

Nombre: _____

Apellidos: _____

CONSTRUYE UN EJEMPLO JUSTIFICADO (TACHA UNO. 1,5 puntos)

- Un conexo localmente que no es conexo
- Un conexo que no es localmente conexo
- Un conjunto conexo que no es conexo por caminos
- Un espacio acotado y cerrado que no es compacto
- Dos espacios con la misma característica de Euler que no son homeomorfos
- Dos espacios con el mismo grupo fundamental **no trivial** que no son homeomorfos

DEFINICIONES (0,6 puntos)

- Conjunto compacto
- Conjunto conexo
- Conjunto conexo por caminos

TEOREMAS (TACHA DOS. 2 puntos)

- (0,5) El grupo fundamental de la esfera es trivial
- (0,6) La recta Sorgenfrey no es conexa por caminos ni compacta
- (1) El intervalo $[0; 1]$ es compacto
- (1) En los espacios Hausdorff los compactos son separables de cualquier punto exterior

EJERCICIOS (TACHA DOS. 6 puntos)

1. (1,2 puntos) **¿Son conexos? ¿Son conexos por caminos?**

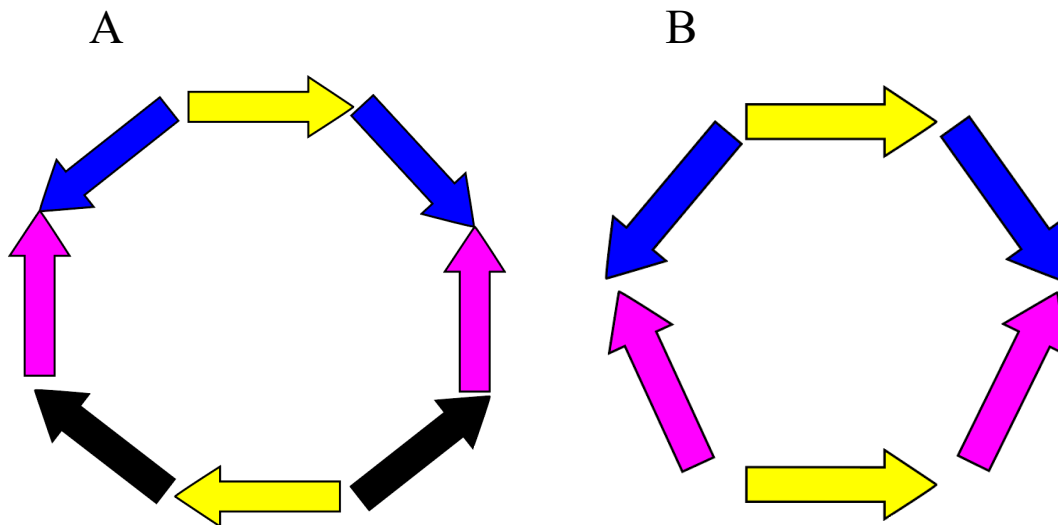
¡Demuéstralo!

- $[0; 2] \times \{0\}$ con la topología del orden en \mathbb{R}^2
- $\{0\} \times [0; 2]$ con la topología del orden en \mathbb{R}^2
- El conjunto $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ln x\}$
- El conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = x/n\}$ y el conjunto $A \cup (1, 0)$

2. (1,2 puntos) **¿Son compactos?**

- $A = [0; 2] \cup [3; 4]$
- $B = [0; 2) \cup (2; 4]$
- $C = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$
- \mathbb{R} con la topología cofinita

3. (0,6 puntos) La suma conexa de 3 botellas de Klein es homeomorfa a la suma de 2 toros y varios planos proyectivos. **¿Cuántos?**
4. (0,9 puntos) **Dibuja un disco poligonal** con los lados pegados de dos a dos con la característica de Euler igual a menos 2 y orientable.
¿Qué superficie es en términos de la suma conexa de toros y planos proyectivos?
5. (1,5 puntos) **¿Qué espacios son homeomorfos y cuáles no? Razona la respuesta**
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
 - $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16\} \setminus (4, 0, 0)$
 - $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 3\}$
 - $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
 - $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$
 - $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$
 - $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9\} \setminus \{(1, 1)\}$
6. (0,9 puntos) **¿Qué superficies representan estos diagramas?**



7. (1,2 puntos) **¿Cuál es el grupo fundamental de estos espacios?**
Justifícalo
- a) $\mathbb{T}^2 \times S^1$
 - b) \mathbb{R}^4
 - c) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 3, |y| \leq 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 9\}$
 - d) $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 9\}$