

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## Tema 1

### Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Autor: Víctor Gayoso Martínez

Curso: 2025-2026

Versión: 1.0

Centro Universitario U-tad

Doble Grado en Matemática Computacional e Ingeniería del Software

# Índice

<b>1</b>	<b>Conceptos básicos . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problemas de valor inicial y problemas de contorno . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Curva integral . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Ecuación diferencial de una familia de curvas . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Problemas . . . . .</b>	<b>4</b>

# 1 Conceptos básicos

Se denomina **ecuación diferencial ordinaria** o EDO a toda ecuación en la que aparece una variable independiente, una variable dependiente y las derivadas de esta última. Como variable independiente se suele utilizar  $x$  o  $t$ . Como variable dependiente,  $y = y(x)$  o  $x = x(t)$ . Finalmente, las derivadas se suelen representar  $y', y'', y''', \dots$  o bien  $\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden presentarse en dos formatos: como ecuación en forma implícita o en forma normal.

- Forma implícita:  $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$
- Forma normal o canónica:  $y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1})$

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Por su parte, se denomina **grado** de una ecuación diferencial al exponente natural al que está elevada la derivada de mayor orden, en caso de tenerlo.

## Ejemplo 1

La ecuación  $(y'')^3 + 2xy - 5y^4 = \sin(x)$  es de segundo orden y tercer grado.

Una ecuación diferencial ordinaria **lineal** de orden  $n$  es una ecuación de la siguiente forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

En una ecuación lineal de orden  $n$  solo pueden aparecer las primeras potencias de la variable  $y$  y de sus derivadas. No pueden aparecer productos de esa variable con sus derivadas o de sus derivadas entre sí, ni funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas) de la variable  $y$ , ni de sus derivadas.

Si  $b(x) = 0$ , la ecuación lineal es **homogénea**, mientras que si  $b(x) \neq 0$  se dice que la ecuación lineal es **completa o no homogénea**.

Si todos los coeficientes  $a_i(x)$  son constantes, se dice que la ecuación lineal es de **coeficientes constantes**. En caso contrario, se afirma que la ecuación es de **coeficientes variables**.

## Ejemplo 2

La ecuación  $y'' + 5y' + 6y = 0$  es lineal, homogénea, de segundo orden y de coeficientes constantes.

## Ejemplo 3

La ecuación  $(y'')^2 + 5y' + 6y = 0$  no es lineal ya que una de las derivadas está elevada al cuadrado.

## Ejemplo 4

La ecuación  $x \tan(y) + y' - x = 0$  no es lineal ya que la variable  $y$  aparece como el argumento de una función trascendente.

Llamaremos **solución** de una ecuación diferencial ordinaria a toda función que satisfaga dicha ecuación diferencial. Una solución puede tener las siguientes formas:

- Forma explícita:  $y = f(x)$
- Forma implícita:  $F(x, y) = 0$
- Forma paramétrica:  $x = x(t), y = y(t)$ , con  $t \in I \subset \mathbb{R}$

El proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial se denomina **integrar** la ecuación. Se denomina **solución general** de una ecuación diferencial a una familia de  $n$  parámetros (cuyo número coincide con el orden de la ecuación) cuyos miembros verifican la ecuación, y que representan en muchos casos todas o casi todas las soluciones de la ecuación.

### Ejemplo 5

La ecuación  $y' - y = 0$  tiene como solución general  $y = Ce^x$ , mientras que la solución general de la ecuación  $y'' + y = 1$  es  $y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + 1$ .

Una **solución particular** es cualquier función que forme parte de la solución general, y que se obtiene dando valores concretos a los parámetros. Por otra parte, cuando existe alguna solución de la ecuación que no pertenece a la familia de funciones representada por la solución general, esa función recibe el nombre de **solución singular**. Es importante aclarar que no siempre existen soluciones singulares.

### Ejemplo 6

La ecuación  $yy' - xy' - xy + x^2 = 0$  tiene como solución general a la familia  $y = \frac{x^2}{2} + C$ . Una solución particular es  $y = \frac{x^2}{2} + 1$ , mientras que  $y = x$  es una solución singular.

## 2 Problemas de valor inicial y problemas de contorno

Una de las aplicaciones prácticas más importantes de las ecuaciones diferenciales es la resolución de problemas en las que aparece una ecuación y una o más condiciones (en función del orden de la ecuación), y que deben ser satisfechas por la solución de la ecuación.

