

## 4. Conexión y Compacidad

### ¿Qué es un conexo?

A no ser que usemos la ortografía del noroeste, la notación debiera ser autoexplicativa: conexo significa de una pieza, conectado, no separado. Ha habido varias definiciones matemáticas de este concepto (G. Cantor 1883, C. Jordan 1893, A. Schoenfliesz 1904) pero el lenguaje introducido hasta ahora nos lleva indefectiblemente a la universalmente aceptada en la actualidad (S. Mazurkiewicz 1920).

**DEFINICIÓN:** Se dice que un espacio topológico es conexo si no existen dos abiertos,  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ , disjuntos y no vacíos tales que  $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ .

**Notación:** Cuando un espacio no es conexo, se suele decir que los dos abiertos  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  con las propiedades anteriores, forman una separación.

**DEFINICIÓN:** Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es conexo, si lo es con la topología relativa.

Con estas definiciones se sigue que el vacío siempre es conexo, pero es un caso tan especial que a veces se le excluye, aunque nosotros no lo haremos. Y es que el miedo a la nada y al vacío, tan arraigado en el pensamiento anterior (un importantísimo filósofo y matemático del siglo XVII dijo: “No se sabría suponer el vacío sin error”), se ha perdido hasta tal punto que estos conceptos son habituales en la Filosofía y Matemáticas contemporáneas.

*Era impensable: para imaginar la nada, era menester encontrarse allí, en pleno mundo, con los ojos bien abiertos, y vivo; la nada sólo era una idea en mi cabeza, una idea existente que flotaba en esa inmensidad; esa nada no había venido ‘antes’ de la existencia, era una existencia como cualquier otra, y aparecida después de muchas otras.*

Ejemplo 1:  $\mathbb{R}$  con la topología de Sorgenfrey no es conexo. Basta escribir la separación

$$\mathbb{R} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \quad \text{con } \mathcal{U} = (-\infty, 0), \quad \mathcal{V} = [0, +\infty).$$

Ejemplo 2:  $A = (2, 3] \cup [4, 5)$  no es conexo en  $\mathbb{R}$  con la topología usual porque se tiene la separación

$$A = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \quad \text{con } \mathcal{U} = (2, 3], \quad \mathcal{V} = [4, 5).$$

Ejemplo 3: En  $\mathbb{R}$  con la topología usual,  $\mathbb{Q}$  no es conexo.

$$\mathbb{Q} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \quad \text{con } \mathcal{U} = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}, \quad \mathcal{V} = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Ejemplo 4: En cualquier espacio topológico los puntos son conexos.

Ejemplo 5:  $\mathbb{R}$  con la topología cofinita es conexo. Esto es una sencilla consecuencia de que en esta topología no hay abiertos disjuntos no vacíos.

Por la propia forma de la definición es más fácil construir ejemplos de no conexos que de conexos (es más fácil romper una cosa que comprobar que no está rota). Por ello, los dos últimos ejemplos son un poco triviales. Nótese que aunque es intuitivamente

evidente que  $[0, 1]$ ,  $(0, 1)$  o  $\mathbb{R}$  son conexos con la topología usual, no está claro cuál es la demostración. En seguida la veremos pero, para fastidiar y practicar, veamos antes un par de caracterizaciones teóricas de la conexión.

**Proposición 4.1:** *Sea  $X$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1)  $X$  es conexo.
- 2) Los únicos subconjuntos de  $X$  simultáneamente abiertos y cerrados son  $\emptyset$  y  $X$ .
- 3) No existe ninguna función  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  continua y sobreyectiva.

Observación: En 3) se da por supuesto que la topología en  $\{0, 1\}$  es la inducida por la usual, que coincide con la discreta.

Dem.: Como ya hemos comentado, es más sencillo hablar teóricamente de la no conexión que de la conexión, por ello probaremos todas las implicaciones utilizando la tautología  $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$ .

1)  $\Rightarrow$  2) Si hubiera un subconjunto  $\mathcal{U} \subset X$  abierto y cerrado distinto del vacío y del total, entonces  $\mathcal{V} = X - \mathcal{U}$  también lo sería y se tendría que  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$  es una separación de  $X$ .

2)  $\Rightarrow$  3) Si existiera la función indicada, se tendría  $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset, X$  (por ser sobreyectiva) y como  $\{0\}$  es abierto y cerrado en  $\{0, 1\}$  (la topología es la discreta) y  $f$  es continua, se sigue que  $f^{-1}(\{0\})$  es abierto y cerrado.

3)  $\Rightarrow$  1) Si existiera una separación,  $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ , entonces la función sobreyectiva  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  definida como

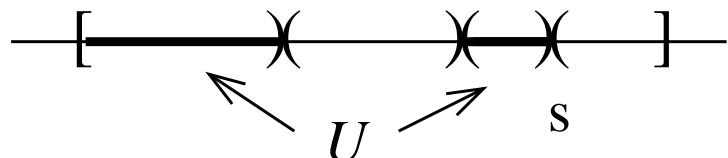
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{V} \end{cases}$$

sería continua por el *Pasting Lemma* (Teorema 3.7.4) tomando  $A = X - \mathcal{V} = \mathcal{U}$ ,  $B = X - \mathcal{U} = \mathcal{V}$ . ■

La demostración de que  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  es conexo es la base para el estudio de la conexión en  $\mathbb{R}$  con la usual.

**Lema 4.2:** *El intervalo  $[0, 1]$  es conexo con la topología usual.*

Dem.: Sea  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = [0, 1]$  una separación, donde  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son abiertos en la topología relativa. Podemos suponer  $1 \in \mathcal{V}$  ya que en otro caso bastaría intercambiar los nombres de  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ . Sea  $s = \sup\{x \in \mathcal{U}\}$ . Obviamente  $s \in [0, 1]$ . Podemos suponer también  $s \neq 0, 1$  ya que estos casos llevan fácilmente a contradicción ( $s = 0$  implicaría  $\mathcal{V} = [0, 1]$  y  $s = 1$  implicaría que  $\mathcal{V}$  no es abierto porque no existiría ningún entorno de 1 contenido en  $\mathcal{V}$ ).



Si  $s \in \mathcal{U}$ , como  $\mathcal{U}$  es abierto, existe un  $\epsilon$  tal que  $s \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset \mathcal{U}$  y se tendría una contradicción porque  $s < s + \epsilon/2 \in \mathcal{U}$  y  $s$  no sería cota superior de  $\mathcal{U}$ . De la misma forma, si  $s \in \mathcal{V}$  entonces  $s \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subset \mathcal{V}$  y  $s - \epsilon/2$  sería también cota superior para  $\mathcal{U}$  y por tanto  $s$  no sería mínima. En definitiva,  $s \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  lo que contradice que sea una separación. ■

En realidad la misma demostración sirve para extender el resultado.

**Proposición 4.3:** *Cualquier intervalo (abierto, cerrado, semiabierto, finito o infinito) es conexo en  $\mathbb{R}$  con la topología usual.*

Observación: Se considera que  $\mathbb{R}$  es un tipo de intervalo infinito,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ . La manera de tratar con intervalos infinitos es considerar dos puntos que pertenezcan a cada uno de los abiertos de la separación y que desempeñen el papel de 0 y 1 en la demostración anterior.

Si  $A \subset \mathbb{R}$  no es un intervalo y tiene más de un punto, existen  $a < b < c$  con  $a, c \in A$ ,  $b \notin A$ . Con lo cual,  $A = ((-\infty, b) \cap A) \cup ((b, +\infty) \cap A)$  es una separación. Por tanto todavía podemos redondear más los resultados anteriores.

**Teorema 4.4:** *Con la topología usual  $A \subset \mathbb{R}$  es conexo si y sólo si  $A = \emptyset$ ,  $A = \{x\}$  o  $A$  es un intervalo.*

Una vez que una misma demostración más o menos sencilla ha servido para demostrar varias cosas, se utiliza el viejo truco en Matemáticas, que se podría llamar “tener oficio” o “experiencia”, consistente en inventarse construcciones abstractas (a veces muy abstractas) donde se pueda aplicar la misma demostración conocida que a uno no se le habría ocurrido. Esto sirve, al menos, para que las hemerotecas de las facultades estén llenas de artículos de investigación independientemente de los progresos que se hagan.

*¿Profesionales de la experiencia? [...] Todo lo que pasaba a su alrededor empezó y concluyó fuera de su vista; largas formas oscuras, acontecimientos que venían de lejos los rozaban rápidamente, y cuando quisieron mirar, todo había terminado ya. Y a los cuarenta años bautizan sus pequeñas obstinaciones y algunos proverbios con el nombre de experiencia; comienzan a actuar como distribuidores automáticos: dos céntimos en la ranura de la derecha y se obtienen preciosos consejos que se pegan a los dientes como caramelos blandos.*

Lo dicho. Nos inventamos un sitio donde repetir la demostración del lema. Primero necesitamos que exista un orden en el que se pueda hallar el supremo y después que se pueda *meter* un elemento entre otros dos ( $s - \epsilon/2$  entre  $s - \epsilon$  y  $s$  ó  $s + \epsilon/2$  entre  $s$  y  $s + \epsilon$ ).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico  $X$  con la topología del orden es un continuo lineal si se cumple:

- 1)  $X$  tiene la propiedad del supremo.
- 2) Si  $x, y \in X$  con  $x < y$ , entonces existe  $z \in X$  tal que  $x < z < y$ .

Observación: Recordamos que la propiedad del supremo afirma que todo subconjunto de  $X$  acotado superiormente (por un elemento de  $X$ ) admite una cota superior mínima (supremo) en  $X$ .

La copia de la proposición anterior es:

**Proposición 4.5:** En un continuo lineal cualquier intervalo es conexo.

Observación: De nuevo se admiten los conjuntos  $\{x \in X : x > a\}$ ,  $\{x \in X : x < a\}$ ,  $\{x \in X : x \geq a\}$ ,  $\{x \in X : x \leq a\}$ ,  $X$ , los cuales se consideran intervalos “infinitos”.

Ejemplo:  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la topología del orden lexicográfico es conexo. La segunda propiedad de continuo lineal es obvia. La primera requiere pensarla un poco más. Si  $A \subset X$  y  $s_x$  es el supremo de las  $x$  en  $A$ , esto es,  $s_x = \sup\{x : (x, y) \in A\}$ , y la vertical  $x = s_x$  tiene intersección no vacía con  $A$ , entonces

$$\text{supremo de } A = (s_x, \sup\{y : (s_x, y) \in A\}).$$

Si la intersección es vacía el supremo es

$$\text{supremo de } A = (s_x, 0).$$

En cualquier caso siempre existe.



Ejemplo:  $X = (-1, 0] \cup [1, 2)$  no es un continuo lineal (con el orden usual) porque  $0, 1 \in X$  pero no existe  $z \in X$  tal que  $0 < z < 1$ . De hecho,  $X$  no es conexo porque  $(-1, 0]$  y  $[1, 2)$  forman una separación. Nótese que ambos son abiertos en la topología del orden:  $(-1, 0] = \{x \in X : x < 1\}$  y  $[1, 2) = \{x \in X : x > 0\}$ .

Ejemplo:  $X = (-1, 0] \cup (1, 2)$  es un continuo lineal y por tanto conexo con la topología del orden. La segunda propiedad es obvia. La propiedad del supremo esencialmente se sigue de la de  $\mathbb{R}$  siempre que el subconjunto considerado,  $A$ , esté “separado” del extremo derecho  $x = 2$ . Pero, ¿por qué podemos suponerlo así? ¿por qué  $A = (1, 2) \subset X$  no contradice la propiedad del supremo? Evidentemente  $A = (1, 2)$  no tiene supremo, pero tampoco está acotado superiormente por ningún elemento de  $X$ , así que no invalida la propiedad del supremo.

