Espacios compactos

Topología - 10

Georgy Nuzhdin

2022-2023

¿Es verdad que

- Una función contractiva $X \to X$ siempre tiene un punto fijo?
- ¿Cuál es el punto fijo de $f(x) = \frac{x}{2}\ en\ (0;1)$?
- Este teorema funciona en $[0;1]$ (es el Teorema de Banach) y NO funciona en $(0;1)$, algo no estará bien con este espacio…

¿Es verdad que

- Una función continua en un intervalo acotado siempre está acotada?
- ¿También lo es $f(x) = \frac{1}{x}\ en\ (0;1)$?
- Este teorema funciona en $[0;1]$ (Teorema de Weierstrass) y NO funciona en $(0;1)$, otra vez tenemos problemas con este espacio…

Encuentra el error en la demostración

Toda función continua $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada.

<u>Dem.</u>: $\boxed{\text{falsa}}$ Dado $\epsilon > 0$, si $a \in (0,1)$ por la definición de continuidad existe un δ tal que

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (0,1) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Por pequeño que sea δ siempre podemos escoger $a_1, a_2, \dots, a_N \in (0,1)$ (por ejemplo igualmente espaciados) tales que

$$(a_1-\delta, a_1+\delta) \cup (a_2-\delta, a_2+\delta) \cup \ldots \cup (a_N-\delta, a_N+\delta) \supset (0,1).$$

Para x en el j-ésimo intervalo se cumple $|f(x) - f(a_j)| < \epsilon$ y por consiguiente $f(a_j) - \epsilon < f(x) < f(a_j) + \epsilon$. De aquí, para todo $x \in (0,1)$ se tiene

$$\min(f(a_1)-\epsilon, \dots, f(a_N)-\epsilon) < f(x) < \max(f(a_1)+\epsilon, \dots, f(a_N)+\epsilon)$$

y f está acotada superior e inferiormente. ¿$\blacksquare$?

Encuentra el error en la demostración

Toda sucesión $0 < a_n < 1$ *tiene una subsucesión con* $0 < \lim a_{n_k} < 1$.

Dem.: $\boxed{\text{falsa}}$ Consideremos la colección de intervalos $(a_n - 1/(2n), a_n + 1/(2n))$ con $n = 1, 2, \ldots$. Cada uno de ellos tiene longitud $> 1/n$ y $\sum 1/n = \infty$ mientras que la longitud de $(0, 1)$ es 1, por tanto algún punto $l \in (0, 1)$ está cubierto por infinitos intervalos, digamos $(a_{n_k} - 1/(2n_k), a_{n_k} + 1/(2n_k))$, por tanto $\lim a_{n_k} = l \in (0, 1)$. ¿$\blacksquare$?

Un breve preludio

- $Algunos\ teoremas\ funcionan\ en\ determinados\ espacios\ y\ en\ otros\ no$
- Las funciones continuas pueden crecer ilimitadamente mientras se acercan a la frontera sin tocarla. El punto fijo de la aplicación contractiva puede hallarse en la frontera, fuera de nuestro espacio, lo mismo que el límite de una sucesión

Condición

- ¿Cómo podemos paliarlo? ¿Qué condición debemos imponer a nuestro espacio para que nuestros teoremas funcionen?
- Volvamos al teorema de Weierstrass. La demostración de δ, ϵ no funciona porque para cada ϵ los valores de δ son DISTINTOS e INFINITOS.
- Si pudiéramos cubrir nuestro espacio con FINITOS intervalos abiertos, aunque los valores de δ sean distintos, siempre podríamos elegir el mínimo
- Pero si hay INFINITOS intervalos, ¡ay!, la demostración no funciona

Recubrimiento

| Definición. Un **recubrimiento abierto** de X es una colección de abiertos $\{U_i\}$ tal que cualquier $x \in X$ pertenece a alguno de estos abiertos, $x \in U_i$

Espacios compactos

| Definición. Se dice que un espacio topológico es **compacto** si **todo** recubrimiento abierto de *X* admite un subrecubrimiento finito

Comentario

- La palabra “todo” es sustancial
- Cualquier espacio es subespacio del universo, que es un abierto
- Necesitamos que cada uno de los posibles recubrimientos admita un subrecubrimiento finito

¿Son compactos?

