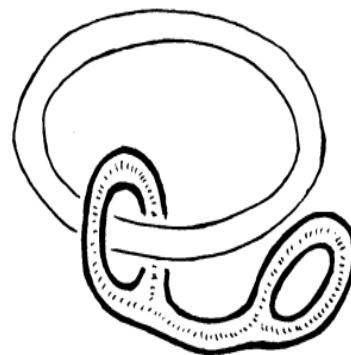
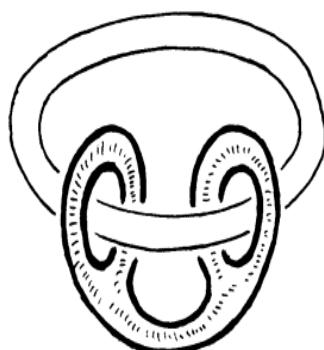


Topología

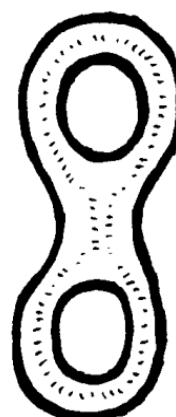
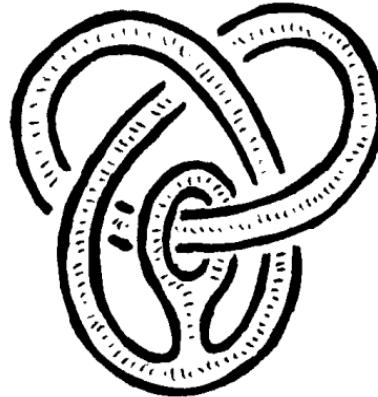
Georgy Nuzhdin Gelfand

Introducción

1. ¿Puedes convertir la figura de la izquierda en la derecha?



2. ¿Puedes convertir la figura de la izquierda en la derecha?



3. Coge una cuerda por sus extremos y no los sueltes. ¿Cómo puedes formar un nudo en ella?

Tema 1. Distancias

1. ¿Son distancias en \mathbb{R} ?

- a. $d(x, y) = |x - y|?$
- b. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
- c. $d(x, y) = |x - 2y|$
- d. $d(x, y) = (x - y)^2$
- e. $d(x, y) = \sin^2(x - y)$
- f. $d(x, y) = \arctan|x - y|$

2. ¿Es o no es distancia entre dos conjuntos A y B ?

$$d(A, B) = |A \cup B| - |A \cap B|$$

3. ¿Son distancias en \mathbb{R}^2 ?

- a. $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}?$
- b. $d(A, B) = |x_2 - x_1| \times |y_2 - y_1|$
- c. $d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
- d. $d(A, B) = \min(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)?$
- e. $d(A, B) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)?$

4. ¿Es distancia $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ en $[0; 1]$?

5. Demuestra que en un conjunto finito sólo hay una distancia posible que tenga valores 0 o 1.

6. Demuestra que la distancia Taxicab/Manhattan en \mathbb{R}^2 es equivalente a la euclíadiana

7. Dados tres puntos $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ ¿en qué casos existe el punto O equidistante de los tres? Considera

- a. Taxicab continua
- b. Taxicab discreta (calles trazadas en \mathbb{Z}^2)

8. Calcula el número π en la Taxicab

9. Calcula la distancia entre $f(x) = \sin 2x, g(x) = \cos x$ en $[0; \pi]$

- a. En la métrica integral
- b. En la métrica del supremo

Tema 2. Continuidad

1. Busca funciones con estas características:
 - a. Es continua sólo en un punto
 - b. Tiene valores finitos pero no está acotada en ningún intervalo
2. Inventa un conjunto en \mathbb{R} tal que una bola de radio 4 esté estrictamente contenida dentro de otra bola de radio 3
3. ¿Cuántos elementos tiene una bola de radio 1 en torno a la palabra “mola”
 - a. con la métrica de Hamming (comparación carácter por carácter)?
 - b. con la métrica de Levenshtein?
4. Inventa una función continua y no constante $S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con la métrica de las geodésicas
5. Demuestra que una función continua en un segmento cerrado $[a; b]$ (con la topología canónica) es acotada.
6. ¿Existe una función discontinua en \mathbb{Q} y continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
7. ¿Existe una función continua en \mathbb{Q} y discontinua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
8. Busca una función continua que no sea ni abierta ni cerrada
9. Busca una función abierta y cerrada que no sea continua
10. ¿Existe una función continua $S^1 \rightarrow S^1$ que tenga
 - a. Un punto fijo
 - b. Dos puntos fijos
11. ¿Existe una función continua $S^1 \rightarrow S^1$ que tenga
 - a. Tres puntos fijos?
 - b. Cuatro puntos fijos?
12. Inventa una función contractiva $S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e indica su punto fijo

Tema 3. Topologías

1. ¿Son una topología?

- a. $X = \{a, b, c\}$. $T_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$.
- b. $X = \mathbb{R}$, $T_a = \{(a; +\infty), \text{ donde } a \in \mathbb{R}\}$
- c. $X = \mathbb{R}$, $T_a = \{[a; b), \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$

2. ¿Son una topología?

- a. $X = \{a, b, c\}$. $T_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$.
- b. $X = \mathbb{R}$, $T_a = \{U \subset \mathbb{R}: |\mathbb{R} \setminus U| < \infty\}$

3. Halla un ejemplo de topología heredada de un espacio que no coincide con la topología interior

4. Busca interior, frontera y clausura

- a. $(0, 2)$ en \mathbb{R}
- b. $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$ en \mathbb{R}
- c. $(0, 2)$ en $(0; 4)$

5. Busca interior, frontera y clausura

- a. $\left\{-3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup (1; 2) \cup \{4 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ en Sorgenfrey
- b. $[1; 2] \cup \{3\}$ en \mathbb{R}

6. Busca interior, frontera y clausura

- a. \mathbb{Q} en \mathbb{R}
- b. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ en \mathbb{R}^2

7. ¿Es verdad que

- c. $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$
- d. $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int(B)$?
- e. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$?
- f. $Int(Fr(A)) = \emptyset$?