Obviamente ninguno de los dos espacios anteriores es conexo con la usual.

Como debiera estar claro a estas alturas, un espacio es conexo si no está roto en trozos. Para caracterizar matemáticamente dichos trozos, podemos decir que dos puntos pertenecen al mismo trozo (están relacionados) si existe un conexo en el que están contenidos. La definición rigurosa da un poco de miedo pero no mucho.

**DEFINICIÓN:** Sea  $\sim$  la relación de equivalencia en un espacio topológico  $X$  dada por  $x \sim y \Leftrightarrow \exists A \subset X$  conexo con  $x, y \in A$ . Se llaman componentes conexas de  $X$  a cada una de las clases de equivalencia.

Observación: Se puede probar que la componente conexa de  $A$  a la que pertenece  $x \in A$  es el mayor (en el sentido de la inclusión) subconjunto conexo de  $A$  que contiene a  $x$  (ejercicio).

Ejemplo:  $X = (2, 3) \cup [5, 6)$  tiene dos componentes conexas (con la topología usual):  $C_1 = (2, 3)$  y  $C_2 = [5, 6)$  porque cada par de puntos  $x, y \in C_1$  o  $x, y \in C_2$  están dentro del conexo  $C_1$  o  $C_2$ , y si  $x \in C_1$ ,  $y \in C_2$  no existe  $A \subset X$  conteniendo a ambos (¿por qué? Demostrarlo rigurosamente).

Si uno se inventa muchos ejemplos, parece que las componentes conexas son siempre abiertas, pero no es cierto.

Ejemplo: En  $X = \mathbb{Q}$  (con la topología usual) las componentes conexas son los puntos. La razón es simplemente que los únicos subconjuntos conexos de  $\mathbb{Q}$  son los puntos (y el vacío) ya que si  $A \subset \mathbb{Q}$  tiene al menos dos puntos,  $x < y$ , tomando  $x < z < y$  con  $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ,  $((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, +\infty) \cap A)$  sería una separación.

## Un circo de conexos, aros en llamas y tartas

Ahora que tenemos el juguete nuevo de la definición de conexión, veremos en esta sección cómo funciona, cómo se articula ante las manipulaciones que conocemos. Además terminaremos obteniendo un resultado notable que puede aplicarse para justificar algunas afirmaciones no matemáticas. Aunque según dijo un filósofo ilustre e ilustrado: “Hay que confesar que los inventores de las artes mecánicas han sido más útiles a la humanidad que los inventores de silogismos”.

Romper no es una transformación continua, así que las funciones continuas deben respetar las cosas de una pieza.

**Proposición 4.6:** *Si  $X$  es conexo y  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $f(X) = \text{Im } f$  es conexo.*

Dem.: Si  $\text{Im } f = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  fuera una separación de  $\text{Im } f$ , entonces  $f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V})$  lo sería de  $X$ . ■

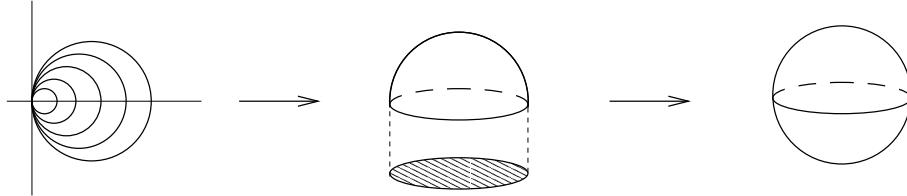
Ejemplo:  $S^1$  es conexo (con la topología usual) porque es la imagen de la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ .

Si pegamos entre sí cosas que son de una pieza, el resultado sigue siendo de una pieza.

**Proposición 4.7:** *Si  $A_\alpha \subset X$  son subconjuntos conexos y  $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$  entonces  $\bigcup A_\alpha$  es conexo.*

Dem.: Supongamos que  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = \bigcup A_\alpha$  fuera una separación y sea  $x \in \bigcap A_\alpha$ . Podemos suponer (quizá intercambiando los nombres)  $x \in \mathcal{U}$ . Debe cumplirse  $A_\alpha \subset \mathcal{U}$ , porque si no  $(A_\alpha \cap \mathcal{U}) \cup (A_\alpha \cap \mathcal{V})$  sería una separación de  $A_\alpha$ . Pero si cualquier  $A_\alpha$  está contenido en  $\mathcal{U}$ , lo mismo ocurre con  $\bigcup A_\alpha$  y por tanto  $\mathcal{V} = \emptyset$ . ■

Ejemplo: Como en el ejemplo anterior, cada circunferencia  $C_r = \{(x, y) : (x - r)^2 + y^2 = r^2\}$  con  $0 < r \leq 1$ , es conexa, por tanto el círculo  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$  (que es la unión de ellas) también lo es.

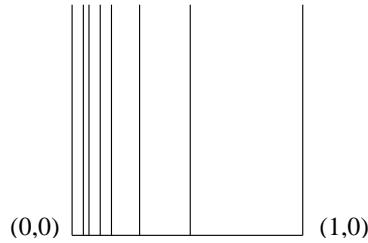


Una vez que sabemos que un círculo es conexo, mediante aplicaciones continuas, sabemos que todos lo son. De la conexión de  $\overline{B}((0, 1), 1)$  y las funciones  $f_+, f_- : \overline{B}((0, 1), 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $f_\pm = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , se sigue que la parte superior e inferior de una esfera son conexos y, por la proposición anterior, la superficie esférica también lo es. Más adelante veremos una demostración más directa.

Ejemplo: Se llama espacio peine al siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual:

$$P = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1]).$$

Para los que no estén acostumbrados a tantos productos cartesianos, no es más que un peine con mango entre  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  y púas de longitud uno sobre  $(0, 0)$  y cada punto de la forma  $(1/n, 0)$ .



Cualquier púa es conexa (es como  $[0, 1]$ ) y la unión de ella con el mango también lo es (por la proposición). Como  $P$  es la unión de todos estos peines *unipúa*, de nuevo por la proposición, es conexo.

**Proposición 4.8:** *Si  $A \subset X$  es un subconjunto conexo entonces cualquier subconjunto  $B \subset X$  con  $A \subset B \subset \bar{A}$ , es también conexo.*

Dem.: Si  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  fuera una separación de  $B$ , entonces  $A \subset \mathcal{U}$  ó  $A \subset \mathcal{V}$  (en otro caso  $(A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap \mathcal{V})$  sería una separación de  $A$ ). Digamos que  $A \subset \mathcal{U}$ , entonces  $\bar{A} \subset X - \mathcal{V}$  porque  $X - \mathcal{V}$  es cerrado y contiene a  $A$ . Pero esto implicaría  $B \subset X - \mathcal{V}$  y por tanto  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  no sería una separación. ■

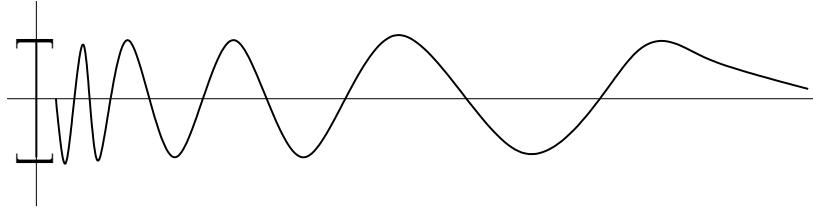
**Corolario 4.9:** *Si  $A$  es conexo,  $\bar{A}$  también lo es.*

**Corolario 4.10:** *Las componentes conexas de un espacio topológico son conjuntos cerrados.*

Dem.: Si  $C$  es una componente conexa, es conexa (¿por qué? No es totalmente obvio) y, por el corolario anterior,  $\bar{C}$  también es conexo. Pero esto implica que  $\bar{C} \subset C$  (ya que  $x \sim y$  para todo  $x, y \in \bar{C}$ ) y en consecuencia  $\bar{C} = C$ . ■

Ejemplo: El subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  (con la topología usual) definido como

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \operatorname{sen}(1/x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1]\}$$



es conexo, porque  $S = \bar{A}$  con  $A = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : x > 0\}$  y  $A$  es conexo porque es la imagen de la función continua  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $f(t) = (t, \operatorname{sen}(1/t))$ .

Notación: A veces se llama al conjunto  $S$  o a algunas pequeñas variaciones de él, curva seno del topólogo porque sirve para que los topólogos den algunos ejemplos y contraejemplos.

**Proposición 4.11:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  espacios topológicos (no vacíos). El espacio producto  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  es conexo si y sólo si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  lo son.

Observación: Este resultado también se extiende a productos cartesianos infinitos, pero como ni siquiera hemos definido la topología producto en el caso infinito, no entraremos en ello.

Dem.:  $\Rightarrow$ ) Es una consecuencia directa de que las proyecciones  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  son continuas (véase la demostración del Teorema 3.7).

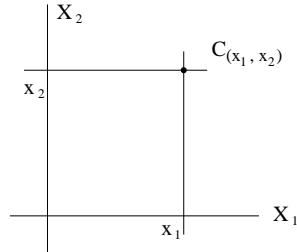
$\Leftarrow$ ) Basta probarlo para  $n = 2$  y aplicar inducción (repetir el razonamiento  $n - 1$  veces).

Sean  $x_1 \in X_1$  y  $x_2 \in X_2$ . Como  $X_1$  y  $X_2$  son conexos,  $X_1 \times \{x_2\}$  y  $\{x_1\} \times X_2$  también lo son, simplemente porque

$$\begin{aligned} X_1 &\longrightarrow X_1 \times \{x_2\} & X_2 &\longrightarrow \{x_1\} \times X_2 \\ x &\longmapsto (x, x_2) & x &\longmapsto (x_1, x) \end{aligned}$$

son continuas (de hecho homeomorfismos). Por tanto el subconjunto “cruz centrada en  $(x_1, x_2)$ ”

$$C_{(x_1, x_2)} = (X_1 \times \{x_2\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$$



es también conexo. Moviendo la parte “horizontal” y dejando la “vertical” fija, se obtiene todo el espacio producto:

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{x_2 \in X_2} C_{(x_1, x_2)}.$$

Como  $X_1 \times X_2$  es unión de conexos con puntos en común (los de  $\{x_1\} \times X_2$ ), también es conexo. ■

Ejemplo:  $\mathbb{R}^n$  es conexo con la usual ya que  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ .

Ejemplo: El subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(0, 1] \times (0, 1] \cup \{(0, 0)\}$  es conexo con la usual porque está entre  $(0, 1) \times (0, 1)$  y su cierre, y como cada intervalo es conexo su producto también.

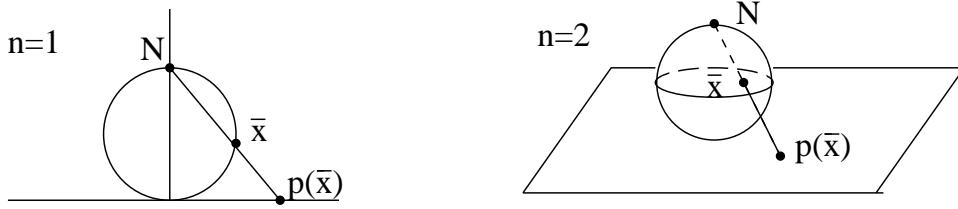
Ejemplo: La frontera de la bola unidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

con  $n \geq 1$  es conexa (con la topología usual).

