TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	07/07/2023
CURSO	3º	**HORA**	11:00
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 1

Resuelve la ecuación diferencial $ydx - (2x + y^3e^y)dy = 0$ utilizando el factor integrante que consideres adecuado.

Solución:

$$\underbrace{(y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(-2x - y^3e^y\right)}_{N(x,y)} dy = 0$$

Comprobamos que no es diferencial exacta: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \neq -2 = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Vamos a probar con $\mu = \mu(y)$:

$$\mu = \mu(y) \implies \underbrace{\mu \cdot M(x,y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\mu \cdot N(x,y)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \implies \mu'(y) \cdot M(x,y) + \mu \cdot \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + \mu \cdot \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \implies$$

$$\implies \mu' \cdot y + \mu \cdot 1 = \mu \cdot (-2) \implies \frac{d\mu}{dy} y = -3\mu \implies \frac{d\mu}{\mu} = -3\frac{dy}{y} \implies$$

$$\implies \text{Ln}|\mu| = -3\text{Ln}|y| + C \overset{C=0}{\implies} \mu(y) = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

Multiplicamos la ecuación diferencial inicial por $\mu = y^{-3}$ y comprobamos que ahora sí es diferencial exacta:

$$ydx - (2x + y^3e^y)dy = 0 \implies \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\left(-\frac{2x}{y^3} - e^y\right)}_{Q(x,y)} dy = 0 \implies \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-2}{y^3} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y) = \int \frac{1}{y^2}dx + C(y) = \frac{x}{y^2} + C(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \implies -\frac{2\cancel{x}}{\cancel{y^3}} + C'(y) = -\frac{2\cancel{x}}{\cancel{y^3}} - e^y \implies C'(y) = -e^y \implies C(y) = -e^y + C$$

Luego la solución es $\boxed{\dfrac{x}{y^2} - e^y + C = 0}$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	07/07/2023
CURSO	3º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 2

Calcula la solución general de la ecuación diferencial $xy' + 2y = 8x^2\sqrt{y}$.

Solución:

Se trata de una ecuación de Bernoulli:

$$xy' + 2y = 8x^2\sqrt{y} \implies y' + \underbrace{\boxed{\frac{2}{x}}}_{p(x)} y = \underbrace{\boxed{8x}}_{r(x)}\, y^{\overset{\alpha}{\boxed{1/2}}} = 0$$

Hacemos el cambio $u = y^{1-\alpha} = y^{1/2} \implies u' = \dfrac{1}{2y^{1/2}} \cdot y' = \dfrac{1}{2u}y'$

$$y' + \frac{2}{x}y = 8xy^{1/2} \implies 2uu' + \frac{2}{x}u^2 = 8xu \implies u' + \frac{1}{x}u = 4x$$

Se trata de una ecuación lineal completa de primer orden en la variable u.

a) SGEH: $\quad u' + \dfrac{1}{x}u = 0$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de variables separadas:

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \implies \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}u \implies \frac{du}{u} = -\frac{1}{x}dx \implies \mathrm{Ln}|u| = -\mathrm{Ln}|x| + C \implies u = \frac{K}{x}$$

b) SPEC: $\quad u' + \dfrac{1}{x}u = 4x$

Vamos a utilizar el método de variación de constantes:

$$u = \frac{K(x)}{x} \implies u' = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} \implies \frac{K'(x)}{x} - \cancel{\frac{K(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{K(x)}{x^2}} = 4x \implies$$

$$\implies \frac{K'(x)}{x} = 4x \implies K'(x) = 4x^2 \implies K(x) = \frac{4}{3}x^3 + K$$

Luego la solución es $u = \dfrac{K(x)}{x} \implies y^{1/2} = \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{K}{x} \implies \boxed{y = \left(\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{K}{x}\right)^2}$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	07/07/2023	
CURSO	3º	**HORA**	11:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 3

Proporciona la solución general de la ecuación diferencial $y''' - 12y'' + 48y' - 64y = -4 + 2e^{4x}$.

