

# Definiciones

Juan Rodríguez

## Conexidad

### Espacio conexo

Un espacio topológico  $X$  se dice **conexo** si no existen dos abiertos disjuntos y no vacíos  $U, V \subset X$  tales que

$$X = U \cup V.$$

En caso de existir tal descomposición, se dice que  $X$  admite una **separación**.

Intuitivamente, un espacio es conexo si está hecho de una sola pieza, es decir, no puede dividirse en dos partes abiertas separadas.

### Espacio conexo por caminos

Un espacio topológico  $X$  se dice **conexo por caminos** si para cualquier par de puntos  $x, y \in X$  existe un camino continuo

$$f : [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$f(0) = x, \quad f(1) = y.$$

### Espacio localmente conexo

Un espacio topológico  $X$  se dice **localmente conexo** si para todo punto  $x \in X$  y todo entorno abierto  $U$  de  $x$ , existe un subentorno abierto  $V$  tal que

$$x \in V \subset U$$

y  $V$  es conexo.

### Espacio localmente conexo por caminos

Un espacio topológico  $X$  se dice **localmente conexo por caminos** si para todo punto  $x \in X$  y todo entorno abierto  $U$  de  $x$ , existe un subentorno abierto  $V$  tal que

$$x \in V \subset U$$

y  $V$  es conexo por caminos.

## Espacio simplemente conexo

Un espacio topológico  $X$  se dice **simplemente conexo** si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial, es decir,

$$\pi_1(X) = \{e\}.$$

## Componente conexa

Sea  $X$  un espacio topológico. Una **componente conexa** de  $X$  es un subconjunto  $C \subset X$  que es conexo tal que,

$$\forall Z : C \subset Z \subset X, \quad Z \text{ no es conexo}$$

Dicho de otro modo, una componente conexa es la *máxima parte conexa* de  $X$  que contiene a un punto dado.

## Espacio compacto

Un espacio topológico  $X$  se dice **compacto** si todo recubrimiento abierto de  $X$  admite un subrecubrimiento finito.

## Recubrimiento abierto

Un **recubrimiento abierto** de  $X$  es una familia de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  tal que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Un **subrecubrimiento finito** es una subfamilia finita

$$U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$$

tal que

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

## Característica de Euler

Sea  $G$  un grafo contenido en una superficie. La **característica de Euler** se define como

$$\chi = V - A + F,$$

donde:

- $V$  es el número de vértices,
- $A$  es el número de aristas,
- $F$  es el número de zonas cerradas (caras).

## Triangulación

Una **triangulación** de una superficie es una descomposición de la misma en triángulos topológicos (posiblemente con lados curvos), de manera que dos triángulos cualesquiera se intersecan en una arista o vértice.

## Grupo fundamental

### Lazo

Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $x_0 \in X$ . Un **lazo con base en**  $x_0$  es una aplicación continua

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

### Suma de lazos

Sean  $f, g : [0, 1] \rightarrow X$  dos lazos con el mismo punto base  $x_0$ . La **suma de lazos**  $f + g$  se define como el lazo

$$(f + g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Esta definición puede generalizarse reparametrizando los lazos según su longitud.

### Lazo neutro

El **lazo neutro** es el lazo constante

$$e : [0, 1] \rightarrow X, \quad e(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Este lazo actúa como elemento identidad para la suma de lazos.

### Lazo inverso

Dado un lazo  $f : [0, 1] \rightarrow X$  con base en  $x_0$ , su **lazo inverso** se define como

$$f^{-1}(t) = f(1 - t), \quad t \in [0, 1].$$

### Homotopía de lazos

Sean  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  dos lazos con base en  $x_0$ . Se dice que son **homotópicos** si existe una aplicación continua

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

tal que

$$h(t, 0) = \alpha(t), \quad h(t, 1) = \beta(t),$$

y además

$$h(0, s) = h(1, s) = x_0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

## Lazos equivalentes

Dos lazos se dicen **equivalentes** si son homotópicos fijando el punto base.

Esta relación define una relación de equivalencia en el conjunto de lazos con base en  $x_0$ .

## Grupo fundamental

El **grupo fundamental** de  $X$  con base en  $x_0$ , también llamado **grupo de Poincaré**, es el conjunto de clases de equivalencia de lazos con base en  $x_0$ , con la operación inducida por la suma de lazos:

$$\pi_1(X, x_0).$$

## Grupo cociente

Sea  $A$  un conjunto y sea  $\sim$  una relación de equivalencia en  $A$ . El **conjunto cociente** es el conjunto de clases de equivalencia

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Si además  $A$  está dotado de una operación binaria y la relación de equivalencia  $\sim$  es compatible con dicha operación, entonces el conjunto cociente hereda de forma natural una estructura de grupo, llamada **grupo cociente**.

## Grupo fundamental como grupo cociente

Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Sea  $\Omega(X, x_0)$  el conjunto de todos los lazos con base en  $x_0$ .

Consideramos en  $\Omega(X, x_0)$  la relación de equivalencia dada por la homotopía fijando el punto base.

El **grupo fundamental** de  $X$  con base en  $x_0$  se define como el grupo del conjunto cociente

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \sim,$$

es decir, el conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en  $x_0$  módulo homotopía, con la operación inducida por la suma de lazos.