Examen Final de Álgebra

Segundo Parcial

Doble Grado Ingeniería del Software y Matemática Computacional		29 mayo 2025		
CURSO	1º	HORA 11.00	Mod	
GRUPO	MAIS 1A	DURACIÓN TOTAL 3 horas		
ALUMNO				

Problemas

Problema 1 (3 ptos)

Consideramos el endomorfismo f: $P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ definido sobre el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales que verifica:

Ker f=$\{a + bx + cx^2 \in P_2(x) \ / \ a = b = c\}$

los vectores que tienen término independiente nulo se transforman en sí mismos

a) Determinar $la\ matriz\ M_{B_C}(f)\ del\ endomorfismo\ en\ la\ base\ canónica$
b) Obtener la expresión implícita del subespacio Imf y razonar de dos formas distintas cuál es su dimensión
c) Si S=$\{(\lambda - 2\mu + \delta, \lambda - 2\mu - \delta, \lambda - 2\mu)/\lambda, \mu, \delta \in R\}$, $determinar\ en\ forma\ implícita\ f(S)$ y razonar si tiene sentido la dimensión obtenida.
d) Dada la base de $P_2(x)$: B*={$1 + x + x^2, 1 + x, 1$), obtener por coordenadas y matricialmente la matriz $M_{B*}(f)$

Problema 2 (3 puntos)

Dado un endomorfismo f: $R^3 \rightarrow R^3$ cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Analizar de forma razonada si el endomorfismo f es diagonalizable
b) Calcular una matriz P regular y una matriz D diagonal tal que $P^{-1}AP = D$
c) Interpretar en este caso en qué consiste el proceso de diagonalización.

Cuestiones teórico-prácticas

Cuestión 1 (1 punto)

Calcular la dimensión y una base del subespacio

$$U=\{X\in M_{2x2}(R) / \ Traza\ (MX)=0\} \text{ con } M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestión 2 (1 punto)

Dadas las aplicaciones lineales

f:$R^2 \to R^3$ tal que f(1,0)=(2,1,2) y f(0,1)=(3,2,1) y

g: $R^3 \to R^2$tal que g(1,0,0)=(3,-1) g(0,1,0)=(1,0) y g(0,0,1)=(1,-2)

Si definimos h=g∘f, calcular h(4,-2) matricialmente y por coordenadas.

Cuestión 3 (1 punto)

Dados los subespacios de R^4:

U=L<(1,0,0,1), (1,1,1,1), (0,2,2,0)> y W= $\{(x,y,z,t) / \ 3x+y-z-3t=0; y-t=0\}$

Determinar razonadamente si U+W es una suma directa.

Cuestión 4 (1 punto)

Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1.- Una matriz A tiene autovalor 0 si y sólo si det(A)=0

2.- Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes