Teoremas

Juan Rodríguez

La conexidad y la conexidad por caminos son invariantes topológicas

Conexidad

Sea $f : X \to Y$ una función continua y supongamos que X es conexo.

Supongamos por contradicción que $f(X)$ no es conexo. Entonces existen abiertos disjuntos y no vacíos $U, V \subset Y$ tales que

$$f(X) = U \cup V.$$

Como f es continua, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos y no vacíos en X, y

$$X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

lo que contradice que X sea conexo.

Por tanto, la imagen continua de un espacio conexo es conexa, y la conexidad es una invariante topológica.

Conexidad por caminos

Sea $f : X \to Y$ continua y supongamos que X es conexo por caminos.

Dados dos puntos $y_1, y_2 \in f(X)$, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que

$$f(x_1) = y_1, \qquad f(x_2) = y_2.$$

Como X es conexo por caminos, existe un camino $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que

$$\gamma(0) = x_1, \qquad \gamma(1) = x_2.$$

Entonces $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$ es un camino continuo que une y_1 con y_2.

Por tanto, $f(X)$ es conexo por caminos, y la conexidad por caminos es una invariante topológica.

La compacidad es una invariante topológica

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo y supongamos que X es compacto.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de Y. Entonces $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X, ya que f es continua.

Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_n}).$$

Aplicando f, se obtiene

$$Y = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

que es un subrecubrimiento finito de Y.

Por tanto, Y es compacto. Como el razonamiento es simétrico, la compacidad es una invariante topológica.

Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto

Sea X un espacio topológico compacto y sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de F.

Como F es cerrado, su complementario $X \setminus F$ es abierto en X. Entonces

$$\{U_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus F\}$$

es un recubrimiento abierto de X.

Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup (X \setminus F).$$

Eliminando $X \setminus F$, se obtiene un subrecubrimiento finito

$$F = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

de F.

Por tanto, F es compacto.

Todo espacio conexo por caminos es conexo

Sea X un espacio conexo por caminos.

Supongamos por contradicción que X no es conexo. Entonces existen abiertos disjuntos y no vacíos $U, V \subset X$ tales que

$$X = U \cup V.$$

Sean $x \in U$ e $y \in V$. Como X es conexo por caminos, existe un camino continuo

$$f : [0,1] \to X$$

tal que

$$f(0) = x, \qquad f(1) = y.$$

Como f es continua, los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos y no vacíos de $[0,1]$, y verifican

$$[0,1] = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

Esto define una separación de $[0,1]$, lo cual es imposible ya que $[0,1]$ es conexo.

Se obtiene una contradicción, luego X es conexo.

La unión de conjuntos conexos con intersección no vacía es conexa

Sea $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, donde cada A_i es conexo y

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing.$$

Supongamos por contradicción que X no es conexo. Entonces existen abiertos disjuntos y no vacíos $P, Q \subset X$ tales que

$$X = P \cup Q.$$

Sea $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $x \in P$.
Si para algún i se tuviera $A_i \cap Q \neq \varnothing$, entonces

$$A_i = (A_i \cap P) \cup (A_i \cap Q)$$

sería una separación de A_i, lo cual es imposible porque A_i es conexo.
Por tanto, $A_i \subset P$ para todo i, y se sigue que

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \subset P,$$

lo cual contradice que Q sea no vacío.
Luego X es conexo.

El intervalo $[0, 1]$ es compacto

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $[0, 1]$.
Como $0 \in [0, 1]$, existe un abierto U_{i_0} tal que $0 \in U_{i_0}$. Al ser abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$[0, \varepsilon) \subset U_{i_0}.$$