Solución:

a) SGEH: $y''' - 12y'' + 48y' - 64y = 0$

$$r^3 - 12r^2 + 48r - 64 = 0 \implies r = 4 \text{ (triple)}$$

$$y_{SGEH} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + C_3 x^2 e^{4x}$$

b) SPEC: $s(x) = -4 + 2e^{4x}$

$$-4 \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}\right] \rightarrow t = 0 \\ \left.\begin{array}{r} m = 0 \\ n = 0 \end{array}\right] \rightarrow k = 0 \end{array} \right] \rightarrow A$$

$$2e^{4x} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \alpha = 4 \\ \beta = 0 \end{array}\right] \rightarrow t = 3 \\ \left.\begin{array}{r} m = 0 \\ n = 0 \end{array}\right] \rightarrow k = 0 \end{array} \right] \rightarrow Bx^3 e^{4x}$$

Probamos $y = A + Bx^3 e^{4x}$:

$$y = A + Bx^3 e^{4x} \longrightarrow y' = B(4x^3 + 3x^2)e^{4x} \longrightarrow y'' = B(16x^3 + 24x^2 + 6x)e^{4x} \longrightarrow$$

$$y''' = B(64x^3 + 144x^2 + 72x + 6)e^{4x}$$

$$y''' - 12y'' + 48y' - 64y = -4 + 2e^{4x} \implies$$

$$\implies B(64x^3 + 144x^2 + 72x + 6)e^{4x} - 12B(16x^3 + 24x^2 + 6x)e^{4x}$$

$$+ 48B(4x^3 + 3x^2)e^{4x} - 64\left(A + Bx^3 e^{4x}\right) = -4 + 2e^{4x} \implies$$

$$\implies \left.\begin{array}{r} -64A = -4 \\ 6B = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow A = 1/16 \\ \rightarrow B = 1/3 \end{array} \Bigg\} \implies y_p = \frac{1}{16} + \frac{1}{3}x^3 e^{4x}$$

Por lo tanto la solución es $\boxed{y_{SGEC} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + C_3 x^2 e^{4x} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3}x^3 e^{4x}}$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	07/07/2023
CURSO	3º	HORA	11:00
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS
ALUMNO			

PROBLEMA 4

Halla una solución de la ecuación $x(1+x)y''-y'=0$ mediante series de potencias centradas en $x=0$ utilizando el método de Frobenius, indicando adicionalmente el intervalo de convergencia de la solución.

Solución:

$$x(1+x)y''-y'=0 \implies y'' \underbrace{\boxed{-\frac{1}{x(1+x)}}}_{b_1(x)} y'=0$$

Es evidente que $x=0$ es un punto singular de la ecuación diferencial, ya que $b_1(x)$ no es analítica en $x=0$. Por otra parte, $p(x)=x\cdot b_1(x)=\dfrac{-1}{1+x}$ es analítica en $x=0$, luego $x=0$ es un punto singular regular y podemos utilizar el método de Frobenius.

$$p_0=\lim_{x\to 0} p(x)=\lim_{x\to 0} x\cdot b_1(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x}=-1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0} q(x)=\lim_{x\to 0} x^2\cdot b_0(x)=0$$

$$r(r-1)+p_0\cdot r+q_0=0 \implies r^2-r-r=0 \implies r^2-2r=0 \implies \left.\begin{array}{l} r=0 \\ r=2 \end{array}\right\} \text{(CASO III)}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \longrightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1} \longrightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

$$x(1+x)y''-y'=0 \implies (x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1}=0 \implies$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1}=0 \implies$$

$$x^r\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n-1}\right)=0 \implies$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	07/07/2023	
CURSO	3º	**HORA**	11:00	
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS	
ALUMNO				

$$x^r\left(c_0\big(r(r-1)\big)x^{-1}-c_0rx^{-1}\right)+$$

$$+\,x^r\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}c_n(n+r)x^{n-1}\right)=0\implies$$

$$x^r\left(x^{-1}c_0(r^2-2r)\right)+$$

$$+\,x^r\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k(k+r)(k+r-1)+c_{k+1}(k+1+r)(k+\cancel{1}+r-\cancel{1})-c_{k+1}(k+1+r)\right)x^k\Big)=0\implies$$

$$\begin{cases} r^2-2r=0\to r\in\{0,2\} \\ \\ c_k(k+r)(k+r-1)+c_{k+1}(k+1+r)(k+r)-c_{k+1}(k+1+r)\longrightarrow \end{cases}$$

$$c_{k+1}=\frac{-(k+r)\,\cancel{(k+r-1)}}{(k+r+1)\,\cancel{(k+r-1)}}c_k=-\frac{(k+r)}{(k+r+1)}c_k\quad(k\geqslant 0)$$

$$\boxed{r=2}\quad c_{k+1}=-\frac{(k+2)}{(k+3)}c_k\quad(k\geqslant 0)$$

- $k=0\to c_1=-\dfrac{2}{3}c_0$
- $k=1\to c_2=-\dfrac{3}{4}c_1=\dfrac{1}{2}c_0$
- $k=2\to c_3=-\dfrac{4}{5}c_2=-\dfrac{2}{5}c_0$
- $k=3\to c_4=-\dfrac{5}{6}c_3=\dfrac{1}{3}c_0$