Si todas las condiciones del problema se refieren a un mismo valor  $x_0$ , al problema se le llama **problema de valor inicial** (PVI) o **problema de Cauchy**. En el caso de las ecuaciones diferenciales de orden  $n$ , se necesitan  $n$  condiciones iniciales  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ .

### Ejemplo 7

Resolver la ecuación  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$  con condiciones  $y(1) = 3$  e  $y'(1) = -4$  es un problema de valor inicial.

Por el contrario, si las condiciones se refieren a valores diferentes de la variable  $x$ , al problema se le denomina **problema con condiciones de contorno**.

**Ejemplo 8**

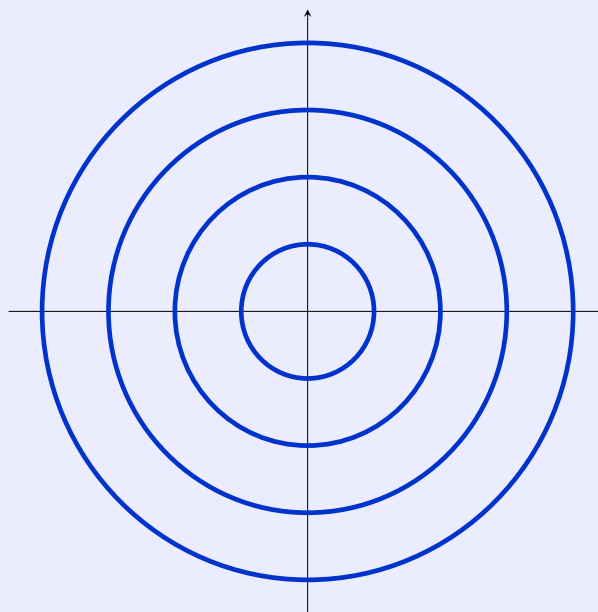
Resolver la ecuación  $y'' + y = 0$  con condiciones  $y(0) = 1$  e  $y(1) = 3$  es un problema con condiciones de contorno.

### 3 Curva integral

Se llama curva integral de la ecuación a la gráfica asociada a la función  $y = f(x)$  que es solución de dicha ecuación.

**Ejemplo 9**

Las curvas integrales de la ecuación  $y y' + x = 0$  son las circunferencias dadas por la expresión  $x^2 + y^2 = K$ , donde  $K > 0$ .



### 4 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden

Dada la ecuación  $y' = f(x, y)$ , si tanto  $f(x, y)$  como  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  son continuas en un rectángulo  $D$  del plano, por cada punto  $(x_0, y_0)$  de dicho rectángulo pasará una única curva integral de la ecuación. En caso de no cumplirse las condiciones del teorema, no se puede asegurar nada para un punto  $(x_0, y_0)$  dado.

**Ejemplo 10**

Dada la ecuación  $y' - xy + e^{-y} = 0$ , como tanto  $f(x, y) = xy - e^{-y}$  como su derivada respecto de  $y$  son continuas para toda pareja  $(x, y)$ , se puede asegurar que por cada punto  $(x, y)$  del plano pasa una única curva que sea solución de la ecuación diferencial.

## 5 Ecuación diferencial de una familia de curvas

Hasta ahora hemos hablado de buscar la solución (general, particular o singular) a una ecuación dada. El problema contrario consiste en determinar la ecuación diferencial cuya solución general viene dada por una familia de curvas representada por la ecuación  $F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ .

Para ello, es necesario derivar la expresión  $F(x, y, C_1, \dots, C_n)$  tantas veces como parámetros  $C_i$  estén presentes en la solución general, despejando esos parámetros de las  $n$  ecuaciones obtenidas hasta poder ofrecer una expresión en la que no aparezca ningún parámetro.

### Ejemplo 11

La ecuación cuya solución general es la familia  $y = C_1 x^2 + C_2 x + 4$  es  $x^2 y'' - 2x y' + 2y = 8$ , dado que al derivar la primera vez la familia de curvas obtenemos  $y' = 2C_1 x + C_2$  y al derivar por segunda vez se obtiene  $y'' = 2C_1$ .