Para comprobarlo tenemos que recordar (o aprender) que la *proyección estereográfica* es una función continua  $p : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  con  $N = (1, 0, \dots, 0)$ . La “receta” es que poniendo  $\mathbb{R}^n$  justo debajo de  $S^n$ ,  $p$  aplica cada punto de  $S^n - \{N\}$  en la intersección con  $\mathbb{R}^n$  de la recta que une dicho punto con el *polo norte*,  $N$  (a veces  $p$  se extiende a

$\tilde{p} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  donde  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  tiene una topología que se introducirá más adelante). De las sencillas fórmulas analíticas racionales para  $p$  y  $p^{-1}$  se deduce inmediatamente que  $p$  es un homeomorfismo.



$$p(x, y) = \frac{2x}{1-y}, \quad p(x, y, z) = \left( \frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z} \right),$$

$$p^{-1}(a) = \left( \frac{4a}{a^2+4}, \frac{a^2-4}{a^2+4} \right), \quad p^{-1}(a, b) = \left( \frac{4a}{a^2+b^2+4}, \frac{4b}{a^2+b^2+4}, \frac{a^2+b^2-4}{a^2+b^2+4} \right).$$

Como  $\mathbb{R}^n$  es conexo,  $\text{Im } p^{-1} = S^n - \{N\}$  es conexo y  $S^n = \overline{S^n - \{N\}}$  también lo es. En general,  $\mathbb{R}^n$  y  $S^n - \{N\}$  son indistinguibles topológicamente.

Observación: Aunque no tenga que ver con el curso, para amortizar el título de Doctor diremos que  $p^{-1}$  aplica vectores racionales en vectores racionales de norma uno. El caso  $n = 1$  es interesante para que los que dan clases particulares se inventen problemas de trigonometría en los que el coseno y el seno sean exactos (sin raíces). Basta tomar  $a \in \mathbb{Q}$

$$a = 1 \Rightarrow p^{-1}(1) = \left( \frac{4}{5}, \frac{-3}{5} \right) \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{-3}{5}$$

$$a = 3 \Rightarrow p^{-1}(3) = \left( \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right) \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$$

$$a = \frac{10}{3} \Rightarrow p^{-1}\left(\frac{10}{3}\right) = \left( \frac{15}{17}, \frac{8}{17} \right) \quad \cos \alpha = \frac{15}{17}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$$

Como aplicación, si uno quiere hallar las soluciones enteras (no nulas) de la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$  puede escribir

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow \left( \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \frac{y}{z} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha : \cos \alpha = \frac{x}{z}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{y}{z}.$$

Como sabemos hallar cosenos y senos exactos, sabemos hallar muchas soluciones enteras de  $x^2 + y^2 = z^2$  (de hecho todas, si utilizamos  $\tilde{p}$ ).

$$4^2 + (-3)^2 = 5^2, \quad 12^2 + 5^2 = 13^2, \quad 15^2 + 8^2 = 17^2, \dots$$

¿Podrían aplicarse ideas parecidas a  $x^n + y^n = z^n$  para demostrar de manera elemental el Último Teorema de Fermat?

-Bueno... me parece muy interesante.  
 -¿Lo ha leído ya en alguna parte?  
 -Por supuesto que no.  
 -¿De veras, nunca, en ninguna parte? Entonces, señor -dice, entrustecido-, es que no es verdad. Si fuera verdad alguien lo habría pensado ya.

Para terminar veamos una serie de *aplicaciones* de la conexión.

**Teorema 4.12:** (Teorema de los valores intermedios). Sea  $X$  un espacio topológico conexo e  $Y$  un espacio topológico con la topología del orden y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $x_1, x_2 \in X$  cumplen  $f(x_1) < f(x_2)$ , para cualquier  $y \in Y$  con  $f(x_1) < y < f(x_2)$  existe  $x_3 \in X$  tal que  $y = f(x_3)$ .

Dem.: Si no fuera así,  $y \notin \text{Im } f$  y por tanto

$$(\{z \in Y : z < y\} \cap \text{Im } f) \cup (\{z \in Y : z > y\} \cap \text{Im } f) = \text{Im } f$$

sería una separación de  $\text{Im } f$ , lo cual no es posible si  $X$  es conexo. ■

Observación: Tomando  $X = [a, b]$ ,  $Y = \mathbb{R}$  este es el Teorema de Bolzano que aparece en los libros de Cálculo de primero.

Una vez que hemos probado que cuando se sabe mucho se pueden demostrar rápidamente cosas fáciles diciendo unas pocas palabras difíciles, veamos algunas consecuencias. Es notable que de un resultado intuitivamente tan trivial (el teorema de Bolzano) deducimos directamente otras que no lo son. Como ya le explicó el mismo Pero Grullo a uno de nuestros poetas, sus verdades y profecías contienen gran parte de la sabiduría del siglo.

**Corolario 4.13:** (Borsuk-Ulam para  $n = 1$ ). Si  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, existen dos puntos antipodales (opuestos) de  $S^1$  que tienen la misma imagen.

Dem.: Nombremos cada punto de  $S^1$  por su ángulo en radianes,  $\theta$ , de modo que el antipodal corresponde a  $\theta + \pi$ . Consideremos la función  $F(\theta) = f(\theta) - f(\theta + \pi)$ . Como  $f(0) = f(2\pi)$ ,  $F(0) = -F(\pi)$  y por el teorema de los valores intermedios, si  $F(0)$  y  $F(\pi)$  tienen signos distintos existe  $\theta \in [0, \pi]$  con  $F(\theta) = 0$ . ■

Una manera más pintoresca de enunciar este resultado es:

*Si calentamos un aro circular siempre existen dos puntos opuestos con igual temperatura.*

El teorema se puede extender a dimensiones mayores (Teorema de Borsuk-Ulam) y concluir, por ejemplo, que en la superficie de la Tierra siempre existen dos puntos opuestos con iguales presiones e iguales temperaturas, pero esto es sorprendentemente difícil de probar (no es un ejercicio si uno no se llama Borsuk o Ulam, que lo demostraron en 1933). En el próximo capítulo daremos una prueba usando técnicas de Topología Algebraica (que para nosotros, débiles discípulos, son tan poderosas como la de Kaito).

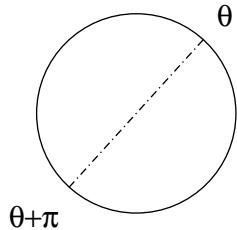
Otra consecuencia del teorema de los valores intermedios es:

*Es posible cortar por la mitad, con un solo corte de cuchillo, una tarta circular adornada con chocolate de manera que cada mitad tenga la misma cantidad de chocolate.*

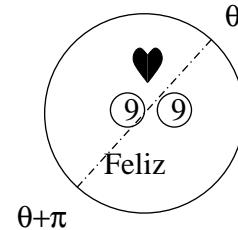
El resultado se extiende a tartas no circulares, en las que los cortes por la mitad no son diamatrales, pero la demostración es más difícil (véase el problema del reparto de la finca en J. Margalef, E. Outerelo “Introducción a la Topología” Ed. Complutense 1993).

La demostración del resultado tal como está establecido aquí, es análoga a la del corolario anterior pero tomando

$$F(\theta) = \text{Chocolate en la mitad de } \theta \text{ a } \theta + \pi - \text{Chocolate en la mitad de } \theta + \pi \text{ a } \theta.$$



$$f(\theta) - f(\theta + \pi)$$



$$Ch(\theta) - Ch(\theta + \pi)$$

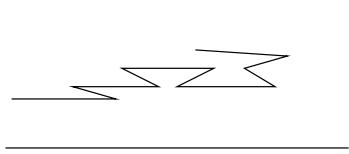
También se puede obtener un teorema de punto fijo.

**Corolario 4.14:** (Teorema de Brouwer para  $n = 1$ ). Si  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es continua, admite un punto fijo, esto es, existe  $x \in [0, 1]$  con  $f(x) = x$ .

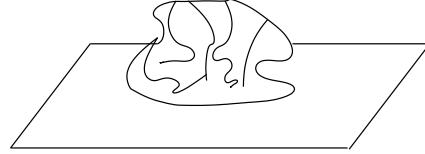
Dem.: Considerando  $F(x) = f(x) - x$  se tiene  $F(0) \geq 0$ ,  $F(1) \leq 0$  y se puede proceder como antes. ■

Una posible interpretación es:

*Si tenemos dos cintas métricas de igual longitud y doblamos una de ellas sobre sí misma cuantas veces queramos y las superponemos una sobre otra, hay un punto que no ha variado de lugar (1).*



(1)



(2)

Aunque esto parece increíble es cierto. Más increíble todavía es su generalización a dimensiones mayores (Teorema de Brouwer). Por ejemplo, por mucho que arruguemos una hoja de papel, cuando la pongamos sobre el cuaderno habrá un punto cuya proyección no ha cambiado de lugar (2). Al final del curso conseguiremos, con mucha maquinaria, una demostración de esta afirmación. De nuevo, tendremos que esperar a la llegada de la Topología Algebraica para demostrarlo.

### La familia de conexos se multiplica

Hasta ahora hemos considerado que un espacio no está roto si no se puede separar en dos trozos (abiertos). También podríamos decir que podemos pasear de un punto a otro del conjunto, o que los habitantes de este espacio, hasta donde llega la vista, no ven ningún trozo roto o ningún punto a donde no pueden ir paseando.

**DEFINICIÓN:** Se dice que un espacio topológico,  $X$ , es conexo por caminos o conexo por arcos o arcoconexo, si para cada par de puntos  $x, y \in X$  existe un camino conectando  $x$  e  $y$ , esto es, una función continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .

Observación: Fuera del formalismo topológico actual, la conexión por caminos es más natural que la conexión y, de hecho, fue introducida antes (K. Weierstrass, alrededor de 1880).

**DEFINICIÓN:** Se dice que un espacio topológico, es localmente conexo si para cada entorno de un punto,  $\mathcal{U}(x)$ , existe un entorno conexo  $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ .

**DEFINICIÓN:** Se dice que un espacio topológico, es localmente conexo por caminos si para cada entorno de un punto,  $\mathcal{U}(x)$ , existe un entorno conexo por caminos  $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ .

Ahora, aquí tendría que venir el teorema bonito que nos dijese que todas las formas de ver que algo no está roto son equivalentes, pero la realidad es mucho más caótica y plena de contraejemplos.

*“Hace buen tiempo, el mar es verde, prefiero este frío seco a la humedad.” ¡Poetas!  
Si cogiera a uno por las solapas del abrigo, si le dijera “ven en mi ayuda”, pensaría:  
“¿Qué es este cangrejo?” y huiría dejándome el abrigo entre las manos.*

*Les vuelvo la espalda, me apoyo con las dos manos en la balaustrada. El verdadero  
mar es frío y negro, lleno de animales; se arrastra bajo esta delgada película verde hecha  
para engañar a las gentes.*

Casi lo único que se salva son los dos resultados siguientes.

**Proposición 4.15:** *Si  $X$  es conexo por caminos entonces es conexo.*

Observación: Obviamente de este resultado se sigue que localmente conexo por caminos  $\Rightarrow$  localmente conexo, pero es una consecuencia tan trivial que no merece el honor de ser destacada como corolario.

Dem.: Si  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  fuera una separación de  $X$  y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  fuera un camino conectando un punto de  $\mathcal{U}$  con otro de  $\mathcal{V}$ , esto es  $\gamma(0) \in \mathcal{U}, \gamma(1) \in \mathcal{V}$ , llegaríamos a que  $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{V})$  es una separación de  $[0, 1]$ , lo cual es imposible. ■

Ejemplo: Todos los subconjuntos convexos (no sobra una “v”) de  $\mathbb{R}^n$  son obviamente conexos por caminos y por tanto conexos (recuérdese que convexo quiere decir que la recta que une cada par de puntos del conjunto está contenida en él). En particular la bola unidad es conexa, con lo cual podemos tirar a la basura la demostración enrevesada de que el disco unidad es conexo, dada en la sección anterior.