- $\mathbb{R}$
- $\{\frac{1}{n}, n \in N\}$
- $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} \cup \{0\}$

¿Son compactos?

- $\mathbb{R}$. NO. El recubrimiento $\bigcup(n-1, n+1), n \in \mathbb{Z}$ no admite subrecubrimiento finito
- $\{\frac{1}{n}, n \in N\}$. NO. El recubrimiento $\bigcup\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+2)n}\right), n \in \mathbb{Z}$ son interevalos disjuntos y por ello no admite subrecubrimiento finito
- $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} \bigcup \{0\}$ SÍ. Si hay un recubrimiento abierto, el 0 está en al menos uno de estos abiertos. Pero a partir de un determinado N todos los elementos del conjunto estarán DENTRO de este abierto. Ahora cogemos este abierto y un abierto por cada $\frac{1}{n}$ que esté fuera

¿Son compactos?

- $[0;1]$
- $(0;1)$

El $(0;1)$ NO es compacto

- Idea: cubrir con intervalos del tipo “matrioska”
- Consideremos el recubrimiento $\bigcup_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n},1)$

El $[0; 1]$ $SÍ$ es compacto. Cualquier intervalo cerrado en un continuo lineal es compacto

- Vamos a ver hasta dónde llegamos con el recubrimiento finito
- Hay un intervalo que contiene el 0, pongamos $[0; \epsilon)$
- IDEA: consideremos el supremo s tal que $[0; s)$ tiene un recubrimiento finito. Sabemos que $s \geq \epsilon > 0$. Queremos demostrar que $s = 1$
- MOMENTO CENTRAL: Ahora demostraremos que siempre podemos “mover” el supremo a la derecha. Supongamos que $s < 1$. Tiene que ser cubierto por un abierto de nuestro recubrimiento, llamémoslo $A(s)$. Por ser abierto, contiene algún intervalo $(s - \delta_1; s + \delta_2)$. Si añadimos $A(s)$ al recubrimiento finito, seguirá siendo finito y hemos aumentado s. Contradicción.

¿Son compactos?

- $[0;1] \times [0;1]$ con la topología del orden
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ en la cofinita
- $(0;1) \cup (3;4)$ en la cofinita

¿Son compactos?

- $[0;1] \times [0;1]$ con la topología del orden: SÍ. Es equivalente al intervalo cerrado $[(0{,}0);(1{,}1)]$
- $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ y $(0;1) \cup (3;4)$en la cofinita. SÍ.

Teorema. Cualquier conjunto en la cofinita es compacto

- Elijamos un recubrimiento infinito de abiertos. El primer conjunto de este recubrimiento YA cubre nuestro espacio, a excepción, quizás, de N puntos. Cada punto de estos debe estar presente al menos en un abierto, por tanto, con N+1 abiertos ya hemos cubierto nuestro espacio

¿Son compactos en SRD?

- $(0,1)$
- $(0,1]$
- $[0,1)$
- $[0,1]$

¿Son compactos en SRD?

- $(0,1)$. No. Considera $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n},\infty)$
- $(0,1]$. No. Lo mismo.
- $[0,1)$. Sí. Cualquier recubrimiento que cubra el 0 cubre el intervalo entero.
- $[0,1]$. Sí. Lo mismo.

Teorema. La **compacidad** (ser compacto) es un invariante topológico

- Si $f: X \to Y$ es una aplicación continua y X es compacto, entonces Y también lo es
- Demostración.
- Elegimos en Y un recubrimiento abierto R y vamos a demostrar que siempre tendrá un subrecubrimiento finito
- Consideremos las preimágenes $f^{-1}(R)$. Constituirán un recubrimiento abierto de X del que podemos elegir un subrecubrimiento finito S por ser compacto
- ¡Ahora mandamos de vuelta este subrecubrimiento a Y! $f(S)$ es un subrecubrimiento finito de R

Teorema. Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto

- Demostración.
- Supongamos que $F \subset K \subset X$ es un subconjunto cerrado del compacto K en el espacio X
- Si tenemos un recubrimiento para F, es fácil construir uno para K.
- ¿Qué abierto hay que añadir?
- Recordemos que F es cerrado
- ¡Bingo! Añadiendo $\mathrm{X} \backslash F$ (abierto) tenemos un recubrimiento para K del que siempre podemos elegir un subrecubrimiento finito. Ahora quitamos $\mathrm{X} \backslash F$

¿Es compacto el conjunto de Cantor?

