Hojas de Ejercicios de Topología

Tema 7. Espacios conexos

Ejercicio 1

Considera el conjunto

$$A = \left([0,1] \times \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) \cup \{0\} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Dibújalo.
2. Busca su clausura.
3. ¿Es conexo?
4. ¿Es conexo por caminos?

Ejercicio 2

Construye un espacio en el plano que sea conexo por caminos pero no conexo localmente.

Ejercicio 3

Sea

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 - \frac{1}{t},\ t \geq 1\right\} \cup \{(0, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos?

Ejercicio 4

¿Cómo son los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita?

1. Nombra 3 subconjuntos no conexos y 2 conexos.
2. Describe todos los subconjuntos conexos.

Ejercicio 5

Sea $N \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. Demuestra que $\mathbb{R}^2 \setminus N$ es conexo por caminos.

Ejercicio 6

Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ que tiene más de un punto es no numerable.

Ejercicio 7

Demuestra que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo.

Tema 8. Espacios compactos

Ejercicio 1

Indica si es compacto

$$E = \{\, (-1)^n + \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \,\} \subset \mathbb{R}$$

con la topología canónica.

Ejercicio 2

Indica si es compacto

$$A = [0, 1] \times \{0.5\}$$

con la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3

Sea X un conjunto con la topología discreta. ¿Cuándo es compacto?

Ejercicio 4

Inventa un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ que tenga un subconjunto compacto no cerrado.

Ejercicio 5

¿Es cierto que la unión de una familia de compactos siempre es compacta?

Ejercicio 6

Considera la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \{0, n\} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

que genera una topología en $\mathbb{Z}$.

1. ¿Es compacto $A = \{0\}$?
2. ¿Cuál es $\overline{A}$?
3. ¿Es compacto $\overline{A}$?

Ejercicio 7

Demuestra que una biyección $X \to Y$ tal que X es compacto e Y es Hausdorff es un homeomorfismo.

Pista: demuestra que pasa cerrados a cerrados.

Ejercicio 8

¿Son compactos con la topología del orden:

1. $[0,1] \times [0,1]$?
2. $[0,1] \times (0,1]$?