**Proposición 4.16:** *Si  $X$  es conexo y localmente conexo por caminos entonces es conexo por caminos*

Dem.: Dado  $x_0 \in X$  definimos

$$A = \{x \in X : \exists \gamma : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua con } \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x\}.$$

Por una parte,  $A$  tiene que ser abierto porque si  $y \in A$  entonces la conexión local por caminos implica que existe un entorno  $\mathcal{U}(y)$  conexo por arcos y por tanto  $\mathcal{U}(y) \subset A$ . ( Nótese que podemos *pegar* dos caminos recorriendo primero uno y después otro como mencionamos en un ejemplo tras el Teorema 3.7).

Por otra parte,  $A$  debe ser cerrado porque si  $y \in \overline{A}$  existe un entorno conexo por arcos  $\mathcal{U}(y) \cap A \neq \emptyset$  y podemos conectar  $y$  con un punto de  $\mathcal{U}(y) \cap A \subset A$  y éste con  $x_0$ .

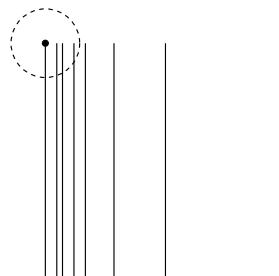
Como  $A \neq \emptyset$  ( $x_0 \in A$ ) es abierto y cerrado y  $X$  es conexo, la única posibilidad es  $A = X$ . ■

Es posible encontrar ejemplos escandalosamente sencillos de que la conexión local no implica conexión.

Ejemplo: En  $\mathbb{R}$  con la topología usual, la unión de dos intervalos disjuntos, por ejemplo  $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ , es obviamente no conexo pero cada punto está contenido en un entorno conexo: el intervalo al que pertenece.

Un poco más difícil es ver que conexo no implica localmente conexo. Hay que buscar un espacio de una sola pieza pero que a un miope le parezca que está roto.

Ejemplo: El espacio peine (véase la sección anterior) es, como habíamos visto, conexo. ¿Qué vería un miope situado en  $(0, 1)$ ?

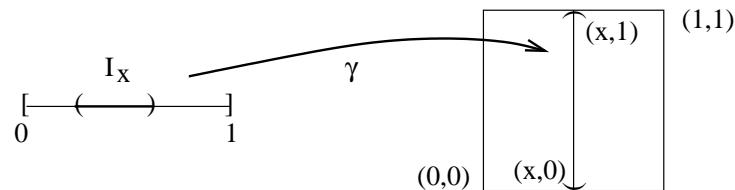


Si tomamos una pequeña bola situada en  $(0, 1)$  no podemos encontrar un abierto dentro de ella que sea conexo y contenga a  $(0, 1)$ . La razón es clara: Dicho abierto debe contener algún punto de la forma  $(1/n, 1)$ , el cual pertenece a una componente conexa del abierto distinta de la de  $(0, 1)$ , así que no puede ser conexo. (Ejercicio: escribir la demostración con detalle hasta que uno se aburra o esté seguro de que la puede terminar).

Ejemplo: La curva seno del topólogo (véase la sección anterior) también es conexa pero no localmente conexa. El razonamiento es idéntico al anterior, aunque puede que la demostración con todo rigor nos parezca más complicada.

Por último veamos que conexo no implica conexo por caminos.

Ejemplo:  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con el orden lexicográfico es conexo pero no conexo por caminos.



La idea no es tan complicada como parece en una primera lectura. Si existiera  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = (0, 0)$ ,  $\gamma(1) = (1, 1)$ ,  $\gamma$  tendría que pasar por todos los valores intermedios, esto es  $\text{Im } \gamma = X$ . Entonces para cada “intervalo vertical” en  $X$ ,  $\mathcal{U}_x = ((x, 0), (x, 1))$ ,  $\gamma^{-1}(\mathcal{U}_x)$  sería un abierto no vacío y podríamos encontrar un intervalo abierto  $I_x \subset [0, 1]$  tal que  $\gamma(I_x) \subset \mathcal{U}_x$ . Como los  $I_x$  son disjuntos, tendríamos que  $[0, 1]$  contiene a una unión no numerable de intervalos disjuntos y esto parece imposible. Para cambiar “parece” por “es”, podemos escoger un número racional arbitrario,  $r_x$ , de cada  $I_x$ , con ello tendríamos

$$x \in [0, 1] \longmapsto I_x \longmapsto r_x \in \mathbb{Q}$$

que es una aplicación inyectiva de  $[0, 1]$  (conjunto no numerable) en  $\mathbb{Q}$  (conjunto numerable), lo cual es una contradicción. (Léase todo de nuevo hasta creerse la primera frase del párrafo).

Observación: El ejemplo anterior también prueba que localmente conexo no implica localmente conexo por caminos. (Ejercicio: Tomarse dos analgésicos y contestar por qué).

Un poco de cultura matemática (para descansar): ¿No ha sentido el lector un desasosiego desconfiado en la demostración anterior al introducir  $r_x$ ? Son los resabios del “axioma de elección”, o su equivalente el “lema de Zorn”, que afirma que podemos escoger un elemento de cada subconjunto de un conjunto (sea o no numerable). Aunque de aspecto inocente y aunque K. Gödel probó que si las Matemáticas no llevan a contradicción sin él tampoco con él, todos sentimos algo en nuestro interior diciendo “no zornicar” frente a la libre elección. En general se prefieren, cuando se conocen, pruebas que no usen el axioma de elección, llamadas “constructivas”. Además suponiéndolo se deducen cosas tan raras como que hay subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^3$  de los que es imposible definir el volumen o el teorema de Banach-Tarski, que dice cómo dividir una esfera en unos cuantos de estos subconjuntos y volverlos a unir para obtener dos esferas. Una referencia legible y simpática es el artículo: R.M. French “*The Banach-Tarski Theorem*” Mathematical Intelligencer 10, 4 pp 21-28 (1988).

Ejemplo: Consideremos el espacio  $\mathcal{P}$  que consiste en quitarle la púa más a la izquierda al espacio peine pero dejando los extremos. Esto es,

$$\mathcal{P} = P - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, x = 0\}.$$

Entonces  $\mathcal{P}$  es conexo pero no es conexo por caminos. La demostración tiene su interés porque se aplica en varias situaciones.

Un breve argumento indirecto para ver que  $\mathcal{P}$  es conexo pasa por considerar

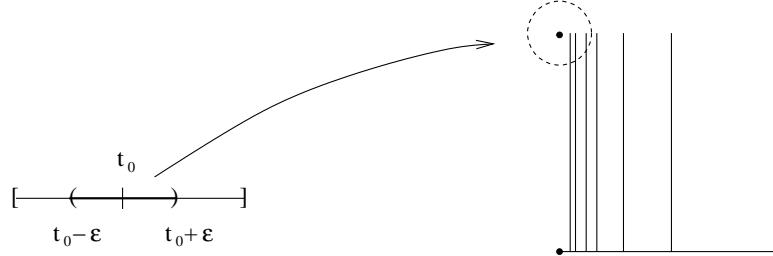
$$\mathcal{P}_* = P - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, x = 0\}.$$

Este conjunto es conexo por caminos y por tanto conexo. Como  $\mathcal{P}_* \subset \mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}_*} = P$ , se deduce que  $\mathcal{P}$  también es conexo. Ahora, si  $\mathcal{P}$  fuera conexo por caminos existiría  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  con  $p = (0, 1)$ ,  $q = (1, 0)$ . Sea  $A = \gamma^{-1}(\{p\})$ ,  $A$  es no vacío ( $0 \in A$ ) y cerrado porque  $\{p\}$  lo es. Si probamos que  $A$  es abierto, como  $[0, 1]$  es conexo, secluiría  $A = [0, 1]$  y  $\gamma$  sería constante (contradicción). Si  $t_0 \in A$ , al ser  $\gamma$  continua podemos elegir un pequeño intervalo abierto  $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  tal que  $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$

donde  $\mathcal{U}$  es un pequeño entorno de  $p$  en  $\mathcal{P}$ . Como  $\gamma(I)$  es conexo y contiene a  $p$ , debe cumplirse

$$\gamma(I) \subset \text{componente conexa de } \mathcal{U} \text{ conteniendo a } p = \{p\}$$

de lo cual se deduce que  $A$  es abierto.



Observación: Al aplicar este procedimiento para demostrar que la curva seno del topólogo no es conexa por caminos, debemos considerar el conjunto  $\{0\} \times [-1, 1]$  en vez de  $\{p\}$ . Nótese que si suprimimos este conjunto de la curva seno del topólogo el resultado es conexo y conexo por caminos. De alguna forma hemos suprimido los puntos para los que el único camino posible requeriría que nos mareásemos (discontinuidad no evitable).

Existe una relación entre la conexión local y las componentes conexas.

**Lema 4.17:** *Si  $X$  es localmente conexo entonces sus componentes conexas son abiertas.*

Dem.: Dado  $x \in X$  sea  $\mathcal{U}(x)$  conexo, entonces  $\mathcal{U}(x)$  está totalmente incluido dentro de una componente conexa que contiene a  $x$ . ■

No es difícil deducir de aquí una especie de recíproco generalizado debido a H. Hahn en 1914, el creador de la conexión local (la demostración es un ejercicio).

**Proposición 4.18:**  *$X$  es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de todos los conjuntos abiertos son abiertas.*

Para terminar diremos que se definen las componentes conexas por caminos de forma análoga a las componentes conexas (salvo que  $x \sim y$  significa ahora  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ ). Además existe una relación entre componentes conexas y componentes conexas por caminos resumida en el siguiente trabalenguas.

**Proposición 4.19:** *Si  $X$  es localmente conexo por caminos, las componentes conexas coinciden con las componentes conexas por caminos.*

En particular, bajo la conexión local por caminos, conexo implica conexo por caminos, lo cual, aunque estemos curados de espanto con los contraejemplos, parece bastante lógico.

*—Es lo que yo me decía, señor. Pero desconfío de mí mismo, se necesitaría haberlo leído todo.*

La demostración es un ejercicio físico que consiste en ir a la biblioteca y mirar el Teorema 4.4 del capítulo 3 del libro de Munkres.

## ¿Qué es un compacto?

La idea intuitiva que hay tras de la definición actual de compacto es difícil de explicar, así que el que no tenga ganas de leer tonterías que pase directamente a la definición.

Qué menos que comenzar las tonterías probando un “teorema” falso. La función  $f(x) = 1/x$  es un contraejemplo.

*Toda función continua  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  está acotada.*

Dem.: falsa Dado  $\epsilon > 0$ , si  $a \in (0, 1)$  por la definición de continuidad existe un  $\delta$  tal que

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (0, 1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Por pequeño que sea  $\delta$  siempre podemos escoger  $a_1, a_2, \dots, a_N \in (0, 1)$  (por ejemplo igualmente espaciados) tales que

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \cup (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \cup \dots \cup (a_N - \delta, a_N + \delta) \supset (0, 1).$$

Para  $x$  en el  $j$ -ésimo intervalo se cumple  $|f(x) - f(a_j)| < \epsilon$  y por consiguiente  $f(a_j) - \epsilon < f(x) < f(a_j) + \epsilon$ . De aquí, para todo  $x \in (0, 1)$  se tiene

$$\min(f(a_1) - \epsilon, \dots, f(a_N) - \epsilon) < f(x) < \max(f(a_1) + \epsilon, \dots, f(a_N) + \epsilon)$$

y  $f$  está acotada superior e inferiormente.  $\square$ ?

Veamos otro “teorema” falso más sutil. Un contraejemplo es  $a_n = 1/n$ .

