Soluciones de los Ejercicios de Interpolación de Funciones

(Taylor, Maclaurin y Lagrange)

Índice

Ejercicio 1

Queremos aproximar
$$\sqrt{1{,}2}.$$
Para ello consideramos la función
$$g(x) = \sqrt{1+2x},$$
de modo que $g(0{,}1) = \sqrt{1{,}2}$. Buscaremos su polinomio de Maclaurin de cuarto grado.

1. Derivadas sucesivas de $g(x)$

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1+2x)^{1/2},\\
g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+2x}},\\
g''(x) &= -\frac{1}{(1+2x)^{3/2}},\\
g^{(3)}(x) &= \frac{3}{(1+2x)^{5/2}},\\
g^{(4)}(x) &= -\frac{15}{(1+2x)^{7/2}},\\
g^{(5)}(x) &= \frac{105}{(1+2x)^{9/2}}.
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$:

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 1, \quad g''(0) = -1, \quad g^{(3)}(0) = 3, \quad g^{(4)}(0) = -15.$$

2. Polinomio de Maclaurin de cuarto grado

$$P_4(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Sustituyendo valores:

$$P_4(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8}.$$

Evaluando en $x = 0{,}1$:

$$P_4(0{,}1) = 1 + 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{2} - \frac{5(0{,}0001)}{8} = \boxed{1{,}0954375.}$$

3. Cálculo del error

El resto de Taylor (forma de Lagrange) es:

$$R_4(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!}x^5, \qquad \xi \in (0, x).$$

Como

$$g^{(5)}(x) = \frac{105}{(1+2x)^{9/2}} \quad \Rightarrow \quad |g^{(5)}(\xi)| \leq 105 \text{ para } 0 \leq \xi \leq 0{,}1,$$

entonces:

$$|R_4(0{,}1)| \leq \frac{105}{5!}(0{,}1)^5 = \frac{105}{120} \times 10^{-5} = \boxed{8{,}75 \times 10^{-6}.}$$

4. Resultado final

$$\sqrt{1{,}2} = g(0{,}1) = P_4(0{,}1) + R_4(0{,}1) \in \left[1{,}0954375,\ 1{,}0954375 + 8{,}75 \times 10^{-6}\right].$$

El valor real es:

$$\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}0954451,$$

por lo que el error real es $|R| \approx 7{,}6 \times 10^{-6}$, dentro de la cota estimada.

Ejercicio 2

Dada

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 76x^2 - 78x + 11,$$

calculamos el polinomio de Taylor de grado 5 en torno a $c = 1$. Como f es un polinomio de grado 5, su polinomio de Taylor de orden 5 coincide con f.

1. Derivadas en $x = 1$

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 - 3 - 1 + 76 - 78 + 11 = 6,\\
f'(x) &= 5x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 152x - 78 \;\Rightarrow\; f'(1) = 4,\\
f''(x) &= 20x^3 - 36x^2 - 6x + 152 \;\Rightarrow\; f''(1) = 10,\\
f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 72x - 6 \;\Rightarrow\; f^{(3)}(1) = -18,\\
f^{(4)}(x) &= 120x - 72 \;\Rightarrow\; f^{(4)}(1) = 48,\\
f^{(5)}(x) &= 120 \;\Rightarrow\; f^{(5)}(1) = 120.
\end{aligned}$$

2. Taylor en torno a $c = 1$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5\\
&= 6 + 4(x-1) + 5(x-1)^2 - 3(x-1)^3 + 2(x-1)^4 + (x-1)^5.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Puntos de interpolación: $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 6)$, $(x_3, y_3) = (4, 4)$, $(x_4, y_4) = (5, -1)$. Usamos la forma de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i\, L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Como solo se pide $P(3)$, evaluamos directamente las bases L_i en $x = 3$:

$$\begin{aligned}
L_1(3) &= \frac{(3-2)(3-4)(3-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} = -\frac{1}{6},\\
L_2(3) &= \frac{(3-1)(3-4)(3-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} = \frac{2}{3},\\
L_3(3) &= \frac{(3-1)(3-2)(3-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} = \frac{2}{3},\\
L_4(3) &= \frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{P(3) = y_1 L_1(3) + y_2 L_2(3) + y_3 L_3(3) + y_4 L_4(3) = 1\left(-\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{2}{3}\right) + (-1)\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{20}{3}.}$$

(Opcional) El polinomio explícito simplificado es

$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{19}{6}x^2 + \frac{40}{3}x - \frac{28}{3},$$

y verifica $P(3) = \frac{20}{3}$.

Ejercicio 4

Tenemos $f(x) = \ln(1 + ax) + b\,x\sin(cx) + d$ y $P_3(x) = 2x - 3x^2 + \frac{8}{3}x^3$.

a) Identificación de a, b, c, d mediante Maclaurin

Como P_3 no tiene término independiente, $f(0) = d = 0$.
Derivadas:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a}{1 + ax} + b\sin(cx) + bc\,x\cos(cx),\\
f''(x) &= -\frac{a^2}{(1 + ax)^2} + 2bc\,\cos(cx) - bc^2\,x\sin(cx),\\
f^{(3)}(x) &= \frac{2a^3}{(1 + ax)^3} - 3bc^2\sin(cx) - bc^3\,x\cos(cx).
\end{aligned}$$

Condiciones de Maclaurin:

$$\begin{aligned}
f'(0) = 2 &\Rightarrow a = 2,\\
\frac{f''(0)}{2!} = -3 &\Rightarrow f''(0) = -6 \Rightarrow -a^2 + 2bc = -6 \Rightarrow bc = -1,\\
\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{8}{3} &\Rightarrow f^{(3)}(0) = 16 \Rightarrow 2a^3 = 16 \Rightarrow a = 2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{a = 2, \quad d = 0, \quad bc = -1 \ (b, c \neq 0).}$$

b) Resto de Lagrange del orden 3

Necesitamos $f^{(4)}(x)$. Derivando $f^{(3)}(x)$:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6a^4}{(1 + ax)^4} - 4bc^3\cos(cx) + bc^4\,x\sin(cx).$$

Con $a = 2$ y $bc = -1$ resulta

$$\boxed{f^{(4)}(x) = -\frac{96}{(1 + 2x)^4} + 4c^2\cos(cx) - c^3x\sin(cx).}$$

El resto de Lagrange para el Maclaurin de grado 3 es

$$\boxed{R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4 = \frac{x^4}{24}\left[-\frac{96}{(1 + 2\xi)^4} + 4c^2\cos(c\xi) - c^3\xi\sin(c\xi)\right], \quad \xi \in (0, x).}$$

Ejercicio 5

Queremos

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\Big(\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x\Big)^{10}}{\Big(e^x - x - 1\Big)^{15}}.$$

Maclaurin necesarios

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5), \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4).$$

Por tanto

$$\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} - x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5) = x^3\Big(\frac{1}{3} - \frac{x}{4} + O(x^2)\Big),$$

y

$$e^x - x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) = x^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + O(x^2)\Big).$$

Cálculo del límite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \frac{(x^3)^{10}\Big(\frac{1}{3} - \frac{x}{4} + O(x^2)\Big)^{10}}{(x^2)^{15}\Big(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + O(x^2)\Big)^{15}} \\ &= \frac{1/3^{10}}{1/2^{15}} = \boxed{\frac{2^{15}}{3^{10}}}. \end{aligned}$$