## 6 Problemas

- 1) Indica el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:
  - a)  $(y'')^2 \sin(x) + 3x y y' + y^2 e^x = 0$
  - b)  $y'' + 5x^2 (y')^3 + 6y = 0$
  - c)  $x^2 \sqrt{y'' + 3x} - 2y^2 = 3 \sin(x)$
- 2) Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:
  - a)  $y' + x^2 - 1 = y$
  - b)  $3x y'' - 4y y' + y \sin(x) = 4x$
  - c)  $y dx + (x y + x - 3y) dy = 0$
  - d)  $y'' - 2y + 3 = e^x$
  - e)  $4x y + \cos(y) = 5x$
- 3) Comprueba que las funciones dadas son solución de sus correspondientes ecuaciones diferenciales:
  - a)  $y = x + e^{-x}$  para la ecuación  $y' + y = x + 1$
  - b)  $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$  para la ecuación  $y'' - 7y' + 12y = 0$
  - c)  $y = e^x(2x + 1)$  para la ecuación  $y'' = 2y' - y$
  - d)  $x(t) = \sin(t) + \cos(t)$  para la ecuación  $\dot{x} \cos(t) + x \sin(t) = 1$
- 4) Determina los valores de  $m$  para los que la función  $f(x) = e^{mx}$  es solución de la ecuación  $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$ .
- 5) Verifica que la expresión paramétrica  $x(t) = \cos(t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$  es solución de la ecuación  $x + y y' = 0$ .

- 6) Verifica que las siguientes expresiones implícitas son soluciones de las ecuaciones diferenciales asociadas:
- a)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  para la ecuación  $y' = -\frac{x}{y}$
- b)  $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$  para la ecuación  $(1 + e^x)y y' = e^x$
- 7) Verifica que la función definida a trozos  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$  es una solución de la ecuación  $xy' - 2y = 0$ .
- 8) Dada la ecuación  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ , completa estos apartados:
- a) Demuestra que tanto  $y_1(x) = x^2$  como  $y_2(x) = x^3$  son soluciones de la ecuación.
- b) ¿Es  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  también solución de la ecuación?
- 9) Comprueba que la familia de funciones  $y = Cx + C^2$  es la solución general de la ecuación  $y = xy' + (y')^2$ . A continuación, determina el valor de  $K$  para que la función  $y = Kx^2$  sea una solución singular de la misma ecuación.
- 10) Sabiendo que la solución general de la ecuación  $x^2 y' \sin(y) = 1$  está dada por la relación  $\cos(y) = \frac{1}{x} + C$ , calcula la solución particular que tiende al valor  $\frac{\pi}{2}$  cuando  $x$  tiende a infinito.
- 11) Aplica el teorema de existencia y unicidad a la ecuación  $y' = y^{1/3}$ , determinando los recintos del plano donde se puede asegurar que en cada punto pase una única solución.
- 12) Dado el problema de valor inicial  $\begin{cases} y' - xy^{1/2} = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ , comprueba que tanto  $y = 0$  como  $y = \frac{x^4}{16}$  son soluciones. ¿Contradice ese resultado el teorema de existencia y unicidad de soluciones en el origen de coordenadas?
- 13) Determina la ecuación diferencial asociada a las siguientes soluciones generales:
- a)  $y - 4x - C = 0$ .
- b)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
- c)  $x^2 + C_1 y^2 = C_2$  (donde  $C_1, C_2 > 0$ )
- 14) Escribe la ecuación diferencial asociada a una solución general representada por una familia de curvas para la que se verifica que, en todo punto, la pendiente de la recta tangente a cada curva es igual a la distancia de dicho punto al origen de coordenadas.

## Bibliografía

En la elaboración de estos apuntes se ha utilizado el siguiente material:

- Ignacio Acero y Mariló López. *Ecuaciones diferenciales. Teoría y problemas*. Ed. Tébar Flores. ISBN 978-84-7360-609-7.
- Alfonsa García, Francisco García, Antonio López, Gerardo Rodríguez y Agustín de la Villa. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría y problemas*. Ed. CLAGSA. ISBN 84-921847-7-9.
- José Manuel Casteleiro Villalba y Antonio Ros Felip. *Problemas resueltos de ecuaciones diferenciales*. Ed. Garceta. ISBN 978-84-1622-886-7.
- Richard Bronson y Gabriel B. Costa. *Differential equations*. Ed. McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-182485-9.
- Jeffrey R. Chasnov. *Differential Equations for Engineers*. Disponible en <https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/differential-equations-for-engineers.pdf>.