*Toda sucesión  $0 < a_n < 1$  tiene una subsucesión con  $0 < \lim a_{n_k} < 1$ .*

Dem.: falsa Consideremos la colección de intervalos  $(a_n - 1/(2n), a_n + 1/(2n))$  con  $n = 1, 2, \dots$ . Cada uno de ellos tiene longitud  $> 1/n$  y  $\sum 1/n = \infty$  mientras que la longitud de  $(0, 1)$  es 1, por tanto algún punto  $l \in (0, 1)$  está cubierto por infinitos intervalos, digamos  $(a_{n_k} - 1/(2n_k), a_{n_k} + 1/(2n_k))$ , por tanto  $\lim a_{n_k} = l \in (0, 1)$ .  $\square$ ?

Así que tenemos dos teoremas demostrados que admiten contraejemplos. Si hacemos caso de la tautología  $\neg a \vee a \Rightarrow b$  estas son buenas noticias, porque podemos deducir que la hipótesis de Riemann y la conjectura de Poincaré son ciertas (dos famosas y antiguas conjeturas no resueltas); pero como también  $\neg a \vee a \Rightarrow \neg b$ , la hipótesis de Riemann y la conjectura de Poincaré son falsas. ¿Acaso se cumple la *tontología*  $a \Rightarrow \neg a$ ?

*Absurdo: una palabra más, me debato con palabras; allí llegué a tocar la cosa. Pero quisiera fijar aquí el carácter absoluto de este absurdo. Un gesto, un acontecimiento en el pequeño mundo coloreado de los hombres nunca es absurdo sino relativamente: con respecto a las circunstancias que lo acompañan. Los discursos de un loco, por ejemplo, son absurdos con respecto a la situación en que se encuentra, pero no con respecto a su delirio. Pero yo, hace un rato, tuve la experiencia de lo absoluto: lo absoluto o lo absurdo.*

Como muchos habrán sabido, el error de la primera demostración tiene que ver con la continuidad uniforme. El “ $\delta$ ” depende de  $a$  y  $\epsilon$  y no podemos, en general, escoger el mismo para valores distintos de  $a$ , con lo cual tendríamos que haber escrito:

$$\bigcup_{a \in (0,1)} (a - \delta(a), a + \delta(a)) \supset (0, 1).$$

Aun así parece que tiene remedio, porque tomando una subcolección finita de intervalos que cubran  $(0, 1)$  el resto de la prueba funciona. Pero hay algo no muy claro: quizás con mala idea pudiéramos inventar  $\delta(a)$  tal que esa subcolección no exista.

En la segunda “demostración”, de nuevo la dificultad última estriba en nuestra intuición de que podemos extraer de una colección infinita de intervalos abiertos unos cuantos tales que todos los demás están “debajo”.

**DEFINICIÓN:** Se dice que un espacio topológico,  $X$ , es compacto si todo recubrimiento abierto de  $X$  admite un subrecubrimiento finito.

Observación: Aunque esté tan claro que no merezca el nombre de “definición”, subrayaremos que un recubrimiento abierto es sólo una colección de abiertos cuya unión es todo el espacio, y un subrecubrimiento es una subcolección con la misma propiedad. A veces abreviaremos recubrimiento abierto por recubrimiento simplemente.

**DEFINICIÓN:** Se dice que un subconjunto de un espacio topológico,  $A \subset X$ , es compacto si lo es con la topología relativa.

Observación: Nótese que para subconjuntos podemos entender un recubrimiento abierto como una colección de abiertos,  $\mathcal{U}_\alpha$ , en  $X$ , tales que  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset A$ .

Ejemplo:  $\mathbb{R}$  no es compacto porque

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - 0'6, n + 0'6)$$

y no podemos suprimir ninguno de los intervalos porque si no algún entero quedaría sin tapar.

Ejemplo:  $A = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$  con la topología usual no es compacto. Basta considerar el recubrimiento

$$A \subset \bigcup_n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right)$$

que no tiene subrecubrimientos. Lo mismo podríamos hacer en cualquier subconjunto infinito que herede la topología discreta.

Ejemplo:  $\overline{A}$  es compacto (con  $A$  como antes). Dado un recubrimiento abierto de  $\overline{A}$ , digamos  $\mathcal{C}$ , sea  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{C}$  con  $0 \in \mathcal{U}_0$ . Como  $1/n \rightarrow 0$  se tiene  $1/n \in \mathcal{U}_0$  excepto un número finito de veces:  $1/n_1, 1/n_2, \dots, 1/n_k$ . eligiendo  $\mathcal{U}_j \in \mathcal{C}$  con  $1/n_j \in \mathcal{U}_j$ , se tiene  $\bigcup_{j=0}^k \mathcal{U}_j \supset A$ .

Ejemplo:  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  no es compacto. Basta tomar el recubrimiento.

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} (1/n, 1) = (0, 1).$$

El siguiente ejemplo es más notable e incluso a veces recibe un nombre que reservaremos para el último teorema de la sección.

**Lema 4.20:**  $[0, 1]$  es compacto (con la topología usual).

Dem.: Dado un recubrimiento abierto,  $\mathcal{C}$ , de  $[0, 1]$  consideramos

$$s = \sup\{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ puede recubrirse con un n}\text{o finito de abiertos de } \mathcal{C}\}.$$

Hay que demostrar  $s = 1$ , con ello, quizá añadiendo un abierto que recubra  $[1 - \epsilon, 1]$ , tendremos un subrecubrimiento finito. Desde luego que  $s > 0$  porque cualquier abierto que contenga a cero contiene a  $[0, \epsilon]$  para algún  $\epsilon > 0$ . Supongamos que  $s < 1$ , entonces para cualquier  $\mathcal{U}(s) \in \mathcal{C}$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \subset \mathcal{U}(s)$ . Por la definición de  $s$ ,  $[0, s - \epsilon]$  está recubierto por un número finito de abiertos del recubrimiento, pero si a estos les añadimos  $\mathcal{U}(s)$  se tiene un subrecubrimiento finito de  $[0, s + \epsilon]$ , lo cual contradice que  $s$  sea el supremo. ■

Mirándolo con cuidado, esencialmente sólo hemos usado la existencia del supremo en la prueba anterior. A base de generalizar se obtiene un resultado más poderoso.

**Proposición 4.21:** Si  $X$  tiene la topología del orden y la propiedad del supremo, entonces para cada  $a, b \in X$ ,  $a < b$ , el intervalo cerrado  $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$  es compacto.

Ejemplo:  $[0, 1] \times [0, 1]$  con el orden lexicográfico es compacto (simplemente coincide con el intervalo cerrado  $[(0, 0), (1, 1)]$ ).

Como en el caso de la conexión, veamos cómo fabricar nuevos compactos a partir de nuestra pequeña colección.

**Proposición 4.22:** Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua y  $K \subset X$  es compacto, entonces  $f(K)$  también lo es.

Dem.: Si  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$  fuera un recubrimiento de  $f(K)$  sin subrecubrimientos finitos entonces  $\bigcup f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \supset K$  tendría la misma propiedad. ■

**Proposición 4.23:** Si  $F \subset K \subset X$  con  $F$  cerrado y  $K$  compacto, entonces  $F$  es compacto.

Esto es, cerrado dentro de compacto es compacto.

Dem.: Si existiera un recubrimiento  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset F$  sin subrecubrimientos finitos entonces  $(X - F) \cup \bigcup \mathcal{U}_\alpha \supset K$  tendría la misma propiedad y esto contradice que  $K$  es compacto. ■

Ejemplo:  $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}$  es compacto porque es un cerrado dentro de  $[-1, 1]$  que es compacto.

La compacidad está relacionada con propiedades de separación.

**Proposición 4.24:** Sea  $X$  un espacio Hausdorff,  $K$  un subconjunto compacto y  $x \in X - K$ , entonces existen dos abiertos disjuntos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  tales que  $x \in \mathcal{U}$  y  $K \subset \mathcal{V}$ .

Dem.: Para cada  $y \in K$ , por ser el espacio Hausdorff, existen dos abiertos disjuntos  $\mathcal{U}_y$ ,  $\mathcal{V}_y$  con  $x \in \mathcal{U}_y$ ,  $y \in \mathcal{V}_y$ . De la compacidad de  $K$  se sigue que

$$\bigcup_{y \in K} \mathcal{V}_y \supset K \Rightarrow \exists y_1, y_2, \dots, y_N \in K : \bigcup_{n=1}^N \mathcal{V}_{y_n} \supset K.$$

Tomando

$$\mathcal{U} = \bigcap_{n=1}^N \mathcal{U}_{y_n}, \quad \mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^N \mathcal{V}_{y_n}$$

se tiene el resultado deseado. ■

**Corolario 4.25:** *En un espacio de Hausdorff cualquier subconjunto compacto es siempre cerrado.*

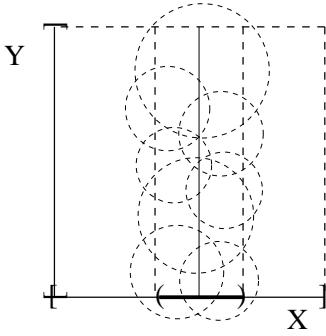
Dem.: Por la proposición anterior, cada punto que no esté incluido en el compacto tiene un entorno abierto que tampoco lo está, así que el complementario es abierto. ■

Ejemplo: Con la topología cofinita en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{0\}$  es compacto (ejercicio) pero  $\mathcal{U}$  es abierto y no cerrado.

La última propiedad que veremos es, esencialmente,

$$X, Y \text{ compactos} \Rightarrow X \times Y \text{ compacto.}$$

Después de pensar un poco, hay un camino lógico: Para todo recubrimiento de  $X \times Y$ , al ser  $Y$  compacto, cada vertical  $\{x\} \times Y$  admite un subrecubrimiento finito. Si escogemos un *tubo* de la forma  $\mathcal{U}(x) \times Y$  dentro de dicho subrecubrimiento, un número finito de tubos recubrirán  $X \times Y$  ya que  $X$  está recubierto por un número finito de los  $\mathcal{U}(x)$  cuando  $x$  varía.



Cuando se intenta poner todo esto en rigor resulta que la existencia del tubo alrededor de la vertical no es evidente.

**Lema 4.26:** (Lema del tubo) Sean  $X, Y$  espacios topológicos con  $Y$  compacto y sea  $x \in X$ . Si  $\mathcal{W}$  es un abierto en  $X \times Y$  con  $\{x\} \times Y \subset \mathcal{W}$  entonces existe  $\mathcal{U}$  abierto en  $X$  tal que  $\{x\} \times Y \subset \mathcal{U} \times Y \subset \mathcal{W}$ .

Observación: El resultado es, en general, falso si  $Y$  no es compacto. Por ejemplo, si  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y|x| < 1\}$  no existe ningún *tubo* contenido en  $\mathcal{W}$  y conteniendo a  $\{0\} \times \mathbb{R}$ .

Dem.: Por la definición de la topología producto, podemos escribir

$$\mathcal{W} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha} \times \mathcal{V}_{\alpha}$$

donde  $\mathcal{U}_{\alpha}$ ,  $\mathcal{V}_{\alpha}$  son abiertos de las bases de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. De la compacidad de  $\{x\} \times Y$  (es homeomorfo a  $Y$ ) se sigue que un número finito de productos  $\mathcal{U}_{\alpha} \times \mathcal{V}_{\alpha}$  sirven para cubrir este conjunto. Digamos

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{n=1}^N \mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n$$

con  $x \in \mathcal{U}_n$ ,  $Y \subset \bigcup \mathcal{V}_n$ . Por tanto, tomando como  $\mathcal{U}$  la intersección de los  $\mathcal{U}_n$

$$\{x\} \times Y \subset \mathcal{U} \times Y \subset \bigcup_{n=1}^N \mathcal{U}_n \times \mathcal{V}_n \subset \mathcal{W}$$

y la demostración es completa. ■

**Proposición 4.27:** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  espacios topológicos (no vacíos), entonces  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  es compacto  $\Leftrightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$  son compactos.