Definimos

$$S = \{x \in [0, 1] \mid [0, x] \text{ admite un subrecubrimiento finito}\}.$$

El conjunto S es no vacío y está acotado superiormente por 1. Sea

$$s = \sup S.$$

Supongamos por contradicción que $s < 1$. Como $\{U_i\}$ es un recubrimiento, existe un abierto U_j tal que $s \in U_j$. Al ser U_j abierto, existe $\delta > 0$ tal que

$$(s - \delta, s + \delta) \subset U_j.$$

Por la definición de supremo, existe $x \in S$ tal que $s - \delta < x \leq s$. Entonces $[0, x]$ tiene un subrecubrimiento finito, y añadiendo U_j se obtiene un subrecubrimiento finito de $[0, s + \delta)$, lo cual contradice que s sea supremo.
Por tanto, $s = 1$ y $[0, 1]$ admite un subrecubrimiento finito. Luego $[0, 1]$ es compacto.

En la topología cofinita todo conjunto es compacto

Sea X un conjunto con la topología cofinita y sea $A \subset X$.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de A. Entonces los complementarios U_i^c son conjuntos finitos y se cumple

$$A^c = \bigcap_{i\in I} U_i^c.$$

La intersección de una familia de conjuntos finitos coincide con la intersección de una subfamilia finita, por lo que existen índices $i_1, \dots, i_n$ tales que

$$A^c = U_{i_1}^c \cap \cdots \cap U_{i_n}^c.$$

Tomando complementarios, se obtiene

$$A = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n},$$

que es un subrecubrimiento finito de A.

Por tanto, todo subconjunto de X es compacto en la topología cofinita.

En los espacios Hausdorff, los compactos son separables de cualquier punto exterior

Sea X un espacio Hausdorff, $K \subset X$ un conjunto compacto y sea $x \in X \setminus K$.

Como X es Hausdorff, para cada punto $y \in K$ existen abiertos disjuntos

$$U_y,\ V_y \subset X$$

tales que

$$x \in U_y, \qquad y \in V_y, \qquad U_y \cap V_y = \varnothing.$$

La familia $\{V_y\}_{y\in K}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$K \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Definimos

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}, \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

Entonces U y V son abiertos, $x \in U$, $K \subset V$, y además

$$U \cap V = \varnothing.$$

Por tanto, el compacto K puede separarse de cualquier punto exterior mediante abiertos disjuntos.

En espacios Hausdorff, los compactos son cerrados

Sea X un espacio Hausdorff y sea $K \subset X$ un conjunto compacto.

Tomemos un punto $x \in X \setminus K$. Por el teorema de separación en espacios Hausdorff, existen abiertos disjuntos

$$U, V \subset X$$

tales que

$$x \in U, \qquad K \subset V, \qquad U \cap V = \varnothing.$$

En particular,

$$U \subset X \setminus K,$$

lo que implica que $X \setminus K$ es abierto.

Por tanto, K es cerrado.

Teorema de Heine–Borel

En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual, un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

$(\Rightarrow)$ Compacto implica cerrado y acotado

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

Como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, todo compacto es cerrado, luego C es cerrado.

Supongamos que C no es acotado. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un punto de C fuera de la bola

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < n\}.$$

La familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}^n$, y por tanto de C, que no admite subrecubrimiento finito, contradiciendo la compacidad de C.

Luego C es acotado.

$(\Leftarrow)$ Cerrado y acotado implica compacto

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Entonces existen $a_i < b_i$ tales que

$$C \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Cada intervalo $[a_i, b_i]$ es compacto en $\mathbb{R}$, y el producto finito de compactos es compacto, luego

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

es compacto en $\mathbb{R}^n$.

Como C es un subconjunto cerrado de un compacto, se concluye que C es compacto.

El producto finito de espacios compactos es compacto

Sean X e Y espacios topológicos compactos. Entonces el espacio producto

$$X \times Y$$

es compacto.

Idea de la demostración

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$.

