistos en clase:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-3)^{3n}}{(6n^6+5n^5-n+1)^n}.$$

Ejercicio 4

Determinar si las series

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cos(\pi n)}$$

son convergentes o divergentes y, adicionalmente, si son absoluta o condicionalmente convergentes.

Ejercicio 5

Calcular el siguiente límite utilizando el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 2^1 + 2^2 2^2 + 3^2 2^3 + \cdots + n^2 2^n}{2^n n^2}.$$

Ejercicio 6

Dada la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \quad n \geq 1, \qquad a_1 = 0{,}5,$$

completar los siguientes apartados:

1. Demostrar que la sucesión está acotada tanto inferiormente como superiormente, indicando claramente cuál es la cota inferior y superior.
2. Demostrar que la sucesión es monótona creciente o monótona decreciente.
3. En caso de que la sucesión sea convergente, proporcionar su límite. En caso contrario, demostrar que es divergente.

Ejercicio 7

Determinar razonadamente si las siguientes series son convergentes o divergentes. En el caso que proceda, indicar si son absoluta o condicionalmente convergentes.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)+2}{n\sqrt{n}}, \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Ejercicio 8

Determina razonadamente si las siguientes series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son convergentes o divergentes, utilizando para ello alguno de los métodos o criterios vistos en clase:

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{\cos^2(n)}{2^n}, \qquad \text{b)} \quad a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3+4n+3}}.$$

Ejercicio 9

Determina razonadamente si las siguientes sucesiones $\{a_n\}$ son convergentes o divergentes. En el caso de que sean convergentes, indica el valor al que convergen:

1. $a_n = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)}$.
2. $a_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n n}{\operatorname{sen}(n) - n^2}$.