Observación: Como en el caso de la conexión, el resultado también se extiende a productos cartesianos infinitos. En ese caso se conoce con el nombre de *Teorema de Tychonoff* y requiere emplear el axioma de elección.

Dem.: Supondremos  $n = 2$  porque el caso general se sigue iterando (por inducción).

$\Rightarrow$ ) Es una consecuencia de la continuidad de las proyecciones  $\pi_1, \pi_2$ .

$\Leftarrow$ ) Fijado  $x \in X_1$ , como la vertical  $\{x\} \times X_2$  es compacta, de cada recubrimiento de  $X_1 \times X_2$  podemos extraer una colección finita,  $\mathcal{W}_{x,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_x$  y, por el lema, la unión de estos abiertos debe contener un *tubo*  $\mathcal{U}_x \times X_2$  con  $x \in \mathcal{U}_x$

$$\{x\} \times X_2 \subset \mathcal{U}_x \times X_2 \subset \bigcup_{n=1}^{N_x} \mathcal{W}_{x,n}.$$

Por otra parte, por la compacidad de  $X_1$ , se necesitan un número finito de abiertos  $\mathcal{U}_{x_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  para recubrir  $X_1$ , con lo cual se tiene

$$X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{m=1}^M \mathcal{U}_{x_m} \times X_2 \subset \bigcup_{m=1}^M \bigcup_{n=1}^{N_{x_m}} \mathcal{W}_{x_m,n}$$

y  $\mathcal{W}_{x_m,n}$  es el subrecubrimiento finito buscado. ■

Una vez que nos hemos ejercitado en la teoría y tenemos una fábrica de compactos con teoremas grandilocuentes, podemos desvelar el gran secreto: la compacidad en  $\mathbb{R}^n$  es una solemne tontería.

**Teorema 4.28:** (Heine-Borel) En  $\mathbb{R}^n$  (con la topología y distancia usuales) un subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Observación: Este resultado no es cierto en general, si la topología o la distancia no son las usuales. Por ejemplo, con la topología de límite inferior en  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1)$  es cerrado y acotado pero no compacto.

Dem.:  $\Rightarrow$ ) Al ser  $\mathbb{R}^n$  Hausdorff sabemos que *compacto  $\Rightarrow$  cerrado*. La acotación se sigue de que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n)$  es un recubrimiento de cualquier subconjunto (de hecho de  $\mathbb{R}^n$ ) que no admite subrecubrimientos finitos si el conjunto no está acotado (*¿por qué?* Es muy fácil).

$\Leftarrow$ ) Un subconjunto acotado está incluido en el cubo  $C_n = [-n, n] \times \dots \times [-n, n]$  para algún  $n$  suficientemente grande. Como  $C_n$  es compacto (es producto de compactos) si el subconjunto es cerrado también será compacto (*cerrado  $\subset$  compacto  $\Rightarrow$  compacto*). ■

Ejemplo:  $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  es compacto.

Trivialmente es acotado y se puede probar rápidamente que es cerrado diciendo que  $S^n = f^{-1}(\{1\})$  donde  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función continua  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ . Este breve argumento demostrando que  $S^n$  es cerrado tiene un análogo diferencial, el teorema de la submersión, que permite probar entre otras cosas que  $S^n$  es una subvariedad sin necesidad de echar las cartas.

Para terminar, después de la submersión un poco de subversión:

La compacidad en  $\mathbb{R}$  subyace a los conceptos de supremo e ínfimo que son la base del Análisis Matemático y de la misma construcción de los números reales. Estos conceptos han sufrido las desconfianzas de muchos matemáticos desde la antigüedad hasta finales del siglo XIX. Uno de los últimos reaccionarios, criticando duramente los trabajos de H.F. Heine y K. Weierstrass hacia la definición de compacidad, fue L. Kronecker, famoso por su importantísima contribución matemática, por “creer” sólo en los enteros y por haber acelerado o motivado la demencia de G. Cantor a causa de sus ataques contra él. Es realmente injusto que diatribas como éstas o conflictos entre biografías sean casi la única oportunidad para que el lector casual pueda atisbar el carácter de algunos “grandes hombres”, y es que no hay como morirse o ser un genio para volverse bueno ante todos, a pesar de la advertencia del Apóstol de las Gentes: “y si entendiese todos los misterios de la ciencia [...], y no tengo amor, no soy nada. [...] y si entregase mi cuerpo al fuego, y no tengo amor, de nada me sirve”. Por ejemplo, en un homenaje póstumo a un sabio fallecido en el siglo XVIII se dijo:

“Tenía por nacimiento tendencia a la mansedumbre e inclinación a la tranquilidad [...] Nunca hablaba de sí mismo o con desprecio de otros y nunca dio motivo alguno ni siquiera al más malicioso observador de sospechar en él el menor atisbo de vanidad [...] La holgura de que disfrutaba [...] le dio oportunidades de hacer el bien, oportunidades que no dejó escapar”.

Pero buscando con empeño se puede encontrar:

“Atrabiliario, hosco y malhumorado, nunca reconoció la valía de sus compañeros e hizo lo posible por borrar las huellas de los que le precedieron. Culpable de diez y nueve muertes [...] nunca hubo tantos nobles estúpidos en la sabia institución como bajo su mando.”

Es curioso que no dejemos de admirar en los libros y en las paredes de los museos a héroes que, de estar a nuestro lado, llamaríamos ruines y degenerados.

Había cruzado el salón Bordurin-Renaudas en toda su longitud. Me volví. Adiós, hermosos lirios todo finura, en vuestros santuarios pintados; adiós hermosos lirios, orgullo nuestro y nuestra razón de ser, adiós, cerdos.

En la actualidad la definición de compacto no da lugar a ningún recelo a pesar de su carácter no constructivo, y el Análisis Matemático está sólidamente asentado. Es justo añadir que muchas de las críticas pasadas estaban justificadas por la falta de rigor al manejar los conceptos infinitesimales, pero en el terreno de las opiniones sólo se recuerda al que a la larga tiene razón.

## ¡Qué buenos son los compactos!

La primera *buena* propiedad de los compactos no es más que la generalización de uno de los teoremas básicos del Cálculo.

**Proposición 4.29:** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto e  $Y$  un espacio topológico con la topología del orden, entonces cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$  alcanza un máximo y un mínimo. Esto es,  $\exists x_1, x_2 \in X : \forall x \in X f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .*

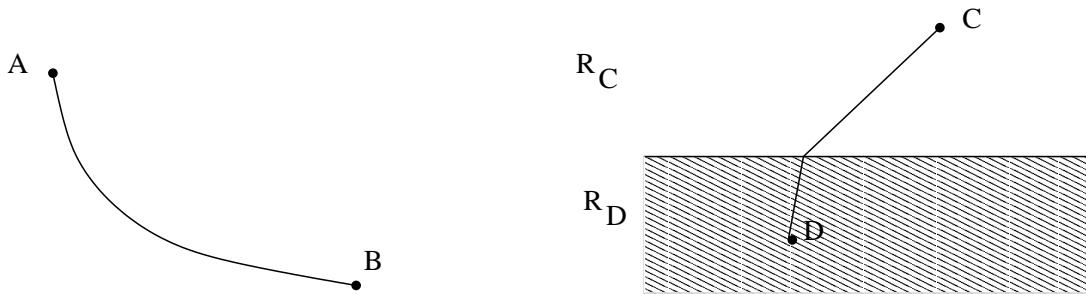
Dem.: Si no alcanzara un máximo, dado  $y \in \text{Im } f$  existe  $z \in \text{Im } f$  con  $z > y$ . Así pues, tenemos el recubrimiento

$$\text{Im } f = \bigcup_{y \in \text{Im } f} \{y\} \subset \bigcup_{z \in \text{Im } f} \{y \in Y : y < z\}.$$

Si  $\{y \in Y : y < z_1\} \cup \{y \in Y : y < z_2\} \cup \dots \cup \{y \in Y : y < z_N\}$  es un subrecubrimiento finito llegamos a una contradicción porque el mayor de los  $z_j$  está en  $\text{Im } f$  pero no pertenece al subrecubrimiento. Un argumento simétrico sirve para demostrar que también se alcanza un mínimo. ■

Destacar un resultado tan poco destacado merece alguna *batallita*.

Con nuestra intuición de Cálculo real, la existencia de máximos y mínimos puede parecer bastante trivial pero en espacios suficientemente complejos puede ser difícil de probar o incluso falsa. Como ilustración, citaremos el problema de la braquistocrona (*braquis*=breve, *cronos*=tiempo) que consiste en dados dos puntos  $A, B$  a diferentes alturas, hallar la forma de un tobogán que los une para que los niños (o mayores) tarden lo menos posible en bajar. Consideraremos también el problema de hallar un camino por el que tardemos el menor tiempo posible para ir de la ciudad  $C$  a la  $D$  sabiendo que la región de  $D$ ,  $R_D$  (ver la figura), es pantanosa y avanzamos la mitad de rápido que en  $R_C$ .



El primer problema es muchísimo más difícil (no es un ejercicio si uno no conoce bien las palabras mágicas: Cálculo de Variaciones) que el segundo (ejercicio ingenioso). Por otra parte, el primero tiene solución entre las curvas diferenciables (un trozo de cicloide) y el segundo no (una línea quebrada). En otras palabras, la función que asigna a cada curva diferenciable uniendo dos puntos el tiempo, alcanza un mínimo en el primer caso pero no en el segundo. En este último caso, las curvas diferenciables sólo dan aproximaciones a la solución.

Curiosidades: El problema de la braquistocrona fue un reto de J. Bernoulli (quien lo resolvió primero) a otros matemáticos. Al gran genio I. Newton sólo se le resistió unas

horas (el 29 de enero de 1697) mientras que a G.W. Leibniz seis meses. Sorprendentemente guarda cierta relación con el segundo problema que hemos mencionado y éste con la refracción de la luz. Para saber más, véase V.M. Tikhomirov “*Stories about Maxima and Minima*” Mathematical World. AMS 1990.

Veamos a continuación dos resultados que relacionan la compacidad con otras definiciones del curso.

**Proposición 4.30:** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos con  $X$  compacto e  $Y$  Hausdorff y  $f : X \rightarrow Y$ , entonces

$$f \text{ es un homeomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ es continua y biyectiva.}$$

Dem.:  $\Rightarrow$ ) Es trivial.

$\Leftarrow$ ) Basta probar que  $f$  es cerrada ya que esto implicará que  $f^{-1}$  es continua. Si  $F$  es cerrado en  $X$ , entonces es compacto y  $f(F)$  también lo es. Como  $Y$  es Hausdorff,  $f(F)$  es cerrado. ■

Ejemplo: La función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $f(x, y) = (x^3(1-y^3)+3x, x^3(1+y^3)+3x+2)$  y  $X = [1, 2] \times [3, 4]$  es una inmersión (homeomorfismo sobre su imagen). La sobreyectividad de  $f : X \rightarrow f(X)$  está asegurada y como  $X$  es compacto y  $f$  es continua, basta comprobar que es inyectiva: Si  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ , sumando ambas ecuaciones y sacando factor común  $x_1 - x_2$  obtenemos  $x_1 = x_2$ . Sustituyendo en la segunda ecuación se deduce  $y_1 = y_2$ .

**Proposición 4.31:** Si  $X$  es un espacio topológico compacto y  $A$  es un subconjunto infinito, entonces  $A' \neq \emptyset$ .