Fijado $x \in X$, el conjunto $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y, y por tanto es compacto. Luego admite un subrecubrimiento finito

$$\{x\} \times Y \subset U_{i_1^x} \cup \cdots \cup U_{i_{n_x}^x}.$$

Para cada uno de estos abiertos existe un entorno abierto $V_x \subset X$ de x tal que

$$V_x \times Y \subset U_{i_1^x} \cup \cdots \cup U_{i_{n_x}^x}.$$

La familia $\{V_x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}.$$

Entonces

$$X \times Y \subset \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_{x_k}} U_{i_j^{x_k}},$$

que es un subrecubrimiento finito de $X \times Y$.

Por tanto, $X \times Y$ es compacto.

Teorema del valor extremo

Sea X un espacio topológico compacto y sea

$$f : X \to \mathbb{R}$$

una función continua. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo, es decir,

$$\exists\, a, b \in X \text{ tales que } \forall x \in X, \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Demostración

Sea $f : X \to Y$ continua, con X compacto y Y un espacio ordenado.

Como f es continua y X es compacto, la imagen $f(X)$ es compacta en Y.

Dado que Y es un espacio totalmente ordenado con la topología del orden, todo subconjunto compacto de Y admite máximo y mínimo.

Por tanto, existen $m, M \in f(X)$ tales que

$$m \leq y \leq M \quad \forall y \in f(X).$$

Como $m, M \in f(X)$, existen $a, b \in X$ tales que

$$f(a) = m, \qquad f(b) = M.$$

Luego f alcanza su mínimo y su máximo en X.

En espacios conexos por caminos, el grupo fundamental no depende del punto base

Sea X un espacio conexo por caminos y sean $x_0, x_1 \in X$.

Denotemos por $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ los grupos de lazos con base en x_0 y x_1, respectivamente.

Como X es conexo por caminos, existe un camino continuo

$$f : [0,1] \to X$$

tal que

$$f(0) = x_0, \qquad f(1) = x_1.$$

Sea $\alpha : [0,1] \to X$ un lazo con base en x_1, es decir,

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_1.$$

Definimos un lazo α' con base en x_0 como sigue:

$$\alpha' : [0,1] \to X, \qquad \alpha'(t) = \begin{cases} f(3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ \alpha(3t-1), & \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3}, \\ f(3-3t), & \frac{2}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\alpha'(0) = x_0, \qquad \alpha'(1) = x_0,$$

y α' es continua, luego es un lazo con base en x_0.

Este proceso define una correspondencia entre los lazos con base en x_1 y los lazos con base en x_0.

Por tanto,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

En consecuencia, en espacios conexos por caminos, el grupo fundamental no depende del punto base.

Todos los lazos en $\mathbb{R}^2$ son equivalentes

Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dos lazos con la misma base x_0, es decir,

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0, \qquad \beta(0) = \beta(1) = x_0.$$

Definimos la homotopía

$$h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad h(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t).$$

Entonces:

$$h(t,0) = \alpha(t), \qquad h(t,1) = \beta(t),$$

y además fija los extremos:

$$h(0,s) = x_0, \qquad h(1,s) = x_0 \quad \forall s \in [0,1].$$

Por tanto, $\alpha \sim \beta$. En consecuencia, todos los lazos en $\mathbb{R}^2$ son equivalentes y

$$\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \{e\}.$$

El grupo fundamental de la esfera es trivial

Se tiene que
$$\pi_1(S^2) = \{e\}.$$

Demostración

Consideramos los abiertos
$$U_1 = S^2 \setminus \{\text{polo norte}\}, \qquad U_2 = S^2 \setminus \{\text{polo sur}\}.$$

Ambos conjuntos son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$, por lo que son simplemente conexos:
$$\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \{e\}.$$

Además,
$$U_1 \cup U_2 = S^2,$$
y la intersección $U_1 \cap U_2$ es conexa por caminos.

Por el corolario del Teorema de Seifert–van Kampen, el grupo fundamental de S^2 es el producto libre de los grupos fundamentales de U_1 y U_2, factorizado por las identificaciones inducidas por la intersección.

Como el producto libre de dos grupos triviales es trivial, se concluye que
$$\pi_1(S^2) = \{e\}.$$