$\vdots$

Como buscamos una solución hacemos $c_0=1$, y con ello:

$$y_1(x)=x^2\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{3}x^4-\cdots\right)=x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{5}x^5+\cdots=2\Big(x-\mathrm{Ln}(1+x)\Big)$$

Puesto que los dos puntos singulares son $x=0$ y $x=-1$ y su distancia es 1, la serie que representa la solución es convergente al menos es el intervalo $0<x<1$.

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	FECHA	07/07/2023	
CURSO	3º	HORA	11:00	
GRUPO	A	DURACIÓN	3 HORAS	
ALUMNO				

PROBLEMA 5

Completa los siguientes apartados relativos al sistema de ecuaciones diferenciales que se muestra a continuación:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 2x & + & y & + & 2e^{2t} \\ y' & = & 2x & + & 3y & + & 3e^{t} \end{array}\right\}$$

a) Obtén la solución general del sistema utilizando transformadas de Laplace para el caso $x(0) = 1$, $y(0) = -3$. Para ello, obtén las transformadas de Laplace de cada ecuación, aisla $X(s)$ o $Y(s)$ en una de ellas y utiliza esa expresión en la otra ecuación, recordando realizar la transformación inversa al final para proporcionar la solución de $x(t)$ e $y(t)$.

b) Analiza la estabilidad del sistema homogéneo asociado, indicando claramente el tipo de punto crítico.

c) Representa gráficamente de forma aproximada y razonada el diagrama de fases asociado al sistema homogéneo.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 2x & + & y & + & 2e^{2t} \\ y' & = & 2x & + & 3y & + & 3e^{t} \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcr} sX(s)-x(0) & = & 2X(s) & + & Y(s) & + & \dfrac{2}{s-2} \\ sY(s)-y(0) & = & 2X(s) & + & 3Y(s) & + & \dfrac{3}{s-1} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} sX(s) - 1 = 2X(s) + Y(s) + \dfrac{2}{s-2} \longrightarrow Y(s) = (s-2)X(s) - \dfrac{s}{s-2} \\ sY(s) + 3 = 2X(s) + 3Y(s) + \dfrac{3}{s-1} \end{array}\right.$$

$$sY(s) + 3 = 2X(s) + 3Y(s) + \frac{3}{s-1} \implies$$

$$\implies s(s-2)X(s) - \frac{s^2}{s-2} + 3 - 2X(s) = 3(s-2)X(s) - \frac{3s}{s-2} + \frac{3}{s-1} \implies$$

$$\implies \left(s^2 - 5s + 4\right) X(s) = \frac{s^2 - 3s}{s-2} + \frac{3}{s-1} - 3 \implies$$

$$\implies X(s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 15s - 12}{(s-1)^2(s-2)(s-4)} = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)^2(s-2)}$$

TITULACIÓN	INGENIERÍA DEL SOFTWARE Y MAT. COMPUTACIONAL	**FECHA**	07/07/2023
CURSO	3º	**HORA**	11:00
GRUPO	A	**DURACIÓN**	3 HORAS
ALUMNO			

$$X(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2} \implies \boxed{x(t) = -te^t + e^{2t}}$$

$$Y(s) = (s-2)X(s) - \frac{s}{s-2} = -\frac{(s-2)}{(s-1)^2} + 1 - \frac{s}{s-2} = -\frac{(s-1-1)}{(s-1)^2} + 1 - \frac{(s-2+2)}{s-2} =$$

$$= -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-2} \implies \boxed{y(t) = -e^t + te^t - 2e^{2t}}$$

b) El sistema homogéneo asociado es $\left.\begin{array}{rcrcr} x' & = & 2x & + & y \\ y' & = & 2x & + & 3y \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & 2x+y \\ y' & = & 2x+3y \end{array}\right\} \implies (0,0) \text{ es el único punto crítico}$$

$$|A-\lambda I| = 0 \implies \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases} \implies (0,0) \text{ es un } \underline{\text{nodo inestable}}.$$

c) Los ejes vienen dados por los autovectores $(1,-1)$ y $(1,2)$ asociados a $\lambda = 1$ y $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$