Soluciones de Integrales Indefinidas y Definidas

Solución Ejercicio 1

Observamos que
$$f(t-1) = e^{2(t-1)} - 1 = e^{2t-2} - 1.$$
Por tanto,
$$F(x) = \int_1^{x^2} \left(e^{2t-2} - 1\right) dt.$$
Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo junto a la regla de la cadena obtenemos
$$F'(x) = \left(e^{2x^2-2} - 1\right) \cdot 2x.$$
Para estudiar dónde se anula la derivada resolvemos $F'(x) = 0$:
$$\left(e^{2x^2-2} - 1\right) \cdot 2x = 0.$$
Luego:
$$2x = 0 \quad \text{o} \quad e^{2x^2-2} - 1 = 0.$$
El primer caso no da soluciones en $[1, \infty)$, y en el segundo tenemos:
$$e^{2x^2-2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$
$$\boxed{F'(x) = 0 \text{ únicamente en } x = 1.}$$

Solución Ejercicio 2

Igualamos ambas curvas para hallar los extremos de la región:
$$\sqrt{\frac{x}{2}} = 2x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{2} = 4x^4 \quad \Longrightarrow \quad 8x^4 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(8x^3 - 1) = 0.$$
Como $x \geq 0$, se obtiene
$$x = 0 \quad x = \frac{1}{2}.$$

Sea ahora la recta $y = ax$. Se exige que el área superior A_1 sea el doble del área inferior A_2:

$$A_1 = 2A_2.$$

Dividimos las áreas en función de x según la posición relativa de las curvas:

$$A_1 = \int_0^b \left(ax - 2x^2\right)\,dx \;+\; \int_b^{1/2} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - 2x^2\right)\,dx,$$

$$A_2 = \int_0^b \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - ax\right)\,dx.$$

Calculamos:

$$A_1 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{2}} - \frac{2x^3}{3}\right]_b^{1/2} + \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^b,$$

$$A_2 = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{2}} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^b.$$

Imponiendo $A_1 = 2A_2$ se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{12} - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{2}} + \frac{ab^2}{2} = \frac{4b\sqrt{b}}{3\sqrt{2}} - ab^2.$$

De aquí resulta

$$\frac{3ab^2}{2} = \frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{12}. \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{4\sqrt{b}}{3b\sqrt{2}} - \frac{1}{18b^2}.$$

Aplicamos que $y(b) = f(b)$:

$$\frac{4\sqrt{b}}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{18b} = \sqrt{\frac{b}{2}}. \qquad \Longrightarrow \qquad b = \sqrt[3]{\frac{1}{18}}$$

Finalmente:

$$a = \frac{4\sqrt{b}}{3b\sqrt{2}} - \frac{1}{18b^2} \approx 1{,}1447.$$

$$\boxed{a \approx 1{,}1447}$$

Solución Ejercicio 3

Consideramos la diferencia

$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{3x^2 + 6x + 10}\right)\,dx.$$

Sea
$$I = \int \frac{3x}{3x^2+6x+10}\,dx.$$
Escribimos
$$3x = \frac{1}{2}(6x+6) - \frac{1}{2}\cdot 6.$$
Así,
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{6x+6}{3x^2+6x+10}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{6}{3x^2+6x+10}\,dx.$$
Observamos que
$$3x^2+6x+10 = 3(x+1)^2+7.$$
Luego,
$$I = \frac{1}{2}\ln|3x^2+6x+10| - 3\int \frac{1}{7+3(x+1)^2}\,dx.$$
$$I = \frac{1}{2}\ln|3x^2+6x+10| - \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 7}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{7}}\right).$$
$$A = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|3x^2+6x+10| + \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 7}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{7}}\right)\right]_1^4.$$
Finalmente:
$$A = \ln 4 - \frac{1}{2}\ln 82 + \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 7}\arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) + \ln 1 - \frac{1}{2}\ln 19 - \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 7}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{7}}\right),$$
$$\boxed{A \approx 0{,}888}$$

Solución Ejercicio 4

Consideramos
$$I = \int \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{2x^2+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$$
Dividimos numerador y denominador entre $2x^2$:
$$I = \int \frac{\dfrac{x\cos x}{2x^2} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2x^2}}\,dx = \int \frac{\dfrac{\cos x}{2x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2}}{1+\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\,x}\right)^2}\,dx.$$
Observamos que
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\,x}\right) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\,x^2} = \sqrt{2}\left(\frac{\cos x}{2x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2x^2}\right).$$

Por tanto,

$$\frac{\cos x}{2x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\, x}\right),$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\, x}\right)'}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\, x}\right)^2}\, dx,$$

que es directamente una arctangente:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\, x}\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{2x^2 + \operatorname{sen}^2(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}\, x}\right) + C.}$$

Solución Ejercicio 5

El área pedida viene dada por

$$A = \int_{-1}^{1} x^3 \arctan(x)\, dx.$$

Para ello calculamos primero

$$I = \int x^3 \arctan(x)\, dx.$$

Integramos por partes, tomando

$$u = \arctan(x), \qquad dv = x^3\, dx,$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}\, dx, \qquad v = \frac{x^4}{4}.$$

Entonces

$$I = \frac{x^4}{4}\arctan(x) - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx.$$

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2},$$

$$I = \frac{x^4}{4}\arctan(x) - \frac{1}{4}\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx.$$

Así obtenemos

$$I = \frac{x^4}{4}\arctan(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)\right) + C,$$

$$I = \frac{x^4}{4}\arctan(x) - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\arctan(x) + C.$$