- Primero veremos que es cerrado. En cada paso su complementario es abierto (quitamos abiertos de un cerrado)
- ¿Por qué es cerrado el conjunto definitivo?
- Es la intersección de los conjuntos (cerrados) que surgen en cada iteración. La intersección infinita de cerrados es un cerrado
- El cerrado subconjunto de un compacto es compacto. QED

Teorema. En los espacios Hausdorff los compactos son separables de cualquier punto exterior

- Dados el compacto $K \subset X$ y un punto $x \in X \backslash K$ existen dos abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U, K \subset V$
- Demostración.
- Como el espacio es Hausdorff, para cualquier

$$y \in K \ \exists \, U_y, V_y \colon x \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$$

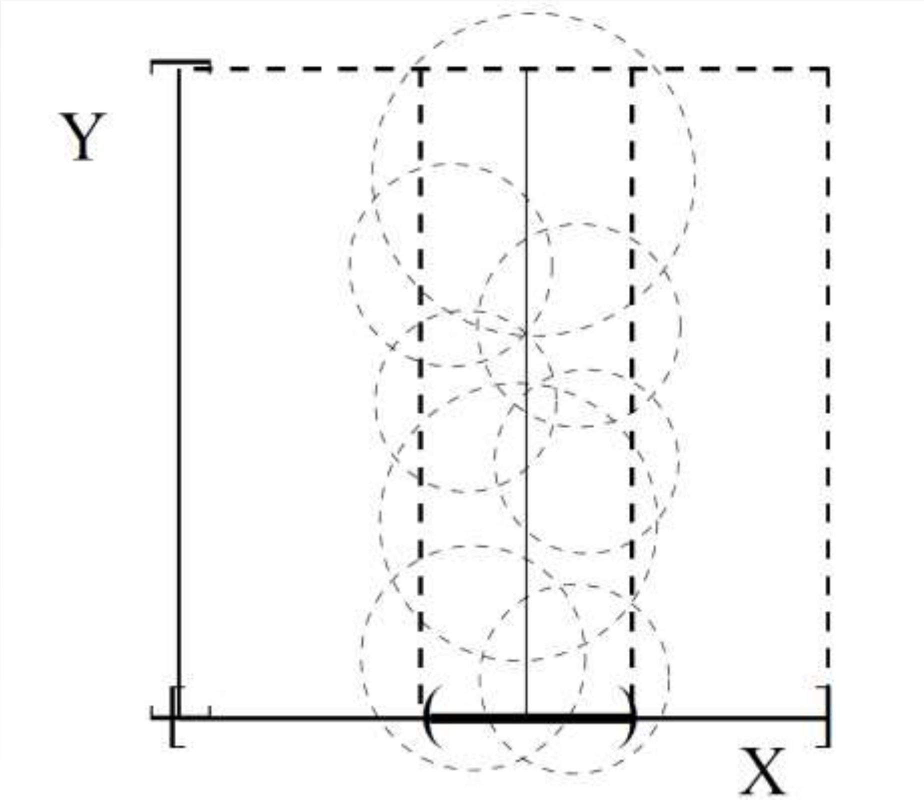
- Los abiertos V_y cubren el compacto K, de modo que existe un subrecubrimiento finito de V_y: $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} V_n$ Ninguno de ellos contiene el punto x, de hecho, $\bigcap_{n=1}^{N} U_n$ contiene x, es abierto y disjunto de $\bigcup_{n=1}^{N} V_n$

Corolario inmediato e importante: los compactos en Hausdorff son cerrados

- Consideremos un punto fuera del compacto. Tiene una bola abierta disjunta del compacto, por tanto, el exterior del compacto es un abierto
- ¿Algún espacio donde los compactos NO tengan que ser cerrados?