Dem.: Supongamos que  $A' = \emptyset$ , entonces  $\forall x \in X \exists \mathcal{U}(x) : A \cap \mathcal{U}(x) = \emptyset$  ó  $A \cap \mathcal{U}(x) = \{x\}$ . Cuando  $x$  varía en  $X$ , los  $\mathcal{U}(x)$  cubren todo el espacio y por la compacidad de  $X$  podemos escoger  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_N$  con

$$A \subset X \subset \bigcup_{j=1}^N \mathcal{U}_j .$$

Como  $\mathcal{U}_j \cap A$  tiene a lo más un elemento, se deduce que  $A$  es finito. ■

Ejemplo: Tomando como  $A$  una sucesión acotada, digamos por un número  $M$ , y  $X = [-M, M]$  con la topología usual, se deduce (sin mucho esfuerzo pero no inmediatamente) el teorema de Bolzano-Weierstrass:

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Realmente el resultado se debe a K. Weierstrass en 1860 pero B. Bolzano creó el método de bisección que a veces se usa en la demostración y contribuyó ampliamente a la fundamentación del Análisis Matemático y la teoría de sucesiones y series. Su libro “Paradojas del infinito” de 1850 incluye contraejemplos tan demoledores como

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1.$$

No está tan mal habida cuenta que entre los resultados que S. Ramanujan envió a algunos matemáticos antes de ser “descubierto” estaba  $1+2+3+4+5+\dots = -1/12$ . Qué injustos son los autores que suspenderían a sus alumnos por menos y critican a aquellos matemáticos. También es cierto que esta igualdad tiene algún sentido, pero difícil de explicar.

Según cuentan algunos libros, en los albores de la historia de la Topología General (la que estudiamos hasta este capítulo) se decía que eran *compactos* los espacios en los que se cumplía el teorema de Bolzano-Weierstrass y se reservaba el nombre de *bicomponentes* a los que tenían la propiedad de subrecubrimientos finitos. Pero nuevos teoremas, como el de Tychonoff que sólo se cumple para los bicomponentes, hicieron que éstos se transformaran en los compactos por anotomía. Nos podemos creer así la necesidad de los nuevos compactos con su definición artificial y la contingencia de los antiguos, pero también es fácil dar causas necesarias de la Revolución Francesa una vez que sabemos que ha ocurrido.

*No reflexionar demasiado en el valor de la Historia. Uno corre el riesgo de hastiarse con ella.*

En general, en espacios métricos hay una estrecha relación entre la compacidad, los puntos de acumulación y propiedades de convergencia de las sucesiones. Todo está recogido en el próximo teorema del que separamos una parte de la demostración que tiene interés independiente.

**Lema 4.32:** (Lema del número de Lebesgue) *Sea  $X$  un espacio métrico en el que toda sucesión tenga una subsucesión convergente y sea  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$  un recubrimiento abierto, entonces existe  $\delta > 0$  (número de Lebesgue) tal que para cualquier  $x \in X$  hay un abierto del recubrimiento contenido a  $B(x, \delta)$ .*

Dem.: Si no existe tal  $\delta$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  existe  $x_n \in X$  tal que  $B(x_n, 1/n) \not\subset \mathcal{U}_\alpha$  para cualquier  $\mathcal{U}_\alpha$  del recubrimiento. Sea  $l$  el límite de una subsucesión convergente de  $x_n$ , digamos  $x_{n_k}$ . Sea  $\mathcal{U}_{\alpha_0}$  tal que  $l \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ . Por ser  $\mathcal{U}_{\alpha_0}$  abierto existe  $B(l, \epsilon) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}$ . Además de la convergencia de  $x_{n_k}$  a  $l$  se deduce que existe  $k_0$  suficientemente grande tal que  $x_{n_{k_0}} \in B(l, \epsilon/2)$  y  $1/n_{k_0} < \epsilon/2$ . De aquí

$$B(x_{n_{k_0}}, 1/n_{k_0}) \subset B(x_{n_{k_0}}, \epsilon/2) \subset B(l, \epsilon) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}.$$

(Se ha aplicado la desigualdad triangular en la inclusión central). Pero esto contradice que  $B(x_n, 1/n) \not\subset \mathcal{U}_\alpha$  para todo  $n$  y cualquier  $\mathcal{U}_\alpha$ . ■

**Teorema 4.33:** *Si  $X$  es un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1)  $X$  es compacto.
- 2) Si  $A \subset X$  tiene infinitos elementos  $A' \neq \emptyset$ .
- 3) Toda sucesión en  $X$  tiene una subsucesión convergente.

Observación: En espacios que no son métricos las tres afirmaciones no son equivalentes y constituyen una pequeña familia de los compactos. Los espacios que cumplen 2) se llaman numerablemente compactos o se dice que tienen la propiedad de Bolzano-Weierstrass y los que cumplen 3) se llaman compactos por sucesiones o secuencialmente compactos. Esta familia se completa con localmente compacto que es un término que no trataremos en este curso y que significa que cada punto tiene un entorno contenido en un compacto.

Dem.: Ya hemos probado que 1)  $\Rightarrow$  2). Por otra parte si se cumple 2), cualquier sucesión debe tener una subsucesión convergente porque si no tendríamos un conjunto infinito sin puntos límite (Ejercicio: Completar los detalles. Aunque no lo parezca, se necesita usar que el espacio es métrico). Así que sólo queda probar 3)  $\Rightarrow$  1).

Sea  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$  un recubrimiento de  $X$ , queremos hallar un subrecubrimiento finito. Por el lema anterior existirá un número de Lebesgue  $\delta > 0$ . Tomemos  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X - B(x_1, \delta)$ ,  $x_3 \in X - B(x_1, \delta) - B(x_2, \delta), \dots$  etc. Para algún  $N$  debe cumplirse

$$X = B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta) \cup \dots \cup B(x_N, \delta)$$

porque si no  $x_n$  formaría una sucesión infinita sin subsucesiones convergentes (todos los términos están separados al menos por  $\delta$ ). Eligiendo para cada  $1 \leq j \leq N$ ,  $\mathcal{U}_{\alpha_j} \supset B(x_j, \delta)$  se tiene que  $\bigcup \mathcal{U}_{\alpha_j}$  es el subrecubrimiento finito buscado. ■

Ejemplo: Como  $X = [0, 1]$  es compacto y métrico, toda sucesión tiene una subsucesión convergente y se cumple el resultado del lema del número de Lebesgue. Aplicándolo al recubrimiento de  $[0, 1]$  dado por  $f^{-1}((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon))$  donde  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, se deduce el teorema de continuidad uniforme: Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  es uniformemente continua, esto es,  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (a - \delta, a + \delta) \cap [0, 1] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$  para todo  $a \in [0, 1]$ . Es decir,  $\delta$  depende de  $\epsilon$  pero no de  $a$ .

Ejemplo: Todo espacio métrico compacto es completo (véase la definición en el primer capítulo): Por 3), para cada sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  existe  $x_{n_k} \rightarrow l$ , esto es, dado  $\epsilon > 0$ ,  $d(x_{n_k}, l) < \epsilon$  si  $n_k > N$ . Si la sucesión es de Cauchy,  $d(x_m, x_{n_k}) < \epsilon$  para  $m, n_k > M > N$ , así que por la desigualdad triangular

$$d(x_m, x_{n_k}) < \epsilon, \quad d(x_{n_k}, l) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad d(x_m, l) < 2\epsilon \quad \text{si } m > M$$

y la sucesión converge a  $l$ .

Como muestra este ejemplo, la completitud y la compacidad están muy relacionadas, de hecho para los espacios métricos totalmente acotados (los que pueden ser recubiertos con un número finito de bolas arbitrariamente pequeñas), compacto es lo mismo que completo.

Ejemplo:  $\mathbb{R}^n$  es completo. Cualquier sucesión de Cauchy está acotada (ejercicio, no es tan difícil teniendo en cuenta que si los términos se amontonan no puede haber algunos que se escapen a infinito) entonces está incluida en  $\overline{B}(\vec{0}, R)$  para algún  $R$  grande, y este espacio es completo por ser compacto.

Observación: Como los compactos son tan buenos, a veces conviene ampliar un poco un espacio no compacto añadiéndole un punto, normalmente llamado  $\infty$ , de manera que  $X \cup \{\infty\}$  sea compacto. Este nuevo espacio se llama compactificación de Alexandroff, que lo introdujo en 1924, cuando se le dota con la topología dada por

$$\mathcal{U} \text{ abierto en } X \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{U} \text{ es abierto en } X & \text{si } \infty \notin \mathcal{U} \\ X - \mathcal{U} \text{ es compacto en } X & \text{si } \infty \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Por ejemplo,  $(a, b)$  y  $\mathbb{R} - [a, b] \cup \{\infty\}$  son abiertos típicos de la compactificación de  $\mathbb{R}$ . Esto es como pegar  $-\infty$  e  $\infty$  en un solo infinito, de manera que  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  con la topología de la compactificación de Alexandroff es homeomorfo a  $S^1$  y, en general,  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  a  $S^n$  (el homeomorfismo no es más que la extensión de la estereográfica).

Para terminar, veamos dos propiedades de los espacios compactos que aparecen en algunos resultados clásicos.

**Proposición 4.34:** Sea  $X$  un espacio topológico compacto y sean  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$  conjuntos cerrados no vacíos, entonces  $\bigcap F_j \neq \emptyset$ .

Observación: Cuando  $X$  y los  $F_j$  son intervalos cerrados de la recta real, por razones obvias, se llama a este resultado *teorema de los intervalos encajados*. Nótese que el resultado no es cierto para intervalos abiertos, por ejemplo,  $\bigcap(0, 1/n) = \emptyset$ .

Dem.: Si fuera  $\bigcap F_j = \emptyset$ ,

$$\bigcup \mathcal{U}_j = X \quad \text{con} \quad \mathcal{U}_j = X - F_j$$

sería un recubrimiento abierto y no tendría subrecubrimientos finitos, lo cual es una contradicción. ■

**Proposición 4.35:** Sea  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff y  $A \neq \emptyset$  un subconjunto tal que  $A' = A$ , entonces  $A$  no es numerable.

Observación: A los conjuntos que cumplen  $A' = A$  se les llama perfectos y fueron introducidos por G. Cantor en 1884. Este resultado implica, por tanto, que los conjuntos perfectos en compactos Hausdorff son no numerables.

Dem.: De la identidad  $\overline{A} = A \cup A'$  se sigue que  $\overline{A} = A$  y por tanto  $A$  es cerrado.

Si  $A$  fuera numerable, digamos  $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , sea  $y_1 \in A - \{x_1\}$  entonces, por ser el espacio Hausdorff, podemos hallar  $\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1$  disjuntos con  $y_1 \in \mathcal{U}_1, x_1 \in \mathcal{V}_1$ . Por tanto  $x_1 \notin \overline{\mathcal{U}_1}$ . Como  $y_1$  es un punto de acumulación,  $(\mathcal{U}_1 - \{y_1\}) \cap A$  debe ser no vacío (de hecho debe contener infinitos elementos), así pues, procediendo de la misma forma hallamos  $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1, \mathcal{V}_2$  disjuntos con  $y_2 \in \mathcal{U}_2 \cap A, x_2 \in \mathcal{V}_2$ , con lo cual  $x_2 \notin \overline{\mathcal{U}_2}$ . En general obtenemos  $\overline{\mathcal{U}_1} \supset \overline{\mathcal{U}_2} \supset \overline{\mathcal{U}_3} \supset \dots$  tales que  $\mathcal{U}_1 \cap A \neq \emptyset, \mathcal{U}_2 \cap A \neq \emptyset, \mathcal{U}_3 \cap A \neq \emptyset, \dots$  y  $x_1 \notin \overline{\mathcal{U}_1}, x_2 \notin \overline{\mathcal{U}_2}, x_3 \notin \overline{\mathcal{U}_3}, \dots$  y esto implica  $\bigcap(\overline{\mathcal{U}_j} \cap A) = \emptyset$  lo que contradice el resultado anterior. ■

Ejemplo: Uno de los subconjuntos de  $[0, 1]$  más famosos en Topología es el conjunto de Cantor (debido a G. Cantor en 1883) definido por

$$C = \bigcap_{k,j=0}^{\infty} \left( [0, 1] - \left( \frac{3k+1}{3^j}, \frac{3k+2}{3^j} \right) \right).$$

Este conjunto es perfecto, lo cual no es una opinión sino una aplicación de la notación antes introducida (ejercicio, no muy fácil si uno quiere una solución breve). Los dos últimos resultados implican que  $C$  es no vacío y no numerable. Para aplicar el primero se puede considerar como  $F_j$  la parte de la intersección con  $0 \leq k \leq 3^{n-1}$  y  $n \leq j$ . Otras propiedades curiosas del conjunto de Cantor son que sus componentes conexas son los puntos, que es autosemejante (igual a un par de fotocopias reducidas de sí mismo) y que para cualquier espacio métrico  $(X, d)$  existe una función continua y sobreyectiva  $f : C \rightarrow X$ . Este increíble resultado es el teorema de Hausdorff-Alexandroff. Si uno ya ha hecho todos los deberes y tiene ganas de más, puede pasarse por la hemeroteca y tratar de leer poco a poco el artículo de Y. Benjamini “Applications of the Universal Surjectivity of the Cantor Set” American Mathematical Monthly 105 pp 832-839 (1998).