Luego el área es

$$A = \left[\frac{x^4}{4}\arctan(x) - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\arctan(x)\right]_{-1}^{1}.$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

Solución Ejercicio 6

Aplicamos la formula del volumen de revolución:

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x-3)^2(x+2)}\,dx.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Denominador común:

$$\frac{A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2}{(x-3)^2(x+2)}$$

$$A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2 = 1.$$

$$A = -\frac{1}{25} \quad B = \frac{1}{5} \quad C = \frac{1}{25}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{(x-3)^2(x+2)} = -\frac{1}{25}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\frac{1}{x+2}.$$

Integramos:

$$\int -\frac{1}{25}\frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{25}\ln|x-3|,$$

$$\int \frac{1}{5}\frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{5(x-3)},$$

$$\int \frac{1}{25}\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{25}\ln|x+2|.$$

Por lo que el volumen es:

$$V = \pi\left[\frac{1}{25}\ln|x+2| - \frac{1}{5(x-3)} - \frac{1}{25}\ln|x-3|\right]_0^2.$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{25} \ln 6 + \frac{2}{15} \right).$$

$$\boxed{V \approx 0{,}644}$$

Solución Ejercicio 7

Sea

$$I = \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x} \, dx = \int_e^{e^2} \ln(\ln(x)) \, \frac{1}{x} \, dx.$$

Integramos por partes:

$$u = \ln(\ln(x)), \qquad dv = \frac{1}{x} \, dx,$$

$$du = \frac{1}{x \ln(x)} \, dx, \qquad v = \ln(x).$$

Así,

$$I = \ln(\ln(x)) \, \ln(x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln(x) \, \frac{1}{x \ln(x)} \, dx = \ln(\ln(x)) \, \ln(x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \, dx.$$

$$I = \ln(x)\big(\ln(\ln(x)) - 1\big)\Big|_e^{e^2}.$$

Evaluamos en los extremos:

$$I = \ln(e^2)\big(\ln(\ln(e^2)) - 1\big) - \ln(e)\big(\ln(\ln(e)) - 1\big) = 2(\ln 2 - 1) - 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x} \, dx = 2\ln(2) - 1}.$$

Solución Ejercicio 8

Derivamos las funciones paramétricas:

$$x'(t) = t^2, \qquad y'(t) = t.$$

Por tanto, la longitud buscada es

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 + t^2} \, dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2 + 1} \, dt.$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 2t\sqrt{t^2 + 1} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(t^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \left((1^2 + 1)^{3/2} - (0^2 + 1)^{3/2} \right)$$

$$\boxed{L = \frac{\sqrt{8} - 1}{3} \approx 0{,}609}$$

Solución Ejercicio 9

Consideramos

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2}\,dx.$$

Hacemos el cambio

$$t = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad dt = -\,\mathrm{sen}(x)\,dx,$$

Además, cuando $x = \pi/4$, $t = \cos(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y cuando $x = \pi/2$, $t = \cos(\pi/2) = 0$. Entonces

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2}\,dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{-2}{t^2 - 3t + 2}\,dt = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{2}{t^2 - 3t + 2}\,dt.$$

Factorizamos el denominador:

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2),$$

y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}.$$

De

$$2 = A(t-2) + B(t-1)$$

tomando $t = 1$ se obtiene $-B = 2 \Rightarrow B = -2$, y tomando $t = 2$ se obtiene $A = 2$. Así,

$$\frac{2}{(t-1)(t-2)} = \frac{2}{t-1} - \frac{2}{t-2},$$

Por tanto:

$$I = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2}{t-2} \right) dt = \left[2\ln|t-1| - 2\ln|t-2|\right]_0^{\sqrt{2}/2}.$$

$$I = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2}\right|.$$

Una forma equivalente y algo más simple es

$$\boxed{I = 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln\left|\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 4}\right|}$$

$$\boxed{I \approx 1{,}58}$$

Solución Ejercicio 10

Aplicamos la fórmula del volumen de revolución:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} \big(f(x)\big)^2 \, dx = \pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x) \, dx.$$

Sabemos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(x) \, dx = \pi,$$

pues el valor medio de $\operatorname{sen}^2(x)$ en un período es $\frac{1}{2}$. Por tanto:

$$\boxed{V = \pi^2}.$$

Solución Ejercicio 11

La masa total es

$$M = \int_0^4 \lambda(x) \, dx = \int_0^4 \left(2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx.$$

Calculamos:

$$\int 2 \, dx = 2x, \qquad \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{4}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx = 2\sqrt{x+1}.$$

Por tanto:

$$M = \left[2x + \frac{x^2}{4} + 2\sqrt{x+1}\right]_0^4 = \big(8 + 4 + 2\sqrt{5}\big) - \big(0 + 0 + 2\big) = 10 + 2\sqrt{5}.$$

$$\boxed{M = 10 + 2\sqrt{5} \text{ kg}}.$$

Solución Ejercicio 12

La función F es derivable y

$$F'(x) = e^{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego F es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, por lo que *a lo sumo* puede tener una única raíz.

Además,

$$F(0) = -1 + \int_0^0 e^{t^2} \, dt = -1 < 0.$$

Para $x = 1$:

$$\int_0^1 e^{t^2} \, dt > \int_0^1 1 \, dt = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(1) = -1 + \int_0^1 e^{t^2} \, dt > 0.$$

Como F es continua, por el Teorema del Valor Intermedio existe $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$.

Al ser F estrictamente creciente, esa raíz es única.

$$\boxed{\text{La ecuación } F(x) = 0 \text{ tiene una única solución } c \in (0, 1).}$$