Teorema. El producto de compactos es compacto

- Idea: cada “rebanada” $\{x\} \times Y$ es compacta, entonces admite un recubrimiento finito
- Pero este recubrimiento de abiertos tiene cierto “grosor” mínimo, por tanto, cubrimos un tubo $(x-a, x+b) \times Y$
- La proyección de los tubos $(x-a, x+b)$ en X forman un recubrimiento del que podemos sustraer uno finito



Teorema de Heine-Borel.
En $\mathbb{R}^n$ los compactos son cerrados y acotados

- $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, por lo que los compactos son cerrados
- ¿Por qué son acotados? Consideremos un recubrimiento de $\mathbb{R}^n$: $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < n, n \in \mathbb{N}\}$ (bolas abiertas de radio n y centro en el origen de coordenadas)
- Como nuestro compacto tiene un subrecubrimiento finito, se encuentra totalmente en alguna de estas bolas
- Al revés, si tenemos un conjunto cerrado y acotado, se encuentra en un ladrillo n-dimensional (basta considerar sus límites en cada coordenada). Ya sabemos que es compacto como producto de compactos.
- Un subconjunto cerrado de un compacto es compacto

Teorema de los valores extremos

- Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua del compacto X al espacio ordenado Y. Entonces esta función toma valores mínimos y máximos, es decir, $\exists\ a, b \in X: \forall\ x \in X\ f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- Supongamos que la función no tiene máximo, es decir para cada valor de la función hay otro mayor $\forall x\ \exists x'$: $f(x') > f(x)$
- Consideremos el recubrimiento de Y $B_x = (-\infty; f(x))$. Como X es compacto, lo es su imagen. De este recubrimiento podemos extraer un subrecubrimiento finito, la unión de $\cup(-\infty; f(x_n)) = (-\infty; f(x_k))$ (ya que todos estos intervalos forman una matrioska)
- Vemos que todos los valores de f están acotados por un $f(x_k)$. Pero este $f(x_k)$ no pertenece al recubrimiento, por lo que es un recubrimiento que no cubre la imagen de la función por completo. Contradicción.
- El mismo argumento vale para el mínimo, sólo que habrá que ver el recubrimiento $B_x = (f(x); +\infty)$

Teorema de la matrioska

- En un espacio topológico compacto X la secuencia de conjuntos cerrados encajados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$ (matrioskas cerradas) tiene una intersección no nula, es decir, $\bigcap I_n \neq \emptyset$
- Suponemos que es nula. La unión de abiertos $\bigcup X \backslash I_n$ sería un recubrimiento infinito de X del que no podríamos extraer un recubrimiento finito
- Corolario: teorema de Bolzano. Considera un intervalo cerrado y una función con valores opuestos en sus extremos. Partamos el intervalo por la mitad. Si la función se anula en este punto, bien. Si no, escojamos este punto y aquel extremo que tenga el signo opuesto. La matrioska de intervalos cerrados debe tener un punto como intersección en el que la función debe anularse (si no, habría un entorno suyo en el que conservara su signo, lo que es imposible)

Aplicaciones: homeomorfismos

- (a, b) y [a, b] no son homeomorfos
- Círculo abierto y círculo cerrado no son homeomorfos

¿Son homeomorfos?

- $\mathbb{R}\ y\ S^1$
- $\mathbb{R}^n\ y\ S^n$

Teorema fundamental del álgebra

- Cualquier polinomio $p(x)$ de grado n tiene n raíces complejas
- Demostración.
- $CP^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es una compactificación del plano complejo homeomorfa a S^2 (la esfera CON el polo norte). Los entornos abiertos del infinito son complementarios a los cerrados
- Nuestro polinomio se puede definir en el infinito $p(\infty) = \infty$
- Es una función continua, abierta y cerrada. Por tanto, la imagen de CP^1 (compacto, cerrado y abierto) tiene que ser un subconjunto cerrado y abierto a la vez, que solamente puede ser CP^1.
- Entonces, como nuestro polinomio es sobreyectivo, $p(x) = 0$ al menos en un punto