Topología

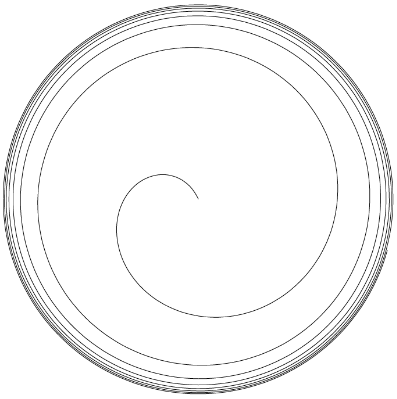
Georgy Nuzhdin Gelfand

# Tema 7. Espacios conexos

1. Considera el conjunto $A = \left\{[0;1] \times \left\{\frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \times (0;1)$ en $\mathbb{R}^2$
   a. Dibújalo
   b. Busca su clausura
   c. ¿Es conexo?
   d. ¿Es conexo por caminos?

2. Construye un espacio en el plano que sea conexo por caminos pero no conexo localmente.

3. Sea $E = \left\{(rcost, rsint) \in \mathbb{R}^2 : r = 1 - \frac{1}{t}, t \geq 1\right\} \cup \{(cost, \sin t), t \in \mathbb{R}\}$ . ¿Es conexo? ¿Es conexo por caminos?



4. ¿Cómo son los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología cofinita?
   a. Nombra 3 subconjuntos no conexos y 2 conexos
   b. Describe todos los subconjuntos conexos

5. Sea $N \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. Demuestra que $\mathbb{R}^2 \backslash N$ es conexo por caminos.

6. Demuestra que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ que tiene más de un punto es no numerable.

7. Demuestra que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo.

Topología

Georgy Nuzhdin Gelfand

# Tema 8. Espacios compactos

1. Indica si es compacto $E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ con la topología canónica.

2. Indica si es compacto $A = [0; 1] \times \{0{,}5\}$ con la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $X$ un conjunto con la topología discreta. ¿Cuándo es compacto?

4. Inventa un espacio topológico $(X, \mathrm{T})$ que tenga un subconjunto compacto no cerrado.

5. ¿Es cierto que la unión de una familia de compactos siempre es compacta?

6. Considera la base $B = \{\{0; n\}, n \in \mathbb{Z}\}$ que genera una topología en $\mathbb{Z}$.
   a. ¿Es compacto $A = \{0\}$?
   b. ¿Cuál es $\bar{A}$?
   c. ¿Es compacto $\bar{A}$?

7. Demuestra que la biyección $X \to Y$ tal que $X$ es compacto e $Y$ es Hausdorff es un homeomorfismo.
   PISTA: demuestra que pasa cerrados a cerrados.

8. ¿Son compactos con la topología del orden
   a. $[0; 1] \times [0; 1]$
   b. $[0; 1] \times (0; 1]$ ?