### **Una recta no es redonda, un hombre no es una mujer**

En el capítulo anterior dijimos que los homeomorfismos establecían una equivalencia entre los abiertos de dos espacios topológicos y, por tanto, entre sus propiedades topológicas. Allí hallamos “a mano” algunos homeomorfismos entre espacios pero como sabíamos muy pocas propiedades y eran demasiado básicas, no pudimos distinguir entre espacios aparentemente bien distintos. En esta sección utilizaremos lo que hemos aprendido de conexión y compacidad con este cometido. Después de todo el *rollo* teórico de páginas anteriores, nos daremos un respiro sin teoremas, sólo con ejemplos. Si no se indica lo contrario, la topología empleada será la (inducida por la) usual.

Ejemplo: Los intervalos en  $\mathbb{R}$ :  $I_1 = (a, b)$ ,  $I_2 = [a, b]$  con  $a < b$ , no son homeomorfos porque  $I_2$  es compacto pero  $I_1$  no lo es.

Ejemplo: El disco unidad abierto en  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo al disco cerrado, porque el primero no es compacto y el segundo sí.

Seguramente muchos estén pensando que estos ejemplos son un poco absurdos porque un subespacio que es abierto en un espacio mayor no puede ser homeomorfo a otro que no lo es, pero este argumento no es en general válido (con excepciones, que aquí se aplican, recogidas en un profundo resultado mencionado al final de la sección). Para los más incrédulos, damos un ejemplo de un espacio tal que uno de sus abiertos es homeomorfo a uno de sus no abiertos.

Ejemplo: Consideremos el siguiente espacio:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 = 1\} \\ \cup \{(0, -2 - 1/n) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

En este híbrido entre ocho y Manneken-Pis, el subconjunto  $\mathcal{U} = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$  es abierto y homeomorfo a  $C = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y < -1\}$  por medio de la simetría  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ , pero este último conjunto no es abierto en  $X$  (¿por qué?). Por cierto,  $X$  no es homeomorfo, por ejemplo, a  $S^1$  porque este último conjunto es conexo y  $X$  no lo es.

Ejemplo: Sabíamos que  $\mathbb{R}$  es homeomorfo a cualquier intervalo abierto,  $(a, b)$ , pero no puede serlo a ninguno cerrado,  $[a, b]$ , por la compacidad de este último conjunto.

Nótese que ni siquiera puede existir una función continua y sobreyectiva  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  porque  $f$  debe alcanzar un máximo y un mínimo. Por otro lado, no sólo existe  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sobreyectiva, sino que a base de unir curvas de Peano (véase el final del capítulo 42 de M. Kline “*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*” V.III Oxford University Press 1972), se puede obtener  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  con las mismas propiedades, contradiciendo nuestra intuición acerca del concepto de dimensión.

Ahora justifiquemos la primera parte del título.

Ejemplo:  $S^1$  y  $\mathbb{R}$  no son homeomorfos, porque uno es compacto y el otro no. De la misma forma,  $S^n$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  (recuérdese que  $S^n$  es la frontera de la bola unidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

Cuando ninguno de los espacios que queremos comparar es compacto el problema de ver si son homeomorfos puede llegar a ser muy difícil. Por ejemplo, seguramente no existe ninguna demostración sencilla (sin usar las técnicas del siguiente capítulo) de que los siguientes espacios, donde  $D$  es el disco unidad abierto en  $\mathbb{R}^2$ , no son homeomorfos:

$$X = D \cup \{(1, 0)\}$$

$$Y = D \cup \{(1, 0)\} \cup \{(-1, 0)\}$$



Cuando uno de los conjuntos es, en algún sentido, “unidimensional”, la técnica de eliminar algunos puntos es muy útil. El siguiente ejemplo es prototípico.

Ejemplo: Consideremos en  $\mathbb{R}$  los espacios  $X = [0, 1]$ ,  $Y = (0, 1)$ , entonces  $X$  e  $Y$  no son homeomorfos (nótese que ninguno de los dos es compacto y que ambos son conexos). Si existiera un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , restringiendo al abierto  $\mathcal{U} = X - \{0\}$  se tendría que  $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow Y - \{f(0)\}$  también sería un homeomorfismo (¿por qué?). Pero esto es imposible porque, sea cual sea  $f(0)$ ,  $\mathcal{U}$  es conexo e  $Y - \{f(0)\}$  no lo es.

Ejemplo:  $\mathbb{R}$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ . Si existiera  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfismo, entonces  $\mathbb{R} - \{\vec{0}\}$  y  $\mathbb{R}^n - \{f(\vec{0})\}$  serían homeomorfos, pero esto es una contradicción porque  $\mathbb{R} - \{\vec{0}\}$  no es conexo y  $\mathbb{R}^n - \{f(\vec{0})\}$  sí lo es. Para justificar rigurosamente esta última afirmación, podemos suponer, por simetría,  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  y decir que  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  es conexo por caminos porque  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  se pueden unir con una línea recta en  $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$  si  $\vec{x}_1 \neq \lambda \vec{x}_2$ , y por una quebrada en otro caso.

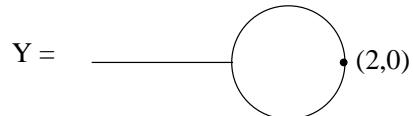
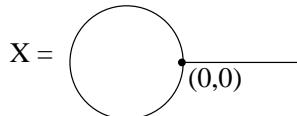
Ejemplo:  $S^1$  no es homeomorfo a  $S^n$ ,  $n > 1$ . Si suprimimos un punto el resultado es conexo en ambos casos. Necesitamos quitar al menos dos puntos a la circunferencia unidad,  $S^1$ , para desconectarla. Sean, por tanto,  $p, q \in S^1$ ,  $p \neq q$ , entonces  $S^1 - \{p\} - \{q\}$  tiene dos componentes conexas y sin embargo, cualquiera que sea  $f : S^1 \rightarrow S^n$ ,  $S^n - \{f(p)\} - \{f(q)\}$  sólo tiene una (es conexo). Una demostración rápida de este hecho se reduce a aplicar la proyección estereográfica con  $f(p)$  desempeñando el papel de “polo norte” y deducir que  $S^n$  menos dos puntos es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  menos un punto.

La simetría de los dos ejemplos anteriores no debiera inducir a confusión: no podemos especificar a nuestro antojo la imagen de un punto por el posible homeomorfismo.

Ejemplo: Los siguientes espacios

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

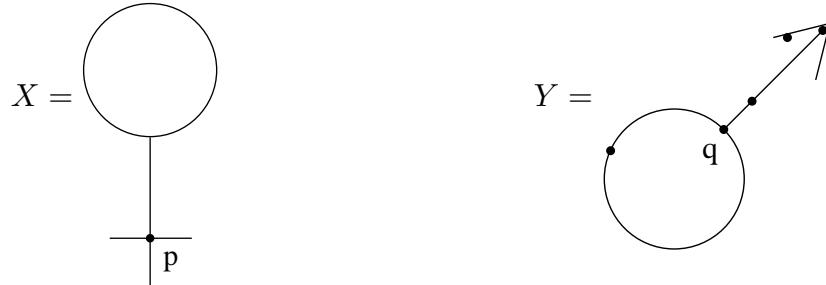
$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$$



son claramente homeomorfos mediante un giro de  $180^\circ$  o una simetría, pero no puede existir ningún homeomorfismo con  $f((0, 0)) = (2, 0)$  porque  $X - \{(0, 0)\}$  tiene dos componentes conexas mientras que  $Y - \{(2, 0)\}$  es conexo.

Dicen que para los ángeles y para algunas aves es una tarea difícil distinguir los sexos, pero con todos los trucos que sabemos ya, es cortar y contar.

Ejemplo: Los siguientes espacios (con la topología heredada de  $\mathbb{R}^2$  y sin considerar las “verrugas”) no son homeomorfos:



Si existiera un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , consideremos  $X - \{p\}$  e  $Y - \{f(p)\}$  con  $p$  el centro de la cruz. El conjunto  $X - \{p\}$  tiene cuatro componentes conexas y sin embargo

Si  $f(p) \in$  circunferencia- $\{q\}$   $\Rightarrow Y - \{f(p)\}$  es conexo

Si  $f(p) = q$   $\Rightarrow Y - \{f(p)\}$  tiene dos comp. conexas

Si  $f(p) \in$  cuerpo de la flecha  $\Rightarrow Y - \{f(p)\}$  tiene dos comp. conexas

Si  $f(p) = r$   $\Rightarrow Y - \{f(p)\}$  tiene tres comp. conexas

Si  $f(p) \in$  punta de flecha- $\{r\}$   $\Rightarrow Y - \{f(p)\}$  tiene dos comp. conexas

con lo cual no hay homeomorfismo posible.

Como último ejemplo veamos uno en el que la topología no es la usual.

Ejemplo:  $X = (0, 1) \times [0, 1]$  con la topología del orden lexicográfico no es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Quitar puntos no nos lleva a ningún resultado porque el número de componentes conexas obtenidas es el mismo, por ello recurrimos a una propiedad más fina:  $X$  no es conexo por caminos (vimos un ejemplo muy parecido) y  $\mathbb{R}$  sí lo es.

Para terminar y sólo como ilustración, citaremos un profundo y difícil resultado debido a L.E.J. Brouwer, llamado *Teorema de invariancia del dominio* que afirma: Si  $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^n$  son homeomorfos (con la topología inducida por la usual), entonces  $X_1$  es un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $X_2$  también lo es.

Notación: Muchas veces se llama “dominio” a un abierto conexo, de ahí el nombre del teorema.

Como aplicación,  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  no pueden ser homeomorfos, porque si no  $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$  y  $\mathbb{R}^4$  también lo serían, pero  $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$  no es un abierto de  $\mathbb{R}^4$  (¿por qué?) y  $\mathbb{R}^4$  sí lo es. De la misma forma se deduce que  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  no son homeomorfos si  $n \neq m$ . Nosotros

en esta sección hemos probado que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 1$ , no son homeomorfos y el próximo capítulo veremos que tampoco lo son  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 2$ , pero parece que el resto de los casos requiere artillería pesada (= invariancia del dominio) que se escapa a este pacífico curso. Esto no es más de la muestra de lo elusivo que es el concepto de dimensión en Matemáticas. Quien tenga curiosidad puede leer el capítulo 16 del libro de I. Stewart “*The problems of Mathematics*” Oxford University Press 1987. Después, o antes, es aconsejable leer también el resto de los capítulos del libro porque es magnífico.